Arbitraje, Modelo Binomial, Medida de Martingala y Teoremas Fundamentales

Iván González Cuesta

1. Arbitraje

- **Definición**: Una oportunidad de arbitraje es una estrategia de inversión con:
  - Coste inicial nulo o negativo.
  - Valor final no negativo en todos los escenarios.
  - Valor final estrictamente positivo en al menos un escenario.
- **Razonamiento**: La ausencia de arbitraje es un principio fundamental de los mercados financieros. Si existiera arbitraje, los agentes explotarían estas oportunidades hasta que los precios se ajusten eliminando el arbitraje.

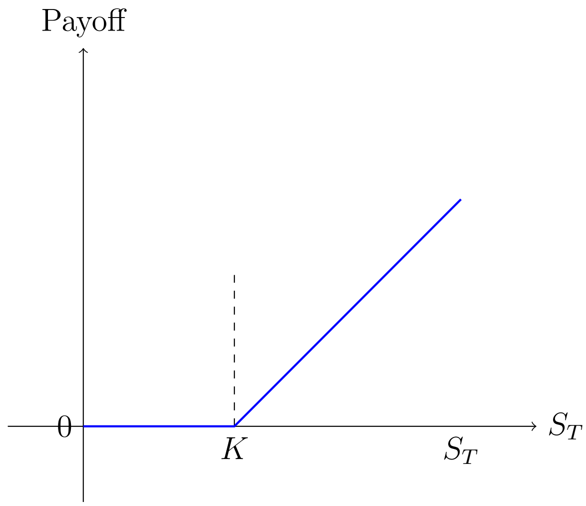
2. Opciones Financieras: Teoría y Terminología

- **Opción**: Contrato que otorga el derecho, pero no la obligación, de comprar (call) o vender (put) un activo a un precio acordado (strike) en una fecha futura (vencimiento).
- **Elementos principales**:
  - S_t: Precio del activo subyacente.
  - K: Precio de ejercicio o strike.
  - T: Tiempo de vencimiento.
  - r: Tasa libre de riesgo.

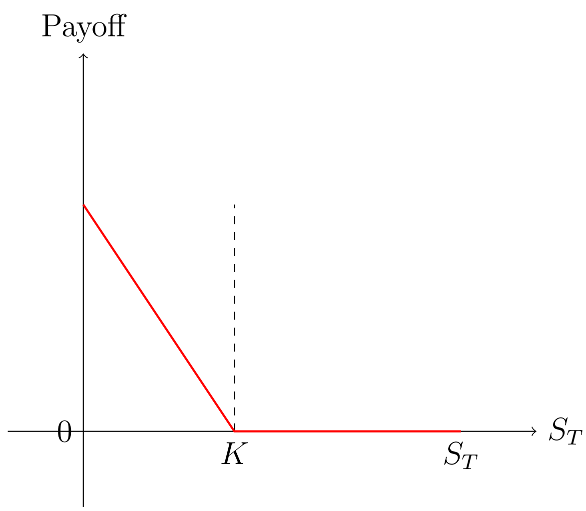
- σ: Volatilidad del activo subyacente.

- **Gráficos de payoff**:

Payoff Opción Call



Payoff Opción Put



- **Interpretación**: Los gráficos muestran cómo varía el beneficio del comprador según el precio del subyacente al vencimiento. La línea azul representa una call y la roja una put.

3. Modelo Binomial

Consideremos el siguiente escenario:

- Precio inicial del activo: $S_0 = 100$.
- Factor de subida: $u = 1.2$ (el precio sube un 20%).
- Factor de bajada: $d = 0.8$ (el precio baja un 20%).
- Tasa libre de riesgo: $r = 0.05$ (5%).
- Strike de la opción Call: $K = 100$.

Paso 1: Cálculo de los posibles precios al vencimiento

El precio del activo subyacente puede evolucionar en un solo período a:

$$\text{Escenario de subida: } S_u = S_0 \cdot u = 100 \cdot 1.2 = 120$$

$$\text{Escenario de bajada: } S_d = S_0 \cdot d = 100 \cdot 0.8 = 80$$

Paso 2: Payoffs de la opción Call en cada escenario

- En el escenario de subida:

$$C_u = \max(S_u - K, 0) = \max(120 - 100, 0) = 20$$

- En el escenario de bajada:

$$C_d = \max(S_d - K, 0) = \max(80 - 100, 0) = 0$$

Paso 3: Cálculo de la probabilidad neutral al riesgo q

$$q = \frac{(1 + r) - d}{u - d} = \frac{1.05 - 0.8}{1.2 - 0.8} = \frac{0.25}{0.4} = 0.625$$

- Esta probabilidad q es la ajustada por el mercado para que los precios sean consistentes y sin arbitraje.

Paso 4: Valor actual de la opción usando la medida de martingala

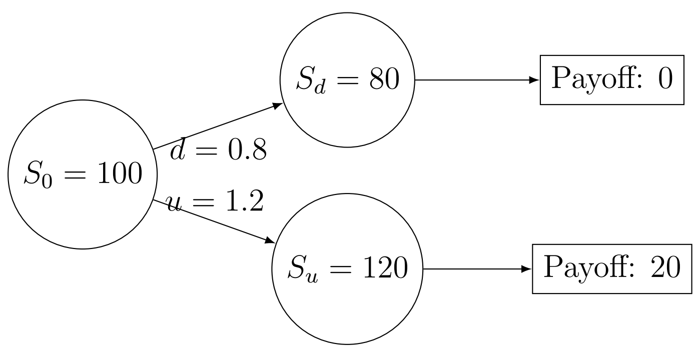
$$C_0 = \frac{1}{1+r}(qC_u + (1-q)C_d)$$

$$C_0 = \frac{1}{1.05}(0.625 \cdot 20 + 0.375 \cdot 0) = \frac{1}{1.05}(12.5) = 11.9048$$

Paso 5: Interpretación

- El precio justo de la opción Call, calculado bajo la hipótesis de ausencia de arbitraje y mediante replicación del portafolio, es aproximadamente \$11.90.

- Este valor refleja la expectativa del pago futuro, descontado a valor presente con la tasa libre de riesgo y ponderado por la probabilidad neutral al riesgo.



4. Ejemplo y explicacion A.Bueno Guerrero

El modelo matemático más simple bajo el cual se puede obtener un precio para una opción, bajo el supuesto de no arbitraje, es el **modelo binomial**. Ilustraremos este modelo con un ejemplo numérico.

Supongamos que existen dos activos: una acción y una cuenta bancaria, cuyo valor puede cambiar entre dos instantes de tiempo, el instante inicial (hoy) y el instante final (mañana). La cuenta bancaria paga un interés del 10% por periodo, llamado *tipo de interés libre de riesgo*, y que es conocido desde el principio.

Si suponemos que en el instante inicial tenemos 1 € en la cuenta, desde dicho instante sabremos con seguridad que el valor de la cuenta en el periodo final será de 1,10 €. Así pues, para saber a cuánto ascenderá el valor en el periodo final de una cuenta en la que hemos introducido una determinada cantidad inicial, bastará con multiplicar esa cantidad por 1,1. También es posible realizar la operación inversa, es decir, calcular qué cantidad inicial habrá que depositar en la cuenta para obtener una determinada cantidad final. Para ello hay que dividir la cantidad final deseada por 1,1.

A diferencia de lo que ocurre con la cuenta bancaria, que es determinista, supondremos que el precio de la acción sigue un proceso estocástico, con un valor inicial de 100 € y sólo dos posibles valores finales, resultantes de multiplicar el valor inicial por 1,25 (un incremento del 25%) en el caso de un aumento del precio de la acción y por 0,8 (un decremento del 20%) en el caso de una disminución.

A día de hoy, no podremos saber con certeza cuál de los dos valores tomará mañana la acción, pero sí conoceremos la medida de probabilidad que rige el movimiento de los precios en el mercado, la *medida de probabilidad real*, que representaremos por la letra P. En este ejemplo dicha medida de probabilidad vendrá descrita por los siguientes valores:

Precio	$+25\%$	-20%
P	0,9	0,1

Consideremos ahora una opción de compra (call) sobre la acción, con vencimiento en el periodo final y un precio de ejercicio de 110 €. Nuestro objetivo es encontrar un precio para la opción en el instante inicial compatible con la ausencia de oportunidades de arbitraje.

Para ello construiremos una *cartera réplica* para la opción. Esta cartera estará formada por dinero en la cuenta bancaria y acciones, de forma que sus valores en los dos escenarios posibles en el instante final coincidan con los valores del pago final de la opción.

Los pagos finales de la opción son:

$$125 - 110 = 15 \quad \text{para el precio final de } 125$$

y

$$0 \quad \text{para el valor final de } 80$$

ya que este está por debajo del precio de ejercicio (110 €).

Las cantidades iniciales de dinero en la cuenta bancaria y de acciones en la cartera serán solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 1{,}1x + 125y = 15 \\ 1{,}1x + 80y = 0 \end{cases}$$

donde x y y son, respectivamente, las cantidades iniciales de dinero en la cuenta bancaria y de acciones en la cartera réplica.

Resolviendo, obtenemos:

$$x = 24{,}24\,, \quad y = -0{,}3\,.$$

Por la discusión anterior, el valor de la opción en el instante inicial que garantiza que no existen posibilidades de arbitraje tiene que coincidir con el valor en el instante inicial de su cartera réplica, que será:

$$1{,}1 \times 24{,}24 + 100 \times (-0{,}3) = 9{,}09\,.$$

Nótese que el precio de no arbitraje de la opción, obtenido a partir de la cartera réplica, es independiente de las probabilidades de que el precio suba o baje, y también es independiente del precio inicial de la acción.

En un primer momento, uno podría pensar que la forma adecuada de calcular el valor de la opción en el momento inicial sería obtener el valor esperado de sus pagos finales con las probabilidades proporcionadas y actualizarlo con el tipo de interés de mercado. De esta forma obtendríamos el valor:

$$0{,}9 \times 15 + 0{,}1 \times 0 = 13{,}5\,,$$

y actualizando (dividiendo por 1,1):

$$\frac{13{,}5}{1{,}1} = 12{,}27\,.$$

Sin embargo, este valor no es compatible con la ausencia de posibilidades de arbitraje.

Para verlo, actuaremos de forma parecida a lo hecho anteriormente para construir una oportunidad de arbitraje:

- En el momento inicial:

- Tomar una posición corta en la opción y venderla a su precio de mercado de 12,27 €.
- Tomar una posición larga en la cartera réplica consistente en comprarla por 9,09 €.

- En el momento final:
  - Si la acción acaba valiendo 125 €: la cartera réplica acabará valiendo 15 € y con esa cantidad cierro la posición corta.
  - Si la acción acaba valiendo 80 €: la cartera réplica acabará valiendo 0 €, con lo que se cierra la posición sin desembolsar dinero.

Como es posible apreciar, hemos obtenido un beneficio neto de

$$12{,}27 - 9{,}09 = 3{,}18$$

sin posibilidad de pérdida, es decir, hemos construido una oportunidad de arbitraje.

Nota: Estamos suponiendo implícitamente (como es habitual en el modelo binomial) que las posiciones cortas están permitidas y que es posible tener en la cartera cantidades fraccionarias de los activos.

4. Medida de Probabilidad Equivalente de Martingala

- La medida $\mathbb{Q}$ ajusta las probabilidades de los escenarios futuros para reflejar un mundo libre de arbitraje.
- **Significado**: Bajo $\mathbb{Q}$, los precios descontados de los activos siguen una martingala, es decir, su valor esperado es el valor actual:

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}, \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t$$

- La medida $\mathbb{Q}$ no describe la probabilidad real, sino una probabilidad "ajustada al riesgo" que garantiza que los precios sean consistentes y sin arbitraje.

5. Propiedades de la Medida de Martingala

- Si hay ausencia de arbitraje, existe al menos una medida $\mathbb{Q}$ (primer teorema fundamental).
- Si el mercado es completo (todos los derivados se pueden replicar), esta medida es única (segundo teorema fundamental).
- La medida $\mathbb{Q}$ permite valorar cualquier derivado como:

$$C_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C_T]$$

6. Teoremas Fundamentales de la Valoración de Activos

Primer Teorema Fundamental

- **Enunciado**: Un mercado es libre de arbitraje si y solo si existe al menos una medida de probabilidad equivalente de martingala $\mathbb{Q}$.
- **Explicación**: Si existiera una forma de obtener ganancias sin riesgo (arbitraje), el mercado no podría tener consistencia. La medida $\mathbb{Q}$ elimina esta posibilidad.

0.1 Interpretación matemática del primer teorema fundamental del precio sin arbitraje

Sea un mercado con un activo riesgoso cuyo precio en tiempo t está dado por S_t, y un activo libre de riesgo (numeraire) con precio B_t, con $B_0 = 1$ y evolución determinista

$$B_t = e^{rt},$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo constante.

Definimos el precio descontado del activo riesgoso como

$$\tilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t}.$$

Bajo la medida real $\mathbb{P}$, el activo riesgoso S_t suele seguir un proceso con deriva (drift), por ejemplo un movimiento geométrico browniano con

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}},$$

donde $\mu \neq r$ es la tasa de crecimiento esperada bajo $\mathbb{P}$, $\sigma > 0$ la volatilidad y $W_t^{\mathbb{P}}$ un movimiento browniano bajo $\mathbb{P}$.

Sin embargo, el **primer teorema fundamental del precio sin arbitraje** afirma que:

> Si no existen oportunidades de arbitraje, existe una medida de probabilidad equivalente $\mathbb{Q}$, llamada *medida equivalente martingala*, bajo la cual el proceso descontado $\tilde{S}_t$ es una martingala.

Matemáticamente, esto significa que bajo $\mathbb{Q}$,

$$\tilde{S}_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{S}_T \mid \mathcal{F}_t\right], \quad \forall t \leq T,$$

y por lo tanto el proceso descontado $\tilde{S}_t$ no tiene deriva bajo $\mathbb{Q}$.

De esta forma, la dinámica bajo $\mathbb{Q}$ es

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}},$$

donde $W_t^{\mathbb{Q}}$ es un movimiento browniano bajo $\mathbb{Q}$. Obsérvese que el drift μ ha sido reemplazado por la tasa libre de riesgo r.

Esta construcción permite valorar derivados financieros como opciones mediante el valor esperado bajo $\mathbb{Q}$ descontado, garantizando ausencia de arbitraje:

$$V_t = B_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_T}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right].$$

En conclusión, es fundamental trabajar con los precios descontados para que el proceso relevante tenga drift cero bajo la medida equivalente martingala, lo cual es un requisito para la valoración arbitrage-free en mercados financieros.

Segundo Teorema Fundamental

- **Enunciado**: Si el mercado es completo, existe una única medida de martingala $\mathbb{Q}$.
- **Explicación**: La completitud significa que podemos replicar cualquier derivado con activos existentes. Esto asegura precios únicos y sin inconsistencias.

Apendix I. Cambio de medida, derivación paso a paso

1. Modelo bajo la medida real $\mathbb{P}$

El precio del activo S_t sigue la ecuación diferencial estocástica (SDE):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}},$$

donde

- μ es la deriva real,
- σ la volatilidad,
- $W_t^{\mathbb{P}}$ es un movimiento browniano estándar bajo la medida real $\mathbb{P}$.

2. Precio descontado y martingala bajo medida equivalente

Definimos el precio descontado

$$\tilde{S}_t := e^{-rt} S_t,$$

donde r es el tipo libre de riesgo.

Para evitar arbitrajes y valorar derivados, el proceso $\tilde{S}_t$ debe ser una martingala bajo alguna medida equivalente $\mathbb{Q}$, llamada **medida riesgo-neutral** o de martingala equivalente.

3. Aplicamos Itô a $\tilde{S}_t$

Por la fórmula de Itô,

$$d\tilde{S}_t = d\left(e^{-rt} S_t\right) = -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t.$$

Sustituyendo dS_t,

$$d\tilde{S}_t = -r\tilde{S}_t dt + e^{-rt}\left(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}}\right) = (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t^{\mathbb{P}}.$$

Bajo $\mathbb{P}$, la deriva del proceso descontado es $(\mu - r)\tilde{S}_t$, que en general no es cero.

4. Objetivo: eliminar la deriva y obtener una martingala

Queremos encontrar una medida $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$ bajo la cual

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t^{\mathbb{Q}},$$

es decir, con deriva cero.

5. Teorema de Girsanov

El Teorema de Girsanov nos permite cambiar la medida probabilística de modo que

$$W_t^{\mathbb{Q}} := W_t^{\mathbb{P}} + \int_0^t \theta_s ds$$

sea un movimiento browniano bajo $\mathbb{Q}$, donde θ_t es un proceso previsible.

En nuestro caso, para que el proceso descontado sea martingala bajo $\mathbb{Q}$, elegimos

$$\theta := \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

Entonces, la densidad de Radon-Nikodym que define $\mathbb{Q}$ respecto a $\mathbb{P}$ es

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\theta W_t^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\theta^2 t\right).$$

6. Cambio de medida en el movimiento browniano

Bajo $\mathbb{Q}$,

$$W_t^{\mathbb{Q}} := W_t^{\mathbb{P}} + \theta t = W_t^{\mathbb{P}} + \frac{\mu - r}{\sigma} t,$$

es un movimiento browniano estándar.
Por tanto,

$$dW_t^{\mathbb{P}} = dW_t^{\mathbb{Q}} - \theta dt = dW_t^{\mathbb{Q}} - \frac{\mu - r}{\sigma} dt.$$

7. Reescribimos el SDE bajo $\mathbb{Q}$

Sustituyendo en el SDE original,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}} = \mu S_t dt + \sigma S_t \left(dW_t^{\mathbb{Q}} - \frac{\mu - r}{\sigma} dt \right),$$

$$dS_t = (\mu - (\mu - r)) S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}} = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Ahora, bajo $\mathbb{Q}$, la deriva es r.

8. Solución explícita del SDE bajo $\mathbb{Q}$

El SDE

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

es un proceso geométrico Browniano clásico, cuya solución explícita es

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}} \right\}.$$

Demostración:
Tomamos logaritmo $X_t := \ln S_t$. Por Itô,

$$dX_t = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (dS_t)^2.$$

Como $dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}$,

$$(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 (dW_t^{\mathbb{Q}})^2 = \sigma^2 S_t^2 dt.$$

Por tanto,

$$dX_t = \frac{1}{S_t}\left(rS_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Integrando,

$$X_t = X_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}},$$

$$S_t = e^{X_t} = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}}\right\}.$$

—

Resumen

- El proceso S_t bajo la medida real $\mathbb{P}$ tiene deriva μ.
- Cambiando a la medida riesgo-neutral $\mathbb{Q}$ mediante el Teorema de Girsanov, el movimiento browniano cambia para eliminar la prima de riesgo.
- Bajo $\mathbb{Q}$, el proceso S_t tiene deriva igual al tipo libre de riesgo r.
- Esto asegura que el precio descontado $e^{-rt}S_t$ es una martingala bajo $\mathbb{Q}$.
- Finalmente, la solución explícita es un movimiento geométrico browniano con deriva r.

Apendix II. Densidad de Radon-Nikodym y Martingalas en Valoración Financiera

1. Densidad de Radon-Nikodym

Sea un espacio de probabilidad con dos medidas $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$, donde $\mathbb{Q}$ es absolutamente continua con respecto a $\mathbb{P}$ (denotado $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$).

Entonces existe una función no negativa Z, llamada *densidad de Radon-Nikodym*, tal que para cualquier evento A:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega).$$

Es común escribir:

$$Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}},$$

y cumple la propiedad:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = 1.$$

En contexto estocástico, $Z_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t}$ es un proceso que permite cambiar la medida $\mathbb{P}$ por $\mathbb{Q}$.

2. ¿Por qué la deriva debe ser cero para que un proceso sea martingala?

Un proceso estocástico M_t es *martingala* bajo la medida $\mathbb{Q}$ si

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s, \quad \forall s < t.$$

Si consideramos un proceso de Itô

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

entonces el valor esperado condicional para $t > s$ es

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s + \mathbb{E}\left[\int_s^t \mu_u du \mid \mathcal{F}_s\right].$$

Si $\mu_t \neq 0$, el proceso tiene una tendencia y no es martingala.
Para que X_t sea martingala, debe ser

$$\mu_t = 0,$$

es decir, no debe tener deriva.

3. Aplicación en valoración financiera

El precio de un activo S_t bajo la medida real $\mathbb{P}$ se modela como

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}}.$$

Para valorar derivados, trabajamos con la medida riesgo-neutral $\mathbb{Q}$, en la que descontamos al tipo libre de riesgo r. Definimos el precio descontado:

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t.$$

Aplicando Itô,

$$d\tilde{S}_t = -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t = e^{-rt} S_t(\mu - r)dt + e^{-rt} \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}}.$$

Para que $\tilde{S}_t$ sea martingala bajo $\mathbb{Q}$, su deriva debe desaparecer:

$$\mu - r \quad \to \quad 0.$$

Esto se consigue mediante el **cambio de medida** de $\mathbb{P}$ a $\mathbb{Q}$ usando la densidad de Radon-Nikodym, ajustando el movimiento browniano con el **Teorema de Girsanov**.

4. Teorema de Girsanov (esquema)

Sea $W_t^{\mathbb{P}}$ un movimiento browniano bajo $\mathbb{P}$. Sea θ_t un proceso adaptado con ciertas condiciones de integrabilidad. Definimos el proceso

$$Z_t = \exp\left(- \int_0^t \theta_s dW_s^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right).$$

Entonces, Z_t es la densidad de Radon-Nikodym que define una nueva medida $\mathbb{Q}$ tal que el proceso

$$W_t^{\mathbb{Q}} := W_t^{\mathbb{P}} + \int_0^t \theta_s ds$$

es un movimiento browniano bajo $\mathbb{Q}$.

Al elegir

$$\theta_t = \frac{\mu - r}{\sigma},$$

se transforma la ecuación de S_t en

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}},$$

haciendo que el precio descontado $\tilde{S}_t$ sea martingala bajo $\mathbb{Q}$.

5. Ejemplo concreto

Consideremos

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}},$$

con $\mu = 0.1$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$.
Definimos

$$\theta = \frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{0.1 - 0.05}{0.2} = 0.25.$$

La densidad de Radon-Nikodym es

$$Z_t = \exp\left(-0.25 W_t^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}(0.25)^2 t\right).$$

Bajo la medida $\mathbb{Q}$, el movimiento browniano es

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} + 0.25t,$$

y el precio S_t sigue

$$dS_t = 0.05 S_t dt + 0.2 S_t dW_t^{\mathbb{Q}},$$

por lo que el precio descontado $\tilde{S}_t = e^{-0.05t} S_t$ es martingala bajo $\mathbb{Q}$.