Arbitraje, Modelo Binomial, Medida de Martingala y Teoremas Fundamentales

Iván González Cuesta

1. Arbitraje

- **Definición**: Una oportunidad de arbitraje es una estrategia de inversión con:
  - Coste inicial nulo o negativo.
  - Valor final no negativo en todos los escenarios.
  - Valor final estrictamente positivo en al menos un escenario.
- **Razonamiento**: La ausencia de arbitraje es un principio fundamental de los mercados financieros. Si existiera arbitraje, los agentes explotarían estas oportunidades hasta que los precios se ajusten eliminando el arbitraje.

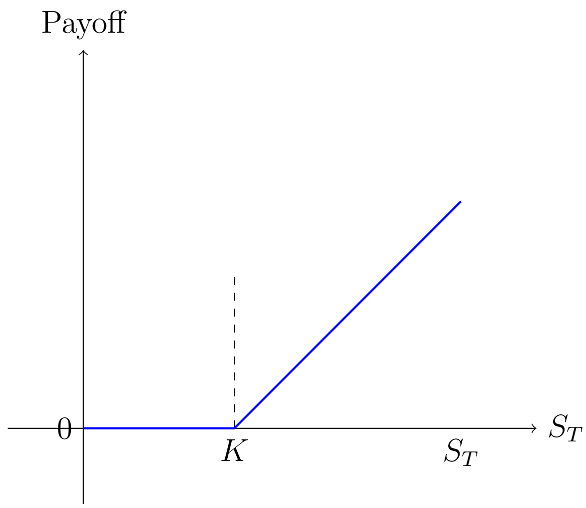
2. Opciones Financieras: Teoría y Terminología

- **Opción**: Contrato que otorga el derecho, pero no la obligación, de comprar (call) o vender (put) un activo a un precio acordado (strike) en una fecha futura (vencimiento).
- **Elementos principales**:
  - S_t: Precio del activo subyacente.
  - K: Precio de ejercicio o strike.
  - T: Tiempo de vencimiento.
  - r: Tasa libre de riesgo.

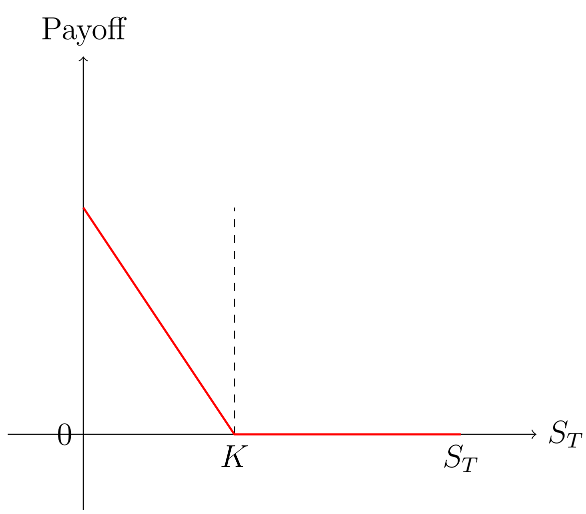
  - σ: Volatilidad del activo subyacente.

- **Gráficos de payoff**:

Payoff Opción Call



Payoff Opción Put



- **Interpretación**: Los gráficos muestran cómo varía el beneficio del comprador según el precio del subyacente al vencimiento. La línea azul representa una call y la roja una put.

3. Modelo Binomial

Consideremos el siguiente escenario:

- Precio inicial del activo: $S_0 = 100$.
- Factor de subida: $u = 1.2$ (el precio sube un 20%).
- Factor de bajada: $d = 0.8$ (el precio baja un 20%).
- Tasa libre de riesgo: $r = 0.05$ (5%).
- Strike de la opción Call: $K = 100$.

Paso 1: Cálculo de los posibles precios al vencimiento

El precio del activo subyacente puede evolucionar en un solo período a:

$$\text{Escenario de subida: } S_u = S_0 \cdot u = 100 \cdot 1.2 = 120$$

$$\text{Escenario de bajada: } S_d = S_0 \cdot d = 100 \cdot 0.8 = 80$$

Paso 2: Payoffs de la opción Call en cada escenario

- En el escenario de subida:

$$C_u = \max(S_u - K, 0) = \max(120 - 100, 0) = 20$$

- En el escenario de bajada:

$$C_d = \max(S_d - K, 0) = \max(80 - 100, 0) = 0$$

Paso 3: Cálculo de la probabilidad neutral al riesgo q

$$q = \frac{(1 + r) - d}{u - d} = \frac{1.05 - 0.8}{1.2 - 0.8} = \frac{0.25}{0.4} = 0.625$$

- Esta probabilidad q es la ajustada por el mercado para que los precios sean consistentes y sin arbitraje.

Paso 4: Valor actual de la opción usando la medida de martingala

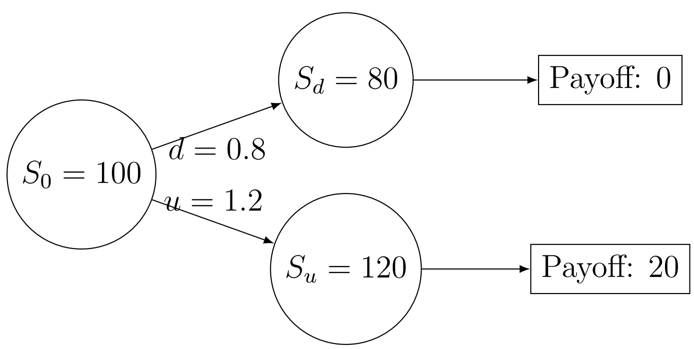
$$C_0 = \frac{1}{1+r}(qC_u + (1-q)C_d)$$

$$C_0 = \frac{1}{1.05}(0.625 \cdot 20 + 0.375 \cdot 0) = \frac{1}{1.05}(12.5) = 11.9048$$

Paso 5: Interpretación

- El precio justo de la opción Call, calculado bajo la hipótesis de ausencia de arbitraje y mediante replicación del portafolio, es aproximadamente \$11.90.

- Este valor refleja la expectativa del pago futuro, descontado a valor presente con la tasa libre de riesgo y ponderado por la probabilidad neutral al riesgo.



4. Ejemplo y explicacion A.Bueno Guerrero

El modelo matemático más simple bajo el cual se puede obtener un precio para una opción, bajo el supuesto de no arbitraje, es el **modelo binomial**. Ilustraremos este modelo con un ejemplo numérico.

Supongamos que existen dos activos: una acción y una cuenta bancaria, cuyo valor puede cambiar entre dos instantes de tiempo, el instante inicial (hoy) y el instante final (mañana). La cuenta bancaria paga un interés del 10% por periodo, llamado *tipo de interés libre de riesgo*, y que es conocido desde el principio.

Si suponemos que en el instante inicial tenemos 1 € en la cuenta, desde dicho instante sabremos con seguridad que el valor de la cuenta en el periodo final será de 1,10 €. Así pues, para saber a cuánto ascenderá el valor en el periodo final de una cuenta en la que hemos introducido una determinada cantidad inicial, bastará con multiplicar esa cantidad por 1,1. También es posible realizar la operación inversa, es decir, calcular qué cantidad inicial habrá que depositar en la cuenta para obtener una determinada cantidad final. Para ello hay que dividir la cantidad final deseada por 1,1.

A diferencia de lo que ocurre con la cuenta bancaria, que es determinista, supondremos que el precio de la acción sigue un proceso estocástico, con un valor inicial de 100 € y sólo dos posibles valores finales, resultantes de multiplicar el valor inicial por 1,25 (un incremento del 25%) en el caso de un aumento del precio de la acción y por 0,8 (un decremento del 20%) en el caso de una disminución.

A día de hoy, no podremos saber con certeza cuál de los dos valores tomará mañana la acción, pero sí conoceremos la medida de probabilidad que rige el movimiento de los precios en el mercado, la *medida de probabilidad real*, que representaremos por la letra P. En este ejemplo dicha medida de probabilidad vendrá descrita por los siguientes valores:

Precio	+25%	−20%
P	0,9	0,1

Consideremos ahora una opción de compra (call) sobre la acción, con vencimiento en el periodo final y un precio de ejercicio de 110 €. Nuestro objetivo es encontrar un precio para la opción en el instante inicial compatible con la ausencia de oportunidades de arbitraje.

Para ello construiremos una *cartera réplica* para la opción. Esta cartera estará formada por dinero en la cuenta bancaria y acciones, de forma que sus valores en los dos escenarios posibles en el instante final coincidan con los valores del pago final de la opción.

Los pagos finales de la opción son:

$$125 - 110 = 15 \quad \text{para el precio final de } 125$$

y

$$0 \quad \text{para el valor final de } 80$$

ya que este está por debajo del precio de ejercicio (110 €).

Las cantidades iniciales de dinero en la cuenta bancaria y de acciones en la cartera serán solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 1{,}1x + 125y = 15 \\ 1{,}1x + 80y = 0 \end{cases}$$

donde x y y son, respectivamente, las cantidades iniciales de dinero en la cuenta bancaria y de acciones en la cartera réplica.

Resolviendo, obtenemos:

$$x = 24{,}24\,, \quad y = -0{,}3\,.$$

Por la discusión anterior, el valor de la opción en el instante inicial que garantiza que no existen posibilidades de arbitraje tiene que coincidir con el valor en el instante inicial de su cartera réplica, que será:

$$1{,}1 \times 24{,}24 + 100 \times (-0{,}3) = 9{,}09\,.$$

Nótese que el precio de no arbitraje de la opción, obtenido a partir de la cartera réplica, es independiente de las probabilidades de que el precio suba o baje, y también es independiente del precio inicial de la acción.

En un primer momento, uno podría pensar que la forma adecuada de calcular el valor de la opción en el momento inicial sería obtener el valor esperado de sus pagos finales con las probabilidades proporcionadas y actualizarlo con el tipo de interés de mercado. De esta forma obtendríamos el valor:

$$0{,}9 \times 15 + 0{,}1 \times 0 = 13{,}5\,,$$

y actualizando (dividiendo por 1,1):

$$\frac{13{,}5}{1{,}1} = 12{,}27\,.$$

Sin embargo, este valor no es compatible con la ausencia de posibilidades de arbitraje.

Para verlo, actuaremos de forma parecida a lo hecho anteriormente para construir una oportunidad de arbitraje:

- En el momento inicial:

- Tomar una posición corta en la opción y venderla a su precio de mercado de 12,27 €.
- Tomar una posición larga en la cartera réplica consistente en comprarla por 9,09 €.

- En el momento final:
  - Si la acción acaba valiendo 125 €: la cartera réplica acabará valiendo 15 € y con esa cantidad cierro la posición corta.
  - Si la acción acaba valiendo 80 €: la cartera réplica acabará valiendo 0 €, con lo que se cierra la posición sin desembolsar dinero.

Como es posible apreciar, hemos obtenido un beneficio neto de

$$12{,}27 - 9{,}09 = 3{,}18$$

sin posibilidad de pérdida, es decir, hemos construido una oportunidad de arbitraje.

Nota: Estamos suponiendo implícitamente (como es habitual en el modelo binomial) que las posiciones cortas están permitidas y que es posible tener en la cartera cantidades fraccionarias de los activos.

4. Medida de Probabilidad Equivalente de Martingala

- La medida $\mathbb{Q}$ ajusta las probabilidades de los escenarios futuros para reflejar un mundo libre de arbitraje.
- **Significado**: Bajo $\mathbb{Q}$, los precios descontados de los activos siguen una martingala, es decir, su valor esperado es el valor actual:

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}, \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t$$

- La medida $\mathbb{Q}$ no describe la probabilidad real, sino una probabilidad "ajustada al riesgo" que garantiza que los precios sean consistentes y sin arbitraje.

5. Propiedades de la Medida de Martingala

- Si hay ausencia de arbitraje, existe al menos una medida $\mathbb{Q}$ (primer teorema fundamental).
- Si el mercado es completo (todos los derivados se pueden replicar), esta medida es única (segundo teorema fundamental).
- La medida $\mathbb{Q}$ permite valorar cualquier derivado como:

$$C_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C_T]$$

6. Teoremas Fundamentales de la Valoración de Activos

Primer Teorema Fundamental

- **Enunciado**: Un mercado es libre de arbitraje si y solo si existe al menos una medida de probabilidad equivalente de martingala $\mathbb{Q}$.
- **Explicación**: Si existiera una forma de obtener ganancias sin riesgo (arbitraje), el mercado no podría tener consistencia. La medida $\mathbb{Q}$ elimina esta posibilidad.

Segundo Teorema Fundamental

- **Enunciado**: Si el mercado es completo, existe una única medida de martingala $\mathbb{Q}$.
- **Explicación**: La completitud significa que podemos replicar cualquier derivado con activos existentes. Esto asegura precios únicos y sin inconsistencias.