Diferencias entre el Geometric Brownian Motion (GBM) y el Proceso de Wiener

Iván González Cuesta

Resumen

- Tanto el **Geometric Brownian Motion (GBM)** como el **proceso de Wiener** son procesos estocásticos continuos en tiempo que modelan la evolución aleatoria de fenómenos.
- Ambos se utilizan ampliamente en finanzas y matemáticas aplicadas.

1. Proceso de Wiener (Browniano)

- Definición: Es un proceso estocástico $\{W_t\}_{t\geq 0}$ que satisface:

  $\mathrm{W}_0 = 0,$
  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t) \quad \text{(incrementos normales)},$
  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s), \quad \forall 0 \leq s < t,$
  Los incrementos son independientes y estacionarios.

- Es un proceso **gaussiano**, continuo, con incrementos independientes.
- Modeliza movimientos aleatorios *sin deriva* y con *varianza lineal en el tiempo*.

2. Geometric Brownian Motion (GBM)

- Definición: Es un proceso $\{S_t\}_{t\geq 0}$ que sigue:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

  donde W_t es un proceso de Wiener.

- Solución explícita:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

- Modeliza crecimiento exponencial aleatorio con *deriva* μ y *volatilidad* σ.

- Se utiliza, por ejemplo, en el modelo de Black-Scholes para precios de activos financieros.

3. Demostración de la Solución Explícita del GBM

Partimos de la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Aplicamos la **fórmula de Itô** a $X_t = \ln S_t$.

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}(dS_t)^2 \\ &= \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

Entonces:

$$X_t = X_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t$$

donde $X_0 = \ln S_0$.

Volvemos a S_t aplicando la exponencial:

$$S_t = \exp(X_t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

4. Diferencias Clave

- **Escala**:
  - El proceso de Wiener W_t tiene incrementos aditivos.
  - El GBM S_t tiene incrementos multiplicativos (proporcionales al nivel del proceso).
- **Deriva**:
  - El proceso de Wiener tiene $\mu = 0$.
  - El GBM incorpora una deriva μ que representa una tendencia media de crecimiento.
- **Valores**:
  - W_t puede tomar cualquier valor real.
  - S_t es siempre positivo si $S_0 > 0$, lo que lo hace adecuado para modelar precios.
- **Aplicaciones**:
  - W_t: movimiento browniano puro, ruido blanco.
  - S_t: precios de activos, variables que no pueden ser negativas.