Cadenas de Markov y Modelos Económicos

Iván González Cuesta

24 de octubre de 2025

Índice

1. Introducción

Una **cadena de Markov** es un proceso estocástico donde el futuro depende únicamente del estado presente, y no del pasado. Formalmente:

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$$

En economía y finanzas, las cadenas de Markov permiten modelar la evolución de estados económicos (por ejemplo, expansión o recesión) y su impacto sobre el consumo, la inversión o el valor de los activos.

2. Definición formal

Sea un conjunto de estados:

$$S = \{1, 2, ..., n\}$$

y una matriz de transición:

$$P = [p_{ij}], \quad p_{ij} = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$$

Cada fila de P cumple:

$$\sum_j p_{ij} = 1, \quad p_{ij} \geq 0$$

La distribución de probabilidad en el tiempo t es un vector:

$$\pi^{(t)} = (\pi_1^{(t)}, ..., \pi_n^{(t)})$$

y evoluciona según:

$$\pi^{(t+1)} = \pi^{(t)} P$$

3. Distribución estacionaria

Una **distribución estacionaria** π cumple:

$$\pi = \pi P, \quad \sum_i \pi_i = 1$$

Es decir, una vez alcanzada, la distribución de probabilidad no cambia con el tiempo.

4. Ejemplo económico: modelo de consumo estocástico

Supongamos una economía que puede encontrarse en dos estados:

- Estado 1: Expansión económica ($g_1 = 1{,}04$)
- Estado 2: Recesión económica ($g_2 = 0{,}98$)

La matriz de transición entre estados es:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

4.1. 1. Cálculo de la distribución estacionaria

Sea $\pi = (\pi_1, \pi_2)$. Por definición:

$$\pi = \pi P$$

Entonces:

$$\begin{cases} \pi_1 = 0{,}9\pi_1 + 0{,}3\pi_2 \\ \pi_2 = 0{,}1\pi_1 + 0{,}7\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

De la primera ecuación:

$$\pi_1 - 0{,}9\pi_1 - 0{,}3\pi_2 = 0 \Rightarrow 0{,}1\pi_1 = 0{,}3\pi_2 \Rightarrow \pi_1 = 3\pi_2$$

Usando la restricción:

$$\pi_1 + \pi_2 = 1 \Rightarrow 3\pi_2 + \pi_2 = 1 \Rightarrow \pi_2 = 0{,}25, \ \pi_1 = 0{,}75$$

Por tanto:

$$\boxed{\pi = (0{,}75,\ 0{,}25)}$$

Esto significa que a largo plazo, la economía estará el 75 % del tiempo en expansión y 25 % en recesión.

4.2. 2. Crecimiento promedio del consumo

Si el crecimiento del consumo depende del estado s_t, el crecimiento esperado a largo plazo es:

$$E[g] = \pi_1 g_1 + \pi_2 g_2$$

Sustituyendo:

$$E[g] = 0{,}75(1{,}04) + 0{,}25(0{,}98) = 0{,}78 + 0{,}245 = 1{,}025$$

Por tanto, el crecimiento medio esperado del consumo es:

$$\boxed{E[g] = 2{,}5\,\%}$$

4.3. 3. Factor de descuento estocástico y precios Arrow

Si el agente representativo tiene preferencias del tipo CRRA:

$$u(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

entonces el factor estocástico de descuento es:

$$m_{t+1} = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma}$$

Los precios de los Arrow securities que pagan una unidad en el estado s' dado que hoy estamos en s son:

$$q_{ss'} = \beta\, p_{ss'}\, g_{s'}^{-\gamma}$$

Ejemplo numérico

Supongamos $\beta = 0{,}98$ y $\gamma = 2$. Entonces los precios Arrow son:

$$Q = \beta \begin{bmatrix} 0{,}9g_1^{-2} & 0{,}1g_2^{-2} \\ 0{,}3g_1^{-2} & 0{,}7g_2^{-2} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo $g_1 = 1{,}04, g_2 = 0{,}98$:

$$g_1^{-2} = (1{,}04)^{-2} = 0{,}9246, \quad g_2^{-2} = (0{,}98)^{-2} = 1{,}0412$$

Por tanto:

$$Q = 0{,}98 \begin{bmatrix} 0{,}9(0{,}9246) & 0{,}1(1{,}0412) \\ 0{,}3(0{,}9246) & 0{,}7(1{,}0412) \end{bmatrix} = 0{,}98 \begin{bmatrix} 0{,}8321 & 0{,}1041 \\ 0{,}2774 & 0{,}7288 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Q = \begin{bmatrix} 0{,}8155 & 0{,}1020 \\ 0{,}2718 & 0{,}7142 \end{bmatrix}}$$

Estos son los precios de los **Arrow Securities** que pagan una unidad de consumo en cada estado futuro.

De aquí pueden derivarse los precios de bonos, acciones o cualquier activo contingente.

4.4. 4. Interpretación económica

- El estado de expansión tiene mayor persistencia (0.9), por lo que domina en la distribución estacionaria.
- Los precios Arrow son más altos en el estado de recesión, ya que el consumo futuro es bajo y el agente valora más una unidad adicional de consumo.
- Este modelo sirve como base para la valoración de activos bajo incertidumbre agregada.

5. Cadenas Ocultas de Markov (HMM)

Una **cadena oculta de Markov** (HMM, por sus siglas en inglés) es una extensión donde el estado verdadero s_t no se observa directamente, sino que se infiere a través de una variable observable y_t.

5.1. Definición

Un HMM consta de tres elementos:

- Conjunto de estados ocultos $S = \{1, ..., N\}$
- Matriz de transición $P = [p_{ij}]$
- Distribuciones de emisión $f(y_t \mid s_t = i)$

El modelo genera secuencias (y_t) con dependencias indirectas:

$$s_t \to s_{t+1}, \quad s_t \to y_t$$

5.2. Ejemplo económico

Supón que el verdadero estado de la economía (expansión o recesión) es *no observable*, pero sí observamos una variable y_t, como el crecimiento del PIB o la rentabilidad del mercado.

$$s_t \in \{\text{Expansión}, \text{Recesión}\}, \quad y_t \sim \begin{cases} \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), & s_t = \text{Expansión} \\ \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2), & s_t = \text{Recesión} \end{cases}$$

El objetivo es inferir la probabilidad de estar en cada estado dado los datos observados:

$$P(s_t \mid y_1, \ldots, y_t)$$

5.3. Algoritmos principales

- **Forward-Backward:** calcula la probabilidad de los estados dados los datos observados.
- **Viterbi:** encuentra la secuencia de estados más probable.
- **Baum-Welch (EM):** estima los parámetros P, μ_i, σ_i a partir de los datos.

5.4. Aplicaciones económicas

- Identificación de regímenes de política monetaria.
- Modelos de cambio de régimen de Markov (Hamilton, 1989).
- Estimación de probabilidad de recesión en tiempo real.
- Modelos de volatilidad cambiante (regímenes bull/bear en mercados financieros).

6. Conclusión

Las cadenas de Markov y sus versiones ocultas constituyen una herramienta fundamental para modelar la dinámica de variables económicas bajo incertidumbre.

Permiten capturar los cambios de régimen, calcular precios de activos contingentes, y entender cómo la economía transita entre distintos estados de equilibrio.