Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Кафедра электронных вычислительных машин

Лабораторная работа №4
«Методы и процедуры принятия решений при многих критериях»
Вариант № 2.2

Выполнил
Студент группы 050503:
Григорик И. А.

Проверил
Селезнёв А. И.

Минск 2023

1. Исходные данные для выполнения

Предприятие предполагает приобрести станок. Характеристики станков, из которых делается выбор, следующие.

Станок	СТ1	СТ2	СТ3	СТ4	СТ5	СТ6
Производительность, изделий/ч	25	25	30	15	20	35
Стоимость станка, тыс. ден.ед.	140	100	200	100	100	200
Надежность	достаточно высокая	средняя	очень высокая	достаточно высокая (немного ниже, чем у СТ1 и СТ6)	средняя	достаточно высокая

Важность критериев оценивается двумя экспертами.

По мнению первого эксперта, основной критерий - производительность, немного менее важный - надежность, еще немного менее важный - стоимость.

По мнению второго эксперта, основной критерий - производительность, менее важный - стоимость, еще немного менее важный - надежность.

2. Выбор множества Парето

Выбор множества Парето-оптимальных решений (множества Парето) представляет собой отбор перспективных альтернатив, из которых затем отбирается одна (лучшая) альтернатива.

Множество Парето представляет собой множество альтернатив, обладающих следующим свойством: любая из альтернатив, входящих во множество Парето, хотя бы по одному критерию лучше любой другой альтернативы, входящей в это множество. Другими словами, ни одна из альтернатив, входящих во множество Парето, не уступает какой-либо другой альтернативе из этого множества по всем критериям. Поэтому множество Парето называют также множеством недоминируемых альтернатив: в нем отсутствуют альтернативы, явно (по всем критериям) отстающие от какой-либо другой альтернативы.

Выбор множества Парето производится следующим образом. *Все* альтернативы *попарно* сравниваются друг с другом *по всем критериям*. Если при сравнении каких-либо альтернатив (обозначим их как A_i и A_j) оказывается, что одна из них (например, A_j) *не лучше другой ни по одному критерию*, то ее можно исключить из рассмотрения. Исключенную альтернативу (в данном случае – альтернативу A_j) не требуется сравнивать с другими альтернативами, так как она явно неперспективна.

Как правило, во множество Парето входит несколько альтернатив. Поэтому выбор множества Парето не обеспечивает принятия окончательного решения (выбора одной лучшей альтернативы), однако позволяет сократить количество рассматриваемых альтернатив, т.е. упрощает принятие решения.

Выберем множества Парето:

Сравним альтернативы СТ1 и СТ2. По критерию «стоимость станка» альтернатива СТ2 лучше, чем СТ1; по критерию «надёжность» альтернатива СТ1 лучше, чем СТ2. Таким образом, ни одну из альтернатив исключить нельзя, так как по некоторым критериям лучше одна, а по другим – другая.

Сравним СТ1 и СТ3. По критериям «производительность» и «надёжность» лучше СТ3; по критерию «стоимость станка» альтернатива СТ1лучше. Ни одна из альтернатив не исключается.

Сравним СТ1 и СТ4. По критериям «производительность» и «надёжность» лучше СТ1, по критерию «стоимость станка» альтернатива СТ4 лучше. Ни одна из альтернатив не исключается.

Сравним СТ2 и СТ5. СТ5 хуже по критерию «производительность», по остальным критериям равны. Альтернатива СТ5 исключается.

Аналогично сравниваются остальные альтернативы. Ни одна из них не исключается.

Таким образом, во множество Парето вошли альтернативы СТ1, СТ2, СТ3, СТ4, СТ6. Именно из них будет затем выбираться лучшая альтернатива.

3.1 Метод предпочтений

Метод основан на ранжировании альтернатив, выполняемом группой экспертов. Каждый из экспертов (независимо от других) выполняет ранжирование альтернатив, т.е. указывает, какая из альтернатив, по его мнению, является лучшей, какая - следующей за ней, и т.д.

1 Каждому эксперту предлагается выполнить ранжирование альтернатив по предпочтению. Оценки, указанные экспертами, сводятся в таблицу (матрицу) размером MxN, где M - количество экспертов, N- количество альтернатив (в данном примере - количество факторов роста производительности труда). Обозначим эти оценки как X_{ij}, i=1, ..., M, j=1, ..., N.

Ранжирование альтернатив по предпочтению представлено в таблице 3.1.1.

A1 – производительность, A2 – стоимость, A3 – надёжность.

Таблица 3.1.1 — Матрица экспертных оценок для метода предпочтений

Эксперты	Альтернативы (факторы)		
	A1	A2	A3
1	1	3	2
2	1	2	3

2 Затем производится преобразование матрицы оценок по формуле:

$B_{ij} = N - X_{ij}$, $\quad i=1,...,M,\ j=1,...,N.$

Это означает, что каждая экспертная оценка вычитается из количества альтернатив.

Для данного примера получена матрица, приведенная в таблице 3.1.2.

Таблица 3.1.2 — Преобразованная матрица экспертных оценок для метода предпочтений

Эксперты	Альтернативы (факторы)		
	A1	A2	A3
1	2	0	1
2	2	1	0

3 После этого находятся суммы преобразованных оценок по каждой из альтернатив:

$$C_j = \sum_{i=1}^{M} B_{ij}, \qquad j=1,...,N.$$

В данном примере $C_1 = 2 + 2 = 4$; $C_2 = 1$; $C_3 = 1$.

4 Находится сумма всех оценок:

В данном примере $C = 6$

5 Затем находятся веса альтернатив:

В данном примере $V_1 = 4/6 = 0.67$; $V_2 = 0.17$; $V_3 = 0.17$

Чем больше вес, тем более предпочтительной является альтернатива (по мнению экспертов).

В данном примере самой предпочтительной альтернативой является уровень производительность станка. Следующими и равносильными по важности – стоимость и надёжность.

3.2 Модифицированный алгоритм Кемени-Снелла

Рассматриваемый алгоритм предназначен для ранжирования альтернатив с учетом их оценок по нескольким критериям.

Основное преимущество алгоритма – возможность анализа и выбора альтернатив, оцениваемых по критериям различных видов: числовым, качественным, “да-нет” и т.д. Алгоритм также позволяет учитывать суждения ЛПР о важности критериев.

Алгоритм основан на ранжировании и попарном сравнении альтернатив по каждому критерию.

Составим таблицу после выбора множества Парето (см. таблицу 3.2.1)

Таблица 3.2.1 — Множество Парето

Станок	СТ1	СТ2	СТ3	СТ4	СТ6
Производительность, изделий/ч	25	25	30	15	35
Стоимость станка, тыс. ден.ед.	140	100	200	100	200
Надежность	достаточно высокая	средняя	очень высокая	достаточно высокая (немного ниже, чем у СТ1 и СТ6)	достаточно высокая

Выбор альтернативы на основе модифицированного алгоритма Кемени–Снелла реализуется в следующем порядке.

1 С помощью одного из методов экспертных оценок находятся веса критериев, представляющие собой числовые оценки их важности. В данном примере использовался метод приоритетов (см. подраздел 3.1)

2 Выполняется ранжирование альтернатив по каждому из критериев. При этом лучшая альтернатива по данному критерию получает оценку (ранг) 1, следующая за ней – оценку 2, и т.д. Если альтернативы по данному критерию одинаковы, то они получают *одинаковые* оценки. Результаты ранжирования сводятся в матрицу. Для данной задачи матрица ранжирований приведена в таблице 3.2.2.

Таблица 3.2.2 — Матрица ранжирований

	СТ1	СТ2	СТ3	СТ4	СТ6
К1	3	3	2	4	1
К2	2	1	3	1	3
К3	2	4	1	3	2

3 На основе ранжирования альтернатив по каждому из критериев составляется матрица парных сравнений. Всего составляется M таких матриц, где M - количество критериев. Матрицы заполняются по правилам, приведенным в таблице 3.2.3.

Таблица 3.2.3 — Правила заполнения матриц парных сравнений в модифицированном алгоритме Кемени-Снелла

R^i_{jk}	Значение
1	По i-му критерию j-я альтернатива лучше k-й
-1	По i-му критерию j-я альтернатива хуже k-й
0	По i-му критерию j-я и k-я альтернативы одинаковы

Здесь i - номер матрицы (номер критерия).

Для рассматриваемой задачи матрицы парных сравнений по критериям К1-К3 приведены в таблицах 3.2.4 – 3.2.6.

Таблица 3.2.4 — Парные сравнения по критерию К1

	СТ1	СТ2	СТ3	СТ4	СТ6
СТ1	-	0	-1	1	-1
СТ2	0	-	-1	1	-1
СТ3	1	1	-	1	-1
СТ4	-1	-1	-1	-	-1
СТ6	1	1	1	1	-

Таблица 3.2.5 — Парные сравнения по критерию К2

	СТ1	СТ2	СТ3	СТ4	СТ6
СТ1	-	-1	1	-1	1
СТ2	1	-	1	0	1
СТ3	-1	-1	-	-1	0
СТ4	1	0	1	-	1
СТ6	-1	-1	0	-1	-

Таблица 3.2.6 — Парные сравнения по критерию К3

	СТ1	СТ2	СТ3	СТ4	СТ6
СТ1	-	1	-1	1	0
СТ2	-1	-	-1	-1	-1
СТ3	1	1	-	1	1
СТ4	-1	1	-1	-	-1
СТ6	0	1	-1	1	-

4 Составляется матрица потерь. Размерность матрицы - NxN, где N - количество альтернатив. Элементы матрицы потерь рассчитываются по следующей формуле:

$$R_{jk} = \sum_{i=1}^{M} V_i \cdot \left| R^i_{jk} - 1 \right|, \qquad j=1, ..., N, \; k=1,...,N.$$

Матрица потерь для рассматриваемой задачи приведена в таблице 3.2.7.

Таблица 3.2.7 — Матрица потерь

	СТ1	СТ2	СТ3	СТ4	СТ6
СТ1	-	1.00	1.67	0.33	1.50
СТ2	1.00	-	1.67	0.50	1.67
СТ3	0.33	0.33	-	0.33	1.50
СТ4	1.67	1.50	1.67	-	1.67
СТ6	0.50	0.33	0.50	0.33	-

Приведем примеры расчета некоторых элементов матрицы потерь.

$R_{23} = V_1 \cdot |R_{23}^1 - 1| + V_2 \cdot |R_{23}^2 - 1| + V_3 \cdot |R_{23}^3 - 1| = 1.67$

Смысл элементов матрицы потерь следующий: чем больше элемент R_{jk}, тем больше отставание j-й альтернативы от k-й (тем хуже j-я альтернатива по сравнению с k-й).

5 Выполняется предварительное ранжирование альтернатив. Для этого находятся суммы строк матрицы потерь. Сумма j-й строки представляет собой оценку *отставания* j-й альтернативы от *всех остальных* альтернатив.

Альтернатива, которой соответствует *минимальная* сумма, предварительно считается *лучшей*. Строка и столбец этой альтернативы исключаются из матрицы.

Суммирование строк матрицы потерь и исключение альтернатив выполняются до тех пор, пока не будет исключена вся матрица. Чем раньше исключена альтернатива, тем она лучше.

Выполним предварительное ранжирование для рассматриваемой задачи. Найдем суммы строк матрицы потерь:

P_1 = 4.50, P_2 = 4.83, P_3 =2,50, P_4 = 6,50, P_6 = 1,67.

Предварительно лучшей считается альтернатива СТ6. Она исключается из матрицы потерь. Сокращенная матрица потерь приведена в таблице 3.2.8.

Таблица 3.2.8 — Первая сокращенная матрица потерь

	СТ1	СТ2	СТ3	СТ4
СТ1	-	1.00	1.67	0.33
СТ2	1.00	-	1.67	0.50
СТ3	0.33	0.33	-	0.33
СТ4	1.67	1.50	1.67	-

Суммы строк этой матрицы: P_1 = 3; P_2 = 3.17; P_3 = 1; P_4 = 4,83. Исключается альтернатива СТ3. Вторая сокращенная матрица потерь приведена в таблице 3.2.9.

Таблица 3.2.9 — Вторая сокращенная матрица потерь

	СТ1	СТ2	СТ4
СТ1	-	1.00	1.67
СТ2	1.00	-	1.67
СТ4	0.33	0.33	-

Суммы строк этой матрицы: P_1 = 1.33; P_2 = 1.50; P_4 = 3.17. Исключается альтернатива СТ1. Третья сокращенная матрица потерь приведена в таблице 3.2.10.

Таблица 3.2.10 — Третья сокращенная матрица потерь

	СТ2	СТ4
СТ2	-	0.50
СТ4	1.50	-

Суммы строк этой матрицы: P_2 = 0.5; P_4 = 1.5. Предварительно лучшая альтернатива (из двух оставшихся) – СТ2.

Предварительное ранжирование альтернатив: СТ6, СТ3, СТ1, СТ2, СТ4

6 Выполняется окончательное ранжирование альтернатив. Для этого альтернативы сравниваются попарно, начиная с конца предварительного ранжирования. Если сравниваются j-я и k-я альтернативы (при этом j-я альтернатива в предварительном ранжировании находится выше k-й) и выполняется условие $R_{jk} \le R_{kj}$ (где R_{jk} и R_{kj} - элементы матрицы потерь), то альтернативы остаются в ранжировании на прежних местах (j-я альтернатива лучше k-й). Если $R_{jk} > R_{kj}$, то альтернативы меняются местами (j-я альтернатива хуже k-й).

Выполним окончательное ранжирование для данной задачи.

Сравниваем СТ2 и СТ4. R_{25} = 0.5; R_{52} = 1.5. Так как $R_{24} < R_{42}$, альтернативы остаются на своих местах (СТ2 выше, чем СТ4).

Сравниваем СТ1 и СТ2. R_{12} = 1; R_{21} = 1. Значит альтернативы равноценны.

Сравниваем СТ3 и СТ1. R_{31} = 0.67; R_{13} = 1.33. $R_{31} < R_{13}$; остаются на прежних местах.

Сравниваем СТ6 и СТ3. R_{63} = 0.5; R_{36} = 1.5. $R_{63} < R_{36}$; остаются на прежних местах. Таким образом, окончательное ранжирование альтернатив, следующее: СТ6, СТ3, СТ1, СТ2, СТ4. Лучший вариант строительства нового предприятия - площадка, обозначенная как Пл6.

3.3 Метод ЭЛЕКТРА

Метод предназначен для решения задач, в которых из имеющегося множества альтернатив требуется выбрать заданное количество лучших альтернатив с учетом их оценок по нескольким критериям, а также важности этих критериев.

Принцип работы метода следующий. Для каждой пары альтернатив (Aj и Ak) выдвигается предположение (гипотеза) о том, что альтернатива Aj лучше, чем Ak. Затем для каждой пары альтернатив находятся два индекса: индекс согласия (величина, подтверждающая предположение о превосходстве Aj над Ak) и индекс несогласия (величина, опровергающая это предположение). На основе анализа этих индексов выбирается одна или несколько лучших альтернатив ("ядро" альтернатив).

В таблице 3.3.1 приведены оценки альтернатив, отобранных на основе выбора множества Парето, методики предпочтений и модифицированного алгоритма Кемени-Снелла.

Таблица 3.3.1 — Исходные данные

Станок	СТ1	СТ3	СТ6
Производительность, изделий/ч	25	30	35
Стоимость станка, тыс. ден.ед.	140	200	200
Надежность	достаточно высокая	очень высокая	достаточно высокая

С помощью одного из методов экспертных оценок находятся веса критериев, представляющие собой числовые оценки их важности. В данном примере использовался метод приоритетов (см. подраздел 3.1)

Выбор лучших альтернатив по методу ЭЛЕКТРА реализуется в следующем порядке.

1 Оценки альтернатив приводятся к безразмерному виду по формуле

$$P_{ij} = \frac{X_{ij}}{max_j X_{ij}}$$

Для словесных применяется шкала Харрингтона. При этом оценке "отлично" соответствуют числовые оценки от 0,8 до 1; "хорошо" - от 0,63 до 0,8; "удовлетворительно" - от 0,37 до 0,63; "плохо" - от 0,2 до 0,37; "очень плохо" - от 0 до 0,2

Безразмерные оценки приведены в таблице 3.3.2.

Таблица 3.3.2 — Безразмерные оценки альтернатив

	СТ1	СТ3	СТ6
К1	0.71	0.86	1.00
К2	1.00	0.70	0.70
К3	0.80	1.00	0.80

2 Определяются индексы согласия C_{jk}, j=1,...,N, k=1,...,N (где N - количество альтернатив). Индекс согласия отражает степень согласия с предположением о том, что j-я альтернатива лучше k-й. В рассматриваемой реализации метода ЭЛЕКТРА индексы согласия находятся по формуле

$$C_{jk} = \sum_{i \in K^+} V_i, \qquad j=1,\dots,N,\ k=1,\dots,N,$$

где V_i - веса критериев;

K^+ - подмножество критериев, по которым j-я альтернатива не хуже k-й.

Таким образом, индекс согласия C_{jk} находится как сумма весов критериев, по которым j-я альтернатива *не хуже* k-й. Чем больше индекс согласия, тем более выражено превосходство j-й альтернативы над k-й.

Индексы согласия для данной задачи приведены в таблице 3.3.3.

Таблица 3.3.3 — Матрица индексов согласия

	СТ1	СТ3	СТ6
СТ1	-	0.17	0.33
СТ3	0.83	-	0.33
СТ6	0.83	0.83	-

Приведем примеры расчета индексов согласия. Найдем, например, индекс согласия C_{16}. Альтернатива СТ1 не хуже альтернативы СТ6 по критериям К2 и К3. Их вес равен 0.17 и 0.17 соответственно; таким образом, C_{23} = 0,17 + 0,17 = 0.33. Остальные индексы согласия находятся по такому же принципу.

3 Определяются индексы несогласия D_{jk}, j=1,...,N, k=1,...,N. Индекс несогласия отражает степень несогласия с предположением о том, что j-я альтернатива лучше k-й. Индексы D_{jk} находятся по формуле:

$$D_{jk} = \max_{i \in K}(P_{ik} - P_{ij}), \qquad j=1,...,N,\ k=1,...,N,$$

где P_{ik}, P_{ij} - безразмерные оценки альтернатив (для данного примера они приведены в таблице 3.3.2);

K - подмножество критериев, по которым j-я альтернатива не превосходит k-ю.

Таким образом, индекс несогласия D_{jk} находится как максимальная из разностей оценок по критериям, по которым j-я альтернатива *не лучше* k-й. Чем больше индекс несогласия, тем менее выражено превосходство j-й альтернативы над k-й.

Индексы несогласия для данной задачи приведены в таблице 3.3.4.

Таблица 3.3.3 — Матрица индексов несогласия

	СТ1	СТ3	СТ6
СТ1	-	0.20	0.29
СТ3	0.30	-	0.14
СТ6	0.30	0.20	-

Приведем примеры расчета индексов несогласия. Найдем индекс несогласия D_{16} (оценку несогласия с предположением о превосходстве альтернативы СТ1 над СТ6).

Альтернатива СТ1 не имеет превосходства над СТ6 только по критерию К1. Разность оценок по этому критерию: 1 – 0,71 = 0.29. Таким образом, D_{23} = 0.29.

4 Для каждой альтернативы находится предельное значение индекса согласия: $C_j = \min\limits_k C_{jk}$, j=1,...,N.

Таким образом, предельное значение индекса согласия для j-й альтернативы находится как *минимальный* элемент j-й строки матрицы индексов согласия. Эта величина отражает степень согласия с предположением о том, что j-я альтернатива имеет превосходство над всеми другими альтернативами.

Для рассматриваемого примера $C_1 = 0.17$; $C_3 = 0.33$; $C_6 = 0.83$.

5 Для каждой альтернативы находится предельное значение индекса несогласия: $D_j = \max\limits_k D_{jk}$, j=1,...,N.

Таким образом, предельное значение индекса несогласия для j-й альтернативы находится как *максимальный* элемент j-й строки матрицы индексов несогласия. Эта величина отражает степень несогласия с предположением о превосходстве j-й альтернативы над другими альтернативами.

Для рассматриваемого примера $D_1 = 0.29$; $D_3 = 0.3$; $D_6 = 0.3$.

6 Выделяются лучшие альтернативы (“ядро” альтернатив), удовлетворяющие условиям: $C_j > C^*$, $D_j < D^*$,
где C^*, D^* - пороговые значения индексов согласия и несогласия. Обычно сначала принимаются пороговые значения $C^* = 0.5$, $D^* = 0.5$; затем они изменяются в соответствии с количеством отбираемых альтернатив. Выбираются альтернативы, удовлетворяющие *обоим* условиям.

В рассматриваемом примере требуется выбрать *один* тип станков. Назначим пороговые значения $C^* = 0.5$, $D^* = 0.5$. Условию $C_j > C^*$ удовлетворяет только альтернатива СТ6; условию $D_j < D^*$ - все альтернативы. Таким образом, выбирается альтернатива СТ6.