Matemáticas

29 de junio de 2025

Índice

1. Álgebra

1.1. Propiedades de los números reales

Algunas de las propiedades más importantes de los números reales.

1.1.1. Exponentes

$$
\begin{aligned}
x^0 &= 1 \quad \text{si } x \neq 0 \\
x^1 &= x \\
x^{-1} &= \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \\
x^{m+n} &= x^m x^n \\
x^{m-n} &= \frac{x^m}{x^n} \quad \text{si } x \neq 0 \\
x^{-1} &= \frac{1}{x} \\
x^{mn} &= (x^m)^n \\
x^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \\
x^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{x}
\end{aligned}
$$

1.1.2. Logaritmos

Recordemos que el logaritmo se define como:

$$\log_a(b) = c \iff a^c = b$$

Y sus propiedades más importantes son:

$$
\begin{aligned}
\log_a(1) &= 0 \\
\log_a(a^u) &= u \\
a^{\log_a(u)} &= u \\
\log_a(a) &= 1 \\
\log_a(uv) &= \log_a(u) + \log_a(v) \\
\log_a\left(\frac{u}{v}\right) &= \log_a(u) - \log_a(v) \\
\log_a(u^n) &= n \log_a(u) \\
\log_a(b) &= \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}
\end{aligned}
$$

1.2. Factorización

Algunas fórmulas de factorización importantes.

$$
\begin{aligned}
na + nb &= n(a+b) \\
a^2 + b^2 &= (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab \\
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\
a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2)
\end{aligned}
$$

1.2.1. Completación de cuadrados

Para reescribir una expresión cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c$ como un cuadrado perfecto, se utiliza la fórmula:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

1.3. Sumatorias

Consiste en una forma compacta de expresar la suma de una secuencia de números. Se denota como:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

1.3.1. Propiedades

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} ca_i &= c\sum_{i=1}^{n} a_i \\
\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i \\
\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i
\end{aligned}
$$

1.3.2. Fórmulas de sumatorias

Algunas fórmulas de sumatorias importantes son:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

1.4. Teorema generalizado del binomio de Newton

El teorema generalizado del binomio de Newton establece que para cualquier número real o complejo n donde $|y| < |x|$ se tiene que:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

donde $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial, que se define como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Y si $n \in \mathbb{N}$ entonces podemos reescribir todo como:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Y el coeficiente binomial se define como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.5. Fracciones parciales

Las fracciones parciales permiten descomponer una fracción racional en una suma de fracciones más simples. Este método se usa principalmente para integrar funciones racionales, es decir, cocientes de polinomios.

Dada una fracción racional:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, se desea expresar como suma de fracciones más simples que se puedan integrar fácilmente.

Si el grado del numerador es mayor o igual al del denominador:

$$\deg P(x) \geq \deg Q(x)$$

entonces se realiza la división polinómica:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde $S(x)$ es el cociente y $R(x)$ el residuo. Luego se trabaja solo con la parte fraccionaria $\frac{R(x)}{Q(x)}$.

Se descompone el polinomio $Q(x)$ en factores lineales y/o cuadráticos irreducibles, por ejemplo:

$$Q(x) = (x-a)^m (x^2+bx+c)^n \cdots$$

Dependiendo del tipo de factor en el denominador:

- **Factor lineal simple** $(x-a)$:

$$\frac{A}{x-a}$$

- **Factor lineal repetido** $(x-a)^n$:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

- **Factor cuadrático irreducible** (x^2+bx+c):

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$$

- **Factor cuadrático repetido** $(x^2+bx+c)^n$:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

Pueden usarse factores de mayores grados, pero la idea es que cada término de la fracción parcial sea más simple que el original.

Multiplicamos ambos lados por $Q(x)$ para eliminar los denominadores:

$$P(x) = (\text{expresión con constantes})$$

- **Sustitución**: elige valores de x que simplifiquen la ecuación.
- **Comparación de coeficientes**: iguala los coeficientes de cada potencia de x.

2. Cálculo Multivariable

2.1. Derivadas parciales

Son las derivadas de funciones de varias variables. Se denotan por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

Estas se leería como "derivada parcial de f con respecto a x" y "derivada parcial de f con respecto a y", respectivamente.

Cuando se deriva una función con varias variables, se debe hacer con respecto a una sola de las variables Al calcular la derivada con respecto a una variable, el resto se consideran como constantes.

2.2. Derivada Total

Considere una función de varias variables que llamaremos z. La derivada total de z, denotada por dz, es la suma de las derivadas parciales de z con respecto a cada variable, multiplicadas por el diferencial de esa variable.

Por ejemplo, si z es una función de x e y, la derivada total se expresa como:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

2.2.1. Regla de la cadena

La regla de la cadena se utiliza para calcular la derivada de una función compuesta. Si z es una función de x e y, y x e y son funciones de t, entonces la derivada total de z es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Y si en lugar de depender de t, y depende de u y de v, la expresión se convierte en:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right)$$

Y así sucesivamente, dependiendo de cuántas variables dependan de otras.

Y si queremos la derivada de z con respecto a t, podemos escribir:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

2.3. Gradiente

El gradiente de una función $f(x, y)$ es un vector que contiene las derivadas parciales de f con respecto a cada variable. Se denota como:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Si f es una función de varias variables, el gradiente se extiende a más dimensiones:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

2.4. Derivada direccional

La derivada direccional de una función f en la dirección de un vector unitario $\vec{u}$ se define como:

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

Donde ∇f es el gradiente de f y $\cdot$ representa el producto punto.

Es importante que el vector $\vec{u}$ sea unitario, es decir, que su norma sea 1. Si $\vec{u}$ no es unitario, se puede normalizar dividiendo por su norma.

2.5. Integrales dobles

Las Integrales dobles o integrales iteradas son una extensión de la integral definida a funciones de varias variables. Para una función $f(x, y)$ definida en un dominio D, puede ser de tipo I o II.

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

Siendo esta primera la de tipo I, donde $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son funciones que definen los límites de integración en y para cada x en el intervalo $[a, b]$.

Y la segunda de tipo II, donde $h_1(y)$ y $h_2(y)$ son funciones que definen los límites de integración en x para cada y en el intervalo $[c, d]$:

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

Para calcular una integral doble, se integra primero con respecto a una variable y luego con respecto a la otra. Mientras se integra con respecto a una variable, la otra se considera constante. El orden de integración puede cambiar dependiendo de la función y del dominio de integración.

2.5.1. Teorema de Fubini

El teorema de Fubini establece que, bajo ciertas condiciones de continuidad, el orden de integración en una integral doble puede cambiar. Es decir:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

Donde R es el dominio de integración y dA representa el elemento diferencial de área, que se puede expresar como $dA = dx\, dy$ o $dA = dy\, dx$, dependiendo del orden de integración.

2.6. Integrales triples

Las integrales triples son una extensión de las integrales dobles a funciones de tres variables. Para una función $f(x, y, z)$ definida en un dominio D, la integral triple se expresa como:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV$$

Donde dV es el elemento diferencial de volumen, que puede expresarse como $dV = dx\, dy\, dz$, $dV = dy\, dz\, dx$, o cualquier otra combinación de variables.

Para el cálculo de volúmenes, se pueden utilizar coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas, dependiendo de la simetría del dominio. Además de poderse considerar que $f(x, y, z) = 1$ y pasar la integral doble a una integral triple, para calcular el volumen del dominio D:

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA = \iiint_D f(x, y, z)\, dV$$

2.7. Cambios de coordenadas

Los cambios de coordenadas son útiles para simplificar el cálculo de integrales en dominios complicados.

2.7.1. Integrales dobles

Se suelen cambiar de coordenadas cartesianas (o rectangulares) a coordenadas polares, donde:

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

Y viceversa:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

El elemento diferencial de área:

$$dA = \underbrace{dx\, dy}_{\text{cartesianas}} = \underbrace{r\, dr\, d\theta}_{\text{polares}}$$

2.7.2. Integrales triples

Para integrales triples, se pueden utilizar coordenadas cartesianas (o rectangulares), cilíndricas o esféricas.

En coordenadas cilíndricas, las relaciones son:

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$
$$z = z$$

Y viceversa:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = z$$

En coordenadas esféricas, las relaciones son:

$$x = \rho \sin(\phi)\cos(\theta)$$
$$y = \rho \sin(\phi)\sin(\theta)$$
$$z = \rho \cos(\phi)$$

Y viceversa:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Y el elemento diferencial de volumen:

$$dV = \underbrace{dx\,dy\,dz}_{\text{cartesianas}} = \underbrace{r\,dr\,d\theta\,dz}_{\text{cilíndricas}} = \underbrace{\rho^2 \sin(\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta}_{\text{esféricas}}$$

2.8. Cálculo de áreas y volúmenes

Para calcular áreas y volúmenes, se utilizan integrales dobles y triples, respectivamente. Para el área de una región R en el plano, se utiliza la integral doble:

$$A = \iint_R dA$$

Para el volumen de un sólido D en el espacio, se utiliza la integral triple:

$$V = \iiint_D dV$$

En estos casos R y D son los dominios de integración en el plano y en el espacio, respectivamente. Lo que quiere decir que representan regiones o sólidos normalmente delimitados por funciones o superficies.