

# Matemáticas

Lester Iván Hernández

29 de junio de 2025

# Índice

<b>1. Cálculo Multivariable</b>	<b>3</b>
1.1. Derivadas parciales . . . . .	3
1.2. Derivada Total . . . . .	3
1.2.1. Regla de la cadena . . . . .	3
1.3. Gradiente . . . . .	3
1.4. Derivada direccional . . . . .	4
1.5. Integrales dobles . . . . .	4
1.5.1. Teorema de Fubini . . . . .	4
1.6. Integrales triples . . . . .	5
1.7. Cambios de coordenadas . . . . .	5
1.7.1. Integrales dobles . . . . .	5
1.7.2. Integrales triples . . . . .	5
1.8. Cálculo de áreas y volúmenes . . . . .	6

# 1. Cálculo Multivariable

## 1.1. Derivadas parciales

Son las derivadas de funciones de varias variables. Se denotan por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

Estas se leería como “derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$ ” y “derivada parcial de  $f$  con respecto a  $y$ ”, respectivamente.

Cuando se deriva una función con varias variables, se debe hacer con respecto a una sola de las variables. Al calcular la derivada con respecto a una variable, el resto se consideran como constantes.

## 1.2. Derivada Total

Considere una función de varias variables que llamaremos  $z$ . La derivada total de  $z$ , denotada por  $dz$ , es la suma de las derivadas parciales de  $z$  con respecto a cada variable, multiplicadas por el diferencial de esa variable.

Por ejemplo, si  $z$  es una función de  $x$  e  $y$ , la derivada total se expresa como:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

### 1.2.1. Regla de la cadena

La regla de la cadena se utiliza para calcular la derivada de una función compuesta. Si  $z$  es una función de  $x$  e  $y$ , y  $x$  e  $y$  son funciones de  $t$ , entonces la derivada total de  $z$  es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Y si en lugar de depender de  $t$ ,  $y$  depende de  $u$  y de  $v$ , la expresión se convierte en:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial z}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)$$

Y así sucesivamente, dependiendo de cuántas variables dependan de otras.

Y si queremos la derivada de  $z$  con respecto a  $t$ , podemos escribir:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

## 1.3. Gradiente

El gradiente de una función  $f(x, y)$  es un vector que contiene las derivadas parciales de  $f$  con respecto a cada variable. Se denota como:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Si  $f$  es una función de varias variables, el gradiente se extiende a más dimensiones:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

## 1.4. Derivada direccional

La derivada direccional de una función  $f$  en la dirección de un vector unitario  $\vec{u}$  se define como:

$$D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

Donde  $\nabla f$  es el gradiente de  $f$  y  $\cdot$  representa el producto punto.

Es importante que el vector  $\vec{u}$  sea unitario, es decir, que su norma sea 1. Si  $\vec{u}$  no es unitario, se puede normalizar dividiendo por su norma.

## 1.5. Integrales dobles

Las Integrales dobles o integrales iteradas son una extensión de la integral definida a funciones de varias variables. Para una función  $f(x, y)$  definida en un dominio  $D$ , puede ser de tipo I o II.

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Siendo esta primera la de tipo I, donde  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$  son funciones que definen los límites de integración en  $y$  para cada  $x$  en el intervalo  $[a, b]$ .

Y la segunda de tipo II, donde  $h_1(y)$  y  $h_2(y)$  son funciones que definen los límites de integración en  $x$  para cada  $y$  en el intervalo  $[c, d]$ :

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Para calcular una integral doble, se integra primero con respecto a una variable y luego con respecto a la otra. Mientras se integra con respecto a una variable, la otra se considera constante. El orden de integración puede cambiar dependiendo de la función y del dominio de integración.

### 1.5.1. Teorema de Fubini

El teorema de Fubini establece que, bajo ciertas condiciones de continuidad, el orden de integración en una integral doble puede cambiar. Es decir:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Donde  $R$  es el dominio de integración y  $dA$  representa el elemento diferencial de área, que se puede expresar como  $dA = dx dy$  o  $dA = dy dx$ , dependiendo del orden de integración.

## 1.6. Integrales triples

Las integrales triples son una extensión de las integrales dobles a funciones de tres variables. Para una función  $f(x, y, z)$  definida en un dominio  $D$ , la integral triple se expresa como:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV$$

Donde  $dV$  es el elemento diferencial de volumen, que puede expresarse como  $dV = dx dy dz$ ,  $dV = dy dz dx$ , o cualquier otra combinación de variables.

Para el cálculo de volúmenes, se pueden utilizar coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas, dependiendo de la simetría del dominio. Además de poderse considerar que  $f(x, y, z) = 1$  y pasar la integral doble a una integral triple, para calcular el volumen del dominio  $D$ :

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \iiint_D f(x, y, z) dV$$

## 1.7. Cambios de coordenadas

Los cambios de coordenadas son útiles para simplificar el cálculo de integrales en dominios complicados.

### 1.7.1. Integrales dobles

Se suelen cambiar de coordenadas cartesianas (o rectangulares) a coordenadas polares, donde:

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta)\end{aligned}$$

Y viceversa:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$

El elemento diferencial de área:

$$dA = \underbrace{dx dy}_{\text{cartesianas}} = \underbrace{r dr d\theta}_{\text{polares}}$$

### 1.7.2. Integrales triples

Para integrales triples, se pueden utilizar coordenadas cartesianas (o rectangulares), cilíndricas o esféricas.

En coordenadas cilíndricas, las relaciones son:

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \\ z &= z\end{aligned}$$

Y viceversa:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \\ z &= z\end{aligned}$$

En coordenadas esféricas, las relaciones son:

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y &= \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z &= \rho \cos(\phi)\end{aligned}$$

Y viceversa:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi &= \cos^{-1} \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ \theta &= \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)\end{aligned}$$

Y el elemento diferencial de volumen:

$$dV = \underbrace{dx \, dy \, dz}_{\text{cartesianas}} = \underbrace{r \, dr \, d\theta \, dz}_{\text{cilíndricas}} = \underbrace{\rho^2 \sin(\phi) \, d\rho \, d\phi \, d\theta}_{\text{esféricas}}$$

## 1.8. Cálculo de áreas y volúmenes

Para calcular áreas y volúmenes, se utilizan integrales dobles y triples, respectivamente. Para el área de una región  $R$  en el plano, se utiliza la integral doble:

$$A = \iint_R dA$$

Para el volumen de un sólido  $D$  en el espacio, se utiliza la integral triple:

$$V = \iiint_D dV$$

En estos casos  $R$  y  $D$  son los dominios de integración en el plano y en el espacio, respectivamente. Lo que quiere decir que representan regiones o sólidos normalmente delimitados por funciones o superficies.