Problemario Nivel Secundaria

Problema 1. Calcule la suma $1 + 3\frac{1}{2} + 9\frac{1}{4} + \cdots + 3^{100}\frac{1}{2^{100}}$, donde los números de la forma $n\frac{l}{k}$ son fracciones mixtas.

Problema 2. Lo más preciso que sea posible, grafique los siguientes números reales en la recta numérica:

(a) -36.032016 $\qquad$ (b) $\dfrac{5\frac{1}{4}}{6.350014}$ $\qquad$ (c) 2012.20122012

Problema 3. Para cada número real x, se define la **parte entera** de x, denotado por $\lfloor x \rfloor$, como el máximo entero que es menor ó igual que x, es decir, la parte entera de x, $\lfloor x \rfloor$, es el más grande de los enteros que satisface la relación $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Calcule:

(a) $\left\lfloor -\dfrac{36.032016}{-36.032116} \right\rfloor$ $\qquad$ (b) $\left\lfloor \dfrac{-5\frac{1}{5}}{6.350014} \right\rfloor$ $\qquad$ (c) $\left\lfloor \dfrac{2011.20112012}{2012.20112011} \right\rfloor$

Problema 4. El **valor absoluto** de un número real a, denotado por $|a|$, se define como: $|a| = a$ si $a \geq 0$, y $|a| = -a$ si $a < 0$. Encuentre el valor absoluto de los siguientes números reales:

(a) $\left| -\dfrac{3.032016 - \pi}{-36.032116} \right|$ $\qquad$ (b) $\left| \dfrac{-5\cos(3\pi)}{7} \right|$ $\qquad$ (c) $\left| \dfrac{e^{-2012}}{2012} \right|$

Problema 5. Si x es un número real tal que $|x - 2012| < 2011$, entonces encuentre el número entero más grade n y el número entero más chico m tal que $n < x < m$.

Problema 6. Realice las siguientes operaciones:

(a)

	37	años	6	meses	28	días
+						
	15	años	9	meses	5	días

(b)

	23	horas	7	minutos	43	segundos
-						
	7	horas	26	minutos	38	segundos

Problema 7. Calcule la fracción en horas para el año 2012 que corresponda a la fecha 21 de diciembre a las $11:00$ horas.

Problema 8. Verifique que

$$\pi\ (4\sqrt{e} - \pi) \leq \sqrt{e}\ (2\pi + \sqrt{e}).$$

¿Puede generalizar este resultado?

Problema 9. Encuentre la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$(a)\quad \begin{array}{rcrcr} 5x & + & 6y & = & 1 \\ -x & + & 3y & = & -3 \end{array} \qquad\qquad (b)\quad \begin{array}{rcrcr} -\dfrac{2x}{7} & + & 3y & = & 6 \\ x & - & \dfrac{21y}{2} & = & 7 \end{array}$$

Problema 10. Establecer cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas ó falsas.

(a) $|\cos(\theta)| \leq 1$, para cada número real θ.

(b) $\operatorname{sen}((\theta+1)^2) = \operatorname{sen}^2(\theta) + 2\operatorname{sen}(\theta) + 1$, para cada ángulo θ.

(c) $\ln(x) < x$, para cada número real $x < 0$.

(d) Existe un número real a tal que $a^{2012} = -1$.

Problema 11. Factorice las siguientes expresiones algebraicas:

(a) $6x^2 + 6x - 12$.

(b) $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18$.

(c) $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x - 1$.

Problema 12. Realice las operaciones que se indican:

(a) $\left(a^{7/6}+b^{1/3}\right)\left(a^{1/3}+b^{7/6}\right)$.

(b) $(z^{x}-1)\left(z^{2x}+z^{x}+1\right)$.

(c) $1+t^{2/3}+t^{4/3}+t^{2}+t^{8/3}$.

Problema 13. Factorice la expresión algebraica $x^4+2x^3-x^2+4x-6$, y encuentre los números reales a que satisfagan la ecuación $a^4+2a^3-a^2+4a-6=0$.

Problema 14. Pruebe que la ecuación cuadrática $ax^2+5x+9a=0$, con $a\neq 0$, tiene una solución real si, y sólo si $|a|\leq 5/6$.

Problema 15. Establecer cuáles de las siguientes identidades trigonométricas son correctas y cuáles no lo son:

(a) $\cos(2\theta)=1-2\cos^2(\theta)\tan^2(\theta)$.

(b) $(\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta))(\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta))=\cos(2\theta)$.

(c) $\cos^2(\theta)\ (1-\tan^2(\theta))=\cos(2\theta)$.

Problema 16. No use medios electrónicos, para establecer que las siguientes relaciones se cumplen:

(a) $\cos^2(63.345^\circ)+\cos^2(26.655^\circ)=1$.

(b) $\operatorname{sen}^2(63.345^\circ)+\operatorname{sen}^2(26.655^\circ)=1$.

(c) $\cos(63.345^\circ)+\cos(26.655^\circ)>1$.

Problema 17. Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Calcule lo siguiente:

$$(a)\ \ f(5) \qquad (b)\ \ f(\sqrt{2}) \qquad (c)\ \ f(-\pi) \qquad (d)\ \ f(\ln(|x|+1)).$$

Problema 18. Supóngase que f es una función real de variable real determinada por la correspondencia $x \longmapsto y = f(x)$. Así que, un número real a podrá pertenecer al **dominio** de la función f, si la relación $y = f(a)$ está bien determinada. Por ejemplo, si $y = 1/(x-1)$, entonces el valor $a = 2$ podrá pertenecer el dominio de la función, mientras que no será así para $b = 1$.
Encuentre el subconjunto más grande de los números reales que definen dominios de funciones para las siguientes relaciones:

$$(a)\ \ y = \sqrt{x^2-2} \qquad (b)\ \ z = \ln(x^4-1) \qquad (c)\ \ w = \frac{z^2-1}{z+1}.$$

Problema 19. Considere el conjunto $\mathfrak{I}$ de todos los triángulos isóceles que tienen base una longitud fija de 10 unidades. (Por supuesto, sus otros dos lados son los que tienen la misma longitud.) Supóngase que la correspondencia $x \longmapsto A(x)$, determina una función real de variable real, la cual establece el área de cada elemento de $\mathfrak{I}$. Si se tiene la relación $A(x) = \sqrt{\ln(x-1)+3}$, encuentre el valor de x cuyo elemento de $\mathfrak{I}$ tenga área 10 unidades cuadradas. ¿Puede observar que se tiene una correspondencia entre los elementos del dominio de la función y los elementos de $\mathfrak{I}$? Si es así, ¿cómo está dada la correspondencia?

Problema 20. Construye una correspondencia en la que se pueda calcular el volumen de un cilíndro con base fija de 20 unidades cuadradas.

Problema 21. Las gráficas de las rectas $y = 5x+3$ e $y = -x+4$ tienen un punto de intersección en el plano cartesiano, el cual es centro de una circunferencia C de diámetro 5 unidades. ¿Cuántos puntos de cada recta se encuentran en la circunferencia C? ¿Cuáles son?

Problema 22. Es posible que en alguna ocación se le haya presentado el siguiente juego de azar: Considere el conjunto de dígitos $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, en el que cada dígito habrá de ocupar un lugar en la siguiente tabla:

de tal manera que la suma de dígitos que están en cada fila, en cada columna y en cada diagonal tendrá que ser el valor de 15. Por ejemplo, uno de esos arreglos es el siguiente:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Nombremos a cada casillas de la tabla por la indexación a través de la parejas ordenadas (i, j) como se muestra en seguida:

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$

Bajo estas consideraciones, dé contestación a las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuáles son los dígitos posibles a ocupar la casilla $(2, 2)$?

(b) ¿Cuáles son los dígitos posibles a ocupar una de las casilla $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$ ó $(3, 3)$?

(c) ¿Cuáles son los dígitos posibles a ocupar una de las casilla $(1, 2)$, $(2, 1)$ $(2, 3)$ ó $(3, 2)$?

(d) ¿Por qué las preguntas anteriores han sido planteadas de esa manera?

Problema 23. La gráfica de la parábola $y = x^2 + 1$ y la de la recta $y = 5x + 3$ se intersectan en dos puntos del plano. ¿Cuáles son estos puntos del plano?

Problema 24. Juan tiene una caja pequeña la cual contiene cinco canicas de diferentes colores (roja, verde, blanca, azul y negra) y de tamaño normal. Juan le pide a Pedro que saque una canica de la caja “sin ver”. ¿Cuál es la probabilidad de que salga la canica rojo? Si Pedro saca la canica roja y se queda con ella, ¿cuál es la probabilidad ahora de que saque la canica negra?

Problema 25. Juan y Pedro son dos adolescentes de 12 y 13 años respectivamente, que se dedican a la venta de periódicos por las mañanas en una de las esquinas de una ciudad de la República Mexicana. Juan vende un periódica con información deportiva, mientras que Pedro lo vende con información financiera. En un día de ventas, Juan vende la cantidad de x periódicos, y Pedro vende la cantidad de y periódicos. Si las cantidades de x e y satisfacen que el doble de x es el triple de y aumentado en 29, y el doble de y es la cantidad de 141 disminuido con el triple de x. Hallar la cantidad de periódicos que vendieron Juan y Pedro en ese día.