Problemario Nivel Medio Superior

Problema 1. Considere las siguientes dos ternas pitagóricas distintas (a, b, c) y (x, y, z) las cuales al combinarlas determinan otra terna pitagórica. ¿Cuál de las siguientes triadas forman una terna pitagórica?

a) $(ax - by, ay + bx, cz)$

b) $(ax + by, ay + bx, cz)$

c) $(ax - by, ay - bx, cz)$

Problema 2. Sea el $\triangle ABC$ con $AB > AC$. Las bisectrices de los ángulos internos y externos en A intersectan a $\overleftrightarrow{BC}$ en los puntos$D$ y E respectivamente. Demuestre que:

$$\frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{CD} - \frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{BD} = 2.$$

Problema 3. Pruebe que $2^{1092} - 1$ es divisible por 1093^2.

Problema 4. ¿Cuál es el $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a}$, $a > 0$?

Problema 5. Calcule $I = \int \dfrac{dx}{x^5 + 1}$. $I = \dfrac{1}{5}\ln(x+1) - \dfrac{1}{20}\ln(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + \dfrac{\sqrt{5}}{20}\ln\dfrac{x^2 - \frac{1 - sqrt5}{2}x + 1}{x^2 - \frac{1 + sqrt5}{2}x + 1} + \dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{10}\arctan\dfrac{4x - (1+\sqrt{5})}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \dfrac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{10}\arctan\dfrac{4x - (1-\sqrt{5})}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + c$

Problema 6. Sean $0 < a < b < c < d$ enteros impares tales que

1. $ad = bc$

2. $a + d = 2^k, b + c = 2^m$, para algunos enteros k, m.

Pruebe que $a = 1$.

Problema 7. Consideremos que cuatro ciudades están situadas en los vértices de un cuadrado de 100 km de lado. Los responsable de la construcción de la red carreteras que debe unir a las ciudades, desea que está red sea la más corta posible.

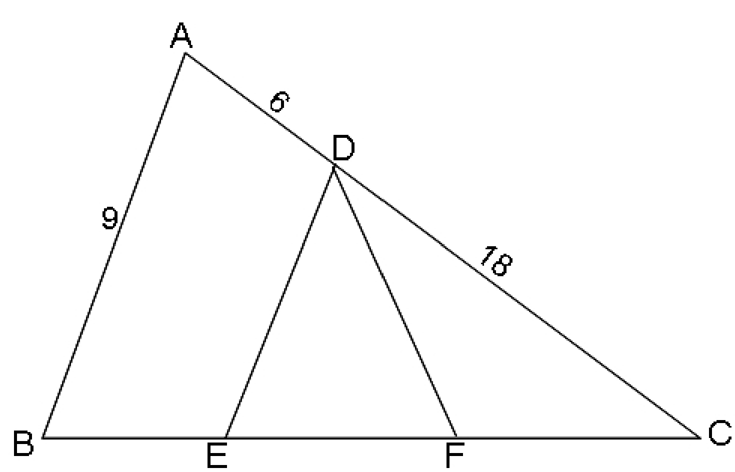
Uno comenta que podemos unir utilizando las carreteras que describen tres lados consecutivos del contorno de cuadrado eso nos dará 300 kilómetros, otro comenta mejores utilicemos las dos diagonales esto nos dará una longitud de $100\sqrt{2}$ km que son aproximadamente 282 km

¿Cuál es la red de carreteras más corta? La respuesta no es las diagonales del cuadrado.

Problema 8. Cuántas ternas de números $a, b, c \in \mathbb{Z}$ existen tales que $0 < a < b < c$, que ninguno de ellos sea divisible por 3 y que $a^2 + b^2 = c^2$.

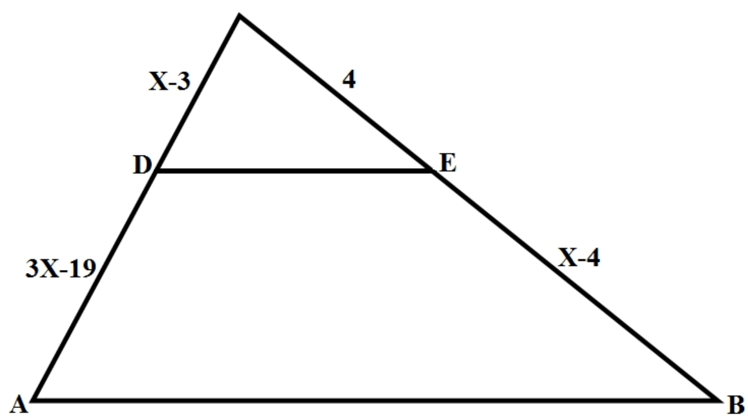
Problema 9. El perímetro de un rectángulo es 24 y la medida de una de sus diagonales es 8, encuentre el área del rectángulo.

Problema 10. En la siguiente figura se sabe: $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son paralelos y que $\angle DEF$ y $\angle DFC$ son suplementarios. Con los datos anteriores y los de la figura calcule $x = |\overline{DF}|$.



Problema 11. Muestre que si desde un punto P situado en el exterior de un círculo dado se trazan dos rectas tangentes a éste, entonces los segmentos determinados entre P y cada uno de los puntos de tangencia son iguales.

Problema 12. Determine los valores de X para los cuales se cumple que $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ en la siguiente figura.



Problema 13. Encuentre el valor de a en la expresión $3^{a+1} = 27^2$.

Problema 14. Demuestre que $5^{2n} - 1$ es divisible entre 8 para toda $n \in \mathbb{N}$.

Problema 15. Demuestre que $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es divisible por 13, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 16. Encuentre el conjunto de las x en los reales que cumplan la siguiente condición

$$\left| \frac{-2x-3}{6-3x} \right| < 4.$$

Problema 17. ¿Cuántos collares diferentes se pueden hacer con cinco cuentas, dos de color rojo, tres de color verde y una color azul?

Problema 18. Encuentre el valor de $\sum_{i=1}^{n}(i \cdot i!)$.

Problema 19. Muestre que dados cualesquiera cinco números enteros, no necesariamente distintos, siempre se pueden elegir tres cuya suma es divisible por 3.

Problema 20. Pruebe que si p y $p+2$ son primos mayores que 3, entonces $p+1$ es un número par divisible por 3.

Problema 21. Si n es un número natural tal que n^2 tiene a 9 como el dígito que está en la posición de las decenas, entonces calcule el dígito de las unidades de n^2.

Problema 22. Calcule la altura de un tetraedro del que se sabe que la superficie de una de sus caras es 1

Problema 23. Una circunferencia pasa por los puntos $(1,3)$ y $(5,1)$. Además uno de los diámetros es paralelo al eje de las abscisas. Encuentre el área de esta circunferencia.

Problema 24. Considere un triángulo ΔABC, donde el vértice A tiene por coordenadas al punto $(2,2)$. Además suponga que las coordenadas de los puntos medios que unen los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{BA}$ están dados por $(\frac{3}{2},1)$ y $(3,1)$ respectivamente. Encuentre las coordenadas de los vertices B y C.

Problema 25. En cierta cafetería se ofrecen en el menú pasteles con un número impar de sabores. Si el chef de la cafetería tiene a su disposición 300 sabores, cuantas posibilidades tendrá a elegir un comensal hambriento de un pastel?