ИНФОРМАЦИОННО-КОНСУЛЬТАЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

ТФКП

теория функций комплексного переменного

Консультационное пособие для школьников и студентов в решении задач с примерами решённых задач из задачника автора Чудесенко В.Ф.

Вариант 10

$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz$$

Москва 2003

/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{(1+i\sqrt{3})/32}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\dots,n-1;\quad z\neq 0$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{(1+i\sqrt{3})/32}$:

$$\sqrt[4]{(1+i\sqrt{3})/32}=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)/8+i\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)/8$$

$$\sqrt[4]{(1+i\sqrt{3})/32}=-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)/8+i\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)/8$$

$$\sqrt[4]{(1+i\sqrt{3})/32}=-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)/8-i\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)/8$$

$$\sqrt[4]{(1+i\sqrt{3})/32}=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)/8-i\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)/8$$

Ответ:

$$\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{32}}=\left\{\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{3}+1\right)+i\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{3}-1\right), -\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{3}-1\right)+i\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{3}+1\right), -\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{3}+1\right)-i\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{3}-1\right), \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{3}-1\right)-i\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{3}+1\right)\right\}$$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\mathrm{sh}(1+\pi i/2)$

Перейдем от гиперболического синуса к тригонометрическому:

$\mathrm{sh}(1+\pi i/2)=-i\cdot\sin(i-\pi/2)=i\cdot\sin(\pi/2-i)$

Используем формулу синуса разности:

$i\cdot\sin(\pi/2-i)=i\left[\sin(\pi/2)\cos(i)-\cos(\pi/2)\sin(i)\right]$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$i\left[\sin(\pi/2)\cos(i)-\cos(\pi/2)\sin(i)\right]=i\cdot 1\cdot\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}-i\cdot 0\cdot\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=i\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}$$

Ответ: $\mathrm{sh}(1+\pi i/2)=i(e^{-1}+e^{1})/2$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arctg}\left(-\frac{i}{3}\right)$$

Функция Arctg является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arctg}\,z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$$

Подставим вместо z значение $-\frac{i}{3}$:

$$\mathrm{Arctg}\left(-\frac{i}{3}\right) = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}(2)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k = 0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}(2) = -\frac{i}{2}[\ln 2 + i(\arg(2) + 2\pi k)] =$$

$$= -\frac{i}{2}\ln 2 + \pi k \approx -\frac{i}{2}\cdot 0{,}693 + \pi k$$

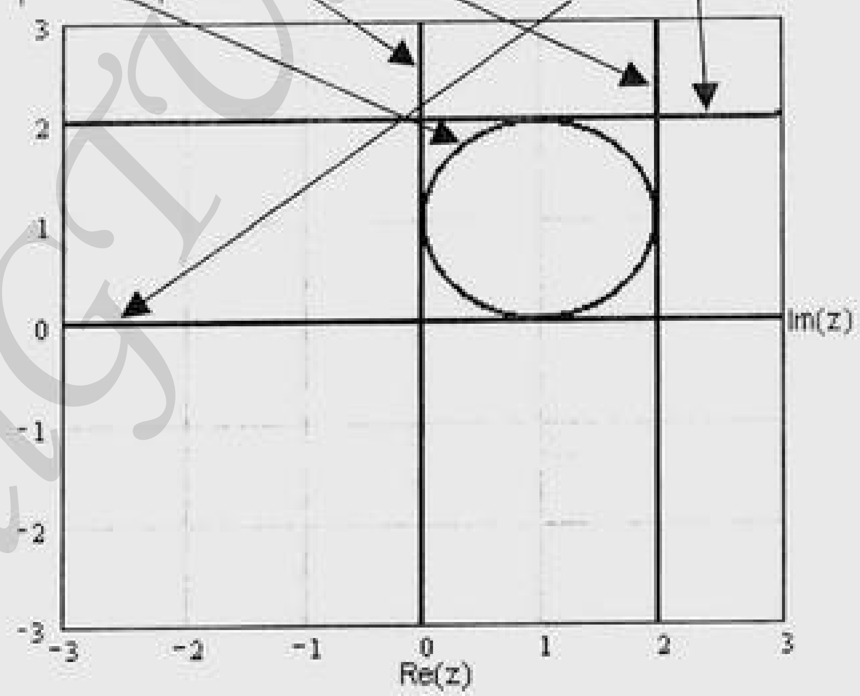
$k = 0,\pm1,\pm2,...$

Ответ: $\mathrm{Arctg}\left(-\frac{i}{3}\right) \approx -\frac{i}{2}\cdot 0{,}693 + \pi k,\ k = 0,\pm1,\pm2,...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z-1-i| \geq 1,\quad 0 \leq \mathrm{Re}\,z < 2,\quad 0 < \mathrm{Im}\,z \leq 2$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z = -\mathrm{ctg}\,t + i3\,\mathrm{cosec}\,t$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t) = -\mathrm{ctg}\,t;\quad y(t) = 3\,\mathrm{cosec}\,t$

Выразим параметр t через x и y:

$x = -\mathrm{ctg}\,t \Rightarrow \mathrm{ctg}\,t = -x \Rightarrow t = -\mathrm{arcctg}(x)$

$$y = 3\,\mathrm{cosec}\,t = \frac{3}{\sin t} \Rightarrow \sin t = \frac{3}{y} \Rightarrow t = \arcsin\left(\frac{3}{y}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\arcsin\left(\frac{3}{y}\right) = -\mathrm{arcctg}(x) \Rightarrow \arcsin\left(\frac{3}{y}\right) + \mathrm{arcctg}(x) = 0$$

Ответ: $\arcsin\left(\frac{3}{y}\right) + \mathrm{arcctg}(x) = 0$

Задача 6

Проверить, что v является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной мнимой части v(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$f(1) = 2$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{-x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2ixy}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-(x-iy)^2 + (x^2+y^2)^2}{(x+iy)^2(x-iy)^2} = \frac{-1}{(x+iy)^2} + 1 = 1 - \frac{1}{z^2}$$

Т.к. производная существует, то v является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int (1 - \frac{1}{z^2})dz = z + \frac{1}{z} + C$$

Определим константу C:

$$f(1) = 1 + 1 + C = 2 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

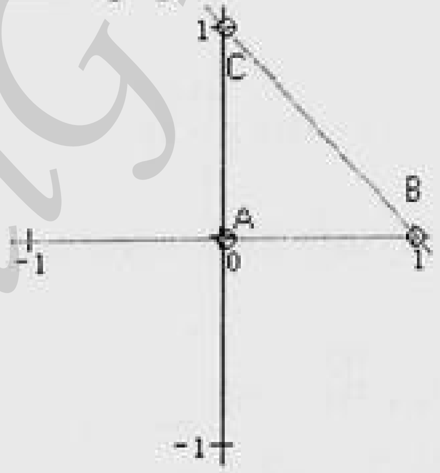
Ответ: $f(z) = z + \frac{1}{z}$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_{ABC} (z^2 + \cos z)dz;\ ABC - \text{ломаная}: z_A = 0, z_B = 1; z_C = i$$

Покажем ломаную, по которой должно проходить интегрирование:



Проверка, является ли функция аналитической, слишком громоздка, поэтому используем метод, пригодный для любого случая. Представим отрезки ломаной в параметрическом виде:

$$AB: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = 0; z_A = z(0); z_B = z(1)$$

$$BC: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = 1 - t; z_B = z(1); z_C = z(0)$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int_{ABC} f(z)dz = \int_0^1 f[z(t)]_{AB} z'(t)dt + \int_1^0 f[z(t)]_{BC} z'(t)dt =$$

$$= \int_0^1 (t^2 + \cos t)dt + \int_1^0 [(t + i - it)^2 + \cos(t + i - it)](1 - i)dt =$$

$$= (1 - i)(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sin 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 1)$$

Ответ: $\int_{ABC} f(z)dz = (1 - i)(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sin 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 1)$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}=\frac{5(z-20)}{z^2(z+10)(z-5)}=\frac{5}{z^2}\cdot\frac{z-20}{(z+10)(z-5)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

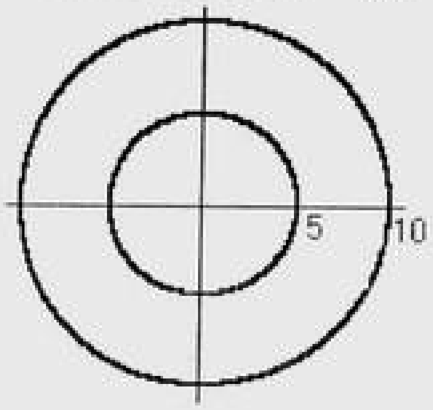
$$\frac{z-20}{(z+10)(z-5)}=\frac{A}{z+10}+\frac{B}{z-5}=\frac{Az-5A+Bz+10B}{(z+10)(z-5)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=2;B=-1\}\Rightarrow\frac{z-20}{(z+10)(z-5)}=\frac{2}{z+10}-\frac{1}{z-5}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{5}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+10}-\frac{1}{z-5}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=5; z=-10$



Рассмотрим область $|z|<5$:

$$f(z)=\frac{5}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+10}-\frac{1}{z-5}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{10}}+\frac{1}{1-\frac{z}{5}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{10}+\frac{z^2}{100}-\frac{z^3}{1000}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{5}+\frac{z^2}{25}+\frac{z^3}{125}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{10z}+\frac{1}{100}-\frac{z}{1000}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{5z}+\frac{1}{25}+\frac{z}{125}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $5<|z|<10$:

$$f(z)=\frac{5}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+10}-\frac{1}{z-5}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{10}}-\frac{5}{z(1-\frac{5}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{10}+\frac{z^2}{100}-\frac{z^3}{1000}+\ldots\right)+\left(\frac{5}{z}+\frac{25}{z^2}+\frac{125}{z^3}+\frac{625}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{10z}+\frac{1}{100}-\frac{z}{1000}+\ldots\right)+\left(\frac{5}{z^3}+\frac{25}{z^4}+\frac{125}{z^5}+\frac{625}{z^6}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>10$:

$$f(z)=\frac{5}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+10}-\frac{1}{z-5}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{10}{z(1+\frac{10}{z})}-\frac{5}{z(1-\frac{5}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{10}{z}-\frac{100}{z^2}+\frac{1000}{z^3}-\frac{10000}{z^4}+\ldots\right)+\left(\frac{5}{z}+\frac{25}{z^2}+\frac{125}{z^3}+\frac{625}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{10}{z^3}-\frac{100}{z^4}+\frac{1000}{z^5}-\frac{10000}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{5}{z^3}+\frac{25}{z^4}+\frac{125}{z^5}+\frac{625}{z^6}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<5: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{10z}+\frac{1}{100}-\frac{z}{1000}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{5z}+\frac{1}{25}+\frac{z}{125}+\ldots\right)$$

$$5<|z|<10: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{10z}+\frac{1}{100}-\frac{z}{1000}+\ldots\right)+\left(\frac{5}{z^3}+\frac{25}{z^4}+\frac{125}{z^5}+\frac{625}{z^6}+\ldots\right)$$

$$|z|>10: f(z)=\left(\frac{10}{z^3}-\frac{100}{z^4}+\frac{1000}{z^5}-\frac{10000}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{5}{z^3}+\frac{25}{z^4}+\frac{125}{z^5}+\frac{625}{z^6}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z\text{-}z_0$.

$$f(z)=\frac{z+3}{z^2-1},z_0=3-i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z+3}{z^2-1}=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z+1}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{2}{z-1}=2\cdot\frac{1}{z-1}=2\cdot\frac{1}{(z-z_0)+2-i}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-z_0)+4-i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(4-i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2-i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(4-i)^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(2-i)^{n+1}}-\frac{1}{(4-i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(2-i)^{n+1}}-\frac{1}{(4-i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=(z-3)\cdot\cos\pi\frac{z-3}{z},z_0=0$$

Преобразуем данное выражение:

$$(z-3)\cdot\cos\pi\frac{z-3}{z}=(z-3)\cdot\cos(\pi-\frac{3\pi}{z})=3\cos\frac{3\pi}{z}-z\cos\frac{3\pi}{z}$$

Теперь следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z)=3\cos\frac{3\pi}{z}-z\cos\frac{3\pi}{z}=3\left(1-\frac{(3\pi)^2}{2!z^2}+\frac{(3\pi)^4}{4!z^4}-\frac{(3\pi)^6}{6!z^6}+\ldots\right)-$$

$$-z\left(1-\frac{(3\pi)^2}{2!z^2}+\frac{(3\pi)^4}{4!z^4}-\frac{(3\pi)^6}{6!z^6}+\ldots\right)=\left(3-\frac{3(3\pi)^2}{2!z^2}+\frac{3(3\pi)^4}{4!z^4}-\right.$$

$$\left.-\frac{3(3\pi)^6}{6!z^6}+\ldots\right)-\left(z-\frac{(3\pi)^2}{2!z}+\frac{(3\pi)^4}{4!z^3}-\frac{(3\pi)^6}{6!z^5}+\ldots\right)=$$

$$=-z+3+\frac{(3\pi)^2}{2!z}-\frac{3(3\pi)^2}{2!z^2}-\frac{(3\pi)^4}{4!z^3}+\frac{3(3\pi)^4}{4!z^4}+\frac{(3\pi)^6}{6!z^5}-$$

$$-\frac{3(3\pi)^6}{6!z^6}-\ldots$$

Поскольку $z_0=0$, то разложение в ряд Лорана в окрестности z_0 – это то же самое, что и разложение в ряд Лорана по степеням z. Таким образом, мы пришли к ответу.

Ответ:

$$f(z)=-z+3+\frac{(3\pi)^2}{2!z}-\frac{3(3\pi)^2}{2!z^2}-\frac{(3\pi)^4}{4!z^3}+\frac{3(3\pi)^4}{4!z^4}+\frac{(3\pi)^6}{6!z^5}-$$

$$-\frac{3(3\pi)^6}{6!z^6}-\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{\cos z^2-1}{\mathrm{sh}z-z-z^3/6}$$

Разложим числитель и знаменатель в ряды Лорана в окрестности точки z = 0:

$$f(z)=\frac{\cos z^2-1}{\mathrm{sh}z-z-z^3/6}=\frac{-1+1-\frac{z^4}{2!}+\frac{z^8}{4!}-\frac{z^{12}}{6!}+\ldots}{-z^3/6-z+z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\ldots}=$$

$$=\frac{-\frac{z^4}{2!}+\frac{z^8}{4!}-\frac{z^{12}}{6!}+\ldots}{\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}+\ldots}=\frac{-\frac{1}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^8}{6!}+\ldots}{\frac{z}{5!}+\frac{z^3}{7!}+\frac{z^5}{9!}+\ldots}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{-\frac{1}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^8}{6!}+\ldots}{\frac{z}{5!}+\frac{z^3}{7!}+\frac{z^5}{9!}+\ldots}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad g(z)=-\frac{1}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^8}{6!}+\ldots;\quad h(z)=\frac{z}{5!}+\frac{z^3}{7!}+\frac{z^5}{9!}+\ldots;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g(0)=-\frac{1}{2}$$

$$h'(z)=\frac{1}{5!}+\frac{3z^2}{7!}+\frac{5z^4}{9!}+\ldots;h'(0)=\frac{1}{5!}$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 1 – 0 = 1.

Ответ: Точка z = 0 является полюсом 1-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\frac{1}{e^z+1}$$

Чтобы найти особые точки этой функции, следует решить уравнение:

$$e^z+1=0\Rightarrow e^z=-1\Rightarrow z=\pi i+2\pi ik, k\in Z$$

Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{1}{e^z+1};\quad g(z)=1;\quad h(z)=e^z+1;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $z=\pi i+2\pi ik$:

$$g(z)=1\neq 0;$$

$$h(z)=e^z+1;h(\pi i+2\pi ik)=0;$$

$$h'(z)=e^z;h(\pi i+2\pi ik)=-1\neq 0;$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $z=\pi i+2\pi ik$ выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки $z=\pi i+2\pi ik$ являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это 1 – 0 = 1.

Ответ: Точки $z=\pi i+2\pi ik$ для данной функции являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-1/2|=1} \underbrace{\frac{iz(z-i)}{\sin \pi z}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = k,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадают только точки z = 0 и z = 1.

Точка $z_1 = 0$ является устранимой особой точкой, следовательно, вычет в точке z_1 равен нулю.

Точка $z_2 = 1$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to 1}[f(z)(z-1)] = \lim_{z\to 1}\frac{iz(z-1)(z-i)}{\sin \pi z} = \begin{Bmatrix} t = z-1 \\ z = t+1 \end{Bmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{it(t+1)(t+1-i)}{\sin(\pi t + \pi)} = \lim_{t\to 0}\frac{it(t+1)(t+1-i)}{-\sin \pi t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{it(t+1)(t+1-i)}{-\pi t} = \lim_{t\to 0}\frac{i(t+1)(t+1-i)}{-\pi} = -\frac{i(1-i)}{\pi} = -\frac{i+1}{\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i+1}{\pi}\right) = -2i(i+1)$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z} dz = -2i(i+1)$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1/3} \underbrace{\frac{3-2z+4z^4}{z^3}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$\frac{3-2z+4z^4}{z^3} = \frac{3}{z^3} - \frac{2}{z^2} + 4z$$

Считая получившийся результат рядом Лорана по степеням z, т.е. в окрестности z = 0, мы приходим к выводу, что точка z = 0 является полюсом 3-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}[f(z)z^3] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{3-2z+4z^4}{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(48z^2) = 0$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{3-2z+4z^4}{z^3} dz = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{3-2z+4z^4}{z^3} dz = 0$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=0,05} \underbrace{\frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 16\pi z}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции z = ik/16. Однако в контур попадает только z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 16\pi z} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad \begin{matrix} g(z) = e^{4z}-1-\sin 4z \\ h(z) = z^2 \operatorname{sh} 16\pi z \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при z = 0. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что z = 0 представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z \operatorname{sh} 16\pi z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{4e^{4z}-4\cos 4z}{\operatorname{sh} 16\pi z + 16\pi z \operatorname{ch} 16\pi z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{16e^{4z}+16\sin 4z}{32\pi \operatorname{ch} 16\pi z + 256\pi^2 z \operatorname{sh} 16\pi z}\right) = \frac{16}{32\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 16\pi z} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi} = i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 16\pi z} dz = i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z+5|=2} \left(z \sin\frac{1}{z+5} + \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{4}}{(z+4)^2(z+2)}\right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z+5|=2} \underbrace{z \sin\frac{1}{z+5}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z+5|=2} \underbrace{\frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{4}}{(z+4)^2(z+2)}}_{f_2(z)} dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint\limits_{|z+5|=2} z \sin\frac{1}{z+5} dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left\{\begin{matrix} t = z+5 \\ z = t-5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z \sin\frac{1}{z+5} = (t-5)\sin\frac{1}{t}$$

Единственной особой точкой этой функции является t=0. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t-5)\sin\frac{1}{t} = (t-5)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{3!t^3} + \frac{1}{5!t^5} - \frac{1}{7!t^7} + \frac{1}{9!t^9} - ...\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3!t^2} + \frac{1}{5!t^4} - \frac{1}{7!t^6} + ...\right) - \left(\frac{5}{t} - \frac{5}{3!t^3} + \frac{5}{5!t^5} - \frac{5}{7!t^7} + ...\right) =$$

$$= 1 - \frac{5}{t} - \frac{1}{3!t^2} + \frac{5}{3!t^3} + \frac{1}{5!t^4} - \frac{5}{5!t^5} - \frac{1}{7!t^6} + \frac{5}{7!t^7} + ...$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов, из чего следует, что t=0 является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t-5)\sin\frac{1}{t}\right] = C_{-1} = -5$$

Таким образом:

$$\oint_{|z+5|=2} z\sin\frac{1}{z+5}dz = \oint_{|t|=2}(t-5)\sin\frac{1}{t}dz = 2\pi i\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t-5)\sin\frac{1}{t}\right] =$$

$$= 2\pi i\cdot(-5) = -10\pi i$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint_{|z+5|=2}\frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{4}}{(z+4)^2(z+2)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=–2 и z=–4. При этом точка z=–2 не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=–4 является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=-4} f_2(z) = \lim_{z\to-4}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z+4)^2\cdot 2\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{4}}{(z+4)^2(z+2)}\right] = \lim_{z\to-4}\frac{d}{dz}\left[\frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{4}}{z+2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to-4}\left[-\frac{\pi}{2(z+2)}\sin\left(\frac{\pi z}{4}\right) - \frac{2}{(z+2)^2}\cos\left(\frac{\pi z}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint_{|z+5|=2}\frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{4}}{(z+4)^2(z+2)}dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=-4} f_2(z) = 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint_{|z+5|=2}\left(z\sin\frac{1}{z+5} + \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{4}}{(z+4)^2(z+2)}\right)dz = \oint_{|z+5|=2} z\sin\frac{1}{z+5}dz +$$

$$+ \oint_{|z+5|=2}\frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{4}}{(z+4)^2(z+2)}dz = -10\pi i + \pi i = -9\pi i$$

Ответ: $\oint_{|z+5|=2}\left(z\sin\frac{1}{z+5} + \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{4}}{(z+4)^2(z+2)}\right)dz = -9\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t} = \oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{4-\frac{\sqrt{7}}{2i}(z-\frac{1}{z})} = \oint_{|z|=1}\frac{dz}{4iz-\frac{\sqrt{7}}{2}(z^2-1)} =$$

$$= \oint_{|z|=1}\frac{2dz}{8iz-\sqrt{7}(z^2-1)} = \oint_{|z|=1}\frac{2dz}{-\sqrt{7}(z-i/\sqrt{7})(z-i\sqrt{7})}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = i/\sqrt{7};\quad z = i\sqrt{7};$

Точка $i\sqrt{7}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $i/\sqrt{7}$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=i/\sqrt{7}} f(z) = \lim_{z\to i/\sqrt{7}}[f(z)(z-i/\sqrt{7})] =$$

$$= \lim_{z\to i/\sqrt{7}}\frac{2}{-\sqrt{7}(z-i\sqrt{7})} = \frac{2}{-\sqrt{7}(i/\sqrt{7}-i\sqrt{7})} = -\frac{i}{3}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{2dz}{-\sqrt{7}(z-i/\sqrt{7})(z-i\sqrt{7})} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i\cdot(-\frac{i}{3}) = \frac{2}{3}\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t} = \frac{2}{3}\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+\sqrt{7}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+\sqrt{7}\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(4+\frac{\sqrt{7}}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i(8z+\sqrt{7}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{7}(z+\frac{1}{\sqrt{7}})(z+\sqrt{7})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-\sqrt{7};\quad z=-1/\sqrt{7};$

Точка $z=-\sqrt{7}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=-1/\sqrt{7}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\underset{z=-1/\sqrt{7}}{\operatorname{res}}f(z)=\lim_{z\to-1/\sqrt{7}}\frac{d}{dz}\left[f(z)\left(z+1/\sqrt{7}\right)^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to-1/\sqrt{7}}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[\sqrt{7}\left(z+\sqrt{7}\right)\right]^2}=\frac{4}{7i}\lim_{z\to-1/\sqrt{7}}\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z+\sqrt{7}\right)^2}=$$

$$=\frac{4}{7i}\lim_{z\to-1/\sqrt{7}}\left[-\frac{z-\sqrt{7}}{\left(z+\sqrt{7}\right)^3}\right]=-\frac{4}{7i}\cdot\frac{-1/\sqrt{7}-\sqrt{7}}{\left(-1/\sqrt{7}+\sqrt{7}\right)^3}=\frac{4}{27i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{7}(z+\frac{1}{\sqrt{7}})(z+\sqrt{7})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\underset{z_i}{\operatorname{res}}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{4}{27i}\right)=\frac{8}{27}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+\sqrt{7}\cos t)^2}=\frac{8}{27}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\underset{z_m}{\operatorname{res}}R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2+2)(z^2+3)^2}$$

Особые точки:

$z=i\sqrt{2}\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-i\sqrt{2}\quad(\operatorname{Im}z<0)$

$z=i\sqrt{3}\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-i\sqrt{3}\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=i\sqrt{3}$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\underset{z=i\sqrt{3}}{\operatorname{res}}f(z)=\lim_{z\to i\sqrt{3}}\frac{d}{dz}[f(z)(z-i\sqrt{3})^2]=\lim_{z\to i\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i\sqrt{3})^2(z^2+2)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to i\sqrt{3}}\left[\frac{-2(2z^2+4+iz\sqrt{3})}{(z+i\sqrt{3})^3(z^2+2)^2}\right]=\frac{i7\sqrt{3}}{36}$$

Точка $z=i\sqrt{2}$ является простым полюсом и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\underset{z=i\sqrt{2}}{\operatorname{res}}f(z)=\lim_{z\to i\sqrt{2}}[f(z)(z-i\sqrt{2})]=\lim_{z\to i\sqrt{2}}\left[\frac{1}{(z^2+3)^2(z+i\sqrt{2})}\right]=\frac{-i\sqrt{2}}{4}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}=2\pi i\left(\frac{i7\sqrt{3}}{36}-\frac{i\sqrt{2}}{4}\right)=\pi\left(\frac{9\sqrt{2}-7\sqrt{3}}{18}\right)$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}=\pi\left(\frac{9\sqrt{2}-7\sqrt{3}}{18}\right)$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+17}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\lambda x dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$x^2-2x+17=0\Rightarrow z_{1,2}=1\pm 4i$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{1+4i\}$$

Эта особая точка является простым полюсом. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=1+4i}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 1+4i}\frac{z(z-1-4i)}{z^2-2z+17}e^{iz}=\lim_{z\to 1+4i}\frac{z}{z-1+4i}e^{iz}=$$

$$=\frac{1+4i}{1+4i-1+4i}e^{i(1+4i)}=\frac{1+4i}{8i}e^{i-3}=\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{8}\right)e^{-4}(\cos 1-i\sin 1)$$

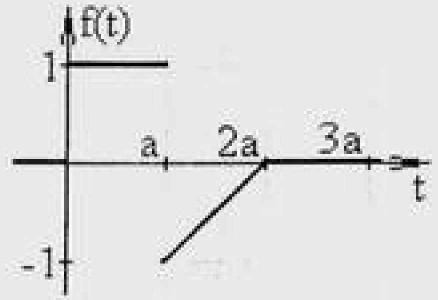
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+17}dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{\pi}{4}e^{-4}\cos 1+\pi e^{-4}\sin 1$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+17}dx=\frac{\pi}{4}e^{-4}\cos 1+\pi e^{-4}\sin 1$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)\begin{cases}1 & 0<t<a\\ \dfrac{t-2a}{a}, & a<t<2a\\ 0, & 2a<t\end{cases}$$

$$f(t)=1\cdot\eta(t)+\frac{t-3a}{a}\eta(t-a)+\frac{2a-t}{a}\eta(t-2a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{3}{p}\right)e^{-ap}+\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-2ap}$$

Ответ: $F(p)=\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{3}{p}\right)e^{-ap}+\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-2ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{p+4}{p^2+4p+5}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{p+4}{p^2+4p+5}=\frac{p}{p^2+4p+5}+\frac{4}{p^2+4p+5}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{p}{p^2+4p+5}+\frac{4}{p^2+4p+5}=$$

$$=\frac{p}{(p+2)^2+1}+\frac{4}{(p+2)^2+1}=$$

$$=\frac{p+2}{(p+2)^2+1}+2\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1}\to$$

$$\to e^{-2t}\cos t+2e^{-2t}\sin t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$e^{-2t}\cos t+2e^{-2t}\sin t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''+2y'=\sin(t/2)$$

$$y(0)=-2,\quad y'(0)=4.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+2pY(p)-2y(0)=\frac{1}{2(p^2+\frac14)}$$

$$p^2Y(p)+2p-4+2pY(p)+4=\frac{1}{2(p^2+\frac14)}$$

$$p(p+2)Y(p)=\frac{1}{2(p^2+\frac14)}-2p=\frac{-4p^3-p+1}{2(p^2+\frac14)}$$

$$Y(p)=\frac{-4p^3-p+1}{2p(p^2+\frac14)(p+2)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{-4p^3-p+1}{2p(p^2+\frac14)(p+2)}=\frac{A}{2p}+\frac{Bp+C}{p^2+\frac14}+\frac{D}{p+2}=$$

$$=\frac{Ap^3+2Ap^2+\frac14Ap+\frac12A+2Bp^3+4Bp^2+2Cp^2+4Cp+2Dp^3+\frac12Dp}{2p(p^2+\frac14)(p+2)}$$

$$\begin{cases}A+2B+2D=-4\\2A+4B+2C=0\\\frac14A+4C+\frac12D=-1\\\frac12A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=-16/17\\C=-2/17\\D=-35/17\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(p)=\frac1p-\frac{16}{17}\frac{p}{p^2+\frac14}-\frac{2}{17}\frac{1}{p^2+\frac14}-\frac{35}{17}\frac{1}{p+2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=1-\frac{16}{17}\cos\frac t2-\frac{4}{17}\sin\frac t2-\frac{35}{17}e^{-2t}$$

Ответ: $y(t)=1-\frac{16}{17}\cos\frac t2-\frac{4}{17}\sin\frac t2-\frac{35}{17}e^{-2t}$

Задача 25

Материальная точка массы m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат с силой F=kx, пропорциональной расстоянию. На точку действует сила сопротивления среды R=rv, пропорциональная скорости v. При t=0 расстояние точки от начала координат x_0, а скорость v_0. Найти закон движения x=x(t) материальной точки.

$k = 2m,\ r = m,\ x_0 = 1м,\ v_0 = 1м/с.$

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = kx - rv$$

$$\ddot{x}m - r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 1$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m - m\dot{x} + 2mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) - pX(p) + x(0) + 2X(p) = 0$$

$$(p^2 - p + 2)X(p) - p = 0$$

$$X(p) = \frac{p}{p^2 - p + 2} = \frac{p}{(p-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = \frac{p - \frac{1}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}}\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{7}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$$

Ответ: $x(t) = e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{7}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1 \\ \dot{y} = 4x - 2y \end{cases}$$

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = 2X(p) + 3Y(p) + 1/p \\ pY(p) - y(0) = 4X(p) - 2Y(p) \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) + 1 = 2X(p) + 3Y(p) + 1/p \\ pY(p) = 4X(p) - 2Y(p) \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) = 4X(p) - 2Y(p)$$

$$X(p) = \frac{pY(p) + 2Y(p)}{4}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p\frac{pY(p) + 2Y(p)}{4} + 1 = 2\frac{pY(p) + 2Y(p)}{4} + 3Y(p) + 1/p$$

$$Y(p) = \frac{4/p - 4}{p^2 - 16}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{4/p - 4}{p^2 - 16} = 4\frac{1}{p}\frac{1}{p^2 - 16} - \frac{4}{p^2 - 16} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = -\tfrac{1}{4}(1 - \cos 4it) - \mathrm{sh}4t = \tfrac{1}{4}\mathrm{ch}4t - \mathrm{sh}4t - \tfrac{1}{4}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = 4x - 2y \Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{4}(\dot{y} + 2y) = \tfrac{1}{4}(\mathrm{sh}4t - 4\mathrm{ch}4t + \tfrac{1}{2}\mathrm{ch}4t - 2\mathrm{sh}4t - \tfrac{1}{2}) =$$

$$= -\tfrac{7}{8}\mathrm{ch}4t - \tfrac{1}{4}\mathrm{sh}4t - \tfrac{1}{8}$$

Ответ:

$$x(t) = -\tfrac{7}{8}\mathrm{ch}4t - \tfrac{1}{4}\mathrm{sh}4t - \tfrac{1}{8}$$

$$y(t) = \tfrac{1}{4}\mathrm{ch}4t - \mathrm{sh}4t - \tfrac{1}{4}$$

Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

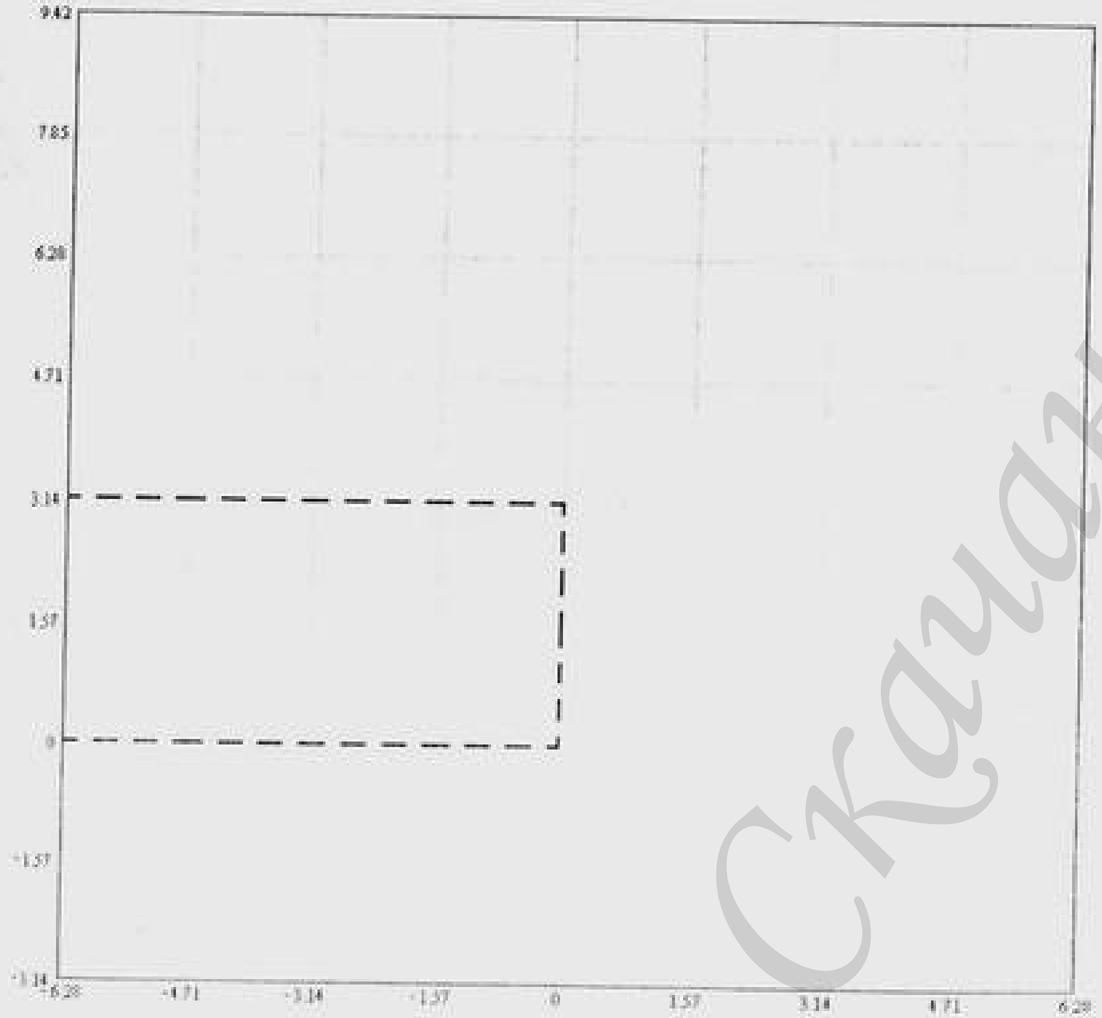
$w = \ln(z)$: сектор $|z|<1$; $0<\arg(z)<\alpha\le 2\pi$.

Представим z в виде $R\cdot e^{i\arg(z)} = R\cdot e^{i\theta}$.

Произведем отображение z с помощью функции $w = \ln(z)$:

$$w = \ln(z) = \ln(Re^{i\arg(z)}) = \ln R + \ln e^{i\arg(z)} = \ln R + i\arg(z)\ln e =$$
$$= \ln R + i\arg(z)$$

Поскольку $R\in(0;1)$, а $0<\arg(z)<\alpha$, то заданный угол отображается на комплексной плоскости как полуполоса $-\infty<\mathrm{Re}(w)<\ln(1)=0$, $0<\mathrm{Im}(w)<\alpha\le 2\pi$. Для примера приведем $\alpha=\pi$:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\dots,n-1; z \ne 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z=x+iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\mathrm{sh}\, z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \mathrm{ch}\, z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z \qquad \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k, k = 0,\pm1,\pm2,\dots$$

$$\mathrm{Arc}\sin z = -i\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \mathrm{Arc}\cos z = -i\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz} \qquad \mathrm{Arcctg}\, z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z - i}{z + i}$$

Аналитические функции

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z\in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$