/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[3]{27}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\ldots,n-1;\quad z\neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[3]{27}$:

$$\sqrt[3]{27}=3$$

$$\sqrt[3]{27}=-\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt[3]{27}=-\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\sqrt[3]{27}=\left\{3;-\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\cos(\pi/6-i)$

Используем формулу косинуса разности:

$$\cos(\pi/6-i)=\cos(\pi/6)\cos(i)+\sin(\pi/6)\sin(i)$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$\cos(\pi/6)\cos(i)+\sin(\pi/6)\sin(i)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{2}\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\right)$$

Ответ: $\cos(\pi/6-i)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{2}\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\right)$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arcth}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$$

Функция Arcth является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arcth}\,z=-i\cdot\mathrm{Arcctg}\left(\frac{z}{i}\right)=-i\cdot\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{\frac{z}{i}-i}{\frac{z}{i}+i}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-1}$$

Подставим вместо z значение $\frac{4+3i}{5}$:

$$\mathrm{Arcth}\left(\frac{4+3i}{5}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{\frac{4+3i}{5}+1}{\frac{4+3i}{5}-1}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{4+3i+5}{4+3i-5}=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{9+3i}{-1+3i}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{3i(1-3i)}{-1+3i}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(-3i)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),k=0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(-3i)=\frac{1}{2}[\ln|-3i|+i(\arg(-3i)+2\pi k)]=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{i}{2}[\arg(-3i)+2\pi k]\approx\frac{1}{2}\cdot1{,}099+\frac{i}{2}\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$$

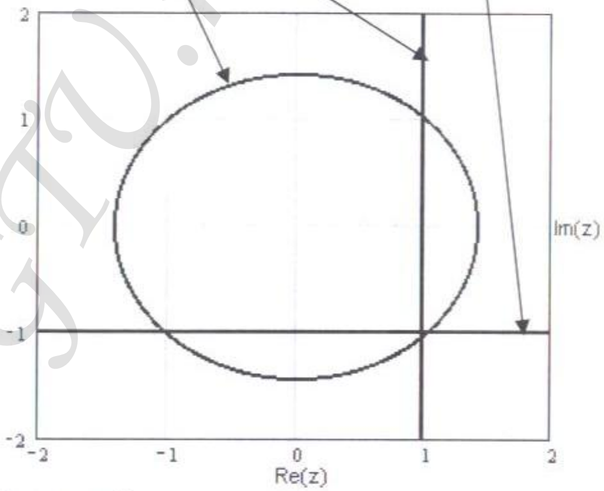
$k=0,\pm1,\pm2,...$

Ответ: $\mathrm{Arcth}\left(\frac{4+3i}{5}\right)\approx\frac{1}{2}\cdot1{,}099+\frac{i}{2}\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right],k=0,\pm1,\pm2,...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$z\bar{z}\le 2\Leftrightarrow|z|\le\sqrt{2},\quad \mathrm{Re}\,z<1,\quad \mathrm{Im}\,z>-1$



Задача 5

Определить вид кривой:

$$z=\frac{2+t}{2-t}+i\frac{1+t}{1-t}$$

Уравнение вида $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид $x = x(t)$, $y = y(t)$. В нашем случае:

$$x(t)=\frac{2+t}{2-t};\quad y(t)=\frac{1+t}{1-t}$$

Выразим параметр t через x и y:

$$x=\frac{2+t}{2-t}\Rightarrow 2x-xt=2+t\Rightarrow 2x-2=t(x+1)\Rightarrow t=\frac{2(x-1)}{x+1}$$

$$y=\frac{1+t}{1-t}\Rightarrow y-yt=1+t\Rightarrow y-1=t(y+1)\Rightarrow t=\frac{y-1}{y+1}$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\frac{2(x-1)}{x+1}=\frac{y-1}{y+1}\Rightarrow\frac{2(x-1)}{x+1}-\frac{y-1}{y+1}=0$$

Ответ: $\frac{2(x-1)}{x+1}-\frac{y-1}{y+1}=0$

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной действительной части u(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} + x$$

$$f(1) = 2$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x + iy) = \frac{-x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{-(x - iy)^2 + (x^2 + y^2)^2}{(x - iy)^2(x + iy)^2} = \frac{-1}{(x + iy)^2} + 1 = 1 - \frac{1}{z^2}$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int(1 - \frac{1}{z^2})dz = z + \frac{1}{z} + C$$

Определим константу С:

$$f(1) = 1 + 1 + C = 2 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

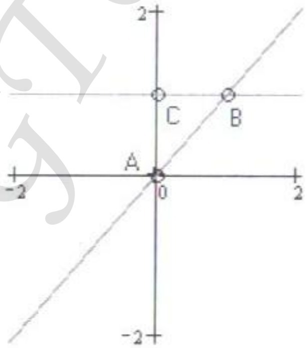
Ответ: $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_{ABC}(z^9 + 1)dz;\ ABC - \text{ломаная}: z_A = 0, z_B = 1 + i; z_C = i$$

Покажем ломаную, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y), где z = x + iy:

$$f(x, y) = (x + iy)^9 + 1 = \underbrace{x^9 - 36x^7y^2 + 126x^5y^4 - 84x^3y^6 + 9xy^8 + 1 +}_{u(x,y)}$$

$$+ i \cdot (\underbrace{9x^8y - 84x^6y^3 + 126x^4y^5 - 36x^2y^7 + y^9}_{v(x,y)})$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 9x^8 - 252x^6y^2 + 630x^4y^4 - 252x^2y^6 + 9y^8 = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -72x^7y + 504x^5y^3 - 504x^3y^5 + 72xy^7 = -\frac{\partial v}{\partial x};$$

Условия Коши-Римана выполняются, следовательно, функция является аналитической. Тогда результат от пути интегрирования не зависит:

$$\int_{ABC} f(z)dz = \int_0^i (z^9 + 1)dz = \left.\frac{z^{10}}{10} + z\right|_0^i = i - \frac{1}{10}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{ABC} f(z)dz = i - \frac{1}{10}$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}=\frac{5(z+20)}{-z^2(z+5)(z-10)}=-\frac{5}{z^2}\cdot\frac{z+20}{(z+5)(z-10)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

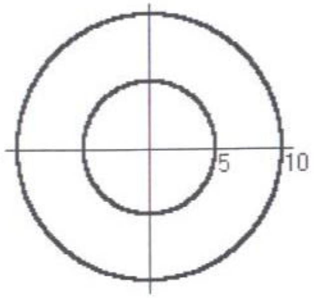
$$\frac{z+20}{(z+5)(z-10)}=\frac{A}{z+5}+\frac{B}{z-10}=\frac{Az-10A+Bz+5B}{(z+5)(z-10)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=-1;B=2\}\Rightarrow\frac{z+20}{(z+5)(z-10)}=\frac{-1}{z+5}+\frac{2}{z-10}.$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{5}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+5}-\frac{2}{z-10}\right)$$

Особые точки: $z=0;z=-5;z=10$



Рассмотрим область $|z|<5$:

$$f(z)=\frac{5}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+5}-\frac{2}{z-10}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1-(-\frac{z}{5})}+\frac{1}{1-\frac{z}{10}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{5}+\frac{z^2}{25}-\frac{z^3}{125}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{10}+\frac{z^2}{100}+\frac{z^3}{1000}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{5z}+\frac{1}{25}-\frac{z}{125}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{10z}+\frac{1}{100}+\frac{z}{1000}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $5<|z|<10$:

$$f(z)=\frac{5}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+5}-\frac{2}{z-10}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{5}{z(1+\frac{5}{z})}+\frac{1}{1-\frac{z}{10}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{5}{z}-\frac{25}{z^2}+\frac{125}{z^3}-\frac{625}{z^4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{10}+\frac{z^2}{100}+\frac{z^3}{1000}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{5}{z^3}-\frac{25}{z^4}+\frac{125}{z^5}-\frac{625}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{10z}+\frac{1}{100}+\frac{z}{1000}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>10$:

$$f(z)=\frac{5}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+5}-\frac{2}{z-10}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{5}{z(1+\frac{5}{z})}-\frac{10}{z(1-\frac{10}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{5}{z}-\frac{25}{z^2}+\frac{125}{z^3}-\frac{625}{z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{10}{z}+\frac{100}{z^2}+\frac{1000}{z^3}+\frac{10000}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{5}{z^3}-\frac{25}{z^4}+\frac{125}{z^5}-\frac{625}{z^6}+\ldots\right)-\left(\frac{10}{z^3}+\frac{100}{z^4}+\frac{1000}{z^5}+\frac{10000}{z^6}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<5: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{5z}+\frac{1}{25}-\frac{z}{125}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{10z}+\frac{1}{100}+\frac{z}{1000}+\ldots\right)$$

$$5<|z|<10: f(z)=\left(\frac{5}{z^3}-\frac{25}{z^4}+\frac{125}{z^5}-\frac{625}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{10z}+\frac{1}{100}+\frac{z}{1000}+\ldots\right)$$

$$|z|>10: f(z)=\left(\frac{5}{z^3}-\frac{25}{z^4}+\frac{125}{z^5}-\frac{625}{z^6}+\ldots\right)-\left(\frac{10}{z^3}+\frac{100}{z^4}+\frac{1000}{z^5}+\frac{10000}{z^6}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z\text{-}z_0$.

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+4},\ z_0=-3+2i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+4}=\frac{1}{z-2i}+\frac{1}{z+2i}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{(z-z_0)-3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-3)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+2i}=\frac{1}{(z-z_0)-3+4i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-3+4i)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3-4i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{1}{z-2i}+\frac{1}{z+2i}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3-4i)^{n+1}}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{(3-4i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{(3-4i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=z\sin\frac{z^2-2z}{(z-1)^2},\ z_0=1$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-1;\ z\sin\frac{z^2-2z}{(z-1)^2}=(z'+1)\sin\frac{z'^2+1}{z'^2}=(z'+1)\sin\left(1+\frac{1}{z'^2}\right)=$$

$$=z'\sin 1\cos\frac{1}{z'^2}+z'\cos 1\sin\frac{1}{z'^2}+\sin 1\cos\frac{1}{z'^2}+\cos 1\sin\frac{1}{z'^2}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=z'\sin 1\cos\frac{1}{z'^2}+z'\cos 1\sin\frac{1}{z'^2}+\sin 1\cos\frac{1}{z'^2}+\cos 1\sin\frac{1}{z'^2}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2!z'^4}+\frac{1}{4!z'^8}-\frac{1}{6!z'^{12}}+\ldots\right)z'\sin 1+\left(\frac{1}{z'^2}-\frac{1}{3!z'^6}+\frac{1}{5!z'^{10}}-\ldots\right)z'\cos 1+$$

$$+\left(1-\frac{1}{2!z'^4}+\frac{1}{4!z'^8}-\frac{1}{6!z'^{12}}+\ldots\right)\sin 1+\left(\frac{1}{z'^2}-\frac{1}{3!z'^6}+\frac{1}{5!z'^{10}}-\ldots\right)\cos 1=$$

$$=z'\sin 1+\sin 1+\frac{\cos 1}{z'}+\frac{\cos 1}{z'^2}-\frac{\sin 1}{2!z'^3}-\frac{\sin 1}{2!z'^4}-\frac{\cos 1}{3!z'^5}-\frac{\cos 1}{3!z'^6}+\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$:

$$f(z)=z\sin 1+\frac{\cos 1}{z-1}+\frac{\cos 1}{(z-1)^2}-\frac{\sin 1}{2!(z-1)^3}-\frac{\sin 1}{2!(z-1)^4}-$$

$$-\frac{\cos 1}{3!(z-1)^5}-\frac{\cos 1}{3!(z-1)^6}+\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=z\sin 1+\frac{\cos 1}{z-1}+\frac{\cos 1}{(z-1)^2}-\frac{\sin 1}{2!(z-1)^3}-\frac{\sin 1}{2!(z-1)^4}-$$

$$-\frac{\cos 1}{3!(z-1)^5}-\frac{\cos 1}{3!(z-1)^6}+\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{ch3z-1}{\sin z-z+z^3/6}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{ch3z-1}{\sin z-z+z^3/6}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{array}{l} g(z)=ch3z-1;\\ h(z)=\sin z-z+z^3/6;\end{array}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g'(z)=3sh3z; g'(0)=3sh0=0$$

$$g''(z)=9ch3z; g'(0)=9ch0=9$$

$$h'(z)=\cos(z)-1+z^2/2; h'(0)=\cos 0-1=0$$

$$h''(z)=-\sin(z)+z; h''(0)=-\sin 0+0=0;$$

$$h'''(z)=-\cos(z)+1; h'''(0)=-\cos 0+1=0;$$

$$h^{IV}(z)=\sin(z); h^{IV}(0)=\sin 0=0;$$

$$h^{V}(z)=\cos(z); h^{V}(0)=\cos 0=1;$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 5 – 2 = 3.

Ответ: Точка z = 0 является полюсом 3-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=ctg\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}=\frac{z^2\cos(1/z)-\sin(1/z)}{z^2\sin(1/z)}$$

Перейдем к новой переменной:

$$t=\frac{1}{z}; f(t)=\frac{\cos t-t^2\sin t}{\sin t}$$

Эта функция не является аналитической при sin t = 0. Найдем t, соответствующие этому случаю:

$$\sin t=0\Rightarrow t=\pi k; k\in z$$

Запишем данную функцию в виде отношения функций g(t) и h(t):

$$f(t)=\frac{\cos t-t^2\sin t}{\sin t};\quad \begin{array}{l} g(t)=\cos t-t^2\sin t;\\ h(t)=\sin t;\end{array}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при t = πk:

$$g(\pi k)\neq 0$$

$$h(\pi k)=0$$

$$h'(t)=\cos t; h'(\pi k)\neq 0$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при t = πk выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки t = πk являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при t = πk для функций h(t) и g(t). В данном случае, это 1 – 0 = 1.

$$t=\pi k\Rightarrow z=\frac{1}{t}=\frac{1}{\pi k}; k\in z$$

Рассмотрим точку z = 0. Для любого δ>0 существует такое значение k, что |1/πk|<δ. Таким образом z = 0 не является изолированной особой точкой, так как противоречит определению, гласящему, что функция должна быть аналитической в некотором кольце вокруг этой точки, а, какой бы мы не взяли радиус кольца, в нем найдется особая точка вида 1/πk, в которой функция не является аналитической.

Ответ: Точки $z=1/\pi k; k\in z$ для данной функции являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-3/2|=2} \underbrace{\frac{\sin z}{z(z-\pi)(z+\pi/3)}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = 0$
$z = \pi$
$z = -\pi/3$

В рассматриваемую область попадают только точки $z = 0$ и $z = \pi$.

Точка $z_1 = 0$ является устранимой особой точкой, следовательно, вычет в точке z_1 равен нулю.

Точка $z_2 = \pi$ является устранимой особой точкой, следовательно, вычет в точке z_2 также равен нулю:

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z^3+\sin 2z}{(z-\pi)\sin(z/2)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z^3+\sin 2z}{(z-\pi)\sin(z/2)} dz = 0$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{e^{iz}-1}{z^3}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: z = 0. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$\frac{e^{iz}-1}{z^3} = \frac{-1+\left(1+iz-\frac{z^2}{2!}+\frac{iz^3}{3!}-\frac{z^4}{4!}+\ldots\right)}{z^3} =$$

$$= \frac{i}{z^2} - \frac{1}{2!z} + \frac{i}{3!} - \frac{z}{4!} + \ldots$$

Правильная часть получившегося ряда содержит бесконечное число членов, из чего следует, что это – полюс. Порядок полюса равен порядку старшего члена главной части. Таким образом, z = 0 – это полюс 2-го порядка и вычет находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[f(z)z^2] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}-1}{z}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{ie^{iz}}{z} - \frac{(e^{iz}-1)}{z^2}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{zie^{iz}-e^{iz}+1}{z^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz}-1}{z^3} dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz}-1}{z^3} dz = -\pi i$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=0,3} \underbrace{\frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции $z = \pi k/8$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad \begin{matrix} g(z) = e^{4z}-1-\sin 4z \\ h(z) = z^2 \operatorname{sh} 8iz \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z \operatorname{sh} 8iz}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{4e^{4z}-4\cos 4z}{i\sin 8z + 8iz\cos 8z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{16e^{4z}+16\sin 4z}{16i\cos 8z - 64iz\sin 8z}\right) = \frac{16}{16i} = \frac{1}{i} = -i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot (-i) = 2\pi$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz} dz = 2\pi$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-4|=2} \left(z \operatorname{sh}\frac{1}{z-4} + \frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z-3)^2(z-1)} \right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-4|=2} \underbrace{z \operatorname{sh}\frac{1}{z-4}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z-4|=2} \underbrace{\frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z-3)^2(z-1)}}_{f_2(z)} dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint\limits_{|z-4|=2} z \operatorname{sh}\frac{1}{z-4} dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left\{\begin{matrix} t = z-4 \\ z = t+4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z \operatorname{sh}\frac{1}{z-4} = (t+4)\operatorname{sh}\frac{1}{t}$$

Единственной особой точкой этой функции является t=0. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t+4)\operatorname{sh}\frac{1}{t} = (t+4)\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{3!t^3} + \frac{1}{5!t^5} + \frac{1}{7!t^7} + \frac{1}{9!t^9} + \ldots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3!t^2} + \frac{1}{5!t^4} + \frac{1}{7!t^6} + \ldots\right) + \left(\frac{4}{t} + \frac{4}{3!t^3} + \frac{4}{5!t^5} + \frac{4}{7!t^7} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{4}{t} + \frac{1}{3!t^2} + \frac{4}{3!t^3} + \frac{1}{5!t^4} + \frac{4}{5!t^5} + \frac{1}{7!t^6} + \frac{4}{7!t^7} + \ldots$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов, из чего следует, что t=0 является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+4)\operatorname{sh}\frac{1}{t}\right] = C_{-1} = 4$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-4|=2} z\,\mathrm{sh}\frac{1}{z-4}\,dz = \oint\limits_{|t|=2}(t+4)\,\mathrm{sh}\frac{1}{t}\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+4)\,\mathrm{sh}\frac{1}{t}\right] =$$

$$= 2\pi i\cdot 4 = 8\pi i$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint\limits_{|z-4|=2}\frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z-3)^2(z-1)}\,dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=1 и z=3. При этом точка z=1 не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=3 является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=3} f_2(z) = \lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-3)^2\cdot 2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z-3)^2(z-1)}\right] = \lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left[\frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{z-1}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 3}\left[\frac{\pi}{3(z-1)}\cos\left(\frac{\pi z}{6}\right) - \frac{2}{(z-1)^2}\sin\left(\frac{\pi z}{6}\right)\right] = -\frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-4|=2}\frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z-3)^2(z-1)}\,dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=3} f_2(z) = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-4|=2}\left(z\,\mathrm{sh}\frac{1}{z-4} + \frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z-3)^2(z-1)}\right)dz = \oint\limits_{|z-4|=2} z\,\mathrm{sh}\frac{1}{z-4}\,dz +$$

$$+\oint\limits_{|z-4|=2}\frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z-3)^2(z-1)}\,dz = 8\pi i - \pi i = 7\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-4|=2}\left(z\,\mathrm{sh}\frac{1}{z-4} + \frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z-3)^2(z-1)}\right)dz = 7\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{7}\sin t + 4}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z)\,dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{7}\sin t + 4} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\frac{\sqrt{7}}{2i}(z-\frac{1}{z}) + 4} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\frac{\sqrt{7}}{2}(z^2-1) + 4iz} =$$

$$= \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{7}(z^2-1) + 8iz} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{7}(z+i\sqrt{7})(z+i/\sqrt{7})}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = -i\sqrt{7};\quad z = -i/\sqrt{7};$

Точка $-i\sqrt{7}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $-i/\sqrt{7}$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-i/\sqrt{7}} f(z) = \lim_{z\to -i/\sqrt{7}}[f(z)(z+i/\sqrt{7})] =$$

$$= \lim_{z\to -i/\sqrt{7}}\frac{2}{\sqrt{7}(z+i\sqrt{7})} = \frac{2}{\sqrt{7}(-i/\sqrt{7}+i\sqrt{7})} = -\frac{i}{3}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{7}(z+i\sqrt{7})(z+i/\sqrt{7})} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{7}\sin t + 4} = \frac{2}{3}\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2+\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2+\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(2+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i(2z+\frac{1}{2}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left(z+2+\sqrt{3}\right)^2\left(z+2-\sqrt{3}\right)^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-2-\sqrt{3}\quad z=-2+\sqrt{3};$

Точка $z=-2-\sqrt{3}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=-2+\sqrt{3}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-2+\sqrt{3}}f(z)=\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{d}{dz}[f(z)(z+2-\sqrt{3})^2]=\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left(z+2+\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{4}{i}\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z+2+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4}{i}\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{-z+2+\sqrt{3}}{\left(z+2+\sqrt{3}\right)^3}=$$

$$=\frac{4}{i}\cdot\frac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{\left(-2+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}\right)^3}=\frac{4}{i}\cdot\frac{4}{(2\sqrt{3})^3}=\frac{2}{3\sqrt{3}i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left(z+2+\sqrt{3}\right)^2\left(z+2-\sqrt{3}\right)^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{2}{3\sqrt{3}i}\right)=\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2+\cos t)^2}=\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^4}$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^4}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2+1)^4}$$

Особые точки:

$z=i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=i$ является полюсом третьего порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=i}f(z)=\frac{1}{6}\lim_{z\to i}\frac{d^3}{dz^3}[f(z)(z-i)^4]=\frac{1}{6}\lim_{z\to i}\frac{d^3}{dz^3}\left[\frac{1}{(z+i)^4}\right]=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{-4}{(z+i)^5}\right]=\frac{1}{6}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{20}{(z+i)^6}\right]=\frac{1}{6}\lim_{z\to i}\frac{-120}{(z+i)^7}=\frac{5}{32i}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^4}=2\pi i\frac{5}{32i}=\frac{5\pi}{16}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^4}=\frac{5\pi}{16}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\lambda x dx=\operatorname{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$(x^2+16)(x^2+9)=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm 3i; z_{3,4}=\pm 4i;$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Из этого следует:

$z_m=\{3i;4i\}$

Эти особые точки являются простыми полюсами. Найдем в них вычеты:

$$1)\underset{z=3i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 3i}\frac{(z-3i)}{(z^2+16)(z^2+9)}e^{iz}=\lim_{z\to 3i}\frac{e^{iz}}{(z^2+16)(z+3i)}=$$

$$=\frac{e^{-3}}{(-9+16)(3i+3i)}=\frac{e^{-3}}{42i}$$

$$2)\underset{z=4i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 4i}\frac{(z-4i)}{(z^2+16)(z^2+9)}e^{iz}=\lim_{z\to 4i}\frac{e^{iz}}{(z+4i)(z^2+9)}=$$

$$=\frac{e^{-4}}{(4i+4i)(-16+9)}=-\frac{e^{-4}}{56i}$$

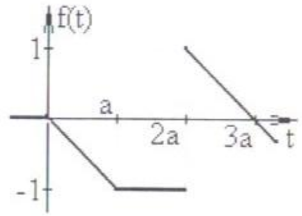
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{\pi e^{-3}}{42}-\frac{\pi e^{-4}}{56}$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)}dx=\frac{\pi e^{-3}}{42}-\frac{\pi e^{-4}}{56}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)\begin{cases}-\dfrac{t}{a} & 0<t<a\\ -1, & a<t<2a\\ \dfrac{3a-t}{a}, & 2a<t\end{cases}$$

$$f(t)=-\frac{t}{a}\cdot\eta(t)+\frac{t-a}{a}\eta(t-a)+\frac{4a-t}{a}\eta(t-2a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=-\frac{1}{ap^2}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}\right)e^{-ap}+\left(\frac{4}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-2ap}$$

Ответ: $F(p)=-\dfrac{1}{ap^2}+\left(\dfrac{1}{ap^2}-\dfrac{1}{p}\right)e^{-ap}+\left(\dfrac{4}{p}-\dfrac{1}{ap^2}\right)e^{-2ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2-4p+5}=$$

$$=\frac{Ap^2-4Ap+5A+Bp^2-2Bp+Cp-2C}{(p-2)(p^2-4p+5)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(-4A-2B+C)p+(5A-2C)}{(p-2)(p^2-4p+5)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\-4A-2B+C=-3\\5A-2C=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-4\\B=4\\C=-11\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}=-4\cdot\frac{1}{p-2}+4\cdot\frac{p}{p^2-4p+5}-11\cdot\frac{1}{p^2-4p+5}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$-4\cdot\frac{1}{p-2}+4\cdot\frac{p}{p^2-4p+5}-11\cdot\frac{1}{p^2-4p+5}=$$

$$=-4\cdot\frac{1}{p-2}+4\cdot\frac{p}{(p-2)^2+1}-11\cdot\frac{1}{(p-2)^2+1}=$$

$$=-4\cdot\frac{1}{p-2}+4\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+1}-3\cdot\frac{1}{(p-2)^2+1}\to$$

$$\to -4\cdot e^{2t}+4\cdot e^{2t}\cos t-3\cdot e^{2t}\sin t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$-4\cdot e^{2t}+4\cdot e^{2t}\cos t-3\cdot e^{2t}\sin t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''+3y'-10y=47\cos 3t-\sin 3t$$

$$y(0)=3,\quad y'(0)=-1.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+3pY(p)-3y(0)-10Y(p)=\frac{47p}{p^2+9}-\frac{3}{p^2+9}$$

$$p^2Y(p)-3p+1+3pY(p)-9-10Y(p)=\frac{47p}{p^2+9}-\frac{3}{p^2+9}$$

$$(p^2+3p-10)Y(p)=(p+5)(p-2)Y(p)=\frac{3p^3+8p^2+74p+69}{p^2+9}$$

$$Y(p)=\frac{3p^3+8p^2+74p+69}{(p^2+9)(p+5)(p-2)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{3p^3+8p^2+74p+69}{(p^2+9)(p+5)(p-2)}=\frac{Ap+B}{p^2+9}+\frac{C}{p+5}+\frac{D}{p-2}=$$

$$=\frac{(A+C+D)p^3+(B+3A-2C+5D)p^2+(3B-10A+9C+9D)p-10B-18C+45D}{(p^2+9)(p+5)(p-2)}$$

$$\begin{cases}A+C+D=3\\B+3A-2C+5D=8\\3B-10A+9C+9D=74\\-10B-18C+45D=69\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=3\\C=2\\D=3\end{cases}\Rightarrow Y(p)=-2\frac{p}{p^2+9}+\frac{3}{p^2+9}+\frac{2}{p+5}+\frac{3}{p-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=-2\cos 3t+\sin 3t+2e^{-5t}+3e^{2t}$$

Ответ: $y(t)=-2\cos 3t+\sin 3t+2e^{-5t}+3e^{2t}$

Задача 25

На материальную точку массы m действует сила сопротивления R=kv, пропорциональная скорости v. Какое расстояние пройдет точка за неограниченное время, если ей сообщена начальная скорость v_0?

$k = m/3$, $v_0 = 5$ м/с.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kv$$

$$\ddot{x}m + k\dot{x} = 0$$

Начальные условия:

$$\dot{x}(0) = v_0 = 5$$

$$x(0) = 0$$

Подставим значения k:

$$\ddot{x}m + \frac{m}{3}\dot{x} = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{3} = 0$$

Перейдем к изображениям функций:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + \frac{1}{3}pX(p) - \frac{1}{3}x(0) = 0$$

$$p(p+\frac{1}{3})X(p) - 5 = 0$$

$$p(p+\frac{1}{3})X(p) = 5$$

$$X(p) = \frac{5}{p(p+1/3)} = \frac{15}{p} - \frac{15}{p+1/3}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = 15 - 15e^{-t/3}$$

Ответ: $x(t) = 15 - 15e^{-t/3}$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 3 \\ \dot{y} = x + 2 \end{cases}$$

$x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = Y(p) + 3/p \\ pY(p) - y(0) = X(p) + 2/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = Y(p) + 3/p \\ pY(p) = X(p) + 2/p \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) = X(p) + 2/p$$

$$X(p) = pY(p) - 2/p$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p[pY(p) - 2/p] - 1 = Y(p) + 3/p$$

$$Y(p) = \frac{3 + 3/p}{p^2 - 1}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{3+3/p}{p^2-1} = \frac{3+3/p}{p^2-1} + \frac{3}{p} - \frac{3}{p} = \frac{3+3p}{p^2-1} - \frac{3}{p} = \frac{3}{p-1} - \frac{3}{p} \to$$

$$\to y(t) = 3e^t - 3$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = x + 2 \Rightarrow x(t) = \dot{y} - 2 = 3e^t - 2$$

Ответ:

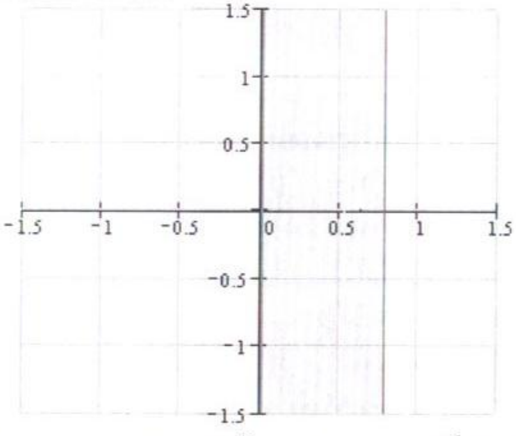
$$x(t) = 3e^t - 2$$

$$y(t) = 3e^t - 3$$

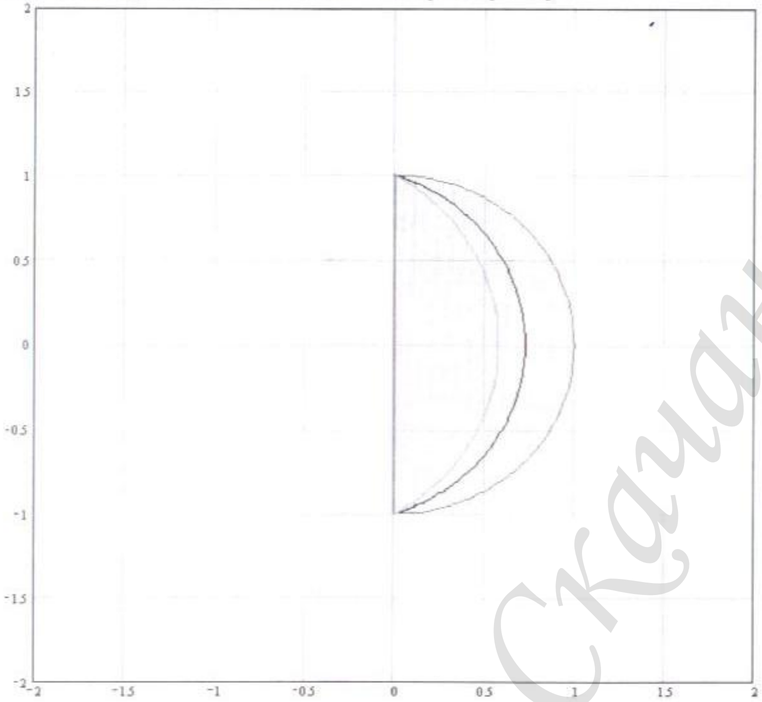
Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = tg(z)$; полоса $0<x<\pi/4$.



Каждая из вертикальных линий в полосе преобразуется в дугу, опирающуюся на точки (0;1) и (0;−1). На рисунке показаны границы получающейся области и примеры дуг:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\dots,n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z = x + iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z - i}{z + i}$$

Аналитические функции

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z \in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$