ИДЗ-10.1

1.1. Найти область определения указанной функции.

$$z=\frac{3xy}{2x-5y}$$

Решение: Область определения:

$$2x-5y\neq 0\Rightarrow 5y\neq 2x\Rightarrow y\neq\frac{2}{5}x$$

Ответ: Область определения: координатная плоскость XOY кроме прямой $y=\frac{2}{5}x$

2. Найти частные производные и частные дифференциалы данной функции.

2.2. $z=\ln\left(y^2-e^{-x}\right)$

Найдем частные производные:

$$z'_x=\left(\ln\left(y^2-e^{-x}\right)\right)'_x=\frac{1}{\left(y^2-e^{-x}\right)}\cdot\left(y^2-e^{-x}\right)'_x=\frac{1}{\left(y^2-e^{-x}\right)}\cdot\left(0-e^{-x}\cdot(-x)'_x\right)=\frac{e^{-x}}{\left(y^2-e^{-x}\right)}$$

$$z'_y=\left(\ln\left(y^2-e^{-x}\right)\right)'_y=\frac{1}{\left(y^2-e^{-x}\right)}\cdot\left(y^2-e^{-x}\right)'_y=\frac{1}{\left(y^2-e^{-x}\right)}\cdot(2y-0)=\frac{2y}{\left(y^2-e^{-x}\right)}$$

Частные дифференциалы:

$$dz'_x=\frac{e^{-x}dx}{\left(y^2-e^{-x}\right)},\ dz'_y=\frac{2ydy}{\left(y^2-e^{-x}\right)}$$

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

3.1. $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M_0(0,-1,1)$

Решение:

$$f'_x=\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x=z\cdot\left(\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'_x=z\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x=$$

$$=-\frac{z}{2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\cdot 2x=-\frac{xz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$$

$$f'_x(M_0)=f'_x(0,-1,1)=-\frac{0}{1}=0$$

$$f'_y=\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y=z\cdot\left(\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'_y=z\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y=$$

$$=-\frac{z}{2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\cdot 2y=-\frac{yz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$$

$$f'_x(M_0)=f'_x(0,-1,1)=-\frac{(-1)}{1}=1$$

$$f'_z = \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(z)'_z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_x(M_0) = f'_x(0,-1,1) = \frac{1}{1} = 1$$

4. Найти полные дифференциалы указанных функций.

4.1. $z = 2x^3y - 4xy^5$

Вычислим частные производные первого порядка:

$$z'_x = \left(2x^3y - 4xy^5\right)'_x = 2y\left(x^3\right)'_x - 4y^5(x)'_x = 2y\cdot 3x^2 - 4y^5\cdot 1 = 6x^2y - 4y^5$$

$$z'_y = \left(2x^3y - 4xy^5\right)'_y = 2x^3(y)'_y - 4x\left(y^5\right)'_y = 2x^3\cdot 1 - 4x\cdot 5y^4 = 2x^3 - 20xy^4$$

Полный дифференциал:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \left(6x^2y - 4y^5\right)dx + \left(2x^3 - 20xy^4\right)dy$$

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

5.1. $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $t_0 = 0$.

Найдем производную сложной функции: $u'_t = u'_x\cdot x'_t + u'_y\cdot y'_t$.

В данном случае:

$$u'_x = \left(e^{x-2y}\right)'_x = e^{x-2y}\cdot(x-2y)'_x = e^{x-2y} = e^{\sin t - 2t^3}$$

$$u'_y = \left(e^{x-2y}\right)'_y = e^{x-2y}\cdot(x-2y)'_y = -2e^{x-2y} = -2e^{\sin t - 2t^3}$$

$$x'_t = \cos t,\quad y'_t = 3t^2$$

Таким образом:

$$u'_t = e^{\sin t - 2t^3}\cdot\cos t - 2e^{\sin t - 2t^3}\cdot 3t^2$$

$$u'_t(0) = e^0\cdot\cos 0 - 2e^0\cdot 3\cdot 0 = 1 - 0 = 1$$

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

6.1. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$, $M_0(2,1,1)$

$$\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right)'_x = (4)'_x$$

$$3x^2 + 0 + 3z^2z'_x - 3yz - 3xyz'_x = 0$$

$$\left(z^2 - xy\right)z'_x = yz - x^2$$

$$z'_x = \frac{yz - x^2}{z^2 - xy}$$

$$z'_x(M_0) = z'_x(2,1,1) = \frac{1-4}{1-2} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)'_y=(4)'_y$$
$$0+3y^2+3z^2z'_y-3xz-3xyz'_y=0$$
$$\left(z^2-xy\right)z'_y=xz-y^2$$
$$z'_y=\frac{xz-y^2}{z^2-xy}$$
$$z'_y(M_0)=z'_y(2,1,1)=\frac{2-1}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1$$

ИДЗ 10-2.

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

3.1. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $u=\frac{y}{x}$

Найдем частные производные функции u.

$$u'_x=\left(\frac{y}{x}\right)'_x=-\frac{y}{x^2},\ u'_y=\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{x}$$

$$u''_{xx}=\left(-\frac{y}{x^2}\right)'_x=\frac{2y}{x^3},\ u''_{xy}=\left(-\frac{y}{x^2}\right)'_y=-\frac{1}{x^2},\ u''_{yy}=\left(\frac{1}{x}\right)'_y=0$$

Подставим $u''_{xx},u''_{xy},u''_{yy}$ в левую часть уравнения:

$x^2\cdot\frac{2y}{x^3}+2xy\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+y^2\cdot 0=\frac{2y}{x}-\frac{2y}{x}+0=0$ – получена правая часть уравнения.

Таким образом, данная функция удовлетворяет данному уравнению.

4. Исследовать на экстремум функцию.

$$z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$$

Решение: Найдем критические точки:

$$\begin{cases} z'_x=\frac{y}{2\sqrt{x}}-1=0 \\ z'_y=\sqrt{x}-4y+14=0 \end{cases}\Rightarrow y=2\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{x}-8\sqrt{x}+14=0\Rightarrow 7\sqrt{x}=14\Rightarrow\sqrt{x}=2$$

$x=4;\ y=4$

$M_0(4;4)$ – стационарная точка.

Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$$z''_{xx}=-\frac{y}{4\sqrt{x^3}},\ z''_{xy}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ z''_{yy}=-4=const$$

$$z''_{xx}(M_0)=z''_{xx}(4;4)=-\frac{4}{4\cdot 8}=-\frac{1}{8}$$

$$z''_{xy}(M_0)=z''_{xy}(4;4)=\frac{1}{4}$$

$$z''_{yy}(M_0)=z''_{yy}(4;4)=-4$$

$z''_{xx}(M_0)\cdot z''_{yy}(M_0)-\left(z''_{xy}(M_0)\right)^2=-\frac{1}{8}\cdot(-4)-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}>0$, значит в точке $M_0(4;4)$ существует экстремум, так как $z''_{xx}(M_0)<0$, то это – максимум:

$\max z=z(M_0)=z(4;4)=8-32-4+56=28$

Ответ: $\max z=z(4;4)=28$.