## Лекція 2

### 2.1. Визначник і мінори матриці

Розглянемо квадратну матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Квадратній матриці можна поставити у відповідність певне число, яке називається **детермінантом** або **визначником матриці.**

Детермінант матриці позначається так:

$$det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Детермінант так само, як і матриці, має порядок. Він дорівнює порядку відповідної матриці. Детермінанти можуть бути першого, другого, і $n$-ого порядків. *Поняття детермінанта вводиться лише для квадратних матриць*. Якщо розглянути деякий елемент квадратної матриці $A$, який позначимо $a_{ij}$, що стоїть на перетині $i$-го рядка та $j$-го стовпця, і побудувати матрицю без цього рядка і стовпця, то дістанемо матрицю ($n$-1)-го порядку

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Цій матриці відповідає визначник ($n$-1)- го порядку, який називається **мінором матриці *A***, який відповідає елементу $a_{ij}$.

**Мінором ($n$-1)**-го порядку **елемента** $a_{ij}$ **матриці** $n$-го порядку називається визначник нової матриці, яка утворюється з даної матриці внаслідок викреслювання рядка і стовпця, які перетинаються на цьому елементі. Мінор матриці позначається так:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

У матриці першого порядку $A=(a_{11})$ за означенням мінора немає.

Матриця другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ має чотири мінори першого порядку: $M_{11}=a_{22}$ ; $M_{12}= a_{21}$ ; $M_{21}= a_{12}$ ; $M_{22}=a_{11}$.

Для матриці $A$ мінори $\boldsymbol{M_{11}, M_{22}, \ldots, M_{nn}}$ називаються **головними.**

Детермінант порядку $n$, де $n>1$- це величина, що може бути знайдена за формулою: $det\, A=\sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^{1+j}a_{1j}M_{1j}$. Це означення є змістовним в індуктивному плані, тобто правильність цієї формули можна довести методом математичної індукції. Наприклад,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Як бачимо, визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів, які стоять на головній і побічних діагоналях.

Якщо маємо визначник 3-го порядку,то

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Таким чином

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Введемо поняття **алгебраїчного доповнення елемента** $a_{ij}$ позначивши його через $A_{ij}$: $\boldsymbol{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$

Тоді визначення детермінанта можна записати у вигляді

$$det\, A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}$$

і показати, що

$$det\, A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}\text{, де } i = 1,2,...,n;$$

або

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},\ j = 1, 2, ..., n.$$

## Властивості визначників

1. *Значення визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити стовпцями, причому кожний рядок замінити стовпцем з тим самим номером*

Ця властивість означає *рівнозначність рядків і стовпців визначника*

2. *Якщо поміняти місцями два стовпці(рядки) визначника, то визначник поміняє знак на протилежний.*

Для доведення властивостей 1 і 2 достатньо розкрити кожний визначник і порівняти знайдені результати.

3. *Визначник,який має два однакові стовпці(рядки), дорівнює нулю.*

Дійсно, нехай визначник $\Delta$ має два однакові стовпці. Тоді, помінявши місцями ці стовпці, дістанемо визначник, що дорівнює $-\Delta$,тобто $\Delta = -\Delta$ звідси знаходимо $2\Delta=0$, або $\Delta=0$.

4. *Якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.* Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ma_{12} \\ a_{21} & ma_{22} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Звідси як наслідок маємо, що коли помножити всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) на одне і те саме, то і визначник помножиться на це число. Якщо елементи стовпця визначника подати як компоненти вектора, то властивість 4 випливає із означення операції множення вектора на число.

5. *Визначник, елементи двох стовпців (рядків) якого відповідно пропорціональні, дорівнює нулю.* Дійсно, нехай маємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

В якому $a_{12} = ma_{11}$ і $a_{22} = ma_{21}$. Тоді враховуючи властивості 3 та 4, дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & ma_{11} \\ a_{21} & ma_{21} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

6. *Якщо кожний елемент якого-небудь стовпця (рядка) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких стовпцями(рядками) є відповідні доданки, а решта збігається із стовпцями(рядками) заданого визначника:*

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Якщо позначити

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

то

$$\Delta=\Delta_1+\Delta_2,$$

Тобто властивість 6 виражає правило додавання визначників.

7. *Визначник не зміниться, якщо до елементів якого-небудь його стовпця (рядка) додати відповідні елементи іншого стовпця (рядка), помножені на одне й те саме число.*

Справді, нехай дано два визначники, наприклад, третього порядку:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{і} \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11}+ma_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ma_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ma_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Тоді з урахуванням властивостей 3 , 4 і 6, маємо

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+m\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\Delta+m\cdot 0=\Delta.$$

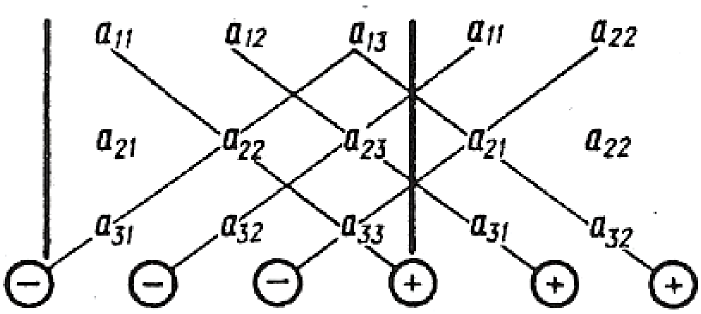
8. *Сума добутків елементів $a_{ij}$ деякого рядка(стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця)дорівнює нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=0, \quad i\neq j; \quad i, j=1, 2, \ldots, n.$$

## Правила обчислення визначників третього порядку

Правило “**приписування” стовбців.**

Це правило передбачає приписування двох перших стовпців зправа від визначника:




Легко помітити, що співмножники кожного з шести доданків для обчислення визначника третого порядку за означенням тепер розміщуються на прямих, паралельних головній і другорядній діагоналям.

**Правило розкладання визначника за елементами будь-якого рядка або стовбця.**

Використовуючи формулу запису детермінанта через алгебраїчні доповнення отримаємо правило обчислення визначників третього порядку методом розкладання за елементами будь-якого рядка або стовбця.

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Ці формули називаються **розкладом детермінанта за елементами рядка або стовпця.**

Визначник дорівнює сумі добутків елементів $a_{ij}$ деякого рядка(стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

Запишемо розкладання визначника третього порядку за елементами, наприклад, першого рядка:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

де

$$A_{11}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix},\quad A_{13}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

**Правило зведення визначника до трикутного вигляду**

Визначник верхньої або нижньої трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі: нехай задано матрицю

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.\qquad \text{Тоді}\qquad \det A=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & 0\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}0\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & 0\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}0\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}\cdot 0)=a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Доведення для визначників вищих порядків відбувається аналогічно.

Враховуючи цей результат та властивості визначників можна обчислити визначник будь-якого порядку перетворивши його до трикутного вигляду.

Визначники вищих порядків розкривають лише розкладанням за елементами якого-небудь стовбця чи рядка або методом зведення до трикутного вигляду.

**Приклад 2.2.** Обчислити визначник $\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 7 & -2\end{vmatrix}$ а) методом дописування стовбців; б) методом розкладання за елементами стовбця або рядка; в) методом зведення до трикутного вигляду.

**Розв’язання.**

а) $$\left|\begin{matrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 7 & -2\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & 7\end{matrix} =$$

\-    \-    \-        +    +    +

$$=1\cdot 0\cdot(-2)+1\cdot 1\cdot 3+(-1)\cdot 2\cdot 7-(-1)\cdot 0\cdot 3-1\cdot 1\cdot 7-(-2)\cdot 2\cdot 1=-14.$$

б)

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 7 & -2\end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 7 & -2\end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 7\end{vmatrix} =$$

$$=-10-4=-14.$$

в) $$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 7 & -2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ 2-1\times 2\\ 3-1\times 3\end{matrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ 3+2\times 2\end{matrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 7\end{vmatrix} = -14$$

.

**Приклад 2.3**. Обчислити визначник: а) методом розкладання за елементами рядка або стовбця; б) методом зведення до трикутного вигляду.

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 0 & 1 & 5 & 19\\ 0 & 0 & 2 & 18\end{vmatrix}.$$

**Розв’язання**. а) Розкладемо визначник за елементами четвертого рядка:

$$\Delta = 0+0+(-1)^{4+3}\cdot 2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 8\\ 0 & 1 & 19\end{vmatrix} + (-1)^{4+4}\cdot 18\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 5\end{vmatrix}.$$

Розкриваючи визначник третього порядку за правилом трикутників або приписування стовпців, дістанемо

$$\Delta = -2\cdot 12 + 18\cdot 2 = 12.$$

б)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2-1 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3-2 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 4-3 \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2\cdot 6 = 12.$$

## 2.2. Ранг матриці

Поняття мінора можна ввести і для прямокутної матриці. Для цього треба з прямокутної матриці викреслити стільки рядків і стовпців, щоб після закреслювання утворювалась квадратна матриця. Наприклад, для матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

можна побудувати чотири квадратні матриці третього порядку:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}. \quad A_4 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

Кожний з визначників цих матриць буде мінором матриці *A*.

Якщо матриця має відмінний від нуля мінор порядку $r$, а всі мінори вищого порядку (якщо вони є) дорівнюють нулю, то число $r$ називається **рангом матриці.** Позначення: $r = rang\ A$.
Ранг нуль-матриці за означенням вважають рівним нулю. Відмінний від нуля мінор найвищого порядку називається **базисним.** Зрозуміло, що у матриці може бути декілька базисних мінорів. Стовпці матриці, на яких міститься базисний мінор, називаються **базисними стовпцями,** а рядки, на яких він лежить - **базисними рядками.**

**Теорема 2.1.** ***(про базисний мінор).*** *Базисні стовпці (рядки) лінійно незалежні. Будь-який рядок (стовпець) довільної матриці є лінійною комбінацією базисних рядків (стовпців).*

**Наслідок.** *Максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних рядків і це число дорівнює рангу матриці.*

Якщо рядки (стовпці) матриці є координатами векторів, то ранг матриці розміру $m \times n$ дорівнює числу $r$ її лінійно незалежних векторів. При цьому $r < m < n$. Число лінійно незалежних векторів у системі векторів називають **рангом системи векторів**. Ранг системи векторів дорівнює рангу матриці, яка складається із координат цих векторів.

Для визначення рангу матриці застосовують **метод обвідних мінорів**, що ґрунтується на такій теоремі.

**Теорема 2.2.** *Якщо матриця $A$ містить мінор $r$-го порядку, який не дорівнює нулю, а всі мінори $(r+1)$-го порядку, що обводять цей мінор, дорівнюють нулю, то $r$ є рангом матриці.*

**Приклад 2.2.** Визначити ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

**Розв'язання.** Запишемо матриці третього порядку.

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Мінор першого порядку, розмішений у верхньому куті матриці $A_1$, не дорівнює нулю ($1 \neq 0$). Обвідний її мінор другого порядку також не дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5\neq 0.$$

Обвідний мінор третього порядку матриці $A_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 + 4 - 9 + 4 - 2=0.$$

Інші матриці $A_2$, $A_3$, $A_4$ дадуть ті самі результати, що і матриця $A_1$.

**Відповідь**: *rang (A)* = 2

Для обчислення рангу матриці $A$ застосовується також **метод елементарних перетворень.**

Елементарними перетвореннями матриці є:

1) перестановка рядків (стовпців);
2) множення стовпця (рядка) на число, відмінне віл нуля;
3) додавання до елементів рядка (стовпця) заповідних елементів іншого рядка (стовпця), попередньо помножених на деяке число

Справедлива така теорема.

**Теорема 2.3.** *Елементарні перетворення не змінюють ранга матриці.* Скориставшись елементарними перетвореннями, матрицю можна привести до вигляду, коли усі елементи, крім $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{rr}$ $r \le min(m,n)$, дорівнюють нулю. Тоді ранг матриці дорівнює $r$.

Дві матриці будуть називатися **еквівалентними**, якщо за допомогою елементарних перетворень з однієї матриці можна отримати іншу.
Позначення: $A \sim B$.

**Знаходження ранга матриці за допомогою елементарних перетворень**

Матрицю називають **східчастою**, якщовона задовольняє умови:

1) нульові рядки матриці (якщо вони є) розташовані нижче ненульових;
2) номера стовпців, які містять лідерів рядків, зростають (**лідер рядка** – ненульовий елемент рядка з найменьшим номером).

Верхня трикутна матриця є окремим випадком східчастої матриці. Будь-яку матрицю елементарними перетвореннями можна перетворити до східчастого вигляду.

$$\begin{pmatrix} 0 & \bullet & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Східчасту матрицю називають **зведеною**, якщо всі лідери рядків дорівнюють одиниці, а над лідерами стоять нулі.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{0} & \overline{0} & \vert 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{0} & \vert 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$$

**Алгоритм перетворення матриці до східчастого вигляду (метод Гауса)**

1. Якщо матриця $A = a_{ij}{}_{m\times n}$ ще не має східчастого вигляду, то знаходять 1-ий зліва стовпець з лідером. Переставляючи рядки, переміщують рядок, який містить цей лідер, вгору.
2. Додаючи до всіх рядків, які розташовані нижче, цей рядок, помножений на відповідний коефіцієнт, дістають під лідером нулі.
3. Повторюють кроки 1 і 2 для решти рядків.

**Властивості ранга матриці**

1) Ранг матриці дорівнює найбільшій кількості лінійно назалежних рядків (стовпців) матриці.
2) Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.
3) Транспонування матриці, елементарні перетворення матриці і викреслювання нульових рядків (стовпців) не змінюють її ранга.
4) Ранги еквівалентних матриць рівні.

**Приклад 2.3.** Знайти методом Гауса ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

**Розв’язання.** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -5 & 1 & -3\\ 2 & -1 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{bmatrix} \\ \vec{a}_2 \leftarrow \vec{a}_2-\vec{a}_1\\ \vec{a}_3 \leftarrow \vec{a}_3-2\vec{a}_1\end{bmatrix}\sim$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -6 & -2 & -8\\ 0 & -3 & -1 & -4\end{pmatrix}\begin{bmatrix} \\ \\ \vec{a}_3 \leftarrow \vec{a}_3-\frac{1}{2}\vec{a}_2\end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -6 & -2 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Східчастий вид матриці $A$ містить 2 ненульових рядки. Отже, *rang A*=2.

**Відповідь**: *rang A*=2.

## *Контрольні питання*

1. Для матриць $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$

обчислити: а) $AB$; б) $A\ B+B^T$ ; в) $AC\ ^{T}A$; г) $BA^T$; д) $C^TB$; є) $A^TAB$; ж) $C^TBA^T+2C^TA^T$.

2. Навести приклади ненульових квадратних матриць $A$ і $B$ для яких $AB=\Theta$.

3. Довести, що якщо матриця є одночасно і симетричною, і кососиметричною, то вона є квадратною нульовою.

4. За допомогою елементарних перетворень знайти ранги матриць:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Для матриць $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

обчислити: а) $AB$; б) $A\ \ B+B^T\ \ $; в) $AC\ ^T A$; г) $BA^T$; д) $C^T B$; є) $A^T AB$; ж) $C^T BA^T + 2C^T A^T$.

6. Навести приклади ненульових квадратних матриць $A$ і $B$ для яких $AB=\Theta$.

7. Довести, що якщо матриця є одночасно і симетричною, і кососиметричною, то вона є квадратною нульовою.

8. За допомогою елементарних перетворень знайти ранги матриць:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$