ИДЗ-10.1

1.20. Найти область определения указанной функции.

$z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

Решение: Область определения:

$3 - x^2 - y^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \le 3$

Ответ: Область определения: круг с центром в начале координат радиуса $\sqrt{3}$, включая окружность $x^2 + y^2 = 3$

2. Найти частные производные и частные дифференциалы данной функции.

2.20. $z = \cos(x - \sqrt{xy^3})$

Найдем частные производные:

$$z'_x = (\cos(x - \sqrt{xy^3}))'_x = -\sin(x - \sqrt{xy^3}) \cdot (x - \sqrt{xy^3})'_x =$$

$$= -\sin(x - \sqrt{xy^3}) \cdot ((x)'_x - \sqrt{y^3} \cdot (\sqrt{x})'_x) = -\sin(x - \sqrt{xy^3}) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{y^3}}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$z'_y = (\cos(x - \sqrt{xy^3}))'_y = -\sin(x - \sqrt{xy^3}) \cdot (x - \sqrt{xy^3})'_y =$$

$$= -\sin(x - \sqrt{xy^3}) \cdot (0 - \sqrt{x} \cdot (\sqrt{y^3})'_y) = \frac{3\sqrt{xy}}{2}\sin(x - \sqrt{xy^3})$$

Частные дифференциалы:

$$dz'_x = -\sin(x - \sqrt{xy^3}) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{y^3}}{2\sqrt{x}}\right)dx, \quad dz'_y = \frac{3\sqrt{xy}}{2}\sin(x - \sqrt{xy^3})dy$$

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

3.20. $f(x, y, z) = \dfrac{z}{x^4 + y^2}$, $M_0(2,3,25)$

Решение:

$$f'_x = \left(\frac{z}{x^4 + y^2}\right)'_x = -\frac{z}{(x^4 + y^2)^2} \cdot \left(x^4 + y^2\right)'_x = -\frac{4x^3 z}{(x^4 + y^2)^2}$$

$$f'_x(M_0) = f'_x(2,3,25) = -\frac{4 \cdot 8 \cdot 25}{(16 + 9)^2} = -\frac{4 \cdot 8 \cdot 25}{(16 + 9)^2} = -\frac{32}{25} = -1{,}28$$

$$f'_y = \left(\frac{z}{x^4 + y^2}\right)'_y = -\frac{z}{(x^4 + y^2)^2} \cdot \left(x^4 + y^2\right)'_y = -\frac{2yz}{(x^4 + y^2)^2}$$

$$f'_x(M_0) = f'_x(2,3,25) = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 25}{(16 + 9)^2} = -\frac{6}{25} = -0{,}24$$

$$f'_z = \left(\frac{z}{x^4 + y^2}\right)'_z = \frac{1}{x^4 + y^2}$$

$$f'_x(M_0) = f'_x(2{,}3{,}25) = \frac{1}{25} = 0{,}04$$

4. Найти полные дифференциалы указанных функций.

4.20. $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}$

Вычислим частные производные первого порядка:

$$z'_x = \left(\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}} \cdot (3x^2 - 2y^2 + 5)'_x =$$

$$= \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}}$$

$$z'_y = \left(\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}\right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}} \cdot (3x^2 - 2y^2 + 5)'_y =$$

$$= \frac{-4y}{2\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}} = -\frac{2y}{\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}}$$

Полный дифференциал:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{3xdx}{\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}} - \frac{2ydy}{\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}} = \frac{3xdx - 2ydy}{\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}}$$

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

5.20. $u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Найдем производную сложной функции: $u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t$.

В данном случае:

$$u'_x = \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{y}$$

$$u'_y = \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{x} + \frac{x}{y^2}$$

$x'_t = \cos t$, $y'_t = -\sin t$

Таким образом:

$$u'_t = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{y}\right) \cdot \cos t + \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2}\right) \cdot (-\sin t) =$$

$$= \left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t} - \frac{1}{\cos t}\right) \cdot \cos t + \left(\frac{1}{\sin t} + \frac{\sin t}{\cos^2 t}\right) \cdot (-\sin t) = -ctg^2 t - 1 - 1 - tg^2 t$$

$$u'_t\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 - 1 - 1 - 1 = -4$$

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

6.20. $x^2-2xy-3y^2+6x-2y+z^2-8z+20=0$, $M_0(0,-2,2)$

$$\left(x^2-2xy-3y^2+6x-2y+z^2-8z+20\right)'_x=(0)'_x$$
$$2x-2y-0+6-0+2zz'_x-8z'_x+0=0$$
$$(4-z)z'_x=x-y+3$$
$$z'_x=\frac{x-y+3}{4-z}$$
$$z'_x(M_0)=z'_x(0,-2,2)=\frac{0+2+3}{4-2}=\frac{5}{2}=2{,}5$$

$$\left(x^2-2xy-3y^2+6x-2y+z^2-8z+20\right)'_y=(0)'_y$$
$$0-2x-6y+0-2+2zz'_y-8z'_y+0=0$$
$$(z-4)z'_y=x+3y+1$$
$$z'_y=\frac{x+3y+1}{z-4}$$
$$z'_y(M_0)=z'_y(0,-2,2)=\frac{0-6+1}{2-4}=\frac{-5}{-2}=2{,}5$$

ИДЗ 10-2.

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

3.20. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u$, $u=(x^2+y^2)tg\frac{x}{y}$

Найдем частные производные функции u.

$$u'_x=\left((x^2+y^2)tg\frac{x}{y}\right)'_x=(x^2+y^2)'_x tg\frac{x}{y}+(x^2+y^2)\left(tg\frac{x}{y}\right)'_x=$$
$$=2xtg\frac{x}{y}+\frac{(x^2+y^2)}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=2xtg\frac{x}{y}+\frac{(x^2+y^2)}{y\cos^2\frac{x}{y}}$$

$$u'_x=\left((x^2+y^2)tg\frac{x}{y}\right)'_y=(x^2+y^2)'_y tg\frac{x}{y}+(x^2+y^2)\left(tg\frac{x}{y}\right)'_y=$$
$$=2ytg\frac{x}{y}+\frac{(x^2+y^2)}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=2ytg\frac{x}{y}-\frac{x(x^2+y^2)}{y^2\cos^2\frac{x}{y}}$$

Подставим u'_x,u'_y, в левую часть уравнения:

$$x\cdot\left[2xtg\frac{x}{y}+\frac{(x^2+y^2)}{y\cos^2\frac{x}{y}}\right]+y\cdot\left[2ytg\frac{x}{y}-\frac{x(x^2+y^2)}{y^2\cos^2\frac{x}{y}}\right]=$$

$$=2x^2tg\frac{x}{y}+\frac{x(x^2+y^2)}{y\cos^2\frac{x}{y}}+2y^2tg\frac{x}{y}-\frac{x(x^2+y^2)}{y\cos^2\frac{x}{y}}=2x^2tg\frac{x}{y}+2y^2tg\frac{x}{y}=$$

$$=2(x^2+y^2)tg\frac{x}{y}=2u$$

Таким образом, данная функция удовлетворяет данному уравнению.

4. Исследовать на экстремум функцию.

4.20. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$

Решение: Найдем критические точки:

$$\begin{cases} z'_x=2y-6x=0 \\ z'_y=2x-4y=0 \end{cases}\Rightarrow x=y=0$$

$M(0;0)$ – стационарная точка.

Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$z''_{xx}=-6=const$, $z''_{xy}=2=const$, $z''_{yy}=-4=const$

$z''_{xx}(M)\cdot z''_{yy}(M)-\left(z''_{xy}(M)\right)^2=-6\cdot(-4)-2^2=24-4=20>0$, значит, в точке $M(0;0)$ существует экстремум, так как $z''_{xx}(M)<0$, то это – максимум:

$\max z=z(M)=z(0;0)=0-0-0+10=10$

Ответ: $\max z=z(0;0)=10$.