ТФКП

теория функций комплексного переменного

Консультационное пособие для школьников и студентов в решении задач с примерами решённых задач из задачника автора Чудесенко В.Ф.

Вариант 11

Москва 2007

/ТФКП/ 2007

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[3]{8}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$\varphi = \arg(z);\quad k = 0,1,\ldots,n-1;\quad z \neq 0$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[3]{8}$:

$\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[3]{8} = -1 + i\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{8} = -1 - i\sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt[3]{8} = \{2; -1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\operatorname{ch}(1 - \pi i)$

Перейдем от гиперболического косинуса к тригонометрическому:

$\operatorname{ch}(1 - \pi i) = \cos(i + \pi)$

Используем формулу косинуса суммы:

$\cos(i + \pi) = \cos(i)\cos(\pi) - \sin(i)\sin(\pi)$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$\cos(i)\cos(\pi) - \sin(i)\sin(\pi) = (-1)\cdot\frac{e^{-1} + e^{1}}{2} -$$

$$-0\cdot\frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = \left(-\frac{e^{-1} + e^{1}}{2}\right)$$

Ответ: $\operatorname{ch}(1 - \pi i) = -\dfrac{e^{-1} + e^{1}}{2}$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arctg}(2-i)$$

Функция Arctg является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arctg}\,z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$$

Подставим вместо z значение $(2-i)$:

$$\mathrm{Arctg}(2-i) = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+(2-i)i}{1-(2-i)i} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+2i+1}{1-2i-1} =$$

$$= -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{2+2i}{2i} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+i}{i} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{-i(1+i)}{1} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}(i-1)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}(i-1) = -\frac{i}{2}[\ln|i-1| + i(\arg(i-1)+2\pi k)] = -\frac{i}{2}\ln\sqrt{2} +$$

$$+\frac{1}{2}(\arg(i-1)+2\pi k) \approx -\frac{i}{2}\cdot 0{,}347 + \frac{1}{2}(\frac{3\pi}{4}+2\pi k)$$

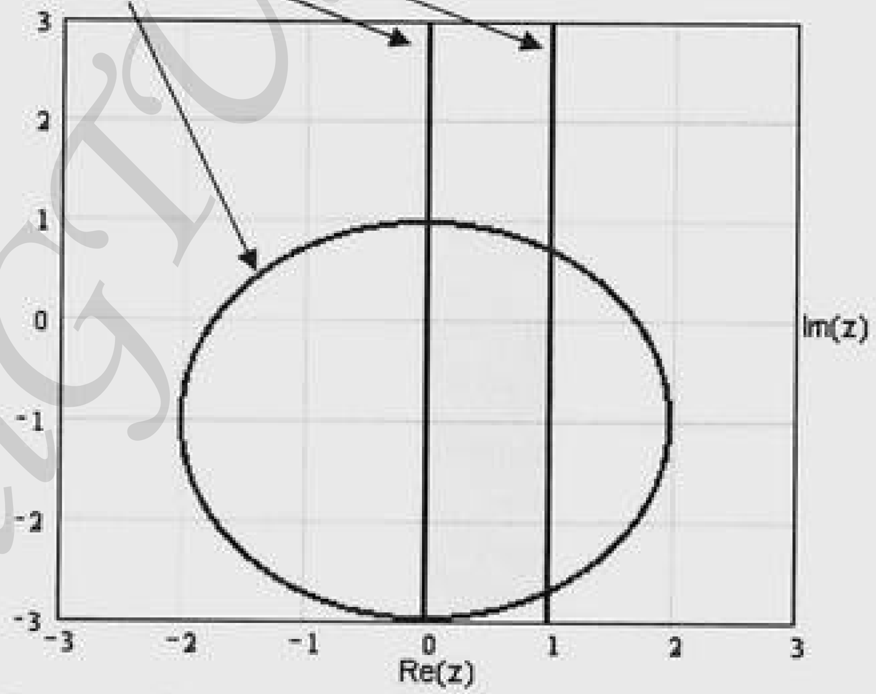
$$k = 0,\pm1,\pm2,...$$

Ответ: $\mathrm{Arctg}(2-i) \approx -\frac{i}{2}\cdot 0{,}347 + \frac{1}{2}(\frac{3\pi}{4}+2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z+i| < 2, \quad 0 \le \mathrm{Re}\,z \le 1$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z = 3\mathrm{ch}\,2t + i2\mathrm{sh}\,2t$

Уравнение вида $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид $x = x(t)$, $y = y(t)$. В нашем случае:

$x(t) = 3\mathrm{ch}\,2t; \quad y(t) = 2\mathrm{sh}\,2t$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = 3\mathrm{ch}\,2t \Rightarrow \mathrm{ch}\,2t = \frac{x}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2}\mathrm{arch}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$y = 2\mathrm{sh}\,2t \Rightarrow \mathrm{sh}\,2t = \frac{y}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}\mathrm{arsh}\left(\frac{y}{2}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде $F(x,y) = 0$:

$$\frac{1}{2}\mathrm{arch}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{arsh}\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{arch}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{arsh}\left(\frac{y}{2}\right) = 0$$

Ответ: $\frac{1}{2}\mathrm{arch}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{arsh}\left(\frac{y}{2}\right) = 0$

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной действительной части u(x,y) и значению $f(z_0)$:

$u = e^{-y}\cos x$

$f(0) = 1$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = -e^{-y}\sin x + ie^{-y}\cos x = ie^{-y+ix} = ie^{\frac{x+iy}{i}} = ie^{-iz}$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int ie^{-iz}dz = -e^{-iz} + C$$

Определим константу C:

$f(0) = -e^0 + C = -1 + C = 1 \Rightarrow C = 2$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$f(z) = 2 - e^{-iz}$

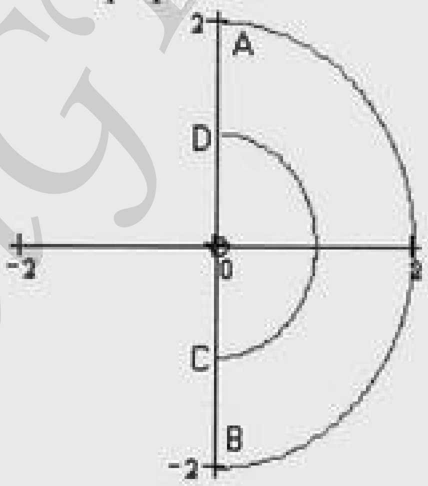
Ответ: $f(z) = 2 - e^{-iz}$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$\int_L \frac{\bar{z}}{z}dz$; L – граница области : $\{1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверка, является ли функция аналитической, слишком громоздка, поэтому используем метод, пригодный для любого случая. Представим отрезки ломаной в параметрическом виде:

$AB: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = \sqrt{4 - t^2}; y(t) = t; z_A = z(2); z_B = z(-2)$

$BC: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = 0; y(t) = t; z_B = z(-2); z_C = z(-1)$

$CD: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = \sqrt{1 - t^2}; y(t) = t; z_A = z(-1); z_B = z(1)$

$DA: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = 0; y(t) = t; z_B = z(1); z_C = z(2)$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int_L f(z)dz = \int_{ABCDA} f[z(t)]z'(t)dt = \int_2^{-2}\frac{2 - t^2 - it\sqrt{4 - t^2}}{2}\left(i - \frac{1}{\sqrt{4 - t^2}}\right)dt +$$

$$+ \int_{-2}^{-1} -idt + \int_{-1}^{1}(1 - 2t^2 - 2it\sqrt{1 - t^2})\left(i - \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\right)dt + \int_1^2 -idt = -1 - i\frac{5}{3}$$

Ответ: $\int_L f(z)dz = -1 - i\frac{5}{3}$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{11z-242}{2z^3+11z^2-121z}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{11z-242}{2z^3+11z^2-121z}=\frac{11z-242}{z(z+11)(2z-11)}=\frac{11}{2z}\cdot\frac{z-22}{(z+11)(z-5{,}5)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

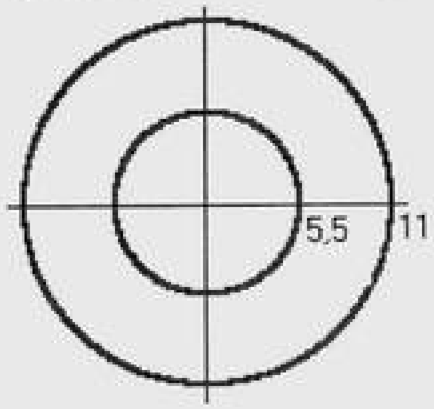
$$\frac{z-22}{(z+11)(z-5{,}5)}=\frac{A}{z+11}+\frac{B}{z-5{,}5}=\frac{Az-5{,}5A+Bz+11B}{(z+11)(z-5{,}5)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=2;B=-1\}\Rightarrow\frac{z-22}{(z+11)(z-5{,}5)}=\frac{2}{z+11}-\frac{1}{z-5{,}5}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{11}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+11}-\frac{1}{z-5{,}5}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=5{,}5; z=-11$



Рассмотрим область $|z|<5{,}5$:

$$f(z)=\frac{11}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+11}-\frac{1}{z-5{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{11}}+\frac{1}{1-\frac{2z}{11}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{11}+\frac{z^2}{121}-\frac{z^3}{1331}+\ldots\right)+\left(1+\frac{2z}{11}+\frac{4z^2}{121}+\frac{8z^3}{1331}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{11}+\frac{z}{121}-\frac{z^2}{1331}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{11}+\frac{4z}{121}+\frac{8z^2}{1331}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $5{,}5<|z|<11$:

$$f(z)=\frac{11}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+11}-\frac{1}{z-5{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{11}}-\frac{11}{2z(1-\frac{11}{2z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{11}+\frac{z^2}{121}-\frac{z^3}{1331}+\ldots\right)+\left(\frac{11}{2z}+\frac{121}{4z^2}+\frac{1331}{8z^3}+\frac{14641}{16z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{11}+\frac{z}{121}-\frac{z^2}{1331}+\ldots\right)+\left(\frac{11}{2z^2}+\frac{121}{4z^3}+\frac{1331}{8z^4}+\frac{14641}{16z^5}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>11$:

$$f(z)=\frac{11}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+11}-\frac{1}{z-5{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{11}{z(1+\frac{11}{z})}-\frac{11}{2z(1-\frac{11}{2z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{11}{z}-\frac{121}{z^2}+\frac{1331}{z^3}-\frac{14641}{z^4}+\ldots\right)+\left(\frac{11}{2z}+\frac{121}{4z^2}+\frac{1331}{8z^3}+\frac{14641}{16z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{11}{z^2}-\frac{121}{z^3}+\frac{1331}{z^4}-\frac{14641}{z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{11}{2z^2}+\frac{121}{4z^3}+\frac{1331}{8z^4}+\frac{14641}{16z^5}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<5{,}5: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{11}+\frac{z}{121}-\frac{z^2}{1331}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{11}+\frac{4z}{121}+\frac{8z^2}{1331}+\ldots\right)$$

$$5{,}5<|z|<11: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{11}+\frac{z}{121}-\frac{z^2}{1331}+\ldots\right)+\left(\frac{11}{2z^2}+\frac{121}{4z^3}+\frac{1331}{8z^4}+\frac{14641}{16z^5}+\ldots\right)$$

$$|z|>11: f(z)=\left(\frac{11}{z^2}-\frac{121}{z^3}+\frac{1331}{z^4}-\frac{14641}{z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{11}{2z^2}+\frac{121}{4z^3}+\frac{1331}{8z^4}+\frac{14641}{16z^5}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$.

$$f(z)=\frac{z+3}{z^2-1}, z_0=-2+3i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z+3}{z^2-1}=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z+1}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{2}{z-1}=2\cdot\frac{1}{z-1}=2\cdot\frac{1}{(z-z_0)-3+3i}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(3i-3)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-z_0)-1+3i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(3i-1)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(3i-3)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(3i-1)^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(3i-3)^{n+1}}-\frac{1}{(3i-1)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(3i-3)^{n+1}}-\frac{1}{(3i-1)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=z^2\cdot\sin\pi\frac{z+1}{z}, z_0=0$$

Преобразуем данное выражение:

$$z^2\cdot\sin\pi\frac{z+1}{z}=z^2\cdot\sin(\pi+\frac{\pi}{z})=-z^2\sin\frac{\pi}{z}$$

Теперь следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z)=-z^2\sin\frac{\pi}{z}=-z^2\left(\frac{\pi}{z}-\frac{\pi^3}{3!z^3}+\frac{\pi^5}{5!z^5}-\frac{\pi^7}{7!z^7}+\ldots\right)$$

$$=z^2\left(-\frac{\pi}{z}+\frac{\pi^3}{3!z^3}-\frac{\pi^5}{5!z^5}+\frac{\pi^7}{7!z^7}-\ldots\right)=$$

$$=-z\pi+\frac{\pi^3}{3!z}-\frac{\pi^5}{5!z^3}+\frac{\pi^7}{7!z^5}-\ldots$$

Поскольку $z_0=0$, то разложение в ряд Лорана в окрестности z_0 – это то же самое, что и разложение в ряд Лорана по степеням z. Таким образом, мы пришли к ответу.

Ответ:

$$f(z)=-z\pi+\frac{\pi^3}{3!z}-\frac{\pi^5}{5!z^3}+\frac{\pi^7}{7!z^5}-\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z) = \frac{e^{5z} - 1}{chz - 1 - z^2/2}$$

Разложим числитель и знаменатель в ряды Лорана в окрестности точки z = 0:

$$f(z) = \frac{e^{5z} - 1}{chz - 1 - z^2/2} = \frac{-1 + 1 + 5z + \frac{5^2 z^2}{2!} + \frac{5^3 z^3}{3!} + \ldots}{-1 - z^2/2 + 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots} =$$

$$= \frac{5z + \frac{5^2 z^2}{2!} + \frac{5^3 z^3}{3!} + \ldots}{\frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots} = \frac{5 + \frac{5^2 z}{2!} + \frac{5^3 z^2}{3!} + \ldots}{\frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} + \frac{z^7}{8!} + \ldots}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z) = \frac{5 + \frac{5^2 z}{2!} + \frac{5^3 z^2}{3!} + \ldots}{\frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} + \frac{z^7}{8!} + \ldots} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad g(z) = 5 + \frac{5^2 z}{2!} + \frac{5^3 z^2}{3!} + \ldots; \quad h(z) = \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} + \frac{z^7}{8!} + \ldots;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0. Поскольку рассматриваемые функции представляют собой обычные степенные многочлены, то несложно увидеть, что g(0)≠0 и h'''(0)≠0.

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 3 – 0 = 3.

Ответ: Точка z = 0 является полюсом 3-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = ctg\,\pi z$$

Эта функция не является аналитической при sin πz = 0. Найдем z, соответствующие этому случаю:

$$\sin\pi z = 0 \Rightarrow \pi z = \pi k \Rightarrow z = k; k \in z$$

Запишем данную функцию в виде отношения функций g(z) и h(z):

$$f(z) = \frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}; \quad g(z) = \cos\pi z; \quad h(z) = \sin\pi z;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = k:

$g(k) \neq 0$

$h(k) = 0$

$h'(z) = \pi\cos\pi z; h'(k) \neq 0$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = k выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки z = k являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = πk для функций h(z) и g(z). В данном случае, это 1 – 0 = 1.

Ответ: Точки $z = k; k \in z$ для данной функции являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-3|=1} \underbrace{\frac{\sin 3z + 2}{z^2(z-\pi)}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = 0$

$z = \pi$

Точка $z = 0$ не входит в область, ограниченную данным контуром, поэтому не рассматривается.

Точка $z_1 = \pi$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to\pi}[f(z)(z-\pi)] = \lim_{z\to\pi}\frac{(\sin 3z+2)(z-\pi)}{z^2(z-\pi)} =$$

$$= \lim_{z\to\pi}\frac{\sin 3z + 2}{z^2} = \frac{2}{\pi^2}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z + 2}{z^2(z-\pi)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{2}{\pi^2} = \frac{4i}{\pi}$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z + 2}{z^2(z-\pi)} dz = \frac{4i}{\pi}$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=2} \underbrace{\frac{z - \sin z}{2z^4}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$\frac{z-\sin z}{2z^4} = \frac{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right)}{2z^4} = \frac{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \ldots}{2z^4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3!z} - \frac{z}{5!} + \frac{z^3}{7!} - \ldots\right)$$

Правильная часть получившегося ряда содержит бесконечное число членов, из чего следует, что это – полюс. Порядок полюса равен порядку старшего члена главной части. Таким образом, $z = 0$ – это полюс 1-го порядка и вычет находится следующим образом:

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z-\sin z}{2z^3}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{z-\sin z}{2z^3}\right) = \frac{1}{12}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi i}{6}$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4} dz = \frac{\pi i}{6}$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{6z-\sin 6z}{z^2 \operatorname{sh}^2 2z}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции z = ikπ/2. Однако в контур попадает только z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{6z-\sin 6z}{z^2 \operatorname{sh}^2 2z} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad g(z) = 6z - \sin 6z \quad h(z) = z^2 \operatorname{sh}^2 2z$$

Определим порядки производных, ненулевых при z = 0. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что z = 0 представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{6z-\sin 6z}{z\operatorname{sh}^2 2z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используемпра-}\\ \text{вилоЛопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{6-6\cos 6z}{4z\operatorname{sh}(2z)\operatorname{ch}(2z) - 1 + \operatorname{ch}^2 2z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используемпра-}\\ \text{вилоЛопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{36\sin 6z}{8\operatorname{sh}(2z)\operatorname{ch}(2z) + 16z\operatorname{ch}^2 2z - 8z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используемпра-}\\ \text{вилоЛопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{216\cos 6z}{48\operatorname{ch}^2 2z + 64z\operatorname{sh}(2z)\operatorname{ch}(2z) - 24}\right) = 9$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{6z-\sin 6z}{z^2 \operatorname{sh}^2 2z} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot 9 = 18\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{6z-\sin 6z}{z^2 \operatorname{sh}^2 2z} dz = 18\pi i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-3i|=2} \left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2} + i} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)}\right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-3i|=2} \underbrace{\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z-3i|=2} \underbrace{\frac{\pi i}{e^{\pi z/2} + i}}_{f_2(z)} dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z-3i|=2} \frac{2\cos\frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)} dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=1+3i и z=3+3i. При этом точка z=3+3i не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=1+3i является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=1+3i} f_1(z) = \lim_{z\to 1+3i} \frac{d}{dz}\left[\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+3i}(z-1-3i)^2}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)}\right] = \lim_{z\to 1+3i} \frac{d}{dz}\left[\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+3i}}{(z-3-3i)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1+3i}\left[\frac{(3i-1)\pi}{5(z-3-3i)}\sin\frac{(1-3i)\pi z}{10} - \frac{2}{(z-3-3i)^2}\cos\frac{(1-3i)\pi z}{10}\right] = \frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-3i|=2} \frac{2\cos\frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)} dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=1+3i} f_1(z) = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \pi i$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z-3i|=2} \frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\pi z/2}+i=0 \Rightarrow e^{\pi z/2}=-i \Rightarrow \pi z/2=\ln(-i)=-\pi i/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=4ik-i, k\in z$$

Из этих точек только одна охвачена контуром $|z-3i|=2$ и должна приниматься во внимание. Это точка $z=3i$, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=3i} f_2(z)=\lim_{z\to 3i}\frac{\pi i(z-3i)}{e^{\pi z/2}+i}=\lim_{z\to 3i}\frac{\pi i(z-3i)}{e^{\pi z/2}+i}=\left\{\begin{matrix}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 3i}\frac{\pi i}{\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2}}=\frac{\pi i}{\frac{\pi}{2}e^{3\pi i/2}}=\frac{2i}{e^{3\pi i/2}}=\frac{2i}{-i}=-2$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-3i|=2} \frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=3i} f_2(z)=2\pi i\cdot(-2)=-4\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-3i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}+\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)}\right)dz=$$

$$=\oint\limits_{|z-3i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz+\oint\limits_{|z-3i|=2}\left(\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)}\right)dz=$$

$$=-4\pi i+\pi i=-3\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-3i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}+\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)}\right)dz=-3\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{5-\frac{\sqrt{5}}{2i}(z-\frac{1}{z})}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{3iz-\frac{\sqrt{5}}{2}(z^2-1)}=$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{6iz-\sqrt{5}(z^2-1)}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{-\sqrt{5}(z-i/\sqrt{5})(z-i\sqrt{5})}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=i/\sqrt{5};\quad z=i\sqrt{5};$

Точка $i\sqrt{5}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $i/\sqrt{5}$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=i/\sqrt{5}} f(z)=\lim_{z\to i/\sqrt{5}}[f(z)(z-i/\sqrt{5})]=$$

$$=\lim_{z\to i/\sqrt{5}}\frac{2}{-\sqrt{5}(z-i\sqrt{5})}=\frac{2}{-\sqrt{5}(i/\sqrt{5}-i\sqrt{5})}=-\frac{i}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{-\sqrt{5}(z-i/\sqrt{5})(z-i\sqrt{5})}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot(-\frac{i}{2})=\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}=\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+\sqrt{5}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+\sqrt{5}\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(3+\frac{\sqrt{5}}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i(6z+\sqrt{5}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{5}(z+\frac{1}{\sqrt{5}})(z+\sqrt{5})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-\sqrt{5};\quad z=-1/\sqrt{5};$

Точка $z=-\sqrt{5}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=-1/\sqrt{5}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-1/\sqrt{5}}f(z)=\lim_{z\to-1/\sqrt{5}}\frac{d}{dz}[f(z)(z+1/\sqrt{7})^2]=$$

$$=\lim_{z\to-1/\sqrt{5}}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[\sqrt{5}(z+\sqrt{5})\right]^2}=\frac{4}{5i}\lim_{z\to-1/\sqrt{5}}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z+\sqrt{5})^2}=$$

$$=\frac{4}{5i}\lim_{z\to-1/\sqrt{5}}\left[-\frac{z-\sqrt{5}}{(z+\sqrt{5})^3}\right]=-\frac{4}{5i}\cdot\frac{-1/\sqrt{5}-\sqrt{5}}{(-1/\sqrt{5}+\sqrt{5})^3}=\frac{3}{8i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{5}(z+\frac{1}{\sqrt{5}})(z+\sqrt{5})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{3}{8i}\right)=\frac{3}{4}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+\sqrt{5}\cos t)^2}=\frac{3}{4}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$ сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2+9)(z^2+1)^2}$$

Особые точки:

$z=3i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-3i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

$z=i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=i$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=i}f(z)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[f(z)(z-i)^2]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2(z^2+9)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{-2(2z^2+9+iz)}{(z+i)^3(z^2+9)^2}\right]=-\frac{3i}{128}$$

Точка $z=3i$ является простым полюсом и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=3i}f(z)=\lim_{z\to3i}[f(z)(z-3i)]=\lim_{z\to3i}\left[\frac{1}{(z^2+1)^2(z+3i)}\right]=\frac{-i}{384}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}=2\pi i\left(-\frac{i}{384}-\frac{3i}{128}\right)=2\pi i\left(\frac{-i-9i}{384}\right)=\frac{20\pi}{384}=\frac{5\pi}{96}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}=\frac{5\pi}{96}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2x-\sin x}{(x^2+4)^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2x}{(x^2+4)^2}dx-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{(x^2+4)^2}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\lambda x dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходные функции полностью удовлетворяют условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$(x^2+4)^2=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm 2i$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{2i\}$$

Эта особая точка является полюсом второго порядка. Найдем в ней вычеты для каждой из функций:

$$1)\underset{z=2i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z(z-2i)^2}{(z^2+4)^2}e^{2iz}\right]=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+2i)^2}e^{2iz}\right]=$$

$$=\frac{-5z+2i+2iz^2}{(z+2i)^3}e^{2iz}\bigg|_{z=2i}=\frac{5}{27}e^{-2}$$

$$2)\underset{z=2i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2}e^{iz}\right]=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+2i)^2}e^{iz}\right]=$$

$$=\frac{-4+iz}{(z+2i)^3}e^{iz}\bigg|_{z=2i}=-\frac{5i}{27}e^{-1}$$

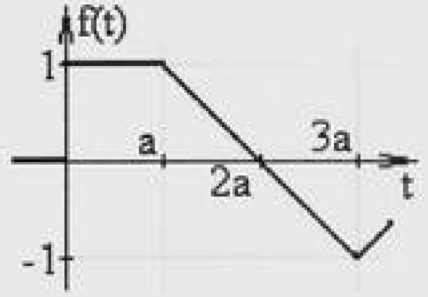
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2x-\sin x}{(x^2+4)^2}dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{10\pi}{27}e^{-2}$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2x-\sin x}{(x^2+4)^2}dx=\frac{10\pi}{27}e^{-2}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}1 & 0<t<a\\ \dfrac{2a-t}{a}, & a<t<3a\\ \dfrac{t-4a}{a}, & 3a<t\end{cases}$$

$$f(t)=1\cdot\eta(t)+\frac{a-t}{a}\eta(t-a)+\frac{2t-6a}{a}\eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac{2}{ap^2}-\frac{6}{p}\right)e^{-3ap}$$

Ответ: $F(p)=\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac{2}{ap^2}-\frac{6}{p}\right)e^{-3ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{Cp+D}{p^2+4} =$$

$$= \frac{Ap^3+Bp^2+4Ap+4B+Cp^3+Dp^2+Cp+D}{(p^2+1)(p^2+4)} =$$

$$= \frac{(A+C)p^3+(B+D)p^2+(4A+C)p+4B+D}{(p^2+1)(p^2+4)}$$

Решив систему линейных уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 4A+C=1 \\ 4B+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/3 \\ B=0 \\ C=-1/3 \\ D=0 \end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+4}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+4} \to \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$y''+y = \operatorname{sh} t$

$y(0)=2, \quad y'(0)=1.$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p) - x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p) - p\cdot x(0) - x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + Y(p) = \frac{1}{p^2-1}$$

$$p^2Y(p) - 2p - 1 + Y(p) = \frac{1}{p^2-1}$$

$$(p^2+1)Y(p) = \frac{1}{p^2-1} + 2p + 1 = \frac{2p^3-2p+p^2}{p^2-1}$$

$$Y(p) = \frac{2p^3-2p+p^2}{(p^2-1)(p^2+1)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p) = \frac{2p^3-2p+p^2}{(p^2-1)(p^2+1)} = \frac{Ap+B}{p^2-1} + \frac{Cp+D}{p^2+1} =$$

$$= \frac{Ap^3+Bp^2+Ap+B+Cp^3+Dp^2-Cp-D}{(p^2-1)(p^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+C=2 \\ B+D=1 \\ A-C=-2 \\ B-D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1/2 \\ C=2 \\ D=1/2 \end{cases} \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{p^2-1} + 2\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sh} t + 2\cos t + \frac{1}{2}\sin t$$

Ответ: $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sh} t + 2\cos t + \frac{1}{2}\sin t$

Задача 25

Материальная точка массы m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат с силой F=kx, пропорциональной расстоянию. На точку действует сила сопротивления среды R=rv, пропорциональная скорости v. При t=0 расстояние точки от начала координат x_0, а скорость v_0. Найти закон движения x=x(t) материальной точки.

$k = 3m$, $r = 2m$, $x_0 = 1$м, $v_0 = 1$м/с.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = kx - rv$$

$$\ddot{x}m - r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 1$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m - 2m\dot{x} + 3mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 3x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) - 2pX(p) + 2x(0) + 3X(p) = 0$$

$$(p^2 - 2p + 3)X(p) - p + 1 = 0$$

$$X(p) = \frac{p-1}{p^2 - 2p + 3} = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 2}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = e^t \cos\sqrt{2}t$$

Ответ: $x(t) = e^t \cos\sqrt{2}t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y + 1 \end{cases}$$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 5.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = X(p) + 2Y(p) \\ pY(p) - y(0) = 2X(p) + Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 2Y(p) \\ pY(p) - 5 = 2X(p) + Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 5 = 2X(p) + Y(p) + 1/p \Rightarrow X(p) = \frac{pY(p) - Y(p) - 5 - 1/p}{2}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p\frac{pY(p) - Y(p) - 5 - 1/p}{2} = \frac{pY(p) - Y(p) - 5 - 1/p}{2} + 2Y(p)$$

$$Y(p) = \frac{5p - 4 - 1/p}{p^2 - 2p - 3}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{5p - 4 - 1/p}{p^2 - 2p - 3} = \frac{5p - 4 - 1/p}{(p-1)^2 - 4} - \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p} = \frac{1}{3}\frac{14p - 10}{(p-1)^2 - 4} + \frac{1}{3p} =$$

$$= \frac{14}{3}\frac{p-1}{(p-1)^2 - 4} + \frac{2}{3i}\frac{2i}{(p-1)^2 - 4} + \frac{1}{3p} \to$$

$$\to y(t) = \tfrac{14}{3}e^t \cos 2it - \tfrac{2i}{3}e^t \sin 2it + \tfrac{1}{3} = \tfrac{14}{3}e^t \operatorname{ch} 2t + \tfrac{2}{3}e^t \operatorname{sh} 2t + \tfrac{1}{3}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = 2x + y + 1 \Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{2}(\dot{y} - y - 1) = \tfrac{1}{2}(6e^t \operatorname{ch} 2t + 10e^t \operatorname{sh} 2t -$$

$$- \tfrac{14}{3}e^t \operatorname{ch} 2t - \tfrac{2}{3}e^t \operatorname{sh} 2t - \tfrac{1}{3} - 1) = \tfrac{2}{3}e^t \operatorname{ch} 2t + \tfrac{14}{3}e^t \operatorname{sh} 2t - \tfrac{2}{3}$$

Ответ:

$$x(t) = \tfrac{2}{3}e^t \operatorname{ch}2t + \tfrac{14}{3}e^t \operatorname{sh}2t - \tfrac{2}{3}$$

$$y(t) = \tfrac{14}{3}e^t \operatorname{ch}2t + \tfrac{2}{3}e^t \operatorname{sh}2t + \tfrac{1}{3}$$

Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

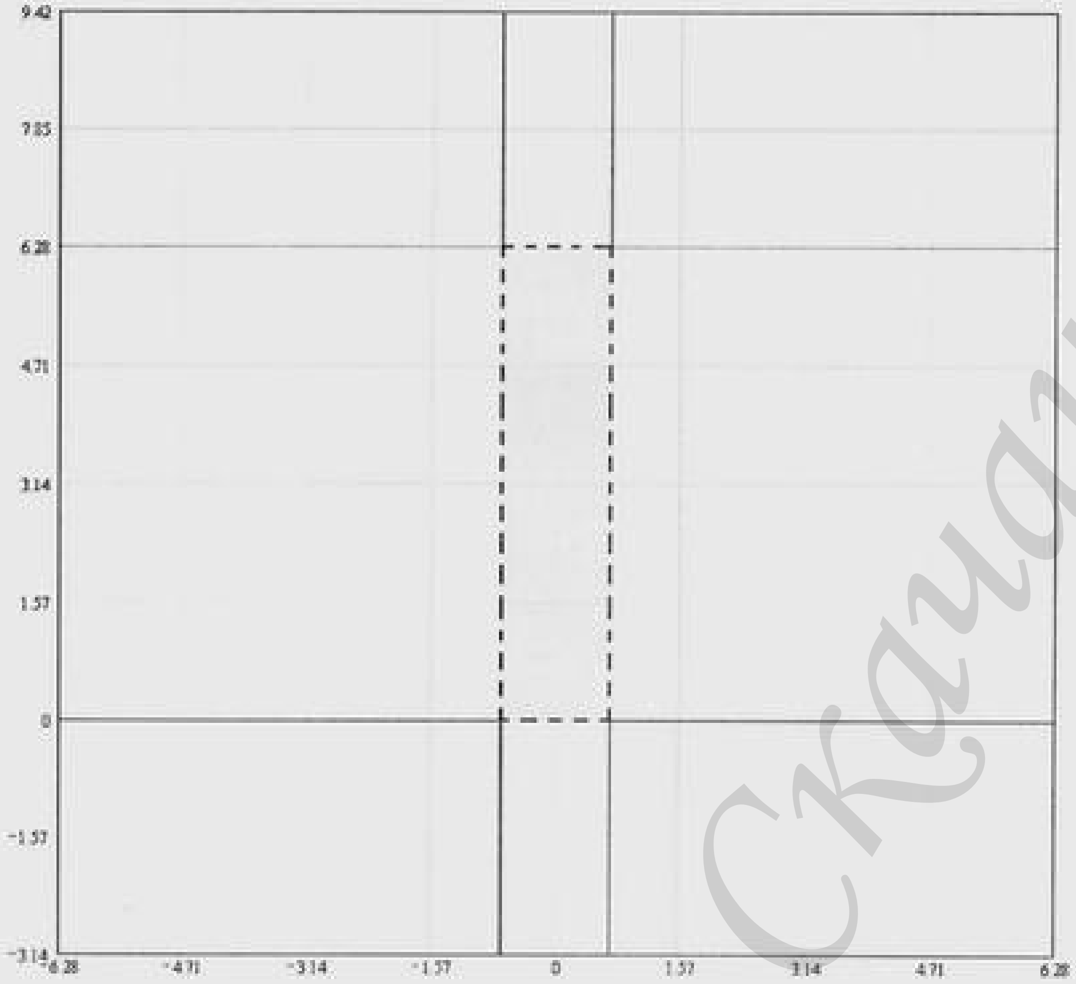
$w = \ln(z)$; кольцо $r_1<|z|<r_2$ с разрезом по отрезку $[r_1, r_2]$

Представим z в виде $R\cdot e^{i\arg(z)} = R\cdot e^{i\theta}$.

Произведем отображение с помощью функции $w = \ln(z)$:

$$w = \ln(z) = \ln(Re^{i\theta}) = \ln R + \ln e^{i\theta} = \ln R + i\theta \ln e = \ln R + i\theta$$

Кольцо преобразуется в прямоугольник, ограниченный $\ln(r_1)<\mathrm{Re}(w)<\ln(r_2)$, $0\le \mathrm{Im}(z)<2\pi$ т.к. $r_1<|z|<r_2$, а $\arg(z)\in[0,2\pi)$. Разрез по отрезку $[r_1,r_2]$ исключит из прямоугольника границу $\arg(z)=0$, т.е. область действительных положительных чисел. Приведем пример такой области для случая $r_1=0,5$; $r_2=2$:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\ldots,n-1; z\neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z=x+iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\mathrm{sh}\, z = -i\sin iz = \frac{e^z-e^{-z}}{2} \qquad \mathrm{ch}\, z = \cos iz = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z \qquad \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k, k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2}) \qquad \mathrm{Arccos}\, z = -i\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$$

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \mathrm{Arcctg}\, z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Аналитические функции

Функция w=f(z) называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция w=f(z) называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z\in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$