Лекція 9

Пряма і площина у просторі

9.1. Алгебраїчні поверхні першого порядку

Рівняння першого порядку з трьома невідомими має вигляд
$Ax+By+Cz+D=0$, причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C
повинен бути відмінний від нуля. Воно задає в просторі в прямокутній
системі координат $Oxyz$ алгебраїчну поверхню першого порядку.
Властивості алгебраїчної поверхні першого порядку багато в чому
аналогічні властивостям прямої на площині - геометричному образу
рівняння першого порядку з двома невідомими.

Теорема 9.1. Будь-яка площина в просторі є поверхнею першого порядку і
будь-яка поверхня першого порядку в просторі є площиною.
Доведення. Твердження теореми, та її доказ аналогічні теоремі 7.1.
Дійсно, нехай площина π задана своєю точкою M_0 і ненульовим
вектором $\vec{n}$, що перпендикулярний їй. Тоді множина всіх точок у просторі
розбивається на три підмножини. Перша складається з точок, що належать
площині, а два інших - з точок, розташованих з одного та іншого боку від
площини. Якій з цих підмножин належить довільна точка M простору,
залежить від знака скалярного добутку $\left(\vec{n},\overrightarrow{M_0M}\right)$. Якщо точка M
належить площині (рис. 9.1, а), то кут між векторами $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ прямій, і
тому їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\left(\vec{n},\overrightarrow{M_0M}\right)=0$.

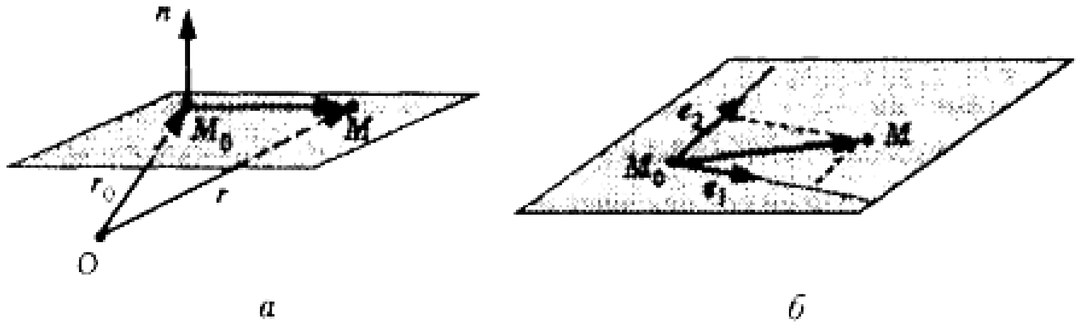


Рис. 9.1.

Якщо точка M не належить площині, то кут між векторами $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ гострий або тупий, і тому $\left(\vec{n},\overrightarrow{M_0M}\right) > 0$ або $\left(\vec{n},\overrightarrow{M_0M}\right) < 0$ відповідно, причому знак цього скалярного добутку один і той самий для всіх точок, розташованих з однієї сторони від площини (рис. 9.1, б).

Позначимо координати точок M_0, M і вектора $\vec{n}$ через $(x_0; y_0; z_0), (x; y; z), \left(A; B; C\right)$ відповідно. Оскільки $\overrightarrow{M_0M} = \left(x - x_0; y - y_0; z - z_0\right)$, то отримуємо умову належності точки M розглянутої площині у вигляді:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (9.1)$$

Розкриття дужок дає рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ і хоча б один з коефіцієнтів A, B, або C відмінний від нуля. Це означає, що площина є геометричним образом рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$, тобто алгебраїчною поверхнею першого порядку.

Провівши доведення першого твердження теореми в зворотному порядку, покажемо, що геометричним образом рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$

$\left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$, є площина. Виберемо три числа $(x=x_0, y=y_0, z=z_0)$, що задовольняють цьому рівнянню. Обраним числам відповідає точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, що належить геометричному образу заданого рівняння. З рівності $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ випливає, що $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Підставляючи цей вираз в рівняння, отримуємо $Ax+By+Cz-Ax_0-By_0-Cz_0=0$, що рівносильно (9.1). Рівність (9.1) можна розглядати як критерій ортогональності векторів $\vec{n}=\left(A,B,C\right)$ і $\overrightarrow{M_0M}$, де точка *M* має координати (*x; y; z*). Цей критерій виконується для точок площини, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\left(A,B,C\right)$ і не виконується для інших точок простору. Отже, рівняння (9.1) є рівнянням в зазначеній площині. ●

Рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ називають **загальним рівнянням площини.** Коефіцієнти A, B, C — це координати вектора $\vec{n}$, що перпендикулярний площині. Його називають **нормальним вектором площини.**
За умови відомих координат точки, що належить деякій площині, і ненульового вектора, перпендикулярного їй рівняння площини записується без будь-яких обчислень.

◄**Приклад 9.1.** Знайти загальне рівняння площини, що перпендикулярна радіус-вектору точки $A\left(2,5,7\right)$ та проходить через точку $M_0\left(3,-4,1\right)$.

Розв’язання. Оскільки ненульовий вектор $\overrightarrow{OA} = (2,5,7)$ перпендикулярний шуканої площини, то її рівняння має вигляд $2(x-3)+5(y+4)+7(z-1)=0$, або $2x+5y+7z+7=0$.▶

9.2. Спеціальні види рівняння площини

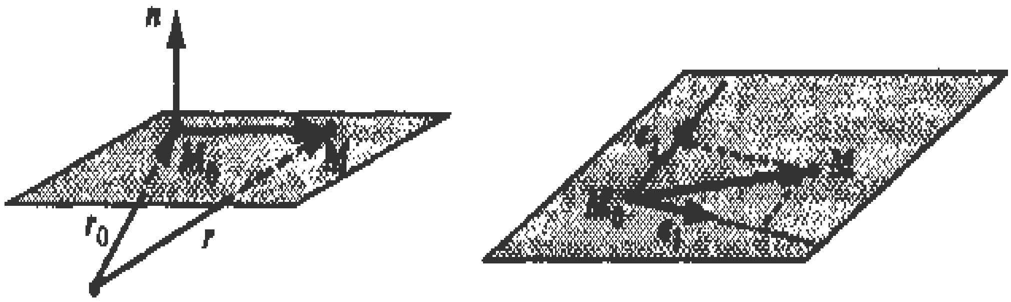
9.2.1. Векторне і параметричні рівняння площини

Нехай $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$ - радіус-вектори точок M_0 та M відповідно.

Тоді $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, і умову того, що точка M належить площині, що проходить через точку M_0 перпендикулярно ненульовому вектору $\vec{n}$ (рис. 9.2, *а*), можна записати за допомогою скалярного добутку у вигляді співвідношення:

$$(\vec{n}, r - r_0) = 0, \tag{9.2}$$

яке називають **векторним рівнянням площини**.



а) *б*)

Рис. 9.2.

Фіксованій площині в просторі відповідає безліч паралельних їй векторів, тобто простір V_2. Виберемо в цьому просторі базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, тобто пару неколінеарних векторів, паралельних даній площині, і точку M_0 на площині (рис. 9.2.б). Якщо точка M належить площині, то це еквівалентно тому, що вектор $\overrightarrow{M_0M}$ паралельний цій площині, тобто він належить вказаному простору V_2. Це означає, що існує розкладання вектора $\overrightarrow{M_0M}$ в базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2$, тобто існують такі числа t_1 і t_2, для яких $\overrightarrow{M_0M}=t_1\vec{e}_1+t_2\vec{e}_2$. Запишемо ліву частину цього рівняння через радіус-вектори $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$ точок M_0 та M відповідно, отримаємо **векторне параметричне рівняння площини**

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t_1\vec{e}_1+t_2\vec{e}_2\ ,\ t_1,t_2\in\mathbb{R}\ . \qquad (9.3)$$

Перейдемо від рівності векторів до рівності їх координат. Позначимо через $(x_0;y_0;z_0),(x;y;z)$ координати точок M_0 та M і через $\left(e_{1x};e_{1y};e_{1z}\right),\left(e_{2x};e_{2y};e_{2z}\right)$ координати векторів $\vec{e}_1,\vec{e}_2$. Прирівнюючи однойменні координати векторів $\vec{r}$ та $\vec{r}_0+t_1\vec{e}_1+t_2\vec{e}_2$, отримаємо **параметричне рівняння площини**

$$\begin{cases} x=x_0+t_1e_{1x}+t_2e_{2x} \\ y=y_0+t_1e_{1y}+t_2e_{2y} \\ z=z_0+t_1e_{1z}+t_2e_{2z} \end{cases}. \qquad (9.4)$$

9.2.2. Рівняння площини, що проходить через три точки та рівняння площини у відрізках

Припустимо, що три точки M_1,M_2,M_3 не лежать на одній прямій. Тоді існує єдина площина π, до якою ці точки належать. Знайдемо рівняння цієї площини, сформулювавши критерій належності довільної точки M даній площині π. Потім запишемо цей критерій через координати точок. Зазначеним критерієм є описування площини π, як геометричного місця тих точок *M*, для яких вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ компланарні. Критерієм компланарності трьох векторів є рівність нулю їх змішаного добутку. Змішаний добуток обчислюється за допомогою визначника третього порядку, рядками якого є координати векторів в ортонормованому базисі. Тому, якщо $(x_i; y_i; z_i)$ - координати точок M_i, $i = 1, 2, 3$, а $(x; y; z)$ — координати точки M, то $\overrightarrow{M_1M} = \left(x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1\right)$,

$\overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\right)$,

$\overrightarrow{M_1M_3} = \left(x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1\right)$ і умова рівності нулю змішаного добутку цих векторів має вигляд

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9.5)$$

Обчисливши визначник, отримаємо лінійне щодо *x, y, z* рівняння, що є **загальним рівнянням шуканої площини**.

Наприклад, якщо розкласти визначник по 1-му рядку, то отримаємо

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}(x - x_1) - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}(y - y_1) + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - z_1 \\ x_3 - y_1 & y_3 - z_1 \end{vmatrix}(z - z_1) = 0.$$

Ця рівність після розкриття дужок перетвориться до загального рівняння площини. Зазначимо, що коефіцієнти при змінних в останньому рівнянні збігаються з координатами векторного добутку $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$. Цей векторний добуток дає ненульовий вектор, перпендикулярний до π, тобто її нормальний вектор.

Розглянемо окремий випадок площини, що проходить через три точки. Точки $M_1(a;0;0), M_2(0;b;0), M_3(0;0;c)$, $abc \neq 0$, не лежать на одній прямій і задають площину, яка відсікає на осях координат відрізки ненульової довжини (рис. 9.3). Тут під "довжинами відрізків" розуміють значення ненульових координат радіус-векторів точок M_i, i = 1,2,3.

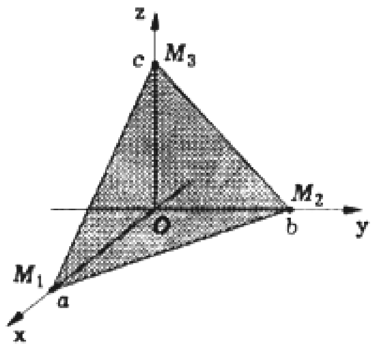


Рис. 9.3.

Оскільки $\overrightarrow{M_1M_2} = (-a;b;0)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (-a;0;c)$, $\overrightarrow{M_1M} = (x-a;y;z)$, то рівняння (9.5) набуде вигляду:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Обчисливши визначник, знайдемо: $bc(x-a) + acy + abz = 0$, розділимо отримане рівняння на *abc* і перенесемо вільний член в праву частину: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1.$

Це рівняння називають **рівнянням площини у відрізках**.

◀**Приклад 9.2.** Знайти загальне рівняння площини, яка проходить через точку з координатами (1; 1, 2) і відсікає від осей координат відрізки однакової довжини.

Розв'язання. Рівняння площини у відрізках за умови, що вона відсікає від осей координат відрізки рівної довжини, скажімо $a \neq 0$, має вигляд:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1.$$

Цьому рівнянню повинні задовольняти координати (1; 1, 2) відомої точки на площині, тобто виконується рівність $4/a = 1$. Тому $a = 4$ і шукане рівняння: $x + y + z - 4 = 0$.▶

9.2.3. Нормальне рівняння площини

Розглянемо деяку площину π в просторі. Зафіксуємо для неї одиничний нормальний вектор $\vec{n}$, напрямлений з початку координат "в бік площини ", і позначимо через ρ відстань від початку *O* системи координат до площини π (рис. 9.4). Якщо площина проходить через початок системи координат, то $\rho = 0$, а в якості напрямку для нормального вектора $\vec{n}$ можна вибрати будь-яке з двох можливих. Якщо точка *M* належить площині π, то це еквівалентно тому, що ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{OM}$ на напрямок вектора $\vec{n}$ дорівнює ρ, тобто виконана умова $\left(\vec{n},\overrightarrow{OM}\right) = np_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = \rho$, оскільки довжина вектора $\vec{n}$ дорівнює одиниці.

Позначимо координати точки *M* через (*x*; *y*; *z*) і нехай

$\vec{n} = \left(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\right)$.

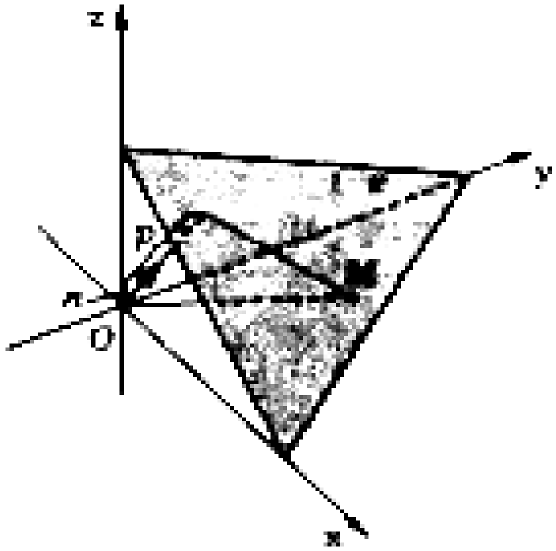


Рис. 9.4. Нормальне рівняння площини.

Скалярний добуток у рівності $\left(\vec{n}, \overrightarrow{OM}\right) = \rho$ в координатній формі задає **нормальне рівняння площини:**

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0\,.$$

Загальне рівняння площини в просторі можна перетворити в її нормальне рівняння діленням на нормуючий множник.

Для рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ нормуючим множником є число $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, знак якого вибирається протилежним знаку D. За абсолютною величиною нормуючий множник є довжиною нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ площини, а знак відповідає потрібному напрямку одиничного нормального вектора площини. Якщо площина проходить через початок системи координат, тобто $D = 0$, то знак нормуючого множника можна вибрати будь-яким.

9.3. Рівняння прямої в просторі

9.3.1. Загальне рівняння прямої в просторі

Пряму в просторі можна розглядати як лінію перетину двох площин. Дві площини:

$$\pi_1 : A_1x + B_{1y}y + C_1z + D_1 = 0, \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

які непаралельні, перетинаються по прямій. Точка M ($x;y;z$) належить цій прямій тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють систему:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (9.6)$$

яку називають **загальними рівняннями прямої.**

9.3.2. Векторне рівняння прямої

Пряму L в просторі можна однозначно задати будь-якою її точкою M_0 і паралельним їй ненульовим вектором $\vec{s}$.

Будь-який ненульовий вектор, паралельний прямій, **називають напрямним вектором прямої.**

Якщо точка M належить прямій L, то це еквівалентно тому, що вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарен вектору $\vec{s}$ (рис. 9.5). Оскільки, $\vec{s} \neq 0$, то він є базисом в просторі V_1 колінеарних йому векторів. Тому для деякого числа t виконується рівність $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$. Оскільки $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{r} - \vec{r}_0$, де $\vec{r}$ і $\vec{r}_0$ - радіус-вектори точок M і M_0 відповідно, то умову $M \in L$ можна записати у вигляді рівняння

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}\,, \tag{9.7}$$

яке називають **векторним рівнянням прямої** в просторі.

Рис 9.5. Рівняння прямої у просторі

9.3.3. Параметричні рівняння прямої в просторі

Припустимо, що відомі координати (l,m,n) напрямного вектора $\vec{s}$ прямої L і точки $M_0(x_0;y_0;z_0) \in L$ в прямокутній системі координат. Позначимо через (x,y,z)координати довільної точки M.

Критерієм приналежності точки M прямій L є умова колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ і $\vec{s}$ (рис. 9.5), що рівносильно пропорційності їх координат. Позначимо через t коефіцієнт пропорційності, отримаємо : $x - x_0 = tl,\ y - y_0 = tm,\ z - z_0 = tn.$

Але тоді
$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}. \tag{9.8}$$

Це **параметриче рівняння прямої** в просторі. Шість коефіцієнтів у системі рівнянь (8.8) мають наочний геометричний сенс: вони є координатами однієї точки на прямій, що відповідає *t=0*, та координатами напрямного вектора прямої, який з'єднує точки, що відповідають значенням параметра t=0 та t=1.

9.3.4. Канонічні рівняння прямої в просторі

З параметричного рівняння прямої можна виключити параметр t і записати результат у вигляді:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (9.9)$$

Це **канонічне рівняння прямої** в просторі.

У знаменнику канонічних рівнянь допускається нульове значення.

9.3.5. Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Кожна пряма в просторі однозначно задається будь-якими двома своїми різними точками. Якщо відомі координати цих точок $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то в якості напрямного вектора прямої підходить ненульовий вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\left(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right)$.

Знаючи його координати і координати точки M_1 на прямій, можна записати канонічне рівняння прямої. В результаті отримаємо

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Це **рівняння прямої, що проходить через дві точки.**

◄**Приклад 9.3**. Записати рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1;2;3)$ і $M_2(3;2;1)$.

Розв'язання. $\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-2}{2-2}=\dfrac{z-3}{1-3}$.

Нуль в знаменнику другого дробу означає, що для координат всіх точок прямої виконано рівність $y = 2$. Тому пряма розташована у площині y -2=0, що паралельна координатній площині xOz і перетинає вісь ординат у точці з ординатою 2.►

◄**Приклад 9.4**. Знайти координати точки *B*, що симетрична точці *A* (2; 3; -1) відносно прямої $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Розв'язання. В обчисленнях будемо спиратися на наступну геометричну побудову точки *B*: а) через точку *A* проводимо площину π, що перпендикулярна прямій *L;* б) знаходимо точку *M* перетину прямої *L* і площини π; в) відрізок *AM* продовжуємо до відрізка *AB* так, щоб точка *M* опинилася в середині відрізка *AB* (рис. 8.6).

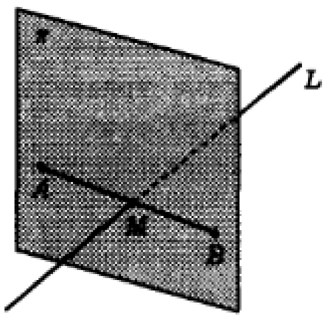


Рис. 9.6. Побудова точки, що симетрична заданій точці відносно прямої

Оскільки площина π перпендикулярна прямій *L,* то в якості нормального вектора $\vec{n}$ площини можна вибрати напряний вектор прямої *L:* $\vec{n}=(1,-1,2)$. З відомих координат нормального вектора площини π і точки A, що належить їй, записуємо рівняння площини в загальному вигляді: $1(x-2)+(-1)(y-3)+2(z+1)=0$. Щоб знайти координати точки M перетину прямої і площини за їх рівнянями, запишемо параметричне рівняння прямої L: $x=1+t,\ y=-2-t,\ z=1+2t$.

Підставимо ці вирази для координат точки на прямій в рівняння площини, одержимо рівняння для параметра t:

$$(1+t-2)-(-2-t-3)+2(1+2t+1)=0,$$

розв'язок якого дає значення параметра для точки M. Знайдемо: t = -4 / 3 і підставимо його в параметричне рівняння прямої, отримаємо координати точки перетину прямої і площини:

$$x=1-4/3=-1/3,\ y=-2+4/3=-2/3,\ z=1-8/3=-5/3\ .$$

Оскільки ця точка повинна ділити відрізок AB навпіл, її координати рівні напівсумі відповідних координат точок A і B. Отже, позначивши через $(x';y';z')$ координати точки B, отримаємо рівності

$$\frac{2+x'}{2}=-1/3,\ y=-2+4/3=-2/3,\ z=1-8/3=-5/3\,.$$

Звідси: $x'=-8/3,\ y'=-11/3,\ z'=-7/3.$►

Розглянемо способи переходу від загальних рівнянь до канонічних або параметричних.

Перший спосіб полягає в тому, що в системі

$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ для z призначають два різних значення та за формулами Крамера знаходять два різних розв'язки системи двох рівнянь з двома невідомими x і y. Ці два розв'язки дають координати двох різних точок M_1 і M_2 на прямій. А дві відомі точки на прямій дозволяють знайти рівняння прямої, що проходить через дві точки, яке фактично збігається з канонічними рівняннями прямої.

Другий спосіб. В якості напрямного вектора $\vec{s}$ прямої, що задана загальними рівняннями площин, можна вибрати $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ - векторний добуток двох нормальних векторів площин (рис. 9.7).

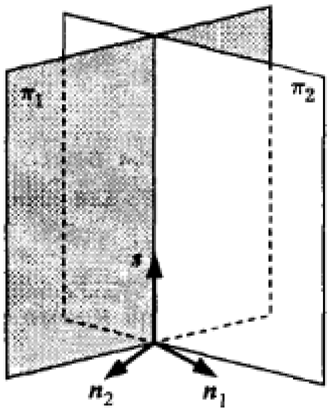


Рис. 9.7

Дійсно, це векторний добуток є вектором, що ортогональний кожному нормальному вектору, а тому він паралельний як одній, так і іншій площині, тобто паралельний їх лінії перетину.

◄**Приклад 9.5.** Знайти канонічне рівняння прямої, що збігається з лінією перетину площин $\pi_1 : x - y + z - 2 = 0,\ \pi_2 : x + y - z = 0$.

Розв'язання. Щоб знайти координати деякої точки на прямій, підставляємо в рівняння площин $z = 0$ і розв'яжемо відповідну систему двох лінійних рівнянь щодо x і y: $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$.

x =1 і y = -1. Точка з координатами (1; -1; 0) розташована на прямій.

В якості напрямного вектора прямої беремо векторний добуток $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

нормальних векторов площин π_1 і π_2 :

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2j + 2k .$$

тобто напрямним вектором прямої буде $\vec{s} = (0,2,2)$. Знайдений вектор можна замінити колінеарним йому вектором $(0,1,1)$.

Канонічне рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}. \blacktriangleright$$

Третій спосіб переходу від загального рівняння прямої до її канонічного або параметричного рівняння полягає в наступному. Розв’язуємо систему $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ за правилом Крамера щодо невідомих x та y, розглядаючи невідоме z як параметр:

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} C_{1z} + D_1 & B_1 \\ C_{2z} + D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{B_1}{\Delta}(C_{2z} + D_2) - \frac{B_2}{\Delta}(C_{1z} + D_1) = \alpha_1 z + \beta_1,$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_{1z} + D_1 \\ A_2 & C_{2z} + D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{A_2}{\Delta}(C_{1z} + D_1) - \frac{A_1}{\Delta}(C_{2z} + D_2) = \alpha_2 z + \beta_2 .$$

Позначимо z через t і додамо рівняння $z = t$, отримаємо параметричні

рівняння прямої: $\begin{cases} x = \alpha_1 t + \beta_1 \\ y = \alpha_2 t + \beta_2 \\ z = t \end{cases}$.