ИНФОРМАЦИОННО-КОНСУЛЬТАЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

ТФКП

теория функций комплексного переменного

Консультационное пособие для школьников и студентов в решении задач с примерами решённых задач из задачника автора Чудесенко В.Ф.

Вариант 1

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz$$

Москва 2007

/ТФКП/ 2007

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{-1}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\dots,n-1;\quad z\neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{-1}$:

$$\sqrt[4]{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \sqrt[4]{-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt[4]{-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \sqrt[4]{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ответ:

$$\sqrt[4]{-1}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\sin(\pi/4+2i)$

Используем формулу синуса суммы:

$$\sin(\pi/4+2i)=\sin(\pi/4)\cos(2i)+\cos(\pi/4)\sin(2i)$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$\sin(\pi/4)\cos(2i)+\cos(\pi/4)\sin(2i)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-2}-e^{2}}{2i}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}\right)+i\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}\right)$$

Ответ: $\sin(\pi/4+2i)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}\right)+i\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}\right)$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arctg}\frac{1-i(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1+i}$$

Функция Arctg является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arctg}\,z=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$$

Подставим вместо z значение $\dfrac{1-i(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1+i}$:

$$\mathrm{Arctg}\frac{1-i(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1+i}=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\dfrac{1-i(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1+i}}{1-\dfrac{1-i(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1+i}}=$$

$$=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{3}+1+i+i+(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1+i-i-(\sqrt{3}-1)}=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}(\sqrt{3}+i)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}(\sqrt{3}+i)=-\frac{i}{2}[\ln|\sqrt{3}+i|+i(\arg(\sqrt{3}+i)+2\pi k)]=$$

$$=-\frac{i}{2}\ln|\sqrt{3}+i|+\frac{1}{2}(\arg(\sqrt{3}+i)+2\pi k)\approx-\frac{i}{2}\cdot 0{,}693+$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}+2\pi k)$$

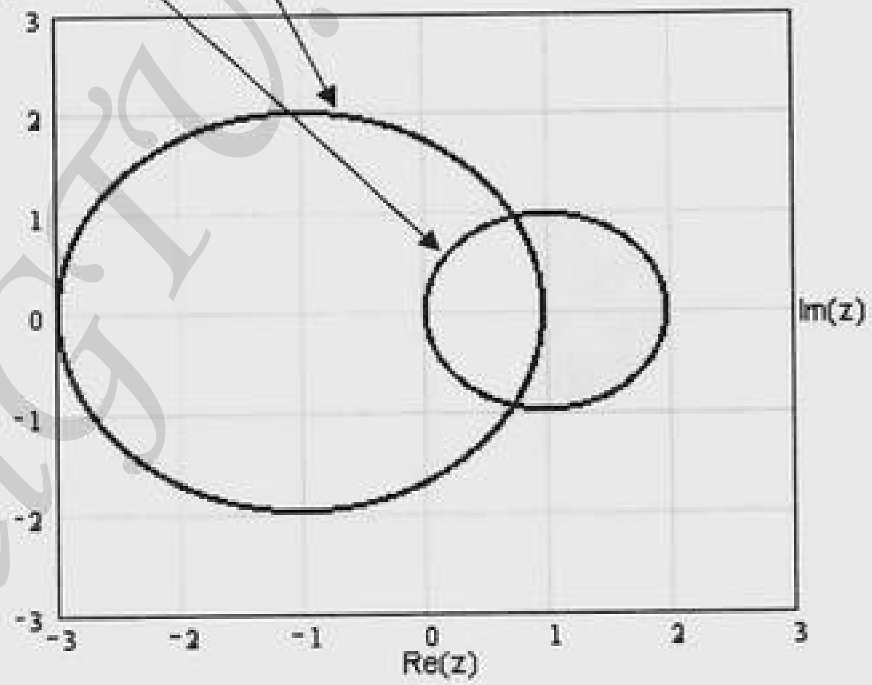
$k=0,\pm1,\pm2,...$

Ответ: $\mathrm{Arctg}\dfrac{1-i(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1+i}\approx-\dfrac{i}{2}\cdot 0{,}693+\dfrac{1}{2}(\dfrac{\pi}{6}+2\pi k),k=0,\pm1,\pm2,...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z-1|\le 1,\quad |z+1|>2$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z=3\sec t+i2\,\mathrm{tg}\,t$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t)=3\sec t;\quad y(t)=2\,\mathrm{tg}\,t$

Выразим параметр t через x и y:

$$x=3\sec t=\frac{3}{\cos t}\Rightarrow\cos t=\frac{3}{x}\Rightarrow t=\arccos\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$y=2\,\mathrm{tg}\,t\Rightarrow\mathrm{tg}\,t=\frac{y}{2}\Rightarrow t=\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{2}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y)=0:

$$\arccos\left(\frac{3}{x}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{2}\right)\Rightarrow\arccos\left(\frac{3}{x}\right)-\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{2}\right)=0$$

Ответ: $\arccos\left(\dfrac{3}{x}\right)-\mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{2}\right)=0$

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной действительной части u(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$u = x^2 - y^2 + x$$

$$f(0) = 0$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = 2x + 1 + i \cdot 2y = 1 + 2z$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int (1+2z)dz = z + z^2 + C$$

Определим константу C:

$$f(0) = 0 + 0^2 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = z + z^2$$

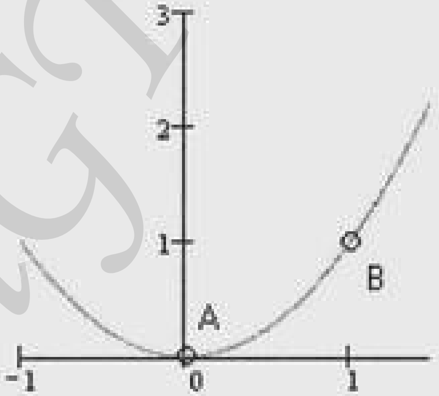
Ответ: $f(z) = z + z^2$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_{AB} \bar{z}^2 dz;\ AB: \{y = x^2; z_A = 0, z_B = 1 + i\}$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = \bar{z}^2 = (x - iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i\underbrace{(-2xy)}_{v(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial v}{\partial y} = -2x; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \frac{\partial v}{\partial x} = -2y; \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана не выполняются, следовательно, функция не является аналитической. Тогда представим кривую, по которой идет интегрирование, в параметрическом виде:

$$z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = t^2; z_A = z(0); z_B = z(1)$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_0^1 f[z(t)]z'(t)dt = \int_0^1 (t - it^2)^2 (1 + 2it)dt =$$

$$= \int_0^1 (t^2 - 2it^3 - t^4)(1 + 2it)dt = \int_0^1 (t^2 + 3t^4 - 2it^5)dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} + \frac{3t^5}{5} - i\frac{t^6}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{14}{15} - i\frac{1}{3}$$

Ответ: $\int_{AB} f(z)dz = \frac{14}{15} - i\frac{1}{3}$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{z-2}{2z^3+z^2-z}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{z-2}{2z^3+z^2-z}=\frac{z-2}{(2z-1)(z+1)z}=\frac{1}{2z}\cdot\frac{z-2}{(z-0{,}5)(z+1)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

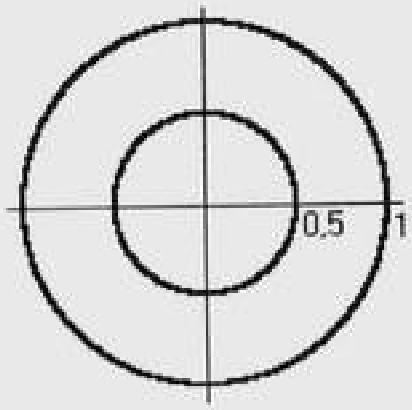
$$\frac{z-2}{(z-0{,}5)(z+1)}=\frac{A}{(z-0{,}5)}+\frac{B}{(z+1)}=\frac{Az+A+Bz-0{,}5B}{(z-0{,}5)(z+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=-1;B=2\}\Rightarrow\frac{z-2}{(z-0{,}5)(z+1)}=\frac{-1}{(z-0{,}5)}+\frac{2}{(z+1)}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{1}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+1}-\frac{1}{z-0{,}5}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=-1; z=0{,}5$



Рассмотрим область $|z|<0{,}5$:

$$f(z)=\frac{1}{2z}\left(\frac{2}{z+1}-\frac{1}{z-0{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1-(-z)}+\frac{1}{1-2z}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-z+z^2-z^3+\ldots\right)+\left(1+2z+4z^2+8z^3+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(z^{-1}-1+z-z^2+\ldots\right)+\left(z^{-1}+2+4z+8z^2+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $0{,}5<|z|<1$:

$$f(z)=\frac{1}{2z}\left(\frac{2}{z+1}-\frac{1}{z-0{,}5}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2z(1-\frac{1}{2z})}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-z+z^2-z^3+\ldots\right)-\frac{1}{2z}\left(1+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4z^2}+\frac{1}{8z^3}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(z^{-1}-1+z-z^2+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4z^3}+\frac{1}{8z^4}+\frac{1}{16z^5}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>1$:

$$f(z)=\frac{1}{2z}\left(\frac{2}{z+1}-\frac{1}{z-0{,}5}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z(1-(-\frac{1}{z}))}-\frac{1}{2z(1-\frac{1}{2z})}\right)=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots\right)-\frac{1}{2z}\left(1+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4z^2}+\frac{1}{8z^3}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(z^{-2}-z^{-3}+z^{-4}-z^{-5}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4z^3}+\frac{1}{8z^4}+\frac{1}{16z^5}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<0{,}5: f(z)=\left(z^{-1}-1+z-z^2+\ldots\right)+\left(z^{-1}+2+4z+8z^2+\ldots\right)$$

$$0{,}5<|z|<1: f(z)=\left(z^{-1}-1+z-z^2+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4z^3}+\frac{1}{8z^4}+\frac{1}{16z^5}+\ldots\right)$$

$$|z|>1: f(z)=\left(z^{-2}-z^{-3}+z^{-4}-z^{-5}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4z^3}+\frac{1}{8z^4}+\frac{1}{16z^5}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$.

$$f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)},z_0=1+2i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)}=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{2}{z-1}=2\cdot\frac{1}{z-1}=2\cdot\frac{1}{(z-z_0)+2i}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-z_0)+1+2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1+2i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1+2i)^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(2i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(2i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=z\cdot\cos\frac{1}{z-2},z_0=2$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-2;z\cdot\cos\frac{1}{z-2}=(z'+2)\cos\frac{1}{z'}=z'\cos\frac{1}{z'}+2\cos\frac{1}{z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=z'\cos\frac{1}{z'}+2\cos\frac{1}{z'}=z'\left(1-\frac{1}{2!z'^2}+\frac{1}{4!z'^4}-\frac{1}{6!z'^6}+...\right)+$$

$$+2\left(1-\frac{1}{2!z'^2}+\frac{1}{4!z'^4}-\frac{1}{6!z'^6}+...\right)=\left(z'-\frac{1}{2!z'}+\frac{1}{4!z'^3}-\frac{1}{6!z'^5}+...\right)+$$

$$+\left(2-\frac{2}{2!z'^2}+\frac{2}{4!z'^4}-\frac{2}{6!z'^6}+...\right)=z'+2-\frac{1}{2!z'}-\frac{2}{2!z'^2}+\frac{1}{4!z'^3}+\frac{2}{4!z'^4}-$$

$$-\frac{1}{6!z'^5}-\frac{2}{6!z'^6}+...$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2$:

$$f(z)=z-\frac{1}{2!(z-2)}-\frac{2}{2!(z-2)^2}+\frac{1}{4!(z-2)^3}+\frac{2}{4!(z-2)^4}-$$

$$-\frac{1}{6!(z-2)^5}-\frac{2}{6!(z-2)^6}+...$$

Ответ:

$$f(z)=z-\frac{1}{2!(z-2)}-\frac{2}{2!(z-2)^2}+\frac{1}{4!(z-2)^3}+\frac{2}{4!(z-2)^4}-$$

$$-\frac{1}{6!(z-2)^5}-\frac{2}{6!(z-2)^6}+...$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{e^{9z}-1}{\sin z-z+z^3/6}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{e^{9z}-1}{\sin z-z+z^3/6}=\frac{g(z)}{h(z)};\qquad \begin{matrix} g(z)=e^{9z}-1; \\ h(z)=\sin z-z+z^3/6; \end{matrix}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g'(z)=9e^{9z};g'(0)=9e^0=9$$

$$h'(z)=\cos(z)-1+z^2/2;h'(0)=\cos 0-1=0$$

$$h''(z)=-\sin(z)+z;h''(0)=-\sin 0+0=0;$$

$$h'''(z)=-\cos(z)+1;h'''(0)=-\cos 0+1=0;$$

$$h^{IV}(z)=\sin(z);h^{IV}(0)=\sin 0=0;$$

$$h^{V}(z)=\cos(z);h^{V}(0)=\cos 0=1;$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 5 – 1 = 4.

Ответ: Точка z = 0 является полюсом 4-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\frac{e^{1/z}}{\sin(1/z)}$$

Перейдем к новой переменной:

$$t=\frac{1}{z};f(t)=\frac{e^t}{\sin t}$$

Эта функция не является аналитической при sin t = 0. Найдем t, соответствующие этому случаю:

$$\sin t=0\Rightarrow t=\pi k;k\in z$$

Запишем данную функцию в виде отношения функций g(t) и h(t):

$$f(t)=\frac{e^t}{\sin t};\ \begin{matrix} g(t)=e^t \\ h(t)=\sin t \end{matrix}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $t=\pi k$:

$$g(\pi k)=e^{\pi k}$$

$$h(\pi k)=\sin(\pi k)=0$$

$$h'(t)=\cos t;h'(\pi k)=\cos(\pi k)=\pm 1$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $t=\pi k$ выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки $t=\pi k$ являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками ненулевых при $t=\pi k$ производных для функций g(t) и h(t). В данном случае, это 1.

Если вернуться от t к z, то изолированные особые точки будут следующими:

$$z=\frac{1}{t}=\frac{1}{\pi k};k\in z$$

Рассмотрим точку z = 0. Для любого δ>0 существует такое значение k, что $|1/\pi k|<\delta$. Таким образом z = 0 не является изолированной особой точкой, так как противоречит определению, гласящему, что функция должна быть аналитической в некотором кольце вокруг этой точки, а, какой бы мы не взяли радиус кольца, в нем найдется особая точка вида $1/\pi k$, в которой функция не является аналитической.

Ответ: Точки $z=1/\pi k;k\in z$ для данной функции являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-i|=1/2} \underbrace{\frac{dz}{z(z^2+1)}}_{f(z)}$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = 0$

$z = \pm i$

Точка $z = -i$ не входит в область, ограниченную данным контуром, поэтому не рассматривается.

Точки $z_1 = 0$ и $z_2 = i$ являются простыми полюсами. Найдем вычеты в этих точках:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)(z-0)] = \lim_{z\to 0}\frac{z}{z(z^2+1)} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(z^2+1)} = 1$$

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to i}[f(z)(z-i)] = \lim_{z\to i}\frac{z-i}{z(z^2+1)} = \lim_{z\to i}\frac{1}{z(z+i)} =$$

$$= \frac{1}{i\cdot 2i} = -\frac{1}{2}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-i|=1/2} \frac{dz}{z(z^2+1)} = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i\left(1-\frac{1}{2}\right) = \pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-i|=1/2} \frac{dz}{z(z^2+1)} = \pi i$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{\cos z^2 - 1}{z^3}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$\frac{\cos z^2 - 1}{z^3} = \frac{-1+1-\frac{z^4}{2!}+\frac{z^8}{4!}-\frac{z^{12}}{6!}+\ldots}{z^3} = -\frac{z}{2!}+\frac{z^5}{4!}-\frac{z^9}{6!}+\frac{z^{13}}{8!}-\ldots$$

Получившийся ряд не имеет главной части. Из этого следует, что особая точка $z = 0$ представляет собой устранимую особую точку. Вычет в этой точке всегда равен нулю:

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz = 2\pi i\cdot 0 = 0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz = 0$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=0,2} \underbrace{\frac{3\pi z - \sin 3\pi z}{-z^2 \operatorname{sh}^2 \pi^2 z}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции z = ik/π. Однако в контур попадает только z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{3\pi z - \sin 3\pi z}{z^2 - \operatorname{sh}^2 \pi^2 z} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad \begin{matrix} g(z) = 3\pi z - \sin 3\pi z \\ h(z) = z^2 - \operatorname{sh}^2 \pi^2 z \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при z = 0. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что z = 0 представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{3\pi z - \sin 3\pi z}{-z\operatorname{sh}^2\pi^2 z}\right) = \begin{Bmatrix} \text{используем пра-} \\ \text{вило Лопиталя} \end{Bmatrix} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{3\pi - 3\pi\cos 3\pi z}{-\operatorname{sh}^2\pi^2 z - 2\pi^2 z \operatorname{sh}(\pi^2 z)\operatorname{ch}(\pi^2 z)}\right) = \begin{Bmatrix} \text{используем пра-} \\ \text{вило Лопиталя} \end{Bmatrix} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{9\pi^2 \sin 3\pi z}{-4\pi^2 \operatorname{sh}\pi^2 z \operatorname{ch}\pi^2 z - 4\pi^4 z \operatorname{ch}^2\pi^2 z + 2\pi^4 z}\right) = \begin{Bmatrix} \text{используем пра-} \\ \text{вило Лопиталя} \end{Bmatrix} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{27\pi^4 \cos 3\pi z}{-12\pi^4 \operatorname{ch}^2\pi^2 z + 6\pi^4 - 8\pi^6 z \operatorname{ch}\pi^2 z \operatorname{sh}\pi^2 z}\right) = -\frac{9}{2\pi}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{3\pi z - \sin 3\pi z}{-z^2 \operatorname{sh}^2 \pi^2 z} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{9}{2\pi}\right) = -9i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{3\pi z - \sin 3\pi z}{-z^2 \operatorname{sh}^2 \pi^2 z} dz = -9i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z+i|=3} \left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)} + \frac{\pi i}{e^{\pi z/2} + i}\right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z+i|=3} \underbrace{\frac{4\sin\frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z+i|=3} \underbrace{\frac{\pi i}{e^{\pi z/2} + i}}_{f_2(z)} dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z+i|=3} \frac{4\sin\frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)} dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=2–i и z=4–i. При этом точка z=4–i не охвачена контуром |z+i|=3 и не рассматривается.

Точка z=2–i является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=2-i} f_1(z) = \lim_{z\to 2-i} \frac{d}{dz}\left[\frac{4\sin\frac{\pi z}{4-2i}(z-2+i)^2}{(z-2+i)^2(z-4+i)}\right] = \lim_{z\to 2-i} \frac{d}{dz}\left[\frac{4\sin\frac{\pi z}{4-2i}}{(z-4+i)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 2-i}\left[\frac{(4+2i)\pi}{5(z-4+i)}\cos\frac{(2+i)\pi z}{10} - \frac{4}{(z-4+i)^2}\sin\frac{(2+i)\pi z}{10}\right] = -1$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+i|=3} \frac{4\sin\frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)} dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=2-i} f_1(z) = 2\pi i \cdot (-1) = -2\pi i$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z+i|=3}\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\pi z/2}+i=0 \Rightarrow e^{\pi z/2}=-i \Rightarrow \pi z/2=\ln(-i)=-\pi i/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=4ik-i, k\in z$$

Из этих точек только одна охвачена контуром |z+i|=3 и должна приниматься во внимание. Это точка z=–i, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=-i} f_2(z)=\lim_{z\to -i}\frac{\pi i(z+i)}{e^{\pi z/2}+i}=\lim_{z\to -i}\frac{\pi i(z+i)}{e^{\pi z/2}+i}=\begin{Bmatrix}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{Bmatrix}=$$

$$=\lim_{z\to -i}\frac{\pi i}{\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2}}=\frac{\pi i}{\frac{\pi}{2}e^{-\pi i/2}}=\frac{2i}{e^{-\pi i/2}}=\frac{2i}{-i}=-2$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+i|=3}\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=-i} f_2(z)=2\pi i\cdot(-2)=-4\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z+i|=3}\left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz=$$

$$=\oint\limits_{|z+i|=3}\frac{4\sin\frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)}dz+\oint\limits_{|z+i|=3}\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}dz=$$

$$=-2\pi i-4\pi i=-6\pi i=\frac{6\pi}{i}$$

Ответ: $\oint\limits_{|z+i|=3}\left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz=\frac{6\pi}{i}$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{2+\frac{\sqrt{3}}{2i}(z-\frac{1}{z})}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{2iz+\frac{\sqrt{3}}{2}(z^2-1)}=$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{4iz+\sqrt{3}(z^2-1)}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{3}(z+i/\sqrt{3})(z+i\sqrt{3})}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-i/\sqrt{3};\quad z=-i\sqrt{3};$

Точка $z=-i\sqrt{3}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=-i/\sqrt{3}$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-i/\sqrt{3}} f(z)=\lim_{z\to -i/\sqrt{3}}[f(z)(z+\frac{i}{\sqrt{3}})]=\lim_{z\to -i/\sqrt{3}}\frac{2}{(z+i\sqrt{3})\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2}{(-i/\sqrt{3}+i\sqrt{3})\sqrt{3}}=\frac{2}{(-i+3i)}=\frac{2}{2i}=-i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{3}(z+i/\sqrt{3})(z+i\sqrt{3})}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)=2\pi i\cdot(-i)=2\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}=2\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+\sqrt{10/11}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+\sqrt{10/11}\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(1+\frac{\sqrt{10/11}}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i(z+\frac{\sqrt{10/11}}{2}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{10/11}(z+\frac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{10}})(z+\frac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{10}})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-\frac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{10}};\quad z=-\frac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{10}};$

Точка $z=-(\sqrt{11}+1)/\sqrt{10}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=-(\sqrt{11}-1)/\sqrt{10}$ является полюсом второго порядка.

Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-(\sqrt{11}-1)/\sqrt{10}}f(z)=\lim_{z\to-(\sqrt{11}-1)/\sqrt{10}}\frac{d}{dz}[f(z)(z+(\sqrt{11}-1)/\sqrt{10})^2]=$$

$$=\lim_{z\to-(\sqrt{11}-1)/\sqrt{10}}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[\sqrt{10/11}(z+\frac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{10}})\right]^2}=\frac{44}{i}\lim_{z\to-(\sqrt{11}-1)/\sqrt{10}}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z\sqrt{10}+\sqrt{11}+1)^2}=$$

$$=\frac{44}{i}\lim_{z\to-(\sqrt{11}-1)/\sqrt{10}}\frac{\sqrt{11}+1-z\sqrt{10}}{(\sqrt{11}+1+z\sqrt{10})^3}=\frac{44}{i}\cdot\frac{\sqrt{11}+1+\sqrt{11}-1}{(\sqrt{11}+1+1-\sqrt{11})^3}=\frac{44}{i}\frac{2\sqrt{11}}{2^3}=\frac{11\sqrt{11}}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{10/11}(z+\frac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{10}})(z+\frac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{10}})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{11\sqrt{11}}{i}\right)=11\sqrt{11}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+\sqrt{10/11}\cos t)^2}=11\sqrt{11}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2-z+2}{(z^2+9)(z^2+1)}dz$$

Особые точки:

$z=3i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-3i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

$z=i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точки $z=3i$ и $z=i$ являются простыми полюсами и вычеты в них вычисляются следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=3i}f(z)=\lim_{z\to 3i}[f(z)(z-3i)]=\lim_{z\to 3i}\frac{z^2-z+2}{(z+3i)(z^2+1)}=\frac{3-7i}{48}$$

$$\operatorname*{res}_{z=i}f(z)=\lim_{z\to i}[f(z)(z-i)]=\lim_{z\to i}\frac{z^2-z+2}{(z^2+9)(z+i)}=\frac{-i-1}{16}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx=2\pi i\left(\frac{3-7i}{48}+\frac{-i-1}{16}\right)=2\pi i\left(\frac{3-7i-3i-3}{48}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\frac{10}{48i}\right)=\frac{5\pi}{12}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx=\frac{5\pi}{12}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\lambda x dx = \operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \operatorname{rez}_{z_m} R(z)e^{i\lambda z}\right\}, \lambda > 0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$(x^2+4)^2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 2i$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Из этого следует:

$$z_m = \{2i\}$$

Эта особая точка является полюсом второго порядка. Найдем в ней вычет:

$$\operatorname{rez}_{z=2i} R(z)e^{i\lambda z} = \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z(z-2i)^2}{(z^2+4)^2}e^{3iz}\right] = \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+2i)^2}e^{3iz}\right] =$$

$$= \frac{-5z+2i+2iz^2}{(z+2i)^3}e^{2iz} = \frac{1}{4}e^{-4}$$

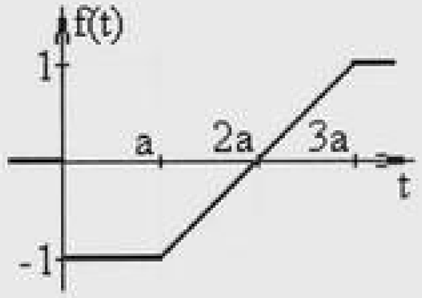
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \operatorname{rez}_{z_m} R(z)e^{i\lambda z}\right\} = \frac{\pi}{4}e^{-4}$$

Ответ: $\int_0^{\infty}\frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2}dx = \frac{\pi}{4}e^{-4}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)\begin{cases} -1, & 0 < t < a \\ \dfrac{t-2a}{a}, & a < t < 3a \\ 1, & 3a < t \end{cases}$$

$$f(t) = -1\cdot\eta(t) + \frac{t-a}{a}\eta(t-a) + \frac{3a-t}{a}\eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p) = -\frac{1}{p} + \left(\frac{1}{ap^2} - \frac{1}{p}\right)e^{-ap} + \left(\frac{3}{p} - \frac{1}{ap^2}\right)e^{-3ap}$$

Ответ: $F(p) = -\frac{1}{p} + \left(\frac{1}{ap^2} - \frac{1}{p}\right)e^{-ap} + \left(\frac{3}{p} - \frac{1}{ap^2}\right)e^{-3ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+4p+5}=$$

$$=\frac{Ap^2+4Ap+5A+Bp^2-2Bp+Cp-2C}{(p-2)(p^2+4p+5)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(4A-2B+C)p+(5A-2C)}{(p-2)(p^2+4p+5)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\4A-2B+C=4\\5A-2C=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=13/17\\B=-13/17\\C=-10/17\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}=\frac{13}{17}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{13}{17}\cdot\frac{p}{p^2+4p+5}-\frac{10}{17}\cdot\frac{1}{p^2+4p+5}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{13}{17}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{13}{17}\cdot\frac{p}{p^2+4p+5}-\frac{10}{17}\cdot\frac{1}{p^2+4p+5}=$$

$$=\frac{13}{17}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{13}{17}\cdot\frac{p}{(p+2)^2+1}-\frac{10}{17}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1}=$$

$$=\frac{13}{17}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{13}{17}\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+1}+\frac{16}{17}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{13}{17}\cdot e^{2t}-\frac{13}{17}\cdot e^{-2t}\cos t+\frac{16}{17}\cdot e^{-2t}\sin t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$\frac{13}{17}\cdot e^{2t}-\frac{13}{17}\cdot e^{-2t}\cos t+\frac{16}{17}\cdot e^{-2t}\sin t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''+y=6e^{-t}$$

$$y(0)=3,\quad y'(0)=1.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+Y(p)=\frac{6}{p+1}$$

$$p^2Y(p)-3p-1+Y(p)=\frac{6}{p+1}$$

$$(p^2+1)Y(p)=\frac{6}{p+1}+3p+1=\frac{3p^2+4p+7}{p+1}$$

$$Y(p)=\frac{3p^2+4p+7}{(p+1)(p^2+1)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{3p^2+4p+7}{(p+1)(p^2+1)}=\frac{3}{p+1}+\frac{4}{p^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=3e^{-t}+4\sin t$$

Ответ: $y(t)=3e^{-t}+4\sin t$

Задача 25

Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы F=–kx, пропорциональной смещению x и направленной в противоположную сторону, и силы сопротивления R=rv. В момент t=0 частица находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Найти закон движения x=x(t) частицы.

$k = m$, $r = 2m$, $x_0 = 1$м, $v_0 = 0$.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kx - rv$$

$$\ddot{x}m + r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m + 2m\dot{x} + mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + 2pX(p) - 2x(0) + X(p) = 0$$

$$(p^2 + 2p + 1)X(p) - p - 2 = 0$$

$$X(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+1} = \frac{p+2}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

Ответ: $x(t) = e^{-t} + te^{-t}$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2 \\ \dot{y} = x - y + 1 \end{cases}$$

$x(0) = -1, \quad y(0) = 2.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = X(p) + 3Y(p) + 2/p \\ pY(p) - y(0) = X(p) - Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) + 1 = X(p) + 3Y(p) + 2/p \\ pY(p) - 2 = X(p) - Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 2 = X(p) - Y(p) + 1/p$$

$$X(p) = pY(p) - 2 + Y(p) - 1/p$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p[pY(p) - 2 + Y(p) - 1/p] + 1 = pY(p) - 2 + Y(p) - 1/p + 3Y(p) + 2/p$$

$$p^2Y(p) - 2p = -2 + 4Y(p) + 1/p \Rightarrow (p^2 - 4)Y(p) = 2p - 2 + 1/p$$

$$Y(p) = \frac{2p - 2 + 1/p}{p^2 - 4}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{2p - 2 + 1/p}{p^2 - 4} = 2\frac{p}{p^2-4} - \frac{2}{p^2-4} + \frac{1}{p}\frac{1}{p^2-4} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = 2\operatorname{ch}2t - \operatorname{sh}2t - \tfrac{1}{4}(1 - \cos 2it) = \tfrac{9}{4}\operatorname{ch}2t - \operatorname{sh}2t - \tfrac{1}{4}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = x - y + 1 \Rightarrow x(t) = \dot{y} + y - 1 = \tfrac{9}{2}\operatorname{sh}2t - 2\operatorname{ch}2t + \tfrac{9}{4}\operatorname{ch}2t - \operatorname{sh}2t - \tfrac{1}{4} - 1 =$$

$$= \tfrac{7}{2}\operatorname{sh}2t + \tfrac{1}{4}\operatorname{ch}2t - \tfrac{5}{4}$$

Ответ:

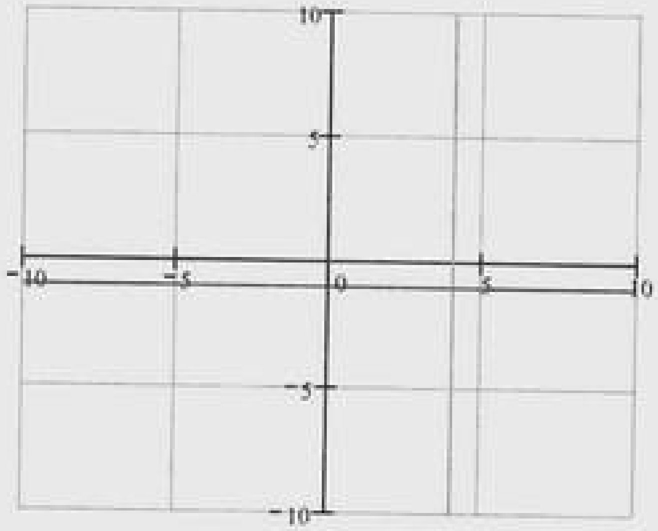
$$x(t) = \tfrac{7}{2}\operatorname{sh}2t + \tfrac{1}{4}\operatorname{ch}2t - \tfrac{5}{4}$$

$$y(t) = \tfrac{9}{4}\operatorname{ch}2t - \operatorname{sh}2t - \tfrac{1}{4}$$

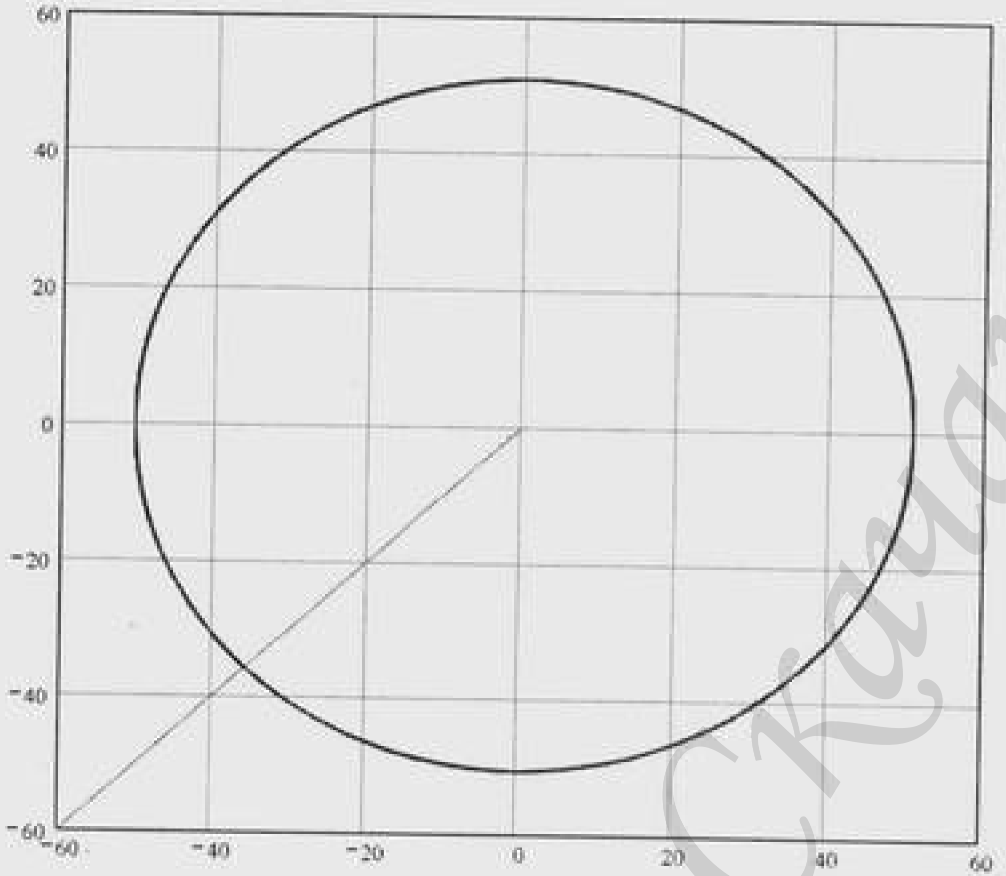
Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = e^z$; прямые $x=C, y=C$.



Каждая из вертикальных прямых преобразуется в окружность радиуса e^C, а каждая горизонтальная – в луч, исходящий из центра координат в направлении C радиан:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\dots,n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z = x + iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z - i}{z + i}$$

Аналитические функции

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z \in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

Интегрирование функций комплексного переменного

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_\Gamma udx-vdy+i\int_\Gamma vdx+udy$$

Если кривая Г задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, а начальная и конечная точки дуги соответствуют значениям $t=\alpha$ и $t=\beta$, то:

$$\int_\Gamma f(z)=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt;\quad z(t)=x(t)+iy(t).$$

Если $w=f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области G, то интеграл не зависит от пути интегрирования и для его вычисления применяется **формула Ньютона-Лейбница**:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz=\Phi(z_2)-\Phi(z_1)$$

(Здесь $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для функции $f(z)$)

Ряд Лорана

Функция $w=f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $\rho<|z-z_0|<R$, разлагается в этом кольце в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(z-z_0)^k=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1}C_k(z-z_0)^k}_{\text{главная часть ряда Лорана}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k}_{\text{правильная часть ряда Лорана}}$$

Коэффициенты находятся по формуле:

$$C_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}},k=0,\pm1,\pm2,...$$

В этой формуле Г – произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри заданного кольца. Разложение в

ряд Лорана единственно, а на практике, если это возможно, стараются искать коэффициенты C_k с помощью готовых разложений элементарных функций в ряд Тейлора.

Изолированные особые точки однозначной аналитической функции

Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $w=f(z)$, если $f(z)$ – однозначная и аналитическая функция в круговом кольце $0<|z-z_0|<\delta$, кроме самой точки z_0.

Типы изолированных особых точек

- Устранимая особая точка (ряд Лорана не содержит главной части)
- Полюс (главная часть ряда Лорана содержит конечное число членов)
- Существенно особая точка (главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов)

Вычеты

Пусть z_0 – изолированная особая точка функции $w=f(z)$. Вычетом функции $f(z)$ называется число, обозначаемое символом $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$ и определяемое равенством:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=C_{-1}$$

Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Вычет функции $f(z)$ в полюсе n-го порядка вычисляется по формуле:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-z_0)^n]$$

Вычет в существенно особой точке равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки z_0:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=C_{-1}$$

Основная теорема Коши о вычетах

Если функция $w=f(z)$ является аналитической на границе Г области G и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$$

Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций

Пусть $R(x)$ – рациональная функция, $R(x)=P_k(x)/Q_l(x)$, где $P_k(x)$ и $Q_l(x)$ – многочлены степеней k и l соответственно. Если $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $l \geq k+2$, то:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{m} \operatorname*{res}_{z=z_m} R(z)$$

(сумма вычетов функции $R(x)$ берется по всем полюсам, расположенным в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}(z)>0$).

Вычисление несобственных интегралов специального вида

Пусть $R(x)$ – рациональная функция, $R(x)=P_k(x)/Q_l(x)$, где $P_k(x)$ и $Q_l(x)$ – многочлены степеней k и l соответственно. Если $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $l \geq k+2$, то:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{m} \operatorname*{res}_{z=z_m} R(z)e^{i\lambda z}\right\}, \lambda > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum_{m} \operatorname*{res}_{z=z_m} R(z)e^{i\lambda z}\right\}, \lambda > 0$$

(сумма вычетов функции $R(x)$ берется по всем полюсам, расположенным в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}(z)>0$).

Вычисление определенных интегралов специального вида

Пусть R – рациональная функция cos t и sin t, непрерывная внутри промежутка интегрирования. Полагаем $z=e^{it}$, тогда:

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), dt = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_{0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz$$

Преобразование Лапласа

Функцией-оригиналом называется функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям:

1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t;
2) $f(t)=0$ для всех отрицательных t;
3) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие постоянные M и σ_0, что $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$ для всех t.

Изображением функции f(t) по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p=\sigma+i\tau$, определяемая равенством:

$$F(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

Для любой функции-оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re}(p)>\sigma_0$ и по крайней мере в этой полуплоскости является аналитической функцией.

Свойства изображений по Лапласу

Линейность:

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \to C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p)$$

Формула подобия:

$$f(\omega t) \to \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right), \quad \omega = \text{const} > 0$$

Дифференцирование оригинала:

$$f'(t) \to pF(p) - f(0)$$

$$f''(t) \to p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

...

$$f^{(n)}(t) \to p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$$

Дифференцирование изображения:

$$F'(p) \to -t \cdot f(t)$$

Интегрирование оригинала:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(p)}{p}$$

Интегрирование изображения: если f(t)/t является функцией-оригиналом, то

$$\int_p^\infty F(p)dp \to \frac{f(t)}{t}$$

Формула смещения: для любого комплексного λ

$$f(t)e^{-\lambda t} \to F(p+\lambda)$$

Формула запаздывания:

$$f(t-\tau) \to e^{-p\tau}F(p), \tau > 0$$

Формула умножения изображений:

$$F_1(p)F_2(p) \to \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

Идея операционного метода решения линейных дифференциальных уравнений

Решение проходит в три этапа:

1) переход от исходных функций к их изображениям по Лапласу, при этом дифференциальное уравнение преобразуется в алгебраическое относительно изображения искомой функции;
2) решение полученного алгебраического уравнения;
3) получение искомого решения по его изображению.