Екзаменаційний білет № 15

I. Теоретична частина

1. Похибка інтерполяції в тоці й на інтервалі.

. Похибка інтерполяції

Справедлива наступна рівність

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x),$$

де $R_n(x)$ – залишковий член, тобто похибка інтерполяції.

Виявляється, що

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \Pi_{n+1}(x) \qquad (5),$$

де

$$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

а $\xi \subset [a,b]$ – невідома точка ; [a,b] - інтервал, що містить $x_0,x_1,\dots x_n$

$$f(x) = L_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \Pi_{n+1}(x) \qquad (6)$$

З останньої рівності випливає оцінка похибки інтерполяції в заданій точці x

$$\left|f(x) - L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod\nolimits_{n+1}(x)\right| \qquad (7),$$

де

$$M_{n+1} = \max_{a < x < b} |f^{(n+1)}(x)|$$

Звідси ж можна отримати оцінка максимальної похибки на інтервалі [a,b]

$$\max\left|f(x)-L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{[a,b]}\left|\prod\nolimits_{n+1}(x)\right| \qquad (8)$$

2. Розв’язок СЛАР методом ітерації Зейделя.

7. Метод ітерації Зейделя

Основна ідея методу полягає в тому, що при обчисленні *(k + 1)*-го наближення невідомого $x_i^{(k+1)}$ враховуються вже обчислені раніше *(k +1)*-ші наближення $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots x_{i-1}^{(k+1)} \dots$

Вважаючи, що *k*-і наближення $x_i^{(k)}$ кореня відомі, будемо обчислювати *(k + 1)* наближення за формулами

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\, x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{21}\, x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j}\, x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\, x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}\, x_j^{(k)}$$

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}\, x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn}\, x_n^{(k)}$$

$k = 0, 1, 2, \dots n$

Теорема 2.

Якщо для лінійної системи

$$X = \alpha X + \beta \qquad (9)$$

виконано умову

$|| \alpha ||_m > 1,$

де $\|\alpha\|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|,$ $i = 1, 2, \ldots, n$

то процес ітерації для системи (9) збігається до єдиного її розв'язку, при будь-якому виборі початкового вектора $X^{(0)}$.

Наведена теорема про збіжність справедлива й для ітерації Зейделя. Як правило метод Зейделя дає кращу збіжність, ніж проста ітерація. Процес Зейделя може навіть збігатися, коли проста ітерація розбігається.

Оцінка точності отриманих наближень

$$\left\| x - x^{(k)} \right\|_m \le \frac{\mu^k}{1-\mu} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_m ,$$

де

$$\mu = \max_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}|} \le \|\alpha\|_m$$

Спробуємо оцінити обчислювальну складність ітераційних методів. Виконання однієї ітерації для системи з n невідомими, вочевидь, потребує n^2 операцій алгебраїчного множення. Отже, якщо для досягнення потрібної точності слід виконати не менш, ніж $к$ ітерацій, загальна обчислювальна складність буде

$O(n^2 к)$

Згадаємо, що обчислювальна складність прямих методів складає

$O(n^3)$

Таким чином, якщо $k < n,$ обчислювальна складність ітераційних методів менша за складність прямих методів. На практиці порядок системи (n) зазвичай складає кілька сотень, або навіть, тисяч. У той же час для отримання досить високої точності розв’язку треба не більше кількох десятків ітерацій. Отже, у такому випадку ітераційні методи набагато більш економні в сенсі обчислювальної складності.

II. Практична частина

За допомогою методу послідовних наближень обчислити корінь рівняння

```
3.0 / (2 + cos(x)) + x/1.5 = 0
```

з точністю не гірше за 10^{-7}.