Екзаменаційний білет № 23

I. Теоретична частина

1. Загальна ідея побудови методів Монте-Карло.

2. Загальна ідея методів Монте-Карло.

Суть методу полягає в зведенні задачі до розрахунку математичного очікування. Щоб приблизно обчислити деяку скалярну величину a, необхідно знайти таку випадкову величину ξ, що $M\xi = a$, тоді обчисливши N незалежних значень $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ величини ξ, можна вважати, що

$$a \approx (1/N)(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N)$$

(На підставі закону великих чисел, відповідно до якого середнє арифметичне сходиться до математичного сподівання).

Приклад 1.

Потрібно обчислити об’єм деякої обмеженої просторової фігури *G*. Виберемо паралелепіпед *П*, що містить *G*, об’єм якого $V_П$ відомий. Виберемо *N* випадкових точок, рівномірно розподілених у *П*, і позначимо через N' кількість точок, що потрапили в *G*. Якщо *N* велике, то очевидно, що

$$N'/N \approx V_G / V_П,$$

звідки:

$$V_G \approx V_П (N'/N).$$

У цьому прикладі випадкова величина ξ дорівнює $V_П$, якщо точка потрапляє в *G*, і ξ дорівнює 0, якщо точка потрапляє в *П - G*. Тоді їх а середнє арифметичне підпорядковане наступній рівності

$$(1/N)(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_N) = V_П (N'/N),$$

а математичне сподівання

$$M\xi = V_G,$$

Приклад 2.

Припустимо, що потрібно обчислити суму

$$S = \sum_{k=1}^{n} b_k \ .$$

Надамо b_k у вигляді

$$b_k = p_k \cdot f_k, \ \ p_k \geq 0,$$

де $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Припустимо, що ξ - випадкова величина, що приймає значення k з імовірністю p_k. Виберемо M незалежних значень $k_1, k_2, \ldots, k_m$ і покладемо

$$S \approx S_m = \frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M} f_{k_l} \ .$$

При досить великих M величина S_m з великою ймовірністю близька до S. Найпростішим способом отримати значення ξ_l є наступний. Припустимо, що η_1, … значення датчика ВЧ, рівномірно розподілені в інтервалі [0;1].

Для кожного значення η_l визначають k_l, таке, що η_l належить напівсегменту

$$\pi_{k_l} = [\sum_{i=1}^{k_l-1} p_i , \sum_{i=1}^{k_l} p_i]$$

і вважають $\xi_l = k_l$. Імовірність влучення η_l у напівсегмент π_s дорівнює p_s. Найпростіше покласти

$$p_k = \frac{1}{N},$$

тоді

$$\sum_{i=1}^{l} p_i = \frac{l}{N},$$

і врешті маємо

$$\xi_l = [\eta_l \cdot N] + 1.$$

Зрозуміло, що існує нескінченно багато випадкових величин ξ таких, що $M\xi = a$. Тому теорія методів Монте-Карло повинна дати відповіді на 2 питання:

1. Як вибрати зручну величину ξ для розв'язання тієї або іншої задачі?
2. Як знаходити значення $\xi_1, \xi_2, \ldots$, довільної випадкової величини?

2. Розв'язок задачи Коши методом Эйлера.

3.1 Метод Ейлера

Розглянемо рівняння

$$y' = y$$

Його розв'язком є

$y = Ce^x$

Оскільки рівняння має вид

$$y'(x) = f(x, y)$$

маємо можливість обчислювати похідну інтегральної кривої в кожній із точок *(x,y)*. Тоді грубий розв'язок ДР можна знайти в наступний спосіб. У початковий момент маємо лише одну точку (x_0, y_0)

$$y' = f(x_0, y_0)$$

Побудуємо дотичну у точці (x_0, y_0) і перейдемо вздовж неї на малу відстань *h*, тобто обчислимо

$$y' = f(x_1, y_1),$$

де $x_1 = x_0 + h$, $y_1 = y_0 + hy'$.

Продовжуючи цей процес для наступних точок отримаємо *ламану Ейлера*. Доведено, що якщо $\varphi(x)$ є ламана Ейлера, а $\varphi^*(x)$ – точний розв'язок рівняння (1), то

$$\lim_{h \to 0} |\varphi(x) - \varphi^*(x)| = 0$$

Найпростіші методи Рунга-Кутта можуть бути отримані з наочних міркувань.

Рівнянням прямої L є

$$y_{k+1} = y_k + y'_k(x_{k+1} - x_k) = y_k + h\, y'_k$$

але $y'_k = f(x_k, y_k)$. Отже, маємо

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k);$$

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad k = 0,1,2,..., \qquad (2),$$

це і є *метод Ейлера* для розв'язання задачі Коші. У відсутність похибки округлення, локальна похибка (тобто похибка на кроці) методу є $O(h^2)$. Глобальна (на інтервалі) похибка методу Ейлера становить $O(h)$.

Приклад 1.

На відрізку $[0;1]$ скласти таблицю значень розв'язків

рівняння

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

з ПУ $y(0) = 1$ і кроком таблиці $h = 0,2$.

У цьому рівнянні маємо

$$f(x, y) \equiv y - 2x / y .$$

Через те що $x_0 = 0$ і $y_0 = 1$, для y_1 маємо

$$y_1 = y_0 + h(y_0 - x_0 / y_0) = 1 + 0,2 \cdot 1 = 1,2 ;$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,2 = 0,2 ;$$

$y_2 = y_1 + h(y_1 - x_1 / y_1) = 1{,}3733$;

$x_2 = x_1 + h = 0{,}4$ і т.д.

II. Практична частина

За допомогою узагальненої формули Сімпсона обчислити визначений інтеграл

$$\int_{2}^{10} -\exp(x) * (\sin(x) + \cos(x)) / 64.0 \, dx$$

з точністю не гірше за 10^{-5}.