/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{256}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi = \arg(z); \quad k = 0,1,\dots,n-1; \quad z \neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{256}$:

$$\sqrt[4]{256} = 4$$

$$\sqrt[4]{256} = 4i$$

$$\sqrt[4]{256} = -4$$

$$\sqrt[4]{256} = -4i$$

Ответ: $\sqrt[4]{256} = \{4; 4i; -4; -4i\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $(-1)^{4i}$

Нам известно следующее равенство:

$$\alpha^z = e^{z \cdot \mathrm{Ln}\,\alpha}$$

Подставим в это равенство данные нашей задачи. Тогда:

$$(-1)^{4i} = e^{4i \cdot \mathrm{Ln}(-1)}$$

Как известно, главное значение $\mathrm{Ln}(-1) = i\pi$. Тогда выражение можно преобразовать следующим образом:

$$(-1)^{4i} = e^{4i \cdot (i\pi)} = e^{-4\pi}$$

Ответ: $(-1)^{4i} = e^{-4\pi}$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$\operatorname{Arcsin}(1)$

Функция Arcsin является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

Подставим вместо z значение 1:

$$\operatorname{Arcsin}(1) = -i\operatorname{Ln}\left(i + \sqrt{1 - 1^2}\right) = -i\operatorname{Ln}(i)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-i\operatorname{Ln}(i) = -i[\ln|i| + i(\arg(i) + 2\pi k)] =$$

$$= -i\ln 1 + \arg(i) + 2\pi k \approx \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

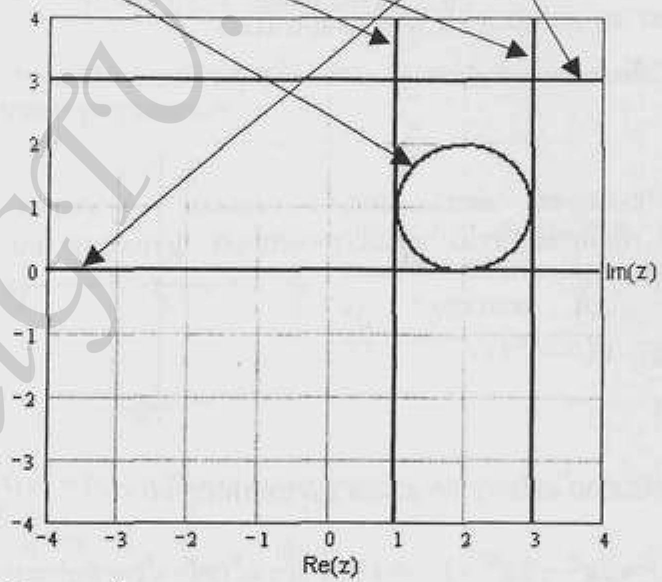
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ответ: $\operatorname{Arcsin}(1) \approx \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z - 2 - i| \geq 1, \quad 1 \leq \operatorname{Re} z < 3, \quad 0 < \operatorname{Im} z \leq 3$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z = t - 2 + i(t^2 - 4t + 5)$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t) = t - 2; \quad y(t) = t^2 - 4t + 5$

Выразим параметр t через x и y:

$x = t - 2 \Rightarrow t = x + 2$

$y = t^2 - 4t + 5 \Rightarrow y - 1 = (t - 2)^2 \Rightarrow t = \sqrt{y - 1} + 2$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$x + 2 = \sqrt{y - 1} + 2 \Rightarrow x^2 = y - 1 \Rightarrow x^2 - y + 1 = 0$

Ответ: $x^2 - y + 1 = 0$

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ и значению $f(z_0)$:

$u = x^3 - 3xy^2 - x$

$f(0) = 0$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = 3x^2 - 3y^2 - 1 + 6ixy = 3(x+iy)^2 - 1 = 3z^2 - 1$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int (3z^2 - 1)dz = z^3 - z + C$$

Определим константу C:

$f(0) = 0^3 - 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$f(z) = z^3 - z$

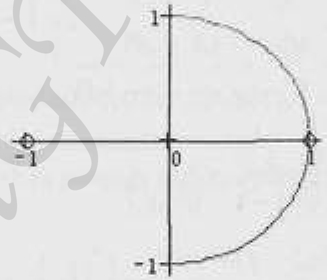
Ответ: $f(z) = z^3 - z$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_L (z^3 + \sin z)dz;\ L: \{|z| = 1; \operatorname{Re} z \ge 0\}$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = (x+iy)^3 + \sin(x+iy) = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 + \frac{e^{ix-y}}{2i} -$$

$$-\frac{e^{-ix+y}}{2i} = \underbrace{x^3 - 3xy^2 + \frac{\sin x}{2}(e^{-y} + e^{y})}_{u(x,y)} + i\underbrace{\left[3x^2y - y^3 + \frac{\cos x}{2}(e^{y} - e^{-y})\right]}_{v(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + \frac{\cos x}{2}(e^{-y} + e^{y}); \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + \frac{\cos x}{2}(e^{-y} + e^{y});$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy + \frac{\sin x}{2}(e^{y} - e^{-y}); \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy - \frac{\sin x}{2}(e^{y} - e^{-y});$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются, следовательно, функция является аналитической. Тогда результат от пути интегрирования не зависит:

$$\int_L (z^3 + \sin z)dz = \int_{-i}^{i} (z^3 + \sin z)dz = \left(\frac{z^4}{4} - \cos z\right)\Bigg|_{-i}^{i} = 0$$

Ответ: $\int_L (z^3 + \sin z)dz = 0$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}=\frac{7(z+28)}{-z^2(z+7)(z-14)}=-\frac{7}{z^2}\cdot\frac{z+28}{(z+7)(z-14)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

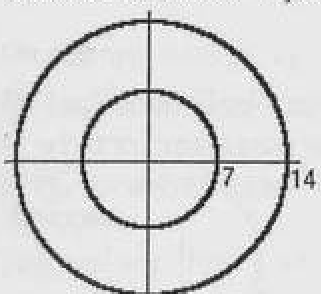
$$\frac{z+28}{(z+7)(z-14)}=\frac{A}{z+7}+\frac{B}{z-14}=\frac{Az-14A+Bz+7B}{(z+7)(z-14)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=-1;B=2\}\Rightarrow\frac{z+28}{(z+7)(z-14)}=\frac{-1}{z+7}+\frac{2}{z-14}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{7}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+7}-\frac{2}{z-14}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=-7; z=14$



Рассмотрим область $|z|<7$:

$$f(z)=\frac{7}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+7}-\frac{2}{z-14}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1-(-\frac{z}{7})}+\frac{1}{1-\frac{z}{14}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{7}+\frac{z^2}{49}-\frac{z^3}{343}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{14}+\frac{z^2}{196}+\frac{z^3}{2744}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{7z}+\frac{1}{49}-\frac{z}{343}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{14z}+\frac{1}{196}+\frac{z}{2744}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $7<|z|<14$:

$$f(z)=\frac{7}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+7}-\frac{2}{z-14}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{7}{z(1+\frac{7}{z})}+\frac{1}{1-\frac{z}{12}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{7}{z}-\frac{49}{z^2}+\frac{343}{z^3}-\frac{2401}{z^4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{14}+\frac{z^2}{196}+\frac{z^3}{2744}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{7}{z^3}-\frac{49}{z^4}+\frac{343}{z^5}-\frac{2401}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{14z}+\frac{1}{196}+\frac{z}{2744}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>14$:

$$f(z)=\frac{7}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+7}-\frac{2}{z-14}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{7}{z(1+\frac{7}{z})}-\frac{14}{z(1-\frac{14}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{7}{z}-\frac{49}{z^2}+\frac{343}{z^3}-\frac{2401}{z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{14}{z}+\frac{196}{z^2}+\frac{2744}{z^3}+\frac{38416}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{7}{z^3}-\frac{49}{z^4}+\frac{343}{z^5}-\frac{2401}{z^6}+\ldots\right)-\left(\frac{14}{z^3}+\frac{196}{z^4}+\frac{2744}{z^5}+\frac{38416}{z^6}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<7: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{7z}+\frac{1}{49}-\frac{z}{343}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{14z}+\frac{1}{196}+\frac{z}{2744}+\ldots\right)$$

$$7<|z|<14: f(z)=\left(\frac{7}{z^3}-\frac{49}{z^4}+\frac{343}{z^5}-\frac{2401}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{14z}+\frac{1}{196}+\frac{z}{2744}+\ldots\right)$$

$$|z|>14: f(z)=\left(\frac{7}{z^3}-\frac{49}{z^4}+\frac{343}{z^5}-\frac{2401}{z^6}+\ldots\right)-\left(\frac{14}{z^3}+\frac{196}{z^4}+\frac{2744}{z^5}+\frac{38416}{z^6}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$.

$$f(z)=\frac{2z}{z^2-4},\ z_0=2+2i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+4}=\frac{1}{z-2i}+\frac{1}{z+2i}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-z_0)+2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-z_0)+4+2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(4+2i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{1}{z-2i}+\frac{1}{z+2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(4+2i)^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2i)^{n+1}}+\frac{1}{(4+2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2i)^{n+1}}+\frac{1}{(4+2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$f(z)=ze^{z/(z-4)},\ z_0=4$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$z'=z-4;\ ze^{z/(z-4)}=(z'+4)e^{(z'+4)/z'}=e(z'+4)e^{4/z'}=f(z')$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=e(z'+4)e^{4/z'}=ez'\left(1+\frac{4}{z'}+\frac{16}{2!z'^2}+\frac{64}{3!z'^3}+\ldots\right)+$$

$$+4e\left(1+\frac{4}{z'}+\frac{16}{2!z'^2}+\frac{64}{3!z'^3}+\ldots\right)=\left(ez'+4e+\frac{16e}{2!z'}+\frac{64e}{3!z'^2}+\ldots\right)+$$

$$+\left(4e+\frac{16e}{z'}+\frac{64e}{2!z'^2}+\frac{256e}{3!z'^3}+\ldots\right)=ez'+8e+\frac{16e}{z'}\left(\frac{1+2!}{2!}\right)+$$

$$+\frac{64e}{z'^2}\left(\frac{2!+3!}{2!3!}\right)+\frac{256e}{z'^3}\left(\frac{3!+4!}{3!4!}\right)+\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=4$:

$$f(z)=ez+4e+\frac{16e}{z-4}\left(\frac{1+2!}{2!}\right)+\frac{64e}{(z-4)^2}\left(\frac{2!+3!}{2!3!}\right)+$$

$$+\frac{256e}{(z-4)^3}\left(\frac{3!+4!}{3!4!}\right)+\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=ez+4e+\frac{16e}{z-4}\left(\frac{1+2!}{2!}\right)+\frac{64e}{(z-4)^2}\left(\frac{2!+3!}{2!3!}\right)+$$

$$+\frac{256e}{(z-4)^3}\left(\frac{3!+4!}{3!4!}\right)+\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции:

$$f(z) = \frac{\cos(z^4/2)}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$$

Разложим числитель и знаменатель в ряды Лорана в окрестности точки $z = 0$:

$$f(z) = \frac{\cos(z^4/2)}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2} = \frac{1 - \dfrac{z^8}{2!2^2} + \dfrac{z^{16}}{4!2^4} - \dfrac{z^{24}}{6!2^6} + \ldots}{-1 - z^2/2 + 1 + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \dfrac{z^6}{6!} + \ldots} =$$

$$= \frac{1 - \dfrac{z^8}{2!2^2} + \dfrac{z^{16}}{4!2^4} - \dfrac{z^{24}}{6!2^6} + \ldots}{\dfrac{z^4}{4!} + \dfrac{z^6}{6!} + \dfrac{z^8}{8!} + \ldots}$$

Представим эту функцию, как отношение функций $g(z)$ и $h(z)$:

$$f(z) = \frac{1 - \dfrac{z^8}{2!2^2} + \dfrac{z^{16}}{4!2^4} - \dfrac{z^{24}}{6!2^6} + \ldots}{\dfrac{z^4}{4!} + \dfrac{z^6}{6!} + \dfrac{z^8}{8!} + \ldots} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad g(z) = 1 - \frac{z^8}{2!2^2} + \frac{z^{16}}{4!2^4} - \frac{z^{24}}{6!2^6} + \ldots; \quad h(z) = \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = 0$. Поскольку рассматриваемые функции представляют собой обычные степенные многочлены, то несложно увидеть, что $g(0) \neq 0$ и $h^{IV}(0) \neq 0$.

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = 0$ выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка $z = 0$ является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при $z = 0$ для функций $g(z)$ и $h(z)$. В данном случае, это $4 - 0 = 4$.

Ответ: Точка $z = 0$ является полюсом 4-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = \frac{2z - \sin 2z}{z^2(z^2+1)}$$

Изолированными особыми точками являются $z = i$, $z = -i$, $z = 0$.

Запишем данную функцию в виде отношения $g(z)$ и $h(z)$:

$$f(z) = \frac{2z - \sin 2z}{z^2(z^2+1)}; \quad g(z) = 2z - \sin 2z; \quad h(z) = z^2(z^2+1);$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = i$, $z = -i$, $z = 0$:

$g(0) = 0; g(i) \neq 0; g(-i) \neq 0;$

$g'(z) = 2 - 2\cos 2z; g'(0) = 0;$

$g''(z) = 4\sin 2z; g''(0) = 0;$

$g'''(z) = 8\cos 2z; g'''(0) \neq 0;$

$h(0) = 0; h(i) = 0; h(-i) = 0;$

$h'(z) = 4z^3 + 2z; h'(0) = 0; h'(i) \neq 0; h'(-i) \neq 0;$

$h''(z) = 12z^2 + 2; h''(0) \neq 0;$

При $z = 0$ порядок ненулевой производной для функции, стоящей в знаменателе, меньше порядка ненулевой производной для функции, стоящей в числителе. Таким образом, можно сделать вывод, что $z = 0$ является нулем функции. Порядок этого нуля находится, как разница между порядками ненулевых производных. В данном случае, это $3 - 2 = 1$.

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = i$ и $z = -i$ выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки $z = i$ и $z = -i$ являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это $1 - 0 = 1$.

Ответ: Точка $z = 0$ является нулем 1-го порядка.

Точки $z = i$ и $z = -i$ являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-3/2|=2} \underbrace{\frac{z^3+\sin 2z}{(z-\pi)\sin(z/2)}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = \pi$

$z = 2\pi k,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадают только точки $z = \pi$ и $z = 0$.

Точка $z_1 = 0$ является устранимой особой точкой, следовательно, вычет в точке z_1 равен нулю.

Точка $z_2 = \pi$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to\pi}[f(z)(z-\pi)] = \lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)(z^3+\sin 2z)}{(z-\pi)\sin(z/2)} =$$

$$= \lim_{z\to\pi}\frac{(z^3+\sin 2z)}{\sin(z/2)} = \frac{(\pi^3+\sin 2\pi)}{\sin(\pi/2)} = \pi^3$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-3/2|=2}\frac{z^3+\sin 2z}{(z-\pi)\sin(z/2)}dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i\cdot\pi^3 = 2\pi^4 i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-3/2|=2}\frac{z^3+\sin 2z}{(z-\pi)\sin(z/2)}dz = 2\pi^4 i$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=3} \underbrace{\frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$\frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5} = \frac{1}{z^2}+\frac{3}{2z^3}-\frac{1}{z^5}$$

Считая получившийся результат рядом Лорана по степеням z, т.е. в окрестности $z = 0$, мы приходим к выводу, что точка $z = 0$ является полюсом 5-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{4!}\lim_{z\to 0}\frac{d^4}{dz^4}[f(z)z^5] = \frac{1}{24}\lim_{z\to 0}\frac{d^4}{dz^4}\left(\frac{2z^3+3z^2-2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{24}\lim_{z\to 0}(0) = 0$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5}dz = 2\pi i\cdot 0 = 0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=3}\frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5}dz = 0$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z|=0,3} \underbrace{\frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции $z = ik/3$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad g(z) = e^{3z}-1-\sin 3z, \quad h(z) = z^2 \operatorname{sh} 3\pi z$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z \operatorname{sh} 3\pi z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{3e^{3z}-3\cos 3z}{\operatorname{sh} 3\pi z + 3\pi z \operatorname{ch} 3\pi z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{9e^{3z}+9\sin 3z}{36\pi \operatorname{ch} 3\pi z + 9\pi^2 z \operatorname{sh} 3\pi z}\right) = \frac{9}{6\pi} = \frac{3}{2\pi}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=0,3} \frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{3}{2\pi} = 6i$$

Ответ: $\displaystyle\oint_{|z|=0,3} \frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z} dz = 6i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z-2|=2} \left(z \sin\frac{i}{z-2} - \frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{2}}{(z-1)^2(z+1)}\right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint_{|z-2|=2} \underbrace{z \sin\frac{i}{z-2}}_{f_1(z)} dz + \oint_{|z-2|=2} \underbrace{\frac{-2\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{2}}{(z-1)^2(z+1)}}_{f_2(z)} dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint_{|z-2|=2} z \sin\frac{i}{z-2} dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left\{\begin{matrix} t = z-2 \\ z = t+2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z\sin\frac{i}{z-2} = (t+2)\sin\frac{i}{t}$$

Единственной особой точкой этой функции является $t=0$. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t+2)\sin\frac{i}{t} = (t+2)\left(\frac{i}{t} - \frac{i^3}{3!t^3} + \frac{i^5}{5!t^5} - \frac{i^7}{7!t^7} + \frac{i^9}{9!t^9} - \ldots\right) =$$

$$= \left(i - \frac{i^3}{3!t^2} + \frac{i^5}{5!t^4} - \frac{i^7}{7!t^6} + \ldots\right) + \left(\frac{2i}{t} - \frac{2i^3}{3!t^3} + \frac{2i^5}{5!t^5} - \frac{2i^7}{7!t^7} + \ldots\right) =$$

$$= i + \frac{2i}{t} - \frac{i^3}{3!t^2} - \frac{2i^3}{3!t^3} + \frac{i^5}{5!t^4} + \frac{2i^5}{5!t^5} - \frac{i^7}{7!t^6} - \frac{2i^7}{7!t^7} + \ldots$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов, из чего следует, что $t=0$ является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+2)\sin\frac{i}{t}\right] = C_{-1} = 2i$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-2|=2} z\sin\frac{i}{z-2}dz = \oint\limits_{|t|=2}(t+2)\sin\frac{i}{t}dt = 2\pi i\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+2)\sin\frac{i}{t}\right] =$$
$$= 2\pi i\cdot(2i) = -4\pi$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint\limits_{|z-2|=2}\frac{-2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{2}}{(z-1)^2(z+1)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=–1 и z=1. При этом точка z=–1 не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=1 является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=1}f_2(z) = \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left[\frac{-(z-1)^2\cdot2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{2}}{(z-1)^2(z+1)}\right] = \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left[\frac{-2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{2}}{z+1}\right] =$$
$$= \lim_{z\to1}\left[-\frac{\pi i}{(z+1)}\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) + \frac{2i}{(z+1)^2}\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right] = \frac{i}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-2|=2}\frac{-2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{2}}{(z-1)^2(z+1)}dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=1}f_2(z) = 2\pi i\cdot\left(\frac{i}{2}\right) = -\pi$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-2|=2}\left(z\sin\frac{i}{z-2} - \frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{2}}{(z-1)^2(z+1)}\right)dz = \oint\limits_{|z-2|=2} z\sin\frac{i}{z-2}dz +$$
$$+ \oint\limits_{|z-2|=2}\frac{-2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{2}}{(z-1)^2(z+1)}dz = -4\pi - \pi = -5\pi$$

Ответ: $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=2}\left(z\sin\frac{i}{z-2} - \frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{2}}{(z-1)^2(z+1)}\right)dz = -5\pi$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{21}\sin t + 5}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t, \sin t)dt = \oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{21}\sin t + 5} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\frac{\sqrt{21}}{2i}(z - \frac{1}{z}) + 5} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\frac{\sqrt{21}}{2}(z^2 - 1) + 5iz} =$$
$$= \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{21}(z^2 - 1) + 10iz} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{21}(z + i\sqrt{21}/7)(z + i\sqrt{21}/3)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = -i\sqrt{21}/3;\quad z = -i\sqrt{21}/7;$

Точка $-i\sqrt{21}/3$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $-i\sqrt{21}/7$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-i\sqrt{21}/7}f(z) = \lim_{z\to-i\sqrt{21}/7}[f(z)(z + i\sqrt{21}/7)] =$$
$$= \lim_{z\to-i\sqrt{21}/7}\frac{2}{\sqrt{21}(z + i\sqrt{21}/3)} = \frac{2}{\sqrt{21}(-i\sqrt{21}/7 + i\sqrt{21}/3)} = -\frac{i}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{21}(z + i\sqrt{21}/7)(z + i\sqrt{21}/3)} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z) = 2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{2}\right) = \pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{21}\sin t + 5} = \pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt7+\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac12\left(z+\frac1z\right);\ \sin t=\frac1{2i}\left(z-\frac1z\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt7+\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(\sqrt7+\frac12(z+\frac1z))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i(z\sqrt7+\frac12(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[(z+\sqrt7+\sqrt6)(z+\sqrt7-\sqrt6)\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-\sqrt7+\sqrt6;\quad z=-\sqrt7-\sqrt6;$

Точка $z=-\sqrt7-\sqrt6$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=-\sqrt7+\sqrt6$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-\sqrt7+\sqrt6}f(z)=\lim_{z\to-\sqrt7+\sqrt6}\frac{d}{dz}[f(z)(z-\sqrt6+\sqrt7)^2]=$$

$$=\lim_{z\to-\sqrt7+\sqrt6}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[(z+\sqrt6+\sqrt7)\right]^2}=\frac4i\lim_{z\to-\sqrt7+\sqrt6}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z+\sqrt6+\sqrt7)^2}=$$

$$=\frac4i\lim_{z\to-\sqrt7+\sqrt6}\frac{\sqrt7+\sqrt6-z}{(\sqrt7+\sqrt6+z)^3}=\frac4i\cdot\frac{\sqrt7+\sqrt6+\sqrt7-\sqrt6}{(\sqrt7+\sqrt6-\sqrt7+\sqrt6)^3}=\frac4i\cdot\frac{2\sqrt7}{(2\sqrt6)^3}=\frac{\sqrt7}{6\sqrt6 i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[(z+\sqrt7+\sqrt6)(z+\sqrt7-\sqrt6)\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{\sqrt7}{6\sqrt6 i}\right)=\frac{\sqrt7}{3\sqrt6}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt7+\cos t)^2}=\frac{\sqrt7}{3\sqrt6}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+11)^2}dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+11)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2}{(z^2+11)^2}dz$$

Особые точки:

$z=i\sqrt{11}\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-i\sqrt{11}\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=i\sqrt{11}$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{11}}f(z)=\lim_{z\to i\sqrt{11}}\frac{d}{dz}[f(z)(z-i\sqrt{11})^2]=\lim_{z\to i\sqrt{11}}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+i\sqrt{11})^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to i\sqrt{11}}\frac{2\sqrt5 iz}{(z+i\sqrt5)^3}=\frac{1}{i4\sqrt{11}}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+11)^2}dx=2\pi i\frac{1}{i4\sqrt{11}}=\frac{\pi}{2\sqrt{11}}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+11)^2}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{11}}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\lambda x dx=\operatorname{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}} R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$x^4+13x^2+36=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm 2i; z_{3,4}=\pm 3i;$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{2i;3i\}$$

Эти особые точки являются простыми полюсами. Найдем в них вычеты:

$$1)\underset{z=2i}{\operatorname{rez}} R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 2i}\frac{(z^2+z)(z-2i)}{(z^2+4)(z^2+9)}e^{iz}=\lim_{z\to 2i}\frac{(z^2+z)e^{iz}}{(z+2i)(z^2+9)}=$$

$$=\frac{(-4+2i)e^{-2}}{(2i+2i)(-4+9)}=\frac{(-4+2i)e^{-2}}{20i}=\frac{(1+2i)e^{-2}}{10}$$

$$2)\underset{z=3i}{\operatorname{rez}} R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 3i}\frac{(z^2+z)(z-2i)}{(z^2+4)(z^2+9)}e^{iz}=\lim_{z\to 3i}\frac{(z^2+z)e^{iz}}{(z^2+4)(z+3i)}=$$

$$=\frac{(-9+2i)e^{-3}}{(-9+4)(3i+3i)}=-\frac{(2+9i)e^{-3}}{30}$$

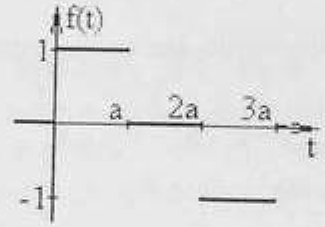
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx=\operatorname{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}} R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{3\pi e^{-3}}{5}-\frac{2\pi e^{-2}}{5}$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx=\frac{3\pi e^{-3}}{5}-\frac{2\pi e^{-2}}{5}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<a\\ 0, & a<t<2a\\ -1, & 2a<t<3a\\ 0, & 3a<t\end{cases}$$

$$f(t)=1\cdot\eta(t)-1\cdot\eta(t-a)-1\cdot\eta(t-2a)+1\cdot\eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-ap}-\frac{1}{p}e^{-2ap}+\frac{1}{p}e^{-3ap}$$

Ответ: $F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-ap}-\frac{1}{p}e^{-2ap}+\frac{1}{p}e^{-3ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2-4p+5}=$$

$$=\frac{Ap^2-4Ap+5A+Bp^2-Bp+Cp-C}{(p-1)(p^2-4p+5)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(-4A-B+C)p+(5A-C)}{(p-1)(p^2-4p+5)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\-4A-B+C=-1\\5A-C=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/2\\B=-1/2\\C=1/2\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2-4p+5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2-4p+5}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2-4p+5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2-4p+5}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{(p-2)^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-2)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-2)^2+1}\to$$

$$\to\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{2t}\cos t-\frac{1}{2}\cdot e^{2t}\sin t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{2t}\cos t-\frac{1}{2}\cdot e^{2t}\sin t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$y''-y=4\sin t+5\cos 2t$

$y(0)=-1,\quad y'(0)=-2.$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)-Y(p)=\frac{4}{p^2+1}+\frac{5p}{p^2+4}$$

$$p^2Y(p)+p+2-Y(p)=\frac{4}{p^2+1}+\frac{5p}{p^2+4}$$

$$(p^2-1)Y(p)=\frac{4}{p^2+1}+\frac{5p}{p^2+4}+p+1$$

$$Y(p)=\frac{4}{(p^2+1)(p^2-1)}+\frac{5p}{(p^2+4)(p^2-1)}+\frac{p}{p^2-1}+\frac{1}{p^2-1}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{4}{(p^2+1)(p^2-1)}+\frac{5p}{(p^2+4)(p^2-1)}+\frac{p}{p^2-1}+\frac{1}{p^2-1}=$$

$$=\frac{2}{p^2-1}-\frac{2}{p^2+1}+\frac{p}{p^2-1}-\frac{p}{p^2+4}+\frac{p}{p^2-1}+\frac{1}{p^2-1}=$$

$$=\frac{3}{p^2-1}-\frac{2}{p^2+1}+\frac{2p}{p^2-1}-\frac{p}{p^2+4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=3\operatorname{sh}t-2\sin t+2\operatorname{ch}t-\cos 2t$$

Ответ: $y(t)=3\operatorname{sh}t-2\sin t+2\operatorname{ch}t-\cos 2t$

Задача 25

На материальную точку массы m действует сила сопротивления R=kv, пропорциональная скорости v. Какое расстояние пройдет точка за неограниченное время, если ей сообщена начальная скорость v_0?

$k = 0{,}1m,\ v_0 = 1$ м/с.

Исходя из второго закона Ньютона:

$am = -kv$

$\ddot{x}m + k\dot{x} = 0$

Начальные условия:

$\dot{x}(0) = v_0 = 1$

$x(0) = 0$

Подставим значения k:

$\ddot{x}m + 0{,}1m\dot{x} = 0$

Сократим все выражение на m:

$\ddot{x} + 0{,}1\dot{x} = 0$

Перейдем к изображениям функций:

$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + 0{,}1pX(p) - 0{,}1x(0) = 0$

$p(p+0{,}1)X(p) - 1 = 0$

$p(p+0{,}1)X(p) = 1$

$$X(p) = \frac{1}{p(p+0{,}1)} = \frac{10}{p} - \frac{10}{p+0{,}1}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$x(t) = 10 - 10e^{-0{,}1t}$

Ответ: $x(t) = 10 - 10e^{-0{,}1t}$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

$x(0) = 1,\quad y(0) = 0.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = X(p) + 3Y(p) \\ pY(p) - y(0) = X(p) - Y(p) \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = X(p) + 3Y(p) \\ pY(p) = X(p) - Y(p) \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$pY(p) = X(p) - Y(p) \Rightarrow X(p) = pY(p) + Y(p)$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$p[pY(p) + Y(p)] - 1 = [pY(p) + Y(p)] + 3Y(p)$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 - 4}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 - 4} = \frac{1}{2}\frac{2}{p^2 - 4} \to y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}2t$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = x - y \Rightarrow x(t) = \dot{y} + y = \operatorname{ch}2t + \frac{1}{2}\operatorname{sh}2t$$

Ответ:

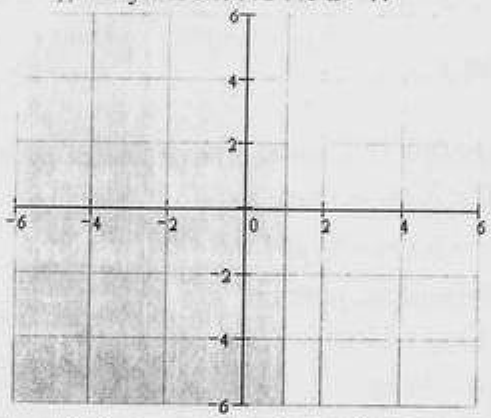
$$x(t) = \operatorname{ch}2t + \frac{1}{2}\operatorname{sh}2t$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}2t$$

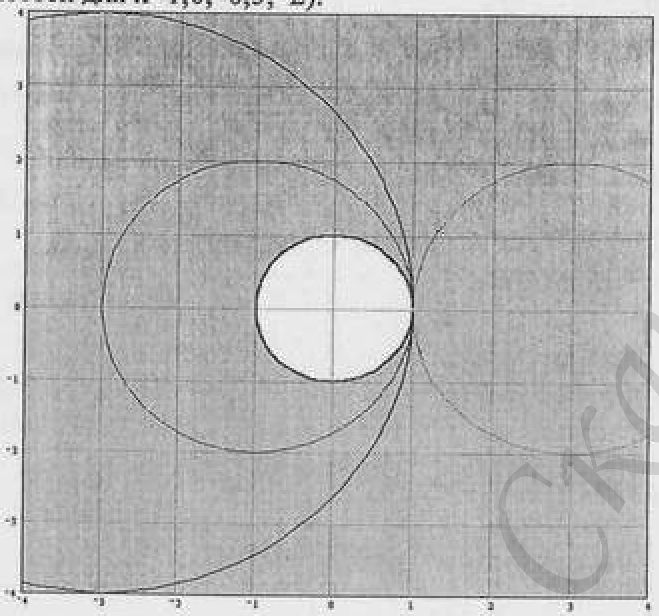
Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = (z-3+i)/(z+1+i)$; полуплоскость $\operatorname{Re} z < 1$.



Каждая из вертикальных прямых, входящих в эту полуплоскость преобразуется в окружность, лежащую в комплексной полуплоскости, причем при $x \to (-1)$ радиус окружности стремится к бесконечности. Таким образом, заданная полуплоскость отображается во всю комплексную плоскость, исключая область, охватываемую окружностью, в которую отражается прямая $x=1$ (на рисунке приведены примеры окружностей для $x=1;0;-0{,}5;-2$):



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\ldots, n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z = x + iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z - i}{z + i}$$

Аналитические функции

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z \in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$