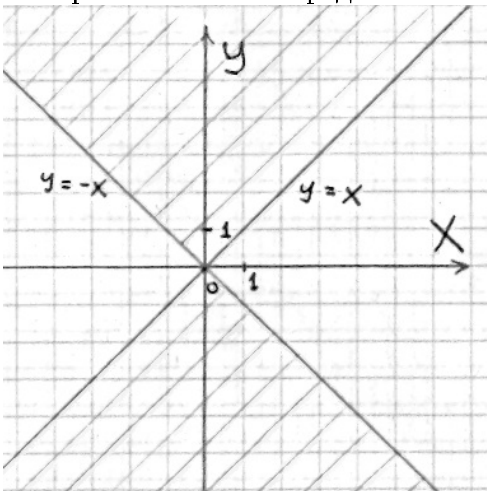
ИДЗ-10.1

1.3. Найти область определения указанной функции.
$z=\sqrt{y^2-x^2}$

Решение: Область определения:
$y^2-x^2\ge 0 \Rightarrow y^2\ge x^2 \Rightarrow |y|\ge|x|$
Изобразим область определения на чертеже:



2. Найти частные производные и частные дифференциалы данной функции.

2.3. $z=arctg(x^2+y^2)$
Найдем частные производные:

$$z'_x=\left(arctg(x^2+y^2)\right)'_x=\frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\cdot(x^2+y^2)'_x=\frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}$$

$$z'_y=\left(arctg(x^2+y^2)\right)'_y=\frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\cdot(x^2+y^2)'_y=\frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}$$

Частные дифференциалы:

$$dz'_x=\frac{2xdx}{1+(x^2+y^2)^2},\ dz'_y=\frac{2ydy}{1+(x^2+y^2)^2}$$

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

3.3. $f(x,y,z)=(\sin x)^{yz}$, $M_0\left(\frac{\pi}{6},1,2\right)$

Решение:

$$f'_x=\left((\sin x)^{yz}\right)'_x=yz(\sin x)^{yz-1}\cdot(\sin x)'_x=yz(\sin x)^{yz-1}\cdot\cos x$$

$$f'_x(M_0)=f'_x\left(\frac{\pi}{6},1,2\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}87$$

$$f'_y=\left((\sin x)^{yz}\right)'_y=(\sin x)^{yz}\cdot\ln(\sin x)\cdot(yz)'_y=z\cdot(\sin x)^{yz}\cdot\ln(\sin x)$$

$$f'_y(M_0) = f'_y\left(\frac{\pi}{6}, 1, 2\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \ln\frac{1}{2} = -\frac{\ln 2}{2} \approx -0,35$$

$$f'_z = \left((\sin x)^{yz}\right)'_z = (\sin x)^{yz}\cdot\ln(\sin x)\cdot(yz)'_z = y\cdot(\sin x)^{yz}\cdot\ln(\sin x)$$

$$f'_z(M_0) = f'_z\left(\frac{\pi}{6}, 1, 2\right) = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \ln\frac{1}{2} = -\frac{\ln 2}{4} \approx -0,17$$

4. Найти полные дифференциалы указанных функций.

4.3. $z = arctgx + \sqrt{y}$

Вычислим частные производные первого порядка:

$$z'_x = \left(arctgx + \sqrt{y}\right)'_x = \frac{1}{1+x^2} + 0 = \frac{1}{1+x^2}$$

$$z'_y = \left(arctgx + \sqrt{y}\right)'_y = 0 + \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Полный дифференциал:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

5.3. $u = y^x$, $x = \ln(t-1)$, $y = e^{\frac{t}{2}}$, $t_0 = 2$.

Найдем производную сложной функции: $u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t$.

В данном случае:

$$u'_x = \left(y^x\right)'_x = y^x \ln y$$

$$u'_y = \left(y^x\right)'_y = xy^{x-1}$$

$$x'_t = \frac{1}{t-1},\quad y'_t = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}$$

Таким образом:

$$u'_t = y^x \ln y \cdot \frac{1}{t-1} + xy^{x-1}\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} = \left(e^{\frac{t}{2}}\right)^{\ln(t-1)} \cdot \frac{t}{2}\cdot\frac{1}{(t-1)} + \ln(t-1)\cdot\left(e^{\frac{t}{2}}\right)^{\ln(t-1)-1} \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}$$

$$u'_t(2) = e^0 \cdot 1\cdot 1 + 0\cdot e^{-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot e = 1 + 0 = 1$$

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

6.3. $3x - 2y + z = xz + 5$, $M_0(2, 1, -1)$

$$\left(3x - 2y + z\right)'_x = (xz+5)'_x$$

$$3 - 0 + z'_x = z + xz'_x + 0$$

$$(1-x)z'_x = z-3$$

$$z'_x = \frac{z-3}{1-x}$$

$$z'_x(M_0) = z'_x(2,1,-1) = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$(3x-2y+z)'_y = (xz+5)'_y$$

$$0-2+z'_y = xz'_y + 0$$

$$(1-x)z'_y = 2$$

$$z'_y = \frac{2}{1-x}$$

$$z'_y(M_0) = z'_y(2,1,-1) = \frac{2}{-1} = -2$$

ИДЗ 10-2.

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

3.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u = \ln(x^2 + (y+1)^2)$

Найдем частные производные функции u.

$$u'_x = (\ln(x^2+(y+1)^2))'_x = \frac{1}{x^2+(y+1)^2}\cdot(x^2+(y+1)^2)'_x = \frac{2x}{x^2+(y+1)^2}$$

$$u''_{xx} = \left(\frac{2x}{x^2+(y+1)^2}\right)'_x = 2\cdot\frac{(x)'_x\cdot(x^2+(y+1)^2) - x\cdot(x^2+(y+1)^2)'_x}{(x^2+(y+1)^2)^2} =$$

$$= 2\cdot\frac{x^2+(y+1)^2 - x\cdot 2x}{(x^2+(y+1)^2)^2} = \frac{2(y+1)^2-2x^2}{(x^2+(y+1)^2)^2}$$

$$u'_y = (\ln(x^2+(y+1)^2))'_y = \frac{1}{x^2+(y+1)^2}\cdot(x^2+(y+1)^2)'_y = \frac{2(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$$

$$u''_{yy} = \left(\frac{2(y+1)}{x^2+(y+1)^2}\right)'_y = 2\cdot\frac{(y+1)'_y\cdot(x^2+(y+1)^2)-(y+1)\cdot(x^2+(y+1)^2)'_y}{(x^2+(y+1)^2)^2} =$$

,

$$= 2\cdot\frac{x^2+(y+1)^2-(y+1)\cdot 2(y+1)}{(x^2+(y+1)^2)^2} = \frac{2x^2-2(y+1)^2}{(x^2+(y+1)^2)^2}$$

Подставим $u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}$ в левую часть уравнения:

$\frac{2(y+1)^2-2x^2}{(x^2+(y+1)^2)^2} + \frac{2x^2-2(y+1)^2}{(x^2+(y+1)^2)^2} = \frac{2(y+1)^2-2x^2+2x^2-2(y+1)^2}{(x^2+(y+1)^2)^2} = 0$ – таким образом, данная функция удовлетворяет данному уравнению.

4. Исследовать на экстремум функцию.

4.3. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$

Решение: Найдем критические точки:

$\begin{cases} z'_x = 15 - 4x - y = 0 \\ z'_y = -x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -4y$ – подставим в первое уравнение:

$15 + 16y - y = 0 \Rightarrow y = -1; x = 4$

$M_1(4;-1)$ – стационарная точка.

Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$z''_{xx} = -4 = const$, $z''_{xy} = -1 = const$, $z''_{yy} = -4 = const$

$z''_{xx}(M_1) \cdot z''_{yy}(M_1) - \left(z''_{xy}(M_1)\right)^2 = -4 \cdot (-4) - (-1)^2 = 16 - 1 = 15 > 0$, значит, в точке $M_1(4;-1)$ существует экстремум, так как $z''_{xx}(M_2) < 0$, то это – максимум:

$\max z = z(M_1) = z(4;-1) = 1 + 60 - 32 + 4 - 2 = 31$

Ответ: $\max z(4;-1) = 31$.