ИНФОРМАЦИОННО-КОНСУЛЬТАЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

ТФКП

теория функций комплексного переменного

Консультационное пособие для школьников и студентов в решении задач с примерами решённых задач из задачника автора Чудесенко В.Ф.

Вариант 3

$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz$$

Москва 2003

/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[3]{1}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$\varphi = \arg(z); \quad k = 0,1,\ldots,n-1; \quad z \neq 0$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[3]{1}$:

$\sqrt[3]{1} = 1$

$$\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\sqrt[3]{1} = \left\{1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\mathrm{Ln}(6)$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Подставим в эту формулу значения z:

$$\mathrm{Ln}\, 6 = \ln|6| + i\,\mathrm{Arg}\, 6 = \ln|6| + i(\arg 6 + 2\pi k),\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Вычислим значения логарифма и аргумента:

$$\mathrm{Ln}\, 6 \approx 1{,}792 + i(2\pi k),\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Ответ: $\mathrm{Ln}\, 6 \approx 1{,}792 + i(2\pi k),\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$\mathrm{Arch}(-2)$

Функция Arch является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arch}\,z = i\cdot \mathrm{Arccos}(z) = i\cdot\left[-i\cdot \mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)\right] =$$
$$= \mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

Подставим вместо z значение (–1):

$$\mathrm{Arch}(-2) = \mathrm{Ln}\left(-2+\sqrt{(-2)^2-1}\right) = \mathrm{Ln}\left(-2+\sqrt{3}\right)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),$$
$$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$\mathrm{Ln}\left(-2+\sqrt{3}\right) = \ln\left|-2+\sqrt{3}\right| + i\left[\arg\left(-2+\sqrt{3}\right)+2\pi k\right] =$$

$$= \ln(2-\sqrt{3}) + i\left[\arg\left(-2+\sqrt{3}\right)+2\pi k\right] \approx -1{,}317 + i[\pi+2\pi k]$$

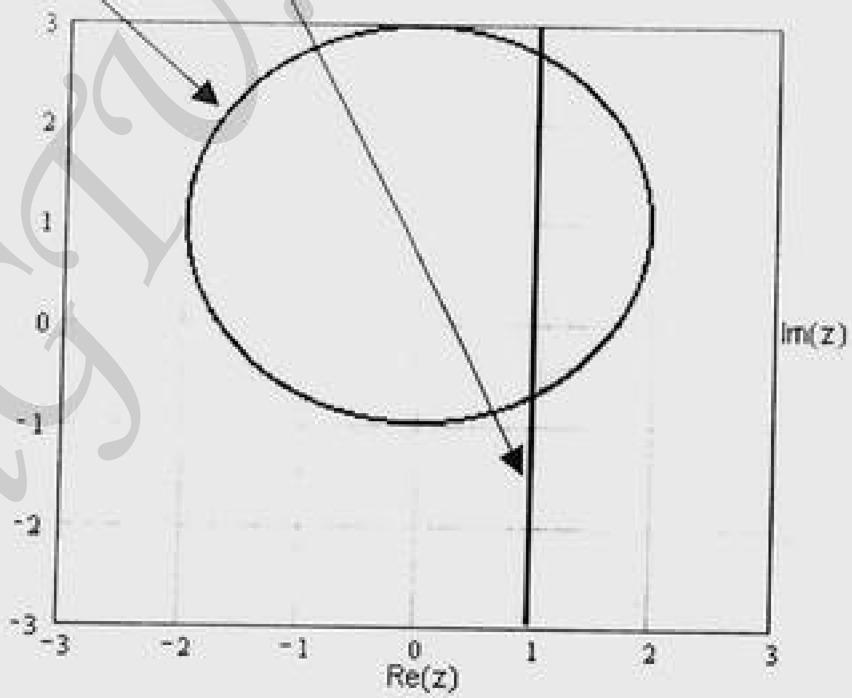
$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Ответ: $\mathrm{Arch}(-2) \approx -1{,}317 + i[\pi+2\pi k],\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z-i| \le 2,\quad \mathrm{Re}\,z > 1$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z = -\sec t + i3\,\mathrm{tg}\,t$

Уравнение вида $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид $x = x(t)$, $y = y(t)$. В нашем случае:

$x(t) = -\sec t;\quad y(t) = 3\,\mathrm{tg}\,t$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = -\sec t = -\frac{1}{\cos t} \Rightarrow \cos t = -\frac{1}{x} \Rightarrow t = \arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$y = 3\,\mathrm{tg}\,t \Rightarrow \mathrm{tg}\,t = \frac{y}{3} \Rightarrow t = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{3}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y)=0:

$$\arccos\left(-\frac{1}{x}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{3}\right) \Rightarrow \arccos\left(-\frac{1}{x}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{3}\right) = 0$$

Ответ: $\arccos\left(-\frac{1}{x}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{3}\right) = 0$

Задача 6

Проверить, что v является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной мнимой части v(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$v = e^x (y\cos y + x\sin y)$$

$$f(0) = 0$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + ie^x(y\cos y +$$

$$+ x\sin y + \sin y) = e^x[\cos y + i\sin y + x(\cos y + i\sin y) +$$

$$+ y(i\cos y - \sin y)] = e^x(e^{iy} + xe^{iy} + iye^{iy}) = e^{x+iy}(1 + x + iy) =$$

$$= e^z(1+z)$$

Т.к. производная существует, то v является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int e^z(1+z)dz = ze^z + C$$

Определим константу C:

$$f(0) = 0\cdot e^0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = ze^z$$

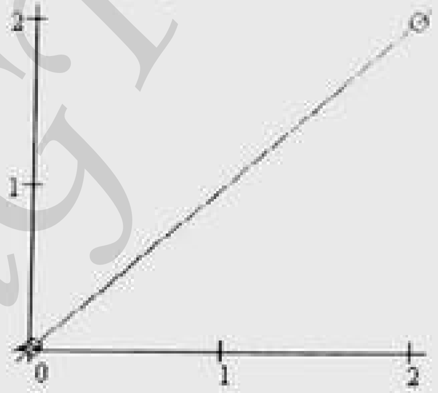
Ответ: $f(z) = ze^z$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz;\ AB - \text{отрезок прямой}: z_A = 0, z_B = 2 + 2i$$

Покажем прямую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = \operatorname{Im}(x+iy)^3 = \operatorname{Im}(x^3 + 3ix^2y -$$

$$- 3xy^2 - iy^3) = \underbrace{3x^2y - y^3}_{u(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy; \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2; \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \ne \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} \ne -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана не выполняются, следовательно, функция не является аналитической. Тогда представим кривую, по которой идет интегрирование, в параметрическом виде:

$$z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = t; z_A = z(0); z_B = z(2)$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_0^2 f[z(t)]z'(t)dt = \int_0^2 \operatorname{Im}(t+it)^3(1+i)dt =$$

$$= (1+i)\int_0^2 \operatorname{Im}(2it^3 - 2t^3)dt = (1+i)\int_0^2 2t^3dt = (1+i)\left.\frac{t^4}{2}\right|_0^2 = 8(1+i)$$

Ответ: $\int_{AB} f(z)dz = 8(1+i)$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}=\frac{3z-18}{z(z+3)(2z-3)}=\frac{3}{2z}\cdot\frac{z-6}{(z+3)(z-1{,}5)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

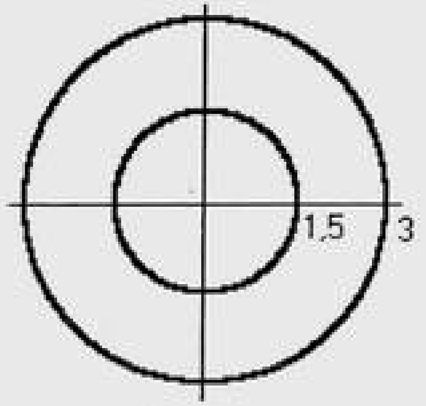
$$\frac{z-6}{(z+3)(z-1{,}5)}=\frac{A}{z+3}+\frac{B}{z-1{,}5}=\frac{Az-1{,}5A+Bz+3B}{(z-1{,}5)(z+3)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=2;B=-1\}\Rightarrow\frac{z-6}{(z+3)(z-1{,}5)}=\frac{2}{z+3}-\frac{1}{z-1{,}5}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{3}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+3}-\frac{1}{z-1{,}5}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=1{,}5; z=-3$



Рассмотрим область $|z|<1{,}5$:

$$f(z)=\frac{3}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+3}-\frac{1}{z-1{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{3}}+\frac{1}{1-\frac{2z}{3}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}-\frac{z^3}{27}+\ldots\right)+\left(1+\frac{2z}{3}+\frac{4z^2}{9}+\frac{8z^3}{27}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3}+\frac{z}{9}-\frac{z^2}{27}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{3}+\frac{4z}{9}+\frac{8z^2}{27}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $1{,}5<|z|<3$:

$$f(z)=\frac{3}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+3}-\frac{1}{z-1{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{3}}-\frac{3}{2z(1-\frac{3}{2z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}-\frac{z^3}{27}+\ldots\right)-\left(\frac{3}{2z}+\frac{9}{4z^2}+\frac{27}{8z^3}+\frac{81}{16z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3}+\frac{z}{9}-\frac{z^2}{27}+\ldots\right)-\left(\frac{3}{2z^2}+\frac{9}{4z^3}+\frac{27}{8z^4}+\frac{81}{16z^5}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>3$:

$$f(z)=\frac{3}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+3}-\frac{1}{z-1{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{3}{z(1+\frac{3}{z})}-\frac{3}{2z(1-\frac{3}{2z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{3}{z}-\frac{9}{z^2}+\frac{27}{z^3}-\frac{81}{z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{3}{2z}+\frac{9}{4z^2}+\frac{27}{8z^3}+\frac{81}{16z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{3}{z^2}-\frac{9}{z^3}+\frac{27}{z^4}-\frac{81}{z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{3}{2z^2}+\frac{9}{4z^3}+\frac{27}{8z^4}+\frac{81}{16z^5}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<1{,}5: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3}+\frac{z}{9}-\frac{z^2}{27}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{3}+\frac{4z}{9}+\frac{8z^2}{27}+\ldots\right)$$

$$1{,}5<|z|<3: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3}+\frac{z}{9}-\frac{z^2}{27}+\ldots\right)-\left(\frac{3}{2z^2}+\frac{9}{4z^3}+\frac{27}{8z^4}+\frac{81}{16z^5}+\ldots\right)$$

$$|z|>3: f(z)=\left(\frac{3}{z^2}-\frac{9}{z^3}+\frac{27}{z^4}-\frac{81}{z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{3}{2z^2}+\frac{9}{4z^3}+\frac{27}{8z^4}+\frac{81}{16z^5}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$.

$$f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)},\ z_0=-3-2i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)}=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{2}{z-1}=2\cdot\frac{1}{z-1}=2\cdot\frac{1}{(z-z_0)-4-2i}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-4-2i)^{n+1}}=$$

$$=-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(4+2i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-z_0)-3-2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-3-2i)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3+2i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z}=-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(4+2i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3+2i)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(3+2i)^{n+1}}-\frac{2}{(4+2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(3+2i)^{n+1}}-\frac{2}{(4+2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=ze^{z/(z-5)},\ z_0=5$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-5;\ ze^{z/(z-5)}=(z'+5)e^{(z'+5)/z'}=e(z'+5)e^{5/z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=e(z'+5)e^{5/z'}=ez'\left(1+\frac{5}{z'}+\frac{25}{2!z'^2}+\frac{125}{3!z'^3}+\ldots\right)+$$

$$+5e\left(1+\frac{5}{z'}+\frac{25}{2!z'^2}+\frac{125}{3!z'^3}+\ldots\right)=\left(ez'+5e+\frac{25e}{2!z'}+\frac{125e}{3!z'^2}+\ldots\right)+$$

$$+\left(5e+\frac{25e}{z'}+\frac{125e}{2!z'^2}+\frac{625e}{3!z'^3}+\ldots\right)=ez'+10e+\frac{25e}{z'}\left(\frac{1+2!}{2!}\right)+$$

$$+\frac{125e}{z'^2}\left(\frac{2!+3!}{2!3!}\right)+\frac{625e}{z'^3}\left(\frac{3!+4!}{3!4!}\right)+\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=5$:

$$f(z)=ez+5e+\frac{25e}{z-5}\left(\frac{1+2!}{2!}\right)+\frac{125e}{(z-5)^2}\left(\frac{2!+3!}{2!3!}\right)+$$

$$+\frac{625e}{(z-5)^3}\left(\frac{3!+4!}{3!4!}\right)+\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=ez+5e+\frac{25e}{z-5}\left(\frac{1+2!}{2!}\right)+\frac{125e}{(z-5)^2}\left(\frac{2!+3!}{2!3!}\right)+$$

$$+\frac{625e}{(z-5)^3}\left(\frac{3!+4!}{3!4!}\right)+\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции:

$$f(z) = \frac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + z^2/2}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z) = \frac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + z^2/2} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad \begin{array}{l} g(z) = \sin 8z - 6z; \\ h(z) = \cos z - 1 + z^2/2; \end{array}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = 0$:

$$g'(z) = 8\cos 8z - 6; g'(0) = 8\cos 0 - 6 = 2$$

$$h'(z) = -\sin z + z; h'(0) = -\sin 0 + 0 = 0$$

$$h''(z) = -\cos z + 1; h''(0) = -\cos 0 + 1 = 0;$$

$$h'''(z) = \sin z; h'''(0) = \sin 0 = 0;$$

$$h^{IV}(z) = -\cos z; h^{IV}(0) = -\cos 0 = -1;$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = 0$ выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка $z = 0$ является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при $z = 0$ для функций g(z) и h(z). В данном случае, это $4 - 1 = 3$.

Ответ: Точка $z = 0$ является полюсом 3-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = \operatorname{tg}^2 z$$

Эта функция не является аналитической при $\cos z = 0$. Найдем z, соответствующие этому случаю:

$$\cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in z$$

Запишем данную функцию в виде отношения функций g(z) и h(z):

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}; \quad \begin{array}{l} g(z) = \sin^2 z; \\ h(z) = \cos^2 z; \end{array}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = \pi/2 + \pi k$:

$$g(\frac{\pi}{2} + \pi k) = 1$$

$$h(\frac{\pi}{2} + \pi k) = \cos^2(\frac{\pi}{2} + \pi k) = 0$$

$$h'(z) = -2\cos z \sin z = -\sin 2z; h'(\frac{\pi}{2} + \pi k) = -\sin(\pi + 2\pi k) = 0$$

$$h''(z) = -2\cos 2z = -2\cos(\pi + 2\pi k) = 2$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = \pi/2 + \pi k$ выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки $z = \pi/2 + \pi k$ являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при $z = \pi/2 + \pi k$ для функций g(z) и h(z). В данном случае, это $2 - 0 = 2$.

Ответ: Точки $z = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in z$ для данной функции являются полюсами 2-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-i|=3/2} \underbrace{\frac{dz}{z(z^2+4)}}_{f(z)}$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = 0$

$z = \pm 2i$

Точка $z = -2i$ не входит в область, ограниченную данным контуром, поэтому не рассматривается.

Точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 2i$ являются простыми полюсами. Найдем вычеты в этих точках:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)(z-0)] = \lim_{z\to 0}\frac{z}{z(z^2+4)} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(z^2+4)} = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to 2i}[f(z)(z-2i)] = \lim_{z\to 2i}\frac{z-2i}{z(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i}\frac{1}{z(z+2i)} =$$

$$= \frac{1}{2i\cdot 4i} = -\frac{1}{8}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z(z^2+4)} = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) = \frac{2\pi i}{8} = \frac{\pi i}{4}$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z(z^2+4)} = \frac{\pi i}{4}$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=3} \underbrace{\frac{e^{1/z}+1}{z}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$\frac{e^{1/z}+1}{z} = \frac{1+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots}{z} = \frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^3}+\frac{1}{3!z^4}+\ldots$$

Главная часть получившегося ряда содержит бесконечное число членов, из чего следует, что это – существенная особая точка. Тогда вычет в этой точке находится, как коэффициент при минус первой степени в лорановском разложении f(z) в окрестностях точки $z = 0$:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = C_{-1} = 2$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{1/z}+1}{z}dz = 2\pi i\cdot 2 = 4\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{1/z}+1}{z}dz = 4\pi i$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=0,5}\underbrace{\frac{\operatorname{sh}2\pi z-2\pi z}{z^2\sin^2(\pi^2 z/3)}}_{f(z)}dz$$

Особые точки этой функции $z = 3ik/\pi$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z)=\frac{\operatorname{sh}2\pi z-2\pi z}{z^2\sin^2(\pi^2 z/3)}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{matrix} g(z)=\operatorname{sh}2\pi z-2\pi z \\ h(z)=z^2\sin^2(\pi^2 z/3)\end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0}f(z)=\lim_{z\to0}[f(z)z]=\lim_{z\to0}\left(\frac{\operatorname{sh}2\pi z-2\pi z}{z\sin^2(\pi^2 z/3)}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to0}\left(\frac{2\pi\operatorname{ch}2\pi z-2\pi}{1-\cos^2(\pi^2z/3)+\frac{2}{3}\pi^2 z\sin(\pi^2z/3)\cos(\pi^2z/3)}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to0}\left(\frac{4\pi^2\operatorname{sh}2\pi z}{\frac{4}{3}\pi^2\sin(\pi^2z/3)\cos(\pi^2z/3)+\frac{4}{9}\pi^4z\cos^2(\pi^2z/3)-\frac{2}{9}\pi^4z}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to0}\left(\frac{8\pi^3\operatorname{ch}2\pi z}{\frac{4}{3}\pi^4\cos^2(\pi^2z/3)-\frac{2}{3}\pi^4-\frac{8}{27}\pi^6z\sin(\pi^2z/3)\cos(\pi^2z/3)}\right)=\frac{8\pi^3}{2\pi^4/3}=\frac{12}{\pi}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=0,5}\frac{\operatorname{sh}2\pi z-2\pi z}{z^2\sin^2(\pi^2z/3)}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\frac{12}{\pi}=24i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=0,5}\frac{\operatorname{sh}2\pi z-2\pi z}{z^2\sin^2(\pi^2z/3)}dz=24i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}-\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)}\right)dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-i|=3}\underbrace{\frac{-2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)}}_{f_1(z)}dz+\oint\limits_{|z-i|=2}\underbrace{\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}}_{f_2(z)}dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z-i|=3}\frac{-2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: $z=2+i$ и $z=4+i$. При этом точка $z=4+i$ не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка $z=2+i$ является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=2+i}f_1(z)=\lim_{z\to2+i}\frac{d}{dz}\left[\frac{-2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}(z-2-i)^2}{(z-2-i)^2(z-4-i)}\right]=\lim_{z\to2+i}\frac{d}{dz}\left[\frac{-2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-4-i)}\right]=$$

$$=-\lim_{z\to2+i}\left[\frac{(1+2i)\pi}{5(z-4-i)}\operatorname{ch}\frac{(1+2i)\pi z}{10}-\frac{2}{(z-4-i)^2}\operatorname{sh}\frac{(1+2i)\pi z}{10}\right]=\frac{i}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-i|=3}\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=2+i}f_1(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{i}{2}\right)=-\pi$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\pi z/2}-i=0 \Rightarrow e^{\pi z/2}=i \Rightarrow \pi z/2=\ln(i)=\pi i/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=4ik+i, k\in z$$

Из этих точек только одна охвачена контуром |z–i|=2 и должна приниматься во внимание. Это точка z=i, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=i} f_2(z)=\lim_{z\to i}\frac{\pi(z-i)}{e^{\pi z/2}-i}=\left\{\begin{matrix}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2}}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{\pi i/2}}=\frac{2}{e^{\pi i/2}}=\frac{2}{i}=-2i$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-i|=2}\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=i} f_2(z)=2\pi i\cdot(-2i)=4\pi$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}+\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)}\right)dz=\oint\limits_{|z-i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz+$$

$$+\oint\limits_{|z-i|=3}\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)}dz=4\pi-\pi=3\pi$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}+\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)}\right)dz=3\pi$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5+2\sqrt{6}\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5+2\sqrt{6}\sin t}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{5+\frac{\sqrt{24}}{2i}(z-\frac{1}{z})}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{5iz+\frac{\sqrt{24}}{2}(z^2-1)}=$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{10iz+\sqrt{24}(z^2-1)}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{24}(z+i\sqrt{6}/3)(z+i\sqrt{6}/2)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-i\sqrt{6}/3;\quad z=-i\sqrt{6}/2;$

Точка $-i\sqrt{6}/2$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $-i\sqrt{6}/3$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-i\sqrt{6}/3} f(z)=\lim_{z\to -i\sqrt{6}/3}[f(z)(z+i\sqrt{6}/3)]=$$

$$=\lim_{z\to -i\sqrt{6}/3}\frac{2}{(z+i\sqrt{6}/2)\sqrt{24}}=\frac{1}{(-i\sqrt{6}/3+i\sqrt{6}/2)\sqrt{6}}=-i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{24}(z+i\sqrt{6}/3)(z+i\sqrt{6}/2)}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)=2\pi i\cdot(-i)=2\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5+2\sqrt{6}\sin t}=2\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+\sqrt{6/7}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+\sqrt{6/7}\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(1+\frac{\sqrt{6/7}}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i(z+\frac{\sqrt{6/7}}{2}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{6/7}(z+\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}})(z+\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{6}})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$$z=-\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}};\quad z=-\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{6}};$$

Точка $z=-(\sqrt{7}+1)/\sqrt{6}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=-(\sqrt{7}-1)/\sqrt{6}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-(\sqrt{7}-1)/\sqrt{6}}f(z)=\lim_{z\to-(\sqrt{7}-1)/\sqrt{6}}\frac{d}{dz}[f(z)(z+(\sqrt{7}-1)/\sqrt{6})^2]=$$

$$=\lim_{z\to-(\sqrt{7}-1)/\sqrt{6}}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[\sqrt{6/7}(z+\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{6}})\right]^2}=\frac{28}{i}\lim_{z\to-(\sqrt{7}-1)/\sqrt{6}}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z\sqrt{6}+\sqrt{7}+1)^2}=$$

$$=\frac{28}{i}\lim_{z\to-(\sqrt{7}-1)/\sqrt{6}}\frac{\sqrt{7}+1-z\sqrt{6}}{(\sqrt{7}+1+z\sqrt{6})^3}=\frac{28}{i}\cdot\frac{\sqrt{7}+1+\sqrt{7}-1}{(\sqrt{7}+1+1-\sqrt{7})^3}=\frac{28}{i}\frac{2\sqrt{7}}{2^3}=\frac{7\sqrt{7}}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{6/7}(z+\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}})(z+\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{6}})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{7\sqrt{7}}{i}\right)=7\sqrt{7}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+\sqrt{6/7}\cos t)^2}=7\sqrt{7}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^4+1)^2}$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоск . $\operatorname{Im} z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^4+1)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^4+1)^2}=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})^2(z-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}})^2(z+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})^2(z+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}})^2}$$

Особые точки:

$z=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$ $(\operatorname{Im} z>0)$; $z=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$ $(\operatorname{Im} z<0)$

$z=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$ $(\operatorname{Im} z>0)$; $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$ $(\operatorname{Im} z<0)$

Точки $z=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$ и $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$ являются полюсами 2-го порядка и вычеты в них вычисляются следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}}f(z)=\lim_{z\to\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}}\frac{d}{dz}[f(z)(z-\tfrac{1}{\sqrt{2}}-\tfrac{i}{\sqrt{2}})^2]=\lim_{z\to\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z^2+i)^2(z+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}})^2}=$$

$$=\lim_{z\to\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}}\frac{-16(3z^2+z\sqrt{2}+iz\sqrt{2}+i)}{(z^2+i)^3(2z+\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3}=-\frac{3(1+i)}{16\sqrt{2}}$$

$$\operatorname*{res}_{z=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}}f(z)=\lim_{z\to-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}}\frac{d}{dz}[f(z)(z+\tfrac{1}{\sqrt{2}}-\tfrac{i}{\sqrt{2}})^2]=\lim_{z\to-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}}\frac{d}{dz}\frac{dz}{(z^2-i)^2(z-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}})^2}=$$

$$=\lim_{z\to-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}}\frac{-16(3z^2-z\sqrt{2}+iz\sqrt{2}-i)}{(z^2-i)^3(2z-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3}=\frac{3(1-i)}{16\sqrt{2}}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^4+1)^2}=2\pi i\left[\frac{3(1-i)}{16\sqrt{2}}-\frac{3(1+i)}{16\sqrt{2}}\right]=2\pi i\frac{-6i}{16\sqrt{2}}=\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^4+1)^2}=\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\lambda x dx = \mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_{m}\underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\}, \lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$(x^2+1)^2=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm i$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z>0$.

Из этого следует:

$z_m=\{i\}$

Эта особая точка является полюсом второго порядка. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=i}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2}e^{2iz}\right]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}e^{2iz}\right]=$$

$$=\frac{-4+2iz}{(z+i)^3}e^{2iz}=-\frac{3}{4}ie^{-2}$$

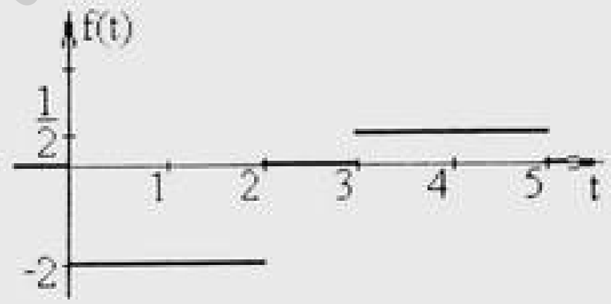
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_{m}\underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{3}{2}\pi e^{-2}$$

Ответ: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{3}{2}\pi e^{-2}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)\begin{cases}-2, & 0<t<2\\ 0, & 2<t<3\\ \frac{1}{2}, & 3<t<5\\ 0, & 5<t\end{cases}$$

$$f(t)=-2\cdot\eta(t)+2\eta(t-2)+\frac{1}{2}\eta(t-3)-\frac{1}{2}\eta(t-5)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=-\frac{2}{p}+\frac{2}{p}e^{-2p}+\frac{1}{2}e^{-3p}-\frac{1}{2}e^{-5p}$$

Ответ: $F(p)=-\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{p}e^{-2p}+\dfrac{1}{2}e^{-3p}-\dfrac{1}{2}e^{-5p}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{2p}{(p^2+4p+8)^2}$$

Перейдем к новой переменной (p+2):

$$\frac{2p}{(p^2+4p+8)^2}=\frac{2p}{((p+2)^2+4)^2}=\frac{2(p+2)-4}{((p+2)^2+4)^2}$$

Представим эту функцию, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{2(p+2)-4}{((p+2)^2+4)^2}=\frac{2(p+2)}{((p+2)^2+2^2)^2}-\frac{4}{((p+2)^2+2^2)^2}$$

Найдем оригинал функции, используя формулу смещения:

$$\frac{2(p+2)}{((p+2)^2+2^2)^2}-\frac{4}{((p+2)^2+2^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2^2(p+2)}{((p+2)^2+2^2)^2}-4\frac{1}{((p+2)^2+2^2)^2}\to$$

$$\to\frac{1}{4}e^{-2t}\cdot 2t\sin 2t-4e^{-2t}\cdot\left[\frac{1}{16}\sin 2t-\frac{t}{8}\cos 2t\right]=$$

$$=\frac{te^{-2t}}{2}\cdot\sin 2t-\frac{e^{-2t}}{4}\sin 2t+\frac{te^{-2t}}{2}\cos 2t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$\frac{te^{-2t}}{2}\cdot\sin 2t-\frac{e^{-2t}}{4}\sin 2t+\frac{te^{-2t}}{2}\cos 2t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$y''+y'=t^2+2t$

$y(0)=0,\quad y'(0)=-2.$

Из теории нам известно, что если $x(t)$ соответствует изображение $X(p)$, то $x'(t)$ соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а $x''(t)$ соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+pY(p)-y(0)=\frac{2}{p^3}+\frac{2}{p^2}$$

$$p^2Y(p)+2+pY(p)=\frac{2}{p^3}+\frac{2}{p^2}$$

$$p(p+1)Y(p)=\frac{2}{p^3}+\frac{2}{p^2}-2=\frac{2+2p-2p^3}{p^3}$$

$$Y(p)=\frac{2+2p-2p^3}{p^4(p+1)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{2+2p-2p^3}{p^4(p+1)}=\frac{Ap^3+Bp^2+Cp+D}{p^4}+\frac{E}{p+1}=$$

$$=\frac{Ap^4+Bp^3+Cp^2+Dp+Ap^3+Bp^2+Cp+D+Ep^4}{p^4(p+1)}$$

$$\begin{cases}A+E=0\\B+A=-2\\C+B=0\\D+C=2\\D=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=0\\C=0\\D=2\\E=2\end{cases}\Rightarrow Y(p)=\frac{-2p^3+2}{p^4}+\frac{2}{p+1}$$

$$Y(p)=-2\frac{1}{p}+2\frac{1}{p^4}+2\frac{1}{p+1}\Rightarrow y(t)=-2+\frac{1}{3}t^3+2e^{-t}$$

Ответ: $y(t)=-2+\frac{1}{3}t^3+2e^{-t}$

Задача 25

Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы $F=-kx$, пропорциональной смещению x и направленной в противоположную сторону, и силы сопротивления $R=rv$. В момент $t=0$ частица находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Найти закон движения $x=x(t)$ частицы.

$k = 5m,\ r = 2m,\ x_0 = 1м,\ v_0 = 0.$

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kx - rv$$

$$\ddot{x}m + r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m + 2m\dot{x} + 5mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + 2pX(p) - 2x(0) + 5X(p) = 0$$

$$(p^2 + 2p + 5)X(p) - p - 2 = 0$$

$$X(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+5} = \frac{p+2}{(p+1)^2+4} = \frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(p+1)^2+4}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$$

Ответ: $x(t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = 2x - y + 9 \end{cases}$$

$x(0) = 1,\quad y(0) = 0.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = X(p) + 4Y(p) \\ pY(p) - y(0) = 2X(p) - Y(p) + 9/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = X(p) + 4Y(p) \\ pY(p) = 2X(p) - Y(p) + 9/p \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) = 2X(p) - Y(p) + 9/p$$

$$X(p) = \frac{pY(p) + Y(p) - 9/p}{2}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p\frac{pY(p) + Y(p) - 9/p}{2} - 1 = \frac{pY(p) + Y(p) - 9/p}{2} + 4Y(p)$$

$$(p^2 - 9)Y(p) = 11 - 9/p \Rightarrow Y(p) = \frac{11 - 9/p}{p^2 - 9}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{11 - 9/p}{p^2 - 9} = 11\frac{p}{p^2 - 9} - 9\frac{1}{p}\frac{1}{p^2 - 9} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = 11ch3t + (1 - \cos 3it) = 11ch3t + 1 - ch3t = 10ch3t + 1$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = 2x - y + 9 \Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{2}(\dot{y} + y - 9) = \tfrac{1}{2}(30ch3t + 10ch3t + 1 - 9) =$$

$$= 20ch3t - 4$$

Ответ:

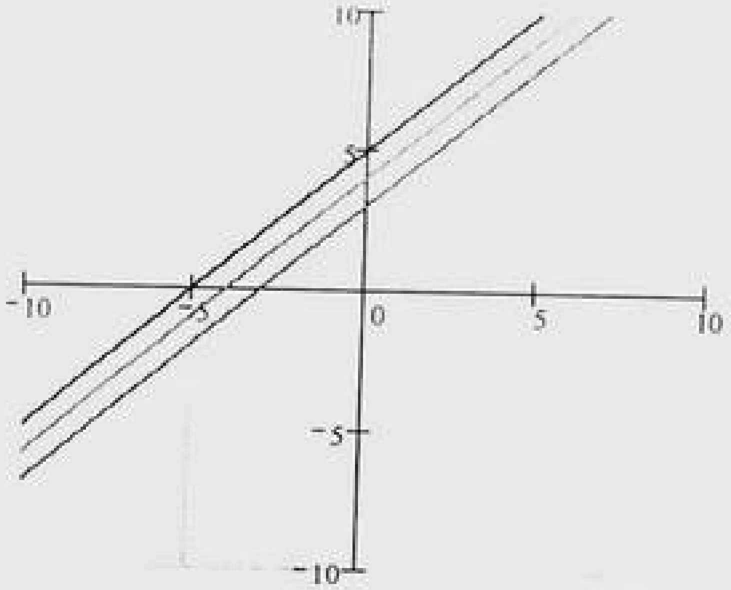
$$x(t) = 20ch3t - 4$$

$$y(t) = 10ch3t + 1$$

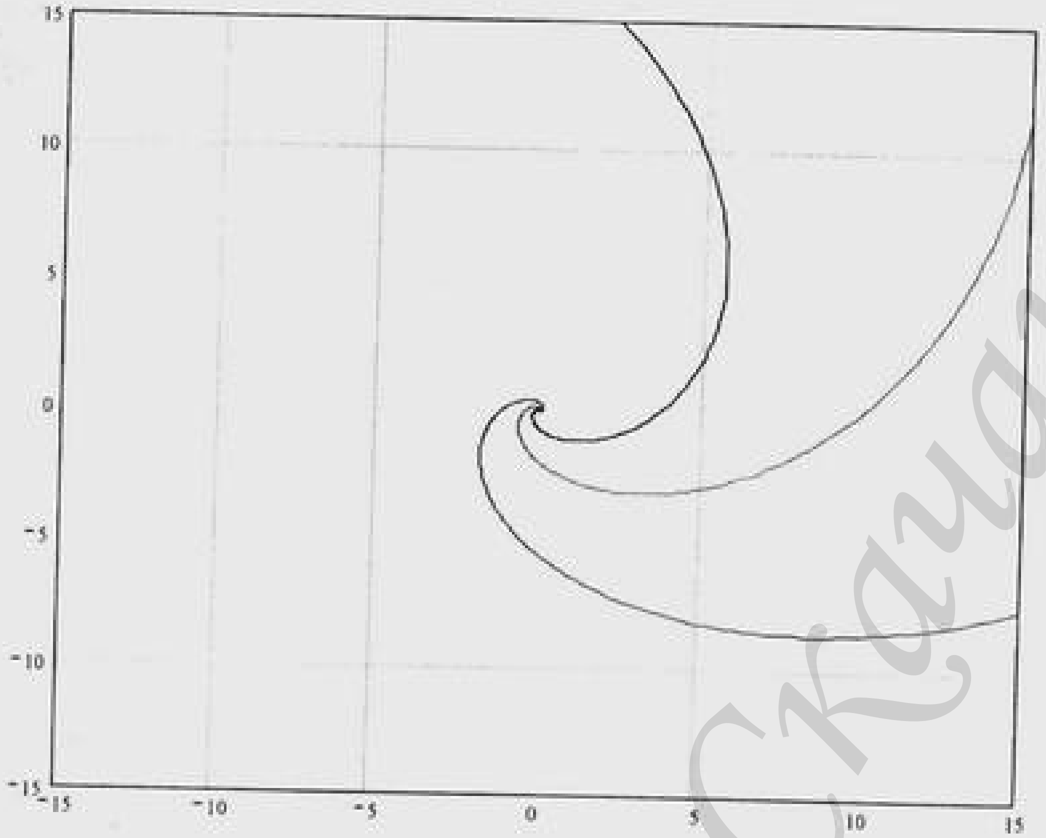
Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = e^z$; прямые $x=kx+b$.



Каждая из этих прямых преобразуется в раскручивающуюся спираль:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ \varphi=\arg z,\ k=0,1,\ldots,n-1;\ z\neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z=x+iy \qquad e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z=-i\sin iz=\frac{e^z-e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z=\cos iz=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z=\arg z+2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$$

$$\operatorname{Arctg} z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Аналитические функции

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z\in G$.

Производная аналитической функции

$$w=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$