Екзаменаційний білет № 8

I. Теоретична частина

1. Розв’язок рівнянь методом комбіновани методом.

8. Комбінований метод.

Нехай $f(a) * f(b) < 0$, а $f'(x)$ і $f''(x)$ зберігають постійні знаки на [a,b]. Об’єднуючи методи хорд та дотичних, отримуємо комбінований метод. У цьому методі послідовно обчислюються $x_k^{хорд}$ та $x_k^{дот}$ за методами хорд і дотичних відповідно. Комбінований метод застосовується на кожному кроці до нового відрізка або $\left[x_k^{хорд}, x_k^{дот}\right]$, якщо нерухомий правий кінець, або до $\left[x_k^{дот}, x_k^{хорд}\right]$, якщо нерухомий лівий кінець. Середина відрізка є наближенням до кореня з точністю

$$\varepsilon = \left|x_k^{дот} - x_k^{хорд}\right| / 2$$

Тобто процес обчислювань закінчується, коли виконано умову

$$\left|x_k^{дот} - x_k^{хорд}\right| \le 2 * \varepsilon$$

Якщо після цього за кінцеве наближення до кореня взяти

$$x_k = \left|x_k^{дот} - x_k^{хорд}\right| / 2$$

це гарантує, що

$$\left|x_k - \zeta\right| \le \varepsilon$$

2. Симплек метод.

   Симплекс-метод — метод розв'язання задачі лінійного програмування, в якому здійснюється скерований рух по опорних планах до знаходження оптимального розв'язку; симплекс-метод також називають методом поступового покращення плану. Метод був розроблений американським математиком Джорджем Данцігом у 1947 році.

Описання методу

Нехай невироджену задачу лінійного програмування представлено в канонічному вигляді:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

де $X = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор змінних, $C = (c_1, \ldots, c_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_m)^T$, $A_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T$, $j = 1, \ldots, n$ — задані вектори, T — знак транспонування, та

$$\bar{X} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$$

відмінні від нуля компоненти опорного плану, для полегшення пояснення розташовані на перших m місцях вектору X. Базис цього плану — $\bar{A} = (A_1, \ldots, A_m)$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \bar{x}_i = B, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i = \bar{z}_0, \quad (2)$$

де $\bar{z}_0$ значення лінійної форми на даному плані. Так як вектор-стовпці матриці A лінійно незалежні, будь який із векторів умов A_j розкладається по них єдиним чином:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i x_{ji} = A_j, \qquad j = 1, \ldots, n \;, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, n \;, \quad (4)$$

де x_{ij} коефіцієнт розкладання. Система умов

$$\sum_{i=1}^{m} A_i x_i + A_k x_k = B, \qquad k \geq m+1 \;, \quad (5)$$

$z_k \geq 0$, $x_j = 0$, $j = m + 1, \ldots, n$, $j \neq k$ (6)

при заданому k визначає в просторі змінних задачі промінь, який виходить із точки, яка відповідає опорному плану, що розглядається. Нехай значення змінної x_k при русі по цьому променю дорівнює θ, тоді значення базисних змінних дорівнюють $x_i(\theta)$. В цих позначеннях рівняння (5) можна представити у вигляді

$$\sum_{i=1}^{m} x_i(\theta) A_i + \theta A_k = B \;. \quad (7)$$

помноживши рівняння (3) на θ при $j = k$ та віднявши від рівняння (1), отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_i - \theta x_{ik}) A_i + \theta A_k = B. \quad (8)$$

Із рівнянь (7-8) отримаємо

$$x_i(\theta) = \bar{x}_i - \theta x_{ik}, \qquad i = 1, \ldots, m. \quad (9)$$

Оскільки $x_i(\theta)$ при θ = 0 визначають план задачі, то найбільше θ, яке не порушує обмеження $x_i(\theta) \geq 0$, визначається із умови

$$\theta_0 = \min_{i \in I} \frac{\bar{x}_i}{x_{ik}}. \quad (10)$$

де $I = \{i \mid x_{ik} > 0\}$.

В силу невиродженості задачі мінімум досягається не більш ніж для одного $i = J$ та θ > 0. Значення лінійної форми при $\theta = \theta_0$ визначається із рівнянь (9), (4), (2)

$$z_0(\theta_0) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i(\theta_0) + c_k \theta_0 = \bar{z}_0 - \theta_0 \Delta_k,$$

де $\Delta_k = z_k - c_k$. Очевидно, $\Delta_j = 0$ для $j = 1, \ldots, m$.

Нехай $\bar{A} = E$ — початковий базис із m одиничних векторів. Всі дані задачі записуються у вигляді симплекс-таблиці (першої ітерації обчислювального процесу). Симплекс-алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування складається із наступних операцій:

1. знайти $\Delta_k = \min_j \Delta_j$. Якщо $\Delta_k = 0$, тоді план, який розглядається оптимізовано; якщо $\Delta_k < 0$, вектор A_k вводиться в базис;
2. знайти θ_0 та l, для якого $\theta_0 = \bar{x}_l / x_l k$, із формули (10). Якщо $l = \Lambda$ — порожня множина, лінійна форма необмежена зверху; якщо $l \neq \Lambda$ вектор A_l виводиться із базису;
3. за знайденими l, k обчислити нові значення елементів таблиці за формулами

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_i k, & \text{if } i \neq l; \\ \frac{x_{lj}}{x_{lk}}, & \text{if } i = l; \end{cases} \quad (12)$$

$$i = 1, \ldots, m+1, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

де $x_{i0} = \bar{x}_i,\ x_{m+1\,0} = \bar{z}_0,\ x_{m+1\,j} = \Delta_j$ та перейти до виконання операції (1) з новими значеннями всіх $x_{ij} = x'_{ij}$.

Перетворення (12) замінює вектор коефіцієнтів $X_k = (x_{1k}, \ldots, x_{mk})$ на одиничний вектор X_k з $x_{lk} = 1$. В силу монотонного збільшення x_0 повернення до вже пройденого плану неможливе, а із скінченності кількості опорних планів випливає скінченність алгоритму.

Початковий опорний план з одиничним базисом можна отримати, розв'язавши описаним алгоритмом допоміжну задачу

$$\sum_{i=1}^{m} (-y_{n+i}) \to \max,$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \ldots,$$

$$y_{n+1} \geq 0, i = 1, \ldots, m;$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n,$$

яка містить одиничний базис, який складається із векторів $A_{n+1}, \ldots, A_{n+m}$. Цим векторам відповідають штучні змінні із значеннями $\bar{y}_{n+i} = b_i$, $i = 1, \ldots, m$. Якщо в оптимальному розв'язку цієї задачі $\sum_{i=1}^{m} y_{n+i} > 0$, вихідна задача не має розв'язку. Якщо ж $\sum_{i=1}^{m} y_{n+i} = 0$ та задача невироджена, оптимальний базис складається лише тільки із векторів вихідної задачі, які за формулами (12) перетворені в одиничну матрицю. Якщо задача має невироджені плани, значення z_0 може не збільшуватись на ряді ітерацій. Це відбувається через те, що значення відповідних $\bar{x}_l$ дорівнює нулю та визначається неоднозначно. В таких випадках монотонність методу порушується і може трапитись зациклювання, тобто, повернення до вже пройденого базису. Невелика зміна вектора обмежень задачі, яка полягає в заміні величин b_i на $b_i + \varepsilon_i$, де ε_i достатньо малі, при вдалому виборі ε_i не змінюють множину векторів оптимального опорного плану вихідної задачі і робить її невиродженою.

Описаний вище алгоритм називається першим (або прямим) алгоритмом симплекс-методу. Також відомий другий алгоритм (алгоритм із оберненою матрицею). В ньому перетворюється лише матриця A^{-1}, обернена до базисної матриці.

II. Практична частина

За допомогою виключення Гаусса-Жордана обчислити корені системи лінійних рівнянь

```
154x0 + 79x1 + 1x2 + 58x3 + 12x4  = 882

22x0 + 188x1 + 86x2 + 46x3 + 31x4  = 1214

9x0 + 23x1 + 176x2 + 82x3 + 58x4  = 906

30x0 + 75x1 + 99x2 + 267x3 + 62x4  = 1750

40x0 + 55x1 + 15x2 + 72x3 + 185x4  = 988
```