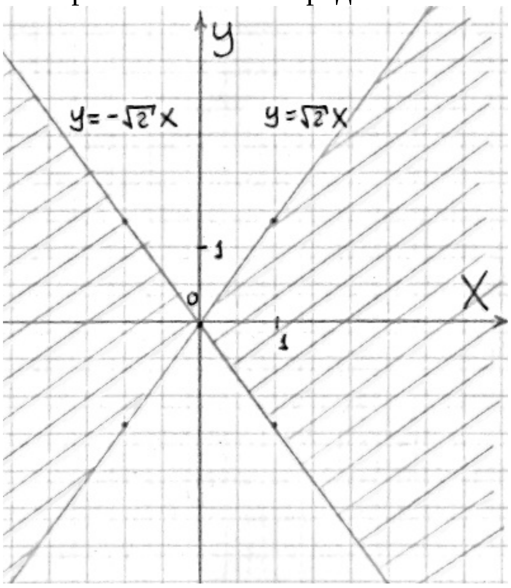
ИДЗ-10.1

1.11. Найти область определения указанной функции.
$z=\sqrt{2x^2-y^2}$

Решение: Область определения:
$2x^2-y^2\ge 0\Rightarrow y^2\le 2x^2\Rightarrow |y|\le\sqrt{2}|x|$
Изобразим область определения на чертеже:



2. Найти частные производные и частные дифференциалы данной функции.

2.11. $z=arcctg(xy^2)$
Найдем частные производные:
$$z'_x=\left(arcctg(xy^2)\right)'_x=-\frac{1}{1+(xy^2)^2}\cdot(xy^2)'_x=-\frac{y^2}{1+x^2y^4}$$
$$z'_y=\left(arcctg(xy^2)\right)'_y=-\frac{1}{1+(xy^2)^2}\cdot(xy^2)'_y=-\frac{2xy}{1+x^2y^4}$$
Частные дифференциалы:
$$dz'_x=-\frac{y^2dx}{1+x^2y^4},\ dz'_y=-\frac{2xydy}{1+x^2y^4}$$

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

3.11. $f(x,y,z)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}$, $M_0(-1,1,0)$

Решение:

© http://mathprofi.ru Высшая математика – просто и доступно!
Приветствуется свободное распространение данного файла, пожалуйста, не убирайте копирайты

$$f'_x=\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)'_x=y\cdot\left(\left(x^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'_x=y\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+z^2\right)'_x=$$

$$=-\frac{y}{2\sqrt{\left(x^2+z^2\right)^3}}\cdot 2x=-\frac{xy}{\sqrt{\left(x^2+z^2\right)^3}}$$

$$f'_x(M_0)=f'_x(-1,1,0)=-\frac{-1}{1}=1$$

$$f'_y=\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)'_y=\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}\cdot(y)'_z=\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

$$f'_x(M_0)=f'_x(-1,1,0)=\frac{1}{1}=1$$

$$f'_z=\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)'_z=y\cdot\left(\left(x^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'_z=y\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+z^2\right)'_z=$$

$$=-\frac{y}{2\sqrt{\left(x^2+z^2\right)^3}}\cdot 2z=-\frac{yz}{\sqrt{\left(x^2+z^2\right)^3}}$$

$$f'_x(M_0)=f'_x(-1,1,0)=-\frac{0}{1}=0$$

4. Найти полные дифференциалы указанных функций.

4.11. $z=7x^3y-\sqrt{xy}$

Вычислим частные производные первого порядка:

$$z'_x=(7x^3y-\sqrt{xy})'_x=7y(x^3)'_x-\sqrt{y}\cdot(\sqrt{x})'_x=7y\cdot 3x^2-\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=21x^2y-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$z'_y=(7x^3y-\sqrt{xy})'_y=7x^3(y)'_y-\sqrt{x}\cdot(\sqrt{y})'_y=7x^3\cdot 1-\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=7x^3-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$$

Полный дифференциал:

$$dz=z'_xdx+z'_ydy=\left(21x^2y-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right)dx+\left(7x^3-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\right)dy$$

5. Вычислить значение производной сложной функции $u=u(x,y)$, где $x=x(t)$, $y=y(t)$, при $t=t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

5.11. $u=e^{y-2x-1}$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$.

Найдем производную сложной функции: $u'_t=u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t$.

В данном случае:

$$u'_x=\left(e^{y-2x-1}\right)'_x=e^{y-2x-1}\cdot(y-2x-1)'_x=-2e^{y-2x-1}$$

$$u'_y=\left(e^{y-2x-1}\right)'_y=e^{y-2x-1}\cdot(y-2x-1)'_y=e^{y-2x-1}$$

$$x'_t=-\sin t,\ y'_t=\cos t$$

© http://mathprofi.ru Высшая математика – просто и доступно!
Приветствуется свободное распространение данного файла, пожалуйста, не убирайте копирайты

Таким образом:

$$u'_t = -2e^{y-2x-1}\cdot(-\sin t) + e^{y-2x-1}\cdot\cos t = e^{\sin t - 2\cos t - 1}\cdot(2\sin t + \cos t)$$

$$u'_t\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{1-0-1}\cdot(2+0) = 2$$

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

6.11. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2$, $M_0(1,1,1)$

$$\left(x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y\right)'_x = (2)'_x$$

$$2x + 6zz'_x - yz'_x + 0 = 0$$

$$(6z - y)z'_x = -2x$$

$$z'_x = \frac{-2x}{6z - y}$$

$$z'_x(M_0) = z'_x(1,1,1) = \frac{-2}{6-1} = -\frac{2}{5} = -0,4$$

$$\left(x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y\right)'_y = (2)'_y$$

$$0 - 4y + 6zz'_y - z - yz'_y + 1 = 0$$

$$(6z - y)z'_y = 4y + z - 1$$

$$z'_y = \frac{4y + z - 1}{6z - y}$$

$$z'_y(M_0) = z'_y(1,1,1) = \frac{4+1-1}{6-1} = \frac{4}{5} = 0,8$$

ИДЗ 10-2.

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

3.11. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = (x-y)(y-z)(z-x)$

Преобразуем функцию:

$$u = (x-y)(y-z)(z-x) = (xy - y^2 - xz + yz)(z-x) =$$

$$= xyz - y^2z - xz^2 + yz^2 - x^2y + xy^2 + x^2z - xyz = -y^2z - xz^2 + yz^2 - x^2y + xy^2 + x^2z$$

Найдем частные производные первого порядка функции u.

$$u'_x = (-y^2z - xz^2 + yz^2 - x^2y + xy^2 + x^2z)'_x = 0 - z^2 + 0 - 2xy + y^2 + 2xz = -z^2 - 2xy + y^2 + 2xz$$

$$u'_y = (-y^2z - xz^2 + yz^2 - x^2y + xy^2 + x^2z)'_y = -2yz - 0 + z^2 - x^2 + 2xy + 0 = -2yz + z^2 - x^2 + 2xy$$

$$u'_z = (-y^2z - xz^2 + yz^2 - x^2y + xy^2 + x^2z)'_z = -y^2 - 2xz + 2yz - 0 + 0 + x^2 = -y^2 - 2xz + 2yz + x^2$$

Подставим u'_x, u'_y, u'_z в левую часть уравнения:

© http://mathprofi.ru Высшая математика – просто и доступно!
Приветствуется свободное распространение данного файла, пожалуйста, не убирайте копирайты

$$-z^2-2xy+y^2+2xz-2yz+z^2-x^2+2xy-y^2-2xz+2yz+x^2=0$$

Таким образом, данная функция удовлетворяет данному уравнению.

4. Исследовать на экстремум функцию.

4.11. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$

Решение: Найдем критические точки:

$\begin{cases} z'_x=2x+y-6=0 \\ z'_y=x+2y-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-6=0 \\ -2x-4y+18=0 \end{cases} + \Rightarrow -3y+12=0 \Rightarrow y=4$ – подставим в первое уравнение:

$$2x+4-6=0 \Rightarrow x=1$$

$M(1;4)$ – стационарная точка.

Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$z''_{xx}=2=const$, $z''_{xy}=1=const$, $z''_{yy}=2=const$

$z''_{xx}(M)\cdot z''_{yy}(M)-\left(z''_{xy}(M)\right)^2=2\cdot 2-1^2=4-1=3>0$, значит, в точке $M(1;4)$ существует экстремум, так как $z''_{xx}(M)>0$, то это – минимум:

$$\min z=z(M)=z(1;4)=1+4+16-6-36=-21$$

Ответ: $\min z=z(1;4)=-21$.

© http://mathprofi.ru Высшая математика – просто и доступно!
Приветствуется свободное распространение данного файла, пожалуйста, не убирайте копирайты