/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

ТФКП. Вариант 16.

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[3]{-8i}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,...,n-1;\quad z\neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[3]{-8i}$:

$$\sqrt[3]{-8i}=\sqrt{3}-i$$

$$\sqrt[3]{-8i}=2i$$

$$\sqrt[3]{-8i}=-\sqrt{3}-i$$

Ответ: $\sqrt[3]{-8i}=\left\{\sqrt{3}-i;2i;-\sqrt{3}-i\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\mathrm{sh}(3+\pi i/6)$

Перейдем от гиперболического синуса к тригонометрическому:

$$\mathrm{sh}(3+\pi i/3)=-i\cdot\sin(3i-\pi/6)=i\cdot\sin(\pi/6-3i)$$

Используем формулу синуса разности:

$$i\cdot\sin(\pi/6-3i)=i[\sin(\pi/6)\cos(3i)-\cos(\pi/6)\sin(3i)]$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$i[\sin(\pi/6)\cos(3i)-\cos(\pi/6)\sin(3i)]=i\frac{1}{2}\frac{e^{-3}+e^{3}}{2}-$$

$$-i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-3}-e^{3}}{2i}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{3}-e^{-3}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{2}\frac{e^{-3}+e^{3}}{2}\right)$$

Ответ: $\mathrm{sh}(3+\pi i/6)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{3}-e^{-3}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{2}\frac{e^{-3}+e^{3}}{2}\right)$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arth}\left(\frac{4-3i}{5}\right)$$

Функция Arth является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arth}\,z = i\cdot\mathrm{Arctg}\left(\frac{z}{i}\right) = i\cdot\left(-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+i\frac{z}{i}}{1-i\frac{z}{i}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}$$

Подставим вместо z значение $\frac{4-3i}{5}$:

$$\mathrm{Arcth}\left(\frac{4-3i}{5}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\frac{4-3i}{5}}{1-\frac{4-3i}{5}} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{5+4-3i}{5-4+3i} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{9-3i}{1+3i} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{9i+3}{i(1+3i)} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(-3i)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(-3i) = \frac{1}{2}[\ln|-3i| + i(\arg(-3i) + 2\pi k)] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(3) + \frac{i}{2}[\arg(-3i) + 2\pi k] \approx \frac{1}{2}\cdot 1{,}099 + \frac{i}{2}\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$$

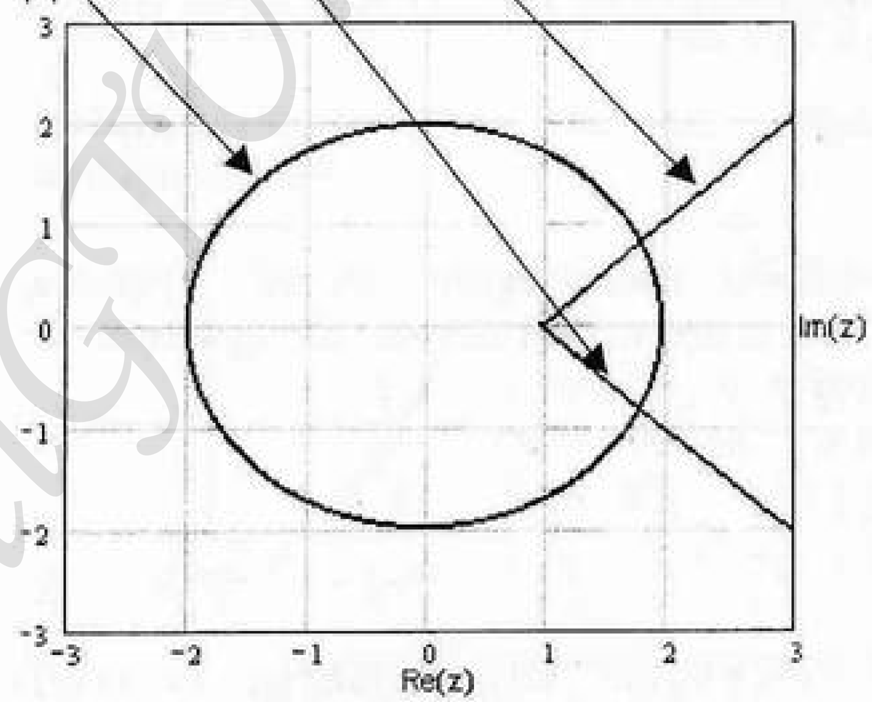
$k = 0,\pm1,\pm2,...$

Ответ: $\mathrm{Arth}\left(\frac{4-3i}{5}\right) \approx \frac{1}{2}\cdot 1{,}099 + \frac{i}{2}\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k = 0,\pm1,\pm2,...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z| < 2, \quad -\pi/4 \le \arg(z-1) \le \pi/4$



Задача 5

Определить вид кривой:

$$z = \frac{4}{\mathrm{ch}\,4t} + i2\mathrm{th}\,4t$$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$$x(t) = 4/\mathrm{ch}\,4t; \quad y(t) = 2\mathrm{th}\,4t$$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = \frac{4}{\mathrm{ch}\,4t} \Rightarrow \mathrm{ch}\,4t = \frac{4}{x} \Rightarrow t = \frac{1}{4}\mathrm{arch}\left(\frac{4}{x}\right)$$

$$y = 2\mathrm{th}\,4t \Rightarrow \mathrm{th}\,4t = \frac{y}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{4}\mathrm{arth}\left(\frac{y}{2}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\frac{1}{4}\mathrm{arch}\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{arth}\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{arch}\left(\frac{4}{x}\right) - \mathrm{arth}\left(\frac{y}{2}\right) = 0$$

Ответ: $\mathrm{arch}\left(\frac{4}{x}\right) - \mathrm{arth}\left(\frac{y}{2}\right) = 0$

Задача 6

Проверить, что v является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной мнимой части v(x,y) и значению $f(z_0)$:

$v = 2xy + y$

$f(0) = 0$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = 2x + 2iy + 1 = 2z + 1$$

Т.к. производная существует, то v является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int (2z+1)dz = z^2 + z + C$$

Определим константу С:

$$f(0) = 0^2 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$f(z) = z^2 + z$

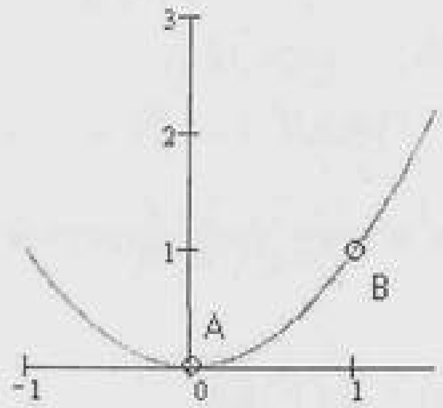
Ответ: $f(z) = z^2 + z$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int\limits_{AB} (3z^2 + 2z)dz;\ AB: \{y = x^2; z_A = 0, z_B = 1 + i\}$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = 3(x+iy)^2 + 2(x+iy) =$$
$$= \underbrace{3x^2 - 3y^2 + 2x}_{u(x,y)} + i\underbrace{(6xy + 2y)}_{v(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x + 2; \frac{\partial v}{\partial y} = 6x + 2;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6y; \frac{\partial v}{\partial x} = 6y; \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются, следовательно, функция является аналитической. Тогда результат от пути интегрирования не зависит:

$$\int\limits_{AB} (3z^2 + 2z)dz = \int\limits_0^{1+i} (3z^2 + 2z)dz = z^3 + z^2 \Big|_0^{1+i} = (1+i)^3 + (1+i)^2 =$$
$$= -2 + 4i$$

Ответ: $\int\limits_{AB} (3z^2 + 2z)dz = -2 + 4i$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}=\frac{8(z-32)}{z^2(z+16)(z-8)}=\frac{8}{z^2}\cdot\frac{z-32}{(z+16)(z-8)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

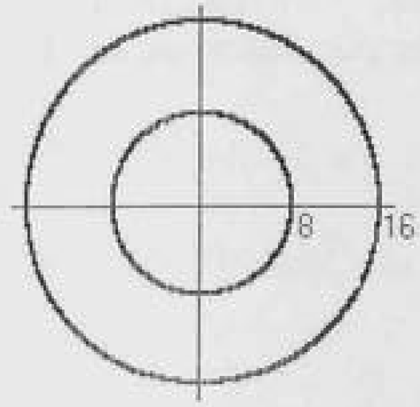
$$\frac{z-32}{(z+16)(z-8)}=\frac{A}{z+16}+\frac{B}{z-8}=\frac{Az-8A+Bz+16B}{(z+16)(z-8)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=2;B=-1\}\Rightarrow\frac{z-32}{(z+16)(z-8)}=\frac{2}{z+16}-\frac{1}{z-8}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{8}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+16}-\frac{1}{z-8}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=8; z=-16$



Рассмотрим область $|z|<8$:

$$f(z)=\frac{8}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+16}-\frac{1}{z-8}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{16}}+\frac{1}{1-\frac{z}{8}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{16}+\frac{z^2}{256}-\frac{z^3}{4096}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{8}+\frac{z^2}{64}+\frac{z^3}{512}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{16z}+\frac{1}{256}-\frac{z}{4096}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{8z}+\frac{1}{64}+\frac{z}{512}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $8<|z|<16$:

$$f(z)=\frac{8}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+16}-\frac{1}{z-8}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{16}}-\frac{8}{z(1-\frac{8}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{16}+\frac{z^2}{256}-\frac{z^3}{4096}+\ldots\right)+\left(\frac{8}{z}+\frac{64}{z^2}+\frac{512}{z^3}+\frac{4096}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{16z}+\frac{1}{256}-\frac{z}{4096}+\ldots\right)+\left(\frac{8}{z^3}+\frac{64}{z^4}+\frac{512}{z^5}+\frac{4096}{z^6}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>16$:

$$f(z)=\frac{8}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+16}-\frac{1}{z-8}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{16}{z(1+\frac{16}{z})}-\frac{8}{z(1-\frac{8}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{16}{z}-\frac{256}{z^2}+\frac{4096}{z^3}-\frac{65536}{z^4}+\ldots\right)+\left(\frac{8}{z}+\frac{64}{z^2}+\frac{512}{z^3}+\frac{4096}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{16}{z^3}-\frac{256}{z^4}+\frac{4096}{z^5}-\frac{65536}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{8}{z^3}+\frac{64}{z^4}+\frac{512}{z^5}+\frac{4096}{z^6}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<8: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{16z}+\frac{1}{256}-\frac{z}{4096}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{8z}+\frac{1}{64}+\frac{z}{256}+\ldots\right)$$

$$8<|z|<16: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{16z}+\frac{1}{256}-\frac{z}{4096}+\ldots\right)+\left(\frac{8}{z^3}+\frac{64}{z^4}+\frac{512}{z^5}+\frac{4096}{z^6}+\ldots\right)$$

$$|z|>16: f(z)=\left(\frac{16}{z^3}-\frac{256}{z^4}+\frac{4096}{z^5}-\frac{65536}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{8}{z^3}+\frac{64}{z^4}+\frac{512}{z^5}+\frac{4096}{z^6}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z-z_0.

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1},\ z_0=-3-2i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right)$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{(z-z_0)-3-3i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (z-z_0)^n}{(-3-3i)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3+3i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{(z-z_0)-3-i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (z-z_0)^n}{(-3-i)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3+i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right)=\frac{1}{2}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3+3i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3+i)^{n+1}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(3+3i)^{n+1}}+\frac{1}{(3+i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(3+3i)^{n+1}}+\frac{1}{(3+i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=ze^{1/(z-2)},\ z_0=2$$

Перейдем к новой переменной z'=z–z_0.

$$z'=z-2;\ ze^{1/(z-2)}=(z'+2)e^{1/z'}=z'e^{1/z'}+2e^{1/z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=z'e^{1/z'}+2e^{1/z'}=z'\left(1+\frac{1}{z'}+\frac{1}{2!z'^2}+\frac{1}{3!z'^3}+\ldots\right)+$$

$$+2\left(1+\frac{1}{z'}+\frac{1}{2!z'^2}+\frac{1}{3!z'^3}+\ldots\right)=\left(z'+1+\frac{1}{2!z'}+\frac{1}{3!z'^2}+\ldots\right)+$$

$$+\left(2+\frac{2}{z'}+\frac{2}{2!z'^2}+\frac{2}{3!z'^3}+\ldots\right)=z'+3+\frac{1}{z'}\left(\frac{1+2!2}{2!}\right)+$$

$$+\frac{1}{z'^2}\left(\frac{2!+3!2}{2!3!}\right)+\frac{1}{z'^3}\left(\frac{3!+4!2}{3!4!}\right)+\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0=2:

$$f(z)=z+1+\frac{2}{z-2}\left(\frac{1+2!2}{2!}\right)+\frac{1}{(z-2)^2}\left(\frac{2!+3!2}{2!3!}\right)+$$

$$+\frac{1}{(z-2)^3}\left(\frac{3!+4!2}{3!4!}\right)+\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=z+1+\frac{2}{z-2}\left(\frac{1+2!2}{2!}\right)+\frac{1}{(z-2)^2}\left(\frac{2!+3!2}{2!3!}\right)+$$

$$+\frac{1}{(z-2)^3}\left(\frac{3!+4!2}{3!4!}\right)+\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции:

$$f(z) = \frac{\mathrm{ch}2z - 1}{\mathrm{sh}z - z - z^3/6}$$

Представим эту функцию, как отношение функций $g(z)$ и $h(z)$:

$$f(z) = \frac{\mathrm{ch}2z - 1}{\mathrm{sh}z - z - z^3/6} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad g(z) = \mathrm{ch}2z - 1; \quad h(z) = \mathrm{sh}z - z - z^3/6;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = 0$:

$g'(z) = 2\mathrm{sh}2z; g'(0) = 2\mathrm{sh}0 = 0$

$g''(z) = 4\mathrm{ch}2z; g''(0) = 4\mathrm{ch}0 = 4$

$h'(z) = \mathrm{ch}(z) - 1 - z^2/2; h'(0) = \mathrm{ch}0 - 1 - 0 = 0$

$h''(z) = \mathrm{sh}(z) - z; h''(0) = \mathrm{sh}0 - 0 = 0;$

$h'''(z) = \mathrm{ch}(z) - 1; h'''(0) = \mathrm{ch}0 - 1 = 0;$

$h^{IV}(z) = \mathrm{sh}(z); h^{IV}(0) = \mathrm{sh}0 = 0;$

$h^{V}(z) = \mathrm{ch}(z); h^{V}(0) = \mathrm{ch}0 = 1;$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = 0$ выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка $z = 0$ является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при $z = 0$ для функций $g(z)$ и $h(z)$. В данном случае, это $5 - 2 = 3$.

Ответ: Точка $z = 0$ является полюсом 3-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{\sin \pi z}$$

Изолированной особой точкой является $z=k$, $k \in Z$. Запишем данную функцию в виде отношения $g(z)$ и $h(z)$:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{\sin \pi z}; \quad g(z) = e^z - 1; \quad h(z) = \sin \pi z;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = k$:

$g(k \neq 0) = e^k - 1 \neq 0;$

$g'(z) = e^z; g'(0) \neq 0;$

$h(k) = 0;$

$h'(z) = \pi \cos \pi z; h'(k) \neq 0;$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = 0$ для функций $g(z)$ и $h(z)$ равен, то это говорит о том, что существует конечный предел $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$, из чего следует, что точка $z = 0$ является устранимой особой точкой.

В случаях $z = k \neq 0$ порядок ненулевой производной выше для функции, стоящей в знаменателе, т.е. точки $z = k \neq 0$ являются полюсами функции. Поскольку в данном случае разность порядков ненулевых производных $g(z)$ и $h(z)$ равна единице, то точки $z = k \neq 0$ являются полюсами 1-го порядка.

Ответ: Точка $z = 0$ для данной функции является устранимой особой точкой.

Точки $z = k \neq 0$ являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-6|=1} \underbrace{\frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = 2\pi$

$z = -2\pi$

Точка $z = -2\pi$ не входит в область, ограниченную данным контуром, поэтому не рассматривается.

Точка $z_1 = 2\pi$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to 2\pi}[f(z)(z-2\pi)] = \lim_{z\to 2\pi}\frac{(z-2\pi)(\sin^3 z+2)}{z^2-4\pi^2} =$$

$$= \lim_{z\to 2\pi}\frac{\sin^3 z+2}{z+2\pi} = \frac{2}{4\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-6|=1}\frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi} = i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-6|=1}\frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz = i$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{\cos iz-1}{z^3}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$\frac{\cos iz-1}{z^3} = \frac{-1+1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots}{z^3} = \frac{1}{2!z}+\frac{z}{4!}+\frac{z^3}{6!}+\frac{z^5}{8!}+\ldots$$

Получившийся ряд содержит конечное число членов в главной части, а старшая степень у него – первая. Из этого следует, что особая точка $z = 0$ представляет собой полюс 1-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[z\cdot f(z)] = \lim_{z\to 0}\frac{\cos iz-1}{z^2} = -\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos iz}{z^2} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{z^2/2}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos iz-1}{z^3}dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{2} = \pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos iz-1}{z^3}dz = \pi i$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=0,5} \underbrace{\frac{e^{6z}-\cos 8z}{z\,sh 4z}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции $z = i\pi k/4$, $k \in Z$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{e^{6z}-\cos 8z}{z\,sh 4z} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad \begin{matrix} g(z) = e^{6z} - \cos 8z \\ h(z) = z\,sh 4z \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{6z}-\cos 8z}{sh 4z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{6e^{6z}+8\sin 8z}{4ch 4z}\right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{6z}-\cos 8z}{z\,sh 4z} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{3}{2} = 6\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{6z}-\cos 8z}{z\,sh 4z} dz = 6\pi i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-3|=2} \left(z\,sh\frac{1}{z-3} - \frac{2\sin\frac{\pi z}{8}}{(z-4)^2(z-6)}\right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-3|=2} \underbrace{z\,sh\frac{1}{z-3}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z-3|=2} \underbrace{\frac{-2\sin\frac{\pi z}{8}}{(z-4)^2(z-6)}}_{f_2(z)} dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint\limits_{|z-3|=2} z\,sh\frac{1}{z-3} dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left\{\begin{matrix} t = z-3 \\ z = t+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z\,sh\frac{1}{z-3} = (t+3)sh\frac{1}{t}$$

Единственной особой точкой этой функции является $t=0$. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t+3)sh\frac{1}{t} = (t+3)\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{3!t^3} + \frac{1}{5!t^5} + \frac{1}{7!t^7} + \frac{1}{9!t^9} + \ldots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3!t^2} + \frac{1}{5!t^4} + \frac{1}{7!t^6} + \ldots\right) + \left(\frac{3}{t} + \frac{3}{3!t^3} + \frac{3}{5!t^5} + \frac{3}{7!t^7} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{3}{t} + \frac{1}{3!t^2} + \frac{3}{3!t^3} + \frac{1}{5!t^4} + \frac{3}{5!t^5} + \frac{1}{7!t^6} + \frac{3}{7!t^7} + \ldots$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов, из чего следует, что $t=0$ является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+3)sh\frac{1}{t}\right] = C_{-1} = 3$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-3|=2} z\,\mathrm{sh}\frac{1}{z-3}dz=\oint\limits_{|t|=2}(t+3)\mathrm{sh}\frac{1}{t}dz=2\pi i\,\mathrm{res}_{t=0}\left[(t+3)\mathrm{sh}\frac{1}{t}\right]=$$
$$=2\pi i\cdot 3=6\pi i$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint\limits_{|z-3|=2}\frac{-2\sin\frac{\pi z}{8}}{(z-4)^2(z-6)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=6 и z=4. При этом точка z=6 не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=4 является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\mathrm{res}_{z=4}f_2(z)=\lim_{z\to4}\frac{d}{dz}\left[\frac{-(z-4)^2\cdot 2\sin\frac{\pi z}{8}}{(z-4)^2(z-6)}\right]=\lim_{z\to4}\frac{d}{dz}\left[\frac{-2\sin\frac{\pi z}{8}}{z-6}\right]=$$
$$=\lim_{z\to4}\left[-\frac{\pi}{4(z-6)}\cos\left(\frac{\pi z}{8}\right)+\frac{2}{(z-6)^2}\sin\left(\frac{\pi z}{8}\right)\right]=\frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-3|=2}\frac{-2\sin\frac{\pi z}{8}}{(z-4)^2(z-6)}dz=2\pi i\cdot\mathrm{res}_{z=4}f_2(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-3|=2}\left(z\,\mathrm{sh}\frac{1}{z-3}-\frac{2\sin\frac{\pi z}{8}}{(z-4)^2(z-6)}\right)dz=\oint\limits_{|z-3|=2}z\,\mathrm{sh}\frac{1}{z-3}dz+$$
$$+\oint\limits_{|z-3|=2}\frac{-2\sin\frac{\pi z}{8}}{(z-4)^2(z-6)}dz=6\pi i+\pi i=7\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-3|=2}\left(z\,\mathrm{sh}\frac{1}{z-3}-\frac{2\sin\frac{\pi z}{8}}{(z-4)^2(z-6)}\right)dz=7\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{8-2\sqrt{15}\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{8-2\sqrt{15}\sin t}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{8-\frac{2\sqrt{15}}{2i}(z-\frac{1}{z})}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{8iz-\sqrt{15}(z^2-1)}=$$
$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{-\sqrt{15}(z-i\sqrt{15}/3)(z-i\sqrt{15}/5)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=i\sqrt{15}/3;\quad z=i\sqrt{15}/5;$

Точка $i\sqrt{15}/3$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $i\sqrt{15}/5$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\mathrm{res}_{z=i\sqrt{15}/5}f(z)=\lim_{z\to i\sqrt{15}/5}[f(z)(z-i\sqrt{15}/3)]=$$
$$=\lim_{z\to i\sqrt{15}/5}\frac{1}{-\sqrt{15}(z-i\sqrt{15}/3)}=\frac{1}{-\sqrt{15}(i\sqrt{15}/5-i\sqrt{15}/3)}=-\frac{i}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{-\sqrt{15}(z-i\sqrt{15}/3)(z-i\sqrt{15}/5)}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathrm{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot(-\frac{i}{2})=\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{8-2\sqrt{15}\sin t}=\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t)^2} = \oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(\sqrt{7}+\frac{\sqrt{5}}{2}(z+\frac{1}{z}))^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i(2\sqrt{7}z+\sqrt{5}(z^2+1))^2} = \oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{5}(z-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}})(z+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$$z = (\sqrt{2}-\sqrt{7})/\sqrt{5};\quad z = (-\sqrt{2}-\sqrt{7}/\sqrt{5};$$

Точка $z = (-\sqrt{2}-\sqrt{7})/\sqrt{5}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z = (\sqrt{2}-\sqrt{7})/\sqrt{5}$ является полюсом второго порядка.

Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=(\sqrt{2}-\sqrt{7})/\sqrt{5}} f(z) = \lim_{z\to(\sqrt{2}-\sqrt{7})/\sqrt{5}}\frac{d}{dz}[f(z)(z-(\sqrt{2}-\sqrt{7})/\sqrt{5})^2] =$$

$$= \lim_{z\to(\sqrt{2}-\sqrt{7})/\sqrt{5}}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[\sqrt{5}(z+(\sqrt{2}+\sqrt{7})/\sqrt{5})\right]^2} = \frac{4}{5i}\lim_{z\to(\sqrt{2}-\sqrt{7})/\sqrt{5}}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z+(\sqrt{2}+\sqrt{7})/\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{4}{5i}\lim_{z\to(\sqrt{2}-\sqrt{7})/\sqrt{5}}\left[-5\frac{z\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{2}}{(z\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{2})^3}\right] = -\frac{4}{i}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}-\sqrt{7}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-\sqrt{7}+\sqrt{7}+\sqrt{2})^3} = -\frac{4}{i}\cdot\frac{-2\sqrt{7}}{(2\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{5}(z-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}})(z+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}})\right]^2} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}i}\right) = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t)^2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx = 2\pi i\sum_m \operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$ сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2+5}{(z^2+3)(z^2+2)}dz$$

Особые точки:

$z = i\sqrt{2}\quad(\operatorname{Im} z > 0);\quad z = -i\sqrt{2}\quad(\operatorname{Im} z < 0)$

$z = i\sqrt{3}\quad(\operatorname{Im} z > 0);\quad z = -i\sqrt{3}\quad(\operatorname{Im} z < 0)$

Точки $z = i\sqrt{2}$ и $z = i\sqrt{3}$ являются простыми полюсами и вычеты в них вычисляются следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{2}} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{2}}[f(z)(z-i\sqrt{2})] = \lim_{z\to i\sqrt{2}}\frac{z^2+5}{(z+i\sqrt{2})(z^2+3)} = \frac{-i3\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{3}} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{3}}[f(z)(z-i\sqrt{3})] = \lim_{z\to i\sqrt{3}}\frac{z^2+5}{(z+i\sqrt{3})(z^2+2)} = \frac{i}{\sqrt{3}}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx = 2\pi i\left(\frac{i}{\sqrt{3}}-\frac{i3\sqrt{2}}{4}\right) = 2\pi i\frac{i(4-3\sqrt{6})}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}(3\sqrt{6}-4)$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}(3\sqrt{6}-4)$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1/4)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1/4)^2}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\lambda x dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\, R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$(x^2+1/4)^2=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm i/2$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z>0$.

Из этого следует:

$z_m=\{i/2\}$

Эта особая точка является полюсом второго порядка. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=i/2}{\mathrm{rez}}\, R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i/2}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i/2)^2}{(z^2+1/4)^2}e^{2iz}\right]=\lim_{z\to i/2}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i/2)^2}e^{2iz}\right]=$$

$$=\lim_{z\to i/2}\left[\frac{2iz-3}{(z+i/2)^3}e^{2iz}\right]=\frac{4}{i}e^{-1}$$

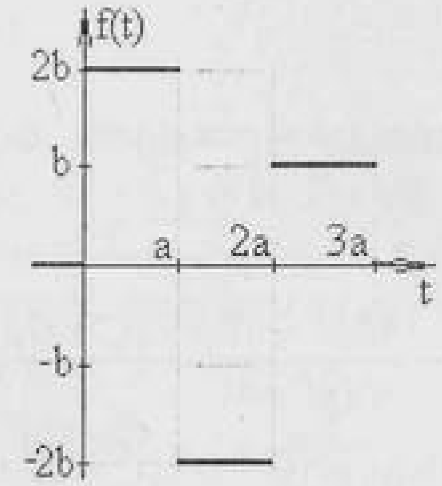
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1/4)^2}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\, R(z)e^{i\lambda z}\right\}=4\pi e^{-1}$$

Ответ: $\int_0^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1/4)^2}dx=4\pi e^{-1}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}2b, & 0<t<a\\ -2b, & a<t<2a\\ b, & 2a<t<3a\\ 0, & 3a<t\end{cases}$$

$$f(t)=2b\cdot\eta(t)-4b\cdot\eta(t-a)+3b\cdot\eta(t-2a)-b\cdot\eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{2b}{p}-\frac{4b}{p}e^{-ap}+\frac{3b}{p}e^{-2ap}-\frac{b}{p}e^{-3ap}$$

Ответ: $F(p)=\frac{2b}{p}-\frac{4b}{p}e^{-ap}+\frac{3b}{p}e^{-2ap}-\frac{b}{p}e^{-3ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{1}{p^3(p^2-4)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{1}{p^3(p^2-4)}=\frac{Ap^2+Bp+C}{p^3}+\frac{Dp+E}{p^2-4}=$$

$$=\frac{Ap^4+Bp^3+Cp^2-4Ap^2-4Bp-4C+Dp^4+Ep^3}{p^3(p^2-4)}=$$

$$=\frac{(A+D)p^4+(B+E)p^3+(C-4A)p^2-4Bp-4C}{p^3(p^2-4)}$$

Решив систему линейных уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+D=0\\B+E=0\\C-4A=0\\-4B=0\\-4C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1/16\\B=0\\C=-1/4\\D=1/16\\E=0\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{1}{p^3(p^2-4)}=-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^3}+\frac{1}{16}\cdot\frac{p}{p^2-4}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^3}+\frac{1}{16}\cdot\frac{p}{p^2-4}\to-\frac{1}{16}-\frac{t^2}{8}+\frac{1}{16}\mathrm{ch}2t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$-\frac{1}{16}-\frac{t^2}{8}+\frac{1}{16}\mathrm{ch}2t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''+4y=\sin 2t$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

Из теории нам известно, что если $x(t)$ соответствует изображение $X(p)$, то $x'(t)$ соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а $x''(t)$ соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+4Y(p)=\frac{2}{p^2+4}$$

$$p^2Y(p)-1+4Y(p)=\frac{2}{p^2+4}$$

$$(p^2+4)Y(p)=\frac{2}{p^2+4}+1$$

$$Y(p)=\frac{2}{(p^2+4)^2}+\frac{1}{p^2+4}$$

Найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{2}{(p^2+4)^2}+\frac{1}{p^2+4}$$

$$\frac{1}{(p^2+\alpha^2)^2}\to\frac{1}{2\alpha^3}\sin\alpha t-\frac{1}{2\alpha^2}t\cos\alpha t$$

$$\frac{2}{(p^2+4)^2}+\frac{1}{2}\frac{2}{p^2+4}\to y(t)=\frac{1}{8}\sin 2t-\frac{1}{4}t\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t=$$

$$=\frac{5}{8}\sin 2t-\frac{1}{4}t\cos 2t$$

Ответ: $y(t)=\frac{5}{8}\sin 2t-\frac{1}{4}t\cos 2t$

Задача 25

Материальная точка массы m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат с силой F=kx, пропорциональной расстоянию. На точку действует сила сопротивления среды R=rv, пропорциональная скорости v. При t=0 расстояние точки от начала координат x_0, а скорость v_0. Найти закон движения x=x(t) материальной точки.

$k = 5m$, $r = 4m$, $x_0 = 1$м, $v_0 = 2$м/с.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = kx - rv$$

$$\ddot{x}m - r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 2$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m - 4m\dot{x} + 5mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 5x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) - 4pX(p) + 4x(0) + 5X(p) = 0$$

$$(p^2 - 4p + 5)X(p) - p + 2 = 0$$

$$X(p) = \frac{p-2}{p^2 - 4p + 5} = \frac{p-2}{(p-2)^2 + 1} = \frac{p-2}{(p-2)^2 + 1}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = e^{2t}\cos t$$

Ответ: $x(t) = e^{2t}\cos t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + 1 \\ \dot{y} = 2x + 3 \end{cases}$$

$x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = 2Y(p) + 1/p \\ pY(p) - y(0) = 2X(p) + 3/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) + 1 = 2Y(p) + 1/p \\ pY(p) = 2X(p) + 3/p \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) = 2X(p) + 3/p \Rightarrow X(p) = \frac{pY(p) - 3/p}{2}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p\frac{pY(p) - 3/p}{2} + 1 = 2Y(p) + 1/p \Rightarrow Y(p) = \frac{1 + 2/p}{p^2 - 4}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{1 + 2/p}{p^2 - 4} = \frac{1 + 2/p}{p^2 - 4} + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p} = \frac{1 + p/2}{p^2 - 4} - \frac{1}{2p} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{p^2 - 4} + \frac{1}{2}\frac{p}{p^2 - 4} - \frac{1}{2p} \to y(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sh}2t + \frac{1}{2}\mathrm{ch}2t - \frac{1}{2}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = 2x + 3 \Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{2}(\dot{y} - 3) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{ch}2t + \mathrm{sh}2t - 3) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{ch}2t + \tfrac{1}{2}\mathrm{sh}2t - \tfrac{3}{2}$$

Ответ:

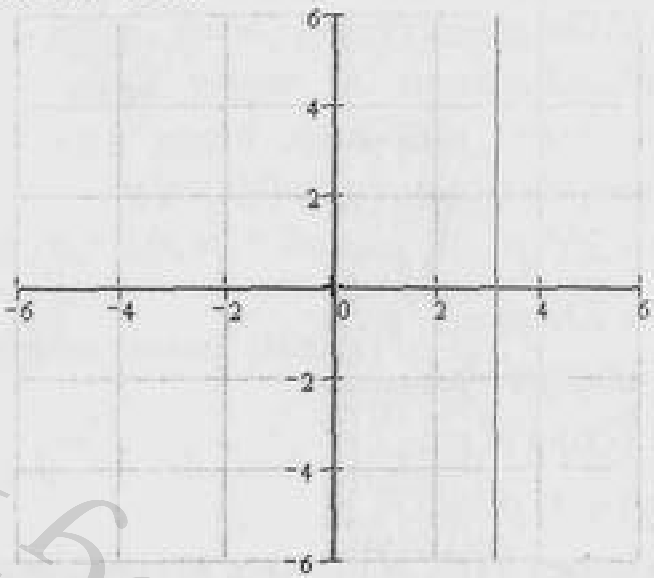
$$x(t) = \tfrac{1}{2}\mathrm{ch}2t + \tfrac{1}{2}\mathrm{sh}2t - \tfrac{3}{2}$$

$$y(t) = \tfrac{1}{2}\mathrm{sh}2t + \tfrac{1}{2}\mathrm{ch}2t - \tfrac{1}{2}$$

Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = \cos(z)$; полоса $0<x<\pi$.



Каждая из вертикальных линий в полосе преобразуется в кривую, проходящую через точку $(\cos x\ ;\ 0)$ и симметричную относительно оси абсцисс. Отображение совокупности таких кривых дает всю комплексную плоскость. В качестве примеров ниже приведены кривые для $x=0,\pi/3,3\pi/4,\pi$: