Екзаменаційний білет № 12

I. Теоретична частина

1. Наближення функцій за допомогою сплайнів.

Недоліки наближення функцій за допомогою інтерполяційних поліномів найбільш виразно виявляються у так званому феномені Рунге.

Цей феномен полягає у наступному. Спроби інтерполювати функцію Рунге

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

на проміжку [-1, 1] у рівновіддалених вузлах

$$x_i = -1 + (i-1)\frac{2}{n}, \;\; i \in \{1, \; 2, ..., \; n+1\}$$

за допомогою інтерполяційного многочлена $P_n(x)$ призводять до того, що на краях проміжку має місце осциляція, причому тим більша, чим вищим є степінь многочлена (рис. 6.1).

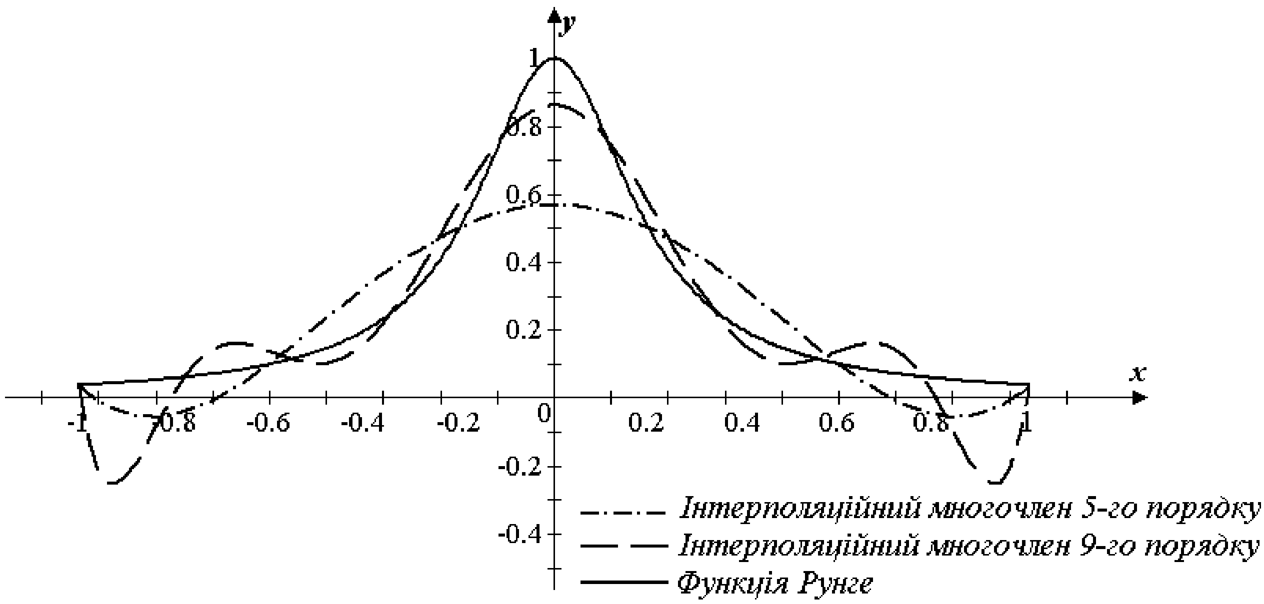

Рис. 6.1. Інтерполяція функції Рунге

Іншим способом інтерполювання на всьому відрізку є інтерполяція за допомогою сплайн-функцій.

Сплайн-функцією або сплайном називають кусково-поліноміальну функцію, що визначена на відрізку [*a, b*] й має на цьому відрізку декілька неперервних похідних.

Слово «сплайн» (з англійської *spline*) означає гнучку лінійку, що використовується для проведення гладких кривих через задані точки площини.

Нехай відрізок [*a, b*] розбито на N рівних часткових відрізків $[x_i, x_{i+1}]$. *Сплайном* називають функцію, яка разом з кількома її похідними є неперервною на заданому відрізку [*a, b*], а на кожному частковому відрізку $\left[x_i,\ x_{i+1}\right]$ зокрема є певним алгебраїчним многочленом.

6.1.1. Інтерполяційні кубічні сплайни

Нехай на [*a, b*] визначено неперервну функцію $f(x)$. Введемо вузли (сітку):

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

і позначимо $f_i = f(x_i),\ i \equiv \overline{0,\ n}.$

Інтерполяційним кубічним сплайном, що відповідає функції $f(x)$ й заданим вузлам, називають функцію $s(x)$, яка задовольняє наступні умови:

а) на кожному сегменті $\left[x_{i-1},\ x_i\right],\ i = \overline{1,\ n}$ функція $s(x)$ є многочленом третього степеня;

б) функція $s(x)$, а також її перша й друга похідні неперервні на [*a, b*];

в) $s(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0,\ n}.$

Остання умова називається умовою інтерполяції.

На кожному з відрізків $\left[x_{i-1},\ x_i\right],\ i=\overline{1,\ n}$ будемо шукати функцію $s(x)=s_i(x)$ у вигляді многочлена третього степеня

$$s_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+\frac{c_i}{2}(x-x_i)^2+\frac{d_i}{6}(x-x_i)^3 \tag{6.1}$$

$$x_{i-1}\le x\le x_i,\ i=\overline{1,\ n},$$

де $a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i$ – коефіцієнти, які належить визначити.

З'ясуємо зміст введених коефіцієнтів. Маємо

$$s'_i(x)=b_i+c_i(x-x_i)+\frac{d_i}{2}(x-x_i)^2,$$
$$s''_i(x)=c_i+d_i(x-x_i),\ s'''_i(x)=d_i,$$

тому $a_i=s_i(x_i),\ b_i=s'_i(x_i),\ c_i=s''_i(x_i),\ d_i=s'''_i(x_i).$

З умов інтерполяції $s_i(x_i)=f(x_i),\ i=\overline{1,\ n},$ отримуємо, що

$$a_i=f(x_i),\ i=\overline{1,\ n}.$$

Довизначимо, крім того , $a_0=f(x_0)$.

Далі, вимога неперервності функції $s(x)$ приводить до умов

$$s_i(x_i)=s_{i+1}(x_i),\ i=\overline{1,\ n-1}.$$

Звідси, беручи до уваги вирази для функцій $s_i(x)$, отримуємо при $i=\overline{0,\ n-1}$ рівняння

$$a_i=a_{i+1}+b_{i+1}(x_i-x_{i+1})+\frac{c_{i+1}}{2}(x_i-x_{i+1})^2+\frac{d_{i+1}}{6}(x_i-x_{i+1})^3.$$

Позначивши $h_i=x_i-x_{i-1}$, перепишемо ці рівняння у вигляді

$$h_ib_i-\frac{h_i^2}{2}c_i+\frac{h_i^3}{6}d_i=f_i-f_{i-1},\ i=\overline{1,\ n}. \tag{6.2}$$

Умови неперервності першої похідної

$$s'_i(x_i)=s'_{i+1}(x_i),\ i=\overline{1,\ n-1},$$

приводять до рівнянь

$$c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_i - b_{i-1}, \ i = \overline{2, \ n}. \qquad (6.3)$$

З умов неперервності другої похідної отримуємо рівняння

$$d_i h_i = c_i - c_{i-1}, \ i = \overline{2, \ n}\,. \qquad (6.4)$$

Об'єднуючи (6.2) – (6.4) , отримаємо систему $3n-2$ рівнянь відносно $3n$ невідомих $b_i, \ c_i, \ d_i, \ i = \overline{1, \ n}.$

Дві умови, яких не вистачає, отримують, задаючи ті чи інші граничні умови для $s(x)$.

Припустимо, наприклад, що функція $f(x)$ задовольняє умови $f''(a) = f''(b) = 0.$ Тоді природним є вимагати, щоб

$$s''(a) = s''(b) = 0.$$

Звідси отримуємо $s_1''(x_0) = 0, \ s_n''(x_n) = 0,$

тобто $c_1 - d_1 h_1 = 0, \ c_n = 0.$

Остаточно для визначення коефіцієнтів c_i маємо систему рівнянь

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right) \qquad (6.5)$$

$$i = \overline{1, \ n-1}, \ \ c_0 = c_n = 0$$

Внаслідок діагонального переважання система (6.5) має єдиний розв'язок. Оскільки матриця системи є тридіагональною, розв'язок можна знайти методом прогону. За знайденими коефіцієнтами c_i , коефіцієнти d_i і b_i визначаємо за формулами

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \ \ b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \qquad (6.6)$$

$i = \overline{1, \ n}$

Таким чином, існує єдиний кубічний сплайн, що визначається умовами а) - в) і граничними умовами $s''(a) = s''(b) = 0$. Визначений в такий спосіб сплайн називається *натуральним кубічним сплайном*. Зазначимо, що можна розглядати й інші граничні умови.

2. Властивості кінцевих й розподілених різниць.

7. Кінцеві та розподілені різниці

Нехай значення $f(x)$ визначені у *рівновіддалених точках*, тобто

$$x_k = x_0 + kh,$$

де k – ціле, $h > 0$.

Величина

$$\Delta f_k = f(x_k+h) - f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f_{k+1} - f_k \qquad (10)$$

називається кінцевою різницею (КР) першого порядку функції f у точці x_k, а

$$\Delta^2 f_k = \Delta(\Delta f_k) = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k \qquad (11)$$

є кінцева різниця другого порядку в точці x_k. Взагалі, кінцева різниця n-го порядку функції f у точці x_k визначається за рекурентним співвідношенням:

$$\Delta^n f_k = \Delta(\Delta^{n-1} f_k) = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k, \qquad (12)$$

де $n \geq 1$, $\Delta^0 f_k = f_k$

КР надаються у вигляді таблиці:

x_0	f_0				
x_1	f_1	Δf_0			
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$		

x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	
x_4	f_4	Δf_3	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_0$

Загалом кажучи, КР, є функціями.

Приклад 4.

Побудувати кінцеві різниці для $f(x) = x^3$ із кроком $h = 1$.

$\Delta f = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$

$\Delta^2 f = [\ 3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1] - (3x^2 + 3 + 1) = 6x + 6$

$\Delta^3 f = [\ 6(x+1) + 6] - (6x + 6) = 6$

$\Delta^k f = 0$ *при* $k > 3$

Взагалі, якщо функція

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_0$$

є поліномом n-го ступеня, то

$$\Delta^n f \ = \ n!\, a_0 h^n \ = \ const$$

Властивості КР багато в чому аналогічні властивостям похідних. Так, по-перше: кінцеві різниці I-го порядку від багаточлена ступеня n, є багаточлен ступеня (n - 1), а кінцеві різниці n-го порядку від цього багаточлена постійні. По-друге:

$$\Delta^m (C_1 f \pm C_2 g) = C_1 \Delta^m f \pm C_2 \Delta^m g.$$

КР і похідна m-го порядку зв'язані співвідношенням

$$\Delta^m f_k = h^m f^{(m)}(\xi),\ \xi\ 0\,[x_k,\ x_{k+m}]$$

Нарешті, якщо $x_k = x_0 + kh$; $k = 0,1,\ldots m$; $h > 0$, то

$$f(x_0, x_1, \ldots x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n!\, h^n}$$

При обчислені КР, виходячи з наближених значень функції, похибка КР зростає. Так, якщо похибка табличного значення функції дорівнює 0.5 одиниці останнього розряду, похибка КР I-го порядку складе одиницю останнього розряду, КР II-го порядку – дві одиниці, III-го – 4 одиниці й т.д. Похибка *m*-го порядку складе 2^{m-1} одиниць останнього розряду. Тому, якщо на деякій ділянці таблиці всі різниці *m*-го порядку відрізняються не більше ніж на 2^m одиниць останнього розряду, то такі різниці вважаються практично постійними. Обчислювати різниці більш високих порядків не має сенсу.

Розподілені різниці

Нехай $x_0, x_1, \ldots x_k, \ldots$ довільні вузли осі x, причому $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Значення $f(x_0), f(x_1) \ldots$ функції f називаються розділеними різницями 0-го порядку. Число

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

називається розділеною різницею 1-го порядку функції f. Очевидно що

$$f(x_0, x_1) = f(x_1, x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0},$$

тобто розділена різниця 1-го порядку є *симетричною* функцією аргументів x_0 й x_1.

Розподілена різниця n-го порядку визначається через розподілені різниці $(n-1)$-го порядку в такий спосіб:

$$f(x_0, x_1,\ldots,x_n) = \frac{f(x_1, x_2,\ldots,x_n) - f(x_0, x_1,\ldots,x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

Таблиця розподілених різниць має вигляд:

x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0, x_1)$		
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2)$	
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$
x_4	$f(x_4)$	$f(x_3, x_4)$	$f(x_2, x_3, x_4)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$

Властивості розділеної різниці аналогічні властивостям КР.

II. Практична частина

За допомогою методу послідовних наближень обчислити корінь рівняння

```
3.0 / (2 + cos(x)) + x/1.5 = 0
```

з точністю не гірше за 10^{-7}.