Екзаменаційний білет № 6

I. Теоретична частина

1. Розв’язок рівнянь з одним невідомим методом дотичних.

6. Метод дотичних (метод Ньютона).

Нехай, корінь рівняння $f(x) = 0$ відокремлений на [a, b], причому $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервні і зберігають постійні знаки при $a \le x \le b$. Знайшовши яке-небудь початкове наближення кореня

$x_n \approx \xi$ $(a \le x_n \le b)$, ми можемо уточнити його за методом Ньютона в такий спосіб. Припустимо,

$$\xi = x_n + h_n, \qquad (7)$$

де h_n вважаємо малою величиною. Звідси, застосовуючи формулу Тейлора, одержимо

$$0 = f(x_n + h_n) \approx f(x_n) + h_n + f'(x_n)$$

отже

$$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

тоді скориставшись (6) одержимо наступне один по одному наближення кореня

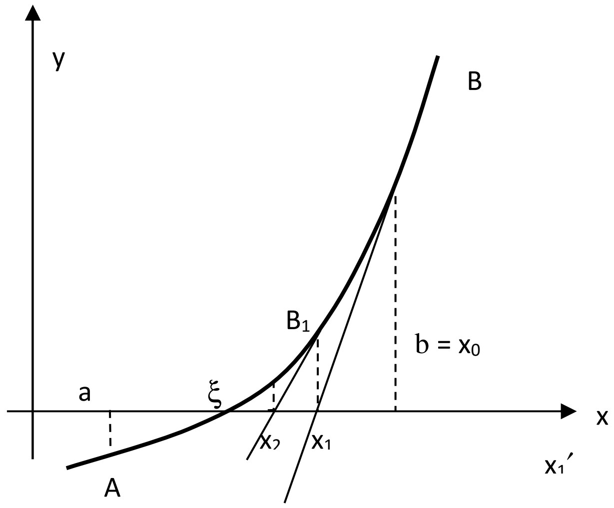
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \qquad (8)$$

Геометрично цей метод еквівалентний заміні невеликої дуги $y = f(x)$, дотичною, проведеною в деякій точці цієї дуги. Припустимо для визначеності, що $f''(x) > 0$ при $a \le x \le b$ і $f(b) > 0$. Виберемо, наприклад, початкове наближення $x_0 = b$, для якого $f(x_0) * f''(x_0) > 0$. Очевидно, що рівняння дотичної в точці $B(x_n, f(x_n))$ при $n = 0, 1, 2\dots$ є

$$y - f(x_n) = f'(x_n) * (x - x_n),$$

поклавши $y = 0$, а $x = x_{n+1}$, отримаємо формулу (8).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Якщо в цьому випадку покласти $x_0 = a$ (тобто, $f(x_0)*f''(x_0) < 0$), то провівши дотичну до $y = f(x)$ у точці A [a, f (a)], одержимо точку x_1' що лежить поза [a, b]. Тому при використанні методу Ньютона, слід дотримуватися наступного правила:

Як вихідна крапка x_0 вибирається той кінець [a, b], якому відповідає ордината того ж знаку, що й знак $f''(x)$.

Для оцінки точності зручно користуватися загальною формулою

$$\left|\xi - x_n\right| \le \frac{\left|f(x_n)\right|}{m_1}$$

Ще одна формула для оцінки точності. Застосовуючи формулу Тейлора, маємо:

$$f(x_n)=f[x_{n-1}+(x_n-x_{n-1})]=f(x_{n-1})+f'(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})+\frac{1}{2}f''(\xi_{n-1})(x_n-x_{n-1}), \quad (9)$$

де $\xi_{n-1}\in(x_{n-1},x_n)$, оскільки в силу визначення наближення x_n маємо $x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

$f(x_{n-1})+f'(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})=0$, то з (9) знаходимо

$$\left|f(x_n)\right|\le\frac{1}{2}m_2(x_n-x_{n-1})^2,$$

де m_2 найбільше значення $|f''(x)|$ на [a,b]. Отже, на основі (8) отримуємо:

$$\left|\xi-x_n\right|\le\frac{m_2}{2m_1}(x_n-x_{n-1})^2, \qquad (10)$$

$m_2\ge\max\ \left|f''(x)\right|,\ \ x\in$ [a, b].

2. Численне інтегрування: узагальнена формула Симпсона.

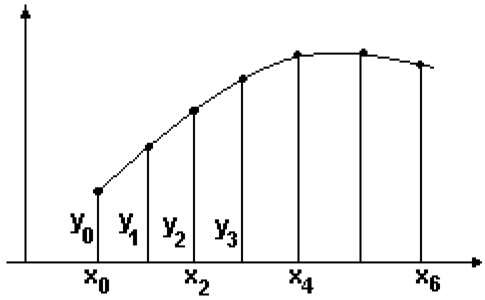
Узагальнена формула Симпсона.

Нехай $n=2m$, тобто є парним числом і $y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,\ldots,n)$, а

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{2m}$$

Застосуємо формулу Симпсона до кожного подвоєного проміжку $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, …

… ,$[x_{2m-2}, x_{2m}]$ с кроком $2h$, тобто



Тоді маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Звідси *узагальнена формула Симпсона* дорівнює:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})].$$

Позначивши

$$\sigma_1 = y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}$$
$$\sigma_2 = y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m}$$

Перепишемо останню формулу у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2].$$

Залишковий член формули дорівнює:

$$R = -\frac{(b-a)h^4}{150} y^{IV}(\xi).$$

II. Практична частина

За допомогою метод прогону обчислити корені системи лінійних рівнянь

```
107x0 + 78x1 + 0x2 + 0x3 + 0x4  = 2706

19x0 + 11x1 + 82x2 + 0x3 + 0x4  = 862

0x0 + 20x1 + 59x2 + 20x3 + 0x4  = 915

0x0 + 0x1 + 37x2 + 72x3 + 96x4  = 3809

0x0 + 0x1 + 0x2 + 109x3 + 223x4  = 7195
```