Екзаменаційний білет № 5

I. Теоретична частина

1. Розв’язок рівнянь з одним невідомим методом бісекції.

4. Метод поділу проміжку навпіл (метод бісекції)

Відрізок [a, b], що містить корінь, ділиться навпіл і надалі розглядається та його половина, що містить корінь, тобто інтервал, де функція *f(x)* має різні знаки на його кінцях. Для знаходження наближеного значення x_n з точністю ε, процес ділення навпіл триває доти, поки не виконається нерівність:

$$b_n - a_n = \frac{(b-a)}{2^n} \le 2\varepsilon ,$$

де $[a_n, b_n]$ – відрізок після *n*-го ділення, що містить корінь, тобто

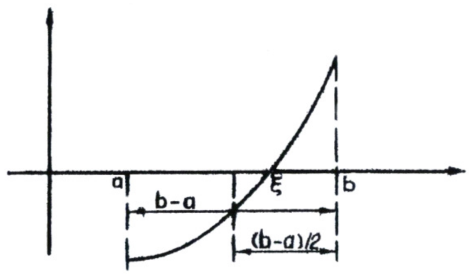
$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

Після цього покладемо

$$x_n = \frac{(a_n + b_n)}{2} .$$

Тоді, очевидно, $\left| x_n - \zeta \right| \le .\quad \zeta$

Геометрична інтерпретація методу має вигляд



Часом вигідніше користуватися іншою оцінкою отриманої точності

$$\left|x_n - \bar{x}\right| \le \frac{\left|f(x_n)\right|}{m_1}, \qquad (2)$$

де $0 \prec m_1 \le \left|f'(x)\right|$ для $x \in [a,b]$. Якщо на [a, b] m_1 виявляється рівним нулю, то відрізок [a, b] треба звузити. Як тільки виконується нерівність

$$\frac{1}{m_1} \cdot \left|f(x_n)\right| \le \varepsilon,$$

процес ділення навпіл закінчується.

Перевага другої оцінки полягає в тому, що добуток *f(a)* · *f(b)* може бути машинним нулем, що унеможливлює продовження процесу поділу навпіл.

Ця оцінка базується на наступних міркуваннях. Скористуємось теоремою Лагранжа про середнє

$$f(\bar{x}) - f(x_n) = (\bar{x} - x_n) \cdot f'(c),$$

де *c* – проміжна між $\bar{x}$ і x_n точка, тобто *c*∈*(a, b).* Звідси, оскільки $f(\bar{x}) = 0$ і $f'(c) \ge m_1$, маємо

$$\left|f(x_n) \ge \left|\bar{x} - x_n\right|\right| \cdot m_1,$$

або інакше

$$\left|\bar{x} - x_n\right| \le \frac{\left|f(x_n\right|}{m_1}.$$

2. Чисельне интегрування: узагальнена формула трапецій.

Узагальнена формула трапецій.

Для обчислення інтеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

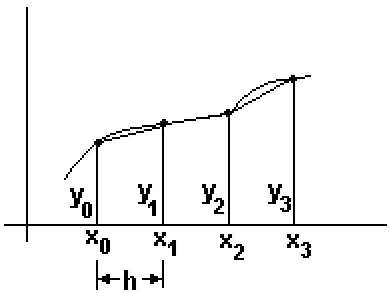
розділимо інтервал інтегрування [a,b] на n рівних частин $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots[x_{n-1}, x_n]$ і застосуємо до кожного з них формулу трапецій. Вважаючи $h = \frac{b-a}{n}$ й позначивши $f(x_i)$ через y_i маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

або

$$\int_a^b f(x)dx = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + + y_{n-1} + \frac{y_n}{2})$$

Геометрично це еквівалентно заміні кривої $y = f(x)$ ламаною лінією.



Залишковий член цієї формули має вигляд:

$$|R_n| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

II. Практична частина

Побудувати таблицю інтегральної кривої звичайного диференціального рівняння

`y'(2 - x) = 5`

з початковими умовами `y(0) = 0` на проміжку `a = 0, b = 1.9` з кроком `(b - a)/5` і з точністю не гірше за 10^{-4}.