ИДЗ-10.1

1.5. Найти область определения указанной функции.

$$z = \frac{2}{6 - x^2 - y^2}$$

Решение: Область определения:

$$6 - x^2 - y^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \neq \left(\sqrt{6}\right)^2$$

Ответ: Область определения: все точки координатной плоскости XOY кроме окружности $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2$ (с центром в начале координат радиуса $\sqrt{6}$).

2. Найти частные производные и частные дифференциалы данной функции.

2.5. $z = \sin\sqrt{\frac{y}{x^3}}$

Найдем частные производные:

$$z'_x = \left(\sin\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)'_x = \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}} \cdot \left(\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)'_x = \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}} \cdot \sqrt{y} \cdot \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'_x =$$

$$= \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}} \cdot \sqrt{y} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{x^5}} \cdot \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}}$$

$$z'_y = \left(\sin\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)'_y = \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}} \cdot \left(\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)'_y = \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \left(\sqrt{y}\right)'_y =$$

$$= \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3 y}} \cdot \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}}$$

Частные дифференциалы:

$$dz'_x = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{x^5}} \cdot \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}}dx, \quad dz'_y = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3 y}} \cdot \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}}dy$$

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

3.5. $f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$, $M_0(1,0,1)$

Решение:

$$f'_x = \left(\frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \cdot (x)'_x = \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

$$f'_x(M_0) = f'_x(1,0,1) = \frac{1}{1} = 1$$

© http://mathprofi.ru Высшая математика – просто и доступно!
Приветствуется свободное распространение данного файла, пожалуйста, не убирайте копирайты

$$f'_y=\left(\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)'_y=x\cdot\left(\left(y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'_y=x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(y^2+z^2\right)'_y=$$

$$=-\frac{x}{2\sqrt{\left(y^2+z^2\right)^3}}\cdot 2y=-\frac{xy}{\sqrt{\left(y^2+z^2\right)^3}}$$

$$f'_y(M_0)=f'_y(1,0,1)=-\frac{0}{1}=0$$

$$f'_z=\left(\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)'_z=x\cdot\left(\left(y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'_z=x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(y^2+z^2\right)'_z=$$

$$=-\frac{x}{2\sqrt{\left(y^2+z^2\right)^3}}\cdot 2z=-\frac{xz}{\sqrt{\left(y^2+z^2\right)^3}}$$

$$f'_z(M_0)=f'_z(1,0,1)=\frac{-1}{1}=-1$$

4. Найти полные дифференциалы указанных функций.

4.5. $z=5xy^4+2x^2y^7$

Вычислим частные производные первого порядка:

$$z'_x=\left(5xy^4+2x^2y^7\right)'_x=5y^4(x)'_x+2y^7\left(x^2\right)'_x=5y^4\cdot 1+2y^7\cdot 2x=5y^4+4xy^7$$

$$z'_y=\left(5xy^4+2x^2y^7\right)'_y=5x\left(y^4\right)'_y+2x^2\left(y^7\right)'_y=5x\cdot 4y^3+2x^2\cdot 7y^6=20xy^3+14x^2y^6$$

Полный дифференциал:

$$dz=z'_xdx+z'_ydy=\left(5y^4+4xy^7\right)dx+\left(20xy^3+14x^2y^6\right)dy$$

5. Вычислить значение производной сложной функции $u=u(x,y)$, где $x=x(t)$, $y=y(t)$, при $t=t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

5.5. $u=x^2e^y$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t_0=\pi$.

Найдем производную сложной функции: $u'_t=u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t$.

В данном случае:

$$u'_x=\left(x^2e^y\right)'_x=e^y\cdot\left(x^2\right)'_x=2xe^y$$

$$u'_y=\left(x^2e^y\right)'_y=x^2\cdot\left(e^y\right)'_y=x^2e^y$$

$$x'_t=-\sin t,\quad y'_t=\cos t$$

Таким образом:

$$u'_t=2xe^y\cdot(-\sin t)+x^2e^y\cdot\cos t=2\cos t\cdot e^{\sin t}\cdot(-\sin t)+\cos^2 t\cdot e^{\sin t}\cdot\cos t$$

$$u'_t(\pi)=-2\cdot e^0\cdot 0-e^0=0-1=-1$$

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

6.5. $x^2+y^2+z^2-z-4=0$, $M_0(1,1,-1)$

© http://mathprofi.ru Высшая математика – просто и доступно!
Приветствуется свободное распространение данного файла, пожалуйста, не убирайте копирайты

$$\left(x^2+y^2+z^2-z-4\right)'_x=0$$
$$2x+0+2zz'_x-z'_x-0=0$$
$$(2z-1)z'_x=-2x$$
$$z'_x=\frac{-2x}{2z-1}$$
$$z'_x(M_0)=z'_x(1,1,-1)=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}\approx 0{,}67$$

$$\left(x^2+y^2+z^2-z-4\right)'_y=0$$
$$0+2y+2zz'_y-z'_y-0=0$$
$$(2z-1)z'_y=-2y$$
$$z'_y=\frac{-2y}{2z-1}$$
$$z'_y(M_0)=z'_y(1,1,-1)=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}\approx 0{,}67$$

ИДЗ 10-2.

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

3.5. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u$, $u=\frac{xy}{x+y}$

Найдем частные производные функции u.

$$u'_x=\left(\frac{xy}{x+y}\right)'_x=y\cdot\frac{(x)'_x(x+y)-x(x+y)'_x}{(x+y)^2}=y\cdot\frac{x+y-x}{(x+y)^2}=\frac{y^2}{(x+y)^2}$$
$$u'_y=\left(\frac{xy}{x+y}\right)'_y=x\cdot\frac{(y)'_y(x+y)-y(x+y)'_y}{(x+y)^2}=x\cdot\frac{x+y-y}{(x+y)^2}=\frac{x^2}{(x+y)^2}$$

Подставим u'_x, u'_y, в левую часть уравнения:

$$x\cdot\frac{y^2}{(x+y)^2}+y\cdot\frac{x^2}{(x+y)^2}=\frac{xy^2+yx^2}{(x+y)^2}=\frac{xy(y+x)}{(x+y)^2}=\frac{xy}{(x+y)}=u$$

В правой части исходного уравнения находится $2u$

Таким образом, данная функция не удовлетворяет данному уравнению.

4. Исследовать на экстремум функцию.

$$z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$$

Решение: Найдем критические точки:

$$\begin{cases} z'_x=3x^2-6y-39=0 \\ z'_y=2y-6x+18=0 \end{cases}\Rightarrow y=3x-9 \text{ – подставим в первое уравнение:}$$

$$x^2-2(3x-9)-13=0$$

$x^2 - 6x + 5 = 0$
$(x-1)(x-5) = 0$
$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 3 - 9 = -6$
$x_2 = 5 \Rightarrow y_1 = 15 - 9 = 6$
$M_1(1;-6)$, $M_2(5;6)$ – стационарные точки.

Проверим выполнение достаточного условия экстремума:
$z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = -6 = const$, $z''_{yy} = 2 = const$

1) $M_1(1;-6)$
$z''_{xx}(M_1) = z''_{xx}(1;-6) = 6$
$z''_{xy}(M_1) = -6$
$z''_{yy}(M_1) = 2$

$z''_{xx}(M_1) \cdot z''_{yy}(M_1) - \left(z''_{xy}(M_1)\right)^2 = 6 \cdot 2 - (-6)^2 = 12 - 36 = -24 < 0$, значит, в точке $M_1(1;-6)$ нет экстремума

2) $M_2(5;6)$
$z''_{xx}(M_2) = z''_{xx}(5;6) = 30$
$z''_{xy}(M_2) = -6$
$z''_{yy}(M_2) = 2$

$z''_{xx}(M_2) \cdot z''_{yy}(M_2) - \left(z''_{xy}(M_2)\right)^2 = 30 \cdot 2 - (-6)^2 = 60 - 36 = 24 > 0$, значит, в точке $M_2(5;6)$ существует экстремум, так как $z''_{xx}(M_2) > 0$, то это – минимум:
$\min z = z(M_2) = z(5;6) = 125 + 36 - 180 - 195 + 108 + 20 = -86$

Ответ: $\min z = z(5;6) = -86$.

© http://mathprofi.ru Высшая математика – просто и доступно!
Приветствуется свободное распространение данного файла, пожалуйста, не убирайте копирайты