ИНФОРМАЦИОННО-КОНСУЛЬТАЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

ТФКП

теория функций комплексного переменного

Консультационное пособие для школьников и студентов в решении задач с примерами решённых задач из задачника автора Чудесенко В.Ф.

Вариант 6

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz$$

Москва 2003

/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

ТФКП. Вариант 6.

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\ldots,n-1;\quad z\neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$:

$$\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\qquad \sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}=\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\mathrm{Ln}(1+i)$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Подставим в эту формулу значения z:

$$\mathrm{Ln}\,(1+i)=\ln|1+i|+i\,\mathrm{Arg}\,(1+i)=\ln\sqrt{2}+i(\arg(1+i)+2\pi k),$$

$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Вычислим значения логарифма и аргумента:

$$\mathrm{Ln}\,(1+i)\approx 0.347+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Ответ: $\mathrm{Ln}\,(1+i)\approx 0{,}347+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arcctg}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$$

Функция Arcctg является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arcctg}(z)=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Подставим вместо z значение $\frac{4+3i}{5}$:

$$\mathrm{Arcctg}\left(\frac{4+3i}{5}\right)=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{\frac{4+3i}{5}-i}{\frac{4+3i}{5}+i}=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{4+3i-5i}{4+3i+5i}=$$

$$=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{4-2i}{4+8i}=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{4i+2}{2i(2+4i)}=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1}{2i}=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(-\frac{i}{2}\right)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\, k=0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(-\frac{i}{2}\right)=\frac{i}{2}[\ln\left|-\frac{i}{2}\right|+i(\arg\left(-\frac{i}{2}\right)+2\pi k)]=$$

$$=\frac{i}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left[\arg\left(-\frac{i}{2}\right)+2\pi k\right]\approx-\frac{i}{2}\cdot0{,}693-\frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$$

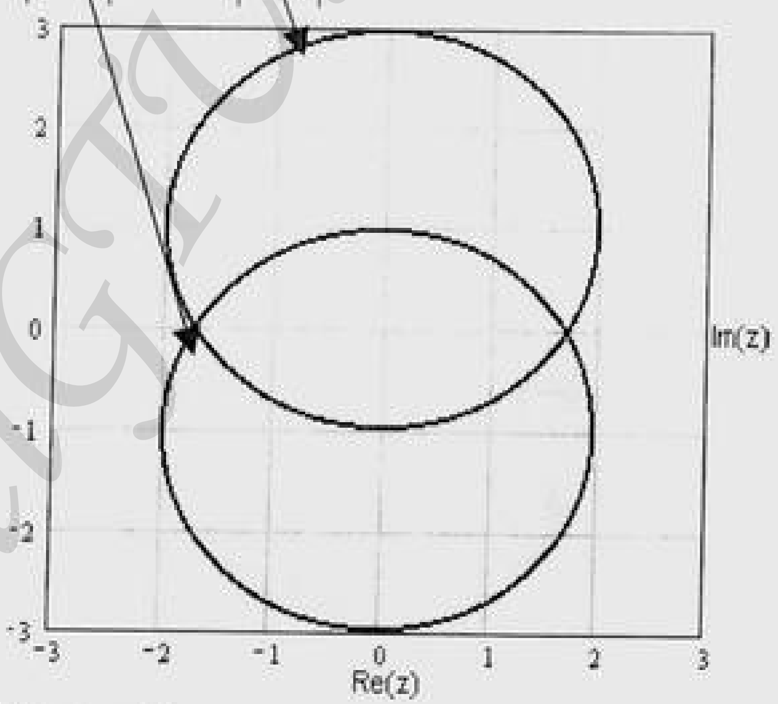
$k=0,\pm1,\pm2,...$

Ответ: $\mathrm{Arcctg}\left(\frac{4+3i}{5}\right)\approx-\frac{i}{2}\cdot0{,}693-\frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right], k=0,\pm1,\pm2,...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z+i|\le 2,\quad |z-i|>2$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z=-4\mathrm{tg}\,t-i2\sec t$

Уравнение вида $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид $x=x(t)$, $y=y(t)$. В нашем случае:

$x(t)=-4\mathrm{tg}\,t;\quad y(t)=-2\sec t$

Выразим параметр t через x и y:

$$x=-4\mathrm{tg}\,t\Rightarrow \mathrm{tg}\,t=-\frac{x}{4}\Rightarrow t=-\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$y=-2\sec t=-\frac{2}{\cos t}\Rightarrow \cos t=-\frac{2}{y}\Rightarrow t=\arccos\left(-\frac{2}{y}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\arccos\left(-\frac{2}{y}\right)=-\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{4}\right)\Rightarrow\arccos\left(-\frac{2}{y}\right)+\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{4}\right)=0$$

Ответ: $\arccos\left(-\frac{2}{y}\right)+\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{4}\right)=0$

ТФКП. Вариант 6.

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной действительной части u(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}\cos y$$

$$f(1) = 1 + i$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = -\frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-(x-iy)^2}{(x+iy)^2(x-iy)^2} =$$

$$= -\frac{1}{(x+iy)^2} = -z^{-2}$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int(-z^{-2})dz = z^{-1} + C$$

Определим константу C:

$$f(0) = 1^{-1} + C = 1 + i \Rightarrow C = i$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = z^{-1} + i$$

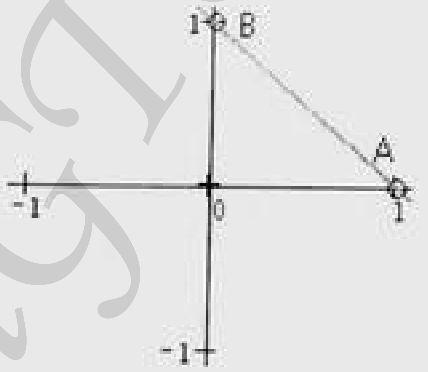
Ответ: $f(z) = z^{-1} + i$

ТФКП. Вариант 6.

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_{AB}(12z^5 + 4z^3 + 1)dz;\ AB - \text{отрезок прямой}: z_A = 1, z_B = i$$



Покажем прямую, по которой должно проходить интегрирование и проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y), где z = x + iy:

$$f(x,y) = \underbrace{12x^5 - 120x^3y^2 + 60xy^4 + 4x^3 - 12xy^2 + 1}_{u(x,y)} +$$

$$+ i(\underbrace{60x^4y - 120x^2y^3 + 12y^5 + 12x^2y - 4y^3}_{v(x,y)})$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 60x^4 - 360x^2y^2 + 60y^4 + 12x^2 - 12y^2;$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 60x^4 - 360x^2y^2 + 60y^4 + 12x^2 - 12y^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -240x^3y + 240xy^3 - 24xy; \frac{\partial v}{\partial x} = 240x^3y - 240xy^3 + 24xy; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются, следовательно, функция является аналитической. Тогда результат от пути интегрирования не зависит:

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_1^i (12z^5 + 4z^3 + 1)dz = 2z^6 + z^4 + z\,\Big|_1^i = -5 + i$$

Ответ: $\int_{AB} f(z)dz = -5 + i$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}=\frac{3(z-12)}{z^2(z+6)(z-3)}=\frac{3}{z^2}\cdot\frac{z-12}{(z+6)(z-3)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

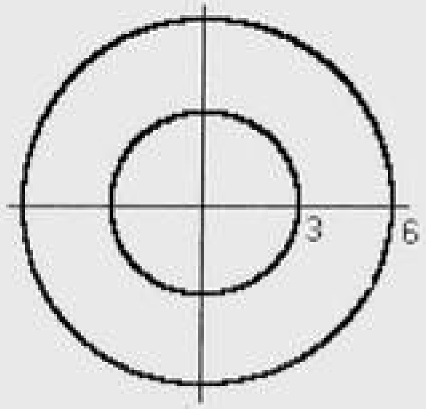
$$\frac{z-12}{(z+6)(z-3)}=\frac{A}{z+6}+\frac{B}{z-3}=\frac{Az-3A+Bz+6B}{(z-3)(z+6)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=2;B=-1\}\Rightarrow\frac{z-12}{(z+6)(z-3)}=\frac{2}{z+6}-\frac{1}{z-3}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{3}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+6}-\frac{1}{z-3}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=3; z=-6$



Рассмотрим область $|z|<3$:

$$f(z)=\frac{3}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+6}-\frac{1}{z-3}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{6}}+\frac{1}{1-\frac{z}{3}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{6}+\frac{z^2}{36}-\frac{z^3}{216}+...\right)+\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^3}{27}+...\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}-\frac{z}{216}+...\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{9}+\frac{z}{27}+...\right)$$

Рассмотрим область $3<|z|<6$:

$$f(z)=\frac{3}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+6}-\frac{1}{z-3}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{6}}+\frac{3}{z(1-\frac{3}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{6}+\frac{z^2}{36}-\frac{z^3}{216}+...\right)+\left(\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+\frac{27}{z^3}+\frac{81}{z^4}+...\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}-\frac{z}{216}+...\right)+\left(\frac{3}{z^3}+\frac{9}{z^4}+\frac{27}{z^5}+\frac{81}{z^6}+...\right)$$

Рассмотрим область $|z|>6$:

$$f(z)=\frac{3}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+6}-\frac{1}{z-3}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{6}{z(1+\frac{6}{z})}+\frac{3}{z(1-\frac{3}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{6}{z}-\frac{36}{z^2}+\frac{216}{z^3}-\frac{1296}{z^4}+...\right)+\left(\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+\frac{27}{z^3}+\frac{81}{z^4}+...\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{6}{z^3}-\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}-\frac{1296}{z^6}+...\right)+\left(\frac{3}{z^3}+\frac{9}{z^4}+\frac{27}{z^5}+\frac{81}{z^6}+...\right)$$

Ответ:

$$|z|<3: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}-\frac{z}{216}+...\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{9}+\frac{z}{27}+...\right)$$

$$3<|z|<6: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}-\frac{z}{216}+...\right)+\left(\frac{3}{z^3}+\frac{9}{z^4}+\frac{27}{z^5}+\frac{81}{z^6}+...\right)$$

$$|z|>6: f(z)=\left(\frac{6}{z^3}-\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}-\frac{1296}{z^6}+...\right)+\left(\frac{3}{z^3}+\frac{9}{z^4}+\frac{27}{z^5}+\frac{81}{z^6}+...\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z-z_0.

$$f(z)=\frac{z-1}{z(z+1)},z_0=2-i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z-1}{z(z+1)}=\frac{2}{z+1}-\frac{1}{z}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{2}{z+1}=2\cdot\frac{1}{z+1}=2\cdot\frac{1}{(z-z_0)+3-i}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(3-i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-z_0)+2-i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(3-i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2-i)^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(3-i)^{n+1}}-\frac{1}{(2-i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(3-i)^{n+1}}-\frac{1}{(2-i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=\sin\frac{5z}{z-2i},z_0=2i$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-2i;\sin\frac{5z}{z-2i}=\sin\frac{5z'+10i}{z'}=\sin\left(5+\frac{10i}{z'}\right)=\sin 5\cos\frac{10i}{z'}+\cos 5\sin\frac{10i}{z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=\sin 5\cos\frac{10i}{z'}+\cos 5\sin\frac{10i}{z'}=\left(1+\frac{10^2}{2!z'^2}+\frac{10^4}{4!z'^4}+\frac{10^6}{6!z'^6}+...\right)\sin 5+$$

$$+\left(\frac{10i}{z'}+\frac{10^3 i}{3!z'^3}+\frac{10^5 i}{5!z'^5}+\frac{10^7 i}{7!z'^7}+...\right)\cos 5=\left(\sin 5+\frac{10^2\sin 5}{2!z'^2}+\frac{10^4\sin 5}{4!z'^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{10^6\sin 5}{6!z'^6}+...\right)+\left(\frac{10i\cos 5}{z'}+\frac{10^3 i\cos 5}{3!z'^3}+\frac{10^5 i\cos 5}{5!z'^5}+\frac{10^7 i\cos 5}{7!z'^7}+...\right)=$$

$$=\sin 5+\frac{10i\cos 5}{z'}+\frac{10^2\sin 5}{2!z'^2}+\frac{10^3 i\cos 5}{3!z'^3}+\frac{10^4\sin 5}{4!z'^4}+\frac{10^5 i\cos 5}{5!z'^5}+...$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2i$:

$$f(z)=\sin 5+\frac{10i\cos 5}{z'}+\frac{10^2\sin 5}{2!z'^2}+\frac{10^3 i\cos 5}{3!z'^3}+\frac{10^4\sin 5}{4!z'^4}+$$

$$+\frac{10^5 i\cos 5}{5!z'^5}+...$$

Ответ:

$$f(z)=\sin 5+\frac{10i\cos 5}{z'}+\frac{10^2\sin 5}{2!z'^2}+\frac{10^3 i\cos 5}{3!z'^3}+\frac{10^4\sin 5}{4!z'^4}+$$

$$+\frac{10^5 i\cos 5}{5!z'^5}+...$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{ch5z-1}{e^z-1-z}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{ch5z-1}{e^z-1-z}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{aligned}g(z)&=ch5z-1;\\ h(z)&=e^z-1-z;\end{aligned}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g'(z)=5sh5z; g'(0)=5sh0=0$$

$$g''(z)=25ch5z; g''(0)=25ch0=25$$

$$h'(z)=e^z-1; h'(0)=e^0-1=0$$

$$h''(z)=e^z; h''(0)=e^0=1;$$

Так как порядки производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций, находящихся в числителе и знаменателе, равны, то точка z = 0 является устранимой особой точкой.

Ответ: Точка z = 0 является устранимой особой точкой для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\frac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$$

Одной из изолированных особых точек является z = i. Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)};\quad \begin{aligned}g(z)&=z^2+1;\\ h(z)&=(z-i)^2(z^2+4)=z^4-2iz^3+3z^2-8iz-4;\end{aligned}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = i:

$$g'(z)=2z; g'(i)=2i$$

$$h'(z)=4z^3-6iz^2+6z-8i; h'(i)=-4i+6i+6i-8i=0$$

$$h''(z)=12z^2-12iz+6; h''(i)=-12+12+6=6$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = i выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = i является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это 2 – 1 = 1.

Еще одной изолированной точкой является z = 2i.

Для каждой из функций g(z) и h(z) найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 2i:

$$g(z)=z^2+1; g(2i)=-4+1=-3$$

$$h'(z)=4z^3-6iz^2+6z-8i; h'(i)=-32i+24i+12i-8i=-4i$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 2i выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 2i является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это 1 – 0 = 1.

Ответ: Точка z = i для данной функции является полюсом 1-го порядка. Точка z = 2i также является полюсом 1-го порядка.

Задача 13
Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-3/2|=2} \underbrace{\frac{z(\sin z+2)}{\sin z}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = \pi k,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадают только точки $z = 0$ и $z = \pi$.
Точка $z_1 = 0$ является устранимой особой точкой, следовательно, вычет в точке z_1 равен нулю.
Точка $z_2 = \pi$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to\pi}[f(z)(z-\pi)] = \lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)z(\sin z+2)}{\sin z} = \begin{Bmatrix} t = z-\pi \\ z = t+\pi \end{Bmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t(t+\pi)(\sin(t+\pi)+2)}{\sin(t+\pi)} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t+\pi)(2-\sin t)}{-\sin t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t(t+\pi)(2-\sin t)}{-t} = \lim_{t\to 0}[(t+\pi)(\sin t-2)] = -2\pi$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot (0-2\pi) = -4\pi^2 i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z} dz = -4\pi^2 i$

Задача 14
Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=2} \underbrace{\frac{1-\cos z^2}{z^2}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$\frac{1-\cos z^2}{z^2} = \frac{1-1+\frac{z^4}{2!}-\frac{z^8}{4!}+\frac{z^{12}}{6!}-\ldots}{z^2} = \frac{z^2}{2!}-\frac{z^6}{4!}+\frac{z^{10}}{6!}-\frac{z^{14}}{8!}+\ldots$$

Получившийся ряд не имеет главной части. Из этого следует, что особая точка $z = 0$ представляет собой устранимую особую точку. Вычет в этой точке всегда равен нулю:

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2} dz = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2} dz = 0$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=0,4} \underbrace{\frac{e^{4z}-\cos 7z}{z\,\mathrm{sh}2\pi z}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции $z = ik/2,\ k \in Z$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{e^{4z}-\cos 7z}{z\,\mathrm{sh}2\pi z} = \frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{matrix} g(z) = e^{4z}-\cos 7z \\ h(z) = z\,\mathrm{sh}2\pi z \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{4z}-\cos 7z}{\mathrm{sh}2\pi z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{4e^{4z}+7\sin 7z}{2\pi\,\mathrm{ch}2\pi z}\right) = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{4z}-\cos 7z}{z\,\mathrm{sh}2\pi z} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{2}{\pi} = i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{4z}-\cos 7z}{z\,\mathrm{sh}2\pi z} dz = i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z+3|=2} \left(z\,\mathrm{sh}\frac{i}{z+3} - \frac{4\,\mathrm{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z} \right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z+3|=2} \underbrace{z\,\mathrm{sh}\frac{i}{z+3}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z+3|=2} \underbrace{\frac{-4\,\mathrm{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z}}_{f_2(z)} dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint\limits_{|z+3|=2} z\,\mathrm{sh}\frac{i}{z+3} dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left\{\begin{matrix} t = z+3 \\ z = t-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z\,\mathrm{sh}\frac{i}{z+3} = (t-3)\mathrm{sh}\frac{i}{t}$$

Единственной особой точкой этой функции является $t=0$. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t-3)\mathrm{sh}\frac{i}{t} = (t-3)\left(\frac{i}{t} + \frac{i^3}{3!t^3} + \frac{i^5}{5!t^5} + \frac{i^7}{7!t^7} + \frac{i^9}{9!t^9} + \ldots\right) =$$

$$= \left(i + \frac{i^3}{3!t^2} + \frac{i^5}{5!t^4} + \frac{i^7}{7!t^6} + \ldots\right) - \left(\frac{3i}{t} + \frac{3i^3}{3!t^3} + \frac{3i^5}{5!t^5} + \frac{3i^7}{7!t^7} + \ldots\right) =$$

$$= i - \frac{3i}{t} + \frac{i^3}{3!t^2} - \frac{3i^3}{3!t^3} + \frac{i^5}{5!t^4} - \frac{3i^5}{5!t^5} + \frac{i^7}{7!t^6} - \frac{3i^7}{7!t^7} + \ldots$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов, из чего следует, что $t=0$ является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t-3)\mathrm{sh}\frac{i}{t}\right] = C_{-1} = -3i$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+3|=2} z\,\mathrm{sh}\frac{i}{z+3}dz = \oint\limits_{|t|=2}(t-3)\mathrm{sh}\frac{i}{t}dt = 2\pi i \operatorname*{res}_{t=0}\left[(t-3)\mathrm{sh}\frac{i}{t}\right] =$$
$$= 2\pi i\cdot(-3i) = 6\pi$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint\limits_{|z+3|=2}\frac{-4\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2 z}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=0 и z=–2. При этом точка z=0 не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=–2 является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=-2} f_2(z) = \lim_{z\to-2}\frac{d}{dz}\left[\frac{-(z+2)^2\cdot 4\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2 z}\right] = \lim_{z\to-2}\frac{d}{dz}\left[\frac{-4\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{4}}{z}\right] =$$
$$= \lim_{z\to-2}\left[-\frac{i\pi}{z}\cos\left(\frac{\pi z}{4}\right) + \frac{4i}{z^2}\sin\left(\frac{\pi z}{4}\right)\right] = -i$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+3|=2}\frac{-4\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2 z}dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=-2} f_2(z) = 2\pi i\cdot(-i) = 2\pi$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z+3|=2}\left(z\,\mathrm{sh}\frac{i}{z+3} - \frac{4\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2 z}\right)dz = \oint\limits_{|z+3|=2} z\,\mathrm{sh}\frac{i}{z+3}dz +$$
$$+ \oint\limits_{|z+3|=2}\frac{-4\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2 z}dz = 6\pi + 2\pi = 8\pi$$

Ответ: $\oint\limits_{|z+3|=2}\left(z\,\mathrm{sh}\frac{i}{z+3} - \frac{4\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{4}}{(z+2)^2 z}\right)dz = 8\pi$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-4\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-4\sin t} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{5-\frac{4}{2i}(z-\frac{1}{z})} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{5iz-2(z^2-1)} =$$
$$= \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{-2(z-2i)(z-i/2)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = 2i;\quad z = i/2;$

Точка 2i не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка i/2 является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=i/2} f(z) = \lim_{z\to i/2}[f(z)(z-i/2)] = \lim_{z\to i/2}\frac{1}{-2(z-2i)} = -\frac{i}{3}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{-2(z-2i)(z-i/2)} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i\cdot(-\frac{i}{3}) = \frac{2}{3}\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-4\sin t} = \frac{2}{3}\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(4+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i(4z+\frac{1}{2}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[(z+4+\sqrt{15})(z+4-\sqrt{15})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-4-\sqrt{15}\quad z=-4+\sqrt{15};$

Точка $z=-4-\sqrt{15}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=-4+\sqrt{15}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=\sqrt{15}-4}f(z)=\lim_{z\to\sqrt{15}-4}\frac{d}{dz}[f(z)(z+4-\sqrt{15})^2]=\lim_{z\to\sqrt{15}-4}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[(z+4+\sqrt{15})\right]^2}=$$

$$=\frac{4}{i}\lim_{z\to\sqrt{15}-4}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z+4+\sqrt{15})^2}=\frac{4}{i}\lim_{z\to\sqrt{15}-4}\frac{-z+4+\sqrt{15}}{(z+4+\sqrt{15})^3}=$$

$$=\frac{4}{i}\cdot\frac{-\sqrt{15}+4+4+\sqrt{15}}{(-4+\sqrt{15}+4+\sqrt{15})^3}=\frac{4}{i}\cdot\frac{8}{(2\sqrt{15})^3}=\frac{4}{15\sqrt{15}i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[(z+4+\sqrt{15})(z+4-\sqrt{15})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{4}{15\sqrt{15}i}\right)=\frac{8}{15\sqrt{15}}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+\cos t)^2}=\frac{8}{15\sqrt{15}}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$ сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2+4)(z^2+9)^2}$$

Особые точки:

$z=2i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-2i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

$z=3i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-3i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=3i$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=3i}f(z)=\lim_{z\to3i}\frac{d}{dz}[f(z)(z-3i)^2]=\lim_{z\to3i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+3i)^2(z^2+4)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to3i}\left[\frac{-2(2z^2+4+3iz)}{(z+3i)^3(z^2+4)^2}\right]=\frac{23i}{2700}$$

Точка $z=2i$ является простым полюсом и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=2i}f(z)=\lim_{z\to2i}[f(z)(z-2i)]=\lim_{z\to2i}\left[\frac{1}{(z^2+9)^2(z+2i)}\right]=\frac{-i}{100}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}=2\pi i\left(\frac{23i}{2700}-\frac{i}{100}\right)=\frac{8\pi}{2700}=\frac{2\pi}{675}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}=\frac{2\pi}{675}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(x/2)}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\lambda x dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$(x^2+1)(x^2+9)=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm i; z_{3,4}=\pm 3i;$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{i;3i\}$$

Эти особые точки являются простыми полюсами. Найдем в них вычеты:

$$1)\ \underset{z=i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i}\frac{z(z-i)}{(z^2+1)(z^2+9)}e^{iz/2}=\lim_{z\to i}\frac{ze^{iz/2}}{(z+i)(z^2+9)}=$$

$$=\frac{ie^{-1/2}}{(i+i)(-1+9)}=\frac{e^{-1/2}}{16}$$

$$2)\ \underset{z=3i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 3i}\frac{z(z-3i)}{(z^2+1)(z^2+9)}e^{iz/2}=\lim_{z\to 3i}\frac{ze^{iz/2}}{(z^2+1)(z+3i)}=$$

$$=\frac{3ie^{-3/2}}{(-9+1)(3i+3i)}=-\frac{e^{-3/2}}{16}$$

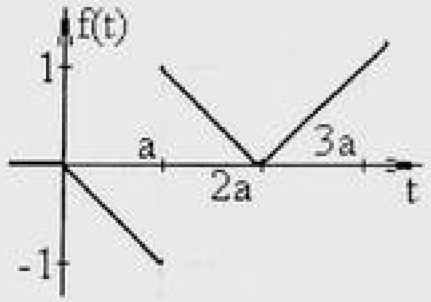
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(x/2)}{(x^2+1)(x^2+9)}dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{\pi e^{-1/2}}{8}-\frac{\pi e^{-3/2}}{8}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(x/2)}{(x^2+1)(x^2+9)}dx=\frac{\pi e^{-1/2}}{8}-\frac{\pi e^{-3/2}}{8}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)\begin{cases}-\dfrac{t}{a}, & 0<t<a\\ \dfrac{2a-t}{a}, & a<t<2a\\ \dfrac{t-2a}{a}, & 2a<t\end{cases}$$

$$f(t)=-\frac{t}{a}\cdot\eta(t)+2\eta(t-a)+\frac{2t-4a}{a}\eta(t-2a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=-\frac{1}{ap^2}+\frac{2}{p}e^{-ap}+\left(\frac{2}{ap^2}-\frac{4}{p}\right)e^{-2ap}$$

Ответ: $F(p)=-\dfrac{1}{ap^2}+\dfrac{2}{p}e^{-ap}+\left(\dfrac{2}{ap^2}-\dfrac{4}{p}\right)e^{-2ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)} = \frac{A}{p+1} + \frac{Bp+C}{p^2+4p+5} =$$

$$= \frac{Ap^2+4Ap+5A+Bp^2+Bp+Cp+C}{(p+1)(p^2+4p+5)} =$$

$$= \frac{(A+B)p^2+(4A+B+C)p+(5A+C)}{(p+1)(p^2+4p+5)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+B+C=1 \\ 5A+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1/2 \\ B=1/2 \\ C=5/2 \end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4p+5} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p^2+4p+5}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4p+5} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p^2+4p+5} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{(p+2)^2+1} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1} \to$$

$$\to -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos t + \frac{3}{2}\cdot e^{-2t}\sin t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos t + \frac{3}{2}\cdot e^{-2t}\sin$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$y''+y'-2y = -2(t+1)$

$y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p) - x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p) - p\cdot x(0) - x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + pY(p) - y(0) - 2Y(p) = -\frac{2+2p}{p^2}$$

$$p^2Y(p) - p - 1 + pY(p) - 1 - 2Y(p) = -\frac{2+2p}{p^2}$$

$$(p^2+p-2)Y(p) - p - 2 = -\frac{2+2p}{p^2}$$

$$Y(p) = -\frac{2+2p}{p^2(p^2+p-2)} + \frac{p+2}{(p^2+p-2)} = \frac{p^3+2p^2-2-2p}{p^2(p^2+p-2)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p) = \frac{p^3+2p^2-2-2p}{p^2(p^2+p-2)} = \frac{Ap+B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+p-2} =$$

$$= \frac{Ap^3+Ap^2-2Ap+Bp^2+Bp-2B+Cp^3+Dp^2}{p^2(p^2+p-2)}$$

$$\begin{cases} A+C=1 \\ A+B+D=2 \\ -2A+B=-2 \\ -2B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-1/2 \\ D=3/2 \\ A=3/2 \\ B=1 \end{cases} \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{2}\frac{3p+2}{p^2} - \frac{1}{2}\frac{p-3}{p^2+p-2}$$

$$Y(p) = \frac{3}{2p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{2}\frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}} - \frac{7i}{6}\frac{\frac{3}{2}i}{(p+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{3}{2} + t - \frac{1}{2}e^{-t/2}\mathrm{ch}\frac{3}{2}t + \frac{7}{6}e^{-t/2}\mathrm{sh}\frac{3}{2}t$$

Ответ: $y(t) = \frac{3}{2} + t - \frac{1}{2}e^{-t/2}\mathrm{ch}\frac{3}{2}t + \frac{7}{6}e^{-t/2}\mathrm{sh}\frac{3}{2}t$

Задача 25

Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы F=–kx, пропорциональной смещению x и направленной в противоположную сторону, и силы сопротивления R=rv. В момент t=0 частица находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Найти закон движения x=x(t) частицы.

$k = 5m,\ r = 4m,\ x_0 = 1м,\ v_0 = 0.$

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kx - rv$$

$$\ddot{x}m + r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m + 4m\dot{x} + 5mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + 4pX(p) - 4x(0) + 5X(p) = 0$$

$$(p^2 + 4p + 5)X(p) - p - 4 = 0$$

$$X(p) = \frac{p+4}{p^2+4p+5} = \frac{p+4}{(p+2)^2+1} = \frac{p+2}{(p+2)^2+1} + \frac{2}{(p+2)^2+1}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = e^{-2t}\cos t + 2e^{-2t}\sin t$$

Ответ: $x(t) = e^{-2t}\cos t + 2e^{-2t}\sin t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1 \\ \dot{y} = x + 2y + 1 \end{cases}$$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = -2X(p) + 5Y(p) + 1 \\ pY(p) - y(0) = X(p) + 2Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) = -2X(p) + 5Y(p) + 1 \\ pY(p) - 2 = X(p) + 2Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 2 = X(p) + 2Y(p) + 1/p$$

$$X(p) = pY(p) - 2Y(p) - 2 - 2/p$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p^2Y(p) - 2pY(p) - 2p - 2 = -2pY(p) + 4Y(p) + 4 + 4/p + 5Y(p) + 1$$

$$(p^2 - 9)Y(p) = 2p + 7 + 4/p \Rightarrow Y(p) = \frac{2p + 7 + 4/p}{p^2 - 9}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{2p+7+4/p}{p^2-9} = 2\frac{p}{p^2-9} + \frac{7}{3}\frac{3}{p^2-9} + \frac{4}{9}\frac{9}{p}\frac{1}{p^2-9} \to$$

$$\to y(t) = 2\operatorname{ch}3t + \tfrac{7}{3}\operatorname{sh}3t + \tfrac{4}{9}(1 - \cos 3it) = 2\operatorname{ch}3t + \tfrac{7}{3}\operatorname{sh}3t + \tfrac{4}{9}(1 - \operatorname{ch}3t) =$$

$$= \tfrac{14}{9}\operatorname{ch}3t + \tfrac{7}{3}\operatorname{sh}3t + \tfrac{4}{9}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = x + 2y + 1 \Rightarrow x(t) = \dot{y} - 2y - 1 =$$

$$= \tfrac{14}{3}\operatorname{sh}3t + 7\operatorname{ch}3t - \tfrac{28}{9}\operatorname{ch}3t - \tfrac{14}{3}\operatorname{sh}3t - \tfrac{8}{9} - 1 = \tfrac{35}{9}\operatorname{ch}3t - \tfrac{17}{9}$$

Ответ:

$$x(t) = \tfrac{14}{9}\operatorname{ch}3t + \tfrac{7}{3}\operatorname{sh}3t + \tfrac{4}{9}$$

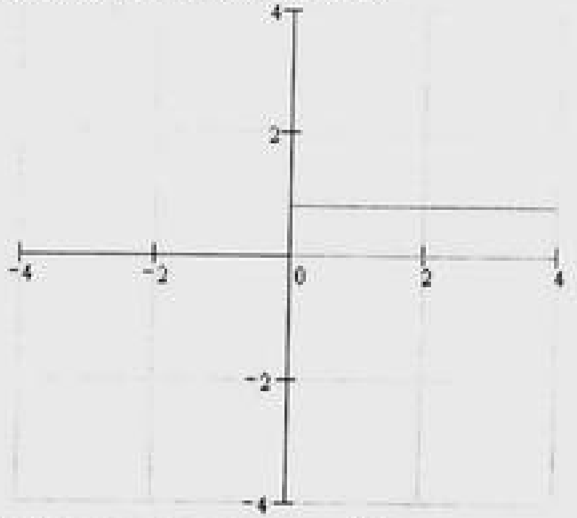
$$y(t) = \tfrac{35}{9}\operatorname{ch}3t - \tfrac{17}{9}$$

Задача 27

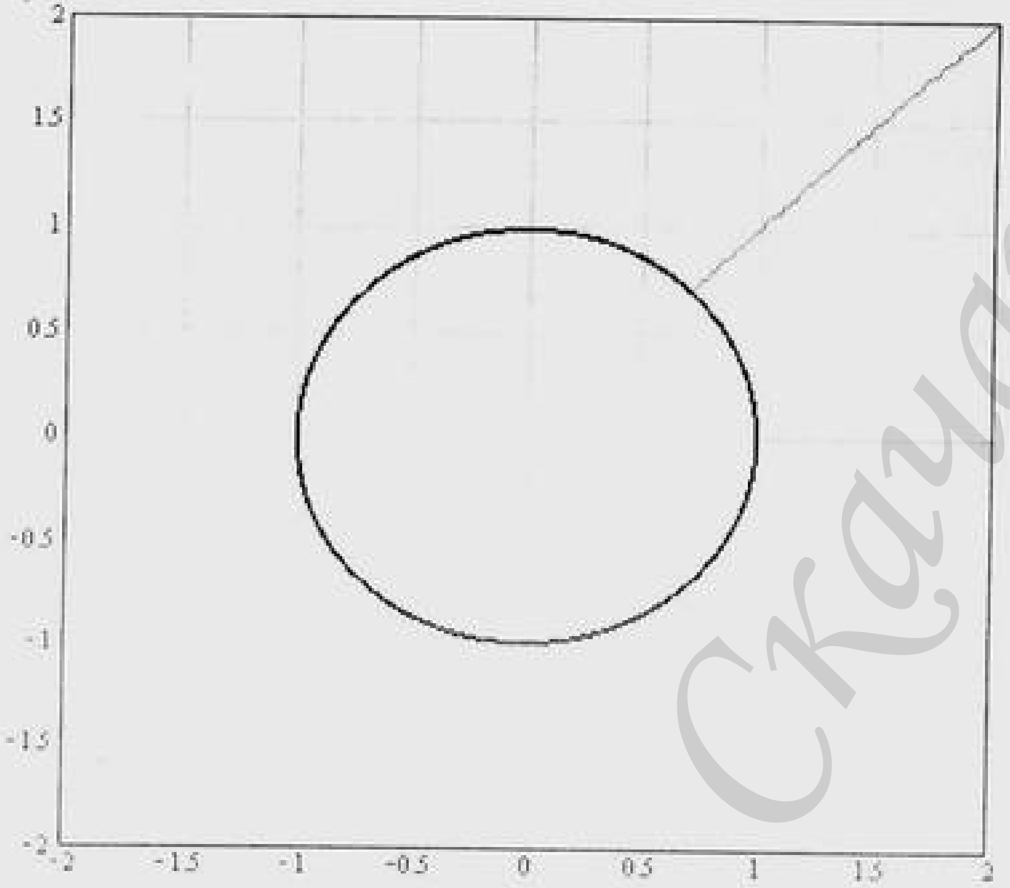
Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = e^z$; полуполоса $x>0$, $0<y<\alpha\le 2\pi$.

Продемонстрируем на примере $\alpha=\pi/4$:



Каждая из границ полуполосы преобразуется в луч, исходящий из начала координат под углом 0 и α радиан соответственно, исключая отрезок, также исходящий из начала координат и имеющий длину $e^0=1$. Заключенная между этими лучами и окружностью радиуса $e^0=1$ область является отображением полуполосы:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\ldots,n-1; z \ne 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z=x+iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Аналитические функции

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z\in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$