Екзаменаційний білет № 1

I. Теоретична частина

1. Розв'язок СЛАР за допомогою схеми єдиного поділу.

<u>Схема єдиного поділу. </u>Розглянемо СЛАР 3-го порядку:

$$\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 = a_{14}^{(0)}; \\ a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + a_{23}^{(0)}x_3 = a_{24}^{(0)}; \\ a_{31}^{(0)}x_1 + a_{32}^{(0)}x_2 + a_{33}^{(0)}x_3 = a_{34}^{(0)}. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Верхній індекс вказує номер кроку перетворення коефіцієнтів.

Припустимо, що $a_{11}^{(0)} \neq 0$ (головний елемент першого рядка). Поділивши перше рівняння системи (3.2) на $a_{11}^{(0)}$, матимемо

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)}, \qquad (3.3)$$

де $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)}/a_{11}^{(0)}$ *(j = 2, 3, 4)*. Якщо тепер рівняння (3.3) послідовно множити на $a_{i1}^{(0)}$ *(i = 2, 3)* і віднімати його з другого та третього рівнянь, коефіцієнти при x_1 у двох останніх рівняннях дорівнюватимуть 0, тобто змінну x_1 буде виключено з них. Перетворені рівняння матимуть вигляд

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)}; \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)}, \end{cases} \qquad (3.4)$$

де $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - a_{1j}^{(1)}a_{i1}^{(0)}$ *(i = 2, 3; j = 2, 3, 4)*.

Припустимо, що головний елемент другого рядка $a_{22}^{(1)}$ також не є нулем. Тоді, поділивши на нього перше рівняння системи (3.4), отримаємо

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)}, \qquad (3.5)$$

де $a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$ *(j = 3, 4)*. Виключимо тепер невідоме x_2, помноживши (3.5) на $a_{32}^{(1)}$ і віднявши його з другого рівняння системи (3.4).

Внаслідок цього дістанемо

$$a_{33}^{(2)} x_3 = a_{34}^{(2)}, \qquad (3.6)$$

де $a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - a_{2j}^{(2)} a_{32}^{(1)}$ *(j = 3, 4)*.

Нарешті, якщо $a_{33}^{(2)} \neq 0$, то поділивши на нього рівняння (3.6), отримаємо

$$x_3 = a_{34}^{(3)}, \qquad (3.7)$$

де $a_{34}^{(3)} = a_{34}^{(2)} / a_{33}^{(2)}$.

Об'єднаємо тепер рівняння (3.3), (3.5) та (3.7) у систему з трикутною матрицею, що еквівалентна вихідній системі:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = a_{14}^{(1)}; \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = a_{24}^{(2)}; \\ x_3 = a_{34}^{(3)}. \end{cases} \qquad (3.8)$$

З останньої системи невідомі $x_1,\ x_2,\ x_3$ можуть бути одержані у зворотному порядку:

$$\begin{cases} x_3 = a_{34}^{(3)}; \\ x_2 = a_{24}^{(2)} - a_{23}^{(2)} x_3; \\ x_1 = a_{14}^{(1)} - a_{12}^{(1)} x_2 - a_{13}^{(1)} x_3. \end{cases} \qquad (3.9)$$

Процес зведення системи (3.2) до трикутного вигляду називають прямим, а визначення невідомих за формулами (3.9) − зворотним ходом.

З а у в а ж е н н я. Головні елементи, які отримують при прямому ході, дають можливість обчислити головний визначник матриці коефіцієнтів вихідної системи:

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{(i-1)} .$$

Недоліком розглянутої схеми є те, що в ході реалізації прямого ходу один з головних елементів може виявитися рівним нулю, а це робить неможливим отримання розв'язку СЛАР; тоді як система може бути сумісною і мати єдиний розв'язок. Крім того, аналіз похибок показує, що при виконанні прямого ходу похибка тим менша, чим більший $a_{kk}^{(k-1)}$. Ці обставини враховуються при реалізації схеми з вибором головного елемента.

1.4.3 Схема єдиного ділення

Найпростіший варіант методу Гаусса називається схемою єдиного ділення. Розглянемо його докладніше.

Схема єдиного ділення складається із двох етапів. На першому з них (його називають прямим ходом) вихідні рівняння (1.11) перетворюються таким чином, що з наступних рівнянь вилучаються усі попередні змінні, тобто із другого і подальших рівнянь вилучається змінна x_1, з третього і подальших - змінна x_2 і так далі. У результаті таких дій випливає, що останнє рівняння міститиме лише одну змінну - x_n, передостаннє - дві змінні - x_n і x_{n-1} і так далі у порядку зростання кількості змінних.

На другому етапі (який називається зворотним ходом) визначаються шукані розв'язки СЛАР. Значення змінної x_n визначається безпосередньо з останнього одержаного рівняння, значення x_{n-1} - з передостаннього (із урахуванням відшуканого значення x_n) і так далі.

Розглянемо докладніше прямий хід.

Припускаючи, що a_{11} не дорівнює нулю, поділимо на нього перше рівняння (1.11). Одержимо перше рівняння у вигляді

$$x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + a_{13}^{(1)} \cdot x_3 + a_{14}^{(1)} \cdot x_4 + ... + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = b_1^{(1)},$$

де використане позначення

$$a_{1i}^{(1)} = \frac{a_{1i}}{a_{11}}, \qquad (i = 2,3,..., n); \; b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}},$$

а індекс угорі позначає номер кроку прямого ходу.

Тепер виключимо із другого рівняння (1.11) змінну x_1. Для цього помножимо перетворене перше рівняння (1.11) на коефіцієнт a_{21} і віднімемо його від другого рівняння (1.11). Одержимо друге рівняння у вигляді

$$a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 + a_{24}^{(1)} \cdot x_4 + ... + a_{2n}^{(1)} \cdot x_n = b_2^{(1)} ,$$

де позначено

$$a_{2i}^{(1)} = a_{2i} - a_{21} \cdot a_{1i}^{(1)} ,\ (i = 2,3,..., n \quad);$$

$$b_2^{(1)} = b_2 - a_{21} \cdot b_1^{(1)} .$$

Так само перетворюються усі подальші рівняння. Після цього вони набудуть вигляду (k - номер рівняння):

$$a_{k2}^{(1)} \cdot x_2 + a_{k3}^{(1)} \cdot x_3 + a_{k4}^{(1)} \cdot x_4 + ... + a_{kn}^{(1)} \cdot x_n = b_k^{(1)} ,$$

причому

$$a_{ki}^{(1)} = a_{ki} - a_{k1} \cdot a_{1i}^{(1)} , (i = 2,3,..., n);\ b_k^{(1)} = b_k - a_{k1} \cdot b_1^{(1)} . \quad (1.17)$$

У результаті першого кроку прямого ходу система рівнянь (1.11) набуває вигляду (1.18). При цьому усі рівняння системи, починаючи із другого, матимуть на одну змінну менше за вихідну систему (1.11), тобто у сукупності утворюють СЛАР ($n-1$)-го порядку.

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}\ x_2 + ... + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} , \\ \quad a_{22}^{(1)} x_2 + ... + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} , \\ \quad \quad .... = ..., \\ \quad a_{n2}^{(1)} x_2 + ... + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)} . \end{cases} \qquad (1.18)$$

Другий крок прямого ходу методу Гаусса полягає у аналогічному перетворенні СЛАР ($n-1$)-го порядку, яку складають одержані рівняння (1.18) з другого по останнє. У результаті виходить така система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots, \\ a_{n3}^{(2)} x_3 + \ldots a_{nn}^{(2)} x_n = b_n^{(2)}. \end{cases} \tag{1.19}$$

Коефіцієнти визначаються аналогічно:

$$a_{2i}^{(2)} = \frac{a_{2i}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \qquad b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},$$

$$a_{ki}^{(2)} = a_{ki}^{(1)} - a_{k2}^{(1)} \cdot a_{2i}^{(2)},$$

$$b_k^{(2)} = b_k^{(1)} - a_{k2}^{(1)} \cdot b_2^{(2)}; \ (k, i = 3,4,\ldots,n). \tag{1.20}$$

У такий само спосіб здійснюються подальші кроки прямого ходу. Формули перетворення на m-му кроці визначаються співвідношеннями:

$$a_{mi}^{(m)} = \frac{a_{mi}^{(m-1)}}{a_{mm}^{(m-1)}}, \ b_m^{(m)} = \frac{b_m^{(m-1)}}{a_{mm}^{(m-1)}}, \ a_{ki}^{(m)} = a_{ki}^{(m-1)} - a_{k2}^{(m-1)} \cdot a_{mi}^{(m)},$$

$$b_k^{(m)} = b_k^{(m-1)} - a_{km}^{(m-1)} \cdot b_m^{(m)}; \ (k, i = m+1, m+2,\ldots,n). \tag{1.21}$$

У підсумку за $m-1$-м кроком утворюється така система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + a_{14}^{(1)} x_4 + \ldots a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + a_{24}^{(2)} x_4 + \ldots a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)}, \\ x_3 + a_{34}^{(3)} x_4 + \ldots a_{3n}^{(3)} x_n = b_2^{(3)}, \\ \ldots\ldots = \ldots, \\ x_n = b_n^{(n)}. \end{cases} \tag{1.22}$$

Матриця $A_{(n-1)}$ коефіцієнтів цієї системи є верхньою трикутною матрицею з одиничними елементами вдовж головної діагоналі:

$$A_{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(3)} & \ldots & a_{3n}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & a_{4n}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Відповідна до цієї системи розширена матриця коефіцієнтів має вигляд

$$A_{(n-1)}^{*} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(3)} & \ldots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & a_{4n}^{(4)} & b_4^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Підсумовуючи, можна сказати, що основною метою прямого ходу методу Гаусса є перетворення розширеної матриці системи до трикутної форми (14), після чого відшукання розв'язків СЛАР легко здійснюється зворотним ходом за співвідношеннями:

$$x_n = b_n^{(n)}\,;\, x_m = b_m^{(m)} - \sum_{j=m+1}^{n} a_{mj}^{(m)} \cdot x_j \;,\; (m = n-1, n-2, \ldots, 1). \quad (1.25)$$

Таким чином, прямий хід методу Гаусса зводиться до побудови розширеної матриці системи (1.16) і подальшого її перетворення до верхньої трикутної форми за допомогою таких операцій:

1) ділення елементів першого рядка матриці на перший елемент цього рядка (який міститься на головній діагоналі); цей елемент називається роздільним;

2) віднімання з подальших рядків матриці першого рядка, помноженого на елемент відповідного рядка, що знаходиться у тому зі стовпців, що й роздільний елемент; обнуління елементів, які містяться у стовпці роздільного елемента;

3) повторення цих дій щодо другого рядка, а потім і для усіх подальших рядків нових одержаних матриць.

2. Розв'язок ЗДУ методом Ейлера-Коши.
3. *Метод Ейлера-Коші.*

У цьому методі знаходиться середній тангенс кута нахилу дотичної для двох точок (x_K, y_k) та (x_{k+1}, y^*_{k+1}).

Тобто

$$y^*_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k);$$

$$y_{k+1} = y_k + h[(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^*_{k+1})) / 2]; \qquad (3)$$

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad k = 0,1,2,...,$$

Локальна похибка методу становить $O(h^3)$, а глобальна - $O(h^2)$. Неважко помітити, що формула (3) співпадає з рядом Тейлора до h^2 включно:

$$y(k) = y_0 + h\, y'_0 + h\, y'_0 + h^2\, y'_0 / 2!$$

$$y''_0 = (y'_1 + y'_0) / h,$$

таким чином

$$y(k) = y_0 + h\, y'_0 + h\, y'_0 + h^2\, (y'_1 + y'_0) / h = y_0 + h(y'_1 + y'_0) / 2$$

Удосконалений метод Ейлера.

$$y_{k+1/2} = y_k + h/2\, f(x_k, y_k);$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k+h/2, y_{k+1/2}); \qquad (4)$$

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad k = 0,1,2,...,$$

II. Практична частина

За допомогою методу дотичних обчислити корінь рівняння

```
x*x*x -10*cos(x)- 5 = 0
```

з точністю не гірше за 10^{-7}.