/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\ldots,n-1;\quad z\neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$:

$$\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}=\sqrt{3}-i$$

$$\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}=1+i\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}=-\sqrt{3}+i$$

$$\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}=-1-i\sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}=\left\{\sqrt{3}-i;1+i\sqrt{3};-\sqrt{3}+i;-1-i\sqrt{3}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\operatorname{sh}(1-\pi i/3)$

Перейдем от гиперболического синуса к тригонометрическому:

$$\operatorname{sh}(1-\pi i/3)=-i\cdot\sin(i+\pi/3)=-i\cdot\sin(\pi/3+i)$$

Используем формулу синуса суммы:

$$-i\cdot\sin(\pi/3+i)=-i[\sin(\pi/3)\cos(i)+\cos(\pi/3)\sin(i)]$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$-i[\sin(\pi/3)\cos(i)+\cos(\pi/3)\sin(i)]=-i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}-$$

$$-i\frac{1}{2}\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=\left(\frac{1}{2}\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\right)+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}\right)$$

Ответ: $\operatorname{sh}(1-\pi i/3)=\left(\frac{1}{2}\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\right)+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}\right)$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arctg}\left(\frac{-9+i}{1-9i}\right)$$

Функция Arctg является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$$

Подставим вместо z значение $\frac{-9+i}{1-9i}$:

$$\mathrm{Arctg}\left(\frac{-9+i}{1-9i}\right) = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\frac{-9i-1}{1-9i}}{1-\frac{-9i-1}{1-9i}} =$$

$$= -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1-9i-9i-1}{1-9i+9i+1} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{-18i}{2} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}(-9i)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}(-9i) = -\frac{i}{2}[\ln|-9i| + i(\arg(-9i) + 2\pi k)] =$$

$$= -\frac{i}{2}\ln 9 + \frac{1}{2}(\arg(-9i) + 2\pi k) \approx -\frac{i}{2}\cdot 2{,}197 +$$

$$+\frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

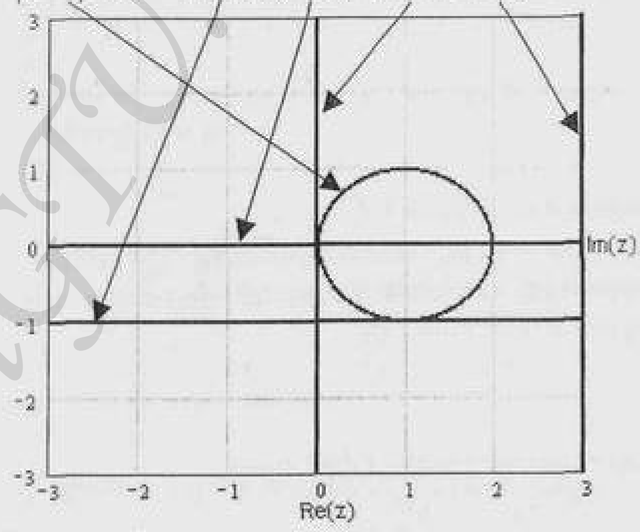
$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Ответ: $\mathrm{Arctg}\left(\frac{-9+i}{1-9i}\right) \approx -\frac{i}{2}\cdot 2{,}197 + \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k), k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z-1| > 1, \quad -1 \le \mathrm{Im}\, z < 0, \quad 0 \le \mathrm{Re}\, z < 3$



Задача 5

Определить вид кривой:

$$z = 2e^{2it} - \frac{1}{e^{2it}} = 2\cos 2t + i2\sin 2t - \cos 2t + i\sin 2t$$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t) = \cos 2t; \quad y(t) = 3\sin 2t$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = \cos 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2}\arccos(x)$$

$$y = 3\sin 2t \Rightarrow \sin 2t = \frac{y}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{y}{3}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\frac{1}{2}\arccos(x) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{y}{3}\right) \Rightarrow \arccos(x) - \arcsin\left(\frac{y}{3}\right) = 0$$

Ответ: $\arccos(x) - \arcsin\left(\frac{y}{3}\right) = 0$

Задача 6

Проверить, что v является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной мнимой части v(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$v = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$f(1) = 1 + i$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{-(x^2 - y^2 - 2ixy)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-(x-iy)^2}{(x+iy)^2(x-iy)^2} = -\frac{1}{(x+iy)^2} = -\frac{1}{z^2}$$

Т.к. производная существует, то v является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int(-\frac{1}{z^2})dz = \frac{1}{z} + C$$

Определим константу C:

$$f(1) = 1 + C = 1 + i \Rightarrow C = i$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{z} + i$$

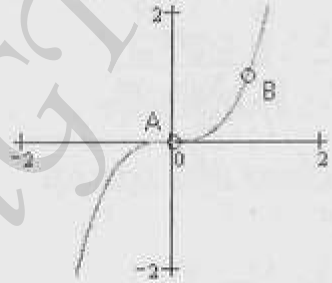
Ответ: $f(z) = \dfrac{1}{z} + i$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int\limits_{AB}(2z+1)dz;\ AB:\{y = x^3; z_A = 0, z_B = 1+i\}$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = 2(x+iy) + 1 = \underbrace{2x+1}_{u(x,y)} + i\cdot \underbrace{2y}_{v(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2; \frac{\partial v}{\partial y} = 2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются, следовательно, функция является аналитической. Тогда результат от пути интегрирования не зависит:

$$\int\limits_{AB}(2z+1)dz = \int\limits_0^{1+i}(2z+1)dz = z^2 + z\,\Big|_0^{1+i} = (1+i)^2 + (1+i) =$$

$$= 1 + 2i - 1 + 1 + i = 3i + 1$$

Ответ: $\int\limits_{AB}(2z+1)dz = 3i + 1$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}=\frac{3(z+12)}{-z^2(z+3)(z-6)}=-\frac{3}{z^2}\cdot\frac{z+12}{(z+3)(z-6)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

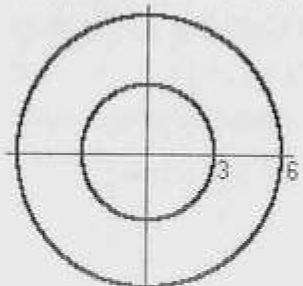
$$\frac{z+12}{(z+3)(z-6)}=\frac{A}{z+3}+\frac{B}{z-6}=\frac{Az-6A+Bz+3B}{(z+3)(z-6)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=-1;B=2\}\Rightarrow\frac{z+12}{(z+3)(z-6)}=\frac{-1}{z+3}+\frac{2}{z-6}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{3}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+3}-\frac{2}{z-6}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=-3; z=6$



Рассмотрим область $|z|<3$:

$$f(z)=\frac{3}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+3}-\frac{2}{z-6}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1-(-\frac{z}{3})}+\frac{1}{1-\frac{z}{6}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}-\frac{z^3}{27}+...\right)+\left(1+\frac{z}{6}+\frac{z^2}{36}+\frac{z^3}{216}+...\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3z}+\frac{1}{9}-\frac{z}{27}+...\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}+\frac{z}{216}+...\right)$$

Рассмотрим область $3<|z|<6$:

$$f(z)=\frac{3}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+3}-\frac{2}{z-6}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{3}{z(1+\frac{3}{z})}+\frac{1}{1-\frac{z}{6}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{3}{z}-\frac{9}{z^2}+\frac{27}{z^3}-\frac{81}{z^4}+...\right)+\left(1+\frac{z}{6}+\frac{z^2}{36}+\frac{z^3}{216}+...\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{3}{z^3}-\frac{9}{z^4}+\frac{27}{z^5}-\frac{81}{z^6}+...\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}+\frac{z}{216}+...\right)$$

Рассмотрим область $|z|>6$:

$$f(z)=\frac{3}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+3}-\frac{2}{z-6}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{3}{z(1+\frac{3}{z})}-\frac{6}{z(1-\frac{6}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{3}{z}-\frac{9}{z^2}+\frac{27}{z^3}-\frac{81}{z^4}+...\right)-\left(\frac{6}{z}+\frac{36}{z^2}+\frac{216}{z^3}+\frac{1296}{z^4}+...\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{3}{z^3}-\frac{9}{z^4}+\frac{27}{z^5}-\frac{81}{z^6}+...\right)-\left(\frac{6}{z^3}+\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}+\frac{1296}{z^6}+...\right)$$

Ответ:

$$|z|<3: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3z}+\frac{1}{9}-\frac{z}{27}+...\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}+\frac{z}{216}+...\right)$$

$$3<|z|<6: f(z)=\left(\frac{3}{z^3}-\frac{9}{z^4}+\frac{27}{z^5}-\frac{81}{z^6}+...\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}+\frac{z}{216}+...\right)$$

$$|z|>6: f(z)=\left(\frac{3}{z^3}-\frac{9}{z^4}+\frac{27}{z^5}-\frac{81}{z^6}+...\right)-\left(\frac{6}{z^3}+\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}+\frac{1296}{z^6}+...\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z-z_0.

$$f(z)=4\cdot\frac{z-2}{(z+1)(z-3)},z_0=3+i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=4\cdot\frac{z-2}{(z+1)(z-3)}=\frac{3}{z+1}+\frac{1}{z-3}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{3}{z+1}=3\cdot\frac{1}{z+1}=3\cdot\frac{1}{(z-z_0)+4+i}=3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(4+i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-z_0)+i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{i^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{3}{z+1}+\frac{1}{z-3}=3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(4+i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{i^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{(4+i)^{n+1}}+\frac{1}{i^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{(4+i)^{n+1}}+\frac{1}{i^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=ze^{\pi z/(z-\pi)},z_0=\pi$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-\pi; ze^{\pi z/(z-\pi)}=(z'+\pi)e^{\pi(z'+\pi)/z'}=e^{\pi}(z'+\pi)e^{\pi^2/z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=e^{\pi}(z'+\pi)e^{\pi^2/z'}=e^{\pi}z'\left(1+\frac{\pi^2}{z'}+\frac{\pi^4}{2!z'^2}+\frac{\pi^6}{3!z'^3}+\ldots\right)+$$

$$+\pi e^{\pi}\left(1+\frac{\pi^2}{z'}+\frac{\pi^4}{2!z'^2}+\frac{\pi^6}{3!z'^3}+\ldots\right)=\left(e^{\pi}z'+\pi^2e^{\pi}+\frac{\pi^4e^{\pi}}{2!z'}+\frac{\pi^6e^{\pi}}{3!z'^2}+\ldots\right)+$$

$$+\left(\pi e^{\pi}+\frac{\pi^3e^{\pi}}{z'}+\frac{\pi^5e^{\pi}}{2!z'^2}+\frac{\pi^7e^{\pi}}{3!z'^3}+\ldots\right)=e^{\pi}z'+\pi^2e^{\pi}+\pi e^{\pi}+\frac{\pi^3e^{\pi}}{z'}\left(\frac{\pi}{2!}+1\right)+$$

$$+\frac{\pi^5e^{\pi}}{z'^2}\left(\frac{\pi}{3!}+\frac{1}{2!}\right)+\frac{\pi^7e^{\pi}}{z'^3}\left(\frac{\pi}{4!}+\frac{1}{3!}\right)+\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=\pi$:

$$f(z)=e^{\pi}z+\pi^2e^{\pi}+\frac{\pi^3e^{\pi}}{z-\pi}\left(\frac{\pi}{2!}+1\right)+\frac{\pi^5e^{\pi}}{(z-\pi)^2}\left(\frac{\pi}{3!}+\frac{1}{2!}\right)+$$

$$+\frac{\pi^7e^{\pi}}{(z-\pi)^3}\left(\frac{\pi}{4!}+\frac{1}{3!}\right)+\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=e^{\pi}z+\pi^2e^{\pi}+\frac{\pi^3e^{\pi}}{z-\pi}\left(\frac{\pi}{2!}+1\right)+\frac{\pi^5e^{\pi}}{(z-\pi)^2}\left(\frac{\pi}{3!}+\frac{1}{2!}\right)+$$

$$+\frac{\pi^7e^{\pi}}{(z-\pi)^3}\left(\frac{\pi}{4!}+\frac{1}{3!}\right)+\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции:

$$f(z) = \frac{\sin 6z - 6z}{shz - z - z^3/6}$$

Представим эту функцию, как отношение функций $g(z)$ и $h(z)$:

$$f(z) = \frac{\sin 6z - 6z}{shz - z - z^3/6} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad \begin{array}{l} g(z) = \sin 6z - 6z; \\ h(z) = shz - z - z^3/6; \end{array}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = 0$:

$$g'(z) = 6\cos 6z - 6; g'(0) = 6\cos 0 - 6 = 0$$
$$g''(z) = 36\sin 6z; g''(0) = 36\sin 0 = 0$$
$$g'''(z) = 216\cos 6z; g'''(0) = 216\cos 0 = 216$$

$$h'(z) = ch(z) - 1 - z^2/2; h'(0) = ch0 - 1 - 0 = 0$$
$$h''(z) = sh(z) - z; h''(0) = sh0 - 0 = 0;$$
$$h'''(z) = ch(z) - 1; h'''(0) = ch0 - 1 = 0;$$
$$h^{IV}(z) = sh(z); h^{IV}(0) = sh0 = 0;$$
$$h^{V}(z) = ch(z); h^{V}(0) = ch0 = 1;$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = 0$ выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка $z = 0$ является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при $z = 0$ для функций $g(z)$ и $h(z)$. В данном случае, это $5 - 3 = 2$.

Ответ: Точка $z = 0$ является полюсом 2-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}$$

Особой точкой здесь является только точка $z = 0$. Тип этой особой точки следует находить, применяя разложение в ряд Лорана в ее окрестности:

$$f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \frac{1}{9!z^9} - \ldots\right) =$$

$$= z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \frac{1}{7!z^5} + \frac{1}{9!z^7} - \ldots$$

Рассмотрим получившийся ряд и выделим главную и правильную части ряда Лорана:

$$f(z) = \underbrace{z}_{\text{правильная часть}} \underbrace{- \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \frac{1}{7!z^5} + \frac{1}{9!z^7} - \ldots}_{\text{главная часть}}$$

Поскольку главная часть содержит бесконечное число членов, то точка $z = 0$ для заданной функции $f(z)$ является существенной особой точкой.

Ответ: Точка $z = 0$ является существенно особой точкой для заданной функции.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{z^3 - i}{\sin 2z(z-\pi)}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = \pi k/2,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадает только точка z = 0.
Точка $z_1 = 0$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)(z-0)] = \lim_{z\to 0}\frac{z(z^3-i)}{\sin 2z(z-\pi)} = \lim_{z\to 0}\frac{z(z^3-i)}{2z(z-\pi)} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{(z^3-i)}{2(z-\pi)} = \frac{-i}{-2\pi} = \frac{i}{2\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3 - i}{\sin 2z(z-\pi)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot \left(\frac{i}{2\pi}\right) = -1$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3 - i}{\sin 2z(z-\pi)} dz = -1$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1/2} \underbrace{\frac{2 + 3z^3 - 5z^4}{z^5}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$\frac{2+3z^3-5z^4}{z^5} = \frac{2}{z^5} + \frac{3}{z^2} - \frac{5}{z}$$

Считая получившийся результат рядом Лорана по степеням z, т.е. в окрестности z = 0, мы приходим к выводу, что точка z = 0 является полюсом 5-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{4!}\lim_{z\to 0}\frac{d^4}{dz^4}[f(z)z^5] = \frac{1}{24}\lim_{z\to 0}\frac{d^4}{dz^4}\left(\frac{2+3z^3-5z^4}{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{24}\lim_{z\to 0}(-120) = \frac{-120}{24} = -5$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2+3z^3-5z^4}{z^5} dz = 2\pi i \cdot (-5) = -10\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2+3z^3-5z^4}{z^5} dz = -10\pi i$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=2} \underbrace{\frac{\cos 2z - 1 + 2z^2}{z^4 \operatorname{sh}(\pi z/3)}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции $z = 3ik$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{\cos 2z - 1 + 2z^2}{z^4 \operatorname{sh}(\pi z/3)} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad \begin{array}{l} g(z) = \cos 2z - 1 + 2z^2 \\ h(z) = z^4 \operatorname{sh}(\pi z/3) \end{array}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\cos 2z - 1 + 2z^2}{z^3 \operatorname{sh}(\pi z/3)}\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{4z - 2\sin 2z}{3z^2 \operatorname{sh}(\pi z/3) + \frac{\pi}{3} z^3 \operatorname{ch}(\pi z/3)}\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{4 - 4\cos 2z}{(6z + \frac{\pi^2}{9} z^3)\operatorname{sh}(\pi z/3) + 2\pi z^2 \operatorname{ch}(\pi z/3)}\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{8\sin 2z}{(6 + \pi^2 z^2)\operatorname{sh}(\pi z/3) + (6\pi z + \frac{\pi^3}{27} z^3)\operatorname{ch}(\pi z/3)}\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{16\cos 2z}{(8\pi + \frac{4\pi^3}{9} z^2)\operatorname{ch}(\pi z/3) + (4\pi^2 z + \frac{\pi^4}{81} z^3)\operatorname{sh}(\pi z/3)}\right) = \frac{16}{8\pi} = \frac{2}{\pi}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 2z - 1 + 2z^2}{z^4 \operatorname{sh}(\pi z/3)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{2}{\pi} = 4i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 2z - 1 + 2z^2}{z^4 \operatorname{sh}(\pi z/3)} dz = 4i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-6|=2} \left(z e^{\frac{1}{z-6}} - \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-3)} \right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-6|=2} \underbrace{z e^{\frac{1}{z-6}}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z-6|=2} \underbrace{\frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-3)}}_{f_2(z)} dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint\limits_{|z-6|=2} z e^{\frac{1}{z-6}} dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left\{\begin{array}{l} t = z - 6 \\ z = t + 6 \end{array}\right\} \Rightarrow z e^{\frac{1}{z-6}} = (t+6)e^{\frac{1}{t}}$$

Единственной особой точкой этой функции является $t=0$. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t+6)e^{\frac{1}{t}} = (t+6)\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2!t^2} + \frac{1}{3!t^3} + \frac{1}{4!t^4} + \frac{1}{5!t^5} + \ldots\right) =$$

$$= \left(t + 1 + \frac{1}{2!t} + \frac{1}{3!t^2} + \frac{1}{4!t^3} + \ldots\right) + \left(6 + \frac{6}{t} + \frac{6}{2!t^2} + \frac{6}{3!t^3} + \frac{6}{4!t^4} + \ldots\right) =$$

$$= t - 5 + \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2!} + 6\right) + \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{3!} + \frac{6}{2!}\right) + \frac{1}{t^3}\left(\frac{1}{4!} + \frac{6}{3!}\right) + \frac{1}{t^4}\left(\frac{1}{5!} + \frac{6}{4!}\right) + \ldots$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов, из чего следует, что $t=0$ является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+6)e^{\frac{1}{t}}\right] = C_{-1} = \frac{1}{2!} + 6 = \frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}$$

Таким образом:

$$\oint_{|z-6|=2} z e^{\frac{1}{z-6}} dz = \oint_{|t|=2} (t+6) e^{\frac{1}{t}} dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+6)e^{\frac{1}{t}}\right] = 2\pi i\cdot\left(\frac{13}{2}\right) = 13\pi i$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint_{|z-6|=2} \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-3)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=5 и z=3. При этом точка z=3 не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=5 является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=5} f_2(z) = \lim_{z\to 5}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-5)^2\cdot 2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-3)}\right] = \lim_{z\to 5}\frac{d}{dz}\left[\frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-3)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 5}\left[-\frac{2\pi}{5(z-3)}\sin\left(\frac{\pi z}{5}\right) - \frac{2}{(z-3)^2}\cos\left(\frac{\pi z}{5}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint_{|z-6|=2} \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-3)}dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=5} f_2(z) = 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint_{|z-6|=2}\left(z e^{\frac{1}{z-6}} - \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-3)}\right)dz = \oint_{|z-6|=2} z e^{\frac{1}{z-6}}dz +$$

$$+ \oint_{|z-6|=2}\frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-3)}dz = \pi i + 13\pi i = 14\pi i$$

Ответ: $\oint_{|z-6|=2}\left(z e^{\frac{1}{z-6}} - \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-3)}\right)dz = 14\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sin t + 5}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sin t + 5} = \oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\frac{2}{i}(z-\frac{1}{z})+5} = \oint_{|z|=1}\frac{dz}{2(z^2-1)+5iz} =$$

$$= \oint_{|z|=1}\frac{dz}{2(z+2i)(z+i/2)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = -2i;\quad z = -i/2;$

Точка $-2i$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $-i/2$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-i/2} f(z) = \lim_{z\to -i/2}[f(z)(z+i/2)] =$$

$$= \lim_{z\to -i/2}\frac{1}{2(z+2i)} = \frac{1}{2(-i/2+2i)} = -\frac{i}{3}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{2(z+2i)(z+i/2)} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sin t + 5} = \frac{2}{3}\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2+\sqrt{3}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2+\sqrt{3}\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(2+\frac{\sqrt{3}}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i(4z+\sqrt{3}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{3}(z+\sqrt{3})(z+\frac{1}{\sqrt{3}})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-1/\sqrt{3};\quad z=-\sqrt{3};$

Точка $z=-\sqrt{3}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=-1/\sqrt{3}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-1/\sqrt{3}}f(z)=\lim_{z\to-1/\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\left[f(z)\left(z+1/\sqrt{3}\right)^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to-1/\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[\sqrt{3}\left(z+\sqrt{3}\right)\right]^2}=\frac{4}{3i}\lim_{z\to-1/\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z+\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{4}{3i}\lim_{z\to-1/\sqrt{3}}\left[-\frac{z-\sqrt{3}}{\left(z+\sqrt{3}\right)^3}\right]=-\frac{4}{i}\cdot\frac{-1/\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\left(-1/\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)^3}=\frac{2}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{3}(z+\sqrt{3})(z+\frac{1}{\sqrt{3}})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_i}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{2}{i}\right)=4\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2+\sqrt{3}\cos t)^2}=4\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^5}$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^5}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2+1)^5}$$

Особые точки:

$z=i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=i$ является полюсом третьего порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=i}f(z)=\frac{1}{24}\lim_{z\to i}\frac{d^4}{dz^4}[f(z)(z-i)^5]=\frac{1}{24}\lim_{z\to i}\frac{d^4}{dz^4}\left[\frac{1}{(z+i)^5}\right]=$$

$$=\frac{1}{24}\lim_{z\to i}\frac{d^3}{dz^3}\left[\frac{-5}{(z+i)^6}\right]=\frac{1}{24}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{30}{(z+i)^7}\right]=$$

$$=\frac{1}{24}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{-210}{(z+i)^8}\right]=\frac{1}{24}\lim_{z\to i}\frac{1680}{(z+i)^9}=\frac{1}{24}\cdot\frac{1680}{2^9 i}=\frac{35}{256i}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^5}=2\pi i\frac{35}{256i}=\frac{35\pi}{128}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^5}=\frac{35\pi}{128}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\lambda x\,dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_{m}\underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$(x^2-x+1)^2=0\Rightarrow z_{1,2}=\tfrac{1}{2}\pm i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\}$$

Эта особая точка является полюсом второго порядка. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{(z^2-z+1)^2}e^{2iz}\right]=$$

$$=\lim_{z\to\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^2}e^{2iz}\right]=\lim_{z\to\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\frac{-2+2iz+i-\sqrt{3}}{(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3}e^{2iz}\right]=$$

$$=\frac{1-i+\sqrt{3}}{4}e^{i-\sqrt{3}}=\frac{1-i+\sqrt{3}}{4}e^{-\sqrt{3}}(\cos 1+i\sin 1)$$

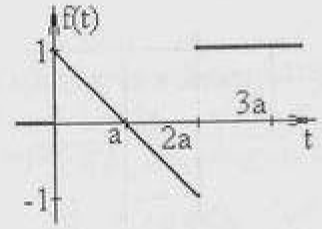
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_{m}\underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{\pi e^{-\sqrt{3}}}{2}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)\cos 1+\sin 1\right]$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}dx=\frac{\pi e^{-\sqrt{3}}}{2}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)\cos 1+\sin 1\right]$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)\begin{cases}\dfrac{a-t}{a} & 0<t<2a\\ 1, & 2a<t\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{a-t}{a}\cdot\eta(t)+\frac{t}{a}\eta(t-2a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}+\left(\frac{1}{ap^2}\right)e^{-2ap}$$

Ответ: $F(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{ap^2}+\left(\dfrac{1}{ap^2}\right)e^{-2ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+3}=$$

$$=\frac{Ap^2+2Ap+3A+Bp^2-2Bp+Cp-2C}{(p-2)(p^2+2p+3)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(2A-2B+C)p+(3A-2C)}{(p-2)(p^2+2p+3)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\2A-2B+C=0\\3A-2C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/11\\B=-1/11\\C=-4/11\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}=\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{11}\cdot\frac{p}{p^2+2p+3}-\frac{4}{11}\cdot\frac{1}{p^2+2p+3}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{11}\cdot\frac{p}{p^2+2p+3}-\frac{4}{11}\cdot\frac{1}{p^2+2p+3}=$$

$$=\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{11}\cdot\frac{p}{(p+1)^2+2}-\frac{4}{11}\cdot\frac{1}{(p+1)^2+2}=$$

$$=\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{11}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+2}-\frac{3}{11\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(p+1)^2+2}\to$$

$$\to\frac{1}{11}\cdot e^{2t}-\frac{1}{11}\cdot e^{-t}\cos\sqrt{2}t-\frac{3}{11\sqrt{2}}\cdot e^{-t}\sin\sqrt{2}t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{11}\cdot e^{2t}-\frac{1}{11}\cdot e^{-t}\cos\sqrt{2}t-\frac{3}{11\sqrt{2}}\cdot e^{-t}\sin\sqrt{2}t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''+4y'+4y=t^3e^{2t}$$

$$y(0)=1,\quad y'(0)=2.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+4pY(p)-4y(0)+4Y(p)=\frac{6}{(p-2)^4}$$

$$p^2Y(p)-p-2+4pY(p)-4+4Y(p)=\frac{6}{(p-2)^4}$$

$$(p^2+4p+4)Y(p)=(p+2)^2Y(p)=\frac{6}{(p-2)^4}+p+6=$$

$$=\frac{p^5-2p^4-24p^3+112p^2-176p+102}{(p-2)^4}$$

$$Y(p)=\frac{p^5-2p^4-24p^3+112p^2-176p+102}{(p-2)^4(p+2)^2}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{p^5-2p^4-24p^3+112p^2-176p+102}{(p-2)^4(p+2)^2}=\frac{A}{p+2}+\frac{B}{(p+2)^2}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{(p-2)^2}+\frac{E}{(p-2)^3}+$$

$$+\frac{F}{(p-2)^4}=\frac{(A+C)p^5+(B-8A+D+4C)p^4+(E+4D+4C-8B+24A)p^3}{(p-2)^4(p+2)^2}+$$

$$+\frac{(F+4E+4D+24B-32A)p^2+(-32B+16A+4F+4E)p+16B+4F}{(p-2)^4(p+2)^2}$$

$$\begin{cases}A+C=1\\-2C+D+B-6A=-2\\8A+E-8C-8B=-24\\16A-8D+F+2E+16C+24B=112\\-48A+4F-4E+16C-32B=-176\\32A+16B-8E+16D-32C+4F=102\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=131/128\\B=515/128\\C=-3/128\\D=9/128\\E=-24/128\\F=48/128\end{cases}\Rightarrow$$

$$Y(p)=\frac{1}{128}\left[\frac{131}{p+2}+\frac{515}{(p+2)^2}-\frac{3}{p-2}+\frac{9}{(p-2)^2}-\frac{24}{(p-2)^3}+\frac{48}{(p-2)^4}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=\tfrac{1}{128}\left(131e^{-2t}+515te^{-2t}-3e^{2t}+9te^{2t}-12t^2e^{2t}+8t^3e^{2t}\right)$$

Ответ: $y(t)=\tfrac{1}{128}\left(131e^{-2t}+515te^{-2t}-3e^{2t}+9te^{2t}-12t^2e^{2t}+8t^3e^{2t}\right)$

Задача 25

Материальная точка массы m совершает прямолинейное колебание по оси Ox под действием восстанавливающей силы F=–kx, пропорциональной расстоянию x от начала координат и направленной к началу координат, и возмущающей силы f =Acos t. Найти закон движения x=x(t) точки, если в начальный момент времени $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$.
$k = 9m$, $A = 4m$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kx + A\cos t$$

$$\ddot{x}m + kx = A\cos t$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m + mx = m\cos t$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + 9x = 4\cos t$$

Перейдем к изображениям функций:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + 9X(p) = \frac{4p}{p^2+1}$$

$$(p^2+9)X(p) = \frac{4p}{p^2+1}$$

$$X(p) = \frac{4p}{(p^2+1)(p^2+9)} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+9}\right)$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t$$

Ответ: $x(t) = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y + 1 \\ \dot{y} = 2x + 3y \end{cases}$$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = X(p) + 4Y(p) + 1/p \\ pY(p) - y(0) = 2X(p) + 3Y(p) \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 4Y(p) + 1/p \\ pY(p) - 1 = 2X(p) + 3Y(p) \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 1 = 2X(p) + 3Y(p) \Rightarrow X(p) = \frac{pY(p) - 3Y(p) - 1}{2}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p\frac{pY(p) - 3Y(p) - 1}{2} = \frac{pY(p) - 3Y(p) - 1}{2} + 4Y(p) + 1/p$$

$$p^2Y(p) - 4pY(p) - p = -1 + 5Y(p) + 2/p$$

$$Y(p) = \frac{p - 1 + 2/p}{p^2 - 4p - 5}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{p-1+2/p}{p^2-4p-5} = \frac{p-1+2/p}{p^2-4p-5} + \frac{2}{5p} - \frac{2}{5p} = \frac{7p/5 - 13/5}{p^2-4p-5} - \frac{2}{5p} =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{7p-13}{(p-2)^2-9} - \frac{2}{5p} = \frac{7}{5}\frac{p-2}{(p-2)^2-9} - \frac{i}{15}\frac{3i}{(p-2)^2-9} - \frac{2}{5p} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = \tfrac{7}{5}e^{2t}\cos 3it - \tfrac{1}{15}e^{2t}\sin 3it - \tfrac{2}{5} = \tfrac{7}{5}e^{2t}\mathrm{ch}3t + \tfrac{1}{15}e^{2t}\mathrm{sh}3t - \tfrac{2}{5}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = 2x + 3y \Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{2}(\dot{y} - 3y) = \tfrac{19}{15}e^{2t}\mathrm{ch}3t + \tfrac{88}{45}e^{2t}\mathrm{sh}3t - \tfrac{1}{15}$$

Ответ:

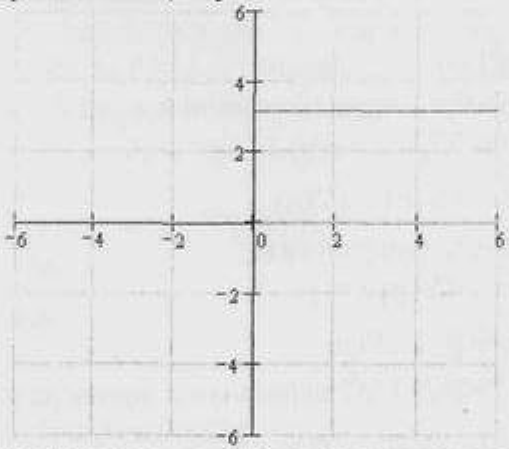
$$x(t) = \tfrac{19}{15}e^{2t}\mathrm{ch}3t + \tfrac{88}{45}e^{2t}\mathrm{sh}3t - \tfrac{1}{15}$$

$$y(t) = \tfrac{7}{5}e^{2t}\mathrm{ch}3t + \tfrac{1}{15}e^{2t}\mathrm{sh}3t - \tfrac{2}{5}$$

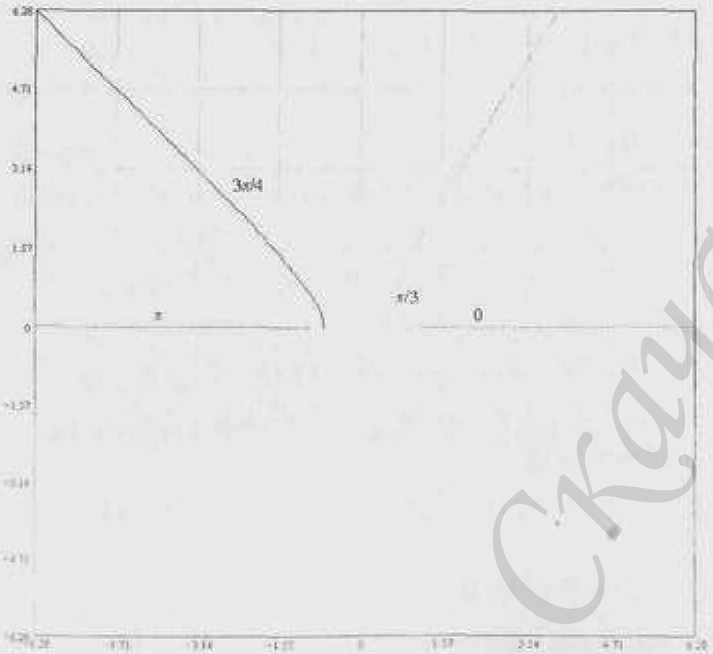
Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции w = f(z) .

w = ch(z); полуполоса x>0, 0<y<π.



Каждая из горизонтальных линий в полуполосе преобразуется в кривую, проходящую через точку (cos x ; 0) и лежащую в верхней полуплоскости. Отображение совокупности таких кривых дает всю верхнюю полуплоскость. В качестве примеров ниже приведены кривые для x=0,π/3,3π/4,π:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\dots,n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z = x + iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z - i}{z + i}$$

Аналитические функции

Функция w=f(z) называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция w=f(z) называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке z∈G.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$