/ТФКП/ 2007

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

ТФКП. Вариант 15.

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[3]{-8}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\ldots,n-1;\quad z\neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[3]{-8}$:

$$\sqrt[3]{-8}=1+i\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{-8}=-2$$

$$\sqrt[3]{-8}=1-i\sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt[3]{-8}=\{1+i\sqrt{3};-2;1-i\sqrt{3}\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\sin(\pi/2-5i)$

Используем формулу синуса разности:

$$\sin(\pi/2-5i)=\sin(\pi/2)\cos(5i)-\cos(\pi/2)\sin(5i)$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$\sin(\pi/2)\cos(5i)-\cos(\pi/2)\sin(5i)=1\cdot\frac{e^{-5}+e^{5}}{2}-0\cdot\frac{e^{-5}-e^{5}}{2i}=$$

$$=\frac{e^{-5}+e^{5}}{2}$$

Ответ: $\sin(\pi/2-5i)=\dfrac{e^{-5}+e^{5}}{2}$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right)$$

Функция Arctg является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arctg}\,z=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$$

Подставим вместо z значение $\frac{3\sqrt{3}-8i}{7}$:

$$\mathrm{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right)=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}}{1-\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}}=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{7+8+i3\sqrt{3}}{7-8-i3\sqrt{3}}=$$

$$=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{15+i3\sqrt{3}}{-1-i3\sqrt{3}}=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(-3\frac{5+i\sqrt{3}}{1+i3\sqrt{3}}\right)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),k=0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(-3\frac{5+i\sqrt{3}}{1+i3\sqrt{3}}\right)=-\frac{i}{2}[\ln\left|-3\frac{5+i\sqrt{3}}{1+i3\sqrt{3}}\right|+$$

$$+i(\arg(-3\frac{5+i\sqrt{3}}{1+i3\sqrt{3}})+2\pi k)]=-\frac{i}{2}\ln 3+$$

$$+\frac{1}{2}(\arg(-3\frac{5+i\sqrt{3}}{1+i3\sqrt{3}})+2\pi k)\approx-\frac{i}{2}\cdot1{,}099+\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3}+2\pi k)$$

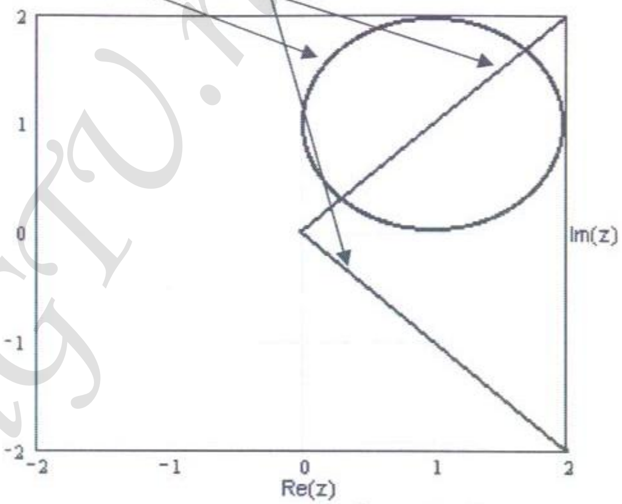
$$k=0,\pm1,\pm2,...$$

Ответ: $\mathrm{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right)\approx-\frac{i}{2}\cdot1{,}099+\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3}+2\pi k),k=0,\pm1,\pm2,...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z-1-i|<1, \quad |\arg z|\le\pi/4$



Задача 5

Определить вид кривой:

$$z=\frac{2}{\mathrm{ch}\,2t}+i4\mathrm{th}\,2t$$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$$x(t)=2/\mathrm{ch}\,2t;\quad y(t)=4\mathrm{th}\,2t$$

Выразим параметр t через x и y:

$$x=\frac{2}{\mathrm{ch}\,2t}\Rightarrow\mathrm{ch}\,2t=\frac{2}{x}\Rightarrow t=\frac{1}{2}\mathrm{arch}\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$y=4\mathrm{th}\,2t\Rightarrow\mathrm{th}\,2t=\frac{y}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2}\mathrm{arth}\left(\frac{y}{4}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\frac{1}{2}\mathrm{arch}\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{arth}\left(\frac{y}{4}\right)\Rightarrow\ \mathrm{arch}\left(\frac{2}{x}\right)-\mathrm{arth}\left(\frac{y}{4}\right)=0$$

Ответ: $\mathrm{arch}\left(\frac{2}{x}\right)-\mathrm{arth}\left(\frac{y}{4}\right)=0$

Задача 6

Проверить, что v является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной мнимой части v(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$v = 3x^2y - y^3 - y$$

$$f(0) = 0$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = 3x^2 - 3y^2 - 1 + 6ixy = 3(x+iy)^2 - 1 = 3z^2 - 1$$

Т.к. производная существует, то v является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int (3z^2 - 1)dz = z^3 - z + C$$

Определим константу С:

$$f(0) = 0^3 - 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = z^3 - z$$

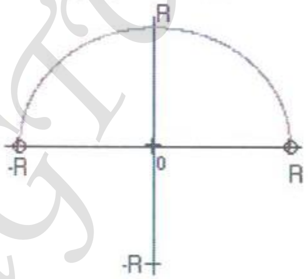
Ответ: $f(z) = z^3 - z$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_L |z| \operatorname{Re} z^2 dz;\ L: \{|z| = R; \operatorname{Im} z \ge 0\}$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = \sqrt{x^2+y^2}\operatorname{Re}(x^2 + 2ixy - y^2) = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}(x^2-y^2)}_{u(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x(3x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}; \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \ne \frac{\partial v}{\partial y};$$

Условия Коши-Римана не выполняются, значит, функция не является аналитической. Тогда представим кривую в параметрическом виде:

$$z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = \sqrt{R^2 - t^2};$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int_L f(z)dz = \int_{-R}^{R} f[z(t)]z'(t)dt = \int_{-R}^{R} R(2t^2 - R^2)\left(1 - \frac{it}{\sqrt{R^2-t^2}}\right)dt =$$

$$= -\frac{2}{3}R^4$$

Ответ: $\int_L f(z)dz = -\frac{2}{3}R^4$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}=\frac{15(z-30)}{z(z+15)(2z-15)}=\frac{15}{2z}\cdot\frac{z-30}{(z+15)(z-7{,}5)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

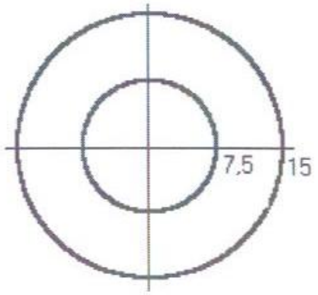
$$\frac{z-30}{(z+15)(z-7{,}5)}=\frac{A}{z+15}+\frac{B}{z-7{,}5}=\frac{Az-7{,}5A+Bz+15B}{(z+15)(z-7{,}5)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=2;B=-1\}\Rightarrow\frac{z-30}{(z+15)(z-7{,}5)}=\frac{2}{z+15}-\frac{1}{z-7{,}5}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{15}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+15}-\frac{1}{z-7{,}5}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=7{,}5; z=-15$



Рассмотрим область $|z|<7{,}5$:

$$f(z)=\frac{15}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+15}-\frac{1}{z-7{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{15}}+\frac{1}{1-\frac{2z}{15}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{15}+\frac{z^2}{225}-\frac{z^3}{3375}+\ldots\right)+\left(1+\frac{2z}{15}+\frac{4z^2}{225}+\frac{8z^3}{3375}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{15}+\frac{z}{225}-\frac{z^2}{3375}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{15}+\frac{4z}{225}+\frac{8z^2}{3375}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $7{,}5<|z|<15$:

$$f(z)=\frac{15}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+15}-\frac{1}{z-7{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{15}}-\frac{15}{2z(1-\frac{15}{2z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{15}+\frac{z^2}{225}-\frac{z^3}{3375}+\ldots\right)+\left(\frac{15}{2z}+\frac{225}{4z^2}+\frac{3375}{8z^3}+\frac{50625}{16z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{15}+\frac{z}{225}-\frac{z^2}{3375}+\ldots\right)+\left(\frac{15}{2z^2}+\frac{225}{4z^3}+\frac{3375}{8z^4}+\frac{50625}{16z^5}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>15$:

$$f(z)=\frac{15}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+15}-\frac{1}{z-7{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{15}{z(1+\frac{15}{z})}-\frac{15}{2z(1-\frac{15}{2z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{15}{z}-\frac{225}{z^2}+\frac{3375}{z^3}-\frac{50625}{z^4}+\ldots\right)+\left(\frac{15}{2z}+\frac{225}{4z^2}+\frac{3375}{8z^3}+\frac{50625}{16z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{15}{z^2}-\frac{225}{z^3}+\frac{3375}{z^4}-\frac{50625}{z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{15}{2z^2}+\frac{225}{4z^3}+\frac{3375}{8z^4}+\frac{50625}{16z^5}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<7{,}5: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{15}+\frac{z}{225}-\frac{z^2}{3375}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{15}+\frac{4z}{225}+\frac{8z^2}{3375}+\ldots\right)$$

$$7{,}5<|z|<15: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{15}+\frac{z}{225}-\frac{z^2}{3375}+\ldots\right)+\left(\frac{15}{2z^2}+\frac{225}{4z^3}+\frac{3375}{8z^4}+\frac{50625}{16z^5}+\ldots\right)$$

$$|z|>15: f(z)=\left(\frac{15}{z^2}-\frac{225}{z^3}+\frac{3375}{z^4}-\frac{50625}{z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{15}{2z^2}+\frac{225}{4z^3}+\frac{3375}{8z^4}+\frac{50625}{16z^5}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$.

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1}, z_0=-3+i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right)$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{(z-z_0)-3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-3)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{(z-z_0)-3+2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-3+2i)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3-2i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right)=\frac{1}{2}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3-2i)^{n+1}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{(3-2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{(3-2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=\sin\frac{z}{z-3}, z_0=3$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-3; \sin\frac{z}{z-3}=\sin\frac{z'+3}{z'}=\sin\left(1+\frac{3}{z'}\right)=\sin 1\cos\frac{3}{z'}+\cos 1\sin\frac{3}{z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=\sin 1\cos\frac{3}{z'}+\cos 1\sin\frac{3}{z'}=\left(1-\frac{9}{2!z'^2}+\frac{81}{4!z'^4}-\frac{729}{6!z'^6}+\ldots\right)\sin 1+$$

$$+\left(\frac{3}{z'}-\frac{27}{3!z'^3}+\frac{243}{5!z'^5}-\frac{2187}{7!z'^7}+\ldots\right)\cos 1=\left(\sin 1-\frac{9\sin 1}{2!z'^2}+\frac{81\sin 1}{4!z'^4}-\right.$$

$$\left.-\frac{729\sin 1}{6!z'^6}+\ldots\right)+\left(\frac{3\cos 1}{z'}-\frac{27\cos 1}{3!z'^3}+\frac{243\cos 1}{5!z'^5}-\frac{2187\cos 1}{7!z'^7}+\ldots\right)=$$

$$=\sin 1+\frac{3\cos 1}{z'}-\frac{9\sin 1}{2!z'^2}-\frac{27\cos 1}{3!z'^3}+\frac{81\sin 1}{4!z'^4}+\frac{243\cos 1}{5!z'^5}-\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$:

$$f(z)=\sin 1+\frac{3\cos 1}{z-3}-\frac{9\sin 1}{2!(z-3)^2}-\frac{27\cos 1}{3!(z-3)^3}+\frac{81\sin 1}{4!(z-3)^4}+$$

$$+\frac{243\cos 1}{5!(z-3)^5}-\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=\sin 1+\frac{3\cos 1}{z-3}-\frac{9\sin 1}{2!(z-3)^2}-\frac{27\cos 1}{3!(z-3)^3}+\frac{81\sin 1}{4!(z-3)^4}+$$

$$+\frac{243\cos 1}{5!(z-3)^5}-\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{\operatorname{sh}2z-2z}{\cos z-1+z^2/2}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{\operatorname{sh}2z-2z}{\cos z-1+z^2/2}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{array}{l} g(z)=\operatorname{sh}2z-2z; \\ h(z)=\cos z-1+z^2/2; \end{array}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g'(z)=2\operatorname{ch}2z-2; g'(0)=2\operatorname{ch}0-2=0$$

$$g''(z)=4\operatorname{sh}2z; g''(0)=4\operatorname{sh}0=0$$

$$g'''(z)=8\operatorname{ch}2z; g'''(0)=8\operatorname{ch}0=8$$

$$h'(z)=-\sin z+z; h'(0)=-\sin 0+0=0$$

$$h''(z)=-\cos z+1; h''(0)=-\cos 0+1=0;$$

$$h'''(z)=\sin z; h'''(0)=\sin 0=0;$$

$$h^{IV}(z)=-\cos z; h^{IV}(0)=-\cos 0=-1;$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 4 – 3 = 1.

Ответ: Точка z = 0 является полюсом 1-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$$

Изолированной особой точкой является z = 0. Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}=\frac{z-e^z+1}{z(e^z-1)};\quad \begin{array}{l} g(z)=z-e^z+1; \\ h(z)=z(e^z-1); \end{array}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g(0)=0;$$
$$g'(z)=1-e^z; g'(0)=0;$$
$$g''(z)=-e^z; g''(0)\neq 0;$$
$$h(0)=0;$$
$$h'(z)=e^z-1+ze^z; h'(0)=0;$$
$$h''(z)=2e^z+ze^z; h''(0)\neq 0;$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z) равен, то это говорит о том, что существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, из чего следует, что точка z = 0 является устранимой особой точкой.

Ответ: Точка z = 0 для данной функции является устранимой особой точкой.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-1|=3/2} \underbrace{\frac{\ln(z+2)}{\sin z}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = \pi k,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадает только точка z = 0.
Точка $z_1 = 0$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)(z-0)] = \lim_{z\to 0}\frac{z\ln(z+2)}{\sin z} = \lim_{z\to 0}\frac{z\ln(z+2)}{z} =$$
$$= \lim_{z\to 0}[\ln(z+2)] = \ln 2$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-1|=3/2} \frac{\ln(z+2)}{\sin z} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot \ln 2$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-1|=3/2} \frac{\ln(z+2)}{\sin z} dz = 2\pi i \cdot \ln 2$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{\cos iz - 1}{z^3}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: z = 0. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$\frac{\cos iz - 1}{z^3} = \frac{-1 + 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots}{z^3} = \frac{1}{2!z} + \frac{z}{4!} + \frac{z^3}{6!} + \frac{z^5}{8!} + \ldots$$

Получившийся ряд содержит конечное число членов в главной части, а старшая степень у него – первая. Из этого следует, что особая точка z = 0 представляет собой полюс 1-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[z \cdot f(z)] = \lim_{z\to 0}\frac{\cos iz - 1}{z^2} = -\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos iz}{z^2} =$$
$$= \lim_{z\to 0}\frac{z^2/2}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz = \pi i$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z|=0,9} \underbrace{\frac{e^{3z}-1-3z}{\mathrm{sh}^2\pi z}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции z = ik. Однако в контур попадает только z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$f(z)=\frac{e^{3z}-1-3z}{\mathrm{sh}^2\pi z}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{matrix} g(z)=e^{3z}-1-3z \\ h(z)=\mathrm{sh}^2\pi z \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при z = 0:

$$g'(z)=3e^{3z}-3; g'(0)=0$$

$$g''(z)=9e^{3z}; g'(0)\neq 0$$

$$h'(z)=2\pi\,\mathrm{sh}\pi z\,\mathrm{ch}\pi z; h'(0)=0$$

$$h''(z)=4\pi^2\mathrm{ch}^2\pi z-2\pi^2; h''(0)\neq 0$$

Порядки производных, ненулевых при z = 0 одинаковы для функций в числителе и знаменателе. Это значит, что z = 0 – устранимая особая точка. Как известно, вычет в устранимой особой точке равен нулю:

$$\underset{z=0}{\mathrm{res}}\, f(z)=0$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=0,9} \frac{e^{3z}-1-3z}{\mathrm{sh}^2\pi z} dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\underset{z_n}{\mathrm{res}} f(z)=2\pi i\cdot 0=0$$

Ответ: $\oint_{|z|=0,9} \frac{e^{3z}-1-3z}{\mathrm{sh}^2\pi z} dz=0$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z+7i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}-\frac{8\mathrm{ch}\frac{\pi iz}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}\right)dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint_{|z+7i|=2}\underbrace{\frac{-8\mathrm{ch}\frac{\pi iz}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}}_{f_1(z)}dz+\oint_{|z+7i|=2}\underbrace{\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}}_{f_2(z)}dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint_{|z+7i|=2}\frac{-8\mathrm{ch}\frac{\pi iz}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=1–7i и z=3–7i. При этом точка z=3–7i не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=1–7i является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\underset{z=1-7i}{\mathrm{res}} f_1(z)=\lim_{z\to 1-7i}\frac{d}{dz}\left[\frac{-8\mathrm{ch}\frac{\pi iz}{1-7i}(z-1+7i)^2}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}\right]=\lim_{z\to 1-7i}\frac{d}{dz}\left[\frac{-8\mathrm{ch}\frac{\pi iz}{1-7i}}{(z-3+7i)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 1-7i}\left[\frac{(4i-28)\pi}{25(z-3+7i)}\mathrm{sh}\frac{(7-i)\pi z}{50}+\frac{8}{(z-3+7i)^2}\mathrm{ch}\frac{(7-i)\pi z}{50}\right]=-2$$

Таким образом:

$$\oint_{|z+7i|=2}\frac{-8\mathrm{ch}\frac{\pi iz}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}dz=2\pi i\cdot\underset{z=1-7i}{\mathrm{res}} f_1(z)=2\pi i\cdot(-2)=-4\pi i$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z+7i|=2} \frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\pi z/2}-i=0 \Rightarrow e^{\pi z/2}=i \Rightarrow \pi z/2=\ln(i)=\pi i/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=4ik+i, k\in z$$

Из этих точек только одна охвачена контуром |z+7i|=2 и должна приниматься во внимание. Это точка z=–7i, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=-7i} f_2(z)=\lim_{z\to -7i}\frac{\pi i(z+7i)}{e^{\pi z/2}-i}=\left\{\begin{matrix}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 7i}\frac{\pi i}{\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2}}=\frac{\pi i}{\frac{\pi}{2}e^{7\pi i/2}}=\frac{2i}{e^{7\pi i/2}}=\frac{2i}{i}=2$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+7i|=2} \frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=7i} f_2(z)=2\pi i\cdot 2=4\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z+7i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}-\frac{8\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}\right)dz=\oint\limits_{|z+7i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz+$$

$$+\oint\limits_{|z+7i|=2}-\frac{8\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}dz=4\pi i-4\pi i=0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z+7i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}-\frac{8\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}\right)dz=0$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{6-4\sqrt{2}\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int\limits_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{6-4\sqrt{2}\sin t}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{6-\frac{4\sqrt{2}}{2i}(z-\frac{1}{z})}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{6iz-2\sqrt{2}(z^2-1)}=$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{-2\sqrt{2}(z-i\sqrt{2})(z-i/\sqrt{2})}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=i\sqrt{2};\quad z=i/\sqrt{2};$

Точка $i\sqrt{2}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $i/\sqrt{2}$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=i/\sqrt{2}} f(z)=\lim_{z\to i/\sqrt{2}}[f(z)(z-i\sqrt{21}/7)]=$$

$$=\lim_{z\to i/\sqrt{2}}\frac{1}{-2\sqrt{2}(z-i\sqrt{2})}=\frac{1}{-2\sqrt{2}(i/\sqrt{2}-i\sqrt{2})}=-\frac{i}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{-2\sqrt{2}(z-i\sqrt{2})(z-i/\sqrt{2})}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot(-\frac{i}{2})=\pi$$

Ответ: $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{6-4\sqrt{2}\sin t}=\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(\sqrt{6}+\frac{\sqrt{5}}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i(2\sqrt{6}z+\sqrt{5}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{5}(z-\frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{5}})(z+\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{5}})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$$z=(1-\sqrt{6})/\sqrt{5};\quad z=(-\sqrt{6}-1)/\sqrt{5};$$

Точка $z=(-\sqrt{6}-1)/\sqrt{5}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=(1-\sqrt{6})/\sqrt{5}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=(1-\sqrt{6})/\sqrt{5}}f(z)=\lim_{z\to(1-\sqrt{6})/\sqrt{5}}\frac{d}{dz}\left[f(z)\left(z-(1-\sqrt{6})/\sqrt{5}\right)^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to(1-\sqrt{6})/\sqrt{5}}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[\sqrt{5}\left(z+(\sqrt{6}+1)/\sqrt{5}\right)\right]^2}=\frac{4}{5i}\lim_{z\to(1-\sqrt{6})/\sqrt{5}}\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z+(\sqrt{6}+1)/\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$=\frac{4}{5i}\lim_{z\to(1-\sqrt{6})/\sqrt{5}}\left[-5\frac{z\sqrt{5}-1-\sqrt{6}}{\left(z\sqrt{5}+1+\sqrt{6}\right)^3}\right]=-\frac{4}{i}\cdot\frac{1-\sqrt{6}-1-\sqrt{6}}{\left(1-\sqrt{6}+1+\sqrt{6}\right)^3}=-\frac{4}{i}\cdot\frac{-2\sqrt{6}}{2^3}=\frac{\sqrt{6}}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{5}(z-\frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{5}})(z+\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{5}})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{i}\right)=2\pi\sqrt{6}$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos t)^2}=2\pi\sqrt{6}$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2+4)(z^2+1)^2}$$

Особые точки:

$z=2i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-2i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

$z=i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=i$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=i}f(z)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[f(z)(z-i)^2]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2(z^2+4)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{-2(2z^2+4+iz)}{(z+i)^3(z^2+4)^2}\right]=-\frac{i}{36}$$

Точка $z=2i$ является простым полюсом и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=2i}f(z)=\lim_{z\to 2i}[f(z)(z-2i)]=\lim_{z\to 2i}\left[\frac{1}{(z^2+1)^2(z+2i)}\right]=\frac{-i}{36}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}=2\pi i\left(-\frac{i}{36}-\frac{i}{36}\right)=\frac{4\pi}{36}=\frac{\pi}{9}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}=\frac{\pi}{9}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\lambda x dx=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$(x^2+1)^2=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm i$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z>0$. Из этого следует:

$$z_m=\{i\}$$

Эта особая точка является полюсом второго порядка. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=i}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z(z-i)^2}{(z^2+1)^2}e^{iz}\right]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+i)^2}e^{iz}\right]=$$

$$=\frac{-2z+i+iz^2}{(z+i)^3}e^{iz}=\frac{1}{4}e^{-1}$$

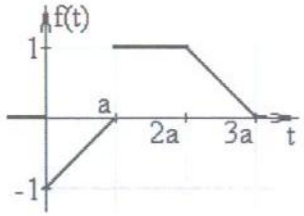
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}dx=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{\pi}{2}e^{-1}$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-1}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t-a}{a}, & 0<t<a\\ 1, & a<t<2a\\ \dfrac{3a-t}{a}, & 2a<t<3a\\ 0, & 3a<t\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{t-a}{a}\cdot\eta(t)+\frac{2a-t}{a}\cdot\eta(t-a)+\frac{2a-t}{a}\eta(t-2a)+\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-2ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{3}{p}\right)e^{-3ap}$$

Ответ: $F(p)=\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-2ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{3}{p}\right)e^{-3ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{1}{p(p^3+1)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{1}{p(p^3+1)}=\frac{1}{p(p+1)(p^2-p+1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{Cp+D}{p^2-p+1}=$$

$$=\frac{Ap^3+A+Bp^3-Bp^2+Bp+Cp^3+Cp^2+Dp^2+Dp}{p(p+1)(p^2-p+1)}=$$

$$=\frac{(A+B+C)p^3+(-B+C+D)p^2+(B+D)p+A}{p(p+1)(p^2-p+1)}$$

Решив систему линейных уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B+C=0\\-B+C+D=0\\B+D=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1/3\\C=-2/3\\D=1/3\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{1}{p(p^3+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{p}{p^2-p+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2-p+1}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{p}{p^2-p+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2-p+1}=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{p}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{p-\frac{1}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\rightarrow$$

$$\rightarrow 1-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$1-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''-2y'-3y=2t$$

$$y(0)=1,\quad y'(0)=1.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)-2pY(p)+2y(0)-3Y(p)=p\frac{2}{t^2}$$

$$p^2Y(p)-p-1-2pY(p)+2-3Y(p)=\frac{2}{p^2}$$

$$(p^2-2p-3)Y(p)-p+1=\frac{2}{t^2}\Rightarrow(p-3)(p+1)Y(p)=\frac{2}{p^2}+p-1=\frac{p^3-p+2}{p^2}$$

$$Y(p)=\frac{p^3-p+2}{p^2(p-3)(p+1)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{p^3-p+2}{p^2(p-3)(p+1)}=\frac{Ap+B}{p^2}+\frac{C}{p-3}+\frac{D}{p+1}=$$

$$=\frac{Ap^3-2Ap^2-3Ap+Bp^2-2Bp-3B+Cp^3+Cp^2+Dp^3-3Dp^2}{p^2(p-3)(p+1)}$$

$$\begin{cases}A+C+D=1\\-2A+B+C-3D=0\\-3A-2B=-1\\-3B=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=7/9\\B=-2/3\\C=-1/18\\D=-1/2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(p)=\frac{7}{9p}-\frac{2}{3p^2}-\frac{1}{18}\frac{1}{p-3}-\frac{1}{2}\frac{1}{p+1}\Rightarrow y(t)=\frac{7}{9}-\frac{2}{3}t-\frac{1}{18}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t}$$

Ответ: $y(t)=\frac{7}{9}-\frac{2}{3}t-\frac{1}{18}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t}$

Задача 25

Материальная точка массы m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат с силой F=kx, пропорциональной расстоянию. На точку действует сила сопротивления среды R=rv, пропорциональная скорости v. При t=0 расстояние точки от начала координат x_0, а скорость v_0. Найти закон движения x=x(t) материальной точки.

$k = 5m$, $r = 4m$, $x_0 = 1м$, $v_0 = 1м/с$.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = kx - rv$$

$$\ddot{x}m - r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 1$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m - 4m\dot{x} + 5mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 5x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) - 4pX(p) + 4x(0) + 5X(p) = 0$$

$$(p^2 - 4p + 5)X(p) - p + 3 = 0$$

$$X(p) = \frac{p-3}{p^2-4p+5} = \frac{p-3}{(p-2)^2+1} = \frac{p-2}{(p-2)^2+1} - \frac{1}{(p-2)^2+1}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t$$

Ответ: $x(t) = e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = \frac{5}{2}x - y + 2 \end{cases}$$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = 3X(p) + 2Y(p) \\ pY(p) - y(0) = \frac{5}{2}X(p) - Y(p) + 2/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) = 3X(p) + 2Y(p) \\ pY(p) - 1 = \frac{5}{2}X(p) - Y(p) + 2/p \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 1 = \tfrac{5}{2}X(p) - Y(p) + 2/p \Rightarrow X(p) = \frac{2}{5}[pY(p) + Y(p) - 1 - 2/p]$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$\frac{2}{5}p[pY(p) + Y(p) - 1 - 2/p] = \frac{6}{5}[pY(p) + Y(p) - 1 - 2/p] + 2Y(p)$$

$$Y(p) = \frac{p - 1 - 6/p}{p^2 - 2p - 8}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{p-1-6/p}{p^2-2p-8} = \frac{p-1-6/p}{(p-1)^2-9} - \frac{3}{4p} + \frac{3}{4p} = \frac{\frac{1}{4}p - \frac{1}{2}}{(p-1)^2-9} + \frac{3}{4p} =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{p-1}{(p-1)^2-9} + \frac{i}{12}\frac{3i}{(p-1)^2-9} + \frac{3}{4p} \to$$

$$\to y(t) = \tfrac{1}{4}e^t\cos 3it + \tfrac{1}{12}e^t\sin 3it + \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4}e^t\operatorname{ch}3t - \tfrac{1}{12}e^t\operatorname{sh}3t + \tfrac{3}{4}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = \tfrac{5}{2}x - y + 2 \Rightarrow x(t) = \tfrac{2}{5}(\dot{y} + y - 2) = \tfrac{2}{5}(\tfrac{2}{3}e^t\operatorname{sh}3t + \tfrac{1}{4}e^t\operatorname{ch}3t -$$

$$- \tfrac{1}{12}e^t\operatorname{sh}3t + \tfrac{3}{4} - 2) = \tfrac{7}{30}e^t\operatorname{sh}3t + \tfrac{1}{10}e^t\operatorname{ch}3t - \tfrac{1}{2}$$

Ответ:

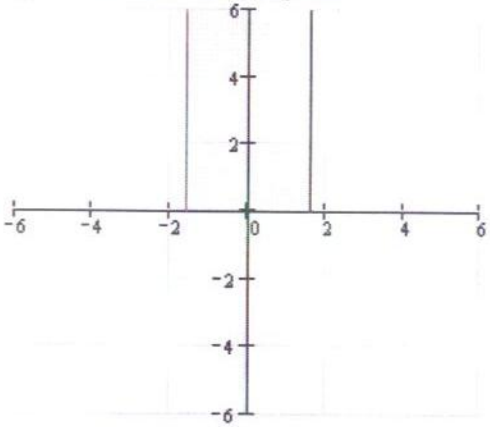
$$x(t) = \tfrac{7}{30}e^t\operatorname{sh}3t + \tfrac{1}{10}e^t\operatorname{ch}3t - \tfrac{1}{2}$$

$$y(t) = \tfrac{1}{4}e^t\operatorname{ch}3t - \tfrac{1}{12}e^t\operatorname{sh}3t + \tfrac{3}{4}$$

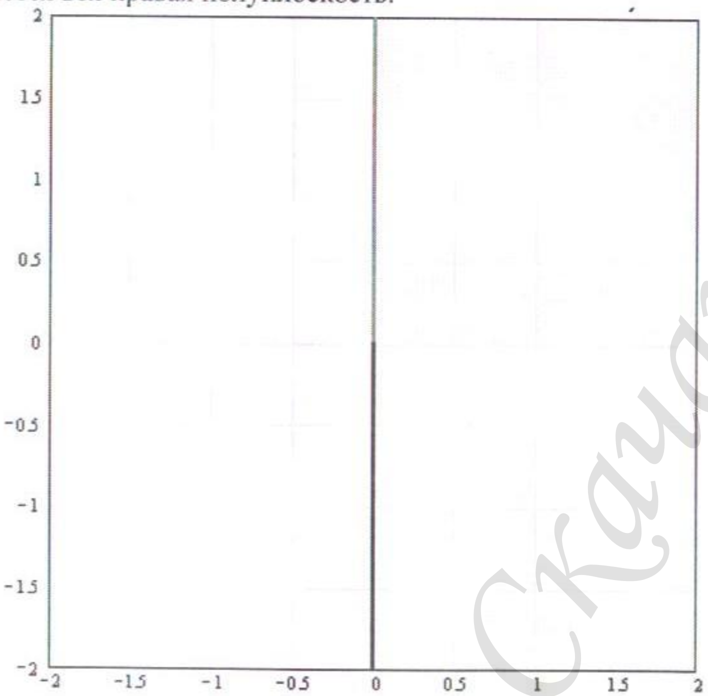
Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = \cos(z)$; полуполоса $-\pi/2<x<\pi/2$, $y>0$.



Каждая из вертикальных линий в полуполосе преобразуется в кривую, исходящую из точки (cos x ; 0) и лежащую в правой полуплоскости. Таким образом отображением полуполосы является вся правая полуплоскость:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\ldots, n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z=x+iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\operatorname{Arc}\sin z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \operatorname{Arc}\cos z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Аналитические функции

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z \in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$