Екзаменаційний білет № 10

I. Теоретична частина

1. Аналітичні методи наближеного розв'язку задачі Коши.

Последовательность выполнения этапа

I. Разрешить ДУ относительно старшей производной и исследовать правую часть полученного уравнения. Если правая часть - является аналитической функцией в начальной точке, то решение задачи можно искать в виде бесконечного ряда по степеням $(x - x_0)$.

II. Решить задачу методом неопределенных коэффициентов.

<u>Алгоритм</u>

1. Записать решение y(x) в виде бесконечного степенного ряда по степеням $(x - x_0)$:
$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot (x - x_0)^k$$

2. Записать все входящие в ДУ производные в виде степенных рядов по степеням $(x - x_0)$, продифференцировав решение y(x).

3. Выписать все коэффициенты ДУ при y(x), производных y(x) и свободном члене.

4. Представить коэффициенты ДУ, являющиеся функциями x, в виде рядов по степеням $(x - x_0)$.

5. Подставить полученные в п. 1, 2 и 4 выражения в исходное ДУ.

6. Раскрыть скобки и привести подобные слагаемые при одинаковых степенях $(x - x_0)$ в левой и правой части уравнения.

7. Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $(x - x_0)$ в левой и правой части уравнения - результат система алгебраических уравнений относительно неизвестных констант C_0, C_1, C_2 и т.д..

8. Воспользовавшись начальными условиями определить значения первых n констант $C_0, C_1 \ldots C_{n-1}$ (здесь n - порядок исходного уравнения).

9. Значения остальных констант определяются из системы п. 7.

10. Записать окончательное решение задачи в виде бесконечного ряда по степеням $(x - x_0)$ с подставленными значениями констант.

III. Решить задачу методом последовательного дифференцирования.

Алгоритм

1. Записать решение y(x) в виде бесконечного степенного ряда по степеням $(x - x_0)$:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k, \quad \text{где} \quad a_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$$

2. Определить значения первых n коэффициентов $a_0, a_1 \ldots a_{n-1}$ (здесь n - порядок исходного уравнения), воспользовавшись начальными условиями.

3. Выразить из ДУ старшую производную. Вычислить ее значение в начальной точке, используя начальные условия. Вычислить коэффициент a_n.

4. Продифференцировав по x выражение для старшей производной из п. 3 найти n+1 производную функции y(x). Вычислить ее значение в начальной точке, используя начальные условия и значение старшей производной, вычисленное в п. 3. Вычислить коэффициент a_{n+1}.

5. Остальные коэффициенты a_k вычисляются аналогично процедуре, описанной в п. 4.

6. Записать окончательное решение задачи в виде бесконечного ряда по степеням $(x - x_0)$ с подставленными значениями коэффициентов.

2. Однокрокові методи рзв’язку залачі Коши.

Однокрокові методи розв'язання задачі Коші - методи Рунге-Кутта.

Нехай треба розв’язати задачу Коші для нелінійного ДР першого порядку, розв’язаний відносно похідної

$$y'(x) = f(x, y) \qquad (1)$$

з початковими умовами (ПУ)

$$y(x_0) = y_0 .$$

Однокрокові методи характеризуються наступним:

1) Однокроковими вони є тому, що для обчислення y_{k+1}, необхідна інформація лише про точку (y_k, x_k).
2) Розв’язок, отриманий за допомогою цих методів, збігається з рядом Тейлора до членів порядку h^r.
3) Вони не вимагають обчислення *похідних* функції *f(x,y)*, а лише обчислення самої функції *f(x,y)*.

Наближений розв’язок задачі Коші будемо шукати на кінцевій множині точок відрізку [x_0, $x_0 + l$], яке зветься *сіткою*. Оберемо сітку $\omega_h = \{x_j\}$, $j = 0, 1, \ldots, N$, де

$$x_j = x_j + jh,\ h = l / N,\ N$$ – позитивне ціле.

3.1 Метод Ейлера

Розглянемо рівняння

$$y' = y$$

Його розв’язком є

$$y = Ce^x$$

Оскільки рівняння має вид

$$y'(x) = f(x, y)$$

маємо можливість обчислювати похідну інтегральної кривої в кожній із точок *(x,y)*. Тоді грубий розв’язок ДР можна знайти в наступний спосіб. У початковий момент маємо лише одну точку (x_0 , y_0)

$$y' = f(x_0, y_0)$$

Побудуємо дотичну у точці (x_0 , y_0) і перейдемо вздовж неї на малу відстань *h*, тобто обчислимо

$$y' = f(x_1, y_1),$$

де $x_1 = x_0 + h$, $y_1 = y_0 + hy'$.

Продовжуючи цей процес для наступних точок отримаємо *ламану Ейлера*. Доведено, що якщо $\varphi(x)$ є ламана Ейлера, а $\varphi^*(x)$ – точний розв'язок рівняння (1), то

$$\lim_{h\to 0} |\varphi(x)-\varphi^*(x)| = 0$$

Найпростіші методи Рунга-Кутта можуть бути отримані з наочних міркувань.

Рівнянням прямої L є

$$y_{k+1} = y_k + y'_k(x_{k+1} - x_k) = y_k + h\,y'_k$$

але $y'_k = f(x_k, y_k)$. Отже, маємо

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k);$$

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad k = 0,1,2,\ldots, \qquad (2),$$

це і є *метод Ейлера* для розв'язання задачі Коші. У відсутність похибки округлення, локальна похибка (тобто похибка на кроці) методу є $O(h^2)$. Глобальна (на інтервалі) похибка методу Ейлера становить $O(h)$.

Приклад 1.

На відрізку $[0;1]$ скласти таблицю значень розв'язків

рівняння

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

з ПУ $y(0) = 1$ і кроком таблиці $h = 0,2$.

У цьому рівнянні маємо

$$f(x, y) \equiv y - 2x / y .$$

Через те що $x_0 = 0$ і $y_0 = 1$, для y_1 маємо

$$y_1 = y_0 + h(y_0 - x_0 / y_0) = 1 + 0,2 \cdot 1 = 1,2 ;$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,2 = 0,2 ;$$

$$y_2 = y_1 + h(y_1 - x_1 / y_1) = 1,3733 ;$$

$x_2 = x_1 + h = 0,4$ і т.д.

3.2. Метод Ейлера-Коші.

У цьому методі знаходиться середній тангенс кута нахилу дотичної для двох точок ($x_к$, y_k) та (x_{k+1}, y^*_{k+1}).

Тобто

$$y^*_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k);$$

$$y_{k+1} = y_k + h[(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^*_{k+1})) / 2]; \qquad (3)$$

$$x_{k+1} = x_k + h , \quad k = 0,1,2,... ,$$

Локальна похибка методу становить $O(h^3)$, а глобальна - $O(h^2)$. Неважко помітити, що формула (3) співпадає з рядом Тейлора до h^2 включно:

$$y(k) = y_0 + h\, y'_0 + h\, y'_0 + h^2\, y'_0 / 2!$$

$$y''_0 = (y'_1 + y'_0) / h,$$

таким чином

$$y(k) = y_0 + h\,y'_0 + h\,y'_0 + h^2\,(y'_1 + y'_0)\,/\,h = y_0 + h(y'_1 + y'_0)\,/\,2$$

Удосконалений метод Ейлера.

$$y_{k+1/2} = y_k + h/2\, f(x_k,\, y_k);$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k + h/2,\, y_{k+1/2}); \qquad (4)$$

$$x_{k+1} = x_k + h\,, \quad k = 0,1,2,\ldots\,,$$

3.3. Метод Рунге-Кутта 4-го порядку точності. У цьому методі для переходу від точки ($x_к, y_k$) до точки (x_{k+1}, y_{k+1}) спочатку обчислюють

$$k_1 = hf(x_k, y_k)\,;$$

$$k_2 = hf(x_k + h/2,\, y_k + k_1/2);$$

$$k_3 = hf(x_k + h/2,\, y_k + k_2/2);$$

$$k_4 = hf(x_k + h,\, y_k + k_3)\,.$$

Потім приймають

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,,$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k\,, \quad x_{k+1} = x_k + h\,. \qquad (5)$$

$$x_{k+1} = x_k + h\,, \quad k = 0,1,2,\ldots\,,$$

Перехід від точки (x_{k+1}, y_{k+1}) до точки (x_{k+2}, y_{k+2}) виконується аналогічно. Локальна похибка методу становить $O(h^5)$, а глобальна - $O(h^4)$.

Оцінка похибки. Важко дати загальну аналітичну оцінку похибки методів Рунге-Кутта залежно від кроку h. Для методів четвертого порядку точності обчислюється відхилення

$$\theta = \frac{|k_2 - k_3|}{|k_1 - k_2|}.$$

Крок h вважається прийнятним, якщо величина не перевищує кількох сотих (до 0,05).

II. Практична частина

За допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа, побудованого на проміжку

[1;15], обчислити значення функції

```
5*ln(x)*sin(x)*sin(x)
```

в точках [1.45, 4.33, 6.5, 11.7, 14.8] з точністю не гірше за 10^{-4}.