/ТФКП/ 2007

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[3]{8i}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi = \arg(z); \quad k = 0,1,\ldots,n-1; \quad z \neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[3]{8i}$:

$$\sqrt[3]{8i} = \sqrt{3} + i$$

$$\sqrt[3]{8i} = -\sqrt{3} + i$$

$$\sqrt[3]{8i} = -2i$$

Ответ: $\sqrt[3]{8i} = \{\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} + i; -2i\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\mathrm{Ln}(1 + i\sqrt{3})$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Подставим в эту формулу значения z:

$$\mathrm{Ln}\,(1 + i\sqrt{3}) = \ln\left|1 + i\sqrt{3}\right| + i\mathrm{Arg}\,(1 + i\sqrt{3}) =$$

$$= \ln 2 + i(\arg(1 + i\sqrt{3}) + 2\pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Вычислим значения логарифма и аргумента:

$$\mathrm{Ln}\,(1 + i\sqrt{3}) \approx 0{,}693 + i(\frac{\pi}{3} + 2\pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ответ: $\mathrm{Ln}\,(1 + i\sqrt{3}) \approx 0{,}693 + i(\frac{\pi}{3} + 2\pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arch}(3i)$$

Функция Arch является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arch}\, z = i\cdot \mathrm{Arc}\cos(z) = i\cdot[-i\cdot \mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})] =$$
$$= \mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$$

Подставим вместо z значение (–1):

$$\mathrm{Arch}(3i) = \mathrm{Ln}(3i+\sqrt{-10}) = \mathrm{Ln}(3i+i\sqrt{10})$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$\mathrm{Ln}(3i+i\sqrt{10}) = \ln|3i+i\sqrt{10}| + i[\arg(3i+i\sqrt{10}) + 2\pi k] =$$

$$= \ln(3+\sqrt{10}) + i[\arg(3i+i\sqrt{10}) + 2\pi k] \approx 1{,}818 + i\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$$

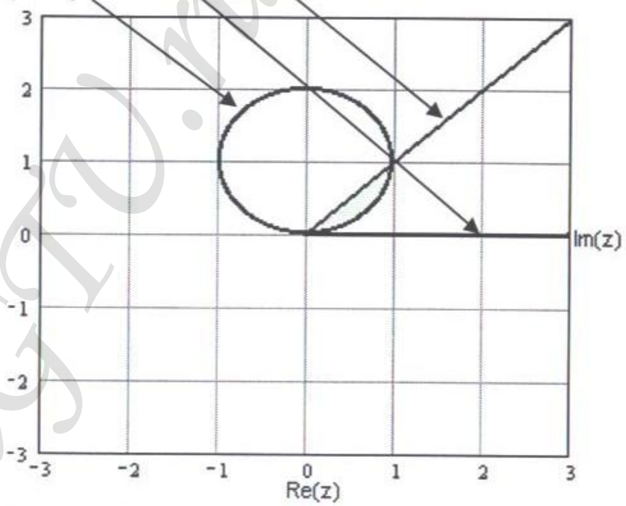
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ответ: $\mathrm{Arch}(3i) \approx 1{,}818 + i\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z-i| \le 1, \quad 0 < \arg z < \pi/4$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z = 2\mathrm{ch}\, 3t - i3\mathrm{sh}\, 3t$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t) = 2\mathrm{ch}\, 3t; \quad y(t) = -3\mathrm{sh}\, 3t$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = 2\mathrm{ch}\, 3t \Rightarrow \mathrm{ch}\, 3t = \frac{x}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{3}\mathrm{arch}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$y = -3\mathrm{sh}\, 3t \Rightarrow \mathrm{sh}\, 3t = -\frac{y}{3} \Rightarrow t = -\frac{1}{3}\mathrm{arsh}\left(\frac{y}{3}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\frac{1}{3}\mathrm{arch}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{3}\mathrm{arsh}\left(\frac{y}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{3}\mathrm{arch}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3}\mathrm{arsh}\left(\frac{y}{3}\right) = 0$$

Ответ: $\frac{1}{3}\mathrm{arch}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3}\mathrm{arsh}\left(\frac{y}{3}\right) = 0$

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной действительной части u(x,y) и значению $f(z_0)$:

$u = y - 2xy$

$f(0) = 0$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = 2ix - 2y - i = 2i(x+iy) - i = 2iz - i$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int(2iz - i)dz = iz^2 - iz + C$$

Определим константу C:

$f(0) = i0^2 - i0 + C = 0 + C = 1 \Rightarrow C = 0$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$f(z) = iz^2 - iz$

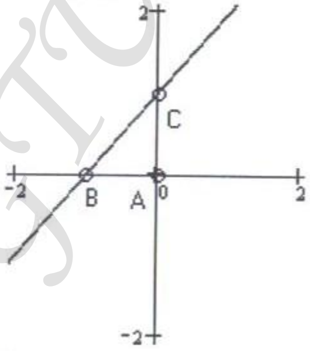
Ответ: $f(z) = iz^2 - iz$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int\limits_{ABC}(\operatorname{ch} z + \cos iz)dz;\ ABC - \text{ломаная}: z_A = 0, z_B = -1; z_C = i$$

Покажем ломаную, по которой должно проходить интегрирование:



Проверка, является ли функция аналитической, слишком громоздка, поэтому используем метод, пригодный для любого случая. Представим отрезки ломаной в параметрическом виде:

$AB: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = 0; z_A = z(0); z_B = z(-1)$

$BC: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = 1 + t; z_B = z(-1); z_C = z(0)$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int\limits_{ABC} f(z)dz = \int\limits_0^{-1} f[\underset{AB}{z(t)}]z'(t)dt + \int\limits_{-1}^{0} f[\underset{BC}{z(t)}]z'(t)dt = \int\limits_0^{-1}(\operatorname{ch} t + \cos it)dt +$$

$$+\int\limits_{-1}^{0}[\operatorname{ch}(t + i + it) + \cos(it - 1 - t)]dt = \left(-\frac{3}{20} - \frac{i}{20}\right)\cdot(5e - 2\operatorname{sh}1 +$$

$$+4i\cdot\operatorname{sh}1 - 8\sin 1 - 4i\cdot\sin 1 - \frac{5}{e})$$

Ответ: $\int\limits_{ABC} f(z)dz = \left(-\frac{3}{20} - \frac{i}{20}\right)\cdot(5e - 2\operatorname{sh}1 + 4i\cdot\operatorname{sh}1 - 8\sin 1 - 4i\cdot\sin 1 - \frac{5}{e})$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}=\frac{6(z-24)}{z^2(z+12)(z-6)}=\frac{6}{z^2}\cdot\frac{z-24}{(z+12)(z-6)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

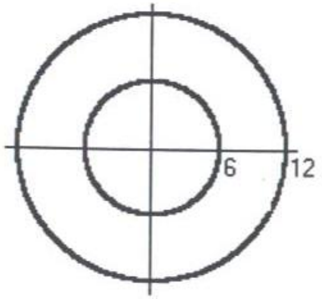
$$\frac{z-24}{(z+12)(z-6)}=\frac{A}{z+12}+\frac{B}{z-6}=\frac{Az-6A+Bz+12B}{(z+12)(z-6)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=2;B=-1\}\Rightarrow\frac{z-24}{(z+12)(z-6)}=\frac{2}{z+12}-\frac{1}{z-6}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+12}-\frac{1}{z-6}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=6; z=-12$



Рассмотрим область $|z|<6$:

$$f(z)=\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+12}-\frac{1}{z-6}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{12}}+\frac{1}{1-\frac{z}{6}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{12}+\frac{z^2}{144}-\frac{z^3}{1728}+...\right)+\left(1+\frac{z}{6}+\frac{z^2}{36}+\frac{z^3}{216}+...\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}-\frac{z}{1728}+...\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}+\frac{z}{216}+...\right)$$

Рассмотрим область $6<|z|<12$:

$$f(z)=\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+12}-\frac{1}{z-6}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{12}}-\frac{6}{z(1-\frac{6}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{12}+\frac{z^2}{144}-\frac{z^3}{1728}+...\right)+\left(\frac{6}{z}+\frac{36}{z^2}+\frac{216}{z^3}+\frac{1296}{z^4}+...\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}-\frac{z}{1728}+...\right)+\left(\frac{6}{z^3}+\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}+\frac{1296}{z^6}+...\right)$$

Рассмотрим область $|z|>12$:

$$f(z)=\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+12}-\frac{1}{z-6}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{12}{z(1+\frac{12}{z})}-\frac{6}{z(1-\frac{6}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{12}{z}-\frac{144}{z^2}+\frac{1728}{z^3}-\frac{20736}{z^4}+...\right)+\left(\frac{6}{z}+\frac{36}{z^2}+\frac{216}{z^3}+\frac{1296}{z^4}+...\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{12}{z^3}-\frac{144}{z^4}+\frac{1728}{z^5}-\frac{20736}{z^6}+...\right)+\left(\frac{6}{z^3}+\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}+\frac{1296}{z^6}+...\right)$$

Ответ:

$$|z|<6: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}-\frac{z}{1728}+...\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}+\frac{z}{216}+...\right)$$

$$6<|z|<12: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}-\frac{z}{1728}+...\right)+\left(\frac{6}{z^3}+\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}+\frac{1296}{z^6}+...\right)$$

$$|z|>12: f(z)=\left(\frac{12}{z^3}-\frac{144}{z^4}+\frac{1728}{z^5}-\frac{20736}{z^6}+...\right)+\left(\frac{6}{z^3}+\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}+\frac{1296}{z^6}+...\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$.

$$f(z)=\frac{z+3}{z^2-1},\ z_0=-2-2i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z+3}{z^2-1}=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z+1}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{2}{z-1}=2\cdot\frac{1}{z-1}=2\cdot\frac{1}{(z-z_0)-3-2i}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-3-2i)^{n+1}}=$$

$$=-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3+2i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-z_0)-1-2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-1-2i)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1+2i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1+2i)^{n+1}}-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3+2i)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+2i)^{n+1}}-\frac{2}{(3+2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+2i)^{n+1}}-\frac{2}{(3+2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=z\cdot\cos\frac{z}{z+2i},\ z_0=-2i$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z+2i;\ z\cdot\cos\frac{z}{z+2i}=(z'-2i)\cos\frac{z'-2i}{z'}=(z'-2i)[\cos1\cos\frac{2i}{z'}+$$

$$+\sin1\sin\frac{2i}{z'}]=z'\cos1\cos\frac{2i}{z'}+z'\sin1\sin\frac{2i}{z'}-2i\cos1\cos\frac{2i}{z'}-2i\sin1\sin\frac{2i}{z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=z'\cos1\cos\frac{2i}{z'}+z'\sin1\sin\frac{2i}{z'}-2i\cos1\cos\frac{2i}{z'}-2i\sin1\sin\frac{2i}{z'}=$$

$$=\left(1+\frac{2^2}{2!z'^2}+\frac{2^4}{4!z'^4}+\ldots\right)z'\cos1+\left(\frac{2i}{z'}+\frac{2^3i}{3!z'^3}+\frac{2^5i}{5!z'^5}+\ldots\right)z'\sin1-$$

$$-2i\left(1+\frac{2^2}{2!z'^2}+\frac{2^4}{4!z'^4}+\ldots\right)\cos1-2i\left(\frac{2i}{z'}+\frac{2^3i}{3!z'^3}+\frac{2^5i}{5!z'^5}+\ldots\right)\sin1=$$

$$=z'\cos1-2i\cos1+2i\sin1+\frac{2^2(\cos1+2!\sin1)}{2!z'}+\frac{2^3i(2!\sin1-3!\cos1)}{2!3!z'^2}+$$

$$+\frac{2^4(3!\cos1+4!\sin1)}{3!4!z'^3}+\frac{2^5i(4!\sin1-5!\cos1)}{4!5!z'^4}+\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=-2i$:

$$f(z)=z\cos1+2i\sin1+\frac{2^2(\cos1+2!\sin1)}{2!(z+2i)}+\frac{2^3i(2!\sin1-3!\cos1)}{2!3!(z+2i)^2}+$$

$$+\frac{2^4(3!\cos1+4!\sin1)}{3!4!(z+2i)^3}+\frac{2^5i(4!\sin1-5!\cos1)}{4!5!(z+2i)^4}+\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=z\cos1+2i\sin1+\frac{2^2(\cos1+2!\sin1)}{2!(z+2i)}+\frac{2^3i(2!\sin1-3!\cos1)}{2!3!(z+2i)^2}+$$

$$+\frac{2^4(3!\cos1+4!\sin1)}{3!4!(z+2i)^3}+\frac{2^5i(4!\sin1-5!\cos1)}{4!5!(z+2i)^4}+\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{\sin 4z-4z}{e^{z}-1-z}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{\sin 4z-4z}{e^{z}-1-z}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{matrix} g(z)=\sin 4z-4z; \\ h(z)=e^{z}-1-z; \end{matrix}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g'(z)=4\cos 4z-4; g'(0)=4\cos 0-4=0$$

$$g''(z)=-16\sin 4z; g''(0)=-16\sin 0=0$$

$$g'''(z)=-64\cos 4z; g'''(0)=-64\cos 0=-64$$

$$h'(z)=e^{z}-1; h'(0)=e^{0}-1=0$$

$$h''(z)=e^{z}; h''(0)=e^{0}=1;$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в числителе, то точка z = 0 является нулем функции. Порядок этого нуля находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 3 – 2 = 1.

Ответ: Точка z = 0 является нулем 1-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\frac{\sin \pi z}{(z-1)^{3}}$$

Изолированной особой точкой является z = 1. Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{\sin \pi z}{(z-1)^{3}};\quad \begin{matrix} g(z)=\sin \pi z; \\ h(z)=(z-1)^{3}; \end{matrix}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 1:

$$g(1)=0;$$
$$g'(z)=\pi\cos \pi z; g'(1)\neq 0;$$
$$h(1)=0;$$
$$h'(z)=3(z-1)^{2}; h'(1)=0;$$
$$h''(z)=6z-6; h''(1)=0;$$
$$h'''(z)=6; h'''(1)\neq 0$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 1 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 1 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это 3 –1 = 2.

Ответ: Точка z = 1 для данной функции является полюсом 2-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-1/2|=1} \underbrace{\frac{e^z+1}{z(z-1)}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = 0$
$z = 1$

Точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$ являются простыми полюсами. Найдем вычеты в этих точках:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)(z-0)] = \lim_{z\to 0}\frac{z(e^z+1)}{z(z-1)} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z+1}{z-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to 1}[f(z)(z-1)] = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(e^z+1)}{z(z-1)} = \lim_{z\to 1}\frac{e^z+1}{z} =$$

$$= \frac{1+e}{1} = 1+e$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot (-2+1+e) =$$
$$= 2\pi i \cdot (e-1)$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)} dz = 2\pi i \cdot (e-1)$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{z^3-3z^2+1}{2z^4}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$\frac{z^3-3z^2+1}{2z^4} = \frac{1}{2z} - \frac{3}{2z^2} + \frac{1}{2z^4}$$

Считая получившийся результат рядом Лорана по степеням z, т.е. в окрестности $z = 0$, мы приходим к выводу, что точка $z = 0$ является полюсом 4-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{6}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}[f(z)z^4] = \frac{1}{6}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{z^3-3z^2+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{z\to 0} 6 = \frac{6}{6} = 1$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3-3z^2+1}{2z^4} dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3-3z^2+1}{2z^4} dz = 2\pi i$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=2} \underbrace{\frac{\cos 4z - 1 + 8z^2}{z^4 \operatorname{sh}(4z/3)}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции z = 3ikπ/4. Однако в контур попадает только z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{\cos 4z - 1 + 8z^2}{z^4 \operatorname{sh}(4z/3)} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad \begin{matrix} g(z) = \cos 4z - 1 + 8z^2 \\ h(z) = z^4 \operatorname{sh}(4z/3) \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при z = 0. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что z = 0 представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\cos 4z - 1 + 8z^2}{z^3 \operatorname{sh}(4z/3)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{16z - 4\sin 4z}{3z^2 \operatorname{sh}(4z/3) + \frac{4}{3}z^3 \operatorname{ch}(4z/3)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{16 - 16\cos 4z}{(6z + \frac{16}{9}z^3)\operatorname{sh}(4z/3) + 8z^2 \operatorname{ch}(4z/3)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{64\sin 4z}{(6 + 16z^2)\operatorname{sh}(4z/3) + (24z + \frac{64}{27}z^3)\operatorname{ch}(4z/3)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{256\cos 4z}{(32 + \frac{256}{9}z^2)\operatorname{ch}(4z/3) + (64z + \frac{256}{81}z^3)\operatorname{sh}(4z/3)}\right) = \frac{256}{32} = 8$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 4z - 1 + 8z^2}{z^4 \operatorname{sh}(4z/3)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot 8 = 16\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 4z - 1 + 8z^2}{z^4 \operatorname{sh}(4z/3)} dz = 16\pi i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \left(z e^{\frac{1}{z-1}} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-2)^2(z-4)} \right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \underbrace{z e^{\frac{1}{z-1}}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z-1|=2} \underbrace{\frac{2\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-2)^2(z-4)}}_{f_2(z)} dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint\limits_{|z-1|=2} z e^{\frac{1}{z-1}} dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left\{\begin{matrix} t = z - 1 \\ z = t + 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z e^{\frac{1}{z-1}} = (t+1)e^{\frac{1}{t}}$$

Единственной особой точкой этой функции является t=0. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t+1)e^{\frac{1}{t}} = (t+1)\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2!t^2} + \frac{1}{3!t^3} + \frac{1}{4!t^4} + \frac{1}{5!t^5} + \ldots\right) =$$

$$= \left(t + 1 + \frac{1}{2!t} + \frac{1}{3!t^2} + \frac{1}{4!t^3} + \ldots\right) + \left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2!t^2} + \frac{1}{3!t^3} + \frac{1}{4!t^4} + \ldots\right) =$$

$$= t + 2 + \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2!} + 1\right) + \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right) + \frac{1}{t^3}\left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!}\right) + \frac{1}{t^4}\left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{4!}\right) + \ldots$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов, из чего следует, что t=0 является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+1)e^{\frac{1}{t}}\right] = C_{-1} = \frac{1}{2!} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-1|=2} ze^{\frac{1}{z-1}}dz = \oint\limits_{|t|=2}(t+1)e^{\frac{1}{t}}dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+1)e^{\frac{1}{t}}\right] = 2\pi i\cdot\left(\frac{3}{2}\right) = 3\pi i$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{2\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-2)^2(z-4)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=2 и z=4. При этом точка z=4 не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=2 является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=2} f_2(z) = \lim_{z\to2}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-2)^2\cdot 2\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-2)^2(z-4)}\right] = \lim_{z\to2}\frac{d}{dz}\left[\frac{2\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-4)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to2}\left[-\frac{\pi}{(z-4)}\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) - \frac{2}{(z-4)^2}\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{2\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-2)^2(z-4)}dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=2} f_2(z) = 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-1|=2}\left(ze^{\frac{1}{z-1}} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-2)^2(z-4)}\right)dz = \oint\limits_{|z-1|=2} ze^{\frac{1}{z-1}}dz +$$

$$+\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{2\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-2)^2(z-4)}dz = 3\pi i + \pi i = 4\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-1|=2}\left(ze^{\frac{1}{z-1}} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-2)^2(z-4)}\right)dz = 4\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-2\sqrt{2}\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{8}\sin t} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{3-\frac{\sqrt{8}}{2i}(z-\frac{1}{z})} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{3iz-\frac{\sqrt{8}}{2}(z^2-1)} =$$

$$= \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{6iz-\sqrt{8}(z^2-1)} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{-\sqrt{8}(z-i/\sqrt{2})(z-i\sqrt{2})}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = i/\sqrt{2};\quad z = i\sqrt{2};$

Точка $i\sqrt{2}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $i/\sqrt{2}$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=i/\sqrt{2}} f(z) = \lim_{z\to i/\sqrt{2}}[f(z)(z-i/\sqrt{2})] =$$

$$= \lim_{z\to i/\sqrt{2}}\frac{2}{-\sqrt{8}(z-i\sqrt{2})} = \frac{2}{-\sqrt{8}(i/\sqrt{2}-i\sqrt{2})} = -i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{-\sqrt{8}(z-i/\sqrt{2})(z-i\sqrt{2})} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i\cdot(-i) = 2\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-2\sqrt{2}\sin t} = 2\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+2\sqrt{2}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+2\sqrt{2}\cos t)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{(3+\sqrt{2}(z+\frac{1}{z}))^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{i(3z+\sqrt{2}(z^2+1))^2} = \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{i\left[\sqrt{2}(z+\sqrt{2})(z+\frac{1}{\sqrt{2}})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-\sqrt{2};\quad z=-1/\sqrt{2};$

Точка $z=-\sqrt{2}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=-1/\sqrt{2}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-1/\sqrt{2}} f(z) = \lim_{z\to -1/\sqrt{2}} \frac{d}{dz}[f(z)\left(z+1/\sqrt{2}\right)^2] =$$

$$= \lim_{z\to -1/\sqrt{2}} \frac{d}{dz} \frac{z}{i\left[\sqrt{2}\left(z+\sqrt{2}\right)\right]^2} = \frac{1}{2i} \lim_{z\to -1/\sqrt{2}} \frac{d}{dz} \frac{z}{\left(z+\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2i} \lim_{z\to -1/\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{2}-z}{\left(z+\sqrt{2}\right)^3}\right] = -\frac{1}{2i} \cdot \frac{\sqrt{2}+1/\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}-1/\sqrt{2}\right)^3} = \frac{3}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1} \frac{zdz}{i\left[\sqrt{2}(z+\sqrt{2})(z+\frac{1}{\sqrt{2}})\right]^2} = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot \left(\frac{3}{i}\right) = 6\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+2\sqrt{2}\cos t)^2} = 6\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_m \operatorname*{res}_{z_m} R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2+1}{(z^2+z+1)^2}dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z^2+1)dz}{(z+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^2(z+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})^2}$$

Особые точки:

$z=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\quad(\operatorname{Im} z>0);\quad z=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\quad(\operatorname{Im} z<0)$

Точка $z=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}} f(z) = \lim_{z\to -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}} \frac{d}{dz}[f(z)(z+\tfrac{1}{2}-\tfrac{i\sqrt{3}}{2})^2] =$$

$$= \lim_{z\to -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2+1}{(z+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^2}\right] = \lim_{z\to -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}} \left[\frac{8(z+iz\sqrt{3}-2)}{(2z+1+i\sqrt{3})^3}\right] = \frac{4\sqrt{3}}{9i}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{(x^2+x+1)^2} = 2\pi i\left(\frac{4\sqrt{3}}{9i}\right) = \frac{8\sqrt{3}\pi}{9}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{9}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\lambda x dx=\operatorname{Re}\left\{2\pi i\sum_{m}\underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$(x^2+1)^2(x^2+4)=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm i;z_{3,4}=\pm 2i;$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. Из этого следует:

$$z_m=\{i;2i\}$$

Особая точка $z=2i$ является простым полюсом. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=2i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)}{(z^2+1)^2(z^2+4)}e^{5iz}=\lim_{z\to 2i}\frac{e^{5iz}}{(z^2+1)^2(z+2i)}=$$

$$=\frac{e^{-10}}{(-4+1)^2(2i+2i)}=\frac{e^{-10}}{36i}=\frac{1}{36i}e^{-10}$$

Особая точка $z=i$ является полюсом второго порядка. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i)^2e^{5iz}}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\right]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{5iz}}{(z+i)^2(z^2+4)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{5iz^3-9z^2+18iz-28}{(z+i)^3(z^2+4)^2}e^{5iz}\right]=\frac{4}{9i}e^{-5}$$

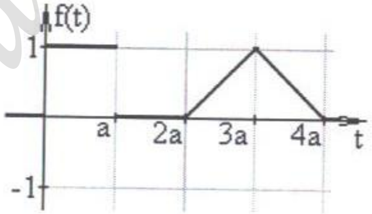
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx=\operatorname{Re}\left\{2\pi i\sum_{m}\underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{\pi}{18}e^{-10}+\frac{8\pi}{9}e^{-5}$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx=\frac{\pi}{18}e^{-10}+\frac{8\pi}{9}e^{-5}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<a\\ 0, & a<t<2a\\ \dfrac{t-2a}{a}, & 2a<t<3a\\ \dfrac{4a-t}{a}, & 3a<t<4a\\ 0, & 4a<t\end{cases}$$

$$f(t)=1\cdot\eta(t)-1\cdot\eta(t-a)+\frac{t-2a}{a}\eta(t-2a)+\frac{6a-2t}{a}\eta(t-3a)+\frac{t-4a}{a}\eta(t-4a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{2}{p}\right)e^{-2ap}+\left(\frac{6}{p}-\frac{2}{ap^2}\right)e^{-3ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{4}{p}\right)e^{-4ap}$$

Ответ: $F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{2}{p}\right)e^{-2ap}+\left(\frac{6}{p}-\frac{2}{ap^2}\right)e^{-3ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{4}{p}\right)e^{-4ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}=\frac{A}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^2-2p+5}=$$

$$=\frac{Ap^2-2Ap+5A+Bp^2+Bp+Cp+C}{(p+1)(p^2-2p+5)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(-2A+B+C)p+(5A+C)}{(p+1)(p^2-2p+5)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\-2A+B+C=1\\5A+C=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/2\\B=-1/2\\C=5/2\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2-2p+5}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p^2-2p+5}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2-2p+5}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p^2-2p+5}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{(p-1)^2+4}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(p-1)^2+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{2}{(p-1)^2+4}\to$$

$$\to\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}\cos 2t+e^{t}\sin 2t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}\cos 2t+e^{t}\sin 2t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''+4y'+29y=e^{-2t}$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+4pY(p)-4y(0)+29Y(p)=\frac{1}{p+2}$$

$$p^2Y(p)-1+4pY(p)+29Y(p)=\frac{1}{p+2}$$

$$(p^2+4p+29)Y(p)=\frac{p+3}{p+2}$$

$$Y(p)=\frac{p+3}{(p+2)(p^2+4p+29)}$$

Найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{p+3}{(p+2)(p^2+4p+29)}=\frac{A}{p+2}+\frac{Bp+C}{p^2+4p+29}=$$

$$=\frac{Ap^2+4Ap+29A+Bp^2+2Bp+Cp+2C}{(p+2)(p^2+4p+29)}$$

$$\begin{cases}A+B=0\\4A+2B+C=1\\29A+2C=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/25\\B=-1/25\\C=23/25\end{cases}\Rightarrow Y(p)=\frac{1}{25}\left(\frac{1}{p+2}-\frac{p-23}{p^2+4p+29}\right)$$

$$Y(p)=\frac{1}{25}\left(\frac{1}{p+2}-\frac{p+2}{(p+2)^2+25}+5\frac{5}{(p+2)^2+25}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{e^{-2t}-e^{-2t}\cos 5t+5\sin 5t}{25}$$

Ответ: $y(t)=\dfrac{e^{-2t}-e^{-2t}\cos 5t+5\sin 5t}{25}$

Задача 25

Материальная точка массы m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат с силой F=kx, пропорциональной расстоянию. На точку действует сила сопротивления среды R=rv, пропорциональная скорости v. При t=0 расстояние точки от начала координат x_0, а скорость v_0. Найти закон движения x=x(t) материальной точки.

$k = 3m,\ r = 2m,\ x_0 = 1м,\ v_0 = 2м/с.$

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = kx - rv$$

$$\ddot{x}m - r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 2$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m - 2m\dot{x} + 3mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 3x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) - 2pX(p) + 2x(0) + 3X(p) = 0$$

$$(p^2 - 2p + 3)X(p) - p = 0$$

$$X(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 3} = \frac{p}{(p-1)^2 + 2} = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(p-1)^2 + 2}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = e^t \cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}e^t \sin\sqrt{2}t$$

Ответ: $x(t) = e^t \cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}e^t \sin\sqrt{2}t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = -4x \end{cases}$$

$x(0) = 3, \quad y(0) = 1.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = 2X(p) - 2Y(p) \\ pY(p) - y(0) = -4X(p) \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) - 3 = 2X(p) - 2Y(p) \\ pY(p) - 1 = -4X(p) \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 1 = -4X(p) \Rightarrow X(p) = -\frac{pY(p) - 1}{4}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p[-\frac{pY(p)-1}{4}] - 3 = 2[-\frac{pY(p)-1}{4}] - 2Y(p) \Rightarrow Y(p) = \frac{p-14}{p^2 - 2p - 8}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{p-14}{p^2 - 2p - 8} = \frac{p-14}{(p-1)^2 - 9} = \frac{p-1}{(p-1)^2 - 9} - \frac{13}{3i}\frac{3i}{(p-1)^2 - 9} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = e^t \cos 3it + \tfrac{13i}{3}e^t \sin 3it = e^t ch3t - \tfrac{13}{3}e^t sh3t$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = -4x \Rightarrow x(t) = -\tfrac{1}{4}\dot{y} = -\tfrac{1}{4}(-\tfrac{4}{3}e^t sh3t - 12e^t ch3t) =$$

$$= \tfrac{1}{3}e^t sh3t + 3e^t ch3t$$

Ответ:

$$x(t) = \tfrac{1}{3}e^t sh3t + 3e^t ch3t$$

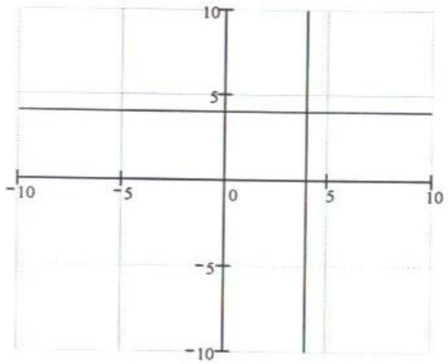
$$y(t) = e^t ch3t + \tfrac{13}{3}e^t sh3t$$

Задача 27

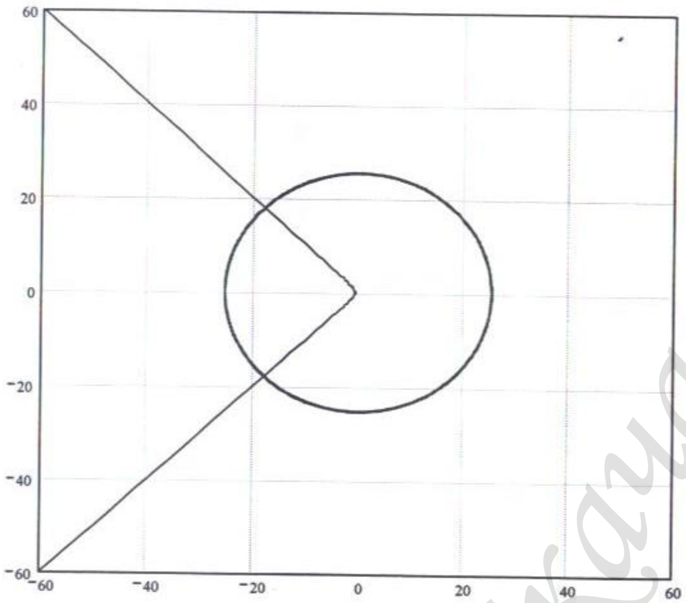
Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = \cos z$; прямоугольная сетка x=C, y=C.

В качестве наглядного примера возьмем $C=5\pi/4$:



Каждая из горизонтальных прямых преобразуется в окружность радиуса cos(iC), а каждая вертикальная – в два луча, исходящие из точки (0;cos C) в направлении ±C радиан:



Таким образом, при $C\in(-\infty;\infty)$ сетка отображается во всю комплексную плоскость.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\dots,n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z=x+iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0,\pm1,\pm2,\dots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Аналитические функции

Функция w=f(z) называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция w=f(z) называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z\in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$