/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,...,n-1;\quad z\neq 0$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$:

$$\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}=\sqrt{3}+i$$

$$\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}=-1+i\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}=-\sqrt{3}-i$$

$$\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}=1-i\sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}=\left\{\sqrt{3}+i;-1+i\sqrt{3};-\sqrt{3}-i;1-i\sqrt{3}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\mathrm{Ln}(-1-i)$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим в эту формулу значения z:

$$\mathrm{Ln}(-1-i)=\ln|-1-i|+i\mathrm{Arg}(-1-i)=$$

$$=\ln\sqrt{2}+i(\arg(-1-i)+2\pi k),\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

Вычислим значения логарифма и аргумента:

$$\mathrm{Ln}(-1-i)\approx 0.347+i(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k),\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

Ответ: $\mathrm{Ln}(-1-i)\approx 0.347+i(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k),\ k=0,\pm1,\pm2,...$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arcth}\left(\frac{3-i2\sqrt{3}}{7}\right)$$

Функция Arcth является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arcth}\,z=-i\cdot\mathrm{Arcctg}\left(\frac{z}{i}\right)=-i\cdot\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{\frac{z}{i}-i}{\frac{z}{i}+i}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-1}$$

Подставим вместо z значение $\frac{3-i2\sqrt{3}}{7}$:

$$\mathrm{Arcth}\left(\frac{3-i2\sqrt{3}}{7}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{\frac{3-i2\sqrt{3}}{7}+1}{\frac{3-i2\sqrt{3}}{7}-1}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{3-i2\sqrt{3}+7}{3-i2\sqrt{3}-7}=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{10-i2\sqrt{3}}{-4-i2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{-5+i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}\right)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),k=0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{-5+i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}[\ln\left|\frac{-5+i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}\right|+i(\arg\left(\frac{-5+i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}\right)+2\pi k)]=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{i}{2}\left[\arg\left(\frac{-5+i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}\right)+2\pi k\right]\approx\frac{1}{2}\cdot0.693+\frac{i}{2}\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$$

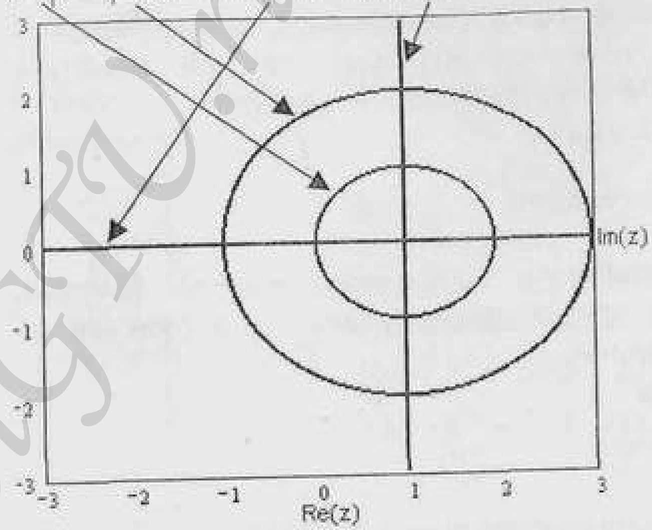
$k=0,\pm1,\pm2,...$

Ответ: $\mathrm{Arcth}\left(\frac{3-i2\sqrt{3}}{7}\right)\approx\frac{1}{2}\cdot0.693+\frac{i}{2}\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right], k=0,\pm1,\pm2,...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$1<|z-1|\leq2,\quad \mathrm{Im}\,z\geq0,\quad \mathrm{Re}\,z<1$



Задача 5

Определить вид кривой:

$$z=\frac{1}{\mathrm{sh}\,t}-i\cdot\mathrm{cth}\,t$$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t)=1/\mathrm{sh}\,t;\quad y(t)=-\mathrm{cth}\,t$

Выразим параметр t через x и y:

$$x=\frac{1}{\mathrm{sh}\,t}\Rightarrow\mathrm{sh}\,t=\frac{1}{x}\Rightarrow t=\mathrm{arsh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y=-\mathrm{cth}\,t\Rightarrow\mathrm{cth}\,t=-y\Rightarrow t=-\mathrm{arcth}(y)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\mathrm{arsh}\left(\frac{1}{x}\right)=-\mathrm{arcth}(y)\Rightarrow\mathrm{arsh}\left(\frac{1}{x}\right)+\mathrm{arcth}(y)=0$$

Ответ: $\mathrm{arsh}\left(\frac{1}{x}\right)+\mathrm{arcth}(y)=0$

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x.y)$ и значению $f(z_0)$:

$$u = e^x(x\cos y - y\sin y)$$

$$f(0) = 0$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = e^x[x\cos y - y\sin y + \cos y + i(x\sin y + \sin y +$$
$$+ y\cos y)] = e^x[x(\cos y + i\sin y) + \cos y + i\sin y - y(\sin y - i\cos y)] =$$
$$= e^x(xe^{iy} + e^{iy} + iye^{iy}) = e^{x+iy}(1 + x + iy) = (1+z)e^z$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int(1+z)e^z dz = ze^z + C$$

Определим константу C:

$$f(0) = 0\cdot e^0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = ze^z$$

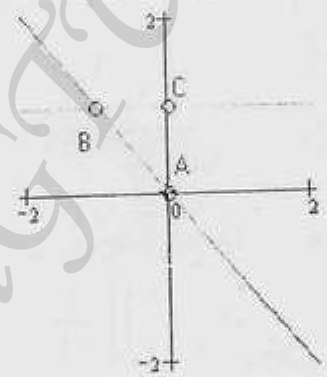
Ответ: $f(z) = ze^z$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_{ABC}(z^2+1)dz;\ ABC - \text{ломаная}: z_A = 0,\ z_B = -1 + i;\ z_C = i$$

Покажем ломаную, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = x^2 + 2ixy - y^2 + 1 =$$
$$= \underbrace{x^2 - y^2 + 1}_{u(x,y)} + i\cdot\underbrace{2xy}_{v(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial v}{\partial y} = 2x;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются, следовательно, функция является аналитической. Тогда результат от пути интегрирования не зависит:

$$\int_{ABC} f(z)dz = \int_0^i (z^2+1)dz = \left.\frac{z^3}{3} + z\right|_0^i = i - \frac{i}{3} = i\frac{2}{3}$$

Ответ: $\int_{ABC} f(z)dz = i\frac{2}{3}$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}=\frac{z+4}{-z^2(z+1)(z-2)}=-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{z+4}{(z+1)(z-2)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

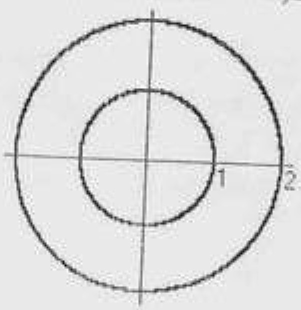
$$\frac{z+4}{(z+1)(z-2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2}=\frac{Az-2A+Bz+B}{(z+1)(z-2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=-1;B=2\}\Rightarrow\frac{z+4}{(z+1)(z-2)}=\frac{-1}{z+1}+\frac{2}{z-2}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+1}-\frac{2}{z-2}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=-1; z=2$



Рассмотрим область $|z|<1$:

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+1}-\frac{2}{z-2}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1-(-z)}+\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-z+z^2-z^3+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-z+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}+\frac{z}{8}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $1<|z|<2$:

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+1}-\frac{2}{z-2}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{z(1+\frac{1}{z})}+\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5}-\frac{1}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}+\frac{z}{8}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>2$:

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+1}-\frac{2}{z-2}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{z(1+\frac{1}{z})}-\frac{2}{z(1-\frac{2}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{8}{z^3}+\frac{16}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5}-\frac{1}{z^6}+\ldots\right)-\left(\frac{2}{z^3}+\frac{4}{z^4}+\frac{8}{z^5}+\frac{16}{z^6}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<1: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-z+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}+\frac{z}{8}+\ldots\right)$$

$$1<|z|<2: f(z)=\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5}-\frac{1}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}+\frac{z}{8}+\ldots\right)$$

$$|z|>2: f(z)=\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5}-\frac{1}{z^6}+\ldots\right)-\left(\frac{2}{z^3}+\frac{4}{z^4}+\frac{8}{z^5}+\frac{16}{z^6}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$.

$$f(z)=4\cdot\frac{z+2}{(z-1)(z+3)},z_0=1-3i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=4\cdot\frac{z+2}{(z-1)(z+3)}=\frac{3}{z+3}+\frac{1}{z-1}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{3}{z+3}=3\cdot\frac{1}{z+3}=3\cdot\frac{1}{(z-z_0)+4-3i}=3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(4-3i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-z_0)-3i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-3i)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{3}{z+3}+\frac{1}{z-1}=3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(4-3i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3i)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3(-1)^n}{(4-3i)^{n+1}}-\frac{1}{(3i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3(-1)^n}{(4-3i)^{n+1}}-\frac{1}{(3i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=\sin\frac{2z}{z-4},z_0=4$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-4;\sin\frac{2z}{z-4}=\sin\frac{2z'+8}{z'}=\sin\left(2+\frac{8}{z'}\right)=\sin2\cos\frac{8}{z'}+\cos2\sin\frac{8}{z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=\sin2\cos\frac{8}{z'}+\cos2\sin\frac{8}{z'}=\left(1-\frac{8^2}{2!z'^2}+\frac{8^4}{4!z'^4}-\frac{8^6}{6!z'^6}+...\right)\sin2+$$

$$+\left(\frac{8}{z'}-\frac{8^3}{3!z'^3}+\frac{8^5}{5!z'^5}-\frac{8^7}{7!z'^7}+...\right)\cos2=\left(\sin2-\frac{8^2\sin2}{2!z'^2}+\frac{8^4\sin2}{4!z'^4}-\right.$$

$$\left.-\frac{8^6\sin2}{6!z'^6}+...\right)+\left(\frac{8\cos2}{z'}-\frac{8^3\cos2}{3!z'^3}+\frac{8^5\cos2}{5!z'^5}-\frac{8^7\cos2}{7!z'^7}+...\right)=$$

$$=\sin2+\frac{8\cos2}{z'}-\frac{8^2\sin2}{2!z'^2}-\frac{8^3\cos2}{3!z'^3}+\frac{8^4\sin2}{4!z'^4}+\frac{8^5\cos2}{5!z'^5}-...$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$:

$$f(z)=\sin2+\frac{8\cos2}{z-4}-\frac{8^2\sin2}{2!(z-4)^2}-\frac{8^3\cos2}{3!(z-4)^3}+\frac{8^4\sin2}{4!(z-4)^4}+$$

$$+\frac{8^5\cos2}{5!(z-4)^5}-...$$

Ответ:

$$f(z)=\sin2+\frac{8\cos2}{z-4}-\frac{8^2\sin2}{2!(z-4)^2}-\frac{8^3\cos2}{3!(z-4)^3}+\frac{8^4\sin2}{4!(z-4)^4}+$$

$$+\frac{8^5\cos2}{5!(z-4)^5}-...$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z) = ze^{4/z^3}$$

Тип особой точки для этой функции следует находить, применяя разложение в ряд Лорана в окрестности точки z=0:

$$f(z) = ze^{4/z^3} = z\left(1 + \frac{4}{z^3} + \frac{16}{2!z^6} + \frac{64}{3!z^9} + \dots\right) =$$

$$= z + \frac{4}{z^2} + \frac{16}{2!z^5} + \frac{64}{3!z^8} + \dots$$

Рассмотрим получившийся ряд и выделим главную и правильную части ряда Лорана:

$$f(z) = \underbrace{z}_{\text{правильная часть}} + \underbrace{\frac{4}{z^2} + \frac{16}{2!z^5} + \frac{64}{3!z^8} + \dots}_{\text{главная часть}}$$

Поскольку главная часть содержит бесконечное число членов, то точка z = 0 для заданной функции f(z) является существенной особой точкой.

Ответ: Точка z = 0 является существенно особой точкой для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$$

Изолированными особыми точками являются $z = 2\pi k,\ k \in Z$. Следует также отдельно рассмотреть точку z = 0. Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3(1-\cos z)};\quad \begin{matrix} g(z) = \sin z; \\ h(z) = z^3(1-\cos z); \end{matrix}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = 2\pi k$:

$g(2\pi k) = 0;$

$g'(z) = \cos z; g'(2\pi k) \neq 0;$

$h(2\pi k) = 0;$

$h'(z) = 3z^2(1-\cos z) + z^3 \sin z; h'(2\pi k) = 0;$

$h''(z) = 6z(1-\cos z) + 6z^2 \sin z + z^3 \cos z; h''(2\pi k \neq 0) \neq 0; h''(0) = 0;$

$h'''(z) = 6(1-\cos z) + 18z\sin z + 9z^2 \cos z - z^3 \sin z; h'''(0) = 0;$

$h^{IV}(z) = 24\sin z + 36z\cos z - 12z^2 \sin z - z^3 \cos z; h^{IV}(0) = 0;$

$h^{V}(z) = 60\cos z - 60z\sin z - 15z^2 \cos z + z^3 \sin z; h^{V}(0) \neq 0;$

В случаях z = 0 порядок ненулевой производной выше для функции, стоящей в знаменателе, т.е. точка z = 0 является полюсом функции. Поскольку в данном случае разность порядков ненулевых производных g(z) и h(z) равна четырем, то точка z = 0 является полюсом 4-го порядка. Исходя их тех же соображений, точки $z = 2\pi k\ (k \neq 0)$ являются полюсами 1-го порядка

Ответ: Точка z = 0 для данной функции является полюсом 4-го порядка.
Точки $z = 2\pi k \neq 0$ являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z+3/2|=1} \underbrace{\frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}}_{f(z)}dz = \oint\limits_{|z+3/2|=1} \underbrace{\frac{\cos^2 z+3}{z(2z+\pi)}}_{f(z)}dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = 0$

$z = -\pi/2$

Точка $z = 0$ не входит в область, ограниченную данным контуром, поэтому не рассматривается.

Точка $z_1 = -\pi/2$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to-\pi/2}[f(z)(z+\pi/2)] = \lim_{z\to-\pi/2}\frac{(\cos^2 z+3)(z+\pi/2)}{z(2z+\pi)} =$$

$$= \lim_{z\to-\pi/2}\frac{\cos^2 z+3}{2z} = \frac{4}{-\pi} = -\frac{4}{\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z+3/2|=1}\frac{\cos^2 z+3}{z(2z+\pi)}dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i\cdot\left(-\frac{4}{\pi}\right) = -8i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z+3/2|=1}\frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}dz = -8i$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=3} \underbrace{\frac{z^2+\cos z}{z^3}}_{f(z)}dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$\frac{z^2+\cos z}{z^3} = \frac{z^2+1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots}{z^3} = \frac{1+\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}-\ldots}{z^3} =$$

$$= \frac{1}{z^3}+\frac{1}{2z}+\frac{z}{4!}-\frac{z^3}{6!}+\frac{z^5}{8!}-\ldots$$

Получившийся ряд является рядом Лорана по степеням z, т.е. в окрестности $z = 0$, причем правильная часть содержит бесконечное множество членов, а главная – конечное, причем старшей является 3-я степень. Отсюда мы приходим к выводу, что точка $z = 0$ является полюсом 3-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}[f(z)z^3] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^2+\cos z}{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(2-\cos z) = \frac{1}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^2+\cos z}{z^3}dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{2} = \pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^2+\cos z}{z^3}dz = \pi i$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=0.5} \underbrace{\frac{ch3z-\cos 4iz}{z^2\sin 5z}}_{f(z)}dz$$

Особые точки этой функции $z = \pi k/5$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z)=\frac{ch3z-\cos 4iz}{z^2\sin 5z}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{matrix} g(z)=ch3z-\cos 4iz \\ h(z)=z^2\sin 5z \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}[f(z)z]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{ch3z-\cos 4iz}{z\sin 5z}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{3sh3z-4sh4z}{\sin 5z+5z\cos 5z}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{9ch3z-16ch4z}{10\cos 5z-25z\sin 5z}\right)=-\frac{7}{10}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=0.5}\frac{ch3z-\cos 4iz}{z^2\sin 5z}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)=2\pi i\cdot\left(-\frac{7}{10}\right)=-\frac{7}{5}\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=0.5}\frac{ch3z-\cos 4iz}{z^2\sin 5z}dz=-\frac{7}{5}\pi i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-4|=2}\left(z\cos\frac{1}{z-4}+\frac{10ch\frac{\pi iz}{5}}{(z-5)^2(z-7)}\right)dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-4|=2}\underbrace{z\cos\frac{1}{z-4}}_{f_1(z)}dz+\oint\limits_{|z-4|=2}\underbrace{\frac{10ch\frac{\pi iz}{5}}{(z-5)^2(z-7)}}_{f_2(z)}dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint\limits_{|z-4|=2}z\cos\frac{1}{z-4}dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left\{\begin{matrix}t=z-4\\ z=t+4\end{matrix}\right\}\Rightarrow z\cos\frac{1}{z-4}=(t+4)\cos\frac{1}{t}$$

Единственной особой точкой этой функции является $t=0$. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t+4)\cos\frac{1}{t}=(t+4)\left(1-\frac{1}{2!t^2}+\frac{1}{4!t^4}-\frac{1}{6!t^6}+\frac{1}{8!t^8}-...\right)=$$

$$=\left(t-\frac{1}{2!t}+\frac{1}{4!t^3}-\frac{1}{6!t^5}+...\right)+\left(4-\frac{4}{2!t^2}+\frac{4}{4!t^4}-\frac{4}{6!t^6}+...\right)=$$

$$=t+4-\frac{1}{2!t}-\frac{4}{2!t^2}+\frac{1}{4!t^3}+\frac{4}{4!t^4}-\frac{1}{6!t^5}-\frac{4}{6!t^6}+...$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов, из чего следует, что $t=0$ является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+4)\cos\frac{1}{t}\right]=C_{-1}=-\frac{1}{2!}=-\frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-4|=2} z\cos\frac{1}{z-4}dz = \oint\limits_{|t|=2}(t+4)\cos\frac{1}{t}dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+4)\cos\frac{1}{t}\right] =$$

$$= 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint\limits_{|z-4|=2}\frac{10\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-7)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=5 и z=7. При этом точка z=7 не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=5 является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=5} f_2(z) = \lim_{z\to5}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-5)^2\cdot 10\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-7)}\right] = \lim_{z\to5}\frac{d}{dz}\left[\frac{10\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-7)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to5}\left[\frac{-2\pi}{(z-7)}\sin\left(\frac{\pi z}{5}\right) - \frac{10}{(z-7)^2}\cos\left(\frac{\pi z}{5}\right)\right] = \frac{5}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-4|=2}\frac{10\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-7)}dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=5} f_2(z) = 2\pi i\cdot\left(\frac{5}{2}\right) = 5\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-4|=2}\left(z\cos\frac{1}{z-4} + \frac{10\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-7)}\right)dz = \oint\limits_{|z-4|=2} z\cos\frac{1}{z-4}dz +$$

$$+\oint\limits_{|z-4|=2}\frac{10\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-7)}dz = -\pi i + 5\pi i = 4\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-4|=2}\left(z\cos\frac{1}{z-4} + \frac{10\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-7)}\right)dz = 4\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{15}\sin t - 4}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{15}\sin t - 4} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\frac{\sqrt{15}}{2i}(z-\frac{1}{z}) - 4} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\frac{\sqrt{15}}{2}(z^2-1) - 4iz} =$$

$$= \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{15}(z^2-1) - 8iz} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{15}(z - i\sqrt{15}/3)(z - i\sqrt{15}/5)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = i\sqrt{15}/3$; $z = i\sqrt{15}/5$;

Точка $i\sqrt{15}/3$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $i\sqrt{15}/5$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{15}/5} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{15}/5}[f(z)(z - i\sqrt{15}/5)] =$$

$$= \lim_{z\to i\sqrt{15}/5}\frac{2}{\sqrt{15}(z - i\sqrt{15}/3)} = \frac{2}{\sqrt{15}(i\sqrt{15}/5 - i\sqrt{15}/3)} = i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{15}(z - i\sqrt{15}/3)(z - i\sqrt{15}/5)} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname{res} f(z) = 2\pi i\cdot i = -2\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{15}\sin t - 4} = -2\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{5}+2\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{5}+2\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(\sqrt{5}+(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i(z\sqrt{5}+(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i\left[(z-\frac{1-\sqrt{5}}{2})(z+\frac{1+\sqrt{5}}{2})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=(1-\sqrt{5})/2$; $z=(-1-\sqrt{5})/2$;

Точка $z=(-1-\sqrt{5})/2$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=(1-\sqrt{5})/2$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=(1-\sqrt{5})/2}f(z)=\lim_{z\to(1-\sqrt{5})/2}\frac{d}{dz}\left[f(z)\left(z-(1-\sqrt{5})/2\right)^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to(1-\sqrt{5})/2}\frac{d}{dz}\frac{z}{i\left(z+(1+\sqrt{5})/2\right)^2}=\frac{1}{i}\lim_{z\to(1-\sqrt{5})/2}\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z+(1+\sqrt{5})/2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{i}\lim_{z\to(1-\sqrt{5})/2}\left[-4\frac{2z-1-\sqrt{5}}{(2z+1+\sqrt{5})^3}\right]=-\frac{4}{i}\cdot\frac{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5})^3}=-\frac{4}{i}\cdot\frac{-2\sqrt{5}}{2^3}=\frac{\sqrt{5}}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i\left[(z-\frac{1-\sqrt{5}}{2})(z+\frac{1+\sqrt{5}}{2})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname{res}f(z)=2\pi i\left(\frac{\sqrt{5}}{i}\right)=2\sqrt{5}\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{5}+2\cos t)^2}=2\sqrt{5}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2}dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_{m}\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$ сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(z^2+3)dz}{(z^2-10z+29)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(z^2+3)dz}{(z-5+2i)^2(z-5-2i)^2}$$

Особые точки:

$z=5+2i$ $(\operatorname{Im}z>0)$; $z=5-2i$ $(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=5+2i$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=5+2i}f(z)=\lim_{z\to5+2i}\frac{d}{dz}[f(z)(z-5-2i)^2]=$$

$$=\lim_{z\to5+2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2+3}{(z-5+2i)^2}\right]=\lim_{z\to-2+3i}\left[\frac{2(-5z+2iz-3)}{(z-5+2i)^3}\right]=\frac{1}{i}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2}dx=2\pi i\left(\frac{1}{i}\right)=2\pi$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2}dx=2\pi$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\lambda x dx=\operatorname{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$(x^2+16)(x^2+9)=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm 4i; z_{3,4}=\pm 3i;$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Из этого следует:

$z_m=\{3i;4i\}$

Особая точка z = 3i является простым полюсом. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=3i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 3i}\frac{(z-3i)}{(z^2+16)(z^2+9)}e^{iz}=\lim_{z\to 3i}\frac{e^{iz}}{(z^2+16)(z+3i)}=$$

$$=\frac{e^{-3}}{(-9+16)(3i+3i)}=\frac{e^{-3}}{42i}$$

Особая точка z = 4i является простым полюсом. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=4i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 4i}\frac{(z-4i)}{(z^2+16)(z^2+9)}e^{iz}=\lim_{z\to 4i}\frac{e^{iz}}{(z+4i)(z^2+9)}=$$

$$=\frac{e^{-4}}{(4i+4i)(-16+9)}=-\frac{e^{-4}}{56i}$$

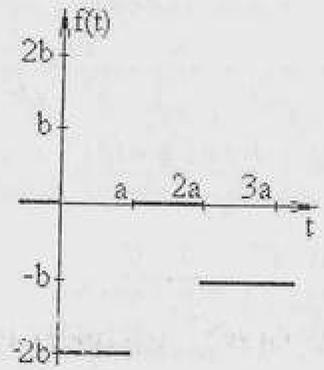
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-3}}{42i}-\frac{e^{-4}}{56i}\right)=\frac{4e^{-3}-3e^{-4}}{336i}$$

Ответ: $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)}dx=\frac{4e^{-3}-3e^{-4}}{336i}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}-2b, & 0<t<a\\ 0, & a<t<2a\\ -b, & 2a<t\end{cases}$$

$$f(t)=-2b\cdot\eta(t)+2b\cdot\eta(t-a)-b\cdot\eta(t-2a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=-\frac{2b}{p}+\frac{2b}{p}e^{-ap}-\frac{b}{p}e^{-2ap}$$

Ответ: $F(p)=-\frac{2b}{p}+\frac{2b}{p}e^{-ap}-\frac{b}{p}e^{-2ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{1}{p^3-1}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{1}{p^3-1}=\frac{1}{(p-1)(p^2+p+1)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+p+1}=$$

$$=\frac{Ap^2+Ap+A+Bp^2-Bp+Cp-C}{(p-1)(p^2+p+1)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(A-B+C)p+A-C}{(p-1)(p^2+p+1)}$$

Решив систему линейных уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\A-B+C=0\\A-C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/3\\B=-1/3\\C=-2/3\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{1}{p^3-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+p+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p^2+p+1}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+p+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p^2+p+1}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\to$$

$$\to\frac{1}{3}e^t-\frac{1}{3}e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{3}e^t-\frac{1}{3}e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''+y'+y=t^2+t$$

$$y(0)=1,\quad y'(0)=-3.$$

Из теории нам известно, что если $x(t)$ соответствует изображение $X(p)$, то $x'(t)$ соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а $x''(t)$ соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+pY(p)-y(0)+Y(p)=\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p^2}$$

$$(p^2+p+1)Y(p)-p+2=\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p^2}$$

$$(p^2+p+1)Y(p)=\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p^2}+p-2=\frac{p^4-2p^3+p+2}{p^3}$$

$$Y(p)=\frac{p^4-2p^3+p+2}{p^3(p^2+p+1)}$$

Найдем оригинал $y(t)$:

$$Y(p)=\frac{p^4-2p^3+p+2}{p^3(p^2+p+1)}=\frac{Ap^2+Bp+C}{p^3}+\frac{Dp+E}{p^2+p+1}=$$

$$=\frac{(A+D)p^4+(A+B+E)p^3+(A+B+C)p^2+(B+C)p+C}{p^3(p^2+p+1)}$$

$$\begin{cases}A+D=1\\A+B+E=-2\\A+B+C=0\\B+C=1\\C=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\B=-1\\C=2\\D=2\\E=0\end{cases}\Rightarrow Y(p)=\frac{-p^2-p+2}{p^3}+\frac{2p}{p^2+p+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(p)=-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}+2\frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=-1-t+t^2+2e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\text{—}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Ответ: $y(t)=-1-t+t^2+2e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = \arcsin(z)$; верхняя полуплоскость.

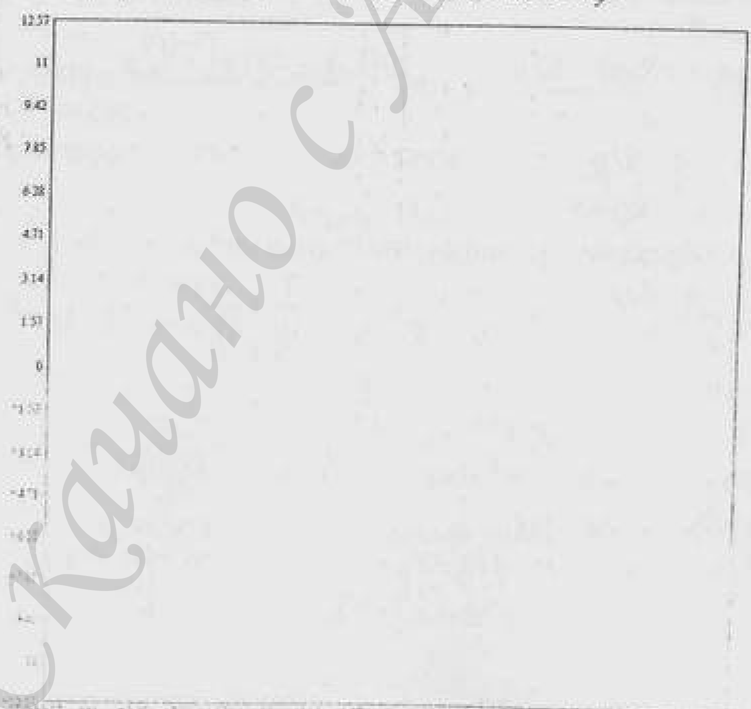
Тогда $z = \sin w$. Верхняя полуплоскость означает, что $\mathrm{Im}(z)>0$, т.е. $\mathrm{Im}(\sin\ w)>0$. Рассмотрим это неравенство подробнее ($wx = \mathrm{Re}(w)$, $wy = \mathrm{Im}(w)$):

$$\mathrm{Im}(\sin w) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\right) = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{i(wx+iwy)} - e^{-i(wx+iwy)}}{2i}\right] =$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{e^{iwx-wy} - e^{-iwx+wy}}{2i}\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{-wy}(\cos wx + i\sin wx)}{2i} -\right.$$

$$\left. - \frac{e^{wy}(\cos wx - i\sin wx)}{2i}\right] = \frac{(e^{wy} - e^{-wy})\cos wx}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}(w) > 0 \\ \cos[\mathrm{Re}(w)] > 0 \end{cases}$$

Т.о., верхняя полуплоскость отображается в область $\{\cos[\mathrm{Re}(w)]>0;\ \mathrm{Im}(w)>0\}$, т.е. в вертикальные полуполосы $\{\mathrm{Re}(w)\in(-\pi/2+2\pi k;\pi/2+2\pi k);\ \mathrm{Im}(w)>0;\ k\in Z\}$.



Задача 25

Материальная точка массы m совершает прямолинейное колебание по оси Ox под действием восстанавливающей силы F=–kx, пропорциональной расстоянию x от начала координат и направленной к началу координат, и возмущающей силы f =Acos t. Найти закон движения x=x(t) точки, если в начальный момент времени $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$. $k = m$, $A = m$, $x_0 = 0$, $v_0 = 1$м/с.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kx + A\cos t$$

$$\ddot{x}m + kx = A\cos t$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 1$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m + mx = m\cos t$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + x = \cos t$$

Перейдем к изображениям функций:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + X(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

$$(p^2+1)X(p) - 1 = \frac{p}{p^2+1}$$

$$X(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2} + \frac{1}{p^2+1} = \frac{p}{(p^2+1^2)^2} + \frac{1}{p^2+1}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = \frac{1}{2}t\sin t + \sin t = t\sin t + \sin t$$

Ответ: $x(t) = t\sin t + \sin t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 2 \\ \dot{y} = 4y + 1 \end{cases}$$

$x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = 2X(p) + 2Y(p) + 2/p \\ pY(p) - y(0) = 4Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) = 2X(p) + 2Y(p) + 2/p \\ pY(p) - 1 = 4Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Выразим Y(p) через X(p), используя первое уравнение:

$$pX(p) = 2X(p) + 2Y(p) + 2/p \Rightarrow Y(p) = \frac{pX(p) - 2X(p) - 2/p}{2}$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение и найдем X(p):

$$p\frac{pX(p) - 2X(p) - 2/p}{2} - 1 = 4\frac{pX(p) - 2X(p) - 2/p}{2} + 1/p$$

$$X(p) = \frac{4 - 6/p}{p^2 - 6p + 8}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$X(p) = \frac{4-6/p}{p^2-6p+8} = \frac{4-6/p}{p^2-6p+8} + \frac{3}{4p} - \frac{3}{4p} = \frac{3p/4 - 1/2}{(p-3)^2-1} - \frac{3}{4p} =$$

$$= \frac{3}{4}\frac{p-3}{(p-3)^2-1} + \frac{7}{4i}\frac{i}{(p-3)^2-1} - \frac{3}{4p} \to$$

$$\to x(t) = \tfrac{3}{4}e^{3t}\cos it - \tfrac{7i}{4}e^{3t}\sin it - \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{4}e^{3t}\operatorname{ch} t + \tfrac{7}{4}e^{3t}\operatorname{sh} t - \tfrac{3}{4}$$

Зная x(t), найдем y(t):

$$\dot{x} = 2x + 2y + 2 \Rightarrow y(t) = \tfrac{1}{2}(\dot{x} - 2x - 2) = \tfrac{1}{2}(4e^{3t}\operatorname{ch} t + 6e^{3t}\operatorname{sh} t - \tfrac{3}{2}e^{3t}\operatorname{ch} t -$$

$$- \tfrac{7}{2}e^{3t}\operatorname{sh} t + \tfrac{3}{2} - 2) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{5}{2}e^{3t}\operatorname{ch} t + \tfrac{5}{2}e^{3t}\operatorname{sh} t - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{5}{4}e^{3t}\operatorname{ch} t + \tfrac{5}{4}e^{3t}\operatorname{sh} t - \tfrac{1}{4}$$

Ответ:

$$x(t) = \tfrac{3}{4}e^{3t}\operatorname{ch} t + \tfrac{7}{4}e^{3t}\operatorname{sh} t - \tfrac{3}{4}$$

$$y(t) = \tfrac{5}{4}e^{3t}\operatorname{ch} t + \tfrac{5}{4}e^{3t}\operatorname{sh} t - \tfrac{1}{4}$$