Екзаменаційний білет № 11

І. Теоретична частина

1. Розв’язок СЛАР за схемою з вибором головного элементу.

3. Схема з вибором головного елемента

Цього недоліку позбавлена *схема з вибором головного елемента*. Крім того, ця схема менш чутлива до помилок округлення.

Нехай є система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1} \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= a_{n,n+1} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Розглянемо розширену матрицю M з коефіцієнтів системи і вільних членів

$$M = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1j}\ldots a_{1q}\ldots a_{1n}a_{1,n+1} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2j}\ldots a_{2q}\ldots a_{2n}a_{2,n+1} \\ \ldots \\ a_{p1}a_{p2}\ldots a_{pj}\ldots a_{pq}\ldots a_{pn}a_{p,n+1} \\ \ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nj}\ldots a_{nq}\ldots a_{nn}a_{n,n+1} \end{vmatrix}$$

Виберемо ненульовий і найбільший за модулем коефіцієнт a_{pq}, що не належить до стовпчика вільних членів $(q \neq n+1)$ й обчислимо множники

$$m_i = -a_{iq} / a_{pq} \qquad i \neq p$$

Рядок з номером p матриці M називається головним рядком. Далі до кожного неголовного рядка додамо головний, помножений на m_i для цього рядка. У результаті отримаємо матрицю, у якої *p*-й стовпець складається з нулів. Відкидаючи цей стовпчик і головний рядок, одержимо матрицю $M^{(1)}$ з меншим на 1 числом рядків і стовпчиків. З матриці $M^{(1)}$ таким самим чином отримаємо $M^{(2)}$ й т.д.

$$M, M^{(1)}, M^{(2)}, ..., M^{(n-1)},$$

де остання є двочленна матриця-рядок, її також вважаємо головним рядком. Для визначення невідомих x_i поєднуємо в систему всі головні рядки, починаючи з останньої

$$M^{(n-1)}.$$

Метод завжди знаходить розв’язок, якщо визначник системи

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} ... a_{n1} \\ ... \\ a_{n1} ... a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Далі невідомі обчислюються із трикутної матриці, так само, як у попередньому методі. Після належної зміни нумерації невідомих отримуємо розв’язок вихідної системи.

Метод Гауса може бути також використаний для обчислення зворотної матриці

Припустимо є неособлива матриця

$$A = \lfloor a_{ij} \rfloor \quad (i, j = 1,2,...,n)$$

Для знаходження її зворотної матриці

$$A^{-1} = \lfloor x_{ij} \rfloor$$

використаємо співвідношення $AA^{-1} = E$, де E - одинична матриця. Перемножуючи матриці A й A^{-1} одержимо n систем рівнянь щодо n^2 невідомих x_{ij}

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1,2,...,n),$$

де $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{при } i = j \\ 0, \text{при } i \neq 0 \end{cases}$

Отримані n систем лінійних рівнянь для $j = 1,2,...,n$, що мають одну й ту саму матрицю A і різні вільні члени, можна вирішити методом Гауса.

Нарешті, метод Гауса дозволяє обчислювати визначник матриці. Можна знаходити, що для матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}...a_{1n} \\ ... \\ a_{n1}...a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11}^{(0)} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot ... \cdot a_{nn}^{(n-1)},$$

тобто детермінант дорівнює добутку головних елементів схеми Гауса.

2. Визначння границь розташування коренів алгебраїчного поліному.

3. Визначення меж розташування дійсних коренів алгебраїчного поліному.

Припустимо, що при $x = в$ ($в > 0$) усі коефіцієнти b_i у схемі Горнера не негативні, причому перший коефіцієнт є позитивним, тобто

$$b_0 = a_0 > 0, \ b_i \geq 0 \quad i = 1, . . . ,n \qquad (4)$$

Тоді можна стверджувати, що усі дійсні корені x_k ($k = 1, 2, . . ., n$) поліному $P(x)$ розташовані не правіше ніж $в$, тобто $x_k \leq в$ ($k = 1, 2, . . ., n$). Насправді, оскільки

$$P(x) = (b_0x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x)(x - в) + b_n,$$

то при будь-якому $x > в$, враховуючи (4) маємо $P(x) > 0$, тобто будь-яке число, більше за $в$ у будь якому випадку не є коренем поліному $P(x)$. Таким чином, маємо верхню оцінку усіх дійсних коренів x_k поліному.

Щоб отримати нижню оцінку коренів x_k побудуємо поліном

$$(-1)^nP(-x) = a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots +(-1)^na_n$$

Для цього поліному знайдемо таке число $x = \alpha$ $(\alpha > 0)$, щоб усі коефіцієнти у відповідній схемі Горнера були не негативні, за виключенням першого, який, вочевидь, буде позитивним. Тоді у відповідності з попередніми міркуваннями для дійсних коренів поліному $(-1)^nP(-x)$, вочевидь рівних $-x_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), маємо нерівність $-x_k \leq \alpha$.

Отже, $x_k \leq -\alpha$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Таким чином, ми отримали нижню межу $-\alpha$ дійсних коренів поліному $P(x)$. Звідси можна стверджувати, що усі дійсні корені поліному $P(x)$ розташовані на відрізку $[-\alpha, в]$.

Приклад 2.

Знайти межі дійсних коренів поліному

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1$$

Обчислимо значення поліному при $x = 2$.

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ + & & 2 & 0 & 6 & 20 \\ \hline \end{array}$$

1   0 3   10   19

Оскільки усі коефіцієнти $b_i \geq 0$, то дійсні корені x_k поліному $P(x)$ (якщо, звісно, вони існують) задовільняють нерівності $x_k < 2$. Знайдемо тепер нижню межу. Для цього побудуємо поліном

$$Q(-x) = (-1)^4 P(-x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1$$

Обчислимо значення поліному при $x = 1$.

1   2   3   -4   -1

$+$ *1   3   6   2*

----

1   3 6 2   1

Усі коефіцієнти $b_i > 0$, тоді $-x_k < 1$, або $x_k > -1$. Отже, усі дійсні корені поліному розташовані в інтервалі [*-1, 2*].

II. **Практична частина**

Побудувати таблицю інтегральної кривої звичайного диференціального рівняння

$y' \sin(x) = y \ln(y)$

з початковими умовами $y(\pi/2) = \exp(1)$ на проміжку $a = \pi/2$, $b = 0.9\pi$ з кроком $(b - a)/5$ і з точністю не гірше за 10^{-4}.