ИНФОРМАЦИОННО-КОНСУЛЬТАЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

ТФКП

теория функций комплексного переменного

Консультационное пособие для школьников и студентов в решении задач с примерами решённых задач из задачника автора Чудесенко В.Ф.

Вариант 5

$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz$$

Москва 2003

/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

ТФКП. Вариант 5.

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{1}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi = \arg(z); \quad k = 0,1,\ldots,n-1; \quad z \neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{1}$:

$$\sqrt[4]{1} = 1$$

$$\sqrt[4]{1} = i$$

$$\sqrt[4]{1} = -1$$

$$\sqrt[4]{1} = -i$$

Ответ: $\sqrt[4]{1} = \{1; i; -1; -i\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\mathrm{ch}(2 + \pi i/2)$

Перейдем от гиперболического косинуса к тригонометрическому:

$$\mathrm{ch}(2 + \pi i/2) = \cos(2i - \pi/2)$$

Используем формулу косинуса разности:

$$\cos(2i - \pi/2) = \cos(2i)\cos(\pi/2) + \sin(2i)\sin(\pi/2)$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$\cos(2i)\cos(\pi/2) + \sin(2i)\sin(\pi/2) = 0\cdot\frac{e^{-2} + e^{2}}{2} +$$

$$+1\cdot\frac{e^{-2} - e^{2}}{2i} = i\left(\frac{e^{2} - e^{-2}}{2}\right)$$

Ответ: $\mathrm{ch}(2 + \pi i/2) = i\left(\frac{e^{2} - e^{-2}}{2}\right)$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arcth}\left(\frac{3-4i}{5}\right)$$

Функция Arcth является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arcth}\, z = -i\cdot \mathrm{Arcctg}\left(\frac{z}{i}\right) = -i\cdot\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{\frac{z}{i}-i}{\frac{z}{i}+i} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-1}$$

Подставим вместо z значение $\frac{3-4i}{5}$:

$$\mathrm{Arcth}\left(\frac{3-4i}{5}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{\frac{3-4i}{5}+1}{\frac{3-4i}{5}-1} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{3-4i+5}{3-4i-5} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{8-4i}{-2-4i} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{-2i(2+4i)}{-2-4i} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(2i)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(2i) = \frac{1}{2}[\ln|2i| + i(\arg(2i) + 2\pi k)] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{i}{2}[\arg(2i) + 2\pi k] \approx \frac{1}{2}\cdot 0{,}693 + \frac{i}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$$

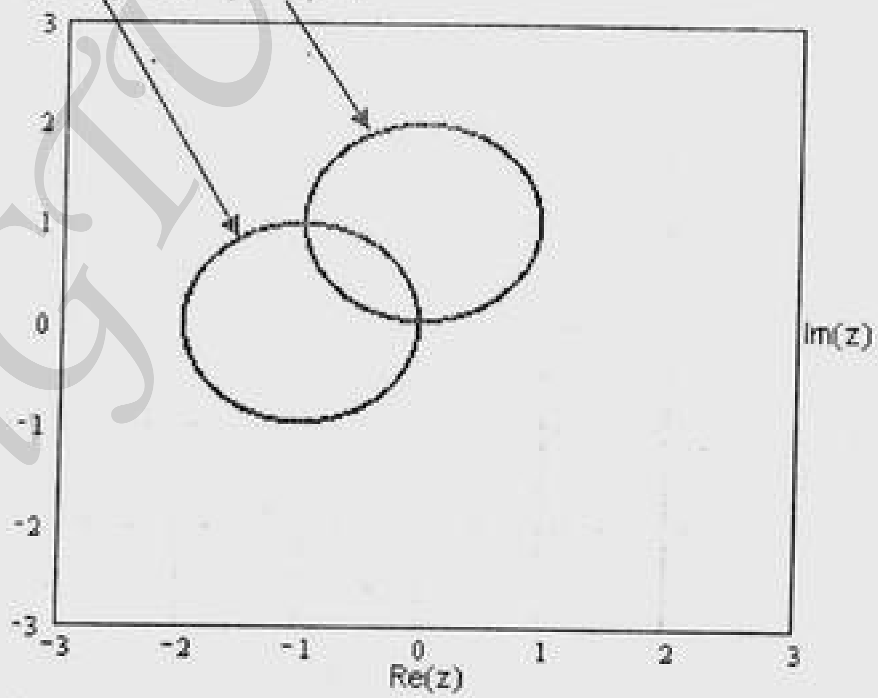
$k = 0,\pm1,\pm2,...$

Ответ: $\mathrm{Arcth}\left(\frac{3-4i}{5}\right) \approx \frac{1}{2}\cdot 0{,}693 + \frac{i}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k = 0,\pm1,\pm2,...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z+1| < 1, \quad |z-i| \le 1$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z = 3\mathrm{tg}\, t + i4\sec t$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t) = 3\mathrm{tg}\, t; \quad y(t) = 4\sec t$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = 3\mathrm{tg}\, t \Rightarrow \mathrm{tg}\, t = \frac{x}{3} \Rightarrow t = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$y = 4\sec t = \frac{4}{\cos t} \Rightarrow \cos t = \frac{4}{y} \Rightarrow t = \arccos\left(\frac{4}{y}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\arccos\left(\frac{4}{y}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) \Rightarrow \arccos\left(\frac{4}{y}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) = 0$$

Ответ: $\arccos\left(\frac{4}{y}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) = 0$

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной действительной части u(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$u = \frac{e^{2x}+1}{e^x}\cos y$$

$$f(0) = 2$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{e^{2x}-1}{e^x}\cos y + i\frac{e^{2x}+1}{e^x}\sin y =$$

$$= e^x(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y) = e^{x+iy} - e^{-x-iy} = e^z - e^{-z}$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int (e^z - e^{-z})dz = e^z + e^{-z} + C$$

Определим константу C:

$$f(0) = e^0 + e^0 + C = 2 + C = 2 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = e^z + e^{-z}$$

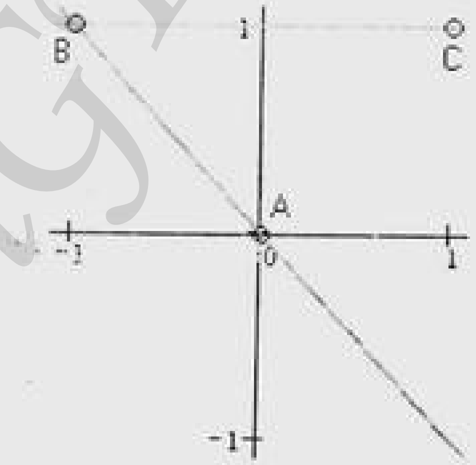
Ответ: $f(z) = e^z + e^{-z}$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int\limits_{ABC} |z|dz;\ ABC - \text{ломаная}: z_A = 0, z_B = -1+i; z_C = 1+i$$

Покажем ломаную, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = |x+iy| = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана не выполняются, значит, функция не является аналитической. Тогда представим отрезки ломаной в параметрическом виде:

$$AB: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = -t; y(t) = t; z_A = z(0); z_B = z(1)$$

$$BC: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = 1; z_B = z(-1); z_C = z(1)$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int\limits_{ABC} f(z)dz = \int\limits_0^1 \underset{AB}{f[z(t)]z'(t)}dt + \int\limits_{-1}^1 \underset{BC}{f[z(t)]z'(t)}dt = \int\limits_0^1 |-t+it|(i-1)dt +$$

$$+ \int\limits_{-1}^1 |t+i|dt = (i-1)\int\limits_0^1 t\sqrt{2}dt + \int\limits_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln(\sqrt{2}-1) + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

Ответ: $\int\limits_{ABC} f(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln(\sqrt{2}-1) + \frac{i}{\sqrt{2}}$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}=\frac{5z-50}{z(z+5)(2z-5)}=\frac{5}{2z}\cdot\frac{z-10}{(z+5)(z-2{,}5)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

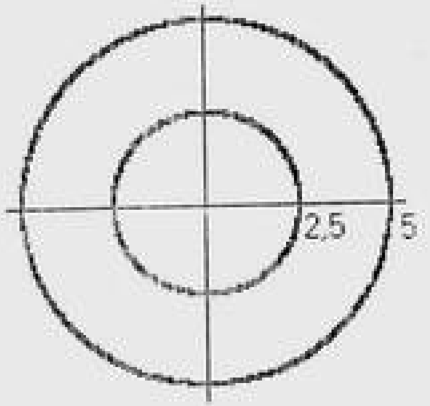
$$\frac{z-10}{(z+5)(z-2{,}5)}=\frac{A}{z+5}+\frac{B}{z-2{,}5}=\frac{Az-2{,}5A+Bz+5B}{(z-1{,}5)(z+3)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=2;B=-1\}\Rightarrow\frac{z-10}{(z+5)(z-2{,}5)}=\frac{2}{z+5}-\frac{1}{z-2{,}5}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{5}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+5}-\frac{1}{z-2{,}5}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=2{,}5; z=-5$



Рассмотрим область $|z|<2{,}5$:

$$f(z)=\frac{5}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+5}-\frac{1}{z-2{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{5}}+\frac{1}{1-\frac{2z}{5}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{5}+\frac{z^2}{25}-\frac{z^3}{125}+\ldots\right)+\left(1+\frac{2z}{5}+\frac{4z^2}{25}+\frac{8z^3}{125}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{5}+\frac{z}{25}-\frac{z^2}{125}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{5}+\frac{4z}{25}+\frac{8z^2}{125}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $2{,}5<|z|<5$:

$$f(z)=\frac{5}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+5}-\frac{1}{z-2{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{5}}-\frac{5}{2z(1-\frac{5}{2z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{5}+\frac{z^2}{25}-\frac{z^3}{125}+\ldots\right)-\left(\frac{5}{2z}+\frac{25}{4z^2}+\frac{125}{8z^3}+\frac{625}{16z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{5}+\frac{z}{25}-\frac{z^2}{125}+\ldots\right)-\left(\frac{5}{2z^2}+\frac{25}{4z^3}+\frac{125}{8z^4}+\frac{625}{16z^5}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>5$:

$$f(z)=\frac{5}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+5}-\frac{1}{z-2{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{5}{z(1+\frac{5}{z})}-\frac{5}{2z(1-\frac{5}{2z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{5}{z}-\frac{25}{z^2}+\frac{125}{z^3}-\frac{625}{z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{5}{2z}+\frac{25}{4z^2}+\frac{125}{8z^3}+\frac{625}{16z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{5}{z^2}-\frac{25}{z^3}+\frac{125}{z^4}-\frac{625}{z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{5}{2z^2}+\frac{25}{4z^3}+\frac{125}{8z^4}+\frac{625}{16z^5}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<2.5: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{5}+\frac{z}{25}-\frac{z^2}{125}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{5}+\frac{4z}{25}+\frac{8z^2}{125}+\ldots\right)$$

$$2.5<|z|<5: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{5}+\frac{z}{25}-\frac{z^2}{125}+\ldots\right)-\left(\frac{5}{2z^2}+\frac{25}{4z^3}+\frac{125}{8z^4}+\frac{625}{16z^5}+\ldots\right.$$

$$|z|>5: f(z)=\left(\frac{5}{z^2}-\frac{25}{z^3}+\frac{125}{z^4}-\frac{625}{z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{5}{2z^2}+\frac{25}{4z^3}+\frac{125}{8z^4}+\frac{625}{16z^5}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z - z_0$.

$$f(z) = \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0 = 1+3i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z) = \frac{z-1}{z(z+1)} = \frac{2}{z+1} - \frac{1}{z}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a} = \frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} - \frac{z^3}{a^4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{2}{z+1} = 2 \cdot \frac{1}{z+1} = 2 \cdot \frac{1}{(z-z_0)+2+3i} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-z_0)^n}{(2+3i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-z_0)+1+3i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-z_0)^n}{(1+3i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z) = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-z_0)^n}{(2+3i)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-z_0)^n}{(1+3i)^{n+1}} =$$

$$= (-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{(2+3i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+3i)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z) = (-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{(2+3i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+3i)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z) = \cos\frac{3z}{z-i}, z_0 = i$$

Перейдем к новой переменной $z' = z - z_0$.

$$z' = z - i; \cos\frac{3z}{z-i} = \cos\frac{3z'+3i}{z'} = \cos\left(3 + \frac{3i}{z'}\right) = \cos 3 \cos\frac{3i}{z'} - \sin 3 \sin\frac{3i}{z'} = f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z') = \cos 3 \cos\frac{3i}{z'} - \sin 3 \sin\frac{3i}{z'} = \left(1 + \frac{3^2}{2!z'^2} + \frac{3^4}{4!z'^4} + \frac{3^6}{6!z'^6} + \ldots\right)\cos 3 -$$

$$- \left(\frac{3i}{z'} + \frac{3^3 i}{3!z'^3} + \frac{3^5 i}{5!z'^5} + \frac{3^7 i}{7!z'^7} + \ldots\right)\sin 3 = \left(\cos 3 + \frac{3^2\cos 3}{2!z'^2} + \frac{3^4 \cos 3}{4!z'^4} +\right.$$

$$\left. + \frac{3^6 \cos 3}{6!z'^6} + \ldots\right) - \left(\frac{3i\sin 3}{z'} + \frac{3^3 i \sin 3}{3!z'^3} + \frac{3^5 i \sin 3}{5!z'^5} + \frac{3^7 i \sin 3}{7!z'^7} + \ldots\right) =$$

$$= \cos 3 - \frac{3i\sin 3}{z'} + \frac{3^2 \cos 3}{2!z'^2} - \frac{3^3 i \sin 3}{3!z'^3} + \frac{3^4 \cos 3}{4!z'^4} - \frac{3^5 i \sin 3}{5!z'^5} + \ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=i$:

$$f(z) = \cos 3 - \frac{3i\sin 3}{z-i} + \frac{3^2\cos 3}{2!(z-i)^2} - \frac{3^3 i \sin 3}{3!(z-i)^3} + \frac{3^4 \cos 3}{4!(z-i)^4} -$$

$$- \frac{3^5 i \sin 3}{5!(z-i)^5} + \ldots$$

Ответ:

$$f(z) = \cos 3 - \frac{3i\sin 3}{z-i} + \frac{3^2\cos 3}{2!(z-i)^2} - \frac{3^3 i \sin 3}{3!(z-i)^3} + \frac{3^4 \cos 3}{4!(z-i)^4} -$$

$$- \frac{3^5 i \sin 3}{5!(z-i)^5} + \ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{sh6z-6z}{chz-1-z^2/2}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{sh6z-6z}{chz-1-z^2/2}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad g(z)=sh6z-6z;\quad h(z)=chz-1-z^2/2;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g'(z)=6ch6z-6; g'(0)=6ch0-6=0$$

$$h'(z)=shz-z; h'(0)=sh0-0=0$$

$$h''(z)=chz-1; h''(0)=ch0-1=0;$$

$$h'''(z)=shz; h'''(0)=sh0=0;$$

$$h^{IV}(z)=chz; h^{IV}(0)=ch0=1;$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 4 – 1 = 3.

Ответ: Точка z = 0 является полюсом 3-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z^3(z+1)^2}$$

Одной из изолированных особых точек является z = 0. Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z^3(z+1)^2};\quad g(z)=e^z-1;\quad h(z)=z^3(z+1)^2=z^5+2z^4+z^3;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g'(z)=e^z; g'(0)=e^0=1$$

$$h'(z)=5z^4+8z^3+3z^2; h'(0)=0$$

$$h''(z)=20z^3+24z^2+6z; h''(0)=0$$

$$h'''(z)=60z^2+48z+6; h'''(0)=6$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это 3 –1 = 2.

Еще одной изолированной точкой является z = –1.

Для каждой из функций g(z) и h(z) найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = –1:

$$g(0)=e^{-1}-1\neq 0$$

$$h'(z)=5z^4+8z^3+3z^2; h'(0)=0$$

$$h''(z)=20z^3+24z^2+6z; h''(0)=-2$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = –1 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = –1 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это 3 – 2 = 1.

Ответ: Точка z = 0 для данной функции является полюсом 2-го порядка. Точка z = –1 является полюсом 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-3|=1/2} \underbrace{\frac{e^z}{\sin z}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = \pi k,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадает только точка $z = \pi$.
Точка $z_1 = \pi$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to\pi}[f(z)(z-\pi)] = \lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)e^z}{\sin z} = \begin{Bmatrix} t = z-\pi \\ z = t+\pi \end{Bmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{te^{t+\pi}}{\sin(t+\pi)} = \lim_{t\to 0}\frac{te^{t+\pi}}{-\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{te^{t+\pi}}{-t} = \lim_{t\to 0} e^{t+\pi} = e^\pi$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-3|=1/2} \frac{e^z}{\sin z} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot e^\pi$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-3|=1/2} \frac{e^z}{\sin z} dz = 2\pi i \cdot e^\pi$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1/3} \underbrace{\frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$\frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2} = \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{z} + \frac{3}{2} + 2z$$

Считая получившийся результат рядом Лорана по степеням z, т.е. в окрестности z = 0, мы приходим к выводу, что точка z = 0 является полюсом 2-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[f(z)z^2] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(-2+6z+12z^2) = -\frac{2}{2} = -1$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2} dz = 2\pi i \cdot (-1) = -2\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2} dz = -2\pi i$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=0,5}\underbrace{\frac{e^{2z}-1-2z}{z\,\mathrm{sh}^2 4iz}}_{f(z)}dz$$

Особые точки этой функции $z = \pi k/4$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z)=\frac{e^{2z}-1-2z}{z\,\mathrm{sh}^2 4iz}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{matrix} g(z)=e^{2z}-1-2z \\ h(z)=z\,\mathrm{sh}^2 4iz \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}[f(z)z]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{2z}-1-2z}{\mathrm{sh}^2 4iz}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{2e^{2z}-2}{-8\sin 4z\cos 4z}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{4e^{2z}}{32-64\cos^2 4z}\right)=\frac{4}{-32}=-\frac{1}{8}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{z=0.5}\frac{e^{2z}-1-2z}{z\,\mathrm{sh}^2 4iz}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{\pi i}{4}$$

Ответ: $\oint\limits_{z=0,5}\frac{e^{2z}-1-2z}{z\,\mathrm{sh}^2 4iz}dz=-\frac{\pi i}{4}$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2}\left(\frac{2\cos\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2}\underbrace{\frac{2\cos\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}}_{f_1(z)}dz+\oint\limits_{|z-2i|=2}\underbrace{\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}}_{f_2(z)}dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{2\cos\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: $z=2+2i$ и $z=4+2i$. При этом точка $z=4+2i$ не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка $z=2+2i$ является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=2+2i} f_1(z)=\lim_{z\to 2+2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{2(z-2-2i)^2\cos\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}\right]=\lim_{z\to 2+2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{2\cos\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-4-2i)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 2+2i}\left[\frac{(i-1)\pi}{2(z-4-2i)}\sin\frac{(1-i)\pi z}{4}-\frac{2}{(z-4-2i)^2}\cos\frac{(1-i)\pi z}{4}\right]=-\frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{2\cos\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=2-i} f_1(z)=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\pi i$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\pi z/2}+1=0 \Rightarrow e^{\pi z/2}=-1 \Rightarrow \pi z/2=\ln(-1)=\pi i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=2i+4ik, k\in z$$

Из этих точек только одна охвачена контуром $|z-2i|=2$ и должна приниматься во внимание. Это точка $z=2i$, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=2i} f_2(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{\pi(z-2i)}{e^{\pi z/2}+1}=\left\{\begin{matrix}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2}}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{\pi i}}=\frac{2}{e^{\pi i}}=\frac{2}{-1}=-2$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=2i} f_2(z)=2\pi i\cdot(-2)=-4\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2}\left(\frac{2\cos\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz=$$

$$=\oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{2\cos\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}dz+\oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}dz=$$

$$=-\pi i-4\pi i=-5\pi i=\frac{5\pi}{i}$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-2i|=2}\left(\frac{2\cos\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz=\frac{5\pi}{i}$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int\limits_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{7+\sqrt{48}\sin t}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{7+\frac{\sqrt{48}}{2i}(z-\frac{1}{z})}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{7iz+\frac{\sqrt{48}}{2}(z^2-1)}=$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{14iz+\sqrt{48}(z^2-1)}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{48}(z+i\sqrt{3}/2)(z+2i\sqrt{3}/3)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-i\sqrt{3}/2;\quad z=-2i\sqrt{3}/3;$

Точка $-2i\sqrt{3}/3$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $-i\sqrt{3}/2$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-i\sqrt{3}/2} f(z)=\lim_{z\to -i\sqrt{3}/2}[f(z)(z+i\sqrt{3}/2)]=$$

$$=\lim_{z\to -i\sqrt{3}/2}\frac{2}{(z+2i\sqrt{3}/3)\sqrt{48}}=\frac{1}{(-i\sqrt{3}/2+2i\sqrt{3}/3)\sqrt{12}}=-i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{48}(z+i\sqrt{3}/2)(z+2i\sqrt{3}/3)}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot(-i)=2\pi$$

Ответ: $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}=2\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(3\sqrt{2}+\sqrt{3}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i(3\sqrt{2}z+\sqrt{3}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i\left[\sqrt{3}(z-\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}})(z+\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=(1-\sqrt{3})/\sqrt{2};\quad z=(-1-\sqrt{3})/\sqrt{2};$

Точка $z=(-1-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}}f(z)=\lim_{z\to(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}}\frac{d}{dz}[f(z)(z-(1-\sqrt{3})/\sqrt{2})^2]=$$

$$=\lim_{z\to(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}}\frac{d}{dz}\frac{z}{i\left[\sqrt{3}(z+(1+\sqrt{3})/\sqrt{2})\right]^2}=\frac{1}{3i}\lim_{z\to(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z+(1+\sqrt{3})/\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{1}{3i}\lim_{z\to(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}}\left[-2\frac{z\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}{(z\sqrt{2}+1+\sqrt{3})^3}\right]=-\frac{2}{3i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3})^3}=-\frac{2}{3i}\cdot\frac{-2\sqrt{3}}{2^3}=\frac{1}{2\sqrt{3}i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i\left[\sqrt{3}(z-\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}})(z+\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname{res}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{3}i}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos t)^2}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2-z+1)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^2(z-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})^2}$$

Особые точки:

$z=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}f(z)=\lim_{z\to\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}\frac{d}{dz}[f(z)(z-\tfrac{1}{2}-\tfrac{i\sqrt{3}}{2})^2]=$$

$$=\lim_{z\to\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^2}\right]=\lim_{z\to\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}\left[\frac{-16}{(2z-1+i\sqrt{3})^3}\right]=\frac{2\sqrt{3}}{9i}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}=2\pi i\left(\frac{2\sqrt{3}}{9i}\right)=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\lambda x dx=\text{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\text{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\}, \lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$x^4+5x^2+6=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm i\sqrt{2}; z_{3,4}=\pm i\sqrt{3};$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\text{Im}\, z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{i\sqrt{2}; i\sqrt{3}\}$$

Эти особые точки являются простыми полюсами. Найдем в них вычеты:

1) $$\underset{z=i\sqrt{2}}{\text{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i\sqrt{2}}\frac{(z+1)(z-i\sqrt{2})}{(z^2+2)(z^2+3)}e^{iz}=\lim_{z\to i\sqrt{2}}\frac{(z+1)e^{iz}}{(z+i\sqrt{2})(z^2+3)}=$$

$$=\frac{(i\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}}{2i\sqrt{2}(-2+3)}=\frac{1+i\sqrt{2}}{2i\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}}=\left(-\frac{i}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{2}}$$

2) $$\underset{z=i\sqrt{3}}{\text{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i\sqrt{3}}\frac{(z+1)(z-i\sqrt{3})}{(z^2+2)(z^2+3)}e^{iz}=\lim_{z\to i\sqrt{3}}\frac{(z+1)e^{iz}}{(z+i\sqrt{3})(z^2+2)}=$$

$$=\frac{(i\sqrt{3}+1)e^{-\sqrt{3}}}{2i\sqrt{3}(-3+2)}=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}=\left(\frac{i}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{3}}$$

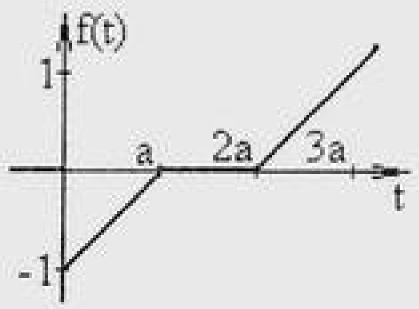
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}dx=\text{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\text{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}}-\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}$$

Ответ: $$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}}-\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}$$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)\begin{cases}\dfrac{t-a}{a}, & 0<t<a\\ 0, & a<t<2a\\ \dfrac{t-2a}{a}, & 2a<t\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{t-a}{a}\cdot\eta(t)+\frac{a-t}{a}\eta(t-a)+\frac{t-2a}{a}\eta(t-2a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{2}{p}\right)e^{-2ap}$$

Ответ: $$F(p)=\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{2}{p}\right)e^{-2ap}$$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{p+3}{p^3+2p^2+3p}=\frac{p+3}{p(p^2+2p+3)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{(p^2+2p+3)}=$$

$$=\frac{Ap^2+2Ap+3A+Bp^2+Cp}{p(p^2+2p+3)}=\frac{(A+B)p^2+(2A+C)p+3A}{p(p^2+2p+3)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\2A+C=1\\3A=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-1\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{p+3}{p^3+2p^2+3p}=\frac{1}{p}+\frac{-p-1}{p^2+2p+3}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{1}{p}+\frac{-p-1}{p^2+2p+3}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+2p+3}-\frac{1}{p^2+2p+3}=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{p}{(p+1)^2+2}-\frac{1}{(p+1)^2+2}=\frac{1}{p}-\frac{p+1}{(p+1)^2+2}\to$$

$$\to 1-e^{-t}\cos\sqrt{2}t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$1-e^{-t}\cos\sqrt{2}t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$y''+y'+y=7e^{2t}$

$y(0)=1,\quad y'(0)=4.$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+pY(p)-y(0)+Y(p)=\frac{7}{p-2}$$

$$p^2Y(p)-p-4+pY(p)-1+Y(p)=\frac{7}{p-2}$$

$$(p^2+p+1)Y(p)-p-5=\frac{7}{p-2}+p+5$$

$$Y(p)=\frac{7}{(p-2)(p^2+p+1)}+\frac{p+5}{p^2+p+1}=\frac{p^2+3p-3}{(p-2)(p^2+p+1)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{p^2+3p-3}{(p-2)(p^2+p+1)}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+p+1}=$$

$$=\frac{Ap^2+Ap+A+Bp^2+Cp-2Bp-2C}{(p-2)(p^2+p+1)}$$

$$\begin{cases}A+B=1\\A-2B+C=3\\A-2C=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=0\\C=2\end{cases}\Rightarrow Y(p)=\frac{1}{p-2}+\frac{2}{p^2+p+1}$$

$$Y(p)=\frac{1}{p-2}+\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\Rightarrow y(t)=e^{2t}+\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Ответ: $y(t)=e^{2t}+\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

Задача 25

Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы F=–kx, пропорциональной смещению x и направленной в противоположную сторону, и силы сопротивления R=rv. В момент t=0 частица находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Найти закон движения x=x(t) частицы.

$k = 5m,\ r = 4m,\ x_0 = 2м,\ v_0 = 1м/с.$

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kx - rv$$

$$\ddot{x}m + r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 2$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 1$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m + 4m\dot{x} + 5mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + 4pX(p) - 4x(0) + 5X(p) = 0$$

$$(p^2 + 4p + 5)X(p) - 2p - 9 = 0$$

$$X(p) = \frac{2p+9}{p^2+4p+5} = \frac{2p+9}{(p+2)^2+1} = 2\frac{p+2}{(p+2)^2+1} + \frac{5}{(p+2)^2+1}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = 2e^{-2t}\cos t + 5e^{-2t}\sin t$$

Ответ: $x(t) = 2e^{-2t}\cos t + 5e^{-2t}\sin t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y \\ \dot{y} = x - 2y + 2 \end{cases}$$

$x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = 2X(p) + 5Y(p) \\ pY(p) - y(0) = X(p) - 2Y(p) + 2/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = 2X(p) + 5Y(p) \\ pY(p) - 1 = X(p) - 2Y(p) + 2/p \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 1 = X(p) - 2Y(p) + 2/p$$

$$X(p) = pY(p) + 2Y(p) - 1 - 2/p$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p[pY(p) + 2Y(p) - 1 - 2/p] - 1 = 2[pY(p) + 2Y(p) - 1 - 2/p] + 5Y(p)$$

$$(p^2 - 9)Y(p) = p + 1 - 4/p \Rightarrow Y(p) = \frac{p+1-4/p}{p^2-9}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{p+1-4/p}{p^2-9} = \frac{p}{p^2-9} + \frac{1}{3}\frac{3}{p^2-9} - \frac{4}{9}\frac{9}{p}\frac{1}{p^2-9} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = ch3t + \tfrac{1}{3}sh3t - \tfrac{4}{9}(1 - \cos 3it) = ch3t + \tfrac{1}{3}sh3t + \tfrac{4}{9}(1 - ch3t) =$$

$$= \tfrac{5}{9}ch3t + \tfrac{1}{3}sh3t + \tfrac{4}{9}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = x - 2y + 2 \Rightarrow x(t) = \dot{y} + 2y - 2 =$$

$$= \tfrac{5}{3}ch3t + sh3t + \tfrac{10}{9}ch3t + \tfrac{2}{3}sh3t + \tfrac{8}{9} - 2 = \tfrac{25}{9}ch3t + \tfrac{5}{3}sh3t - \tfrac{10}{9}$$

Ответ:

$$x(t) = \tfrac{5}{9}ch3t + \tfrac{1}{3}sh3t + \tfrac{4}{9}$$

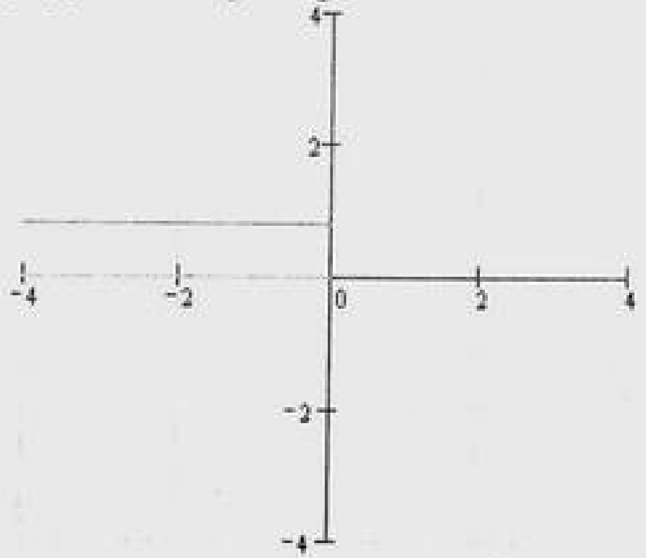
$$y(t) = \tfrac{25}{9}ch3t + \tfrac{5}{3}sh3t - \tfrac{10}{9}$$

Задача 27

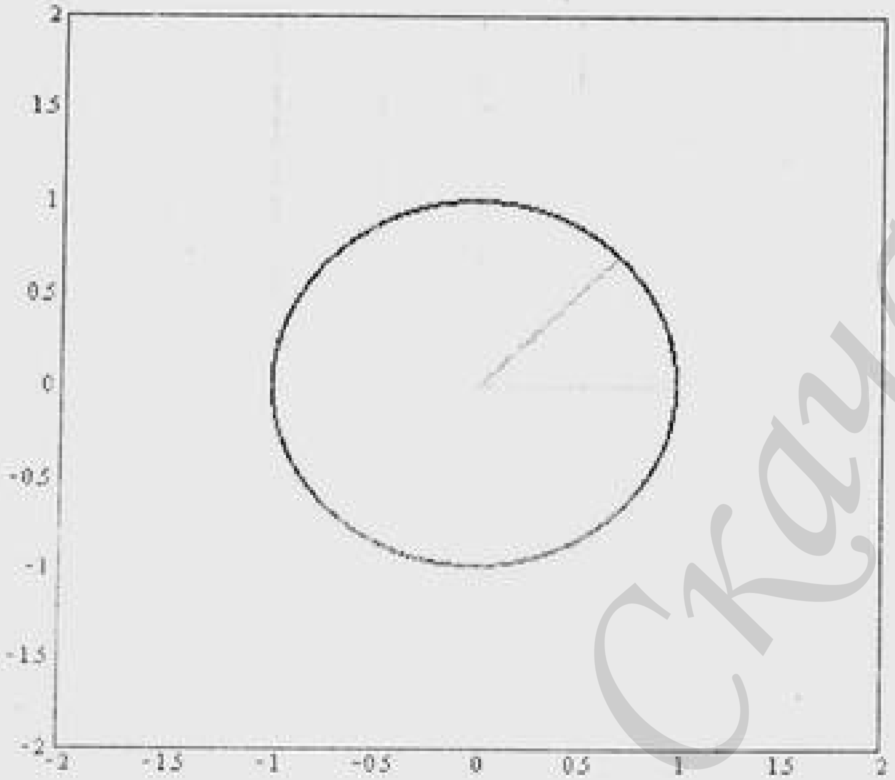
Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = e^z$; полуполоса $x<0$, $0<y<\alpha\le 2\pi$.

Продемонстрируем на примере $\alpha=\pi/4$:



Каждая из границ полуполосы преобразуется в отрезок длиной $e^0=1$, исходящий из начала координат под углом 0 и α радиан соответственно. Заключенная между этими отрезками и окружностью радиуса $e^0=1$ область является отображением полуполосы:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\dots,n-1; z \ne 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z=x+iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Аналитические функции

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z\in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$