/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\dots,n-1;\quad z\neq 0$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$:

$$\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-2i$$

$$\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}=2+i2\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}+2i$$

$$\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}=-2-i2\sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}=\left\{2\sqrt{3}-2i;2+i2\sqrt{3};-2\sqrt{3}+2i;-2-i2\sqrt{3}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\operatorname{sh}(2-\pi i)$

Перейдем от гиперболического синуса к тригонометрическому:

$$\operatorname{sh}(2-\pi i)=-i\cdot\sin(2i+\pi)=-i\cdot\sin(\pi+2i)$$

Используем формулу синуса суммы:

$$-i\cdot\sin(\pi+2i)=-i[\sin(\pi)\cos(2i)+\cos(\pi)\sin(2i)]$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$-i[\sin(\pi)\cos(2i)+\cos(\pi)\sin(2i)]=-i\cdot 0\cdot\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}-$$

$$-i\cdot(-1)\cdot\frac{e^{-2}-e^{2}}{2i}=\left(\frac{e^{-2}-e^{2}}{2}\right)$$

Ответ: $\operatorname{sh}(2-\pi i)=\left(\frac{e^{-2}-e^{2}}{2}\right)$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)$$

Функция Arctg является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arctg}\, z=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$$

Подставим вместо z значение $\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}$:

$$\mathrm{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\frac{-8+i3\sqrt{3}}{7}}{1-\frac{-8+i3\sqrt{3}}{7}}=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{7-8+i3\sqrt{3}}{7+8-i3\sqrt{3}}=$$

$$=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{-1+i3\sqrt{3}}{15-i3\sqrt{3}}=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-i3\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}\right)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\, z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),k=0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-i3\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}\right)=-\frac{i}{2}[\ln\left|-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-i3\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}\right|+$$

$$+i(\arg(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-i3\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}})+2\pi k)]=-\frac{i}{2}\ln\frac{1}{3}+$$

$$+\frac{1}{2}(\arg(-3\frac{5+i\sqrt{3}}{1+i3\sqrt{3}})+2\pi k)\approx\frac{i}{2}\cdot1{,}099+\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3}+2\pi k)$$

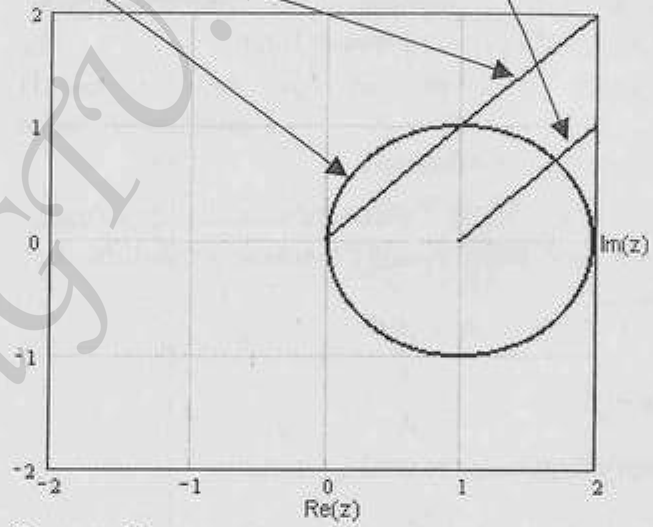
$k=0,\pm1,\pm2,...$

Ответ: $\mathrm{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)\approx\frac{i}{2}\cdot1{,}099+\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3}+2\pi k),k=0,\pm1,\pm2,...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z-1|<1,\quad \arg z\le\pi/4,\quad \arg(z-1)>\pi/4$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z=t^2+2t+5+i(t^2+2t+1)$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t)=t^2+2t+5;\quad y(t)=t^2+2t+1$

Выразим параметр t через x и y:

$x=t^2+2t+5\Rightarrow x-4=(t+1)^2\Rightarrow t=\sqrt{x-4}-1$

$y=t^2+2t+1\Rightarrow y=(t+1)^2\Rightarrow t=\sqrt{y}-1$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$\sqrt{x-4}-1=\sqrt{y}-1\Rightarrow x-4=y\Rightarrow x-y-4=0$

Ответ: $x-y-4=0$

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ и значению $f(z_0)$:

$$u = -2xy - 2y$$

$$f(0) = i$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = -2y + 2ix + 2i = 2(ix - y) + 2i =$$
$$= 2i(x+iy) + 2i = 2iz + 2i$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int(2iz + 2i)dz = iz^2 + 2iz + C$$

Определим константу C:

$$f(0) = i0^2 + 2i \cdot 0 + C = i \Rightarrow C = i$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = iz^2 + 2iz + i$$

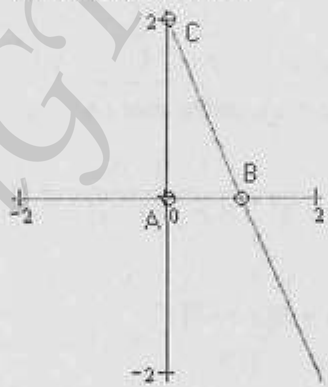
Ответ: $f(z) = iz^2 + 2iz + i$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int\limits_{ABC}(\sin z + z^5)dz;\ ABC - \text{ломаная}: z_A = 0; z_B = 1; z_C = 2i$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = \sin(x+iy) + (x+iy)^5 =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(e^{ix-y} - e^{-ix+y}\right) + x^5 + 5ix^4y -$$
$$-10x^3y^2 - 10ix^2y^3 + 5xy^4 - iy^5 =$$
$$= \underbrace{\frac{\sin x}{2}(e^{-y} + e^y) + x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4}_{u(x,y)} +$$
$$+ i \cdot \underbrace{\left(\frac{\cos x}{2}(e^y - e^{-y}) + 5x^4y - 10x^2y^3 - y^5\right)}_{v(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^{-y}}{2}\left((e^{2y}+1)\cos x + 10e^y(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)\right) = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{e^{-y}}{2}\left((1-e^{2y})\sin x + 40xye^y(x^2 - y^2)\right) = -\frac{\partial v}{\partial y};$$

Условия Коши-Римана выполняются, следовательно, функция является аналитической. Тогда результат от пути интегрирования не зависит:

$$\int\limits_{ABC}(\sin z + z^5)dz = \int\limits_0^{2i}(\sin z + z^5)dz = -\cos z + \frac{z^6}{2}\Bigg|_0^{2i} = -\text{ch}2 - \frac{29}{3}$$

Ответ: $\int\limits_{ABC}(\sin z + z^5)dz = -\text{ch}2 - \frac{29}{3}$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}=\frac{6(z+24)}{-z^2(z+6)(z-12)}=-\frac{6}{z^2}\cdot\frac{z+24}{(z+6)(z-12)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

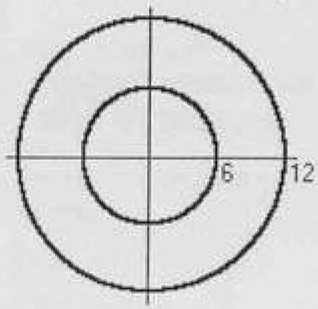
$$\frac{z+24}{(z+6)(z-12)}=\frac{A}{z+6}+\frac{B}{z-12}=\frac{Az-12A+Bz+6B}{(z+6)(z-12)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=-1;B=2\}\Rightarrow\frac{z+24}{(z+6)(z-12)}=\frac{-1}{z+6}+\frac{2}{z-12}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+6}-\frac{2}{z-12}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=-6; z=12$



Рассмотрим область $|z|<6$:

$$f(z)=\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+6}-\frac{2}{z-12}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1-(-\frac{z}{6})}+\frac{1}{1-\frac{z}{12}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{6}+\frac{z^2}{36}-\frac{z^3}{216}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{12}+\frac{z^2}{144}+\frac{z^3}{1728}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}-\frac{z}{216}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}+\frac{z}{1728}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $6<|z|<12$:

$$f(z)=\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+6}-\frac{2}{z-12}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{6}{z(1+\frac{6}{z})}+\frac{1}{1-\frac{z}{12}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{6}{z}-\frac{36}{z^2}+\frac{216}{z^3}-\frac{1296}{z^4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{12}+\frac{z^2}{144}+\frac{z^3}{1728}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{6}{z^3}-\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}-\frac{1296}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}+\frac{z}{1728}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>12$:

$$f(z)=\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+6}-\frac{2}{z-12}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{6}{z(1+\frac{6}{z})}-\frac{12}{z(1-\frac{12}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{6}{z}-\frac{36}{z^2}+\frac{216}{z^3}-\frac{1296}{z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{12}{z}+\frac{144}{z^2}+\frac{1728}{z^3}+\frac{20736}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{6}{z^3}-\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}-\frac{1296}{z^6}+\ldots\right)-\left(\frac{12}{z^3}+\frac{144}{z^4}+\frac{1728}{z^5}+\frac{20736}{z^6}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<6: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}-\frac{z}{216}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}+\frac{z}{1728}+\ldots\right)$$

$$6<|z|<12: f(z)=\left(\frac{6}{z^3}-\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}-\frac{1296}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}+\frac{z}{1728}+\ldots\right)$$

$$|z|>12: f(z)=\left(\frac{6}{z^3}-\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}-\frac{1296}{z^6}+\ldots\right)-\left(\frac{12}{z^3}+\frac{144}{z^4}+\frac{1728}{z^5}+\frac{20736}{z^6}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z-z_0.

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+4},z_0=3+2i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+4}=\frac{1}{z-2i}+\frac{1}{z+2i}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{(z-z_0)+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+2i}=\frac{1}{(z-z_0)+3+4i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(3+4i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{1}{z-2i}+\frac{1}{z+2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(3+4i)^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{(3+4i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{(3+4i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=z\cdot\sin\pi\frac{z-1}{z-2},z_0=2$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-2;z\cdot\sin\frac{z-1}{z-2}=(z'+2)\sin\frac{z'+1}{z'}=(z'+2)[\sin 1\cos\frac{1}{z'}+\cos 1\sin\frac{1}{z'}]=$$

$$=z'\sin 1\cos\frac{1}{z'}+z'\cos 1\sin\frac{1}{z'}+2\sin 1\cos\frac{1}{z'}+2\cos 1\sin\frac{1}{z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=z'\sin 1\cos\frac{1}{z'}+z'\cos 1\sin\frac{1}{z'}+2\sin 1\cos\frac{1}{z'}+2\cos 1\sin\frac{1}{z'}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2!z'^2}+\frac{1}{4!z'^4}-...\right)z'\sin 1+\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{3!z'^3}+\frac{1}{5!z'^5}-...\right)z'\cos 1+$$

$$+2\left(1-\frac{1}{2!z'^2}+\frac{1}{4!z'^4}-...\right)\sin 1+2\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{3!z'^3}+\frac{1}{5!z'^5}-...\right)\cos 1=$$

$$=z'\sin 1+\cos 1+2\sin 1+\frac{2!2\cos 1-\sin 1}{2!z'}-\frac{2!\cos 1+3!2\sin 1}{2!3!z'^2}-$$

$$-\frac{4!2\cos 1+3!\sin 1}{3!4!z'^3}+\frac{4!\cos 1+5!2\sin 1}{4!5!z'^4}+...$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0=1:

$$f(z)=z'\sin 1+\cos 1+2\sin 1+\frac{2!2\cos 1-\sin 1}{2!z'}-\frac{2!\cos 1+3!2\sin 1}{2!3!z'^2}-$$

$$-\frac{4!2\cos 1+3!\sin 1}{3!4!z'^3}+\frac{4!\cos 1+5!2\sin 1}{4!5!z'^4}+...$$

Ответ:

$$f(z)=z'\sin 1+\cos 1+2\sin 1+\frac{2!2\cos 1-\sin 1}{2!z'}-\frac{2!\cos 1+3!2\sin 1}{2!3!z'^2}-$$

$$-\frac{4!2\cos 1+3!\sin 1}{3!4!z'^3}+\frac{4!\cos 1+5!2\sin 1}{4!5!z'^4}+...$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{\sin z^4-z^4}{\text{sh}z-z-z^3/6}$$

Разложим числитель и знаменатель в ряды Лорана в окрестности точки z = 0:

$$f(z)=\frac{\sin z^4-z^4}{\text{sh}z-z-z^3/6}=\frac{-z^4+z^4-\frac{z^{12}}{3!}+\frac{z^{20}}{5!}-\frac{z^{28}}{7!}+\ldots}{-z^3/6-z+z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\ldots}=$$

$$=\frac{-\frac{z^{12}}{3!}+\frac{z^{20}}{5!}-\frac{z^{28}}{7!}+\ldots}{\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}+\ldots}=\frac{-\frac{z^7}{3!}+\frac{z^{15}}{5!}-\frac{z^{23}}{7!}+\ldots}{\frac{1}{5!}+\frac{z^2}{7!}+\frac{z^4}{9!}+\ldots}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{-\frac{z^7}{3!}+\frac{z^{15}}{5!}-\frac{z^{23}}{7!}+\ldots}{\frac{1}{5!}+\frac{z^2}{7!}+\frac{z^4}{9!}+\ldots}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{aligned}g(z)&=-\frac{z^7}{3!}+\frac{z^{15}}{5!}-\frac{z^{23}}{7!}+\ldots;\\ h(z)&=\frac{1}{5!}+\frac{z^2}{7!}+\frac{z^4}{9!}+\ldots;\end{aligned}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0. Поскольку рассматриваемые функции представляют собой обычные степенные многочлены, то несложно увидеть, что $g^{VII}(0)\neq0$ и $h(0)\neq0$.

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 7 – 0 = 7.

Ответ: Точка z = 0 является полюсом 7-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\frac{\cos\pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}$$

Изолированными особыми точками являются z=i, z=–i, z=1/2, z=–1/2. Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{\cos\pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)};\quad \begin{aligned}g(z)&=\cos\pi z;\\ h(z)&=(4z^2-1)(z^2+1);\end{aligned}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = i, z = –i, z = 1/2, z = –1/2:

$$g(1/2)=0;g(-1/2)=0;g(i)\neq0;g(-i)\neq0;$$

$$g'(z)=-\pi\sin\pi z;g'(1/2)\neq0;g'(-1/2)\neq0;$$

$$h(1/2)=0;h(-1/2)=0;h(i)=0;h(-i)=0;$$

$$h'(z)=16z^3+6z;h'(1/2)\neq0;h'(-1/2)\neq0;h'(i)\neq0;h'(-i)\neq0$$

При z = 1/2 и z = –1/2 порядок ненулевой производной для функции, стоящей в знаменателе, равен порядку ненулевой производной для функции, стоящей в числителе. Таким образом, можно сделать вывод, что z = 1/2 и z = –1/2 являются устранимыми особыми точками.

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = i и z = –i выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки z = i и z = –i являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это 1 – 0 = 1.

Ответ: Точки z = 1/2 и z = –1/2 являются устранимыми особыми точками.
Точки z = i и z = –i являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z|=2} \underbrace{\frac{\sin^2 z}{z\cos z}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = 0$

$z = \pi/2 + \pi k,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадают точки $z = 0$, $z = \pi/2$, $z = -\pi/2$.

Точка $z_1 = 0$ является простым нулем. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to 0}[\frac{f(z)}{z-0}] = \lim_{z\to 0}\frac{\sin^2 z}{z^2\cos z} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{z^2\cos z} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{\cos z} = 1$$

Точка $z_2 = \pi/2$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to\pi/2}[f(z)(z-\pi/2)] = \lim_{z\to\pi/2}\frac{(z-\pi/2)\sin^2 z}{z\cos z} =$$

$$= \begin{Bmatrix} t = z-\pi/2 \\ z = t+\pi/2 \end{Bmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{t\sin^2(t+\pi/2)}{(t+\pi/2)\cos(t+\pi/2)} = \lim_{z\to 0}\frac{t\cos^2 t}{-(t+\pi/2)\sin t} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{t\cos^2 t}{-(t+\pi/2)t} = \lim_{z\to 0}\frac{\cos^2 t}{-(t+\pi/2)} = \frac{1}{-\pi/2} = -\frac{2}{\pi}$$

Точка $z_3 = -\pi/2$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_3} f(z) = \lim_{z\to-\pi/2}[f(z)(z+\pi/2)] = \lim_{z\to-\pi/2}\frac{(z+\pi/2)\sin^2 z}{z\cos z} =$$

$$= \begin{Bmatrix} t = z+\pi/2 \\ z = t-\pi/2 \end{Bmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{t\sin^2(t-\pi/2)}{(t-\pi/2)\cos(t-\pi/2)} = \lim_{z\to 0}\frac{t\cos^2 t}{(t-\pi/2)\sin t} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{t\cos^2 t}{(t-\pi/2)t} = \lim_{z\to 0}\frac{\cos^2 t}{(t-\pi/2)} = \frac{1}{-\pi/2} = -\frac{2}{\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint_{|z|=2}\frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i\cdot\left(1-\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right) = 2i(\pi-4)$$

Ответ: $\oint_{|z|=2}\frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz = 2i(\pi-4)$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z|=2} \underbrace{z^3\cos\frac{2i}{z}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$z^3\cos\frac{2i}{z} = z^3\left(1+\frac{4}{2!z^2}+\frac{16}{4!z^4}+\frac{64}{6!z^6}+\ldots\right) =$$

$$= z^3+\frac{4z}{2!}+\frac{16}{4!z}+\frac{64}{6!z^3}+\ldots$$

Главная часть получившегося ряда содержит бесконечное число членов, из чего следует, что это – существенная особая точка. Тогда вычет в этой точке находится, как коэффициент при минус первой степени в лорановском разложении f(z) в окрестностях точки $z = 0$:

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = C_{-1} = \frac{16}{4!} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint_{|z|=2} z^2\sin\frac{i}{z^2}dz = 2\pi i\cdot\frac{2}{3} = \frac{4\pi i}{3}$$

Ответ: $\oint_{|z|=2} z^2\sin\frac{i}{z^2}dz = \frac{4\pi i}{3}$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=0,2} \underbrace{\frac{\text{ch}2z-\cos 2z}{z^2\sin 8z}}_{f(z)}dz$$

Особые точки этой функции $z = \pi k/8$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z)=\frac{\text{ch}2z-\cos 2z}{z^2\sin 8z}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{matrix} g(z)=\text{ch}2z-\cos 2z \\ h(z)=z^2\sin 8z \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\underset{z=0}{\text{res}}\, f(z)=\lim_{z\to 0}[f(z)z]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\text{ch}2z-\cos 2z}{z\sin 8z}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{2\text{sh}2z+2\sin 2z}{\sin 8z+8z\cos 8z}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{4\text{ch}2z+4\cos 2z}{16\cos 8z-64z\sin 8z}\right)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=0,2}\frac{\text{ch}2z-\cos 2z}{z^2\sin 8z}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\underset{z_n}{\text{res}}f(z)=2\pi i\cdot\frac{1}{2}=\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=0,2}\frac{\text{ch}2z-\cos 2z}{z^2\sin 8z}dz=\pi i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-3|=2}\left(z\cos\frac{1}{z-3}+\frac{4\text{ch}\frac{\pi i z}{2}}{(z-2)^2 z}\right)dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-3|=2}\underbrace{z\cos\frac{1}{z-3}}_{f_1(z)}dz+\oint\limits_{|z-3|=2}\underbrace{\frac{4\text{ch}\frac{\pi i z}{2}}{(z-2)^2 z}}_{f_2(z)}dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint\limits_{|z-3|=2} z\cos\frac{1}{z-3}dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left\{\begin{matrix}t=z-3\\ z=t+3\end{matrix}\right\}\Rightarrow z\cos\frac{1}{z-3}=(t+3)\cos\frac{1}{t}$$

Единственной особой точкой этой функции является $t=0$. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t+3)\cos\frac{1}{t}=(t+3)\left(1-\frac{1}{2!t^2}+\frac{1}{4!t^4}-\frac{1}{6!t^6}+\frac{1}{8!t^8}-...\right)=$$

$$=\left(t-\frac{1}{2!t}+\frac{1}{4!t^3}-\frac{1}{6!t^5}+...\right)+\left(3-\frac{3}{2!t^2}+\frac{3}{4!t^4}-\frac{3}{6!t^6}+...\right)=$$

$$=t+3-\frac{1}{2!t}-\frac{3}{2!t^2}+\frac{1}{4!t^3}+\frac{3}{4!t^4}-\frac{1}{6!t^5}-\frac{3}{6!t^6}+...$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов, из чего следует, что $t=0$ является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\underset{t=0}{\text{res}}\left[(t+3)\cos\frac{1}{t}\right]=C_{-1}=-\frac{1}{2!}=-\frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-3|=2} z\cos\frac{1}{z-3}dz = \oint\limits_{|t|=2}(t+3)\cos\frac{1}{t}dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+3)\cos\frac{1}{t}\right] =$$

$$= 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint\limits_{|z-3|=2}\frac{4\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{2}}{(z-2)^2 z}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=0 и z=2. При этом точка z=0 не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=2 является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=2} f_2(z) = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-2)^2\cdot 4\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{2}}{(z-2)^2 z}\right] = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left[\frac{4\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{2}}{z}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 2}\left[\frac{-2\pi}{z}\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) - \frac{4}{z^2}\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right] = 1$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-3|=2}\frac{4\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{2}}{(z-2)^2 z}dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=2} f_2(z) = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-3|=2}\left(z\cos\frac{1}{z-3} + \frac{4\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{2}}{(z-2)^2 z}\right)dz = \oint\limits_{|z-3|=2} z\cos\frac{1}{z-3}dz +$$

$$+ \oint\limits_{|z-3|=2}\frac{4\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{2}}{(z-2)^2 z}dz = -\pi i + 2\pi i = \pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-3|=2}\left(z\cos\frac{1}{z-3} + \frac{4\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{2}}{(z-2)^2 z}\right)dz = \pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t + 3}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t + 3} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\frac{\sqrt{2}}{i}(z-\frac{1}{z})+3} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{2}(z^2-1)+3iz} =$$

$$= \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{2}(z+i\sqrt{2})(z+i/\sqrt{2})}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = -i\sqrt{2};\quad z = -i/\sqrt{2};$

Точка $-i\sqrt{2}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $-i/\sqrt{2}$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-i/\sqrt{2}} f(z) = \lim_{z\to -i/\sqrt{2}}[f(z)(z+i/\sqrt{2})] =$$

$$= \lim_{z\to -i/\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}(z+i\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}(-i/\sqrt{2}+i\sqrt{2})} = -i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{2}(z+i\sqrt{2})(z+i/\sqrt{2})} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} f(z) = 2\pi i\cdot(-i) = 2\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t + 3} = 2\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = \oint_{|z|=1} F(z)\,dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}\cos t)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}(z + \frac{1}{z}))^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{4z\,dz}{i(2\sqrt{3}z + \sqrt{2}(z^2+1))^2} = \oint_{|z|=1} \frac{4z\,dz}{i\left[\sqrt{3}(z - \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}})(z + \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = (1-\sqrt{3})/\sqrt{2}$; $\quad z = (-1-\sqrt{3}/\sqrt{2}$;

Точка $z = (-1-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z = (1-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}} f(z) = \lim_{z\to(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}} \frac{d}{dz}[f(z)(z-(1-\sqrt{3})/\sqrt{2})^2] =$$

$$= \lim_{z\to(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}} \frac{d}{dz} \frac{4z}{i\left[\sqrt{2}(z+(1+\sqrt{3})/\sqrt{2})\right]^2} = \frac{2}{i} \lim_{z\to(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z+(1+\sqrt{3})/\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{2}{i} \lim_{z\to(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}} \left[-2\frac{z\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}{(z\sqrt{2}+1+\sqrt{3})^3}\right] = -\frac{4}{i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3})^3} = -\frac{4}{i}\cdot\frac{-2\sqrt{3}}{2^3} = \frac{\sqrt{3}}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1} \frac{4z\,dz}{i\left[\sqrt{3}(z - \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}})(z + \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}})\right]^2} = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right) = 2\sqrt{3}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}\cos t)^2} = 2\sqrt{3}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_m \operatorname*{res}_{z_m} R(z)$$ сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2+2}{(z^2+3)(z^2+4)}dz$$

Особые точки:

$z = 2i \quad (\operatorname{Im} z > 0)$; $\quad z = -2i \quad (\operatorname{Im} z < 0)$

$z = i\sqrt{3} \quad (\operatorname{Im} z > 0)$; $\quad z = -i\sqrt{3} \quad (\operatorname{Im} z < 0)$

Точки $z = 2i$ и $z = i\sqrt{3}$ являются простыми полюсами и вычеты в них вычисляются следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to 2i}[f(z)(z-2i)] = \lim_{z\to 2i} \frac{z^2+2}{(z+2i)(z^2+3)} = -\frac{i}{2}$$

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{3}} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{3}}[f(z)(z-i\sqrt{3})] = \lim_{z\to i\sqrt{3}} \frac{z^2+5}{(z+i\sqrt{3})(z^2+4)} = \frac{i}{2\sqrt{3}}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx = 2\pi i\left(\frac{i}{2\sqrt{3}} - \frac{i}{2}\right) = 2\pi i\frac{i(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\lambda x dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_{m}\underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$(x^2+1)^2=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm i$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{i\}$$

Эта особая точка является полюсом второго порядка. Найдем в ней вычет для каждой из функций:

$$1)\underset{z=i}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2}e^{2iz}\right]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}e^{2iz}\right]=$$

$$=\frac{-4+2iz}{(z+i)^3}e^{2iz}=-\frac{3}{4}ie^{-2}$$

$$2)\underset{z=i}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2}e^{iz}\right]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}e^{iz}\right]=$$

$$=\frac{-3+iz}{(z+i)^3}e^{iz}=-\frac{1}{2}ie^{-1}$$

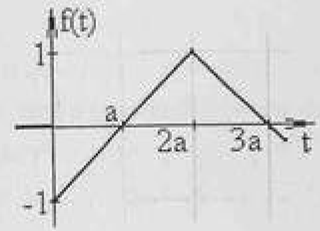
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^2}dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_{m}\underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\pi\left(\frac{3}{2}e^{-2}-e^{-1}\right)$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^2}dx=\pi\left(\frac{3}{2}e^{-2}-e^{-1}\right)$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)\begin{cases}\dfrac{t-a}{a} & 0<t<2a\\[2mm] \dfrac{3a-t}{a}, & 2a<t\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{t-a}{a}\cdot\eta(t)+\frac{4a-2t}{a}\eta(t-2a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}+\left(\frac{4}{p}-\frac{2}{ap^2}\right)e^{-2ap}$$

Ответ: $F(p)=\dfrac{1}{ap^2}-\dfrac{1}{p}+\left(\dfrac{4}{p}-\dfrac{2}{ap^2}\right)e^{-2ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{2-p}{p^3-2p^2+5p}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{2-p}{p^3-2p^2+5p}=\frac{2-p}{p(p^2-2p+5)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2-2p+5}=$$

$$=\frac{Ap^2-2Ap+5A+Bp^2+Cp}{p(p^2-2p+5)}=\frac{(A+B)p^2+(-2A+C)p+5A}{p(p^2-2p+5)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\-2A+C=-1\\5A=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2/5\\B=-2/5\\C=-1/5\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{2-p}{p^3-2p^2+5p}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p}-\frac{2}{5}\cdot\frac{p}{p^2-2p+5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2-2p+5}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p}-\frac{2}{5}\cdot\frac{p}{p^2-2p+5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2-2p+5}=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p}-\frac{2}{5}\cdot\frac{p}{(p-1)^2+4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(p-1)^2+4}=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p}-\frac{2}{5}\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+4}-\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{(p-1)^2+4}\to$$

$$\to\frac{2}{5}-\frac{2}{5}e^t\cos 2t-\frac{3}{10}e^t\sin 2t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$\frac{2}{5}-\frac{2}{5}e^t\cos 2t-\frac{3}{10}e^t\sin 2t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''-2y'=e^t(t^2+t-3)$$

$$y(0)=2,\quad y'(0)=2.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$y''-2y'=e^t(t^2+t-3)$$

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)-2pY(p)+2y(0)=\frac{2}{(p-1)^3}+\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{3}{p-1}$$

$$p^2Y(p)-2p-2-2pY(p)+4=\frac{-3p^2+7p-2}{(p-1)^3}$$

$$p(p-2)Y(p)=\frac{-3p^2+7p-2}{(p-1)^3}+2p-2=\frac{2p^4-8p^3+9p^2-p}{(p-1)^3}$$

$$Y(p)=\frac{2p^4-8p^3+9p^2-p}{p(p-1)^3(p-2)}=\frac{2p^3-8p^2+9p-1}{(p-1)^3(p-2)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{2p^3-8p^2+9p-1}{(p-1)^3(p-2)}=\frac{Ap^2+Bp+C}{(p-1)^3}+\frac{D}{p-2}=$$

$$=\frac{Ap^3-2Ap^2+Bp^2-2Bp+Cp-2C+Dp^3-3Dp^2+3Dp-D}{(p-1)^3(p-2)}$$

$$\begin{cases}A+D=2\\-2A+B-3D=-8\\-2B+C+3D=9\\-2C-D=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-3\\C=0\\D=1\end{cases}\Rightarrow Y(p)=\frac{p^2-3p}{(p-1)^3}+\frac{1}{p-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(p)=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{2}{(p-1)^3}+\frac{1}{p-2}\Rightarrow y(t)=e^t-te^t-t^2e^t+e^{2t}$$

Ответ: $y(t)=e^t-te^t-t^2e^t+e^{2t}$

Задача 25

На материальную точку массы m действует сила сопротивления R=kv, пропорциональная скорости v. Какое расстояние пройдет точка за неограниченное время, если ей сообщена начальная скорость v_0?

$k = m$, $v_0 = 7$ м/с.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kv$$

$$\ddot{x}m + k\dot{x} = 0$$

Начальные условия:

$$\dot{x}(0) = v_0 = 7$$

$$x(0) = 0$$

Подставим значения k:

$$\ddot{x}m + m\dot{x} = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

Перейдем к изображениям функций:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + pX(p) - x(0) = 0$$

$$p(p+1)X(p) - 7 = 0$$

$$p(p+1)X(p) = 7$$

$$X(p) = \frac{7}{p(p+1)} = \frac{7}{p} - \frac{7}{p+1}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = 7 - 7e^{-t}$$

Ответ: $x(t) = 7 - 7e^{-t}$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 2 \\ \dot{y} = x + y + 1 \end{cases}$$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = -X(p) + 3Y(p) + 2/p \\ pY(p) - y(0) = X(p) + Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) = -X(p) + 3Y(p) + 2/p \\ pY(p) - 1 = X(p) + Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 1 = X(p) + Y(p) + 1/p \Rightarrow X(p) = pY(p) - 1 - Y(p) - 1/p$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p[pY(p) - 1 - Y(p) - 1/p] = -[pY(p) - 1 - Y(p) - 1/p] + 3Y(p) + 2/p$$

$$Y(p) = \frac{p + 3 + 3/p}{p^2 - 4}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{p+3+3/p}{p^2-4} = \frac{p+3+3/p}{p^2-4} + \frac{3}{4p} - \frac{3}{4p} = \frac{7p/4+3}{p^2-4} - \frac{3}{4p} =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{7p+12}{p^2-4} - \frac{3}{4p} = \frac{7}{4}\frac{p}{p^2-4} + \frac{3}{2}\frac{2}{p^2-4} - \frac{3}{4p} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = \tfrac{7}{4}\operatorname{ch}2t + \tfrac{3}{2}\operatorname{sh}2t - \tfrac{3}{4}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = x + y + 1 \Rightarrow x(t) = \dot{y} - y - 1 = 3\operatorname{sh}2t + \tfrac{3}{2}\operatorname{ch}2t - \tfrac{1}{2} - 1 =$$

$$= \tfrac{7}{2}\operatorname{sh}2t + 3\operatorname{ch}2t$$

Ответ:

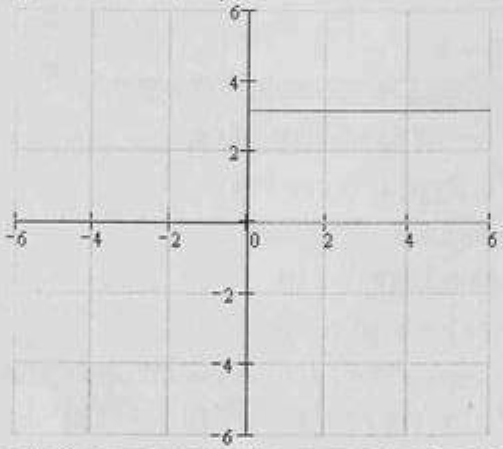
$$x(t) = \tfrac{7}{2}\operatorname{sh}2t + 3\operatorname{ch}2t$$

$$y(t) = \tfrac{7}{4}\operatorname{ch}2t + \tfrac{3}{2}\operatorname{sh}2t - \tfrac{3}{4}$$

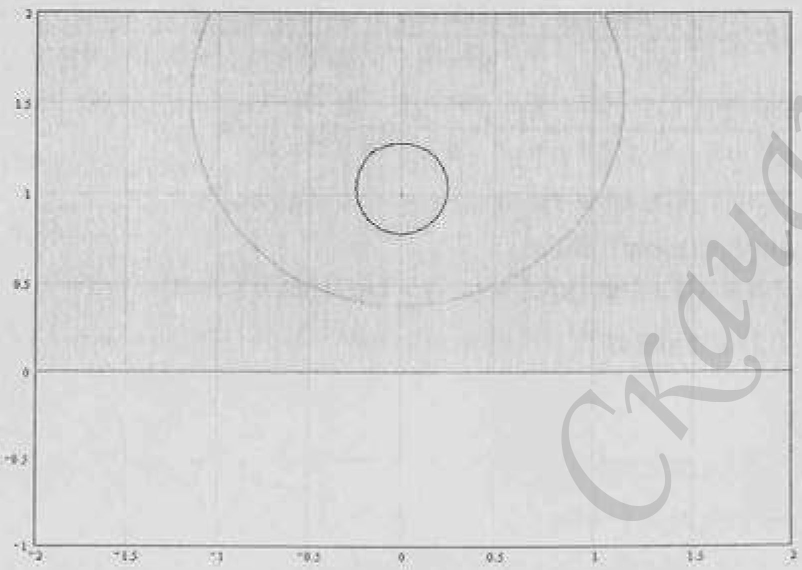
Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = \mathrm{cth}(z)$; полуполоса $x>0$, $0<y<\pi$.



Каждая из горизонтальных линий в полуполосе преобразуется в замкнутую кривую, лежащую в верхней полуплоскости. В пределе $y=\pi/2$ кривая сжимается в точку (0;1). В пределе $y=0$ нижняя граница кривой превращается в ось абсцисс, а сама кривая имеет бесконечный охват Отображение совокупности таких кривых дает всю верхнюю полуплоскость. В качестве примеров ниже приведены кривые для $x=0,\pi/3,\pi/8,\pi/2$:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\ldots,n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z=x+iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Аналитические функции

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z\in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$