ИДЗ-10.1

1.6. Найти область определения указанной функции.
$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$

Решение: Область определения:
$x^2 + y^2 - 5 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq (\sqrt{5})^2$

Ответ: Область определения: внешность окружности $x^2 + y^2 = (\sqrt{5})$ (с центром в начале координат радиуса $\sqrt{5}$), включая саму окружность.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы данной функции.

2.6. $z = tg(x^3 + y^2)$
Найдем частные производные:

$$z'_x = \left(tg(x^3 + y^2)\right)'_x = \frac{1}{\cos^2(x^3 + y^2)} \cdot (x^3 + y^2)'_x = \frac{3x^2}{\cos^2(x^3 + y^2)}$$

$$z'_y = \left(tg(x^3 + y^2)\right)'_y = \frac{1}{\cos^2(x^3 + y^2)} \cdot (x^3 + y^2)'_y = \frac{2y}{\cos^2(x^3 + y^2)}$$

Частные дифференциалы:

$$dz'_x = \frac{3x^2 dx}{\cos^2(x^3 + y^2)}, \quad dz'_y = \frac{2ydy}{\cos^2(x^3 + y^2)}$$

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

3.6. $f(x, y, z) = \ln\cos(x^2y^2 + z)$, $M_0\left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right)$

Решение:

$$f'_x = \left(\ln\cos(x^2y^2 + z)\right)'_x = \frac{1}{\cos(x^2y^2 + z)} \cdot (\cos(x^2y^2 + z))'_x =$$

$$= -\frac{\sin(x^2y^2 + z)}{\cos(x^2y^2 + z)} \cdot (x^2y^2 + z)'_x = -2xy^2 tg(x^2y^2 + z)$$

$$f'_x(M_0) = f'_x\left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$f'_y = \left(\ln\cos(x^2y^2 + z)\right)'_y = \frac{1}{\cos(x^2y^2 + z)} \cdot (\cos(x^2y^2 + z))'_y =$$

$$= -\frac{\sin(x^2y^2 + z)}{\cos(x^2y^2 + z)} \cdot (x^2y^2 + z)'_y = -2x^2y\, tg(x^2y^2 + z)$$

$$f'_y(M_0) = f'_y\left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$f'_z=\left(\ln\cos(x^2y^2+z)\right)'_z=\frac{1}{\cos(x^2y^2+z)}\cdot(\cos(x^2y^2+z))'_z=$$

$$=-\frac{\sin(x^2y^2+z)}{\cos(x^2y^2+z)}\cdot(x^2y^2+z)'_z=-tg(x^2y^2+z)$$

$$f'_z(M_0)=f'_z\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right)=-tg\frac{\pi}{4}=-1$$

4. Найти полные дифференциалы указанных функций.

4.6. $z=\cos(x^2-y^2)+x^3$

Вычислим частные производные первого порядка:

$$z'_x=\left(\cos(x^2-y^2)+x^3\right)'_x=-\sin(x^2-y^2)\cdot\left(x^2-y^2\right)'_x+3x^2=-2x\sin(x^2-y^2)+3x^2$$

$$z'_y=\left(\cos(x^2-y^2)+x^3\right)'_y=-\sin(x^2-y^2)\cdot\left(x^2-y^2\right)'_y+0=2y\sin(x^2-y^2)$$

Полный дифференциал:

$$dz=z'_xdx+z'_ydy=\left(-2x\sin(x^2-y^2)+3x^2\right)dx+2y\sin(x^2-y^2)dy$$

5. Вычислить значение производной сложной функции $u=u(x,y)$, где $x=x(t)$, $y=y(t)$, при $t=t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

5.6. $u=\ln(e^x+e^y)$, $x=t^2$, $y=t^3$, $t_0=1$.

Найдем производную сложной функции: $u'_t=u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t$.

В данном случае:

$$u'_x=\left(\ln(e^x+e^y)\right)'_x=\frac{1}{(e^x+e^y)}\cdot(e^x+e^y)'_x=\frac{e^x}{e^x+e^y}$$

$$u'_y=\left(\ln(e^x+e^y)\right)'_y=\frac{1}{(e^x+e^y)}\cdot(e^x+e^y)'_y=\frac{e^y}{e^x+e^y}$$

$x'_t=2t$, $y'_t=3t^2$

Таким образом:

$$u'_t=\frac{e^x}{e^x+e^y}\cdot 2t+\frac{e^y}{e^x+e^y}\cdot 3t^2=\frac{e^{t^2}}{e^{t^2}+e^{t^3}}\cdot 2t+\frac{e^{t^3}}{e^{t^2}+e^{t^3}}\cdot 3t^2$$

$$u'_t(1)=\frac{e}{e+e}\cdot 2+\frac{e}{e+e}\cdot 3=\frac{e}{2e}(2+3)=\frac{5}{2}=2{,}5$$

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

6.6. $z^3+3xyz+3y=7$, $M_0(1,1,1)$

$$\left(z^3+3xyz+3y\right)'_x=(7)'_x$$

$$3z^2z'_x+3yz+3xyz'_x+0=0$$

$$\left(z^2+xy\right)z'_x=-yz$$

$z'_x = \frac{-yz}{z^2 + xy}$

$z'_x(M_0) = z'_x(1,1,1) = \frac{-1}{2} = -0,5$

$\left(z^3 + 3xyz + 3y\right)'_y = (7)'_y$

$3z^2 z'_y + 3xz + 3xyz'_y + 3 = 0$

$\left(z^2 + xy\right)z'_y = -1 - yz$

$z'_y = \frac{-(1 + yz)}{z^2 + xy}$

$z'_y(M_0) = z'_y(1,1,1) = \frac{-2}{2} = -1$

ИДЗ 10-2.

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

3.6. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u = e^{xy}$

Найдем частные производные функции u.

$u'_x = (e^{xy})'_x = e^{xy} \cdot (xy)'_x = ye^{xy}$, $u'_y = (e^{xy})'_y = e^{xy} \cdot (xy)'_y = xe^{xy}$

$u''_{xx} = (ye^{xy})'_x = y(e^{xy})'_x = y^2 e^{xy}$, $u''_{yy} = (xe^{xy})'_y = x(e^{xy})'_y = x^2 e^{xy}$

Подставим u''_{xx}, u''_{yy} в левую часть уравнения:

$x^2 \cdot y^2 e^{xy} + y^2 \cdot x^2 e^{xy} = 2x^2 y^2 e^{xy} \neq 0$ – таким образом, данная функция не удовлетворяет данному уравнению.

4. Исследовать на экстремум функцию.

4.6. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$

Решение: Найдем критические точки:

$\begin{cases} z'_x = 6x^2 - 6y = 0 \\ z'_y = 6y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x^2$ – подставим во второе уравнение:

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$

$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1$

$M_1(0;0)$, $M_2(1;1)$ – стационарные точки.

Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$z''_{xx} = 12x$, $z''_{xy} = -6 = const$, $z''_{yy} = 12y$

1) $M_1(0;0)$

$z''_{xx}(M_1) = z''_{xx}(0;0) = 0$

$z''_{xy}(M_1) = -6$

$z''_{yy}(M_1) = z''_{yy}(0;0) = 0$

$z''_{xx}(M_1) \cdot z''_{yy}(M_1) - \left(z''_{xy}(M_1)\right)^2 = 0 \cdot 0 - (-6)^2 = -36 < 0$, значит, в точке $M_1(0;0)$ нет экстремума

2) $M_2(1;1)$

$z''_{xx}(M_2) = z''_{xx}(1;1) = 12$

$z''_{xy}(M_2) = -6$

$z''_{yy}(M_2) = z''_{yy}(1;1) = 12$

$z''_{xx}(M_2) \cdot z''_{yy}(M_2) - \left(z''_{xy}(M_2)\right)^2 = 12 \cdot 12 - (-6)^2 = 144 - 36 = 108 > 0$, значит, в точке $M_2(1;1)$ существует экстремум, так как $z''_{xx}(M_2) > 0$, то это – минимум:

$\min z = z(M_2) = z(1;1) = 2 + 2 - 6 + 5 = 3$

Ответ: $\min z = z(1;1) = 3$.