/ТФКП/ 2006

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\ldots,n-1;\quad z\neq 0$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$:

$$\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+2i$$
$$\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}=-2+2\sqrt{3}i$$
$$\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}-2i$$
$$\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}=2-2\sqrt{3}i$$

Ответ: $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}=\{2\sqrt{3}+2i;-2+2\sqrt{3}i;-2\sqrt{3}-2i;2-2\sqrt{3}i\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\sin(\pi/3-2i)$

Используем формулу синуса разности:

$\sin(\pi/3-2i)=\sin(\pi/3)\cos(2i)-\cos(\pi/3)\sin(2i)$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$\sin(\pi/3)\cos(2i)-\cos(\pi/3)\sin(2i)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}-$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2}-e^{2}}{2i}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2}-e^{2}}{2}\right)$$

Ответ: $\sin(\pi/3-2i)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2}-e^{2}}{2}\right)$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{7}\right)$$

Функция Arth является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arth}\,z = i\cdot \mathrm{Arctg}\left(\frac{z}{i}\right) = i\cdot\left(-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+i\frac{z}{i}}{1-i\frac{z}{i}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}$$

Подставим вместо z значение $\frac{3+i2\sqrt{3}}{7}$:

$$\mathrm{Arcth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{7}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\frac{3+i2\sqrt{3}}{7}}{1-\frac{3+i2\sqrt{3}}{7}} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{7+3+i2\sqrt{3}}{7-3-i2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{10+i2\sqrt{3}}{4-i2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}[\ln\left|\frac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}\right| + i(\arg\left(\frac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}\right) + 2\pi k)] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{i}{2}\left[\arg\left(\frac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}\right) + 2\pi k\right] \approx \frac{1}{2}\cdot 0{,}693 + \frac{i}{2}\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$$

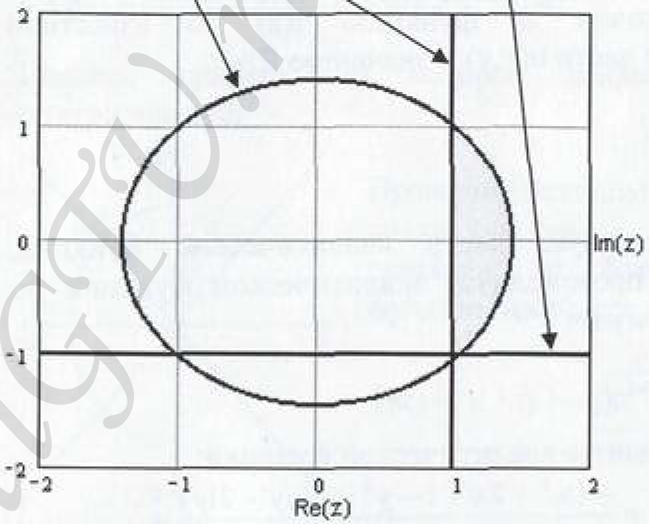
$k = 0,\pm1,\pm2,...$

Ответ: $\mathrm{Arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{7}\right) \approx \frac{1}{2}\cdot 0{,}693 + \frac{i}{2}\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right], k = 0,\pm1,\pm2,...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$$z\bar{z} < 2 \Leftrightarrow |z| < \sqrt{2},\quad \mathrm{Re}\,z \le 1,\quad \mathrm{Im}\,z > -1$$



Задача 5

Определить вид кривой:

$$z = \frac{1+i}{1-t} + \frac{t}{1-t}(2-4i) = \frac{1+i+2t-4it}{1-t} = \frac{1+2t}{1-t} + i\frac{1-4t}{1-t}$$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$$x(t) = \frac{1+2t}{1-t};\quad y(t) = \frac{1-4t}{1-t}$$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = \frac{1+2t}{1-t} \Rightarrow x - xt = 1 + 2t \Rightarrow t(x+2) = x - 1 \Rightarrow t = \frac{x-1}{x+2}$$

$$y = \frac{1-4t}{1-t} \Rightarrow y - yt = 1 - 4t \Rightarrow t(y-4) = y - 1 \Rightarrow t = \frac{y-1}{y-4}$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{y-1}{y-4} \Rightarrow \frac{x-1}{x+2} - \frac{y-1}{y-4} = 0$$

Ответ: $\frac{x-1}{x+2} - \frac{y-1}{y-4} = 0$

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной действительной части u(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$u = \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$f(0) = 1$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{-(x^2+2x+1-y^2-2ixy-2iy)}{(x^2+2x+1+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-((x+1)^2 - y^2 - 2iy(x+1))}{((x+1)^2+y^2)^2} = \frac{-(x+1-iy)^2}{(x+1+iy)^2(x+1-iy)^2} =$$

$$= -\frac{1}{(x+1+iy)^2} = -\frac{1}{(z+1)^2}$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = -\int\frac{1}{(z+1)^2}dz = \frac{1}{z+1} + C$$

Определим константу С:

$$f(0) = 1 + C = 1 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{z+1}$$

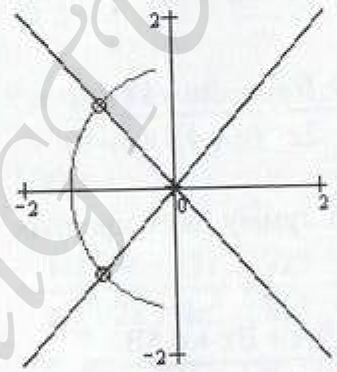
Ответ: $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int\limits_L |z|dz;\ L: \{|z| = \sqrt{2}, 3\pi/4 \le \arg z \le 5\pi/4\}$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = |x+iy| = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \ne \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} \ne -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана не выполняются, значит, функция не является аналитической. Тогда представим кривую в параметрическом виде:

$$z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = -\sqrt{2-t^2}; y(t) = t; t \in (1;-1)$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_1^{-1} f[z(t)]z'(t)dt = \int\limits_1^{-1} \left|it - \sqrt{2-t^2}\right| \left(i + \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\right)dt =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_1^{-1}\left(i + \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\right)dt = \sqrt{2}\left(it - \sqrt{2-t^2}\right)\Bigg|_1^{-1} = -i2\sqrt{2}$$

Ответ: $\int\limits_L f(z)dz = -i2\sqrt{2}$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z) = \frac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3} = \frac{9(z+18)}{-z(2z+9)(z-9)} = -\frac{9}{2z}\cdot\frac{z+18}{(z+4,5)(z-9)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

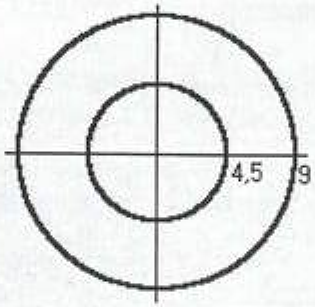
$$\frac{z+18}{(z+4,5)(z-9)} = \frac{A}{z+4,5}+\frac{B}{z-9} = \frac{Az-9A+Bz+4,5B}{(z+4,5)(z-9)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{A=-1; B=2\} \Rightarrow \frac{z+18}{(z+4,5)(z-9)} = \frac{-1}{z+4,5}+\frac{2}{z-9}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z) = \frac{9}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+4,5}-\frac{2}{z-9}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=-4,5; z=9$



Рассмотрим область $|z|<4,5$:

$$f(z) = \frac{9}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+4,5}-\frac{2}{z-9}\right) = \frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1-(-\frac{2z}{9})}+\frac{1}{1-\frac{z}{9}}\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{2z}{9}+\frac{4z^2}{81}-\frac{8z^3}{729}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{9}+\frac{z^2}{81}+\frac{z^3}{729}+\ldots\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{z}-\frac{2}{9}+\frac{4z}{81}-\frac{8z^2}{729}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{9}+\frac{z}{81}+\frac{z^2}{729}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $4,5<|z|<9$:

$$f(z) = \frac{9}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+4,5}-\frac{2}{z-9}\right) = \frac{1}{z}\cdot\left(\frac{9}{2z(1-(-\frac{9}{2z}))}+\frac{1}{1-\frac{z}{9}}\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{9}{2z}-\frac{81}{4z^2}+\frac{729}{8z^3}-\frac{6561}{16z^4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{9}+\frac{z^2}{81}+\frac{z^3}{729}+\ldots\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{9}{2z^2}-\frac{81}{4z^3}+\frac{729}{8z^4}-\frac{6561}{16z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{9}+\frac{z}{81}+\frac{z^2}{729}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>9$:

$$f(z) = \frac{9}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+4,5}-\frac{2}{z-9}\right) = \frac{1}{z}\cdot\left(\frac{9}{2z(1-(-\frac{9}{2z}))}-\frac{9}{z(1-\frac{9}{z})}\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{9}{2z}-\frac{81}{4z^2}+\frac{729}{8z^3}-\frac{6561}{16z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{9}{z}+\frac{81}{z^2}+\frac{729}{z^3}+\frac{6561}{z^4}+\ldots\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{9}{2z^2}-\frac{81}{4z^3}+\frac{729}{8z^4}-\frac{6561}{16z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{9}{z^2}+\frac{81}{z^3}+\frac{729}{z^4}+\frac{6561}{z^5}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<4,5: f(z) = \left(\frac{1}{z}-\frac{2}{9}+\frac{4z}{81}-\frac{8z^2}{729}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{9}+\frac{z}{81}+\frac{z^2}{729}+\ldots\right)$$

$$4,5<|z|<9: f(z) = \left(\frac{9}{2z^2}-\frac{81}{4z^3}+\frac{729}{8z^4}-\frac{6561}{16z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{9}+\frac{z}{81}+\frac{z^2}{729}+\ldots\right)$$

$$|z|>9: f(z) = \left(\frac{9}{2z^2}-\frac{81}{4z^3}+\frac{729}{8z^4}-\frac{6561}{16z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{9}{z^2}+\frac{81}{z^3}+\frac{729}{z^4}+\frac{6561}{z^5}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z\text{-}z_0$.

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+4}, z_0=-1-3i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+4}=\frac{1}{z-2i}+\frac{1}{z+2i}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{(z-z_0)-1-5i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-1-5i)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1+5i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+2i}=\frac{1}{(z-z_0)-1-i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-1-i)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{1}{z-2i}+\frac{1}{z+2i}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1+5i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1+i)^{n+1}}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+5i)^{n+1}}+\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+5i)^{n+1}}+\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=z^2\cdot\sin\frac{z+3}{z}, z_0=0$$

Преобразуем данное выражение:

$$z^2\cdot\sin\pi\frac{z+3}{z}=z^2\cdot\sin(1+\frac{3}{z})=z^2\sin1\cos\frac{3}{z}+z^2\cos1\sin\frac{3}{z}$$

Теперь следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z)=z^2\sin1\cos\frac{3}{z}+z^2\cos1\sin\frac{3}{z}=\left(1-\frac{3^2}{2!z^2}+\frac{3^4}{4!z^4}-\frac{3^6}{6!z^6}+\ldots\right)\cdot$$

$$\cdot z^2\sin1+\left(\frac{3}{z}-\frac{3^3}{3!z^3}+\frac{3^5}{5!z^5}-\frac{3^7}{7!z^7}+\ldots\right)z^2\cos1=$$

$$=\left(z^2\sin1-\frac{3^2\sin1}{2!}+\frac{3^4\sin1}{4!z^2}-\frac{3^6\sin1}{6!z^4}+\ldots\right)+$$

$$+\left(3z\cos1-\frac{3^3\cos1}{3!z}+\frac{3^5\cos1}{5!z^3}-\frac{3^7\cos1}{7!z^5}+\ldots\right)=$$

$$=z^2\sin1+3z\cos1-\frac{3^2\sin1}{2!}-\frac{3^3\cos1}{3!z}+\frac{3^4\sin1}{4!z^2}+\frac{3^5\cos1}{5!z^3}-$$

$$-\frac{3^6\sin1}{6!z^4}-\frac{3^7\cos1}{7!z^5}+\ldots$$

Поскольку $z_0=0$, то разложение в ряд Лорана в окрестности z_0 – это то же самое, что и разложение в ряд Лорана по степеням z. Таким образом, мы пришли к ответу.

Ответ:

$$f(z)=z^2\sin1+3z\cos1-\frac{3^2\sin1}{2!}-\frac{3^3\cos1}{3!z}+\frac{3^4\sin1}{4!z^2}+$$

$$+\frac{3^5\cos1}{5!z^3}-\frac{3^6\sin1}{6!z^4}-\frac{3^7\cos1}{7!z^5}+\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{sh4z-4z}{e^z-1-z}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{sh4z-4z}{e^z-1-z}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{matrix} g(z)=sh4z-4z; \\ h(z)=e^z-1-z; \end{matrix}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g'(z)=4ch4z-4; g'(0)=4ch0-4=0$$

$$g''(z)=16sh4z; g''(0)=16sh0=0$$

$$g'''(z)=64ch4z; g'''(0)=64ch0=64$$

$$h'(z)=e^z-1; h'(0)=e^0-1=0$$

$$h''(z)=e^z; h''(0)=e^0=1;$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в числителе, то точка z = 0 является нулем функции. Порядок этого нуля находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 3 – 2 = 1.

Ответ: Точка z = 0 является нулем 1-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\frac{\sin^3 z}{z^3(1-\cos z)}$$

Изолированными особыми точками являются $z = 2\pi k$, $k\in Z$. Следует также отдельно рассмотреть точку z = 0. Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{\sin^3 z}{z^3(1-\cos z)};\quad \begin{matrix} g(z)=\sin^3 z; \\ h(z)=z^3(1-\cos z); \end{matrix}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = 2\pi k$:

$$g(2\pi k)=0;$$

$$g'(z)=3\sin^2 z\cos z; g'(2\pi k)=0;$$

$$g''(z)=6\sin z\cos^2 z-3\sin^3 z; g''(2\pi k)=0;$$

$$g'''(z)=6\cos^3 z-21\sin^2 z\cos z; g'''(2\pi k)\neq 0;$$

$$h(2\pi k)=0;$$

$$h'(z)=3z^2(1-\cos z)+z^3\sin z; h'(2\pi k)=0;$$

$$h''(z)=6z(1-\cos z)+6z^2\sin z+z^3\cos z; h''(2\pi k\neq 0)\neq 0; h''(0)=0;$$

$$h'''(z)=6(1-\cos z)+18z\sin z+9z^2\cos z-z^3\sin z; h'''(0)=0;$$

$$h^{IV}(z)=24\sin z+36z\cos z-12z^2\sin z-z^3\cos z; h^{IV}(0)=0;$$

$$h^{V}(z)=60\cos z-60z\sin z-15z^2\cos z+z^3\sin z; h^{V}(0)\neq 0;$$

В случаях z = 0 порядок ненулевой производной выше для функции, стоящей в знаменателе, т.е. точка z = 0 является полюсом функции. Поскольку в данном случае разность порядков ненулевых производных g(z) и h(z) равна двум, то точка z = 0 является полюсом 2-го порядка.

Исходя их тех же соображений, точки $z = 2\pi k$ $(k \neq 0)$ являются нулями 1-го порядка

Ответ: Точка z = 0 для данной функции является полюсом 2-го порядка.
Точки $z = 2\pi k \neq 0$ являются нулями 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-3/2|=1} \underbrace{\frac{z(z+\pi)}{\sin 3z(z-\pi)}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = \pi k/3,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадают только точки $z = \pi/3$ и $z = 2\pi/3$.

Точка $z_1 = \pi/3$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to\pi/3}[f(z)(z-\pi/3)] = \lim_{z\to\pi/3}\frac{(z-\pi/3)z(z+\pi)}{\sin 3z(z-\pi)} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} t = z-\pi/3 \\ z = t+\pi/3 \end{matrix}\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t+\pi/3)(t+4\pi/3)}{(t-2\pi/3)\sin(3t+\pi)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t(t+\pi/3)(t+4\pi/3)}{-(t-2\pi/3)\sin 3t} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t+\pi/3)(t+4\pi/3)}{-(t-2\pi/3)3t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(t+\pi/3)(t+4\pi/3)}{-3(t-2\pi/3)} = \frac{(\pi/3)(4\pi/3)}{-3(-2\pi/3)} = \frac{2\pi}{9}$$

Точка $z_2 = 2\pi/3$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to 2\pi/3}[f(z)(z-2\pi/3)] = \lim_{z\to 2\pi/3}\frac{(z-2\pi/3)z(z+\pi)}{\sin 3z(z-\pi)} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} t = z-2\pi/3 \\ z = t+2\pi/3 \end{matrix}\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t+2\pi/3)(t+5\pi/3)}{(t-\pi/3)\sin(3t+2\pi)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t(t+2\pi/3)(t+5\pi/3)}{(t-\pi/3)\sin 3t} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t+2\pi/3)(t+5\pi/3)}{3t(t-\pi/3)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(t+2\pi/3)(t+5\pi/3)}{3(t-\pi/3)} = \frac{(2\pi/3)(5\pi/3)}{3(-\pi/3)} = \frac{10\pi^2/9}{-\pi} = -10\pi/9$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-3/2|=1}\frac{z(z+\pi)}{\sin 3z(z-\pi)}dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i\cdot\left(\frac{2\pi}{9}-\frac{10\pi}{9}\right) = -\frac{16}{9}\pi^2 i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-3/2|=1}\frac{z(z+\pi)}{\sin 3z(z-\pi)}dz = -\frac{16}{9}\pi^2 i$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1/2} \underbrace{\frac{z^4+2z^2+3}{2z^6}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$\frac{z^4+2z^2+3}{2z^6} = \frac{1}{2z^2}+\frac{1}{z^4}+\frac{3}{2z^6}$$

Считая получившийся результат рядом Лорана по степеням z, т.е. в окрестности z = 0, мы приходим к выводу, что точка z = 0 является полюсом 6-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}[f(z)z^6] = \frac{1}{120}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}\left(\frac{z^4+2z^2+3}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{120}\lim_{z\to 0}(0) = 0$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1/2}\frac{z^4+2z^2+3}{2z^6}dz = 2\pi i\cdot 0 = 0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1/2}\frac{z^4+2z^2+3}{2z^6}dz = 0$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=0,4} \underbrace{\frac{e^{2z}-1-2z}{z\,\mathrm{sh}^2 2\pi z}}_{f(z)}dz$$

Особые точки этой функции $z = ik\pi/2$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z)=\frac{e^{2z}-1-2z}{z\,\mathrm{sh}^2 2\pi z}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{array}{l} g(z)=e^{2z}-1-2z \\ h(z)=z\,\mathrm{sh}^2 2\pi z \end{array}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}[f(z)z]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{2z}-1-2z}{\mathrm{sh}^2 2\pi z}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{2e^{2z}-2}{4\pi\,\mathrm{sh}2\pi z\,\mathrm{ch}2\pi z}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{4e^{2z}}{16\pi^2\mathrm{ch}^2 2\pi z-8\pi^2}\right)=\frac{4}{8\pi^2}=\frac{1}{2\pi^2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=0,4}\frac{e^{2z}-1-2z}{z\,\mathrm{sh}^2 2\pi z}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2\pi^2}\right)=\frac{i}{\pi}$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=0,4}\frac{e^{2z}-1-2z}{z\,\mathrm{sh}^2 2\pi z}dz=\frac{i}{\pi}$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z+6i|=2}\left(\frac{2\,\mathrm{sh}\frac{\pi i z}{2-12i}}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z+6i|=2}\underbrace{\frac{2\,\mathrm{sh}\frac{\pi i z}{2-12i}}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)}}_{f_1(z)}dz+\oint\limits_{|z+6i|=2}\underbrace{\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}}_{f_2(z)}dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z+6i|=2}\frac{2\,\mathrm{sh}\frac{\pi i z}{2-12i}}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: $z=1-6i$ и $z=3-6i$. При этом точка $z=3-6i$ не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка $z=1-6i$ является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=1-6i} f_1(z)=\lim_{z\to 1-6i}\frac{d}{dz}\left[\frac{2(z-1+6i)^2\,\mathrm{sh}\frac{\pi i z}{2-12i}}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)}\right]=\lim_{z\to 1-6i}\frac{d}{dz}\left[\frac{2\,\mathrm{sh}\frac{\pi i z}{2-12i}}{(z-3+6i)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 1-6i}\left[\frac{(i-6)\pi}{37(z-3+6i)}\mathrm{ch}\frac{(6-i)\pi z}{74}+\frac{2}{(z-3+6i)^2}\mathrm{sh}\frac{(6-i)\pi z}{74}\right]=-\frac{i}{2}$$

Отсюда(?!)

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+6i|=2}\frac{2\,\mathrm{sh}\frac{\pi i z}{2-12i}}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=1-6i} f_1(z)=2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{2}\right)=\pi$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z+6i|=2} \frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\pi z/2}+1=0 \Rightarrow e^{\pi z/2}=-1 \Rightarrow \pi z/2=\ln(-1)=\pi i \Rightarrow$$ откуда ?!

$$\Rightarrow z=2i+4ik, k\in z$$ откуда (?!)

Из этих точек только одна охвачена контуром |z+6i|=2 и должна приниматься во внимание. Это точка z=–6i, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

откуда ?!

$$\operatorname*{res}_{z=-6i} f_2(z)=\lim_{z\to-6i}\frac{\pi(z+6i)}{e^{\pi z/2}+1}=\left\{\begin{array}{l}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to-6i}\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2}}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{-3\pi i}}=\frac{2}{e^{-3\pi i}}=\frac{2}{-1}=-2$$

$\cos 3\pi - i\sin(-3\pi) = [illegible] \neq 0$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+6i|=2}\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=-6i} f_2(z)=2\pi i\cdot(-2)=-4\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z+6i|=2}\left(\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{2-12i}}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz=$$

$$=\oint\limits_{|z+6i|=2}\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{2-12i}}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)}dz+\oint\limits_{|z+6i|=2}\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}dz=$$

$$=\pi-4\pi i$$

Ответ: $$\oint\limits_{|z+6i|=2}\left(\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{2-12i}}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz=\pi-4\pi i$$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sqrt5\sin t+9}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac12\left(z+\frac1z\right);\ \sin t=\frac1{2i}\left(z-\frac1z\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sqrt5\sin t+9}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\frac{2\sqrt5}{i}(z-\frac1z)+9}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{2\sqrt5(z^2-1)+9iz}=$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{2\sqrt5(z+2i/\sqrt5)(z+i\sqrt5/2)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-2i/\sqrt5;\quad z=-i\sqrt5/2;$

Точка $-i\sqrt5/2$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $-2i/\sqrt5$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-2i/\sqrt5} f(z)=\lim_{z\to-2i/\sqrt5}[f(z)(z+2i/\sqrt5)]=$$

$$=\lim_{z\to-2i/\sqrt5}\frac{1}{2\sqrt5(z+i\sqrt5/2)}=\frac{1}{2\sqrt5(-2i/\sqrt5+i\sqrt5/2)}=-i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{2\sqrt5(z+2i/\sqrt5)(z+i\sqrt5/2)}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot(-i)=2\pi$$

Ответ: $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sqrt5\sin t+9}=2\pi$$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+2\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+2\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(3+(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i(3z+(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i\left[(z-\frac{\sqrt{5}-3}{2})(z+\frac{\sqrt{5}+3}{2})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=(\sqrt{5}-3)/2;\quad z=(-\sqrt{5}-3)/2;$

Точка $z=(-\sqrt{5}-3)/2$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=(\sqrt{5}-3)/2$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=(\sqrt{5}-3)/2}f(z)=\lim_{z\to(\sqrt{5}-3)/2}\frac{d}{dz}\left[f(z)\left(z-(\sqrt{5}-3)/2\right)^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to(\sqrt{5}-3)/2}\frac{d}{dz}\frac{z}{i\left(z+(\sqrt{5}+3)/2\right)^2}=\frac{1}{i}\lim_{z\to(\sqrt{5}-3)/2}\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z+(\sqrt{5}+3)/2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{i}\lim_{z\to(\sqrt{5}-3)/2}\left[-4\frac{2z-3-\sqrt{5}}{(2z+3+\sqrt{5})^3}\right]=-\frac{4}{i}\cdot\frac{\sqrt{5}-3-3-\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-3+3+\sqrt{5})^3}=-\frac{4}{i}\cdot\frac{-6}{(2\sqrt{5})^3}=\frac{3}{5\sqrt{5}i}$$

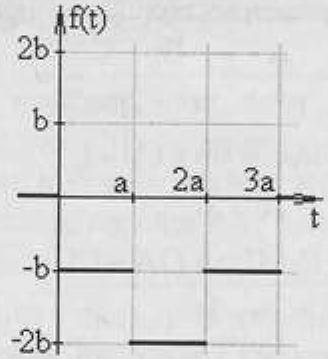
По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i\left[(z-\frac{\sqrt{5}-3}{2})(z+\frac{\sqrt{5}+3}{2})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{3}{5\sqrt{5}i}\right)=\frac{6}{5\sqrt{5}}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+2\cos t)^2}=\frac{6}{5\sqrt{5}}\pi$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}-b, & 0<t<a\\ -2b, & a<t<2a\\ -b, & 2a<t<3a\\ 0, & 3a<t\end{cases}$$

$$f(t)=-b\cdot\eta(t)-b\cdot\eta(t-a)+b\cdot\eta(t-2a)+b\cdot\eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=-\frac{b}{p}-\frac{b}{p}e^{-ap}+\frac{b}{p}e^{-2ap}+\frac{b}{p}e^{-3ap}$$

Ответ: $F(p)=-\frac{b}{p}-\frac{b}{p}e^{-ap}+\frac{b}{p}e^{-2ap}+\frac{b}{p}e^{-3ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}=\frac{A}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+3}=$$

$$=\frac{Ap^2+2Ap+3A+Bp^2+Bp+Cp+C}{(p+1)(p^2+2p+3)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(2A+B+C)p+(3A+C)}{(p+1)(p^2+2p+3)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\2A+B+C=2\\3A+C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1/2\\B=1/2\\C=5/2\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+2p+3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p^2+2p+3}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+2p+3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p^2+2p+3}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{(p+1)^2+2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)^2+2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+2}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(p+1)^2+2}\rightarrow$$

$$\rightarrow-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}\cos\sqrt{2}t+\sqrt{2}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}\cos\sqrt{2}t+\sqrt{2}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''+2y'+10y=2e^{-t}\cos 3t$$

$$y(0)=5,\quad y'(0)=1.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует p·X(p) – x(0), а x''(t) соответствует p^2·X(p) – p·x(0) – x'(0). Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+2pY(p)-2y(0)+10Y(p)=2\frac{p+1}{(p+1)^2+9}$$

$$p^2Y(p)-5p-11+2pY(p)+10Y(p)=2\frac{p+1}{(p+1)^2+9}$$

$$(p^2+2p+10)Y(p)=2\frac{p+1}{(p+1)^2+9}+5p+11$$

$$Y(p)=2\frac{p+1}{[(p+1)^2+9]^2}+\frac{5p+11}{(p+1)^2+9}$$

Найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=2\frac{p+1}{[(p+1)^2+9]^2}+\frac{5p+11}{(p+1)^2+9}=2\frac{p+1}{[(p+1)^2+9]^2}+$$

$$+5\frac{p+1}{(p+1)^2+9}+2\frac{3}{(p+1)^2+9}\rightarrow$$

$$\left\{\frac{p+\beta}{[(p+\beta)^2+\alpha^2]^2}\rightarrow\frac{1}{2}\frac{e^{-\beta t}}{\alpha}t\sin\alpha t\right\}$$

$$\rightarrow y(t)=2\cdot\frac{1}{2}\frac{e^{-t}}{3}t\sin 3t+5e^{-t}\cos 3t+2e^{-t}\sin 3t=$$

$$=\frac{e^{-t}}{3}t\sin 3t+5e^{-t}\cos 3t+2e^{-t}\sin 3t$$

Ответ: $y(t)=\frac{e^{-t}}{3}t\sin 3t+5e^{-t}\cos 3t+2e^{-t}\sin 3t$

Задача 25

На материальную точку массы m действует сила сопротивления R=kv, пропорциональная скорости v. Какое расстояние пройдет точка за неограниченное время, если ей сообщена начальная скорость v_0?

$k = 2m$, $v_0 = 10$ м/с.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kv$$

$$\ddot{x}m + k\dot{x} = 0$$

Начальные условия:

$$\dot{x}(0) = v_0 = 10$$

$$x(0) = 0$$

Подставим значения k:

$$\ddot{x}m + 2m\dot{x} = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} = 0$$

Перейдем к изображениям функций:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + 2pX(p) - 2x(0) = 0$$

$$p(p+2)X(p) - 10 = 0$$

$$p(p+2)X(p) = 10$$

$$X(p) = \frac{10}{p(p+2)} = \frac{5}{p} - \frac{5}{p+2}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = 5 - 5e^{-2t}$$

Ответ: $x(t) = 5 - 5e^{-2t}$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3 \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

$x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = 4X(p) + 3/p \\ pY(p) - y(0) = X(p) + 2Y(p) \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) + 1 = 4X(p) + 3/p \\ pY(p) = X(p) + 2Y(p) \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) = X(p) + 2Y(p) \Rightarrow X(p) = pY(p) - 2Y(p)$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p[pY(p) - 2Y(p)] + 1 = 4[pY(p) - 2Y(p)] + 3/p$$

$$Y(p) = \frac{3/p - 1}{p^2 - 6p + 8}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{3/p - 1}{p^2 - 6p + 8} = \frac{3/p - 1}{p^2 - 6p + 8} - \frac{3}{8p} + \frac{3}{8p} = \frac{5/4 - 3p/8}{p^2 - 6p + 8} + \frac{3}{8p} =$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{3p - 10}{(p-3)^2 - 1} + \frac{3}{8p} = -\frac{3}{8}\frac{p-3}{(p-3)^2 - 1} - \frac{i}{8}\frac{i}{(p-3)^2 - 1} + \frac{3}{8p} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = -\tfrac{3}{8}e^{3t}\cos it - \tfrac{1}{8}e^{3t}\sin it + \tfrac{3}{8} = -\tfrac{3}{8}e^{3t}\operatorname{ch} t + \tfrac{1}{8}e^{3t}\operatorname{sh} t + \tfrac{3}{8}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = x + 2y \Rightarrow x(t) = \dot{y} - 2y = -e^{3t}\operatorname{ch} t + \tfrac{3}{4}e^{3t}\operatorname{ch} t - \tfrac{1}{4}e^{3t}\operatorname{sh} t - \tfrac{3}{4} =$$

$$= -\tfrac{1}{4}e^{3t}\operatorname{ch} t - \tfrac{1}{4}e^{3t}\operatorname{sh} t - \tfrac{3}{4}$$

Ответ:

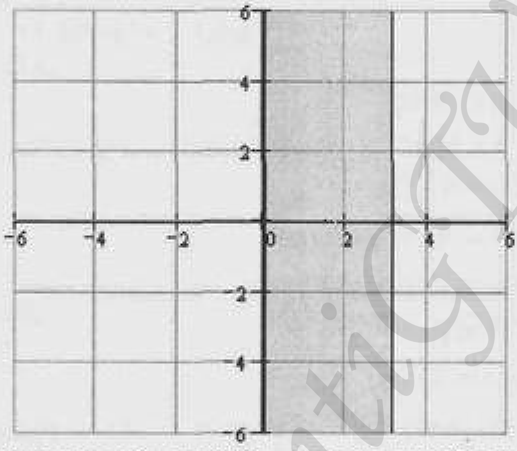
$$x(t) = -\tfrac{1}{4}e^{3t}\operatorname{ch} t - \tfrac{1}{4}e^{3t}\operatorname{sh} t - \tfrac{3}{4}$$

$$y(t) = -\tfrac{3}{8}e^{3t}\operatorname{ch} t + \tfrac{1}{8}e^{3t}\operatorname{sh} t + \tfrac{3}{8}$$

Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = \mathrm{tg}(z)$; полоса $0<x<\pi$.



Каждая из вертикальных линий в полосе преобразуется в дугу, опирающуюся на точки (0;1) и (0;–1), причем, чем ближе x к $\pi/2$, тем большую область она охватывает. Таким образом, отображением полосы является вся комплексная плоскость. Для примера приведены случаи $x = 7\pi/15$ и $x = 5\pi/9$: