/ТФКП/ 2007

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{-16}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi = \arg(z); \quad k = 0,1,\ldots,n-1; \quad z \neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{-16}$:

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$\sqrt[4]{-16} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$\sqrt[4]{-16} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Ответ: $\sqrt[4]{-16} = \left\{\sqrt{2} + i\sqrt{2}; -\sqrt{2} + i\sqrt{2}; -\sqrt{2} - i\sqrt{2}; \sqrt{2} - i\sqrt{2}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\mathrm{Ln}(\sqrt{3} + i)$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Подставим в эту формулу значения z:

$$\mathrm{Ln}(\sqrt{3} + i) = \ln\left|\sqrt{3} + i\right| + i\mathrm{Arg}(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + i(\arg(\sqrt{3} + i) + 2\pi k),$$

$$k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Вычислим значения логарифма и аргумента:

$$\mathrm{Ln}(\sqrt{3} + i) \approx 0{,}693 + i(\frac{\pi}{6} + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Ответ: $\mathrm{Ln}(\sqrt{3} + i) \approx 0{,}693 + i(\frac{\pi}{6} + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arcsin}\left(\frac{17}{8}\right)$$

Функция Arcsin является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

Подставим вместо z значение $\frac{17}{8}$:

$$\mathrm{Arcsin}\frac{17}{8} = -i\mathrm{Ln}\left(\frac{17}{8}i + \sqrt{1-\left(\frac{17}{8}\right)^2}\right) =$$

$$= -i\mathrm{Ln}\left(\frac{17}{8}i + \sqrt{-\frac{225}{64}}\right) = -i\mathrm{Ln}(4\cdot i)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-i\mathrm{Ln}(4\cdot i) = -i[\ln|4\cdot i| + i(\arg(4\cdot i) + 2\pi k)] =$$

$$= -i\ln(4) + \arg(4\cdot i) + 2\pi k \approx -i\cdot 1{,}386 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

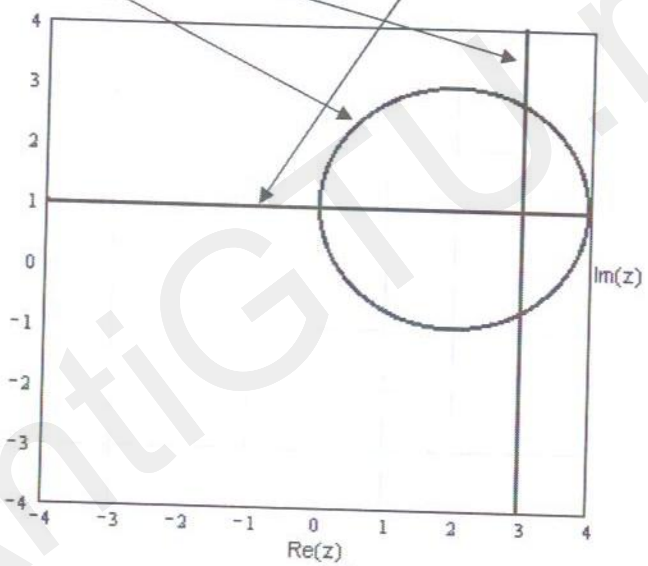
$k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Ответ: $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{17}{8}\right) \approx -i\cdot 1{,}386 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z-2-i| \le 2, \quad \mathrm{Re}\, z \ge 3, \quad \mathrm{Im}\, z < 1$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z = \mathrm{ctg}\, t - i2\,\mathrm{cosec}\, t$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t) = \mathrm{ctg}\, t; \quad y(t) = -2\,\mathrm{cosec}\, t$

Выразим параметр t через x и y:

$x = \mathrm{ctg}\, t \Rightarrow t = \mathrm{arcctg}(x)$

$$y = -2\,\mathrm{cosec}\, t = \frac{-2}{\sin t} \Rightarrow \sin t = -\frac{2}{y} \Rightarrow t = \arcsin\left(-\frac{2}{y}\right) = -\arcsin\left(\frac{2}{y}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\mathrm{arcctg}(x) = -\arcsin\left(\frac{2}{y}\right) \Rightarrow \arcsin\left(\frac{2}{y}\right) + \mathrm{arcctg}(x) = 0$$

Ответ: $\arcsin\left(\frac{2}{y}\right) + \mathrm{arcctg}(x) = 0$

Задача 6

Проверить, что v является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной мнимой части v(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$v = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$f(0) = 1$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{-(x^2+2x+1-y^2-2ixy-2iy)}{(x^2+2x+1+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-[(x+1)^2 - y^2 - 2iy(x+1)]}{[(x+1)^2+y^2]^2} = -\frac{(x+1-iy)^2}{(x+1+iy)^2(x+1-iy)^2} =$$

$$= -\frac{1}{(x+1+iy)^2} = -\frac{1}{(z+1)^2}$$

Т.к. производная существует, то v является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = -\int\frac{1}{(z+1)^2}dz = \frac{1}{z+1} + C$$

Определим константу С:

$$f(0) = 1 + C = 1 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{z+1}$$

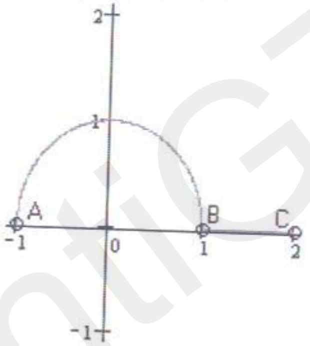
Ответ: $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int\limits_{ABC} \mathrm{Re}\frac{\bar{z}}{z}dz;\ AB: \{|z| = 1, \mathrm{Im}\, z \ge 0\}, BC - \text{отрезок}, z_B = 1; z_C = 2$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = \mathrm{Re}\frac{\bar{z}}{z} = \mathrm{Re}\frac{x-iy}{x+iy} =$$

$$= \mathrm{Re}\frac{x^2 - 2ixy - y^2}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}_{u(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x(2y^2)}{(x^2+y^2)^2}; \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \ne \frac{\partial v}{\partial y}$$

Условия Коши-Римана не выполняются, значит, функция не является аналитической. Тогда представим части кривой в параметрическом виде:

$$AB: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = \sqrt{1-t^2}; z_A = z(-1); z_B = z(1)$$

$$BC: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = 0; z_B = z(1); z_C = z(2)$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int\limits_{ABC} f(z)dz = \int\limits_0^1 f[\underset{AB}{z(t)}]z'(t)dt + \int\limits_1^2 f[\underset{BC}{z(t)}]z'(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (2t^2-1)(1 - \frac{it}{\sqrt{1-t^2}})dt + \int\limits_{-1}^1 1dt = \frac{5}{3} - \frac{i}{3}$$

Ответ: $\int\limits_{ABC} f(z)dz = \dfrac{5}{3} - \dfrac{i}{3}$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{9z-162}{2z^3+9z^2-81z}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{9z-162}{2z^3+9z^2-81z}=\frac{9z-162}{z(z+9)(2z-9)}=\frac{9}{2z}\cdot\frac{z-18}{(z+9)(z-4,5)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

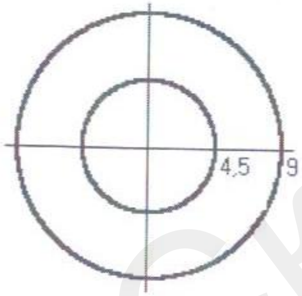
$$\frac{z-18}{(z+9)(z-4,5)}=\frac{A}{z+9}+\frac{B}{z-4,5}=\frac{Az-4,5A+Bz+9B}{(z+9)(z-4,5)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=2;B=-1\}\Rightarrow\frac{z-18}{(z+9)(z-4,5)}=\frac{2}{z+9}-\frac{1}{z-4,5}.$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{9}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+9}-\frac{1}{z-4,5}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=4,5; z=-9$



Рассмотрим область $|z|<4,5$:

$$f(z)=\frac{9}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+9}-\frac{1}{z-4,5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{9}}+\frac{1}{1-\frac{2z}{9}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{9}+\frac{z^2}{81}-\frac{z^3}{729}+\dots\right)+\left(1+\frac{2z}{9}+\frac{4z^2}{81}+\frac{8z^3}{729}+\dots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{9}+\frac{z}{81}-\frac{z^2}{729}+\dots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{9}+\frac{4z}{81}+\frac{8z^2}{729}+\dots\right)$$

Рассмотрим область $4,5<|z|<9$:

$$f(z)=\frac{9}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+9}-\frac{1}{z-4,5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{9}}-\frac{9}{2z(1-\frac{9}{2z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{9}+\frac{z^2}{81}-\frac{z^3}{729}+\dots\right)+\left(\frac{9}{2z}+\frac{81}{4z^2}+\frac{729}{8z^3}+\frac{6561}{16z^4}+\dots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{9}+\frac{z}{81}-\frac{z^2}{729}+\dots\right)+\left(\frac{9}{2z^2}+\frac{81}{4z^3}+\frac{729}{8z^4}+\frac{6561}{16z^5}+\dots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>9$:

$$f(z)=\frac{9}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+9}-\frac{1}{z-4,5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{9}{z(1+\frac{9}{z})}-\frac{9}{2z(1-\frac{9}{2z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{9}{z}-\frac{81}{z^2}+\frac{729}{z^3}-\frac{6561}{z^4}+\dots\right)+\left(\frac{9}{2z}+\frac{81}{4z^2}+\frac{729}{8z^3}+\frac{6561}{16z^4}+\dots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{9}{z^2}-\frac{81}{z^3}+\frac{729}{z^4}-\frac{6561}{z^5}+\dots\right)+\left(\frac{9}{2z^2}+\frac{81}{4z^3}+\frac{729}{8z^4}+\frac{6561}{16z^5}+\dots\right)$$

Ответ:

$$|z|<4,5: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{9}+\frac{z}{81}-\frac{z^2}{729}+\dots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{9}+\frac{4z}{81}+\frac{8z^2}{729}+\dots\right)$$

$$4,5<|z|<9: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{9}+\frac{z}{81}-\frac{z^2}{729}+\dots\right)+\left(\frac{9}{2z^2}+\frac{81}{4z^3}+\frac{729}{8z^4}+\frac{6561}{16z^5}+\dots\right.$$

$$|z|>9: f(z)=\left(\frac{9}{z^2}-\frac{81}{z^3}+\frac{729}{z^4}-\frac{6561}{z^5}+\dots\right)+\left(\frac{9}{2z^2}+\frac{81}{4z^3}+\frac{729}{8z^4}+\frac{6561}{16z^5}+\dots\right.$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z\text{-}z_0$.

$$f(z)=\frac{z+3}{z^2-1},z_0=2+i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z+3}{z^2-1}=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z+1}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{2}{z-1}=2\cdot\frac{1}{z-1}=2\cdot\frac{1}{(z-z_0)+1+i}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-z_0)+3+i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(3+i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1+i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(3+i)^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(1+i)^{n+1}}-\frac{1}{(3+i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(1+i)^{n+1}}-\frac{1}{(3+i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=z\cdot\sin\frac{z}{z-1},z_0=1$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-1;z\cdot\sin\frac{z}{z-1}=(z'+1)\sin\frac{z'+1}{z'}=(z'+1)[\sin 1\cos\frac{1}{z'}+\cos 1\sin\frac{1}{z'}]=$$

$$=z'\sin 1\cos\frac{1}{z'}+z'\cos 1\sin\frac{1}{z'}+\sin 1\cos\frac{1}{z'}+\cos 1\sin\frac{1}{z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=z'\sin 1\cos\frac{1}{z'}+z'\cos 1\sin\frac{1}{z'}+\sin 1\cos\frac{1}{z'}+\cos 1\sin\frac{1}{z'}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2!z'^2}+\frac{1}{4!z'^4}-\ldots\right)z'\sin 1+\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{3!z'^3}+\frac{1}{5!z'^5}-\ldots\right)z'\cos 1+$$

$$+\left(1-\frac{1}{2!z'^2}+\frac{1}{4!z'^4}-\ldots\right)\sin 1+\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{3!z'^3}+\frac{1}{5!z'^5}-\ldots\right)\cos 1=$$

$$=z'\sin 1+\cos 1+\sin 1+\frac{2!\cos 1-\sin 1}{2!z'}-\frac{2!\cos 1+3!\sin 1}{2!3!z'^2}-\frac{4!\cos 1+3!\sin 1}{3!4!z'^3}+$$

$$+\frac{4!\cos 1+5!\sin 1}{4!5!z'^4}+\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$:

$$f(z)=z\sin 1+\cos 1+\frac{2!\cos 1-\sin 1}{2!(z-1)}-\frac{2!\cos 1+3!\sin 1}{2!3!(z-1)^2}-\frac{4!\cos 1+3!\sin 1}{3!4!(z-1)^3}+$$

$$+\frac{4!\cos 1+5!\sin 1}{4!5!(z-1)^4}+\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=z\sin 1+\cos 1+\frac{2!\cos 1-\sin 1}{2!(z-1)}-\frac{2!\cos 1+3!\sin 1}{2!3!(z-1)^2}-\frac{4!\cos 1+3!\sin 1}{3!4!(z-1)^3}+$$

$$+\frac{4!\cos 1+5!\sin 1}{4!5!(z-1)^4}+\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{\sin z^2-z^2}{\cos z-1+z^2/2}$$

Разложим числитель и знаменатель в ряды Лорана в окрестности точки z = 0:

$$f(z)=\frac{\sin z^2-z^2}{\cos z-1+z^2/2}=\frac{-z^2+z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}-\frac{z^{14}}{7!}+\ldots}{-1+z^2/2+1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots}=$$

$$=\frac{-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}-\frac{z^{14}}{7!}+\ldots}{\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}-\ldots}=\frac{-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^6}{5!}-\frac{z^{10}}{7!}+\ldots}{\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\frac{z^4}{8!}-\ldots}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^6}{5!}-\frac{z^{10}}{7!}+\ldots}{\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\frac{z^4}{8!}-\ldots}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{aligned} g(z)&=-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^6}{5!}-\frac{z^{10}}{7!}+\ldots;\\ h(z)&=\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\frac{z^4}{8!}-\ldots;\end{aligned}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0. Поскольку рассматриваемые функции представляют собой обычные степенные многочлены, то несложно увидеть, что $g''(0)\neq 0$ и $h(0)\neq 0$.

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 2 – 0 = 2.

Ответ: Точка z = 0 является полюсом 2-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\operatorname{ctg}\frac{1}{z}$$

Перейдем к новой переменной:

$$t=\frac{1}{z};f(t)=\operatorname{ctg} t$$

Эта функция не является аналитической при sin t = 0. Найдем t, соответствующие этому случаю:

$$\sin t=0\Rightarrow t=\pi k;k\in z$$

Запишем данную функцию в виде отношения функций g(t) и h(t):

$$f(t)=\frac{\cos t}{\sin t};\quad \begin{aligned} g(t)&=\cos t;\\ h(t)&=\sin t;\end{aligned}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при t = πk:

$$g(\pi k)\neq 0$$

$$h(\pi k)=0$$

$$h'(t)=\cos t;h'(\pi k)\neq 0$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при t = πk выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки t = πk являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при t = πk для функций h(t) и g(t). В данном случае, это 1 – 0 = 1.

$$t=\pi k\Rightarrow z=\frac{1}{t}=\frac{1}{\pi k};k\in z$$

Рассмотрим точку z = 0. Для любого δ>0 существует такое значение k, что |1/πk|<δ. Таким образом z = 0 не является изолированной особой точкой, так как противоречит определению, гласящему, что функция должна быть аналитической в некотором кольце вокруг этой точки, а, какой бы мы не взяли радиус кольца, в нем найдется особая точка вида 1/πk, в которой функция не является аналитической.

Ответ: Точки $z=1/\pi k;k\in z$ для данной функции являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-1/4|=1/3} \underbrace{\frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = k/2,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадают только точки $z = 0$ и $z = 1$.

Точка $z_1 = 0$ является устранимой особой точкой, следовательно, вычет в точке z_1 равен нулю.

Точка $z_2 = 1$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to 1}[f(z)(z-1)] = \lim_{z\to 1}\frac{z(z-1)(z+1)^2}{\sin 2\pi z} = \left\{\begin{matrix} t = z-1 \\ z = t+1 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t(t+1)(t+1+1)^2}{\sin(2\pi t + 2\pi)} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t+1)(t+1+1)^2}{\sin 2\pi t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t(t+1)(t+1+1)^2}{2\pi t} = \lim_{t\to 0}\frac{(t+1)(t+1+1)^2}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-1/4|=1/3} \frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{2}{\pi} = 4i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-1/4|=1/3} \frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z} dz = 4i$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1/2} \underbrace{\frac{e^{2z^2}-1}{z^3}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$\frac{e^{2z^2}-1}{z^3} = \frac{-1 + \left(1 + 2z^2 + \frac{4z^4}{2!} + \frac{8z^6}{3!} + \frac{16z^8}{4!} + \ldots\right)}{z^3} =$$

$$= \frac{2}{z} + \frac{4z}{2!} + \frac{8z^3}{3!} + \frac{16z^5}{4!} + \ldots$$

Правильная часть получившегося ряда содержит бесконечное число членов, из чего следует, что это – полюс. Порядок полюса равен порядку старшего члена главной части. Таким образом, $z = 0$ – это полюс 1-го порядка и вычет находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{2z^2}-1}{z^2}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{2z^2}{z^2}\right) = \lim_{z\to 0} 2 = 2$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{e^{2z^2}-1}{z^3} dz = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{e^{2z^2}-1}{z^3} dz = 4\pi i$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{\mathrm{sh}3z - \sin 3z}{z^3\,\mathrm{sh}2z}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции $z = ik\pi/2$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{\mathrm{sh}3z - \sin 3z}{z^3\,\mathrm{sh}2z} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad g(z) = \mathrm{sh}3z - \sin 3z, \quad h(z) = z^3\,\mathrm{sh}2z$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\mathrm{sh}3z - \sin 3z}{z^2\,\mathrm{sh}2z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используемпра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{3\mathrm{ch}3z - 3\cos 3z}{2z\,\mathrm{sh}2z + 2z^2\mathrm{ch}2z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используемпра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{9\mathrm{sh}3z + 9\sin 3z}{2\mathrm{sh}2z + 8z\,\mathrm{ch}2z + 4z^2\mathrm{sh}2z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используемпра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{27\mathrm{ch}3z + 27\cos 3z}{12\mathrm{ch}2z + 24z\,\mathrm{sh}2z + 8z^2\mathrm{ch}2z}\right) = \frac{9}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{sh}3z - \sin 3z}{z^3\,\mathrm{sh}2z} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{9}{2} = 9\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{sh}3z - \sin 3z}{z^3\,\mathrm{sh}2z} dz = 9\pi i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-7i|=2} \left(\frac{2\sin\frac{\pi i z}{2+14i}}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)} + \frac{\pi}{e^{\pi z/2} + i}\right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-7i|=2} \underbrace{\frac{2\sin\frac{\pi i z}{2+14i}}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z-7i|=2} \underbrace{\frac{\pi}{e^{\pi z/2} + i}}_{f_2(z)} dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z-7i|=2} \frac{2\sin\frac{\pi i z}{2+14i}}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)} dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: $z=1+7i$ и $z=3+7i$. При этом точка $z=3+7i$ не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка $z=1+7i$ является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=1+7i} f_1(z) = \lim_{z\to 1+7i} \frac{d}{dz}\left[\frac{2\sin\frac{\pi i z}{2+14i}(z-1-7i)^2}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)}\right] = \lim_{z\to 1+7i} \frac{d}{dz}\left[\frac{2\sin\frac{\pi i z}{2+14i}}{(z-3-7i)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1+7i}\left[\frac{(7+i)\pi}{50(z-3-7i)}\cos\frac{(7+i)\pi z}{100} - \frac{2}{(z-3-7i)^2}\sin\frac{(7+i)\pi z}{100}\right] =$$

$$= -\frac{7+i}{100}\pi\,\mathrm{ch}\frac{\pi}{2} - \frac{i}{2}\mathrm{sh}\frac{\pi}{2} \approx -0{,}552 - 1{,}229i$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-7i|=2} \frac{2\sin\frac{\pi i z}{2+14i}}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)} dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=1+7i} f_1(z) \approx 2\pi \cdot (1{,}229 - 0{,}552i)$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z-7i|=2}\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+i}dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\pi z/2}+i=0\Rightarrow e^{\pi z/2}=-i\Rightarrow \pi z/2=\ln(-i)=-\pi i/2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=4i-i,k\in z$$

Из этих точек только одна охвачена контуром |z–7i|=2 и должна приниматься во внимание. Это точка z=7i, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=7i}f_2(z)=\lim_{z\to 7i}\frac{\pi(z-7i)}{e^{\pi z/2}+i}=\begin{Bmatrix}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{Bmatrix}=$$

$$=\lim_{z\to 7i}\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2}}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{7\pi i/2}}=\frac{2}{e^{7\pi i/2}}=\frac{2}{-i}=2i$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-7i|=2}\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+i}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=(2\pi-1)i}f_2(z)=2\pi i\cdot 2i=-4\pi$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-7i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi iz}{2+14i}}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)}+\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz=$$

$$=\oint\limits_{|z-7i|=2}\frac{2\sin\frac{\pi iz}{2+14i}}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)}dz+\oint\limits_{|z-7i|=2}\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+i}dz=$$

$$\approx 2\pi\cdot(1{,}229-0{,}552i)-4\pi=-2\pi\cdot(0{,}771+0{,}552i)$$

Ответ:

$$\oint\limits_{|z-7i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi iz}{2+14i}}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)}+\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz\approx-2\pi\cdot(0{,}771+0{,}552i)$$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{9-4\sqrt{5}\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int\limits_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{9-\sqrt{80}\sin t}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{9-\frac{\sqrt{80}}{2i}(z-\frac{1}{z})}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{9iz-\frac{\sqrt{80}}{2}(z^2-1)}=$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{18iz-\sqrt{80}(z^2-1)}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{-\sqrt{80}(z-i\sqrt{5}/2)(z-2i\sqrt{5}/5)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=i\sqrt{5}/2;\quad z=2i\sqrt{5}/5;$

Точка $i\sqrt{5}/2$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $2i\sqrt{5}/5$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=2i\sqrt{5}/5}f(z)=\lim_{z\to 2i\sqrt{5}/5}[f(z)(z-2i\sqrt{5}/5)]=$$

$$=\lim_{z\to 2i\sqrt{5}/5}\frac{2}{-\sqrt{80}(z-i\sqrt{5}/2)}=\frac{2}{-\sqrt{80}(2i\sqrt{5}/5-i\sqrt{5}/2)}=-i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{-\sqrt{80}(z-i\sqrt{5}/2)(z-2i\sqrt{5}/5)}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot(-i)=2\pi$$

Ответ: $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{9-4\sqrt{5}\sin t}=2\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+2\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+2\cos t)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{(\sqrt{7}+(z+\frac{1}{z}))^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{i(z\sqrt{7}+(z^2+1))^2} = \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{i\left[(z-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2})(z+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = (\sqrt{3}-\sqrt{7})/2;\quad z = (-\sqrt{3}-\sqrt{7})/2;$

Точка $z = (-\sqrt{3}-\sqrt{7})/2$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z = (\sqrt{3}-\sqrt{7})/2$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=(\sqrt{3}-\sqrt{7})/2} f(z) = \lim_{z\to(\sqrt{3}-\sqrt{7})/2} \frac{d}{dz}\left[f(z)\left(z-(\sqrt{3}-\sqrt{7})/2\right)^2\right] =$$

$$= \lim_{z\to(\sqrt{3}-\sqrt{7})/2} \frac{d}{dz} \frac{z}{i\left(z+(\sqrt{3}+\sqrt{7})/2\right)^2} = \frac{1}{i} \lim_{z\to(\sqrt{3}-\sqrt{7})/2} \frac{d}{dz} \frac{z}{\left(z+(\sqrt{3}+\sqrt{7})/2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{z\to(\sqrt{3}-\sqrt{7})/2} \left[-4\frac{2z-\sqrt{7}-\sqrt{3}}{(2z+\sqrt{7}+\sqrt{3})^3}\right] = -\frac{4}{i}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}-\sqrt{7}-\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-\sqrt{7}+\sqrt{7}+\sqrt{3})^3} = -\frac{4}{i}\cdot\frac{-2\sqrt{7}}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1} \frac{zdz}{i\left[(z-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2})(z+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2})\right]^2} = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}i}\right) = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+2\cos t)^2} = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_m \operatorname*{res}_{z_m} R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2}{(z^2+3)^2}dz$$

Особые точки:

$z = i\sqrt{3}\quad (\operatorname{Im} z > 0);\quad z = -i\sqrt{3}\quad (\operatorname{Im} z < 0)$

Точка $z = i\sqrt{3}$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{3}} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{3}} \frac{d}{dz}[f(z)(z-i\sqrt{3})^2] = \lim_{z\to i\sqrt{3}} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+i\sqrt{3})^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to i\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}iz}{(z+i\sqrt{3})^3} = \frac{\sqrt{3}}{12i}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx = 2\pi i\frac{\sqrt{3}}{12i} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\lambda x dx=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$x^4+9x^2+20=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm 2i;z_{3,4}=\pm i\sqrt{5};$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{2i;i\sqrt{5}\}$$

Эти особые точки являются простыми полюсами. Найдем в них вычеты:

$$1)\underset{z=2i}{\mathrm{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 2i}\frac{(z^2-z)(z-2i)}{(z^2+4)(z^2+5)}e^{iz}=\lim_{z\to 2i}\frac{(z^2-z)e^{iz}}{(z+2i)(z^2+5)}=$$

$$=\frac{(-4-2i)e^{-2}}{(2i+2i)(-4+5)}=-\frac{(2+i)e^{-2}}{2i}$$

$$2)\underset{z=i\sqrt{5}}{\mathrm{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i\sqrt{5}}\frac{(z^2-z)(z-i\sqrt{5})}{(z^2+4)(z^2+5)}e^{iz}=\lim_{z\to i\sqrt{5}}\frac{(z^2-z)e^{iz}}{(z^2+4)(z+i\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{(-5-i\sqrt{5})e^{-\sqrt{5}}}{(-5+4)(i\sqrt{5}+i\sqrt{5})}=\frac{(\sqrt{5}+i)e^{-\sqrt{5}}}{2i}$$

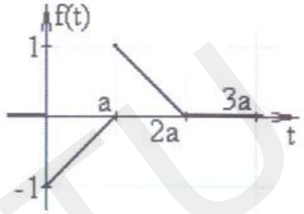
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20}dx=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{2\pi e^{-\sqrt{5}}}{2}-\frac{2\pi e^{-2}}{2}$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20}dx=\frac{2\pi e^{-\sqrt{5}}}{2}-\frac{2\pi e^{-2}}{2}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)\begin{cases}\dfrac{t-a}{a} & 0<t<a\\ \dfrac{2a-t}{a}, & a<t<2a\\ 0, & 2a<t\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{t-a}{a}\cdot\eta(t)+\frac{3a-2t}{a}\eta(t-a)+\frac{t-2a}{a}\eta(t-2a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}+\left(\frac{3}{p}-\frac{2}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{2}{p}\right)e^{-2ap}$$

Ответ: $F(p)=\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}+\left(\frac{3}{p}-\frac{2}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{2}{p}\right)e^{-2ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{1}{p^5+p^3}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{1}{p^5+p^3}=\frac{1}{p^3(p^2+1)}=\frac{Ap^2+Bp+C}{p^3}+\frac{Dp+E}{p^2+1}=$$

$$=\frac{Ap^4+Bp^3+Cp^2+Ap^2+Bp+C+Dp^4+Ep^3}{p^3(p^2+1)}=$$

$$=\frac{(A+D)p^4+(B+E)p^3+(A+C)p^2+Bp+C}{p^3(p^2+1)}$$

Решив систему линейных уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+D=0\\B+E=0\\A+C=0\\B=0\\C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\B=0\\C=1\\D=1\\E=0\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{1}{p^5+p^3}=-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3}+\frac{p}{p^2+1}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3}+\frac{p}{p^2+1}\rightarrow-1+\frac{t^2}{2}+\cos t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$-1+\frac{t^2}{2}+\cos t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$2y''-y'=\sin 3t$

$y(0)=2,\quad y'(0)=1.$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$2p^2Y(p)-2py(0)-2y'(0)-pY(p)+y(0)=\frac{3}{p^2+9}$$

$$2p^2Y(p)-4p-2-pY(p)+2=\frac{3}{p^2+9}$$

$$(2p^2+p)Y(p)=\frac{3}{p^2+9}+4p=\frac{4p^3+36p+3}{p^2+9}$$

$$Y(p)=\frac{4p^3+36p+3}{(p^2+9)(2p^2+p)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{4p^3+36p+3}{(p^2+9)(2p^2+p)}=\frac{Ap+B}{p^2+9}+\frac{Cp+D}{2p^2+p}=$$

$$=\frac{2Ap^3+Ap^2+2Bp^2+Bp+Cp^3+9Cp+Dp^2+9D}{(p^2+9)(2p^2+p)}$$

$$\begin{cases}2A+C=4\\A+2B+D=0\\B+9C=36\\9D=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1/111\\B=-18/111\\C=446/111\\D=37/111\end{cases}\Rightarrow Y(p)=\frac{1}{111}\left(\frac{-p-18}{p^2+9}+\frac{446p+37}{2p^2+p}\right)$$

$$Y(p)=\frac{1}{111}\left(-6\frac{3}{p^2+9}-\frac{p}{p^2+9}+\frac{186}{p+\frac{1}{2}}+\frac{37}{p}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{-6\sin 3t-\cos 3t+186e^{-t/2}+37}{111}$$

Ответ: $y(t)=\dfrac{-6\sin 3t-\cos 3t+186e^{-t/2}+37}{111}$

Задача 25

Материальная точка массы m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат с силой F=kx, пропорциональной расстоянию. На точку действует сила сопротивления среды R=rv, пропорциональная скорости v. При t=0 расстояние точки от начала координат x_0, а скорость v_0. Найти закон движения x=x(t) материальной точки.

$k = 2m$, $r = m$, $x_0 = 1м$, $v_0 = 0$.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = kx - rv$$

$$\ddot{x}m - r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m - m\dot{x} + 2mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) - pX(p) + x(0) + 2X(p) = 0$$

$$(p^2 - p + 2)X(p) - p + 1 = 0$$

$$X(p) = \frac{p-1}{p^2 - p + 2} = \frac{p-1}{(p-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = \frac{p-\frac{1}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} - \frac{1}{\sqrt{7}}\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{7}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$$

Ответ: $x(t) = e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{7}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dot{x} = -2x + 6y + 1\\ \dot{y} = 2x + 2\end{cases}$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases}pX(p) - x(0) = -2X(p) + 6Y(p) + 1/p\\ pY(p) - y(0) = 2X(p) + 2/p\end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases}pX(p) = -2X(p) + 6Y(p) + 1/p\\ pY(p) - 1 = 2X(p) + 2/p\end{cases}$$

Выразим Y(p) через X(p), используя первое уравнение:

$$pX(p) = -2X(p) + 6Y(p) + 1/p \Rightarrow Y(p) = \frac{pX(p) + 2X(p) - 1/p}{6}$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение и найдем X(p):

$$p[\frac{pX(p) + 2X(p) - 1/p}{6}] - 1 = 2X(p) + 2/p \Rightarrow X(p) = \frac{12/p + 7}{p^2 + 2p - 12}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$X(p) = \frac{12/p + 7}{p^2 + 2p - 12} = \frac{p+9}{p^2 + 2p - 12} - \frac{1}{p} = \frac{p+9}{(p+1)^2 - 13} - \frac{1}{p} =$$

$$= \frac{p+1}{(p+1)^2 - 13} - \frac{8i}{\sqrt{13}}\frac{i\sqrt{13}}{(p+1)^2 - 13} - \frac{1}{p} \to x(t) = e^{-t}\cos i\sqrt{13}t -$$

$$- \tfrac{8i}{\sqrt{13}}e^{-t}\sin i\sqrt{13}t - 1 = e^{-t}\mathrm{ch}\sqrt{13}t + \tfrac{8}{\sqrt{13}}e^{-t}\mathrm{sh}\sqrt{13}t - 1$$

Зная x(t), найдем y(t):

$$\dot{x} = -2x + 6y + 1 \Rightarrow y(t) = \tfrac{1}{6}(\dot{x} + 2x - 1) = \tfrac{1}{6}(7e^{-t}\mathrm{ch}\sqrt{13}t + \tfrac{5}{\sqrt{13}}e^{-t}\mathrm{sh}\sqrt{13}t +$$

$$+ 2e^{-t}\mathrm{ch}\sqrt{13}t + \tfrac{16}{\sqrt{13}}e^{-t}\mathrm{sh}\sqrt{13}t - 2 - 1) = \tfrac{1}{6}(9e^{-t}\mathrm{ch}\sqrt{13}t + \tfrac{21}{\sqrt{13}}e^{-t}\mathrm{sh}\sqrt{13}t - 3) =$$

$$= \tfrac{3}{2}e^{-t}\mathrm{ch}\sqrt{13}t + \tfrac{7}{2\sqrt{13}}e^{-t}\mathrm{sh}\sqrt{13}t - \tfrac{1}{2}$$

Ответ:

$$x(t) = e^{-t}\mathrm{ch}\sqrt{13}t + \tfrac{8}{\sqrt{13}}e^{-t}\mathrm{sh}\sqrt{13}t - 1$$

$$y(t) = \tfrac{3}{2}e^{-t}\mathrm{ch}\sqrt{13}t + \tfrac{7}{2\sqrt{13}}e^{-t}\mathrm{sh}\sqrt{13}t - \tfrac{1}{2}$$

Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

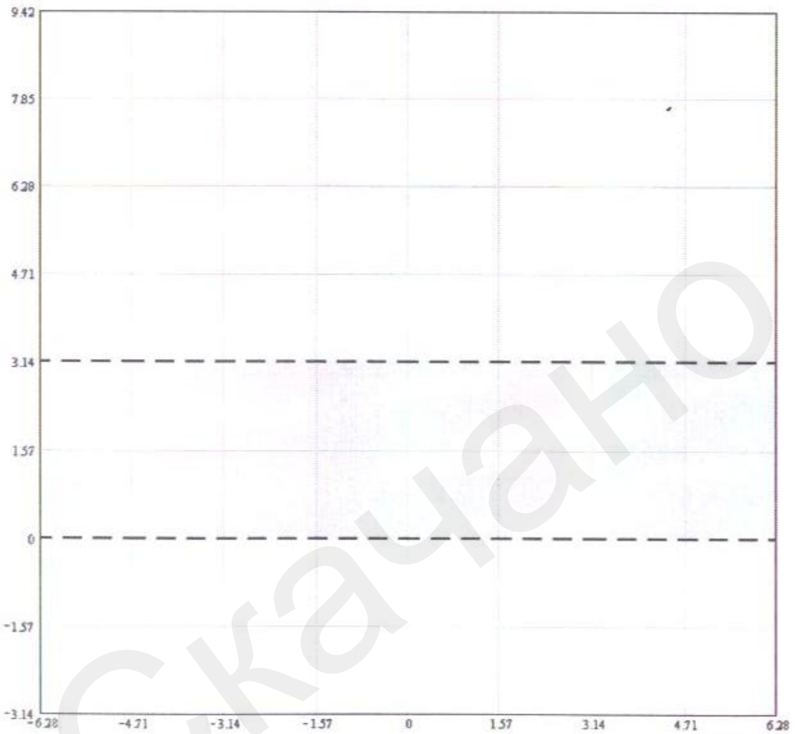
$w = \ln(z)$; угол $0<\arg(z)<\alpha\le 2\pi$.

Представим z в виде $R\cdot e^{i\arg(z)}$.

Произведем отображение z с помощью функции $w = \ln(z)$:

$$w = \ln(z) = \ln(Re^{i\arg(z)}) = \ln R + \ln e^{i\arg(z)} = \ln R + i\arg(z)\ln e =$$
$$= \ln R + i\arg(z)$$

Поскольку $R>0$, а $0<\arg(z)<\alpha$, то заданный угол отображается на комплексной плоскости как полоса $-\infty<\mathrm{Re}(w)<\infty$, $0<\mathrm{Im}(w)<\alpha\le 2\pi$. Для примера приведем $\alpha=\pi$:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\ldots,n-1; z \ne 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$z=x+iy$ $\qquad$ $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\mathrm{sh}\, z = -i\sin iz = \frac{e^z-e^{-z}}{2} \qquad \mathrm{ch}\, z = \cos iz = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z \qquad \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k, k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\mathrm{Arc}\sin z = -i\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2}) \qquad \mathrm{Arc}\cos z = -i\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$$

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \mathrm{Arcctg}\, z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Аналитические функции

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z\in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$