# Екзаменаційний білет № 4

**I. Теоретична частина**

1. Розв’язок СЛАР методом Монте-Карло.

*3. Розв'язання СЛАР методом Монте-Карло.*

Припустимо, що є лінійна система

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2)$$

Приведемо систему (1) до спеціального виду

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3)$$

Уводячи матрицю $\alpha = [\alpha_{ij}]$ і вектори $X = [x_i]$ і $\beta = [\beta_i]$ запишемо систему (3) у вигляді

$$X = \alpha X + \beta \qquad (3')$$

Якщо для будь-якої канонічної норми матриці X виконується нерівності $\|\alpha\| < 1$,

те система (3) має єдине рішення, що може бути знайдено методом ітерації.

Підберемо систему множників $v_{ij}$ таким чином, щоб числа $p_{ij}$, визначені рівняннями

$$\alpha_{ij} = p_{ij} \cdot v_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (4)$$

задовольняли наступним умовам:

1) $p_{ij} \geq 0$, причому $p_{ij} > 0$ при $\alpha_{ij} \neq 0$;

2) $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$;

3) $p_{i,n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$...

## Крім того, покладемо

$p_{i,n+1} = 0$ при $j < n + 1$

і

$p_{n+1,\, n+1} = 1.$

Розглянемо тепер деяку блукаючу частку, що володіє кінцевим числом можливих і несумісних станів $S_1, S_2, \ldots, S_n, S_{n+1}$...

Ця частка така, що з імовірністю $p_{ij}$ $(i,j = 1, 2, \ldots, n+1)$ переходить зі стану $S_i$ у стан $S_j$, незалежно від попередніх станів. *Стан* $S_{n+1} = Г$ (“межа” або “поглинаючий екран”) є особливим і відповідає повній зупинці частки, тому що $p_{n+1,j} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ і перехід зі стану $S_{n+1}$ у стан $S_j$ при $j < n + 1$ неможливий. Таким чином, процес блукання припиняється як тільки частка перший раз потрапляє на границю $Г$. Це так званий дискретний ланцюг Маркова з кінцевим числом станів. Числа $p_{ij}$ називаються перехідними ймовірностями, а матриця

$$П = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} & p_{1,n+1} \\ & \cdots & & \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} & p_{n,n+1} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

називається *матрицею переходу* станів $\{S_i\}$ (або *закон ланцюга*).

Нехай $S_i$ – деякий фіксований стан, відмінний від $Г$ $( i < n + 1 )$. Розглянемо блукання частки, яке починається в стані $S_i = S_{i_0}$ і після ряду проміжних станів $S_{i_1}, S_{i_2}, ..., S_{i_m}$ закінчуються на межі $S_{i_{m+1}} = Г$. Сукупність станів

$$T_i = \{ S_{i_0}, S_{i_i}, ..., S_{i_m}, S_{i_{m+1}} \} \qquad (5)$$

назвемо траєкторією. Нехай $x_i$ є ВВ, що залежить від випадкової траєкторії $T_i$, що починається у стані $S_i$ і приймає для траєкторії (5) наступні значення

$$\xi(T_i) = \beta_{i_0} + v_{i_0 i_1}\beta_{i_1} + v_{i_0 i_1} v_{i_1 i_2}\beta_{i_2} + \ldots + v_{i_0 i_1} \ldots v_{i_{m-1} i_m}\beta_{i_m} \qquad (6),$$

де $\beta_j$ $( j = i_0, i_1, \ldots, i_m )$ – відповідні вільні члени приведеної системи (3).

Зокрема, якщо $v_{ij} = 1$, то

$$\xi(T_i) = \beta_{i_0} + \beta_{i_1} + \ldots + \beta_{i_m}$$

*Теорема математичного сподівання.*

$$MX_i = x_i \ ( i= 1, 2,\ldots,n)$$

є коренями системи (3).

З теореми випливає, що корені системи (3) можна розглядати як математичне сподівання випадкових величин $X_1, X_2, \ldots , X_N$... У такий спосіб організують $N$ випадкових блукань з випадковими траєкторіями $T_i^{(k)}$ $( k = 1, 2,\ldots,N)$ з початковим станом $S_i$ і щораз реєструють $\xi( T_i^{(k)})$ випадкові величини $X_i$. У силу теореми Чебышева

$$x_i \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\xi(T^{(k)}) \qquad (7)$$

Розглянемо як організувати блукання частки. Нехай початковий стан частки $S_i$, а $\{t\}$- випадкові числа, рівномірно розподілені на [0,1]. Зробимо розиграш випадкові числа l. Нехай $p_{ij}$ – десяткові дроби із загальним знаменником $10^S$ ($S$ - натуральне число).

$$p_{i1} = \frac{m_{i1}}{10^s},\ p_{i2} = \frac{m_{i2}}{10^s}, \ldots, p_{i,n+1} = \frac{m_{i,n+1}}{10^s},$$

де $m_{i1}, m_{i2}, \ldots, m_{i,n+1}$- цілі ненегативні числа, причому $m_{i1} + m_{i2} + \ldots + m_{i,n+1} = 10^S$ $(i= 1, 2, \ldots, n)$...

## Якщо виявиться, що виконано нерівність

$$0 \le t < p_{i1},$$

то будемо вважати, що частка переходить із стану $S_i$ у стан $S_1$. Якщо виконані нерівності

$$\frac{m_{i1}}{10^s} \le t \prec \frac{m_{i1}+m_{i2}}{10^s}, \qquad p_{i1} \le t < p_{i1} + p_{i2},$$

то вважають, що частка переходить із $S_i$ у $S_2$ і т.д. Нарешті, частка потрапляє на границю

$S_{n+1} = Г$, якщо ВВ $t$ така, що

$$p_{i1} + \ldots + p_{in} \le t < p_{i1} + p_{i2} \ldots + p_{in} + p_{i,n+1} = 1...$$

Послідовно вибираючи початкові стани $S_1, S_2, \ldots, S_n$ і виконуючи по $N$ блукань у кожному випадку, обчислюємо згідно (7) корені системи (3).

2. Порівняльний аналіз методів розв’язок рівнянь з одним невідомим.

| Метод | Суть методу | Знаходження наближеного значення | Оцінка точності | |
|---|---|---|---|---|
| Метод | Відрізок [a, b], що містить корінь, ділиться | Для знаходження наближеного | Тоді, очевидно, $\lvert x_n - \zeta \rvert \le .$ $\zeta$ | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| бісекції | навпіл і надалі розглядається та його половина, що містить корінь, тобто інтервал, де функція *f(x)* має різні знаки на його кінцях. | значення $x_n$ з точністю $\varepsilon$, процес ділення навпіл триває доти, поки не виконається нерівність: $b_n -$ , де $[a_n, b_n]$ – відрізок після *n*-го ділення, що містить корінь Після цього покладемо $x_n = \frac{(a_n + b_n)}{2}$. | Часом вигідніше користуватися іншою оцінкою отриманої точності $\lvert x_n - \bar{x} \rvert \le \frac{\lvert f(x_n) \rvert}{m_1}$, (2) де $0 \prec m_1 \le \lvert f'(x) \rvert$ для $x \in [a,b]$. | |
| Метод хорд | ). Припустимо для визначеності, що *f(a) < 0* і *f(b) > 0*. Замість того, щоб ділити відрізок навпіл, більш природно розділити його у відношенні *f(a)/f(b)*. | Це дасть наближення значення кореня $x_1 = a + h_1$, (3) де $h_1 =$ , (4). | Нехай ξ-точний, а $\bar{x}$ - наближений корінь рівняння *f(x) = 0*, розташовані на тому самому відрізку [a, b], причому $\lvert f'(x) \rvert \ge m_1 \ge 0$ при $a \le x \le b$ (зокрема за $m_1$ можна взяти мінімум модулю *f'(x)* на інтервалі [a, b]). У такому випадку справедлива оцінка $\lvert \bar{x} - \xi \rvert \le \frac{\lvert f(\bar{x}) \rvert}{m_1}$ | |
| Метод дотичних | Нехай, корінь рівняння *f(x) = 0* відокремлений на [a, b], причому *f '(x)* і *f ''(x)* неперервні і зберігають постійні знаки при $a \le x \le b$. Знайшовши яке-небудь початкове наближення кореня $x_n \approx \xi$ $(a \le x_n \le b)$, ми можемо уточнити його за методом Ньютона в такий спосіб. Припустимо, $\xi = x_n + h_n$, | $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, | $\lvert \xi - x_n \rvert \le \frac{\lvert f(x_n) \rvert}{m_1}$ $\lvert \xi - x_n \rvert \le \frac{m_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$, | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (7)<br><br>де $h_n$ вважаємо малою величиною. Звідси, застосовуючи формулу Тейлора, одержимо<br><br>$0 = f(x_n+h_n) \approx f(x_n) + h_n + f'(x_n)$<br><br>отже<br>$h_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ | | | |
| Метод ітерації | Сутність методу полягає в наступному. Нехай є рівняння (1). Замінимо його еквівалентним<br><br>$x = \varphi(x)$ (11)<br><br>Виберемо будь-яким способом початкове наближення $x_0$ й підставимо його в праву частину (11). Тоді отримаємо число<br><br>$x_1 = \varphi(x_0)$ (12)<br><br>Підставимо $x_1$ в (12) замість $x_0$ і отримаємо<br><br>$x_2 = \varphi(x_1)$<br><br>Повторюючи цей процес будемо мати послідовність чисел<br><br>$x_n = \varphi(x_{n-1})$, n = 1, 2, 3, … (13) | $x_n = \varphi(x_{n-1})$, n = 1, 2, 3, … (13) | Отже, нехай $\lvert\varphi'(x)\rvert \le q < 1$ для $x \in [a,b]$.<br>Якщо ітерації виконувати доти, поки<br><br>$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert \le \dfrac{1-q}{q}$,<br><br>то гарантується виконання нерівності<br><br>$\lvert\xi - x_n\rvert < \varepsilon$. | |
| Комбінований метод | Нехай $f(a) * f(b) < 0$, а $f'(x)$ і $f''(x)$ зберігають постійні знаки на [a,b]. Об’єднуючи методи хорд та дотичних, | $x_k = \lvert x_k^{дот} - x_k^{хорд}\rvert / 2$ | $\lvert x_k - \zeta\rvert \le \varepsilon$ | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | отримуємо комбінований метод. У цьому методі послідовно обчислюються $x_k^{хорд}$ та $x_k^{дот}$ за методами хорд і дотичних відповідно. Комбінований метод застосовується на кожному кроці до нового відрізка або $\left[x_k^{хорд}, x_k^{дот}\right]$, якщо нерухомий правий кінець, або до $\left[x_k^{дот}, x_k^{хорд}\right]$, якщо нерухомий лівий кінець. Середина відрізка є наближенням до кореня з точністю $$\varepsilon = \left\|x_k^{дот} - x_k^{хорд}\right\| /$$ Тобто процес обчислювань закінчується, коли виконано умову $$\left\|x_k^{дот} - x_k^{хорд}\right\| \le 2 *$$ | | | |

## II. Практична частина

За допомогою узагальненої формули трапецій обчислити визначений інтеграл

$$\int_3^6 \exp(x) * \sin(x) + \exp(x) * \cos(x) dx$$

з точністю не гірше за $10^{-3}$.