Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

ЗАДАЧІ ІЗ ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ

Розділ «Електрика і магнетизм»

Для студентів технічних спеціальностей

Рекомендовано Методичною радою НТУУ»КПІ» (?)

Київ
НТУУ «КПІ»
2015

Задачі із загальної фізики. Розділ «Електрика і магнетизм». Для студентів технічних спеціальностей. [Текст]/ Уклад.: В. П. Бригінець, О. О. Гусєва, О. В. Дімарова та ін. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 79 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ»КПІ»
(Протокол від 2015 р.)

Навчальне видання

ЗАДАЧІ ІЗ ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ

Розділ «Електрика і магнетизм»

Для студентів технічних спеціальностей

Укладачі:

Бригінець Валентин Петрович, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Гусєва Ольга Олександрівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Дімарова Олена Володимирівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Пономаренко Лілія Петрівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Репалов Ігор Миколайович, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Якуніна Наталія Олександрівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний за випуск — В. М. Локтєв, д-р фіз. - мат. наук, акад. НАН України

Рецензент

За редакцією укладачів

Зміст

Стор.

Електричне поле зарядів у вакуумі

1.1. Напруженість електричного поля точкового заряду:

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\vec{e}_r, \quad де \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}; \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9 \text{ м/Ф}.$$

1.2. Потенціал поля точкового заряду:

$$\varphi = k\frac{q}{r}.$$

1.3. Напруженість і потенціал електричного поля системи зарядів:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i; \quad \varphi = \sum \varphi_i .$$

1.4. Зв'язок між напруженістю і потенціалом електричного поля:

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}, \ \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi; \qquad \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) \equiv U = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}d\vec{l} .$$

1.5. Циркуляція поля зарядів по довільному контуру:

$$\oint_L \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = 0.$$

1.6. Потенціальна енергія заряду в електричному полі та робота поля:

$$W = q\varphi; \qquad A = -q\Delta\varphi \equiv q(\varphi_1 - \varphi_2) \equiv qU .$$

1.7. Електростатична теорема Гаусса:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV .$$

Поле точкових зарядів

1.1. Два точкові заряди q_1 та q_2 знаходяться в точках із радіусами-векторами $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$. Записати вирази для векторів сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, що діють на кожен із зарядів.

1.2. Дві кулі, що мають заряди по 1 Кл і маси по 1 кг, розміщені у вакуумі на відстані 1 км одна від одної. Обчислити сили кулонівського відштовхування F_k та гравітаційного притягання F_g між кулями. Електрична та гравітаційна сталі $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ м^3/кг·с^2. Про що свідчить результат?

(9 кН.)

1.3. Три точкові заряди Q, $-Q$ та q розташовані у вершинах рівностороннього трикутника зі стороною a. Знайти силу F, що діє на заряд q, якщо $Q = 2\cdot 10^{-7}$ Кл, $q = 10^{-7}$ Кл, a = 10 см.

($F = 1{,}8\cdot 10^{-2}$ Н.)

1.4. Тонке півкільце радіуса R =10 см рівномірно заряджене з густиною заряду $\lambda = 1$ мкКл/м. У центрі кривизни півкільця знаходиться точковий заряд Q = 20 нКл. Визначити силу F, що діє на точковий заряд. $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

($F = Q\lambda/2\pi\varepsilon_0 R$ = 3,6 мН.)

1.5. В елементарній теорії атома водню приймають, що у не збудженому стані атома електрон рухається навколо ядра по коловій орбіті радіуса $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$ м. Знайти, яка сила діє на електрон з боку ядра та яке прискорення вона надає електрону. $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

($8,2 \cdot 10^{-8}$ Н, $9,0 \cdot 10^{22}$ м/с^2)

1.6. В елементарній теорії атома водню приймають, що у незбудженому стані атома електрон рухається навколо ядра по коловій орбіті радіуса $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$ м. Чому дорівнює величина орбітальної швидкості електрона? $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r}} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с.} \right)$$

1.7. Точковий заряд q = 50 мкКл знаходиться у точці з радіусом-вектором $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ (всі величини задані в СІ). Знайти вектор $\vec{E}$ та модуль E напруженості, а також потенціал φ електричного поля заряду в точці з радіус-вектором $\vec{r} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$.

($\vec{E} = (2,7\vec{i} - 3,6\vec{j})$ кВ/м, E = 4,5 кВ/м; φ = 45 кВ.)

1.8. Два заряди однакової величини 10 нКл розташовані на відстані 3 м один від одного. Обчислити величину напруженості та потенціалу електричного поля системи посередині між зарядами, якщо вони а) одноіменні і б) різноіменні.

(а) $E = 0$, φ = 120 В; б) E = 80 В/м, $\varphi = 0$)

1.9. Два додатні і два від'ємні заряди однакової величини розташовані у вершинах квадрата. Знайти напруженість $\vec{E}$ і потенціал φ електричного поля системи в центрі квадрата, якщо для поля одного заряду модулі цих величин складають 100 В/м і 100 В, відповідно.

(E = 283 В/м, або 0; $\varphi = 0$)

1.10. Точка, в якій напруженості поля кожного з двох зарядів однакові, ділить відстань між ними у відношенні $r_1 : r_2 = 1 : \eta$ В якому відношенні перебувають:

– величини зарядів $q_1 : q_2$;
– потенціали полів $\varphi_1 : \varphi_2$, які створюють заряди в цій точці.

– $\left(1 : \eta^2; \quad 1 : \eta\right)$

1.11. У двох точках на лінії, що проходить через точковий заряд, напруженість електричного поля дорівнює $E_1 = 36$ В/м і $E_2 = 9$ В/м. Знайти напруженість поля посередині між указаними точками.

(16 В/м *або* 144 В/м)

1.12. У двох точках 1 і 2 на лінії, що проходить через точковий заряд, потенціал електричного поля дорівнює $\varphi_1 = 50$ В і $\varphi_2 = 30$ В. Знайти потенціал поля посередині між указаними точками.

(37,5 В *або* 150 В)

1.13. У точці, що ділить відстань між двома зарядами як 1 : 2, кожен із них створює поле з модулем напруженості 100 В/м. Чому дорівнює модуль результуючого потенціалу поля в цій точці, якщо відстань між зарядами 1,5 м?

(100 В *або* 300 В)

1.14. Два точкові заряди q_1 і $q_2 = 4q_1$ закріплені на відстані 1,2 м один від одного. На якій відстані від заряду q_1 на лінії розташування зарядів знаходиться точка з нульовим значенням: а) напруженості і б) потенціалу поля системи?

(а) 40 см, б) такої точки не існує)

1.15. Два точкові заряди q_1 і $q_2 = -4q_1$ закріплені на відстані 1,2 м один від одного. На якій відстані від заряду q_1 на лінії розташування зарядів знаходиться точка з нульовим значенням: а) напруженості і б) потенціалу поля системи?

(а) 1,2 м; б) 24 см і 40 см)

1.16. Два точкові заряди по 1 нКл розміщені у двох вершинах правильного трикутника зі стороною 30 см. Визначити величину і напрям напруженості та потенціал електричного поля в третій вершині трикутника, коли заряди:
а) одноіменні, б) різноіменні. $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9\cdot 10^9$ м/Ф.

(а) 173 В/м, 60 В; б) 100 В/м, 0)

1.17. Два додатні й один від'ємний заряди однакової величини розміщені у вершинах правильного трикутника. Знайти напруженість і потенціал електричного поля в центрі трикутника, якщо кожен заряд створює в центрі поле з напруженістю 100 В/м і потенціалом 50 В.

(200 В/м; 50 В)

1.18. Точкові заряди $q_1 = 40$ нКл і $q_2 = -\eta q_1, \eta = 2,$ розміщені перший в початку координат, а другий – у додатньому напрямку осі OX на відстані $l = 3$ м. Визначити за величиною й напрямом напруженість $\vec{E}$ електричного поля системи на лінії розташування зарядів у точках, де потенціал $\varphi = 0$. $k = \left(1/4\pi\varepsilon_0\right) = 9\cdot 10^9$ м/Ф.

$$\left(E_{x1} = -\frac{kq}{l^2}\frac{(\eta-1)^3}{\eta} = -20 \text{ В/м}; \quad E_{x2} = \frac{kq}{l^2}\frac{(\eta+1)^3}{\eta} = 540 \text{ В/м} \right)$$

1.19. Точкові заряди $q_1 = 10$ нКл і $q_2 = \eta q_1, \eta = 4,$ розміщені перший в початку координат, а другий – у додатньому напрямку осі ОХ на відстані $l = 1{,}5$ м. Визначити потенціал φ електричного поля системи в точці, де напруженість $E = 0$. $k = (1/4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

$$\left(\varphi = \frac{kq}{l}\frac{\left(\sqrt{\eta}+1\right)^2}{\sqrt{\eta}} = 270\text{ В}\right)$$

1.20. Три точкові заряди розташовані у вершинах рівностороннього трикутника створюють у його центрі поле з потенціалом φ_0. Якими будуть потенціали у вершинах, якщо всі заряди перенести в центр трикутника?

$$(\varphi_0)$$

1.21. Три точкові заряди по 2 мкКл розташовані у вершинах рівностороннього трикутника із стороною 4 м. Знайти модуль напруженості E та потенціал φ електричного поля в точці, що розташована над центром трикутника на відстані 4 м від його площини. $k = (1/4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

(E = 2,2 кВ/м; φ = 11,7 кВ)

1.22. Вивести формулу потенціалу $\varphi(\vec{r})$ поля точкового диполя з електричним моментом $\vec{p}$ у довільній точці з радіусом-вектором $\vec{r}$ відносно центра диполя.

$$\left(\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right)$$

Поле неперервного розподілу заряду

1.23. По тонкій дротині у вигляді дуги кола радіуса r і кутом розкриття 2ϑ рівномірно розподілений заряд q.

- визначити напруженість E і потенціал φ електричного поля в центрі кривизни дротини.
- записати вирази $E(\vartheta)$ при $\vartheta = 0$ і $\vartheta = \pi$ та пояснити результат; показати графік залежності $E(\vartheta)$.

$$\left(E = \frac{kq}{r^2}\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}, \quad \varphi = \frac{kq}{r}; \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)$$

1.24. Електричне поле створюється в одному випадку тонким рівномірно зарядженим кільцем, а в іншому – півкільцем того ж радіуса і з таким самим зарядом. Знайти, як співвідносяться потенціали $\varphi_1 : \varphi_2$ у центрах кривизни тіл.

(1 : 1)

1.25. Електричне поле створюється зарядом рівномірно розподіленим по одній і тій самій дротині, котра в першому випадку зігнута у формі кільця, а в другому – півкільця. Знайти, як співвідносяться потенціали $\varphi_1 : \varphi_2$ у центрах кривизни тіл при однаковій величині заряду.

(2 : 1)

1.26. По тонкому кільцю радіуса r рівномірно розподілений заряд q. Знайти напруженість електричного поля на осі кільця залежно від відстані до його центра $E(z)$. Проаналізувати цю залежність при $z << r$ та $z >> r$ і показати приблизний вигляд графіка $E(z)$.

$$\left(E(z) = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

1.27. По тонкому кільцю радіуса r розподілений заряд q. Знайти потенціал електричного поля на осі кільця залежно від відстані до його центра $\varphi(z)$. Проаналізувати отриманий вираз $\varphi(z)$ при $z << r$ та $z >> r$ і показати приблизний вигляд графіка $\varphi(z)$.

$$\left(\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}} \right)$$

1.28. Електричне поле створюється диском радіуса R, який рівномірно заряджений із поверхневою густиною заряду σ. Використавши результат задачі 1.26, визначити:

а) напруженість електричного поля на осі диска в залежності від відстані до його центра $E(z)$. Проаналізувати цю залежність при $z << r$ та $z >> r$ і показати приблизний вигляд графіка $E(z)$;

б) напруженість електричного поля нескінченної площини, зарядженої з поверхневою густиною заряду σ.

$$\left(\text{а) } E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/z)^2}} \right); \quad \text{б) } E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \right)$$

1.29. По тонкому кільцю радіуса R із вузьким прорізом ширини h ($h << R$) рівномірно розподілений заряд $q > 0$. Знайти величину та напрям напруженості електричного поля в центрі кільця.

$$\left(E = \frac{qh}{8\pi^2\varepsilon_0 R^3},\ \textit{до прорізу} \right)$$

1.30. Заряд рівномірно розподілений по тонкому стержню довжини a з лінійною густиною λ (Кл/м).

– визначити напруженість електричного поля $E(r)$ на продовженні стержня на відстані $r > 0$ від його ближнього кінця;

– найти наближені вирази $E(r)$ а) на великих $(r \gg a)$ і б) на малих $(r \ll a)$ відстанях r.

$$\left(\begin{array}{l} 1)\ E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r(r+a)},\ q = \lambda a - \textit{заряд стержня}; \\ 2a)\ E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad 2б)\ E(r) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{array} \right)$$

1.31. Тонкий стержень довжини $2a$ рівномірно заряджений з лінійною густиною λ (Кл/м). Знайти вираз напруженості електричного поля $E(r)$ на перпендикулярі до середини стержня в залежності від відстані r до нього.

$$\left(E = \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{a^2 + r^2}} \right)$$

1.32. Використовуючи результат попередньої задачі, визначити напруженість електричного поля нескінченної нитки (тонкого стержня) рівномірно зарядженої з лінійною густиною λ в залежності від відстані r до неї.

$$\left(E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \right)$$

1.33. За результатами попередніх двох задач знайти довжину l центральної частини нескінченної зарядженої нитки, яка на відстані r = 10 см створює η = 99% всієї напруженості поля.

$$\left(l = \frac{2\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} r \approx 1{,}4\ \text{м} \right)$$

Зв'язок між напруженістю та потенціалом

1.34. З означення потенціалу φ випливає, що у випадку електричного поля системи з двох різноіменних точкових зарядів однакової величини в будь-якій рівновіддаленій від них точці φ = 0. Чи означає це, що в таких точках відсутнє електричне поле? Відповідь підкріпити зображенням векторів напруженості поля кожного із зарядів та системи в цілому.

1.35. Визначити вектор напруженості електричного поля, потенціал якого залежить від координат як: а) $\varphi = -\alpha(x^2 - y^2)$; б) $\varphi = -\alpha xy$; в) $\varphi = -\alpha(xy - z^2)$, де α – задана стала.

$$\left(\begin{array}{l} а)\ \vec{E} = 2\alpha\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) \\ б)\ \vec{E} = \alpha\left(y\vec{i} + x\vec{j}\right) \\ в)\ \vec{E} = \alpha\left(y\vec{i} + x\vec{j} - 2z\vec{k}\right) \end{array} \right)$$

1.36. Потенціал електричного поля залежить від координат як $\varphi = \alpha\big/\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$, $\alpha = const$. Визначити вектор напруженості $\vec{E}(\vec{r})$ у довільній точці цього поля в залежності від її радіуса-вектора $\vec{r}$. Як розподілений у просторі та яку величину має заряд, який створює це поле?

$$\left(\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\alpha\vec{r}}{r^3}\right)$$

1.37. Прийнявши потенціал у початку координат $\varphi_0 = 0$, визначити залежність від координат $\varphi(x, y, z)$ потенціалу таких електростатичних полів:

– а) $\vec{E} = a(y\vec{i} + x\vec{j})$;

– б) $\vec{E} = 2axy\vec{i} + a(x^2 - y^2)\vec{j}$, $a = const.$

$$\left(\text{а) } \varphi = -axy; \quad \text{б) } \varphi = ay\left(\frac{y^2}{3} - x^2\right)\right)$$

1.38. Визначити напруженість $E(z)$ електричного поля на осі рівномірно зарядженого зарядом q тонкого кільця радіуса r як функцію відстані z від центра за допомогою виразу $\varphi(z)$ із задачі 1.27.

$$\left(E(z) = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + z^2)^{3/2}}\right)$$

1.39. Визначити потенціал $\varphi(z)$ електричного поля на осі рівномірно зарядженого зарядом q тонкого кільця радіуса r як функцію відстані z від центра за допомогою виразу $E(z)$ із попередньої задачі.

$$\left(\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2 + r^2}}\right)$$

1.40. Заряд рівномірно розподілений по тонкому стержню довжини a з лінійною густиною λ(Кл/м). Використовуючи результат задачі 1.32, визначити потенціал $\varphi(r)$ електричного поля на продовженні стержня на відстані $r > 0$ від його ближнього кінця.

$$\left(\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r \pm a}{r}\right)$$

1.41. Виходячи з формули напруженості електричного поля рівномірно зарядженої з лінійною густиною λ нитки, визначити різницю потенціалів між точками віддаленими від нитки на відстань r_1 і r_2.

$$\left(\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}\right)$$

1.42. Виходячи з виразу потенціалу поля малого електричного диполя

$$\left(\varphi(\vec{r}) = k\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = k\frac{p\cos\vartheta}{r^2}\right),$$

де $\vec{p}$ – електричний момент диполя, $\vec{r}$ – радіус-вектор точки, визначити:

– модуль напруженості $E(r,\vartheta)$ в залежності від відстані r до диполя та кута ϑ між векторами $\vec{p}$ і $\vec{r}$ (рис. 1.1);

– кут α між векторами $\vec{E}$ і $\vec{r}$).

*<u>Вказівка.</u> Знайти проекції E_r на напрям $\vec{r}$ та E_ϑ на дотичну до кола радіуса r **(див. рис. 1.1)**.*

$$\left(\begin{aligned} &E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}, \\ &\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\vartheta \end{aligned}\right)$$

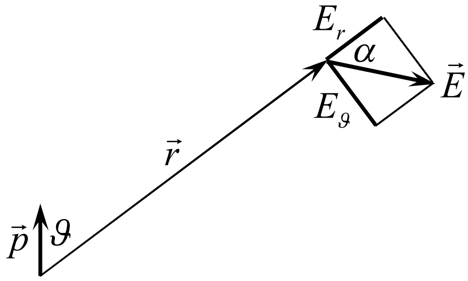


Рис. 1.1

1.43. Для точкового електричного диполя з моментом $\vec{p}$ радіальна E_r і дотична E_ϑ складові вектора напруженості поля $\vec{E}$ (див рис 1.1.) визначаються виразами:

$$E_r = -k\frac{2p\cos\vartheta}{r^3} \text{ і } E_\vartheta = -k\frac{p\sin\vartheta}{r^3}, \text{ де } k = 1/4\pi\varepsilon_0 .$$

Виходячи з цього, визначити функцію потенціалу поля диполя $\varphi(\vec{r})$.

<u>Вказівка</u>. Траєкторію інтегрування вибрати у вигляді дуги кола радіуса r і радіального променя, напрям якого проходить через центр диполя перпендикулярно до осі.

$$\left(\varphi(\vec{r}) = k\frac{p\cos\vartheta}{r^2} = k\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right)$$

Теорема Гаусса

1.44. Незамкнена півсфера радіуса 1,0 м розташована в однорідному електричному полі з напруженістю 318,3 В/м, яке напрямлене від центра основи до полюса півсфери. Знайти потік напруженості крізь поверхню півсфери.

(1000 Вм)

1.45. Незамкнена півсфера радіуса 1,0 м розташована в однорідному електричному полі з напруженістю 318,3 В/м, яке напрямлене паралельно до основи півсфери. Знайти потік напруженості крізь поверхню півсфери.

(0)

1.46. Незамкнена півсфера радіуса 1,0 м розташована в однорідному електричному полі з напруженістю 318,3 В/м, яке напрямлене під кутом 30° до площини основи півсфери. Знайти потік напруженості крізь поверхню півсфери.

(500 Вм)

1.47. Незамкнена не плоска поверхня, що обмежена контуром у формі квадрата зі стороною 1 м, знаходиться в однорідному електричному полі з напруженістю 250 В/м напрямленому під кутом 60° до площини квадрата. Обчислити потік напруженості крізь поверхню.

(216,5 Вм)

1.48. Точковий заряд 10 нКл розташований в центрі куба із ребром 1 м. Знайти потік напруженості електричного поля крізь поверхню куба. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(1130 Вм)

1.49. Точковий заряд розташований над центром квадрата зі стороною a на відстані $a/2$ створює крізь нього потік напруженості поля Ф = 1000 Вм. Знайти напруженість E електричного поля у вершині квадрата.

$$\left(E = \frac{2\Phi}{\pi a^2} = 318 \text{ В/м} \right)$$

1.50. У всіх вершинах куба з ребром a = 20 см розміщені однакові додатні заряди величини q_1 = 10 нКл кожен, а в центрах усіх граней – такі самі від'ємні заряди. Знайти напруженість електричного поля в центрі куба та потік напруженості крізь поверхню сфери радіуса $R = a/\sqrt{2}$ із центром у центрі куба. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(0; – 6,78 кВм)

1.51. Усередині сфери радіуса R = 20 см на відстані $r = R/2$ від центра розміщений точковий заряд. Знайти напруженість електричного поля в центрі сфери, якщо потік поля крізь неї Φ = 62,83 Вм. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(500 В/м)

1.52. Уявімо, що напруженість деякого поля визначається виразом $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{A}{r^4}\vec{r}$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки, A – задана стала. Знайти потік Φ, який таке поле створювало би крізь сферу радіуса r з центром у початку координат. Чи була би чинною для такого поля теорема Гаусса?

($\Phi = 4\pi A/r$; *ні*)

1.53. Потенціал поля в деякій області простору залежить лише від координати x як $\varphi = -ax^3 + b$, де a і b – сталі. Знайти розподіл об'ємного заряду $\rho(x)$.

($\rho = 6\varepsilon_0 ax$)

1.54. Потенціал поля всередині зарядженої кулі залежить лише від відстані r до її центра, як $\varphi = ar^3 + b$, де a і b – сталі. Знайти розподіл об'ємного заряду $\rho(r)$ усередині кулі.

($\rho = -6\varepsilon_0 a$)

1.55. Сферична поверхня радіуса R = 10 см рівномірно заряджена з густиною заряду $\sigma = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2. Знайти:

– залежність напруженості поля від відстані до центра сфери r та величину напруженості при r_1 = 5 см і r_2 =15 см;

– залежність від r потенціалу поля (при $\varphi(\infty) = 0$) та різницю потенціалів між точками r_1 і r_2. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

($E_1 = 0$, $E_2 = 10^3$ В/м; $\varphi_1 - \varphi_2 = 75{,}3$ В).

1.56. Дві провідні концентричні сфери радіусами 10 см і 15 см (сферичний конденсатор) несуть заряди $2\cdot10^{-7}$ Кл і $-2\cdot10^{-7}$ Кл, відповідно. Знайти різницю потенціалів між обкладками конденсатора. $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

(6 кВ)

1.57. На двох провідних концентричних сферичних оболонках розміщені заряди $3\cdot10^{-8}$ Кл і $-2\cdot10^{-8}$ Кл. Радіуси оболонок 10 см і 20 см, відповідно. Знайти різницю потенціалів між точками, одна з яких віддалена на відстань 5 см, а друга – на 25 см від центра сфер. $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

(1,44 кВ).

1.58. Куля радіуса R заряджена з об'ємною густиною заряду ρ. Знайти:
а) залежність модуля напруженості електричного поля $E(r)$ від відстані r до центра кулі;
б) залежність потенціалу поля $\varphi(r)$, прийнявши $\varphi(\infty) = 0$;
в) різницю потенціалів U між центром та поверхнею кулі.

$$\left(\begin{array}{l} a)\; r > R: E = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}, \quad r < R: E = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}; \\ б)\; r > R: \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}, \quad r < R: \varphi = \dfrac{\rho(R^2 - r^2)}{6\varepsilon_0} + \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}; \\ в)\; U = \dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}. \end{array} \right)$$

1.59. Заряд кулі радіуса R розподілений з об'ємною густиною $\rho = \alpha r$, де r – відстань від центра кулі, α – стала. Знайти різницю потенціалів U між центром кулі та її поверхнею.

$$\left(U = \frac{\alpha R^3}{12\varepsilon_0} \right)$$

1.60. Куля радіусом 2 см, яка заряджена з об'ємною густиною заряду $3\cdot10^{-8}$ Кл/м^3, оточена концентричною зарядженою сферою радіуса 4 см.

1.61. Знайти поверхневу густину заряду сфери, якщо назовні сфери електричне поле відсутнє.

($-\,5\cdot10^{-11}$ Кл/м^2).

1.62. Сфера радіуса R з малим круглим отвором радіусом r ($r \ll R$) рівномірно заряджена з густиною заряду $\sigma < 0$. Знайти величину та напрям напруженості електричного поля в центрі сфери.

$$\left(E = \frac{\sigma r^2}{4\varepsilon_0 R^2},\ \textit{від отвору} \right)$$

1.63. Усередині кулі рівномірно зарядженої з об'ємною густиною ρ є сферична порожнина. Центр порожнини зміщений відносно центра кулі на відстань, що визначається вектором $\vec{a}$. Визначити напруженість $\vec{E}$ поля усередині порожнини.

$$\left(\vec{E} = \frac{\rho \vec{a}}{3\varepsilon_0} \right)$$

1.64. Напруженість електричного поля всередині зарядженої кулі $\vec{E} = \alpha r \vec{r}$, де $\vec{r}$ – радіус вектор даної точки поля відносно центра кулі, α – задана стала. Визначити об’ємну густину заряду кулі в залежності від відстані до центра $\rho(r)$.

$$\left(\rho(r) = 4\varepsilon_0 \alpha r \right)$$

1.65. В електричному полі нескінченної зарядженої з лінійною густиною заряду $\lambda = 2 \cdot 10^{-11}$ Кл/м нитки рухається електрон. Знайти швидкість електрона v на відстані r = 0,5 см від нитки, якщо на відстані r_0 = 1,0 см вона дорівнювала 0. $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(v = \sqrt{\frac{e\lambda \ln(r_0 / r)}{\pi \varepsilon_0 m}} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ м/с} \right)$$

1.66. Дві нескінченні ізольовані нитки, рівномірно заряджені з лінійною густиною заряду $2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м і $-2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м, перетинаються під прямим кутом у точці А. У точці В, розташованій у площині ниток і рівновіддаленій від них, знаходиться точковий заряд $2 \cdot 10^{-8}$ Кл. Відстань між точками А і В дорівнює 5 см. Знайти силу, що діє на заряд. $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

($2,9 \cdot 10^{-2}$ Н)

1.67. Нескінченна циліндрична поверхня радіуса R рівномірно заряджена з поверхневою густиною заряду σ. Визначити залежність напруженості електричного поля E від відстані r до осі циліндра.

$$\left(r < R : E = 0, \quad r > R : E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \right)$$

1.68. Дві нескінченні коаксіальні циліндричні поверхні рівномірно заряджені з поверхневими густинами заряду $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$. Радіуси поверхонь R_1 і R_2 ($R_2 > R_1$).Знайти:

а) залежність напруженості поля E від відстані r до осі;

б) різницю потенціалів U між циліндричними поверхнями.

$$\left(a)\ r < R_1 : E = 0,\quad R_1 < r < R_2 : E = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r},\quad r > R_2 : E = 0;\quad б)\ U = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} \right)$$

1.69. Нескінченний циліндр радіуса R = 5 см рівномірно заряджений з об'ємною густиною заряду $\rho = 10^{-8}$ Кл/м^3. Знайти:

а) залежність напруженості електричного поля від відстані до осі циліндра $E(r)$ і її значення $E(R)$ на поверхні циліндра;

б) різницю потенціалів U між віссю циліндра та його поверхнею. $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(a)\ r < R : E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0},\ r > R : E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r},\ E(R) = 50\,\text{В/м};\quad б)\ U = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} = 1{,}25\,\text{В} \right)$$

1.70. Нескінченний циліндр радіуса R заряджений з об'ємною густиною заряду $\rho = \alpha r$, де r – відстань від осі, α – стала. Знайти різницю потенціалів U між віссю та поверхнею циліндра.

$$\left(U = \frac{\alpha R^3}{9\varepsilon_0} \right)$$

1.71. Нескінченна площина заряджена з поверхневою густиною заряду σ розташована перпендикулярно до осі x і перетинає її при $x = 0$. Визначити:

– величину та напрям напруженості електричного поля $\vec{E}$;

– залежність потенціалу від координати $\varphi(x)$ при $x > 0$ та $x < 0$, прийнявши потенціал при $x = 0$ $\varphi(0) = 0$;

– показати графіки залежностей $E_x(x)$ і $\varphi(x)$ для $\sigma > 0$ і $\sigma < 0$.

$$\left(E_x(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{|x|},\quad \varphi(x) = -\frac{\sigma|x|}{2\varepsilon_0} \right)$$

1.72. Дві паралельні нескінченні площини, що рівномірно заряджені з густиною заряду 1,0 нКл/м^2 і −1,0 нКл/м^2, розташовані на відстані 1,0 см одна від одної. Знайти напруженість електричного поля між пластинами E_1 та поза ними E_2, а також різницю потенціалів між пластинами U. $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(E_1 = 113 В/м, E_2 = 0; U = 1,13 В)

1.73. Напруженість електричного поля поза двома паралельними нескінченними рівномірно зарядженими площинами $E_0 = kE$, де E – напруженість між пластинами, а k – задане число. Знайти відношення поверхневих густин заряду на пластинах $\eta = \sigma_1/\sigma_2$. Окремо проаналізувати випадки $k > 1$, $k < 1$ і $k = 0$.

$$\left(\eta = \frac{k+1}{k-1} \right)$$

1.74. Дві взаємно перпендикулярні нескінченні площини рівномірно заряджені з однаковою поверхневою густиною заряду σ. Показати на рисунку лінії поля вектора $\vec{E}$ в кожній з областей, на які площини ділять простір. Знайти модуль напруженості поля.

$$\left(E = \frac{\sigma}{\sqrt{2}\,\varepsilon_0} \right)$$

1.75. Нескінченна пластина товщини $2d$ рівномірно заряджена з об'ємною густиною заряду ρ. Спрямувавши вісь x перпендикулярно до пластини й розмістивши початок координат на половині її товщини, визначити напруженість поля $E_x(x)$ у залежності від координати x та різницю потенціалів U між поверхнями пластини.

$$\left(|x| \le d : E_x(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0},\ |x| \ge d : E_x = \pm\frac{\rho d}{\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|};\quad U = \frac{\rho d^2}{\varepsilon_0} \right)$$

2. Діелектрики і провідники

2.1. Зв’язок між поляризованістю та поляризаційними (зв’язаними) зарядами:

$$P_n = \sigma'; \quad \oint_S \vec{P}\,\mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \rho'\,\mathrm{d}V.$$

2.2. В ізотропному діелектрику:

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}\,.$$

2.3. Вектор електричного зміщення (вектор $\vec{D}$):

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\,;$$

в ізотропному діелектрику:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}\,.$$

2.4. Поле в ізотропному однорідному безмежному або обмеженому еквіпотенціальними поверхнями діелектрику:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon}.$$

2.5. Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$:

$$\oint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V\,.$$

2.6. Умови на межі двох ізотропних діелектриків:

$$D_{1n} = D_{2n},\ \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}; \qquad \varepsilon_2 D_{1\tau} = \varepsilon_1 D_{2\tau},\ E_{1\tau} = E_{2\tau}.$$

2.7. Електрична ємність відокремленого провідника та конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi}; \quad C = \frac{q}{U}.$$

2.8. Еквівалентна ємність паралельного сполучення конденсаторів:

при паралельному сполученні $\quad C = \sum C_i\,;$

при послідовному сполученні $\quad \dfrac{1}{C} = \sum \dfrac{1}{C_i}\,.$

2.9. Енергія взаємодії системи точкових зарядів

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i\,.$$

2.10. Енергія зарядженого конденсатора:

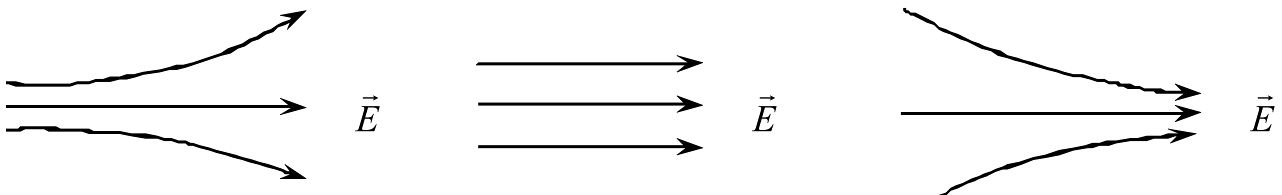
$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}.$$

2.11. Об’ємна густина енергії електричного поля в ізотропному діелектрику:

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{ED}{2}.$$

Електричне поле в діелектриках

2.1. Легеньку незаряджену кульку з діелектрика вносять в електричне поле, показане на рис. 2.1, і вивільняють. Що буде відбуватися з кулькою далі в кожному випадку?



а) б) в)

Рис. 2.1.

2.2. Між двома паралельними площинами зарядженими з однаковою густиною заряду σ і $-\sigma$ знаходиться паралельна плоска пластина діелектрика з проникністю ε. Знайти поляризованість пластини P та густину зв’язаних зарядів σ' на її поверхнях.

$$\left(P = \sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma \right)$$

2.3. Точковий заряд q знаходиться в діелектричному середовищі з проникністю ε. Визначити:

– поляризованість діелектрика $P(r)$ як функцію відстані r від заряду q;

– величину зв’язаного (поляризаційного) заряду q' всередині сфери довільного радіуса r.

$$\left(P = \frac{(\varepsilon - 1) q}{4\pi \varepsilon r^2}; \quad q' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q \right)$$

2.4. Куля радіуса R із діелектрика з проникністю $\varepsilon_1 = 2$, яка рівномірно заряджена по об’єму стороннім зарядом Q, знаходиться в діелектричному середовищі з проникністю $\varepsilon_2 = 3$. Визначити електричне зміщення $D(r)$ і напруженість поля $E(r)$ у всьому просторі як функцію відстані r від центра кулі та зобразити графіки цих залежностей.

$$\left(r < R : D(r) = \frac{Q r}{4\pi R^3},\ E(r) = \frac{Q r}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_1 R^3}; \qquad r \ge R:\ D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2},\ E(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_2 r^2} \right)$$

2.5. Куля радіуса R = 6 см із діелектрика з проникністю ε = 2 рівномірно заряджена з о об'ємною густиною заряду ρ = 17,7 нКл/м^3. Знайти напруженість електричного поля на відстані r = 3 см від поверхні кулі. $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(10\,\text{В/м};\quad 17{,}8\,\text{В/м}\right)$$

2.6. Нескінченний металевий циліндр радіуса R, який заряджений з поверхневою густиною заряду σ, оточений коаксіальним циліндричним шаром діелектрика з радіусами R_1 = 2R і R_2 = 3R та проникністю ε = 2. Для всього простору розрахувати та показати на графіку залежність від відстані r до осі циліндра: а) зміщення $D(r)$; і б) напруженості поля $E(r)$.

$$\left(a)\; r < R : D(r) = 0,\; r \ge R : D(r) = \frac{\sigma R}{r};\qquad \text{б)}\; r < R\text{: } E(r) = 0,\right.$$

$$\left.R \le r \le 2R \text{ і } r \ge 3R\text{: } E(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r},\; 2R \le r \le 3R\text{: } E(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 \varepsilon r}\right)$$

2.7. Електричний заряд розподілений з густиною ρ по об'єму нескінченного циліндра із діелектрика з відомою проникністю ε. Циліндр має поздовжню циліндричну порожнину, положення осі котрої відносно осі циліндра визначається заданим вектором $\vec{a}$. Знайти вектор напруженості електричного поля в порожнині.

$$\left(\vec{E} = \frac{\rho \vec{a}}{2\varepsilon_0 \varepsilon}\right)$$

2.8. Між двома паралельними плоскими металевими пластинами (плоский повітряний конденсатор), приєднаними до джерела, напруженість електричного поля дорівнює E_0. Половину зазору між пластинами заповнюють діелектриком із проникністю ε так, що він прилягає тільки до однієї пластини. Знайти напруженості E_1, E_2 та зміщення D_1, D_2 поля між пластинами в повітрі та в діелектрику, якщо при введенні діелектрика пластини:

а) лишалися приєднаними до джерела напруги;

б) були відімкнені від джерела.

$$\left(a)\; D_1 = D_2 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+1};\; E_1 = \frac{2\varepsilon E_0}{\varepsilon+1},\; E_2 = \frac{2E_0}{\varepsilon+1};\text{б)}\; D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_0;\; E_1 = E_0,\; E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon}\right)$$

2.9. Розв'язати попередню задачу за умови, що діелектрик прилягає до обох пластин.

$$\left(a)\; D_1 = \varepsilon_0 E_0,\; D_2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_0,\; E_1 = E_2 = E_0;\; \text{б)}\; D_1 = \frac{2\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+1},\; D_2 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+1};\; E_1 = E_2 = \frac{2E_0}{\varepsilon+1}\right)$$

2.10. В однорідне електричне поле з напруженістю E_0 = 173,2 В/м у вакуумі вмістили плоску пластину діелектрика з проникністю ε = 3 так, що вектор $\vec{E}_0$ напрямлений під кутом α_0 = 60° до поверхонь пластини. Знайти величину та напрям векторів $\vec{D}$ і $\vec{E}$ у пластині. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(E =100 В/м, D = 2,65 нКл/м^2; *під кутом* $\alpha = 30^\circ$ *до поверхонь пластини*)

Провідники

2.11. Дві закріплені металеві кулі заряджені один раз однойменними, а інший – такими самими, але різнойменними зарядами. Порівняти сили взаємодії між кулями F_1 і F_2 в обох випадках і пояснити результат.

($F_1 < F_2$)

2.12. Напруженість електричного поля біля поверхні великого плоского зарядженого листа жерсті дорівнює 50 В/м. Якою стане напруженість біля поверхні, якщо лист згорнути в циліндр?

(0; 100 В/м)

2.13. Металева куля радіуса 5 см має заряд 1 нКл. Знайти напруженість E і потенціал φ поля кулі на відстані 1 см від поверхні. $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

(E = 2500 В/м, φ = 150 В, або E = 0, φ = 180 В)

2.14. Металеву кульку радіуса R_1 = 1,0 см, яка має заряд 0,12 нКл, з'єднують довгою тонкою дротиною з металевою кулькою радіуса R_2 = 2,0 мм. Знайти поверхневі густини заряду на кульках та напруженості електричного поля біля їх поверхонь після з'єднання. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(σ_1 = 8,0 нКл/м^2, σ_2 = 0,4 мкКл/м^2; E_1 = 9 кВ/м, E_2 = 45 кВ/м)

2.15. Металева кулька радіуса 3,0 мм із зарядом 0,02 нКл розташована всередині незарядженої металевої сферичної оболонки радіуса 10 см так, що не торкається неї. Знайти поверхневу густину заряду та напруженість електричного поля біля поверхні для кульки (σ_1, E_1) та оболонки (σ_2, E_2) після того, як тіла з'єднали дротиною. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(σ_1 = 0, E_1 = 0; σ_2 = 0,16 нКл/м^2, E_2 = 18 В/м *назовні й* E_2 = 0 *всередині*)

2.16. Металеву кульку радіуса R_1 = 5 мм, яка заряджена до потенціалу φ_0 = 90 В, з'єднують довгою тонкою дротиною з незарядженою металевою сферичною оболонкою радіуса R_2 = 4,5 см. Знайти потенціал кульки φ після з'єднання.

$$\left(\varphi = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\varphi_0 = 9\,\text{В}.\right)$$

2.17. Розв'язати попередню задачу за умови, що кулька знаходиться всередині оболонки й спочатку не контактує з нею.

$$\left(\varphi = \frac{R_1}{R_2}\varphi_0 = 10\,\text{В}.\right)$$

2.18. $N = 27$ однакових заряджених крапельок ртуті злилися в одну краплю. Знайти її потенціал φ, якщо потенціал кожної крапельки до злиття дорівнював $\varphi_1 = 10$ В. Краплі вважати кульками.

$$\left(\varphi = N^{2/3}\varphi_1 = 90\,\text{В.}\right)$$

2.19. Заряджена крапля ртуті при падінні на поверхню діелектрика розбилася на $N = 8$ однакових крапельок. Знайти їх потенціал φ, якщо потенціал великої краплі до розбивання дорівнював $\varphi_0 = 10$ В. Краплі вважати кулями, поляризацію діелектрика не враховувати.

$$\left(\varphi = N^{-2/3}\varphi_0 = 2{,}5\,\text{В}\right)$$

Електрична ємність. Конденсатори

2.20. Уважаючи Землю провідною кулею радіуса $R = 6400$ км, знайти її ємність. $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м.

(711 мкФ)

2.21. Нехтуючи крайовим ефектом, вивести формулу ємності плоского конденсатора з площею обкладки S і відстанню між обкладками d, якщо конденсатор заповнений:

1) однорідним діелектриком із проникністю ε;
2) двома шарами діелектрика з проникностями ε_1 і ε_2, товщини котрих відносяться, як 1: 2;
3) діелектриком, проникність якого лінійно збільшується у перпендикулярному до пластин напрямку від значення ε_1 до ε_2.

$$\left(1)\; C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d};\quad 2)\; C = \frac{3\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)d};\quad 3)\; C = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)S}{d\ln(\varepsilon_2 / \varepsilon_1)}\right)$$

2.22. Вивести формулу ємності сферичного конденсатора з радіусами обкладок R_1 та R_2 ($R_2 > R_1$), заповненого однорідним діелектриком із проникністю ε.

$$\left(C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{(R_2 - R_1)}\right)$$

2.23. Вивести формулу ємності сферичного конденсатора з радіусами обкладок R_1 та R_2, заповненого неоднорідним діелектриком із проникністю $\varepsilon = \alpha/r$, де $\alpha = const$ і r – відстань до центра конденсатора.

$$\left(C = \frac{4\pi\varepsilon_0\alpha}{\ln(R_2 / R_1)}\right)$$

2.24. Визначити ємність сферичного конденсатора з радіусами обкладок $R_1 = R$ та $R_2 = 2R$, заповненого неоднорідним діелектриком із проникністю

$\varepsilon = \alpha/r^2$, де r – відстань до центра конденсатора, $\alpha = const$.

$$\left(C = \frac{4\pi\varepsilon_0\alpha}{R_2 - R_1} \right)$$

2.25. Нехтуючи крайовим ефектом, отримати формулу ємності циліндричного конденсатора з радіусами обкладок R_1 і R_2 та довжиною l, що заповнений однорідним діелектриком із проникністю.

$$\left(C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(R_2 / R_1)} \right)$$

2.26. Нехтуючи крайовим ефектом, отримати формулу ємності циліндричного конденсатора з радіусами обкладок R_1 і R_2 та довжиною l, що заповнений неоднорідним діелектриком із проникністю $\varepsilon = \alpha/r$, де $\alpha = const$ і r – відстань до осі конденсатора.

$$\left(C = \frac{2\pi\varepsilon_0\alpha l}{R_2 - R_1} \right)$$

2.27. Циліндричний конденсатор із радіусами обкладок $R_1 = R$ і $R_2 = 2R$, $R = 5$ мм, та довжиною $l = 4$ см, заповнений неоднорідним діелектриком із проникністю $\varepsilon = \alpha/r$, де r – відстань до осі конденсатора, і $\alpha = 36$ см. Визначити ємність конденсатора. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$(C = 2\pi\varepsilon_0\alpha l/R = 160$ пФ$)$

2.28. Визначити ємність циліндричного конденсатора з радіусами обкладок R і $4R$ та довжиною $l = 12$ см заповненого двома шарами діелектрика однакової товщини із проникностями $\varepsilon_1 = 2$ і $\varepsilon_2 = 6$. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln 2} \cdot \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}; \quad C = 10 \text{ пФ} \right)$$

2.29. Плоский конденсатор ємності $C = 10000$ пФ має заряд $Q = 10$ мкКл.

– який вигляд мають лінії електричного поля зарядженого плоского конденсатора?
– чому дорівнює робота, яку треба виконати, щоби перенести кульку із зарядом $q = 100$ мкКл з точки 1 в точку 2, якщо вони розташовані назовні по різні боки від пластин конденсатора.

$$\left(A = \pm\frac{qQ}{C} = \pm 0{,}1 \text{Дж} \right)$$

2.30. На пластини плоского конденсатора ємності $C = 30$ мкФ помістили заряди $q_1 = 2$ мКл і $q_2 = 4\,q_1$, відповідно. Чому дорівнює напруга на конденсаторі?

$$\left(U = \frac{3q_1}{2C} = 100 \text{В} \right)$$

2.31. Сферичний повітряний конденсатор із радіусами обкладок R_1 = 3 см і R_2 = 9 см пробивається при напрузі U_0 = 40 кВ. Визначити електричну міцність повітря за таких умов, тобто напруженість поля E_0, при якій настає електричний пробій діелектрика.

$$\left(E_0 = \frac{R_2 U_0}{R_1(R_2 - R_1)} = 20\,\text{кВ/см} \right)$$

2.32. Радіус зовнішньої обкладки повітряного сферичного конденсатора R = 8 см, а радіус внутрішньої r підібрано так, що пробивна напруга конденсатора U_0 є максимально можливою. Знайти величину U_0, якщо електрична міцність повітря (напруженість поля при якій настає електричний пробій) E_0 = 25 кВ/см?

$$\left(U_0 = \frac{E_0 R}{4} = 50\,\text{кВ} \right)$$

2.33. Між обкладками плоского повітряного конденсатора ємності C_0 паралельно до них розмістили металеву пластину, товщина котрої в n разів менша за відстань між обкладками. Якою стала ємність конденсатора C? Чи залежить вона від положення пластини?

$$\left(C = \frac{n}{n-1} C_0 \right)$$

2.34. Між обкладками плоского повітряного конденсатора ємності C_0 = 60 пФ паралельно до них розмістили пластину діелектрика з проникністю ε = 4, товщина котрої складає третину відстані між обкладками. Якою стала ємність конденсатора C? Чи залежить вона від положення пластини?

$$\left(C = \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon} C_0 = 80\,\text{пФ} \right)$$

З'єднання конденсаторів

2.35. Два паралельно з'єднані однакові плоскі повітряні конденсатори мають загальну ємність C_0. Якою стане ємність з'єднання C, якщо в одному конденсаторі відстань між пластинами збільшити в n разів, а в іншому – зменшити в n разів?

$$\left(C = \frac{n^2+1}{2n} C_0 \right)$$

2.36. Розв'язати попередню задачу для випадку послідовного з'єднання конденсаторів.

$$\left(C = \frac{2n}{n^2+1} C_0 \right)$$

2.37. Ємність послідовного з’єднання двох конденсаторів дорівнює 15 мкФ, а паралельного – 80 мкФ. Знайти ємність кожного конденсатора.

(20 мкФ і 60 мкФ)

2.38. Скільки всього різних ємностей можна отримати, маючи в своєму розпорядженні три однакових конденсатори з ємністю 30 мкФ кожен? Показати схеми з’єднань обчислити всі ємності.

(7 *різних ємностей*)

2.39. Простір між обкладками повітряного конденсатора ємності C_0 заповнили діелектриком з проникністю ε. Знайти, якої ємності конденсатор треба приєднати до нього, щоб ємність системи була рівною C_0.

$$\left(C = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} C_0 \right)$$

2.40. Горизонтальний повітряний плоский конденсатор наполовину занурюють у гас ($\varepsilon = 2$), відтак його ємність стає рівною C. На скільки треба занурити в гас цей конденсатор, поставлений вертикально, щоб його ємність теж становила C?

(*на третину*)

2.41. Якщо до конденсатора ємності C послідовно приєднати конденсатор невідомої ємності C_x, то ємність з’єднання буде $C_0 = C/n$. Знайти величину C_x.

$$\left(C_x = \frac{C}{n - 1} \right)$$

2.42. До послідовного ланцюжка із двох конденсаторів із ємністю $C = 30$ мкФ і невідомою ємністю C_x приєднали паралельно конденсатор ємністю C. Знайти величину C_x, якщо ємність усього з’єднання $C_0 = 50$ мкФ.

(60 мкФ)

2.43. До ланцюжка із двох паралельно сполучених конденсаторів із ємністю $C = 40$ мкФ і невідомою ємністю C_x приєднали послідовно конденсатор ємності C. Знайти величину C_x, якщо ємність усього з’єднання $C_0 = 24$ мкФ.

(20 мкФ)

2.44. До конденсатора ємності $C = 25$ мкФ зарядженого до напруги $U = 100$ В приєднали невідомий незаряджений конденсатор. Відтак напруга впала до величини $U_1 = 20$ В. Знайти ємність C_x невідомого конденсатора.

$$\left(C_x = \frac{U - U_1}{U_1} C = 100\ \text{мкФ} \right)$$

2.45. Два з’єднані між собою конденсатори ємності $C_1 = 20$ мкФ і $C_2 = 30$ мкФ підключили до джерела з напругою $U = 150$ В. Знайти напругу та заряд кожного конденсатора, якщо вони з'єднані: а) паралельно і б) послідовно.

$$\begin{pmatrix} \text{а)}\, U_1 = U_2 = 150\,\text{В}, \quad q_1 = 3\cdot 10^{-3}\,\text{Кл}, \quad q_2 = 4{,}5\cdot 10^{-3}\,\text{Кл}; \\ \text{б)}\, U_1 = 90\,\text{В}, \quad U_2 = 60\,\text{В}, \quad q_1 = q_2 = 1{,}8\cdot 10^{-3}\,\text{Кл}. \end{pmatrix}$$

2.46. Два повітряні конденсатори C_1 = 100 пФ і C_2 = 200 пФ з'єднали послідовно й підключили до джерела з напругою U = 300 В. Потім другий конденсатор заповнили діелектриком із проникністю ε = 2. Знайти заряд і напругу на кожному конденсаторі: а) до і б) після введення діелектрика.

$$\begin{pmatrix} \text{а)}\, q_1 = q_2 = 20\,\text{нКл}, \quad U_1 = 200\,\text{В}, \quad U_2 = 100\,\text{В}; \\ \text{б)}\, q_1 = q_2 = 24\,\text{нКл}, \quad U_1 = 240\,\text{В}, \quad U_2 = 60\,\text{В}. \end{pmatrix}$$

Енергія електричного поля

2.47. Є довільна система закріплених точкових зарядів. Що буде відбуватися з електростатичною енергією системи, якщо заряди вивільнити? Чому?

2.48. На деякій відстані від закріпленого заряду розташований заряд протилежного знаку, який може рухатись. Яку роботу треба виконати, аби збільшити відстань між зарядами в чотири рази, коли для її збільшення вдвічі довелося виконати роботу 20 Дж.

(30 Дж)

2.49. Три точкові заряди однакової величини q розташовані у вершинах правильного трикутника із стороною a. Яку роботу A треба виконати, щоби розмістити один із зарядів посередині між двома іншими.

$$\left(A = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a} \right)$$

2.50. Два додатні й один від'ємний заряди однакової величини q розташовані у вершинах правильного трикутника із стороною a. Яку роботу A треба виконати, аби від'ємний заряд розмістити посередині між додатніми?

$$\left(A = -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a} \right)$$

2.51. Електростатична енергія системи з трьох однакових точкових зарядів, які розміщені на одній прямій на відстані a один від одного, дорівнює W = 0,5 Дж. Яку роботу треба виконати, щоб розмістити заряди у вершинах правильного трикутника зі стороною a?

(0,1 Дж)

2.52. Електростатична енергія системи, що складається із закріплених у двох вершинах правильного трикутника додатніх зарядів однакової величини і такого самого від'ємного заряду посередині між ними, дорівнює W = – 1,5 Дж. Яку роботу треба виконати, щоби перемістити від'ємнмй заряд у третю вершину трикутника? (1 Дж)

2.53. Електростатична енергія системи з двох додатніх і одного від'ємного точкових зарядів однакової величини, які розміщені на одній прямій на відстані *a* один від одного, дорівнює $W = -1{,}5$ Дж. Яку роботу треба виконати, щоб розмістити заряди у вершинах правильного трикутника зі стороною *a*?

(0,5 Дж)

2.54. Довести, що енергію поля, створюваного зарядженою металевою кулею у всьому просторі, можна визначити за формулою $W = q^2/2C$, де q – заряд, а C – ємність кулі.

2.55. Куля радіуса R = 10 см із діелектрика з проникністю ε = 4 однорідно заряджена з об'ємною густиною заряду ρ = 1,0 мКл/м^3. Знайти енергію W електричного поля всередині кулі. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(W = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{45\varepsilon_0\varepsilon} \approx 39\,\text{мДж} \right)$$

2.56. Куля із діелектрика з проникністю ε = 4 однорідно заряджена по об'єму. Знайти, яку частку η (%) складає енергія електричного поля в кулі по відношенню до енергії поля в навколишньому просторі.

$$\left(\eta = \frac{1}{5\varepsilon} = 5\% \right)$$

2.57. Металева куля радіуса R = 2 см, яка має заряд q = 6 мкКл, розташована в центрі діелектричного кульового шару з радіусами $R_1 = 2R$ і $R_2 = 3R$ і проникністю ε = 3. Знайти енергію електричного поля в діелектрику W. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(W = \frac{q^2}{48\pi\varepsilon_0\varepsilon R} = 0{,}9\,\text{Дж} \right)$$

2.58. Металева заряджена куля радіуса R оточена концентричним шаром діелектрика з радіусами $R_1 = 2R$ і $R_2 = 3R$ і проникністю ε = 2. Знайти енергію електричного поля кулі в повітрі W_0, якщо енергія поля в діелектрику W = 1 Дж.

(10 Дж)

2.59. Конденсатор заряджають від джерела напруги. Знайти ККД заряджання η, тобто відношення енергії, отриманої конденсатором при заряджанні до напруги джерела, до енергії, що при цьому витрачає джерело.

(η = 50%)

2.60. Конденсатор заряджають від джерела напруги U_0. Яку частку η затраченої джерелом енергії отримує конденсатор за час заряджання до напруги $U = 0{,}5U_0$?

(η = 25%)

2.61. До конденсатора C_1 = 25 мкФ, який заряджений до напруги U_0 = 100 В, приєднали незаряджений конденсатор C_2 = 100 мкФ. Знайти, яку енергію W_2

при цьому отримав конденсатор C_2, та яку енергію W втратив конденсатор C. Відповідь пояснити.

(W_2 = 20 мДж; W = 120 мДж)

2.62. Знайти відношення кінцевої та початкової енергії $W_2 : W_1$ та кінцевої і початкової об'ємної густини енергії $w_2 : w_1$ поля зарядженого плоского повітряного конденсатора при збільшенні відстані між пластинами в 2 рази, коли конденсатор: а) був попередньо відключений від джерела напруги і б) лишався приєднаним до джерела. Відповіді пояснити.

$$\left(\text{а) } W_2 : W_1 = 2{:}1,\ w_2 : w_1 = 1{:}1; \qquad \text{б) } W_2 : W_1 = 1:2,\ w_2 : w_1 = 1:4\right)$$

2.63. У зазор між обкладками зарядженого плоского повітряного конденсатора вміщують пластину діелектрика з проникністю ε = 4 і товщиною, рівною відстані між обкладками. Знайти відношення кінцевої та початкової енергій W_2 / W_1 та об'ємних густин енергії w_2 / w_1 електричного поля в конденсаторі. Розглянути випадки:

а) конденсатор був попередньо відімкнений від джерела;

б) конденсатор лишався приєднаним до джерела.

Пояснити отримані відповіді.

$$\left(\text{а) } W_2 : W_1 = w_2 : w_1 = 1{:}4;\ \text{б) } W_2 : W_1 = w_2 : w_{1:} = 4:1\right)$$

2.64. У плоскому повітряному конденсаторі ємності C = 20 мкФ, зарядженому до напруги U = 100 В, відстань між пластинами збільшують удвічі. Знайти роботу A, яку при цьому виконують, а також зміну енергії конденсатора ΔW. Відповіді пояснити. Розглянути випадки:

а) конденсатор був попередньо відімкнений від джерела;

б) конденсатор лишався приєднаним до джерела.

$$\left(\begin{array}{l} \text{а) } A = \Delta W = \dfrac{CU^2}{2} = 100\,\text{мДж}; \\ \text{б) } A = \dfrac{CU^2}{4} = 50\,\text{мДж}, \quad \Delta W = -\dfrac{CU^2}{4} = -50\,\text{мДж} \end{array}\right)$$

2.65. Обкладки зарядженого ідеального плоского конденсатора щільно прилягають до пластини однорідного ізотропного діелектрика. Знайти тиск P, який створюють обкладки на діелектрик при об'ємній густині енергії електричного поля в конденсаторі w. $(P = w)$

2.66. Обкладки ідеального плоского конденсатора щільно прилягають до пластини діелектрика з проникністю ε = 6 і товщиною d = 1 мм. Який тиск будуть створювати обкладки на діелектрик при напрузі на конденсаторі U = 1 кВ? $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(P = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 U^2}{2d^2} \approx 25{,}6\,\text{Па}\right)$$

3. Електричний струм

3.1. Густина струму $\vec{j}$ в провіднику з одним типом носіїв та її зв'язок із величиною струму I:

$$\vec{j} = en\vec{v}; \qquad I = \int_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{s}\,.$$

3.2. Закон Ома в локальній (диференціальній) формі:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{стор}) = \frac{\vec{E} + \vec{E}_{стор}}{\rho}\,.$$

3.3. Електрорушійна сила (ЕРС):

$$\mathscr{E} = \int \vec{E}_{стор}\mathrm{d}\vec{l}\,.$$

3.4. Спад напруги на довільній ділянці кола:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}\,.$$

3.5. Закон Ома:

узагальнений $$I = \frac{U}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}}{R};$$

для однорідної ділянки $$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R};$$

для замкненого контуру $$I = \frac{\mathscr{E}}{R_0} = \frac{\mathscr{E}}{R + r}\,.$$

3.6. Електричний опір:

однорідного провідника сталого перерізу $R = \rho\dfrac{l}{s}$;

провідника змінного перерізу, в якому ρ змінюється по довжині $R = \int \rho\dfrac{\mathrm{d}l}{s}$;

провідника змінного перерізу, в якому ρ змінюється по перерізу $\dfrac{1}{R} = \int \dfrac{\mathrm{d}s}{\rho l}$.

3.7. Еквівалентний опір *N* резисторів:

при послідовному сполученні $$R_{пос} = \sum_{i=1}^{N} R_i;$$

при паралельному сполученні $$\frac{1}{R_{пар}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}\,.$$

3.8. Правила Кірхґофа для розгалужених кіл:

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0;$$

$$\sum_i \mathscr{E}_i = \sum_i I_i R_i\,.$$

3.9. Заряджання і розряджання конденсатора ємності *C* через опір *R*:

напруга $U = U_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad U = U_0 e^{-t/\tau}$;

струм $I = I_0 e^{-t/\tau}, \qquad \tau = RC$.

3.10. Повна P та питома w потужність струму на довільній ділянці кола:

$$P = \frac{\delta A}{\mathrm{d}t} = UI,\ U - \textit{спад напруги}; \qquad w = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = \vec{j}\vec{E}.$$

3.11. Повна P_q та питома теплова w_q потужність струму (закон Джоуля):

$$P_q = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = I^2 R; \qquad w_q = \frac{\mathrm{d}P_q}{\mathrm{d}V} = j^2 \rho.$$

Електричний опір

3.1. Дротину круглого перерізу з пластичного металу протягли крізь калібрований круглий отвір так, що її довжина збільшилась удвічі, і відтак отримали провідник з опором *R*. Яким був початковий опір R_0 дротини?

$$\left(R_0 = \frac{R}{4}\right)$$

3.2. Моток ізольованого мідного дроту має масу $m = 40$ г і опір $R = 8{,}9$ Ом. Чому дорівнюють довжина l та площа S перерізу дроту? Питомий опір міді $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, густина $d = 8{,}9$ г/см^3.

(50 м, 0,09 мм^2)

3.3. Вивести формули (3.7) опору послідовного та паралельного з'єднання провідників (резисторів).

3.4. Як і в скільки разів зміниться опір дротини, якщо її скласти навпіл і з'єднати кінцями?

(*зменшиться в* 4 *рази*)

3.5. Довгу дротину опором R_0 розрізали на *n* однакових кусків і з'єднали їх кінці так, що утворився багатожильний провідник. Знайти опір утвореного провідника *R*.

$$\left(R = \frac{R_0}{n^2}\right)$$

3.6. Багатожильний провідник, який складається з *n* окремих дротин (жил) і має опір R_0, розібрали на окремі жили та з'єднали їх так, що утворилася одна довга дротина. Знайти її опір *R*.

($R = n^2 R_0$)

3.7. Опір послідовного з'єднання двох резисторів R_1 = 50 Ом, а паралельного R_2 = 8 Ом. Знайти опір кожного резистора.

(10 Ом і 40 Ом)

3.8. Коли до резистора опором 10 Ом паралельно приєднали невідомий резистор, то опір з'єднання виявився рівним 2 Ом. Чому дорівнює опір невідомого резистора?

(2,5 Ом)

3.9. Опір паралельного з'єднання двох резисторів $R_0 = 2R/3$, де R – опір одного з них. Чому дорівнює опір іншого резистора?

($2R$)

3.10. Три резистори R_1 = 2,0 Ом, R_2 = 4,0 Ом і R_3 = 6,0 Ом з'єднали так, що загальний опір R_0 дорівнює: а) 4,4 Ом; б) 3,0 Ом. Показати схеми з'єднання.

3.11. Студент має тільки два резистори, але використовуючи їх окремо, або з'єднуючи між собою, може одержати опори 3 Ом, 4 Ом, 12 Ом та 16 Ом. Які опори мають ці резистори?

(4 Ом, 12 Ом)

3.12. Скільки всього різних опорів можна отримати, маючи в своєму розпорядженні три резистори із опором 300 Ом кожен? Показати схеми з'єднань і обчислити всі опори.

(7 *різних опорів*)

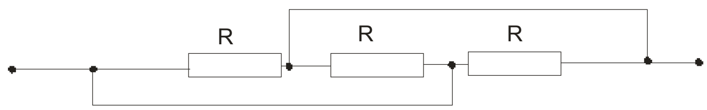


Рис. 3.1

3.13. Чому дорівнює еквівалентний опір R_0 ланцюжка зображеного на рис. 3.1?

$$\left(R_0 = \frac{R}{3}\right)$$

3.14. П'ять однакових резисторів опором 10 Ом кожен з'єднані в «міст», як показано на рис. 3.2. Знайти опір з'єднання між т. т. 1 і 2.

(10 Ом)

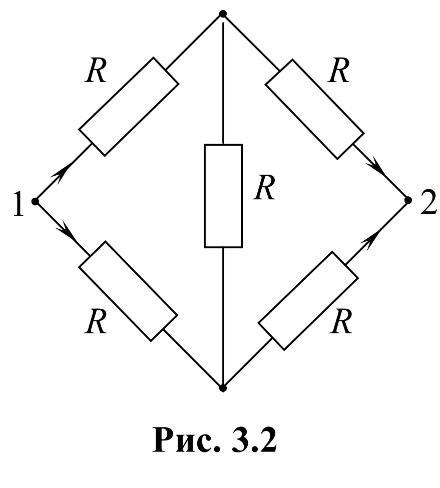


Рис. 3.2

3.15. Простір між двома концентричними металевими сферами з радіусами a та $b > a$ заповнений однорідним ізотропним середовищем із питомим опором ρ. Знайти опір R цього середовища.

$$\left(R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right)$$

3.16. Простір між двома тонкими коаксіальними металевими циліндрами з радіусами a та $b > a$ і довжиною l заповнений однорідним ізотропним середовищем із питомим опором ρ. Знайти опір R цього середовища.

$$\left(R = \frac{\rho}{2\pi l}\ln\frac{b}{a}\right)$$

3.17. Визначити опір провідника з діаметром d і довжиною l, якщо його питомий опір:

а) змінюється вздовж провідника за лінійним законом від $\rho_1 = \rho_0$ на одному кінці провідника до $\rho_2 = 3\rho_0$ на іншому, де величина ρ_0 відома;

б) залежить тільки від відстані r до осі провідника за законом $\rho = \alpha r$, α – задана стала.

$$\left(а)\,\frac{8\rho_0 l}{\pi d^2};\quad б)\,\frac{\alpha l}{\pi d}\right)$$

3.18. Плоский конденсатор ємністю C = 0,1 мкФ заповнено діелектриком із проникністю ε = 2 і питомим опором $\rho = 10^{10}$ Ом·м. Чому дорівнює опір R конденсатора? $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(R = \frac{\varepsilon_0\varepsilon\rho}{C} = 1{,}77\ \text{ГОм}\right)$$

Сила і густина струму

3.19. Пучок електронів, що має поперечний переріз 5 мм^2, налітає по нормалі на заземлену металеву пластину без відбивання. Швидкість електронів у пучку 10^5 м/с, їх концентрація $2\cdot 10^{22}$ м$^{-3}$. Знайти силу струму у шині, якою заземлено пластину. $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл.

(1600 А)

3.20. Густина струму в циліндричному стержні радіуса R = 10 мм залежить від відстані r до осі стержня, як $j = 20r$ (усі величини в основних одиницях СІ). Визначити силу струму у стержні.

(42 мкА)

3.21. Оцінити дрейфову швидкість (швидкість упорядкованого руху) електронів у мідному провіднику перерізом 1 мм^2 при силі струму 100 А, прийнявши концентрацію вільних електронів 10^{23} см$^{-3}$. Зважаючи на отриманий результат, пояснити, чому лампи в кімнаті загоряються практично миттєво після вмикання, хоча вони розташовані далеко від джерела напруги. $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл.

(6,25 мм/с)

3.22. Дві паралельні вертикальні квадратні пластини зі стороною a = 300 мм закріплені на відстані d = 2 мм одна від одної та підключені до джерела постійної напруги U = 250 В. Який струм I потече через джерело, коли пластини почнуть занурювати у дистильовану воду зі сталою швидкістю v = 5,0 мм/с? Воду вважати ідеальним діелектриком із проникністю ε = 81. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(I = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)avU}{d} \approx 0{,}13\,\text{мкА} \right)$$

3.23. Знайти напруженість електричного поля у мідній дротині з діаметром 1,5 мм при силі струму 10 А. Питомий опір міді $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

(96,2 мВ/м)

3.24. Електричний струм тече по двох провідниках довжини l_1 і l_2 та діаметра d_1 і d_2, що виготовлені з одного металу. Визначити відношення напруженостей електричного поля в провідниках E_1/E_2, якщо вони з'єднані: а) послідовно; б) паралельно.

$$\left(a)\ \frac{E_1}{E_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}; \quad б)\ \frac{E_1}{E_2} = \frac{l_2}{l_1} \right)$$

3.25. Електричний струм тече по з'єднаних мідному та алюмінієвому провідниках однакового перерізу й маси. Знайти відношення напруженостей електричного поля E_1/E_2 та напруг U_1/U_2 у провідниках, якщо вони з'єднані: а) послідовно; б) паралельно. Густини міді та алюмінію, відповідно, 8,9 г/см^3 і 2,7 г/см^3, питомі опори $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м і $2{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

$$\left(a)\ \frac{E_1}{E_2} = 0{,}61,\ \frac{U_1}{U_2} = 0{,}18; \quad б)\ \frac{E_1}{E_2} = 3{,}3,\ \frac{U_1}{U_2} = 1 \right)$$

Закон Ома

3.26. Максимальний струм, який можна виміряти амперметром із власним опором R_0, дорівнює I_0. Що треба зробити, аби цим амперметром можна було вимірювати струми до nI_0? Показати електричну схему і зробити розрахунок.

3.27. Що треба зробити, щоби мілівольтметром, який має власний опір R_0 і розрахований на вимірювання напруг $U \le U_0$, можна було вимірювати напруги $U \le nU_0$? Показати електричну схему і зробити розрахунок.

3.28. Міліамперметр із власним опором 0,9 Ом розрахований на вимірювання струмів до 100 мА. Які струми можна буде вимірювати цим приладом, якщо приєднати до його клем резистор опором 100 мОм?

(≤ 1,0 А)

3.29. Міліамперметр із власним опором 1 Ом розрахований на вимірювання струмів до 100 мА. Що треба зробити, щоб цим приладом можна було вимірювати напруги до 100 В? Зробити розрахунок.

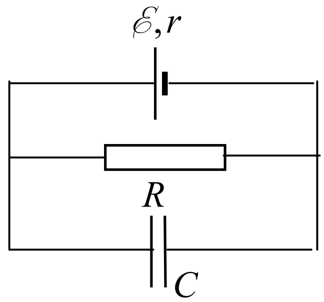


Рис. 3.3

3.30. Якою має бути ЕРС джерела у схемі на рис. 3.3, аби напруженість електричного поля у плоскому конденсаторі становила 5,4 кВ/м? Внутрішній опір джерела 0,5 Ом, опір резистора 4,5 Ом, відстань між пластинами конденсатора 1,0 м.

(6 В)

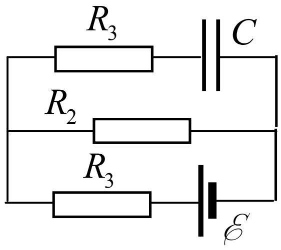


Рис. 3.4

3.31. Чому дорівнює заряд на конденсаторі у схемі на рис. 3.4?

$$\left(q = \frac{C\mathscr{E}R_2}{(R_1 + R_2)} \right)$$

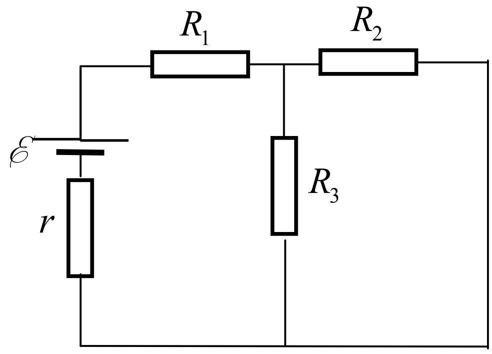


Рис. 3.5

3.32. У схемі рис. 3.5 $\mathscr{E} = 6{,}0$ В, $r = 0{,}8$ Ом, $R_1 = 1{,}0$ Ом, $R_2 = 2{,}0$ Ом, $R_3 = 3{,}0$ Ом. Знайти силу струму в кожному резисторі та напругу на полюсах джерела

$$\left(I_1 = 2{,}0 \text{ А}, I_2 = 1{,}2 \text{ А}, I_3 = 0{,}8 \text{ А}; \quad U = 4{,}4 \text{ В} \right)$$

3.33. Напруга на резисторі опором 5,0 Ом, який підключений до клем джерела, складає 80% від ЕРС джерела. Знайти внутрішній опір джерела.

(1,25 Ом)

3.34. Якщо до джерела з ЕРС 36 В приєднати резистор 17 Ом, то струм у колі дорівнює 2 А. Знайти струм короткого замикання джерела.

(36 А)

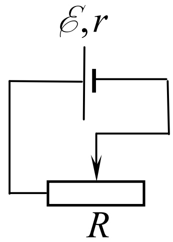


Рис. 3.6

3.35. При повністю уведеному реостаті, що підключений до джерела з ЕРС 12 В (рис. 3.6), струм у колі дорівнює 100 мА. Знайти опір реостата та внутрішній опір джерела, якщо при виведенні реостата струм через джерело збільшується в 10 разів.

(108 Ом, 12 Ом)

3.36. Коло складається з джерела та підключеного до нього резистора. При опорі резистора R_1 струм у колі дорівнює I_1, а при опорі R_2 струм дорівнює I_2. Визначити ЕРС $\mathscr{E}$ та внутрішній опір r джерела.

$$\left(\mathscr{E} = \frac{I_1 I_2 (R_1 - R_2)}{I_2 - I_1}, \quad r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1} \right)$$

3.37. «Чорний ящик» містить невідомі джерела струму та резистори, якось з'єднані між собою. Коли до виводів «ящика» підключили опір R_1 = 10 Ом, то по ньому пішов струм 1,0 А, а коли R_1 замінили на опір R_2 = 13 Ом, струм став рівним 0,8 А. Який опір R_3 треба поставити замість R_2, щоб струм дорівнював 0,5 А?

(22 Ом)

3.38. Два джерела з ЕРС $\mathscr{E}_1 = 4{,}5\,\text{В}$, $\mathscr{E}_2 = 1{,}5\,\text{В}$ і внутрішніми опорами $r_1 = 0{,}9$ Ом і $r_2 = 0{,}3$ Ом з'єднані однойменними полюсами. Який струм протікає по джерелах?

(2,5 А)

3.39. Знайти різницю потенціалів між точками *a-b*, *b-c* і *c-a* у схемі на рис. 3.7 при силі струму 1 А, якщо $\mathscr{E}$ = 5 В, R_1 = 3,7 Ом, R_2 = 5,6 Ом. Внутрішнім опором джерела знехтувати. Розглянути випадки, коли струм йде в напрямку: а) $a \to$ c і б) c $\to$ a.

(а): U_{ab} = 3,7 В, U_{bc} = 0,6 В, U_{ca} = – 4,3 В;
б): U_{ab} = – 3,7 В, U_{bc} = – 10,6 В, U_{ca} = 14,3 В)

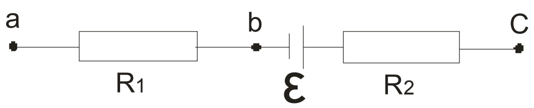


Рис. 3.7

3.40. Знайти різницю потенціалів між точками *a* і *b* у схемі на рис. 3.8. $\mathscr{E}_1$ = 20 В, $\mathscr{E}_2$ = 5,0 В, $\mathscr{E}_3$ = 2,0 В, R_1 = 1,0 Ом, R_2 = 2 Ом, R_3 = 3 Ом.
(U_{ab} = – 11,5 В.)

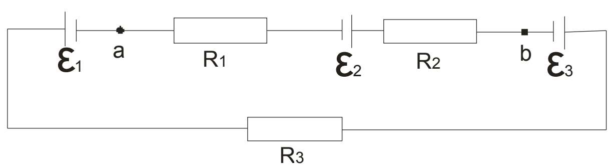


Рис. 3.8

Розгалужені кола

3.41. Визначити силу струму в гілці *ab* показаної на рис. 3.9 частини розгалуженого кола. (1,7 А)

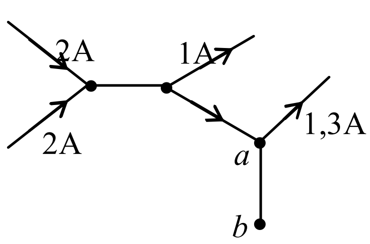


Рис. 3.9

3.42. Три акумулятори з ЕРС $\mathscr{E}_1 = 1{,}5$ В, $\mathscr{E}_2 = 4{,}5$ В, $\mathscr{E}_3 = 9{,}0$ В і внутрішніми опорами $r_1 = 1{,}0$ Ом, $r_2 = 1{,}5$ Ом, $r_3 = 3{,}0$ Ом паралельно з'єднані в батарею. Вивести формули і обчислити внутрішній опір r_0 та ЕРС $\mathscr{E}_0$ цієї батареї.

$$\left(\frac{1}{r_0} = \sum \frac{1}{r_i} = 0{,}5\ \text{Ом}; \quad \mathscr{E}_0 = r_0 \sum \frac{\mathscr{E}_i}{r_i} = 7{,}5\,\text{В} \right)$$

3.43. Три джерела з ЕРС $\mathcal{E}_1 = 8\,\text{В}$, $\mathcal{E}_2 = 3\,\text{В}$ і $\mathcal{E}_3 = 4\,\text{В}$ та однаковими внутрішніми опорами по $r = 2\,\text{Ом}$ з'єднані однойменними полюсами. Знайти силу струму в кожному джерелі.

(1,5 А, 1,0 А. 0,5 А)

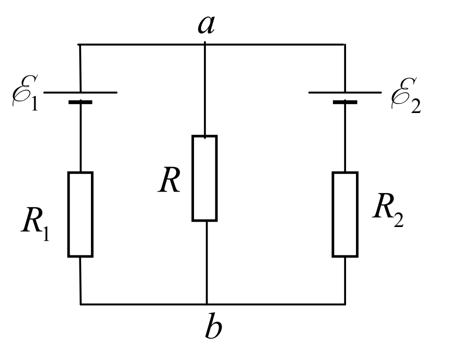


Рис. 3.10

3.44. Знайти різницю потенціалів між точками *a–b* схеми рис. 3.10 і струм у резисторі *R*, якщо $\mathcal{E}_1$ = 1,5 В, $\mathcal{E}$ = 2 В, R_1 = 0,5 Ом, R_2 = 0,3 Ом, R= 2 Ом.

(U_{ab} = 1,66 В; I = 0,83 А.)

3.45. У схемі рис. 3.10 полярність одного з джерел змінили на протилежну. При якому відношенні ЕРС $\mathcal{E}_1 / \mathcal{E}_2$ струм у резисторі *R* буде відсутнім, якщо $R_1 = 6{,}0$ Ом і $R_2 = 3{,}0$ Ом? (2)

3.46. Параметри кола, схема якого зображена на рис. 3.11, мають значення: $\mathcal{E}_1 = 2\,\text{В}$, $\mathcal{E}_2 = 4\,\text{В}$, $\mathcal{E}_3 = 8\,\text{В}$; $R_1 = 2\,\text{Ом}$, $R_2 = 1\,\text{Ом}$, $R_3 = 4\,\text{Ом}$.Знайти струми у всіх гілках кола.

(I_1 = 2,43 А, I_2 = 1,14 А, I_3 = 1,29 А)

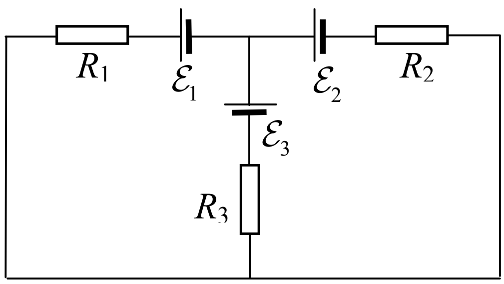


Рис 3.11

3.47. У схемі рис. 3.12 R = 0,8 Ом, R_1 = 0,6 Ом, R_2 = 2,0 Ом, R_3 = 3,0 Ом; $\mathcal{E}_1 = 6\,\text{В}$, $\mathcal{E}_2 = 20\,\text{В}$, $\mathcal{E}_3 = 30\,\text{В}$. Розрахувати величини та напрямки (показати на схемі) струмів у всіх резисторах.

$$\begin{pmatrix} I = 10{,}00\,\text{А}, & I_1 = 3{,}33\,\text{А}, \\ I_2 = 6{,}00\,\text{А}, & I_3 = 7{,}33\,\text{А} \end{pmatrix}$$

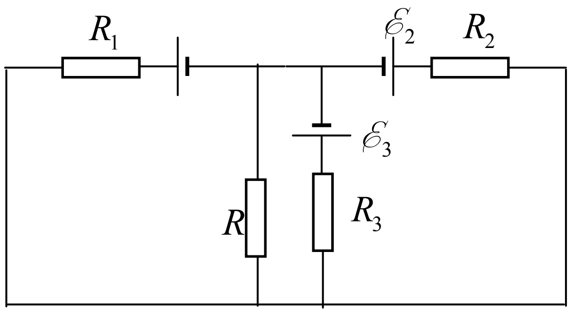


Рис. 3.12

3.48. Чотири різні опори $R_1 - R_4$ з'єднані у «квадрат», в одну діагональ якого ввімкнений амперметр А, а на іншу подано напругу U, як показано на рис. 3.13. Знайти, при якому співвідношенні між величинами опорів амперметр не буде показувати струму.

$\left(R_1 R_3 = R_2 R_4\right)$

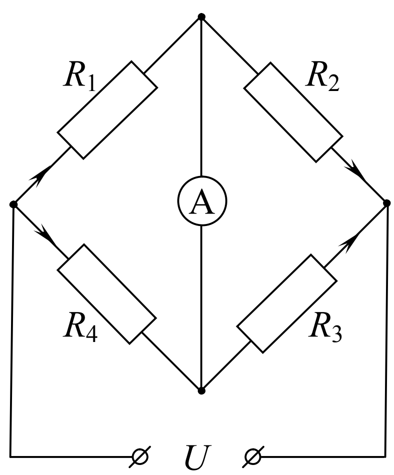


Рис. 3.13

Квазістаціонарні струми

3.49. Сила струму у провіднику протягом перших 3 с рівномірно зростає від 0 до 0,5 А, а за наступні 5 с – ще на 0,5 А. Знайти середню силу струму у провіднику за весь час.

(0,56 А)

3.50. Струм у провіднику спадає від I_0 до 0 за законом $I(t) = I_0(1 - (t/\tau)^2)$, де τ – стала. Визначити середнє значення сили струму $\langle I \rangle$ у провіднику.

$$\left(\langle I \rangle = \frac{2I_0}{3} \right)$$

3.51. Струм у провіднику змінюється з часом за законом $I(t) = I_0 \left| \sin \omega t \right|$, де I_0 та ω – задані. Визначити середнє значення сили струму $\langle I \rangle$.

$$\left(\langle I \rangle = \frac{2I_0}{\pi} \right)$$

3.52. Конденсатор ємності C, що має заряд q_0, розряджають через опір R. Знайти:

а) закон $I = I(t)$, за яким змінюється з часом сила струму в опорі R;

б) час t_1, за який конденсатор утратить половину заряду, та час t_2, за який він утратить половину своєї енергії.

$$\left(\text{а) } I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}},\ \text{де } I_0 = \frac{q_0}{\tau} \quad i \quad \tau = RC; \quad \text{б) } t_1 = \tau \ln 2,\ t_2 = \frac{t_1}{2} \right)$$

3.53. Використовуючи результати попередньої задачі, обчислити час розряджання t_0 конденсатора ємності $C = 2{,}1$ мкФ через резистор опором $R = 50$ кОм. Уважати конденсатор практично розрядженим, якщо він утратив $\eta = 99\%$ початкової енергії.

$$\left(t_0 = -\frac{\tau \ln(1-\eta)}{2} = RC \ln 10 \approx 0{,}12 \text{ с} \right)$$

3.54. Конденсатор ємності $C = 30000$ пФ підключили через резистор опором $R = 500$ Ом до джерела постійної напруги U_0 За який час t_0 напруга на конденсаторі досягне значення $\eta = 99\%$ від U_0?

$$\left(t_0 = -\tau \ln(1-\eta) = 2RC \ln 10 = 69{,}0 \text{ мкс} \right)$$

3.55. Заряджений плоский конденсатор, заповнений парафіном ($\varepsilon = 2$), через недосконалість діелектрика за час $t = 5$ хв утрачає половину свого заряду. Вважаючи, що розряджання конденсатора («витік заряду») йде тільки через парафін, визначити його питомий опір ρ.

$$\left(\rho = \frac{t}{\varepsilon_0 \varepsilon \ln 2} \approx 2{,}45 \cdot 10^{13} \text{ Ом} \cdot \text{м} \right)$$

3.56. Через недосконалість реальних діелектриків всередині зарядженого конденсатора існує так званий «струм витоку», що призводить до саморозряджання конденсатора відповідно до законів (3.9). Показати, що для будь-якого конденсатора (плоского, сферичного чи циліндричного) з ізотропним однорідним діелектриком власна стала часу $\tau_0 = \varepsilon_0 \varepsilon \rho$, де ε і ρ – діелектрична проникність і питомий опір діелектрика. Обчислити величину τ_0 для конденсатора заповненого парафіном ($\varepsilon = 2{,}1$ і $\rho = 10^{14}$ Ом $\cdot$ м).

(31 хв)

Робота і потужність струму. ККД джерела

3.57. Плоский конденсатор ємності C = 100 мкФ заповнений діелектриком із проникністю ε = 10 і питомим опором ρ = 10^{14} Ом·м. Визначити теплову потужність, яка буде виділятися в конденсаторі при напрузі U = 200 В.

$$\left(P = \frac{CU^2}{\varepsilon_0 \varepsilon \rho} \approx 0{,}46\,\text{мВт} \right)$$

3.58. Нагрівник конфорки електричної плити складається з двох секцій. Якщо ввімкнути в мережу тільки першу секцію, вода в каструлі закипає за час τ_1 = 12 хв, а якщо увімкнути тільки другу секцію, то час закипання буде τ_2 = 20 хв. Знайти час закипання τ води при вмиканні в мережу обох секцій з'єднаних: а) послідовно; б) паралельно. Кількість і початкова температура води, а також напруга в мережі в усіх випадках однакові; утратами тепла знехтувати.

$$\left(a)\ \tau = \tau_1 + \tau_2 = 32\ \text{хв}; \quad \text{б)}\ \tau = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 7{,}5\ \text{хв} \right)$$

3.59. До джерела з ЕРС $\mathscr{E}$ та внутрішнім опором r, підключили реостат (навантаження), опір якого R можна плавно змінювати в широких межах. Визначити та показати на одному графіку залежності від опору навантаження R потужності P (корисна потужність), та ККД джерела η (відношення корисної потужності до повної потужності джерела).

3.60. До джерела з ЕРС $\mathscr{E}$ та внутрішнім опором r, підключили реостат (навантаження), опір якого R можна плавно змінювати в широких межах. Визначити та показати на одному графіку залежності від сили струму I потужності P, що виділяється на опорі R (корисна потужність), та ККД джерела η (відношення корисної потужності до повної потужності джерела).

3.61. Визначити максимальну корисну потужність (потужність струму у зовнішній ділянці кола), яку можна отримати від джерела з ЕРС $\mathscr{E}$ і внутрішнім опором r.

$$\left(P_m = \frac{\mathscr{E}^2}{4r} \right)$$

3.62. При підключенні до джерела з ЕРС $\mathscr{E}$ = 6 В резистора з опором R_1 = 250 мОм, або R_2 = 4 Ом, на ньому виділяється однакова потужність. Знайти внутрішній опір r джерела, величину потужності P, що виділяється на резисторі (корисну потужність), а також її максимальну величину P_m, яку можна отримати від даного джерела.

$$\left(r = \sqrt{R_1 R_2} = 1{,}0\ \text{Ом};\ P = 5{,}76\ \text{Вт};\ P_m = 9\ \text{Вт}\right)$$

3.63. Яку найбільшу потужність струму можна отримати на кожному з трьох однакових резисторів, з'єднаних за схемою рис. 3.1 (с. 30), якщо ланцюжок підключений до джерела з ЕРС 12 В і внутрішнім опором 1 Ом?

(12 Вт)

3.64. Джерело віддає у зовнішнє коло максимальну можливу потужність при силі стуму 10 А. Знайти струм короткого замикання джерела.

(20 А)

3.65. По резистору з опором R = 100 Ом починають пропускати струм, який змінюється з часом за законом $I = k\sqrt{t}$, де $k = 1\ \text{А}\cdot\text{с}^{-1/2}$. За який час τ в резисторі виділиться Q = 1,8 кДж тепла?

$$\left(\tau = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2Q}{R}} = 6\ \text{с}\right)$$

3.66. Напруга на резисторі з опором R = 100 Ом змінюється з часом за законом $U = k\sqrt{t}$, де $k = 2\,\text{В}\cdot\text{с}^{-1/2}$. Яка кількість теплоти виділиться в резисторі за проміжок часу τ = 100 с від початкового моменту?

$$\left(Q = \frac{k^2\tau^2}{2R} = 200\ \text{Дж}\right)$$

3.67. Конденсатор заряджений до напруги U_0 розряджають через резистор опором R. Визначити середню теплову потужність струму розряджання конденсатора за проміжок часу $t = n\tau$, τ – час релаксації. Зробити розрахунки для n = 2 і n = 5.

$$\left(\langle P\rangle = \frac{1 - e^{-2n}}{2n}P_0,\ де\ P_0 = \frac{U_0^2}{R};\quad \langle P\rangle_1 = 0{,}43P_0,\ \langle P\rangle_2 = 0{,}10P_0\right)$$

3.68. Визначити середню теплову потужність P нагрівника електричного чайника з опором $R = 48{,}5\ \text{Ом}$, на який подано змінну напругу $U = U_0 \sin\omega t$, де $U_0 = 311\ \text{В}$.

$$\left(P = \frac{U_0^2}{2R} = 1000\ \text{Вт}\right)$$

4. Магнітне поле

4.1. Магнітне поле системи струмів (принцип суперпозиції):

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i .$$

4.2. Магнітне поле струму у вакуумі (закон Біо – Савара):

лінійний струм $$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\left[\mathrm{d}\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}, \quad \vec{B} = \int_L \mathrm{d}\vec{B} ;$$

об'ємний струм $$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\left[\vec{j}\mathrm{d}V, \vec{r}\right]}{r^3}, \quad \vec{B} = \int_V \mathrm{d}\vec{B}; \qquad \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

4.3. Циркуляція стаціонарного магнітного поля у вакуумі:

$$\oint_L \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_\Sigma, \quad I_\Sigma = \sum_i I_i \ \text{ або } \ I_\Sigma = \int_S \vec{j}\mathrm{d}\vec{s} .$$

4.4. Потік магнітного поля (теорема Гаус(с?)а):

$$\oint_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{S} = 0 .$$

4.5. Магнітний момент плоского контуру із струмом:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n} .$$

4.6. Магнітна сила, що діє на рухомий заряд :

$$\vec{F}_m = q\left[\vec{v}\vec{B}\right].$$

4.7. Магнітна сила, що діє на провідник із струмом (закон Ампера):

$$\mathrm{d}\vec{F}_A = I\left[\mathrm{d}\vec{l}, \vec{B}\right], \quad \vec{F}_A = \int_L \mathrm{d}\vec{F}_A .$$

4.8. Момент сил, що діють на контур із струмом в однорідному магнітному полі:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right].$$

4.9. Енергія контуру зі струмом в однорідному зовнішньому магнітному полі:

$$W_m = -\vec{p}_m\vec{B} .$$

4.10. Робота при переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі:

$$\delta A = I\mathrm{d}\Phi, \quad A = I(\Phi_2 - \Phi_1) .$$

4.11. Циркуляція вектора напруженості магнітного поля (вектора $\vec{H}$):

$$\oint_L \vec{H}\mathrm{d}\vec{l} = I_\Sigma, \quad I_\Sigma = \sum_i I_i \ \text{ або } \ I_\Sigma = \int_S \vec{j}\mathrm{d}\vec{s} .$$

4.12. Зв'язок між векторами $\vec{B}$ і $\vec{H}$ в ізотропному магнетику:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} .$$

4.13. Об'ємна густина енергії магнітного поля в ізотропному магнетику:

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{BH}{2}$$

Вектор $\vec{B}$. Закон Біо-Савара

4.1. Магнітне поле створюється дуже довгим прямим провідником із струмом, в якому швидкість упорядкованого руху носіїв має певну величину $\vec{u}$. Провідник починає рухатися у поздовжньому напрямі зі швидкістю $\vec{v} = -\vec{u}$. Як це вплине на величину та напрям індукції магнітного поля провідника $\vec{B}$?

4.2. Два однакові круглі витки радіуса R = 15 см з ізольованого дроту мають спільний центр і розміщені у взаємно перпендикулярних площинах. По витках ідуть однакові струми I = 60 А. Обчислити індукцію магнітного поля в центрі витків. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. (55мкТл)

4.3. Магнітне поле створюється трьома довгими паралельними прямими провідниками із струмом, які в перетині перпендикулярною площиною утворюють правильний трикутник. Знайти індукцію B_0 магнітного поля в центрі вказаного трикутника, якщо кожен провідник створює в цій точці поле з індукцією B, і всі струми мають однаковий напрям. ($B_0 = 0$)

4.4. Магнітне поле створюється трьома довгими паралельними прямими провідниками із струмом, які в перетині перпендикулярною площиною утворюють правильний трикутник. Знайти індукцію B_0 магнітного поля в центрі вказаного трикутника, якщо кожен провідник створює в цій точці поле з індукцією B, і один із струмів напрямлений протилежно до двох інших.

($B_0 = 2B$)

4.5. Магнітне поле створюється двома довгими паралельними прямими провідниками з однаковими струмами, причому кожен провідник у місці розташування іншого створює поле із заданою індукцією B. Визначити величину та напрям індукції поля $\vec{B}_0$ посередині між провідниками, та $\vec{B}_1$ у точках, які віддалені від провідників на відстань, рівну відстані між ними, якщо струми напрямлені: а) однаково і б) протилежно.

$$\left(a) B_0 = 0,\ B_1 = B\sqrt{3};\quad б) B_0 = 4B,\ B_1 = B \right)$$

4.6. Струм I = 5 А тече по плоскому контуру, рис. 4.1. Визначити індукцію B магнітного поля в центрі кривизни, якщо R = 31,4 см.

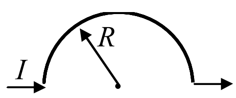


Рис. 4.1.

$$\left(B = \frac{\mu_0 I}{4R} = 5 \text{ мкТл} \right)$$

4.7. Струм I = 50 А тече по плоскому контуру, рис. 4.2. Визначити індукцію B магнітного поля в центрі кривизни, якщо R = 10 см.

$$\left(B = \frac{\mu_0 I}{8\pi R}(3\pi + 2) = 286\,\text{мкТл} \right)$$

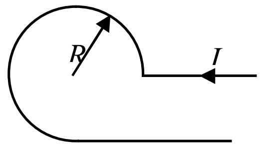


Рис. 4.2

4.8. Струм I = 40 А тече по плоскому контуру, рис. 4.3. Визначити індукцію B магнітного поля в центрі кільця, якщо R = 41,4 см.

$$\left(B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(\pi + 1) = 80\,\text{мкТл} \right)$$

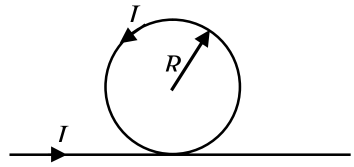


Рис. 4.3.

4.9. Струм I = 60 А тече по плоскому контуру, рис. 4.4. Визначити індукцію B магнітного поля в центрі кривизни, якщо R =20 см.

$$\left(B = \frac{\mu_0 I}{\pi R}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \approx 110\,\text{мкТл} \right)$$

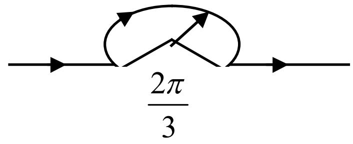


Рис. 4.4.

4.10. Струм I =100 А тече по плоскому контуру, рис. 4.5. Визначити індукцію B магнітного поля в центрі колової частини контуру, якщо R = 20 см. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(B = \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{I}{R}\left(3\pi + \sqrt{2}\right) = 271\,\text{мкТл} \right)$$

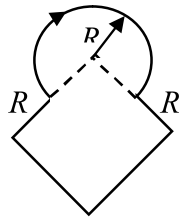


Рис. 4.5.

4.11. Дротина довжини l, по якій іде струм I, зігнута навпіл під кутом α. Визначити індукцію магнітного поля B, яке створюється дротиною на середині відрізка, що з'єднує її кінці. Обчислити величину B при l= 1 м, I = 100 А і α = 90°. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(B = \frac{4\mu_0 I}{l}\left(\sec\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} \right); \quad B \approx 113\ \text{мкТл} \right)$$

4.12. По нескінченному прямому провіднику зігнутому під кутом $\alpha = 120^\circ$ тече струм I = 50 А. Визначити магнітну індукцію в точках на бісектрисі кута на відстані a = 5 см по обидва боки від його вершини. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$(346\,\text{мкТл}; \quad 116\,\text{мкТл})$$

4.13. Прямий провідник довжини l = 1 м, по якому йде струм 100 А, зігнутий навпіл під кутом 120°. Знайти індукцію магнітного поля цього провідника в точці, що розташована на бісектрисі зовнішнього кута на відстані $l/2$ від вершини. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

(≈ 63 мкТл)

4.14. Знайти індукцію магнітного поля B відрізка прямого провідника із струмом довжини a в точці віддаленій від його кінців на таку саму відстань, якщо індукція поля нескінченного прямого струму відстані a дорівнює B_0.

$$\left(B = \frac{B_0}{2} \right)$$

4.15. Струм I тече контуром у формі правильного трикутника зі стороною a. Знайти індукцію магнітного поля B_0 у точці рівновіддаленій від вершин контуру на відстань a.

$$\left(B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{3}\pi a} \right)$$

4.16. Довгий провідник із струмом I = 5,0 А зігнуто під прямим кутом. Визначити індукцію магнітного поля прямо над точкою згину на відстані l = 35 см від площини провідника. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

(2 мкТл)

4.17. Індукція магнітного поля в центрі квадратної дротяної рамки із струмом дорівнює B_0. Знайти індукцію B у цій точці після того, як рамку без зміни величини струму зігнути під кутом 90° навколо осі, що проходить через середини протилежних сторін.

$$\left(B = \frac{B_0}{\sqrt{2}} \right)$$

4.18. Визначити у скільки разів η індукція магнітного поля в центрі квадрата зі струмом більша, ніж у вершинах.

$$(\eta = 8)$$

4.19. Визначити (вивести формулу) індукцію магнітного поля B_0 в центрі круглого витка радіуса R із струмом I.

$$\left(B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \right)$$

4.20. Два однакові шматки дроту зігнули перший у кругле кільце, а другий у квадрат. Знайти відношення $\eta = B_1/B_2$ індукцій магнітного поля у центрах утворених контурів при пропусканні по них струму однакової величини.

$$\left(\eta = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}} = 0{,}87 \right)$$

4.21. У центрі контуру із струмом, який має форму правильного трикутника, індукція магнітного поля складає 1,0 мкТл. Чому дорівнює індукція в центрі контуру у формі описаного навколо трикутника кола із таким самим струмом?

(0,6 мкТл)

4.22. Струм I = 31,4 А тече уздовж довгого прямого провідника, що являє собою половину тонкостінного циліндра радіуса $R = 5{,}0\,\text{см}$, рис. 4.6 Визначити індукцію магнітного поля на осі O провідника. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

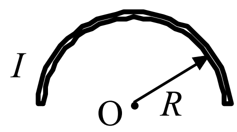


Рис. 4.6

$$\left(B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = 80\,\text{мкТл} \right)$$

4.23. По круглому тонкому кільцю радіуса R йде струм I. Визначити індукцію магнітного поля $B(z)$ на осі кільця в залежності від відстані z до його центра.

$$\left(B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

4.24. Соленоїд довжин l і радіуса R містить n витків на одиницю довжини. Використовуючи результат попередньої задачі, визначити індукцію магнітного поля в центрі соленоїда при силі струму I. Окремо розглянути випадок нескінченно довгого соленоїда.

$$\left(B = \frac{\mu_0 n I}{\sqrt{1 + \left(2R/l\right)^2}}; \quad B_\infty = \mu_0 n I \right)$$

Теорема про циркуляцію $\vec{B}$

4.25. По ідеальному соленоїду, який має n витків на одиницю довжини, тече струм I. Використовуючи теорему про циркуляцію, визначити (вивести формулу) індукцію магнітного поля B всередині та B_0 назовні соленоїда.

$$\left(B = \mu_0 n I, \quad B_0 = 0 \right)$$

4.26. Магнітне поле створюється струмом I, який протікає по ідеальному тороїду із середнім радіусом R_0 і щільністю намотки n. (Середнім радіусом тороїда називається радіус кола, на якому лежать центри витків тороїда; щільність намотки n – кількість витків на одиницю довжини середньої лінії тороїда).

1) визначити індукцію поля $B(r)$ у залежності від відстані r до осі тороїда;
2) отримати формулу індукції поля ідеального соленоїда як граничний випадок формули поля тороїда.

$$\left(1)\ \textit{усередині тороїда}\ B = \mu_0 n I \frac{R_0}{r},\ \textit{назовні}\ B = 0; \quad 2)\ B = \mu_0 n I \right)$$

4.27. У реальному тороїді струм створює магнітне поле не лише всередині обмотки, а й назовні. Знайти відношення η індукції поля B всередині до індукції B_0 назовні в центрі тороїда малого поперечного перерізу, котрий містить $N = 3000$ витків.

($\eta \approx N/\pi = 955$)

4.28. Визначити індукцію магнітного поля $\vec{B}$, що створюється:

1) нескінченною площиною зі струмом, який розподілений по ній зі сталою лінійною густиною $\vec{i}$ (А/м);
2) двома паралельними нескінченними площинами зі струмами, що розподілені по них із сталими лінійними густинами $\vec{i}_1$ та $\vec{i}_2$; окремо розглянути випадки: *а*) $\vec{i}_1 = \vec{i}_2 = \vec{i}$ та б) $\vec{i}_1 = \vec{i}, \vec{i}_2 = -\vec{i}$.

$$\left(\begin{array}{l} 1)\ \vec{B} = \dfrac{\mu_0\left[\vec{i}\vec{n}\right]}{2},\ \vec{n} - \textit{орт нормалі до площини};\\ 2)\ \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{2}\left[(\vec{i}_1 - \vec{i}_2), \vec{n}\right] \textit{ між площинами},\ \vec{B} = \pm\dfrac{\mu_0}{2}\left[(\vec{i}_1 + \vec{i}_2), \vec{n}\right] \textit{ поза ними};\\ \quad a)\ B = 0 \textit{ між площинами},\ \ B = \pm\,\mu_0\left[\vec{i}\vec{n}\right] \textit{поза ними};\\ \quad б)\ B = \mu_0\left[\vec{i}\vec{n}\right] \textit{між площинами},\ \ B = 0 \textit{ поза ними};\\ \quad \vec{n} - \textit{орт нормалі напрямлений від площини } 1 \textit{ до } 2. \end{array}\right)$$

4.29. Магнітне поле створюється однорідним струмом густини j, що тече по нескінченній немагнітній пластині товщини $2d$. Визначити індукцію поля $B(x)$ як функцію відстані x до площини симетрії пластини.

$\left(\textit{Усередині } B = \mu_0 jx;\ \textit{назовні } B = \mu_0 jd\right)$

4.30. Магнітне поле створюється однорідним струмом величини I, що тече вздовж довгої тонкостінної циліндричної труби радіуса R. Визначити індукцію поля $B(r)$ як функцію відстані r до осі труби.

$$\left(\textit{Усередині } B = 0;\quad \textit{назовні } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)$$

4.31. Магнітне поле створюється однорідним струмом густини j, що тече вздовж нескінченного немагнітного суцільного циліндра радіуса R. Визначити вектор індукції поля $\vec{B}(\vec{r})$ у всьому просторі як функцію радіуса-вектора $\vec{r}$ точки відносно осі циліндра.

$$\left(\textit{Усередині } \vec{B} = \frac{\mu_0\left[\vec{j}\vec{r}\right]}{2},\ \textit{назовні } \vec{B} = \frac{\mu_0\left[\vec{j}\vec{r}\right]R^2}{2r^2}\right)$$

4.32. Уздовж нескінченного немагнітного циліндра радіуса R тече струм, густина котрого $\vec{j}$ залежить від відстані r до осі циліндра, як $\vec{j} = \vec{j}_0 r/R$, де величина j_0 задана. Визначити вектор індукції магнітного поля струму $\vec{B}(\vec{r})$ у всьому просторі як функцію радіуса-вектора $\vec{r}$ точки відносно осі циліндра.

$$\left(\textit{Усередині } \vec{B} = \frac{\mu_0 [j_0 r] r}{3R}, \ \textit{назовні } \vec{B} = \frac{\mu_0 \left[\vec{j}\vec{r}\right] R^2}{3r^2} \right)$$

4.33. Магнітне поле створюється однорідним струмом величини I, що тече вздовж довгої тонкостінної циліндричної труби радіуса R із вузьким поздовжнім прорізом заданої ширини $h << R$. Визначити індукцію поля $B(r)$ всередині труби як функцію відстані r від прорізу

$$\left(B = \frac{\mu_0 I h}{4\pi^2 R} \frac{1}{r} \right)$$

4.34. Довгий циліндричний провідник із струмом густини $\vec{j}$ має поздовжню циліндричну порожнину, положення якої відносно осі провідника визначається вектором $\vec{l}$. Визначити вектор індукції магнітного поля $\vec{B}$ у порожнині. Окремо розглянути випадок $\vec{l} = 0$.

$$\left(\vec{B} = \frac{\mu_0 \left[\vec{j}\,\vec{l}\right]}{2} \right)$$

Сила Ампера

4.35. Металевий стержень маси 100 г і довжини 20 см підвішений горизонтально на двох нитках в однорідному горизонтальному магнітному полі з індукцією 100 мТл перпендикулярно до напрямку поля. Який найменший струм I треба пропустити по стержню, щоби він став невагомим. Узяти g = 10 м/с^2.

(50 А)

4.36. Металевий стержень маси 100 г і довжини 20 см підвішений горизонтально на двох нитках в однорідному горизонтальному магнітному полі з індукцією 100 мТл під кутом 30° до напрямку поля. Який найменший струм треба пропустити по стержню, щоб одна з ниток розірвалася, якщо кожна з них витримує навантаження, рівне вазі стержня. Взяти g = 10 м/с^2.

(100 А)

4.37. Металевий стержень маси 100 г і довжини 20 см підвішений горизонтально на двох нитках в однорідному вертикальному магнітному полі. Знайти індукцію поля, якщо при пропусканні по стержню струму 50 А нитки відхилилися від вертикалі на кут α = 45°. Узяти g = 10 м/с^2.

(0,1 Тл)

4.38. Дротяний каркас масою m = 45 г у формі трьох сторін квадрата довжиною a = 20 см кожна підвішено за кінці у вертикальному магнітному полі так, що нижня сторона розташована горизонтально і перпендикулярно до напрямку поля. Чому дорівнює індукція магнітного поля B, якщо при пропусканні по каркасу струму I = 100 А він відхилився від вертикалі на кут α = 45°. Узяти g = 10 м/с^2.

$$\left(B = \frac{2mg\,\mathrm{tg}\,\alpha}{3Ia} = 30\,\text{мТл} \right)$$

4.39. По двох паралельних довгих прямих провідниках, розміщених на відстані 1 см один від одного, течуть однакові струми. Визначити силу струму в провідниках, якщо на кожен метр їх довжини припадає сила взаємодії 0,2 Н. $\left(\mu_0/4\pi\right) = 10^{-7}$ Гн/м.

(100 А)

4.40. Квадратна дротяна рамка і довгий прямий провідник розташовані в одній площині так, що провідник є паралельним до сторони рамки. По рамці та провіднику течуть однакові струми I = 100 А. Знайти силу, що діє на рамку з боку провідника, якщо ближча до нього сторона рамки a знаходиться на відстані $l = a$. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

($F = 1\,\text{мН}$)

4.41. Тонкий металевий стержень із струмом I = 10 А розміщений перпендикулярно до довгого прямого провідника зі струмом I_0 = 100 А в одній площині. Знайти силу Ампера, що діє на стержень, якщо його ближній кінець знаходиться від провідника на відстані рівній довжині стержня. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(F = \frac{\mu_0 I_0 I}{4\pi} 2\ln 2 = 0{,}14\,\text{мН} \right)$$

4.42. По дротині у формі тонкого півкільця радіуса R = 10 см, яка знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 50\,\text{мТл}$, тече струм I = 10 А. Визначити амперову силу, що діє на дротину, якщо напрям магнітного поля: а) перпендикулярний до площини півкільця і б) паралельний до площини півкільця та перпендикулярний до його діаметра.

(*в обох випадках* $F = 2IRB = 0{,}1\,\text{Н}$.)

4.43. Дротина у формі півкільця радіуса R = 50 см із струмом I = 100 А знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 200\,\text{мТл}$, напрямленому паралельно до діаметра півкільця. Визначити амперову силу F та момент сил M, які діють на дротину.

$$\left(F = 0, \quad M = \frac{\pi R^2 IB}{2} \approx 7{,}85\ \text{Нм} \right)$$

4.44. Дротина у формі півкільця радіуса R = 50 см із струмом I = 100 А знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 200\,\text{мТл}$, напрямленому під кутом 30° до діаметра півкільця. Визначити амперову силу F, що діє на дротину.

(10 Н)

4.45. Тонке кільце радіуса R = 20см із струмом I = 100 А знаходиться в перпендикулярному до його площини однорідному магнітному полі з індукцією B = 20 мТл. Знайти силу натягу кільця.

$(F = IRB = 0{,}4\ \text{Н})$

4.46. Струм I тече вздовж довгого прямого провідника, що являє собою половину тонкостінного циліндра радіуса R. Такий самий струм тече по довгій прямій дротині, що розташована на осі півциліндра. Визначити силу магнітної взаємодії, що припадає на одиницю довжини провідників.

$$\left(F = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R} \right)$$

4.47. Два довгих паралельних провідники, по яких протікають струми однакового напрямку та величини $I = 6{,}0\ \text{А}$, віддалили один від одного так, що відстань між ними подвоїлась. Визначити роботу сил Ампера на одиницю довжини провідників. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$(A = -5\ \text{мкДж})$

Магнітний момент контуру

4.48. Обчислити магнітний момент кільцевого провідника радіуса 10 см, по якому йде струм 0,5 А.

$(15{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{Ам}^2)$

4.49. Дуже коротка (практично плоска) котушка містить $N = 1000$ витків тонкого дроту. Переріз котушки має форму квадрата зі стороною 10 см. Визначити магнітний момент котушки, якщо сила струму в ній 1 А.

$(10\ \text{Ам}^2)$

4.50. Одна сторона діелектричного диска радіуса R заряджена з поверхневою густиною заряду σ. Диск обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω. Визначити:

– магнітний момент диска p_m;

– індукцію магнітного поля B_0 у його центрі.

$$\left(p_m = \frac{\pi\sigma\omega R^4}{4}; \quad B_0 = \frac{\mu_0 \sigma\omega R}{2} \right)$$

4.51. Швидкий коловий рух зарядженої частинки створює певний ефективний кільцевий струм. Виходячи з цього, визначити магнітний момент p_m частинки із зарядом q та масою m що обертається по колу і має відносно його центра момент імпульсу L.

$$\left(p_m = \frac{q}{2m} L \right)$$

4.52. Отримати відповідь задачі 4.50, скориставшися результатом задачі 4.51.

4.53. Дротяний виток із струмом радіуса $R = 5$ см знаходиться в однорідному магнітному полі $B = 2$ мТл паралельному до площини витка. Визначити момент сил, що діють на виток при струмі $I = 2$ А.

(31,4мкНм)

4.54. Круглий виток радіуса 10 см із струмом 20 А знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією 0,5 Тл. Контур утримують у рівновазі, прикладаючи до діаметральних точок витка паралельні до поля сили F_1 і F_2 так, що площина витка складає кут 60° із напрямом поля. Знайти величину F_1 і F_2.

($F_1 = F_2 \approx 0{,}8$ Н)

4.55. Вільний квадратний контур із стороною 10 см і струмом 100 А перебуває в рівновазі в однорідному зовнішньому магнітному полі з індукцією 0,2 Тл. Яку роботу треба виконати, аби повільно повернути контур на кут 60° навколо осі, що лежить у площині контуру?

(0,1 Дж)

4.56. Квадратна рамка зі стороною a = 8 см і струмом I = 0,9 А розташована в одній площині з довгим прямим провідником так, що її сторона паралельна до провідника. По провіднику йде струм I_0 = 5,0 А. Яку механічну роботу треба виконати, щоби повернути рамку на 180° навколо осі, котра проходить через середини її протилежних сторін паралельно до провідника і на відстані r = 1,5a від нього? $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(A = \frac{\mu_0 I I_0 a}{\pi} \ln 2 = 0{,}1 \text{ мкДж} \right)$$

Магнітне поле в речовині

4.57. Індукція магнітного поля у вакуумі поблизу плоскої поверхні магнетика з проникністю μ дорівнює B_0. Вектор $\vec{B}_0$ складає кут α із нормаллю до поверхні. Знайти індукцію магнітного поля B в магнетику поблизу поверхні.

$$\left(B = B_0 \sqrt{\mu^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \right)$$

4.58. На залізний сердечник малого перерізу довжиною 20 см намотано 200 витків дроту. За допомогою кривої намагнічування рис. 4.7, знайти магнітну проникність заліза при струмі 0,4 А.

($\mu \approx 2000$)

4.59. По осі тонкого залізного кільця радіуса r = 2 см проходить довгий прямий провідник із струмом. За допомогою кривої намагнічування рис. 4.7, знайти магнітні проникності заліза

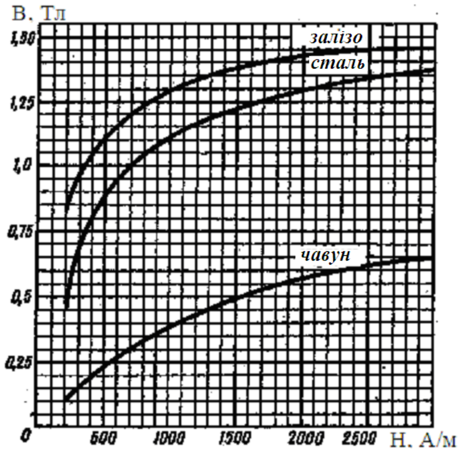


Рис. 4.7

μ_1 і μ_2 при силі струму в провіднику $I_1 = 26$ А та $I_2 = 88$ А, відповідно. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

($\mu_1 \approx 3300$; $\mu_2 \approx 1400$)

4.60. По довгому прямому соленоїду з кількістю витків на одиницю довжини $n = 500$ м$^{-1}$, який намотано на сталевий сердечник, тече струм $I = 1{,}0$ А. За допомогою кривої намагнічування рис. 4.7 знайти індукцію магнітного поля B усередині соленоїда та магнітну проникність сердечника μ при заданому струмі. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

($B \approx 0{,}9$ Тл; $\mu \approx 1400$)

4.61. На чавунний сердечник у формі тора з радіусом середньої лінії 32 см намотано в один шар 1000 витків дроту. Використовуючи криву намагнічування рис. 4.7, знайти магнітну проникність чавуну μ на середній лінії сердечника при силі струму в обмотці 1,0 А. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

($\mu \approx 400$)

4.62. По тороїду із залізним сердечником, який має 1000 витків, тече струм. Довжина середньої лінії тороїда 20 см є набагато більшою за діаметр витка. Який струм I_0 потрібно пропустити по такому самому тороїду без сердечника, щоб індукція магнітного поля в ньому дорівнювала індукції у тороїді із сердечником при струмі $I = 0{,}34$ А? Скористатися кривою намагнічування заліза (рис. 4.7). $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

($I_0 \approx 220$ А)

4.63. По тороїду, що складається з $N = 1000$ витків, намотаних на феромагнітний сердечник із середнім радіусом $R = 25$ см, тече струм $I = 0{,}85$ А. У сердечнику зроблено поперечний проріз шириною $b = 1{,}0$ мм. Нехтуючи розсіюванням магнітного потоку на краях зазору, знайти магнітну проникність феромагнетика μ на середній лінії сердечника, якщо індукція магнітного поля в зазорі $B = 0{,}75$ Тл.

$$\left(\mu = \frac{(2\pi R - b)B}{IN\mu_0 - bB} \approx \frac{2\pi RB}{\mu_0 NI - bB} = 3700 \right)$$

4.64. Постійний магніт має вигляд кільця (тора) із вузьким зазором між полюсами. Середній діаметр кільця $d = 20$ см. Ширина зазору $b = 2$ мм, індукція магнітного поля в зазорі $B = 40$ Тл. Знайти модуль напруженості H магнітного поля всередині магніту, вважаючи поле сталим по перерізу. Проаналізувати напрям $\vec{H}$ усередині магніту та в зазорі. Розсіюванням потоку на краях зазору знехтувати. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(H = \frac{Bb}{\mu_0(\pi d - b)} \approx \frac{Bb}{\mu_0 \pi d} = 100\,\text{А/м.} \right)$$

5. Електромагнітна індукція. Рівняння Максвелла

5.1. Основний закон електромагнітної індукції (закон Фарадея):

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

5.2. Повний потік (потокозчеплення) в соленоїді та тороїді з кількістю витків *N*:

$$\Phi = N\Phi_1.$$

5.3. Власний потік контуру (потік самоіндукції):

$$\Phi_c = LI.$$

5.4. Потоки взаємоіндукції двох контурів:

$$\Phi_1 = L_{12}I_2, \quad \Phi_2 = L_{21}I_1; \quad L_{12} = L_{21}.$$

5.5. ЕРС самоіндукції в контурі з $L = const$:

$$\mathcal{E}_c = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

5.6. Магнітна енергія струму в контурі з $L = const$:

$$W_m = \frac{LI^2}{2}.$$

5.7. Об'ємна густина енергії магнітного поля в не феромагнітному середовищі:

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

5.8. Об'ємна густина енергії електромагнітного поля в не феромагнітному середовищі:

$$w = \frac{ED}{2} + \frac{BH}{2}.$$

5.9. Густина струму зміщення:

$$\vec{j}_{зм} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

5.10. Рівняння Максвелла:

$$\oint_L \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{S}, \qquad \oint_S \vec{D}\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho\mathrm{d}V;$$

$$\oint_L \vec{H}\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\vec{S}, \qquad \oint_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Магнітний потік

5.1. Плоский контур площею 25 см^2 знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією 4 мТл. Визначити магнітний потік, що пронизує цей контур, якщо його площина складає кут 30° із лініями індукції магнітного поля.

(5 мкВб)

5.2. Сфера радіуса 10 см знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією 100 мТл. Знайти магнітний потік крізь усю сферу та крізь півсферу, основа котрої перпендикулярна до напрямку поля.

(0; 3,14 мВб)

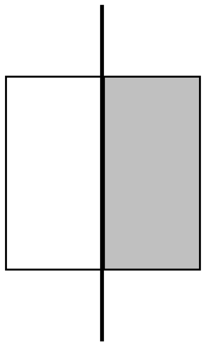


Рис. 5.1

5.3. Магнітне поле створюється довгим провідником із струмом. Чому дорівнює потік поля крізь поверхню квадрата, показаного на рис. 5.1, якщо потік крізь його виділену половину дорівнює Φ?

5.4. Квадратний контур і довгий прямий провідник із струмом розташовані, як показано на рис. 5.1. При цьому потік індукції магнітного поля крізь виділену половину квадрата дорівнює 10 мВб. Чому дорівнює потік крізь другу половину квадрата?

5.5. Магнітний потік крізь плоский контур, який знаходиться в однорідному магнітному полі, складає Φ_0. Знайти зміну потоку $\Delta\Phi$ крізь контур при його повороті на 180° навколо осі, що лежить у площині контуру і є перпендикулярною до напрямку поля.

($\Delta\Phi = -2\Phi_0$)

5.6. Прямокутна рамка площею знаходиться в неоднорідному магнітному полі ($B \neq const$), яке скрізь напрямлене перпендикулярно до її площини, рис. 5.2. Рамку переміщують із положення 1 у положення 2: а) поступально, б) поворотом навколо сторони АВ. Порівняти зміну магнітного потоку крізь рамку при повороті $\Delta\Phi_2$ та при поступальному переміщенні $\Delta\Phi_1$, якщо в кінцевому положенні середня величина модуля індукції поля є вдвічі більшою, ніж у початковому.

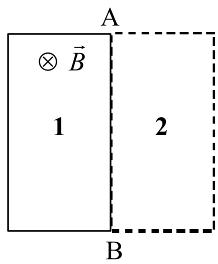


Рис. 5.2

$\left(\Delta\Phi_2 = -3\Delta\Phi_1\right)$

5.7. В одній площині з довгим прямим провідником із струмом $I = 50$ А розміщена прямокутна рамка так, що її поздовжні сторони розміром $a = 65$ см є паралельними до провідника. Знайти магнітний потік крізь рамку, якщо відстань від провідника до ближньої сторони рамки дорівнює її ширині. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 2 = 4,5 \text{ мкВб.}\right)$$

5.8. Тороїд квадратного перерізу має N = 1000 витків. Зовнішній діаметр тороїда d_2 = 20 см, внутрішній – d_1 = 10 см. Чому дорівнює магнітний потік Φ_1 через переріз тороїда та повний магнітний потік Φ у тороїді, якщо по його обмотці протікає струм I = 10 А? $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(\Phi_1 = \frac{\mu_0 IN}{4\pi}(d_2 - d_1)\ln\frac{d_2}{d_1} = 69 \text{ мкВб}; \quad \Phi = N\Phi_1. \right)$$

Основний закон ЕМІ

5.9. Дротяне кільце діаметром d, що вільно падає, пролітає смугу перпендикулярного до його площини магнітного поля шириною l = 4d. Показати приблизний графік залежності ЕРС індукції в кільці від його положення в просторі.

5.10. Квадратна рамка зі стороною a, що рухається поступально із швидкістю $\vec{v}_0$, проходить крізь смугу перпендикулярного до її площини магнітного поля $\vec{B} = const$ (рис. 5.3) без зміни швидкості. Ширина смуги поля $l = 3a$. Визначити величину та зобразити графік залежності ЕРС індукції в рамці від координати x її передньої сторони. Вказати напрям індукційного струму в усіх характерних положеннях рамки.

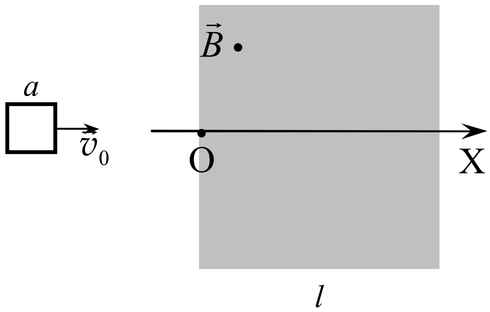


Рис. 5.3

5.11. Мідна квадратна рамка зі стороною a, що вільно ковзає без тертя по горизонтальній площині із швидкістю $\vec{v}_0$, в момент $t = 0$ натрапляє на смугу однорідного вертикального магнітного поля шириною l = 3a, як показано на рис. 5.3. Густина міді $d = 8{,}9 \text{ г/см}^3$, питомий опір $\rho = 16 \text{ нОм} \cdot \text{м}$. Визначити:

1) залежність швидкості рамки від часу $v(t)$ та від координати $v(x)$ передньої сторони рамки і показати графіки цих залежностей;
2) найменшу величину v_0, при якій рамка повністю вийде з поля; розрахувати значення v_0 при $a = 20$ см і $B = 200$ мТл.

$$\left(\begin{array}{l} 1)\ v(t) = v_m e^{-\gamma t},\ v(x) = v_m - \gamma S,\ де\ \gamma = \dfrac{B^2}{16 d\rho}\ та \\ S = x\ при\ 0 < x \le a\ \ і\ \ S = x - 3a\ при\ 3a < x \le 4a; \\ 2)\ v_{0\min} = 2\gamma a \approx 3{,}5 \text{ м/с} \end{array} \right)$$

5.12. Прямокутна дротяна рамка площею S = 0,5 м^2 обертається із частотою ν = 3000 об/хв в однорідному магнітному полі з індукцією 0,2 Тл навколо осі, що перпендикулярна до напрямку поля й проходить через середини протилежних сторін рамки. Знайти:

– максимальну ЕРС індукції $\mathscr{E}_m$ у рамці та максимальний потік Φ_m крізь неї в момент максимуму ЕРС;
– роботу (не враховуючи тертя), яку треба виконувати за кожен оберт, аби рамка оберталася із заданою частотою, якщо її опір R = 0,5 Ом.

$$\left(\mathscr{E}_m = 2\pi BS\nu = 31{,}4 \text{ В}, \ \Phi_m = 0; \quad A = \frac{2\pi^2 B^2 S^2 \nu}{R} = 19{,}7 \text{ Дж} \right)$$

5.13. Пряма дротина завдовжки 20 см, паралельна до осі OY, починає рухатись уздовж осі OX із сталим прискоренням 2 м/с^2 в однорідному магнітному полі, що, напрямлене по осі OZ. Індукція поля 100 мТл. Знайти миттєву ЕРС індукції у дротині через 2 с після початку руху та середню ЕРС за цей час.

$$(80 \text{ мВ}; \quad 40 \text{ мВ})$$

5.14. Пряма горизонтальна дротина довжиною 20 см, паралельна до осі OY, рухається вздовж осі OX в однорідному магнітному полі так, що її координата x змінюється з часом за законом $x = 5 - 2t + t^2$ (усі величини в СІ). Індукція поля напрямлена уздовж осі OZ і дорівнює 100 мТл. Знайти ЕРС у дротині на момент коли $x = 29$ м.

(0,2 В)

5.15. По П-подібному металевому каркасу, розміщеному в горизонтальній площині, рухається зі швидкістю 5 м/с перетинка довжиною 40 см і опором 100 мОм. Уся конструкція знаходиться у вертикальному магнітному полі з індукцією 0,2 Тл. Нехтуючи опором каркаса, знайти силу струму в перетинці та силу, яку треба прикладати до перетинки для забезпечення руху.

(4 А; 0,32 Н)

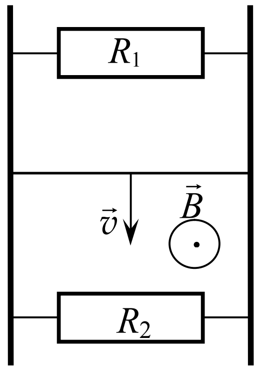


Рис. 5.4

5.16. Дротяна перетинка рухається зі швидкістю v = 20 см/с у вертикальному магнітному полі з індукцією B = 0,1 Тл по двох паралельних горизонтальних рейках (рис. 5.4), які розміщені на відстані l = 1,0 м одна від одної. Кінці рейок замкнені на опори R_1 = 1,0 Ом та R_2 = 2,0 Ом. Знайти силу струму I в перетинці. Опором рейок і перетинки знехтувати.

$$\left(I = \frac{Blv(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = 0{,}03 \text{ А} \right)$$

5.17. На двох довгих мідних стержнях квадратного перерізу зі стороною a = 4,0 мм, які зіставлені в горизонтальній площині під кутом α = 30°, лежить поперечка – такий самий стержень, перпендикулярний до бісектриси кута α. Уся конструкція вміщена у вертикальне магнітне поле з індукцією B = 0,2 Тл. Знайти силу струму I в стержнях, якщо поперечка почне ковзати уздовж бісектриси кута зі швидкістю v = 20 см/с. Питомий опір міді $\rho = 1{,}6\cdot10^{-8}$ Ом·м.

$$\left(I = \frac{Ba^2 v \sin(\alpha/2)}{\rho\left(1+\sin(\alpha/2)\right)} \approx 8{,}2\ \text{A} \right)$$

5.18. В одній площині з нескінченним прямим провідником, по якому йде постійний струм I, розміщена квадратна рамка так, що її сторона a є паралельною до провідника. Рамка поступально рухається перпендикулярно до провідника із сталою швидкістю v. Визначити ЕРС індукції в рамці $\mathscr{E}(x)$ як функцію відстані x від провідника до центра рамки.

$$\left(\mathscr{E}(x) = \frac{2\mu_0 I v}{\pi}\frac{1}{(2x/a)^2 - 1} \right)$$

5.19. В одній площині з нескінченним прямим провідником із струмом розміщена квадратна рамка так, що її сторона a = 0,2 м є паралельною до провідника. Опір рамки R = 69 мОм, відстань від її ближньої сторони до провідника дорівнює a. Струм у провіднику змінюється з часом за законом $I_0 = \gamma t^3$, де $\gamma = 2$ А/с^3. Визначити силу струму у рамці I на момент t = 10 с. $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(I = \frac{3\mu_0 \gamma a \ln 2}{2\pi R} t^2 = 240\ \text{мкА.} \right)$$

Перенесення заряду при зміні магнітного потоку

5.20. Циліндричну котушку з’єднали кінцями і вмістили в однорідне осьове магнітне поле, що змінюється з часом зі швидкістю $\dot{B}$ = 10 мТл/с. Котушка має опір R = 9 Ом і складається з N = 1000 витків діаметром d = 10 см. Знайти теплову потужність P, що виділяється в котушці.

$$\left(P = \frac{(\dot{B} N \pi d^2)^2}{16R} = 7\cdot10^{-4}\ \text{Вт} \right)$$

5.21. Магнітний потік крізь дротяний контур рівномірно змінюється із швидкістю 1,0 Вб/с. Визначити заряд на конденсаторі ємності 0,2 мкФ, який включений у цей контур.

($2\cdot10^{-7}$ Кл)

5.22. Циліндричну котушку з’єднану з конденсатором ємності C = 100 мкФ вмістили в паралельне до її осі магнітне поле, індукція котрого змінюється з часом із швидкістю $\dot{B}$ = 10 мТл/с. Знайти заряд конденсатора, якщо котушка складається з N = 1000 витків діаметром D = 10 см.

$$\left(q = \frac{N\pi D^2 \dot{B} C}{4} = 7{,}85\cdot10^{-5}\ \text{Кл} \right)$$

5.23. Виток з опором 0,1 Ом і площею 100 см^2 розміщений в однорідному магнітному полі з індукцією 0,25 Тл напрямленому під кутом 30° до площини витка. Визначити кількість тепла, що виділиться у витку, та кількість електрики, що пройде по ньому при рівномірному зменшенні індукції поля до нуля за час 0,5 с.

(Q = 31,25 мкДж; q = 12,5 мКл)

5.24. Магнітний потік Φ крізь контур з опором R змінюється за законом:

а) $\Phi = \tau(\alpha + \beta t)$

б) $\Phi = \alpha t^3$

в) $\Phi = \alpha t(\tau - t)$

г) $\Phi = \alpha B_0 \cos\omega t$

д) $\Phi = \alpha B_0 \sin\omega t$,

де t – час, усі інші величини – задані сталі. Визначити кількість теплоти Q, яка виділяється в контурі за час $t = \tau$. Індуктивністю контуру знехтувати.

$$\left(\text{а) } Q = \frac{\beta^2\tau^3}{R}, \qquad \text{б) } Q = \frac{9\alpha^2\tau^5}{5R}, \qquad \text{в) } Q = \frac{a^2\tau^3}{3R}, \right.$$

$$\left. \text{г) } Q = \frac{\alpha^2 B_0^2\omega}{2R}\left(\omega\tau - \frac{\sin 2\omega\tau}{2}\right), \text{ д) } Q = \frac{\alpha^2 B_0^2\omega}{2R}\left(\omega\tau + \frac{\sin 2\omega\tau}{2}\right)\right)$$

5.25. Кругле мідне кільце масою m = 5 г знаходиться в однорідному магнітному полі B = 0,2 Тл, перпендикулярному до його площини. Визначити заряд q, який пройде по кільцю, якщо його розтягнути в лінію за діаметральні точки.

$$\left(q = \frac{Bm}{4\pi\rho d} \approx 0{,}56\,\text{Кл}, \quad \rho, d - \textit{питомий опір і густина міді} \right)$$

5.26. Квадратну рамку опором R = 0,02 Ом розмістили в одній площині з нескінченним прямим провідником із струмом I = 1000 А так, що дві її сторони розташовані паралельно до провідника на відстанях, a_1 = 0,1 м і a_2 = 0,2 м. Яка-кількість електрики пройде по рамці при вимиканні струму в провіднику? $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(q = \frac{\mu_0 I(a_2 - a_1)}{2\pi R}\ln\frac{a_2}{a_1} = 6{,}93\cdot 10^{-4}\ \text{Кл} \right)$$

5.27. Плоска рамка площею 10 мм^2 і опором 10 Ом, яка складається з 500 витків тонкого дроту, вміщена в магнітне поле перпендикулярно до його напрямку. Рамку повертають на 180° навколо осі, що перпендикулярна до напрямку поля й лежить у площині рамки, через що по ній проходить заряд 25 мкКл. Чому дорівнює індукція поля?

(25 мТл)

Вплив ЕМІ на рух провідників

5.28. Два довгі паралельні вертикальні металеві стержні, що замкнені згори, знаходяться в горизонтальному магнітному полі B = 0,2 Тл, перпендикулярному до їх площини. По стержнях може ковзати без тертя й утрати контакту мідна поперечка, довжина котрої дорівнює відстані між стержнями. Якої найбільшої величини v_m може досягти швидкість поперечки при вільному зісковзуванні по стержнях та який вигляд має залежність швидкості поперечки від часу $v(t)$? Опором стержнів знехтувати.

$$\left(\begin{array}{l} v_m = \dfrac{\rho d g}{B^2} = 3{,}5\,\text{см/с}; \quad v(t) = g\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right); \\ \tau = \dfrac{\rho d}{B^2},\ \textit{де}\ \rho, d - \textit{питомий опір та густина міді.} \end{array} \right)$$

5.29. Два довгі паралельні металеві стержні, що замкнені згори, встановлені під кутом $\theta = 30°$ до горизонту й уміщені в перпендикулярне до їх площини магнітне поле $B = 0{,}05\,\text{Тл}$. По стержнях починає ковзати поперечка масою $m = 10$ г та опором $R = 10$ мОм. Довжина поперечки дорівнює відстані між стержнями $l = 20$ см. Знайти швидкість усталеного руху поперечки. Опором стержнів і тертям знехтувати.

$$\left(v_m = \frac{mgR\sin\theta}{B^2 l^2} = 0{,}49\,\text{м/с} \right)$$

5.30. По двох паралельних горизонтальних рейках, уміщених у вертикальне магнітне поле B = 0,15 Тл, може ковзати поперечка масою m = 10 г, довжина якої дорівнює відстані між рейками l = 20 см. Рейки замкнені з одного боку через опір R = 30 мОм. Поперечці поштовхом надають початкової швидкості v_0 = 1,8 м/с. Нехтуючи опором рейок і поперечки та тертям, знайти шлях S, який пройде поперечка до зупинки.

$$\left(S = \frac{m v_0 R}{B^2 l^2} = 60\,\text{см} \right)$$

5.31. По двох довгих паралельних і замкнених з одного боку горизонтальних рейках, уміщених у вертикальне магнітне поле B = 0,1 Тл, може ковзати без тертя поперечка масою m = 100 г і опором R = 40 мОм. Довжина поперечки дорівнює відстані між рейками l = 20 см. Яке прискорення a буде мати поперечка через час τ =10 с після початку дії на неї сили F = 0,1 Н, напрямленої вздовж рейок? Опором рейок знехтувати.

$$\left(a = \frac{F}{m} e^{-\alpha\tau},\ \textit{де}\ \alpha = \frac{B^2 l^2}{mR}; \quad a \approx 0{,}37\,\text{м/с}^2 \right)$$

5.32. Найпростіший магнітогідродинамічний генератор (МГД-генератор) являє собою плоский конденсатор уміщений в паралельне до обкладок магнітне поле, крізь який прокачується провідна рідина. Знайти ЕРС такого генератора, якщо крізь конденсатор із квадратними пластинами зі стороною 1 м щосекунди перпендикулярно до напрямку поля 0,5 Тл прокачується 3 м^3 рідини.

(1,5 В)

5.33. Електромагнітний насос для перекачування розплавленого металу являє собою ділянку труби прямокутного перерізу, яка вміщена в перпендикулярне до однієї пари поверхонь магнітне поле B. До іншої прикладають напругу, створюючи в розплавленому металі однорідний струм I перпендикулярний як до цих поверхонь, так і до магнітного поля. Знайти надлишковий тиск p на метал у насосі, якщо B = 0,2 Тл, I = 200 А, і ширина труби в напрямку магнітного поля a = 4,0 см.

$$\left(p = \frac{IB}{a} = 1{,}0\,\text{кПа} \right)$$

Індуктивність. Самоіндукція

5.34. Соленоїд з індуктивністю 0,5 Гн має 500 витків. Обчислити повний магнітний потік у соленоїді та потік через його поперечний переріз при силі струму 10 А.

(5 Вб; 10 мВб)

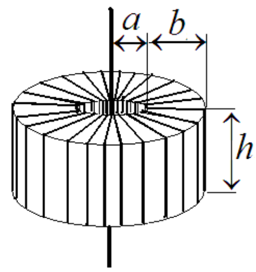


Рис. 5.5

5.35. Індуктивність довгого соленоїда достатньо точно визначається формулою $L = \mu_0 n^2 V$, де n – кількість витків на одиницю довжини, $V = lS$ – об'єм соленоїда. Виходячи з цього і вважаючи магнітне поле соленоїда однорідним, знайти залежність індукції B від сили струму I в соленоїді.

($B = \mu_0 n I$)

5.36. Визначити індуктивність соленоїда з довжиною l і діаметром d ($d \ll l$), який містить n витків на одиницю довжини.

$$\left(L = \frac{\pi \mu_0 n^2 l d^2}{4} = \mu_0 n^2 V \right)$$

5.37. Соленоїд довжини 1 м, намотаний в один шар на немагнітний каркас, має індуктивність 1,6 мГн. Площа поперечного перерізу соленоїда 20 см^2. Визначити число витків на один сантиметр довжини соленоїда.

(8 см$^{-1}$)

5.38. Соленоїд із кількістю витків 1000 має індуктивність 78,5·мГн. Знайти діаметр витка, якщо при силі струму в соленоїді 50 мА індукція магнітного поля дорівнює 50 мТл.

(1,0 см)

5.39. На сердечник у формі тора із внутрішнім радіусом a і прямокутним перерізом зі сторонами b і h (рис. 5.5), щільно намотано котушку з N витків дроту. Визначити індуктивність котушки, якщо проникність сердечника μ.

$$\left(L = \frac{\mu_0 \mu N^2 h}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \right)$$

5.40. По обмотці тороїда з кількістю витків N тече струм I. Тороїд має прямокутний переріз висоти h, із відношенням зовнішнього радіуса до внутрішнього (R_2/R_1) = η. Тороїд заповнено парамагнетиком із магнітною проникністю μ. Знайти магнітний потік Ф через переріз тороїда при струмі в тороїді I та його індуктивність L.

$$\left(\Phi = \frac{\mu_0 \mu I N h}{2\pi} \ln \eta \, ; \; L = \frac{\mu_0 \mu N^2 h}{2\pi} \ln \eta \right)$$

5.41. Довгий прямий соленоїд із круглим перерізом радіуса R і кількістю витків на одиницю довжини n заповнений неоднорідним магнетиком, проникність якого залежить тільки від відстані до осі соленоїда r за законом $\mu = 1 + (r/R)$. Знайти магнітний потік через поперечний переріз соленоїда при силі струму I.

$$\left(\Phi = \frac{5\pi \mu_0 n I R^2}{3} \right)$$

5.42. Обчислити взаємну індуктивність нескінченного прямого провідника та прямокутної рамки зі сторонами a і b, розташованої в одній площині з провідником на відстані h, як показано на рис. 5.6.

$$\left(L_{12} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{h+a}{h} \right)$$

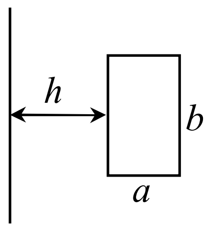


Рис. 5.6

5.43. Визначити взаємну індуктивність тороїда із задачі 5.40 та прямого нескінченного провідника, розташованого по осі тороїда.

$$\left(L_{12} = \frac{\mu_0 \mu N h}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \right)$$

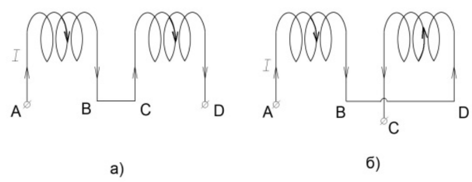


Рис.5.7

5.44. Дві котушки із власними індуктивностями 3 мГн і 5 мГн з’єднані, як показано на рис. 5.7а та підключені до джерела в точках A, D. При цьому індуктивність системи дорівнює 11 мГн. Якою стане індуктивність системи, якщо котушки при незмінному розташуванні з’єднати, як показано на рис. 5.7б, і підключити до джерела в точках A, C?

(5 мГн)

5.45. У соленоїді, намотаному в один шар мідним дротом із діаметром d = 0,2 мм на циліндр із немагнітного матеріалу діаметра D = 5 см, проходить струм $I = 1$ А. Визначити, яка кількість електрики q пройде по соленоїду, якщо його з’єднати . Товщиною ізоляції знехтувати.

$$\left(q = \frac{\pi \mu_0 d D}{16 \rho} I = 154 \text{ мкКл} \right)$$

5.46. На картонний тор квадратного перерізу із стороною a = 5 см і середнім радіусом r = 7,5 см намотана обмотка з N = 100 витків. По обмотці тече струм I = 3А. Яка кількість електрики q пройде по надітому на тор мідному кіль цю з опором R = 69 мОм при вимиканні струму в обмотці? $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(q = \frac{\mu_0 I a N^2}{2\pi R} \ln \frac{2r + a}{2r - a} = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{Кл} \right)$$

Енергія магнітного поля

5.47. На кожен сантиметр стержня довжини l =50 см із немагнітного матеріалу намотано в один шар n = 20 витків дроту. Обчислити енергію W магнітного поля всередині такого соленоїда, якщо сила струму в обмотці I = 0,5 А. Площа перерізу стержня S = 2 см^2. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

($W = \mu_0 n^2 I^2 S l / 2$ = 62,8 мкДж)

5.48. Енергія магнітного поля соленоїда, що дорівнює 90 мДж, змінюється в 9 разів при зміні струму в соленоїді на 6 А. Знайти початковий струм та індуктивність соленоїда.

(3 А *або* 9 А; 20 мГн)

5.49. Соленоїд містить N = 1000 витків дроту. Сила струму в його обмотці I = 1 А, а магнітний потік крізь переріз соленоїда Φ = 0,1 мВб. Визначити енергію W магнітного поля в соленоїді.

($W = NI\Phi / 2 = 50$ мДж)

5.50. На сердечник у формі тора намотано в один шар 200 витків дроту. Знайти енергію магнітного поля в тороїді при силі струму в обмотці 2,5 А, якщо магнітний потік у сердечнику складає 0,5 мВб.

(125 мДж)

5.51. Соленоїд довжиною l = 0,5 м і площею поперечного перерізу $S = 2$ см^2 має індуктивність $L = 2$ мГн. Знайти силу струму I, при якій об'ємна густина енергії магнітного поля в соленоїді $w = 1$ мДж/м^3?

$$\left(I = \sqrt{\frac{2wlS}{L}} = 10\,\text{мА} \right)$$

5.52. По обмотці соленоїда опором 0,1 Ом та індуктивністю 20 мГн проходить струм. Яку частку η (%) від початкової складає енергія магнітного поля соленоїда через час t_1 = 0,05 с та t_2 = 0,5 с після того, як його від'єднали від джерела та замкнули кінці.

($\eta_1 \approx 61$ %; $\eta_2 \approx 0{,}67$ %)

5.53. Два соленоїди намотали на немагнітний каркас один поверх одного. Кількість витків соленоїдів $N_1 = 1200$ і $N_2 = 750$, площа поперечного перерізу

$S = 20\ \text{см}^2$, довжина $l = 1\ \text{м}$. По обмотках соленоїдів проходять струми $I_1 = 5\ \text{А}$ і $I_2 = 8\ \text{А}$, відповідно. Обчислити енергію W магнітного поля системи, коли напрямки струму у витках: а) однакові і б) протилежні.

(а) ≈ 15 мкДж; б) 0)

5.54. По довгому циліндричному немагнітному провіднику тече струм I = 100А. Знайти енергію магнітного поля всередині ділянки провідника довжиною l = 1 м. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(W = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{Дж} \right)$$

5.55. По обмотці тороїда із задачі 5.39 тече струм I. Визначити:
- залежність $w(r)$ об'ємної густини енергії магнітного поля в тороїді від відстані r до його осі;
- повну енергію W магнітного поля всередині тороїда;
- магнітну енергію обмотки тороїда W' через індуктивність та струм, використавши відповідь задачі 5.39.

$$\left(w(r) = \frac{\mu_0 \mu N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}; \quad W = W' = \frac{\mu_0 \mu N^2 I^2 h}{4\pi} \ln\frac{a+b}{a}. \right)$$

Вихрове електричне поле. Струм зміщення

5.56. Індукція магнітного поля всередині довгого соленоїда радіуса R = 10 см зростає з часом за законом $B = \alpha t$, α = 10^{-3} Тл/с. Знайти напруженість вихрового електричного поля E у залежності від відстані r до осі соленоїда. Обчислити напруженість $E(R)$ на поверхні соленоїда та показати вид графіка $E(r)$.

$$\left(E(r) = \frac{\alpha r}{2}\ \textit{у соленоїді та}\ E(r) = \frac{\alpha R^2}{2r}\ \textit{назовні};\ E(R) = 50\ \text{мкВ/м} \right)$$

5.57. Індукція магнітного поля довгого соленоїда радіуса R = 8 см змінюється з часом за законом $B = B_0(1 - t^2/\tau^2)$, де B_0 = 25 мТл, τ = 0,4 с. Знайти напруженість вихрового електричного поля на поверхні соленоїда $E(R)$ у момент часу $t = \tau$.

($E = B_0 R/\tau$ = 5 мВ)

5.58. По соленоїду довжини l = 0,2 м із кількістю витків N = 200, тече змінний струм $I = I_0 \sin(2\pi\nu t)$, де ν = 50 Гц, I_0 = 10 А. Визначити амплітуду напруженості вихрового електричного поля $E_0(r)$ у соленоїді в залежності від відстані r до його осі. Якої амплітуди U_0 напругу створює це поле у намотаній в один шар котушці з кількістю витків N_0 =100 і радіусом витка R_0 = 1 см, яка розміщена всередині соленоїда уздовж його осі? $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Соленоїд уважати довгим.

$$\left(E_0(r) = \frac{\mu_0 \pi \nu N I_0}{l} r; \quad U_0 = 2\pi N_0 R_0 E_0 = 12{,}4\,\text{В} \right)$$

5.59. Напруженість однорідного електричного поля усередині плоского повітряного конденсатора з обкладками у формі дисків лінійно зростає з часом за законом $E = \alpha t$, де $\alpha = 9 \cdot 10^{10}$ В/(м·с). Знайти індукцію магнітного поля всередині конденсатора на відстані r = 5 см від його осі. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$\left(B = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \alpha}{2} r = \frac{\alpha}{2c^2} r = 25\,\text{нТл} \right)$$

5.60. Плоский конденсатор із обкладками у формі дисків, відстань між якими d, заповнений однорідним слабко провідним середовищем із питомою провідністю σ та діелектричною проникністю ε і підключений до джерела постійної напруги U. У момент $t = 0$ джерело відключають. Визначити:

– густину струму j_0 та напруженість магнітного поля $H(r)$ усередині конденсатора як функцію відстані від осі до відключення джерела напруги;
– густину струму $j(t)$ у залежності від часу та напруженість магнітного поля H усередині конденсатора після відключення джерела напруги.

$$\left(j_0 = \frac{U\sigma}{d},\ H(r) = \frac{j_0}{2} r; \qquad j = j_0 e^{-\frac{t}{\tau}},\ де\ \tau = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma},\ H = 0 \right)$$

5.61. Плоский конденсатор з обкладками у формі дисків і відстанню між ними d, який заповнений однорідним слабко провідним середовищем із питомою провідністю σ і діелектричною проникністю ε, підключений до джерела змінної напруги $U = U_m \cos\omega t$ Визначити напруженість магнітного поля $H(r)$ у конденсаторі в залежності від відстані r до його осі.

$$\left(H = H_m \cos(\omega t + \alpha),\ де\ H_m = \frac{rU_m}{2d}\sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon\varepsilon_0\omega)^2},\ і\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\omega}{\sigma} \right)$$

6. Рух зарядів у електричному та магнітному полях

6.1. Сила Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}\vec{B}\right].$$

6.2. Рівняння руху релятивістської частинки з масою спокою m і зарядом q

у поздовжньому електричному полі $\vec{E}$ незмінного напрямку:

$$\frac{m\vec{a}}{\left(1-\left(v^2/c^2\right)\right)^{3/2}} = q\vec{E}$$

у поперечному магнітному полі $\vec{B}$:

$$\frac{m\vec{a}}{\sqrt{1-\left(v^2/c^2\right)}} = q\left[\vec{v}\vec{B}\right]$$

Рух в електричному полі

6.1. Кулька з масою 50 г і зарядом 100 мкКл висить на нитці між двома паралельними плоскими металевими пластинами (плоский конденсатор), не торкаючись їх. На який кут від вертикалі відхилена нитка, якщо пластини заряджені до напруги 500 В і відстань між ними 10 см? $g = 10$ м/с^2.

(45°)

6.2. Кулька масою 0,1 мг із зарядом 10 нКл починає падати в однорідному горизонтальному електричному полі з напруженістю 100 В/м. Якою буде траєкторія руху кульки та яку швидкість вона матиме через 1 с після початку руху?

(*Прямою в напрямку* 45° *до горизонту;* 14 м/с)

6.3. При опромінюванні золотої фольги α-частинками (ядрами атомів гелію) з енергією 10 МеВ у дослідах Резерфорда[1] спостерігалися поодинокі відбивання частинок від атомів фольги у зворотньому напрямку. Заряд α-частинки $q_\alpha = 2e$, заряд ядра атома золота $q_я = 79e$. Оцінити за цими даними порядок величини радіуса атомного ядра. $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $\left(1/4\pi\varepsilon_0\right) = 9\cdot10^9$ м / Ф.

$\left(\sim 10^{-14}\text{ м}\right)$

6.4. Підвішену на нитці та відхилену від вертикалі на кут 45° кульку із масою 10 г і зарядом 1 мКл відпустили й у момент проходження найнижчого положення увімкнули горизонтальне гальмівне електричне поле з напруженістю

[1] У цих дослідах було відкрито існування атомного ядра.

100 В/м. На який кут відхилиться нитка після цього?

(15°)

6.5. Підвішену на нитці й уміщену в однорідне напрямлене донизу електричне поле кульку із масою 10 г і зарядом 1 мКл утримують у відхиленому на кут 60° від вертикалі положенні. Потім кульку відпускають і в момент проходження найнижчої точки вимикають поле. Відтак кулька відхиляється на кут 90°. Знайти напруженість електричного поля.

(100 В/м)

6.6. Знайти питомий заряд (відношення заряду до маси) кульки, що обертається з частотою 0,8 об/хв по колу радіусом 3 см, навколо точкового заряду 5 нКл.

(≈ 4,2 нКл/кг.)

6.7. Куля з масою 1 кг і зарядом 60 мКл, що підвішена у вертикальному електричному полі на нерозтяжному невагомому шнурі довжиною 2 м, рухається по колу в горизонтальній площині. Знайти період обертання кулі, якщо напруженість поля 100 В/м і кут відхилення шнура від вертикалі 30°.

(≈ 2 с або ≈ 4 с)

6.8. Електрон влітає із швидкістю $5 \cdot 10^6$ м/с в однорідне електричне поле в напрямку поля. На яку максимальну відстань заглибиться електрон у поле, якщо його напруженість 400 В/м? Питомий заряд електрона $(e/m) = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

(≈ 18 см)

6.9. Релятивістський електрон влітає із швидкістю $2{,}4 \cdot 10^8$ м/с в однорідне електричне поле в його напрямку. На яку максимальну відстань заглибиться електрон у поле з напруженістю 400 В/см? Якою була би відповідь, якби електрон рухався в полі за законами класичної механіки? Маса електрона $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд $-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

(8,5 м; 4,1 м)

6.10. Частинка з питомим зарядом Q починає рухатися в додатньому напрямі осі OX під дією електричного поля, напруженість якого на траєкторії руху $E = E_0 - kx$, де x – координата частинки, E_0 і k – задані сталі. Знайти шлях S, який пройде частинка від початку координат до зупинки, а також її прискорення a_0 в момент зупинки та максимальну швидкість v_m на цій ділянці траєкторії. (Питомим зарядом називають відношення електричного заряду частинки до її маси: $Q = q/m$).

$$\left(S = \frac{2E_0}{k}; \quad a_0 = -QE_0; \quad v_m = E_0\sqrt{\frac{Q}{k}} \right)$$

6.11. Електрон, який пройшов прискорюючу напругу U_0, влітає у простір між двома паралельними плоскими зарядженими до напруги U пластинами (плоский конденсатор) біля краю однієї пластини, а вилітає біля краю іншої. Під яким кутом α влітає електрон в конденсатор, якщо він вилітає паралельно до пластин? Уважати, що електричне поле існує тільки між пластинами і є скрізь однорідним.

$$\left(\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{U}{U_0}}, \quad U < U_0\right)$$

6.12. Електрон, що пройшов прискорюючу напругу U_0 = 1000 В, влітає у заряджений плоский конденсатор із квадратними пластинами паралельно, а вилітає під кутом α = 15° до пластин. Відстань між пластинами d =1 см і напруга них U = 10 В. Знайти площу пластин S та ємність конденсатора C, якщо точка вльоту електрона розташована біля краю однієї пластини, а вильоту – є біля краю іншої

$$\left(S = \left(2d\sin 2\alpha \cdot \frac{U_0}{U}\right)^2 = 1\ \text{м}^2, \quad C \approx 900\ \text{пФ}\right)$$

6.13. Електрон, який має швидкість $v_0 = 4{,}7 \cdot 10^5$ м/с, влітає посередині в простір між пластинами плоского конденсатора під кутом $\alpha = 30°$ у напрямку однієї пластини, як показано на рис. 6.1, а вилітає біля краю іншої пластини. З якою швидкістю та під яким кутом до пластин електрон вилетить із конденсатора?

$(1{,}4 \cdot 10^6$ м/с, 60°)

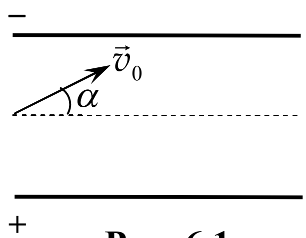


Рис. 6.1

6.14. Плоский конденсатор має довжину пластин l = 5 см і відстань між ними d = 1 см. У конденсатор уздовж пластин під кутом α = 15° до них влітає електрон з енергією W = 1,5 кеВ. При якій напрузі на конденсаторі електрон вилетить із нього паралельно до пластин? $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

$$\left(U = \frac{Wd\sin 2\alpha}{el} = 150\,\text{В}\right)$$

6.15. На плоский конденсатор із відстанню між пластинами l = 5,0 см подають напругу, що змінюється з часом за законом $U = \alpha t$, де α = 100 В/с. У момент часу t = 0 від однієї з пластин починає рухатись електрон. З якою швидкістю v він досягне іншої пластини? $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

$$\left(v = \sqrt[3]{\frac{9ael}{2m}} = 1{,}6 \cdot 10^4\ \text{м/с}\right)$$

6.16. Протон, прискорений різницею потенціалів U, в момент t = 0 влітає в електричне поле плоского конденсатора паралельно до пластин, довжина яких у напрямку руху дорівнює l. Напруженість поля змінюється в часі, як $E = \alpha t$, де

α – стала. Вважаючи протон нерелятивістським, знайти кут між напрямками вльоту та вильоту протона з конденсатора. Крайовими ефектами знехтувати.

$$\left(\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\alpha l^2}{\sqrt{32(e/m)U^3}}\right)$$

6.17. Заряджена частинка з питомим зарядом $(q/m) = 6{,}0 \cdot 10^6$ Кл/кг розташована у вакуумі в центрі рівномірно зарядженого кільця радіуса r = 10 см із зарядом Q = 40 мкКл. До якої максимальної швидкості розженеться частинка після незначного поштовху?

(6,6·10^6 м/с)

6.18. При опроміненні металів ультрафіолетовим світлом вони втрачають електрони (фотоефект). Яку кількість N електронів утратить під дією світла у вакуумі металева кулька радіусом R = 5 мм, якщо електрони вилітають з неї із швидкістю v = 2·10^6 м/с? Маса і заряд електрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

$$\left(N = \frac{2\pi\varepsilon_0 m v^2 R}{e^2} \approx 4 \cdot 10^7\right)$$

6.19. Елементарна частинка із масою m і зарядом q починає рух в однорідному нестаціонарному електричному полі. Розглядаючи її як релятивістську, визначити залежність $E(t)$ напруженості поля від часу, при якій частинка буде рухатися за законом $x = at^2/2$, де $a = const$.

$$\left(E(t) = \frac{ma}{q\left(1-(at/c)^2\right)^{3/2}}\right)$$

6.20. Електрон починає рухатися в однорідному електричному полі з напруженістю E = 3·10^6 В/м. Маса електрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Визначити:

1) залежність швидкості електрона від часу $v(t)$;
2) знайти наближені вирази $v(t)$ а) на початковому етапі $(at << c)$ та б) при субсвітлових $(at >> c)$ швидкостях руху електрона і показати приблизний вигляд графіка залежності $v(t)$;

3) величину v через 1 нс після початку руху та величину $v_{кл}$ розраховану за законами класичної механіки.

$$\left(\begin{array}{l} 1)\ v=\dfrac{at}{\sqrt{1+(at/c)^2}}=\dfrac{c}{\sqrt{1+(c/at)^2}},\ \ \partial e\ a=\dfrac{eE}{m_0}; \\ 2)\ a)\ v=at,\quad б)\ v=c\left(1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{at}\right)^2\right); \\ 3)\ v=2{,}6\cdot10^8\,\text{м/с},\ v_{кл}=5{,}3\cdot10^8\,\text{м/с} \end{array}\right)$$

6.21. Релятивістський електрон із швидкістю 2,4·10^8 м/с влітає в напрямку однорідного електричного поля з напруженістю 400 В/см. Яку відстань S пройде електрон до зупинки? Яку величину $S_{кл}$ мала би ця відстань, коли б електрон рухався за законами класичної механіки?

$$\left(S=8{,}5\,\text{м};\quad S_{кл}=4{,}1\,\text{м}\right)$$

6.22. Релятивістський електрон із швидкістю 2,4·10^8 м/с влітає в напрямку однорідного електричного поля з напруженістю 400 В/см. Через який час електрон вилетить із поля?

$$\left(\tau=11{,}4\,\text{мкс}\right)$$

Рух у магнітному полі

6.23. Електрон з масою m і зарядом e рухається в однорідному магнітному полі з індукцією 1,0 мТл по колу радіуса 5 см. Визначити швидкість v і кінетичну енергію електрона. Питомий заряд електрона $(e/m)=1,76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

$$\left(v=(e/m)BR=8{,}8\cdot10^6\ \text{м/с};\quad K=3{,}5\cdot10^{-17}\ \text{Дж}=220\ \text{еВ}\right)$$

6.24. Електрон, прискорений електричним полем, рухається по колу радіуса 1 см у магнітному полі з індукцією 1 мТл. Знайти прискорюючу різницю потенціалів. $e=1,6\cdot10^{-19}$ Кл, $m_e=9,1\cdot10^{-31}$ кг.

(8,8 В)

6.25. Перпендикулярно до напрямку магнітного поля з індукцією 10 мТл влітає електрон з кінетичною енергією 30 кеВ. Визначити форму та радіус кривизни траєкторії електрона. $e=1,6\cdot10^{-19}$ Кл, $m_e=9,1\cdot10^{-31}$ кг, 1 еВ $=1,6\cdot10^{-19}$ Дж.

(*дуга кола радіуса* 5,8 см)

6.26. Електрон, який пройшов прискорюючу напругу U = 50 кВ, влітає в перпендикулярне до напрямку його руху протяжне однорідне магнітне поле з плоскою передньою межею й вилітає з поля на відстані d =30 см від точки вльоту.

Знайти індукцію поля B.

$$\left(B = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{2mU}{e}} = 5\,\text{мТл} \right)$$

6.27. Електрон, прискорений різницею потенціалів U = 1,0 кВ, рухається в однорідному магнітному полі з індукцією B = 29 мТл під кутом α = 30° до напрямку поля. Знайти радіус кривизни та крок гвинтової лінії – траєкторії електрона. $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг, $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл.

$$\left(R = \frac{\sin\alpha}{B}\sqrt{2mU/e} \approx 1{,}8\text{ мм};\quad h = \frac{2\pi\cos\alpha}{B}\sqrt{2mU/e} = 2\text{ см} \right)$$

6.28. Електрон влітає із швидкістю $v = 8{,}85\cdot 10^{6}$ м/с в однорідне магнітне поле із плоскою межею під кутом α = 60° до напрямку поля. На якій відстані d від точки вльоту електрон вилетить з поля, якщо його індукція дорівнює B = 1,0 мТл? $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг, $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл.

$$\left(d = \frac{m_e v}{eB}\sqrt{4\sin^2\alpha + \pi^2\cos^2\alpha} = 18\,\text{см} \right)$$

6.29. Електрон, який пройшов прискорюючу різницю потенціалів 4,5 кВ, потрапляє в однорідне магнітне поле і рухається в ньому по гвинтовій лінії з радіусом 1 см і кроком 8 см. Знайти індукцію магнітного поля. $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

(14 мТл)

6.30. У певній області простору створено взаємно перпендикулярні однорідне електричне поле з напруженістю 1 МВ/м та однорідне магнітне поле з індукцією 10 мТл. В цю область влітає перпендикулярно до напрямку обох полів і рухається далі прямолінійно пучок мюонів. Знайти швидкість мюонів у пучку. Чи можна за вказаних умов визначити величину та знак заряду мюона? А як було б можна?

(10^{8} м/с)

6.31. Нерелятивістські протони рухаються прямолінійно в області, де створені однорідні взаємно перпендикулярні електричне поле E = 4,0 кВ/м і магнітне поле B = 50 мТл. Напрям руху є перпендикулярним до напрямків обох полів. Знайти радіус кривизни траєкторії, по якій рухатимуться протони після вимикання електричного поля.

$$\left(R = mE/eB^2 \right)$$

6.32. Протон, прискорений різницею потенціалів U = 500 кВ, пролітає крізь поперечне однорідне магнітне поле з індукцією B = 0,51 Тл. Товщина області з по-

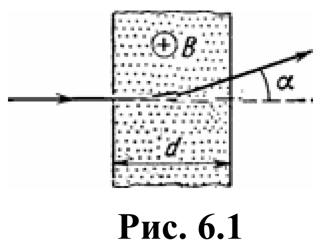


Рис. 6.1

лем d = 10 см. (див. рис. 6.1). Під яким кутом α протон вилетить із поля? $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

$$\left(\sin\alpha = dB\sqrt{\frac{e}{2m_pU}}; \quad \alpha = 30^\circ \right)$$

6.33. Релятивістський електрон, прискорений різницею потенціалів U = 511 кВ, пролітає крізь смугу поперечного магнітного поля (рис. 6.1) з індукцією B = 20 мТл і заданою товщиною смуги d. Під яким кутом α до початкового напрямку руху електрон вилетить із поля? $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Розглянути випадки 1) d = 7,4 см і 2) d = 15 см.

$$\left(\sin\alpha = \frac{dBc}{U\sqrt{1 + \left(2m_ec^2/eU\right)}}; \quad \alpha_1 = 30^\circ, \quad \alpha_2 = 180^\circ \right)$$

6.34. Електрон, прискорений різницею потенціалів U = 511 кВ, влітає в смугу поперечного однорідного магнітного поля (рис. 6.1) з індукцією B = 0,05 Тл. При якій найменшій ширині d смуги поля електрон не зможе пройти крізь неї? $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

$$\left(d = \frac{U}{cB}\sqrt{1 + \left(2m_ec^2/eU\right)} = 59 \text{ мм} \right)$$

6.35. Знайти питомий заряд (q/m) релятивістської частинки, яка при швидкості $v = 0{,}8c$ в поперечному однорідному магнітному полі з індукцією 25 мТл описує коло радіуса 9,1 см.

($1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг)

6.36. Визначити період обертання T електрона в поперечному магнітному полі з індукцією B = 0,02 Тл, якщо його кінетична енергія $K = \eta E_0$, де $E_0 = mc^2$ – енергія спокою і $\eta = 3$. Питомий заряд електрона (q/m) = $1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

$$\left(T = \frac{2\pi}{(e/m)B}(1+\eta) \approx 7 \text{ нс} \right)$$

6.37. Пучок швидких заряджених елементарних частинок рухається в поперечному магнітному полі по коловій орбіті, на якій за класичними (нерелятивістськими) розрахунками вони мали би мати кінетичну енергію $K_{кл} = 4E_0$, де E_0 – енергія спокою частинки. Якою насправді є кінетична енергія частинок K?

$$\left(K = \left(\sqrt{1 + 2(K_{кл}/E_0)} - 1\right)E_0 \quad \Rightarrow \quad K = 2E_0 \right)$$

7. Електричні коливання. Змінний струм

7.1. Власна частота LC-контура:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

7.2. Частота вільних загасаючих коливань у послідовному контурі:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \qquad \beta = \frac{R}{2L}.$$

7.3. Логарифмічний декремент загасання та добротність контура:

$$\lambda = \beta T, \quad Q = \frac{\pi}{\lambda}.$$

7.4. Амплітуда та резонансна частота вимушених коливань напруги на ємності послідовного контура:

$$U_{0C} = \frac{U_{\text{г}}\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

7.5. Амплітуда I_0 та резонансна частота $\omega_{рез}$ вимушених коливань струму в послідовному контурі:

$$I_0 = \frac{U_{\text{г}}\omega}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \qquad \omega_{рез} = \omega_0.$$

7.6. Зсув фаз між вимушеними коливаннями струму та напруги генератора в послідовному контурі:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

7.7. Реактивні опори та повний опір (імпеданс) Z послідовного кола змінного струму:

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad X = X_L - X_C, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

7.8. Закон Ома для змінного струму:

$$I_m = \frac{U_m}{Z}.$$

7.9. Діючі (ефективні) значення струму та напруги для синусоїдального струму:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

7.10. Потужність, яка виділяється в колі синусоїдального змінного струму:

$$P = UI\cos\varphi.$$

Вільні коливання в контурі

7.1. Коливання напруги на конденсаторі контура, що складається з котушки індуктивністю 1,0 мГн і конденсатора ємністю 0,1 мкФ, відбуваються за законом косинуса. Максимальний заряд на конденсаторі дорівнює 0,5 мкКл. У початковий момент часу напруга на конденсаторі складає половину амплітудного значення й надалі зростає. Скласти числове рівняння коливань струму в контурі.

$$\left(I(t) = 50\cos\left(10^5 t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (мА).} \right)$$

7.2. Коливання струму в контурі, що складається з конденсатора $C = 0{,}4$ мкФ і котушки індуктивності L = 1,0 мГн, здійснюються за законом $I = I_0 \cos\omega t$, де I_0 = 50 мА. Скласти числове рівняння коливань напруги на конденсаторі контура.

$$\left(U(t) = 2{,}5\sin(5\cdot 10^4 t). \right)$$

7.3. Коливальний контур складається з котушки та конденсатора ємністю 0,025 мкФ. Напруга на пластинах конденсатора змінюється за законом $U = U_0\cos(10^4\pi\cdot t)$ В. Визначити індуктивність котушки, період коливань та довжину хвилі, на якій резонує контур. Чому дорівнює амплітуда напруги на конденсаторі, якщо амплітуда струму становить 40 мА?

(40 мГн; 0,2·мс; $6\cdot 10^4$ м; 50,6 В.)

7.4. У коливальному контурі з конденсатором ємності 0,2 мкФ та котушкою індуктивності 1,0 мГн сила струму змінюється за законом $I(t) = 0{,}02\sin\omega t$. Визначити миттєві значення сили струму та напруги на конденсаторі через третину періоду після початкового моменту.

(0,017А; 0,7 В.)

7.5. У коливальному контурі з конденсатором ємності C_1 власна частота складала 30 кГц, а після заміни цього конденсатора на інший з ємністю C_2 вона стала рівною 40 кГц. Знайти лінійну частоту власних коливань у контурі з двома цими конденсаторами, якщо вони з’єднані: а) паралельно і б) послідовно.

(а) 24 кГц; б) 50 кГц.)

7.6. Конденсатор ємністю 50 пФ приєднали до джерела струму з ЕРС 3 В, а потім перемкнули на котушку з індуктивністю 5,1 мкГн. Знайти лінійну частоту вільних коливань у контурі та максимальну силу струму в котушці.

(10^7 Гц; 9,4 мА)

7.7. У контурі з котушкою індуктивності 5 мкГн і конденсатором ємності 1,33 мкФ амплітуда напруги на конденсаторі дорівнює 1,2 В. Знайти амплітуду магнітного потоку через поперечний переріз котушки, якщо вона має 28 витків.

(111 нВб.)

7.8. Два конденсатори однакової ємності, що з'єднані між собою один раз послідовно, а інший – паралельно, заряджають від одного джерела напруги та перемикають на котушку індуктивності. Знайти максимальну силу струму в котушці у другому випадку, якщо в першому вона була 10 мА.

(20 мА)

7.9. У контурі з котушкою індуктивності 0,4 мГн і конденсатором ємності 1 мкФ амплітуда напруги на конденсаторі дорівнює 1,0 В. Знайти струм у контурі на момент, коли напруга на конденсаторі складає 60% амплітудного значення.

(40 мА)

7.10. В ідеальному коливальному контурі амплітуда заряду на конденсаторі дорівнює 0,5 мкКл. Визначити власну циклічну частоту контура, якщо в момент, коли заряд конденсатора складав 80% від максимального, струм у контурі дорівнював 0,6 мА.

($2\cdot10^3$ рад/с).

7.11. Як і в скільки разів зміниться частота коливань у контурі з повітряним конденсатором, якщо між його обкладками розмістити діелектричну пластинку з проникністю $\varepsilon = 4$ і товщиною вдвічі меншою за відстань між обкладками?

(*зменшиться у* 1,3 рази.)

7.12. Коливальний контур, який складається з котушки індуктивності та повітряного конденсатора, має власну частоту 41,405 кГц. Після того, як контур умістили під вакуумний ковпак і відкачали повітря, власна частота стала рівною 41,418 кГц. Визначити за результатами цих вимірів діелектричну проникність повітря.

(1,00063)

7.13. При зміні ємності контура на $\Delta C = 50$ пФ власна частота змінилася від $\nu_1 = 100$ кГц до $\nu_2 = 120$ кГц. Знайти індуктивність контура.

$$\left(L = \frac{\nu_2^2 - \nu_1^2}{4\pi^2 \nu_1^2 \nu_2^2 \Delta C} = 15{,}8 \text{ мГн} \right)$$

7.14. У коливальному контурі радіопередавача максимальний заряд на конденсаторі дорівнює 10 мкКл, а максимальна сила струму – 10 А. Визначити довжину хвилі, яку генерує передавач.

(1885 м)

7.15. Визначити період вільних коливань у контурі, який складається з двох послідовно з'єднаних конденсаторів ємністю по 10 мкФ і двох послідовно з'єднаних котушок з індуктивністю 0,2 мГн і 0,4 мГн.

(0,34 мс.)

7.16. Заряджений конденсатор ємністю C приєднано через розімкнений ключ до двох паралельно сполучених котушок з індуктивностями L_1 і L_2.

Визначити початковий заряд на конденсаторі, якщо після замикання ключа амплітуда струму в котушці L_1 дорівнює I_1.

$$\left(q = I_1\sqrt{CL_1\left(L_1 + L_2\right)/L_2}.\right)$$

7.17. У коливальному контурі, що складається з конденсатора ємності C і котушки індуктивності L, відбуваються вільні незгасаючі коливання з амплітудою напруги на конденсаторі U_m. Знайти зв'язок між струмом I в контурі та напругою U на конденсаторі в довільний момент часу. Відповідь знайти як за допомогою закону Ома, так і через енергетичні співвідношення в контурі.

$$\left(U^2 + LI^2 / C = U_m^2.\right)$$

7.18. Коливальний контур складається з конденсатора ємності C, котушки індуктивності L із не істотним опором і ключа. При розімкненому ключі конденсатор зарядили до напруги U_m і потім, у момент $t = 0$, замкнули ключ. Знайти:

– струм в контурі як функцію часу $I(t)$;
– ЕРС самоіндукції $\mathcal{E}$ в котушці в моменти, коли електрична енергія конденсатора дорівнює магнітній енергії котушки.

$$\left(I = I_m \cos(\omega_0 t + (\pi / 2)),\ \ \text{де}\ \ I_m = U_m\sqrt{C / L},\ \omega_0 = 1 / \sqrt{LC};\ \mathcal{E} = U_m / \sqrt{2}.\right)$$

7.19. Визначити на скільки відсотків η змінюється амплітуда коливань за один період у контурі, що складається з котушки індуктивністю L = 40 мГн і опором R = 4 Ом та конденсатора ємністю C = 0,25 мкФ.

($\eta \approx 3$ %.)

7.20. У коливальному контурі з індуктивністю L, опором R і ємністю C здійснюються вільні коливання. Знайти, через який час амплітуда сили струму зменшиться в η разів та скільки коливань відбудеться за цей час.

$$\left(t = \frac{\ln\eta}{\beta} = \frac{2L\ln\eta}{R};\ N = \frac{t}{T} = \frac{\ln\eta}{2\pi}\sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1}.\right)$$

7.21. Визначити добротність Q послідовного контура з параметрами L, R, C у випадку а) сильного та б) слабкого загасання.

$$\left(\text{а)}\ Q = \sqrt{\frac{L}{R^2C} - \frac{1}{4}};\quad \text{б)}\ Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.\right)$$

7.22. У скільки разів η частота вільних коливань ω у контурі з добротністю Q = 1,0 відрізняється від власної частоти контура ω_0?

$$\left(\eta = \sqrt{1 + \left(1/4Q^2\right)} \approx 1{,}1.\right)$$

7.23. Частота вільних коливань у контурі $\nu = 10$ МГц, добротність Q = 5000. Знайти час t, за який амплітуда коливань зменшиться в η = 10 разів, і кількість коливань N у контурі за цей час.

$$\left(t = \frac{Q}{\pi\nu}\ln\eta \approx 0{,}37 \text{ мс};\;\; N \approx 3700. \right)$$

7.24. Батарея, яка складається з двох однакових конденсаторів ємністю по 2 мкФ, розряджається через котушку з індуктивністю 1 мГн і опором 50 Ом. Чи виникають при цьому коливання, якщо конденсатори з'єднані а) паралельно, б) послідовно?

(а) *ні*; б) *так*.)

7.25. Активний опір контура дорівнює R. Знайти критичний опір цього контура R_k, якщо частота вільних коливань у ньому відрізняється від власної частоти на ε = 0,5 %.

$$\left(R_k \approx \frac{R}{\sqrt{2\varepsilon}} = 10R \right)$$

7.26. Знайти добротність контура Q, критичний опір якого $R_k = \eta R$, де R – власний активний опір контура, й $Q >> 1$.

($Q = \eta/2$)

Вимушені коливання в контурі. Змінний струм

7.27. Активний опір коливального контура R = 0,33 Ом. Яку потужність споживає контур, якщо в ньому відбуваються незгасаючі коливання з амплітудою сили струму I_m = 30 мА.

(0,15 мВт.)

7.28. Коливальний контур складається з конденсатора ємності 100 пФ і котушки з індуктивністю 80 мкГн та активним опором 0,5 Ом. Визначити потужність, яку споживає контур, якщо в ньому підтримуються власні незгасаючі коливання з амплітудою напруги на конденсаторі U_m = 4 В.

(5·мкВт)

7.29. В коливальний контур послідовно включена змінна ЕРС. Обчислити добротність контура, якщо при резонансі напруга на конденсаторі в η разів більша, ніж на джерелі.

$$\left(Q = \sqrt{\eta^2 - \frac{1}{4}} \right)$$

7.30. Показати, що при резонансі в контура з малим загасанням амплітуда напруги на конденсаторі дорівнює $U_m = QU_0$, де Q – добротність контура і U_0 – амплітуда напруги генератора підключеного до контура.

($U_{cm} = QU_0$)

7.31. Коливальний контур з малим опором складається з котушки індуктивності L і конденсатора C. Для підтримання в ньому незагасаючих коливань з амплітудою напруги на конденсаторі U_m витрачається потужність P. Знайти добротність контура.

$$\left(Q = \frac{U_m^2}{2P}\sqrt{\frac{C}{L}} \right)$$

7.32. Коливальний контур з малим загасанням має індуктивність L і ємність C. Для підтримання в ньому незагасаючих коливань з амплітудою струму I_m витрачається потужність P. Знайти добротність контура.

$$\left(Q = \frac{I_m^2}{2P}\sqrt{\frac{L}{C}} \right)$$

7.33. Яку потужність треба підводити до контура з опором $R = 10$ мОм і добротністю $Q = 1000$, щоб підтримувати в ньому незагасаючі коливання з амплітудою напруги на конденсаторі $U_0 = 100$ мВ?

$$\left(P = \frac{U_0^2}{2RQ^2} = 5\cdot 10^{-7}\ \text{Вт} = 0{,}5\ \text{мкВт} \right)$$

7.34. Контур, що складається з послідовно сполучених конденсатора ємності C = 22 мкФ і котушки з активним опором R = 20 Ом та індуктивністю L = 0,35 Гн, підключено до мережі змінної напруги з амплітудою U_m = 180 В і частотою ω = 314 рад/с. Знайти:

– амплітуду струму в контурі I_m;
– різницю фаз φ між струмом і зовнішньою напругою;
– амплітуди напруги на конденсаторі U_C і котушці U_L.

$$\left(\begin{array}{l} I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = 4{,}5\ \text{А}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{(\omega L - 1/\omega C)}{R} = -\dfrac{\pi}{3}; \\ U_C = \dfrac{I_m}{\omega C} = 0{,}65\ \text{кВ}; \quad U_L = I_m\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 0{,}5\ \text{кВ}. \end{array} \right)$$

7.35. Послідовний RLC - контур підключено до генератора синусоїдальної напруги, частоту якої можна змінювати при незмінній амплітуді. Знайти частоту ω, при якій амплітуда сили струму в контурі буде максимальною.

7.36. Чи може в послідовному RLC - контурі бути більшою за амплітуду генератора напруга на: а) активному опорі; б) індуктивності; в) ємності?

7.37. Довести, що при слабкому загасанні добротність контура визначається, як $Q = \omega/\Delta\omega$, де ω – резонансна частота струму, а $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$ – ширина резонансної кривої амплітуди струму $I_m(\omega)$; ω_1 і ω_2 – частоти, при яких у контурі виділяється половина максимальної (резонансної) потужності.

7.38. Послідовний контур, який складається з резистора R, котушки індуктивності L і конденсатора C, підключено до генератора синусоїдальної напруги, частоту якої можна змінювати при незмінній амплітуді. Знайти частоту ω, при якій в контурі буде максимальною амплітуда напруги:

а) на конденсаторі;

б) на котушці;

в) на резисторі.

$$\left(\text{а) } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}; \quad \text{б) } \omega = \omega_0^2 \Big/ \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,, \ \text{в) } \omega = \omega_0, \, де\ \omega_0 = 1\Big/\sqrt{LC}\,, \ і\ \beta = R/2L\right)$$

7.39. Конденсатор 30 мкФ, заповнений ідеальним діелектриком, увімкнено в освітлювальну мережу з діючою напругою 220 В і частотою 50 Гц. Знайти діюче значення сили струму в конденсаторі та споживану ним потужність. Діелектрик ідеальний – то про який струм ідеться?

(2,07 А, 0 Вт)

7.40. Ідеальна котушка з індуктивністю 1,0 Гн увімкнена в мережу з діючою напругою 220 В і частотою 50 Гц. Знайти діючу силу струму в котушці та споживану нею теплову потужність

(0,7 А; 0 Вт)

7.41. Конденсатор 100 мкФ і резистор 30 Ом з'єднані послідовно й увімкнені в освітлювальну мережу. Знайти імпеданс кола Z та зсув фаз φ між струмом у колі та напругою мережі. Випереджає чи відстає за фазою струм від напруги в мережі? Зобразити приблизну векторну діаграму кола і показати на ній фазовий кут φ

(Z = 43,74 Ом, φ = 46,7°, *випереджає*)

7.42. На з'єднані послідовно конденсатор 200 мкФ та резистор 15,2 Ом подано діючу напругу 220 В промислової частоти 50 Гц. Знайти діюче значення струму в колі та споживану ним потужність.

(10 А, 1,52 кВт.)

7.43. Котушка з індуктивністю 100 мГн та активним опором 25 Ом увімкнена в мережу з діючою напругою 220 В і частотою 50 Гц. Визначити діюче значення струму I та потужність P, що їх споживає котушка, а також зсув фаз φ між коливаннями струму в котушці та напруги в мережі. Випереджає чи відстає за фазою струм від напруги в мережі? Зобразити приблизну векторну діаграму кола і показати на ній фазовий кут φ.

(≈5,5 А, 756 Вт, 51,5°, *відстає*.)

7.44. Сполучені послідовно котушка з індуктивністю 100 мГн і резистор R_0 = 20 Ом підключені до генератора з напругою 100 В і частотою 400 рад/с. Знайти активний опір котушки, якщо діюча сила струму в колі дорівнює 2 А.

(10 Ом.)

7.45. Знайти потужність, яку споживає коло з активним опором 50 Ом та імпедансом (повним опором) 110 Ом від мережі з діючою напругою 220 В і частотою 50 Гц. Чому дорівнює зсув фаз між коливаннями струму в колі та напруги в мережі?

(200 Вт, 63°.)

7.46. На послідовне коло, що складається з конденсатора 40 мкФ, котушки індуктивності 1,0 мГн та резистора 25 Ом, подано від генератора змінну напругу із діючим значенням 2,0 В і коловою частотою $5\cdot 10^3$ $с^{-1}$. Знайти амплітуду струму, споживану колом потужність, і зсув фаз між коливаннями струму та напруги генератора.

(113 мА, 160 мВт, 0°.)

7.47. На з'єднані послідовно резистор R = 0,5 Ом, котушку індуктивності L = 4,0 мГн і конденсатор C = 200 мкФ подано змінну напругу з діючим значенням 11,2 В і частотою 1000 рад/с. Знайти діючу напругу на кожному елементі кола.

(U_R = 5 В, U_L = 40 В, U_C = 50 В)

7.48. З'єднані послідовно котушку з індуктивністю $L = 0{,}70\,\text{Гн}$ і активним опором $r = 20\,\text{Ом}$ та резистор з опором R увімкнули в мережу з діючою напругою 220 В і частотою 50 Гц. Знайти величину R, при якій коло буде споживати від мережі максимальну потужність P, та величину цієї потужності.

$$\left(R = 2\pi\nu L - r = 200\,\text{Ом}, \quad P = \frac{U^2}{4\pi\nu L} = 110\,\text{Вт}. \right)$$

7.49. До генератора з амплітудою синусоїдальної напруги 1,1 В і частотою 10^5 рад/с паралельно приєднали конденсатор C = 1,0 мкФ і резистор R = 4,4 Ом. Знайти імпеданс кола Z та амплітуду струму генератора I_0.

$$\left(Z = R \Big/ \sqrt{1 + (\omega CR)^2} = 3{,}67\ \text{Ом}; \quad I_0 = 0{,}3\ \text{А} \right)$$

7.50. В освітлювальну мережу з діючою напругою 220 В і частотою 50 Гц паралельно увімкнули котушку з індуктивністю 95,5 мГн і резистор 40 Ом. Побудувати векторну діаграму та знайти імпеданс кола.

(24 Ом)

7.51. До джерела синусоїдальної напруги з частотою ω підключили паралельно конденсатор ємності C і котушку з активним опором R та індуктивністю L. Знайти різницю фаз між струмом джерела та його напругою.

$$\left(\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega C(R^2 + \omega^2 L^2)}{R}. \right)$$

7.52. Для заряджання акумулятора постійним струмом I_0 потрібний час t_0. Скільки часу знадобиться для заряджання цього акумулятора від мережі змінного струму через однопівперіодний випрямляч, якщо діюче значення струму заряджання теж рівне I_0?

$\left(t = \pi t_0 / 2\right)$

7.53. На однопівперіодний випрямляч подано синусоїдальну напругу з амплітудою U_m = 220 В. Знайти діюче значення струму в резисторі R = 100 Ом, підключеному до цього випрямляча.

$(I = U_m/2R = 1{,}1$ А)

7.54. Знайти діюче значення змінного струму, якщо його середнє значення дорівнює $\langle I \rangle$, а миттєве значення визначається законом:
а) який показано на рис. 7.1;
б) $I \sim |\sin \omega t|$.

$$\left(\text{а)} I_д = \frac{2\langle I \rangle}{\sqrt{3}}; \quad \text{б)}\ I_д = \frac{\pi \langle I \rangle}{\sqrt{8}}.\right)$$

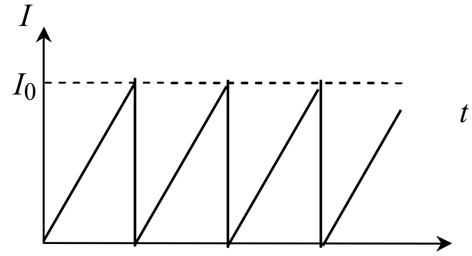


Рис. 7.1

7.55. Який відсоток часу горить газорозрядна лампа при вмиканні в освітлювальну мережу з діючою напругою 220 В, якщо напруга загоряння та погасання лампи дорівнює 155,6 В?

(66,7%).