/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{-1/16}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\dots,n-1;\quad z\neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{-1/16}$:

$$\sqrt[4]{-1/16}=\frac{1}{2\sqrt2}+i\frac{1}{2\sqrt2}\qquad \sqrt[4]{-1/16}=-\frac{1}{2\sqrt2}-i\frac{1}{2\sqrt2}$$

$$\sqrt[4]{-1/16}=-\frac{1}{2\sqrt2}+i\frac{1}{2\sqrt2}\qquad \sqrt[4]{-1/16}=\frac{1}{2\sqrt2}-i\frac{1}{2\sqrt2}$$

Ответ: $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}=\left\{\frac{1}{2\sqrt2}+i\frac{1}{2\sqrt2};-\frac{1}{2\sqrt2}-i\frac{1}{2\sqrt2};-\frac{1}{2\sqrt2}+i\frac{1}{2\sqrt2};\frac{1}{2\sqrt2}-i\frac{1}{2\sqrt2}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\operatorname{ch}(1+\pi i/3)$

Перейдем от гиперболического косинуса к тригонометрическому:

$$\operatorname{ch}(1+\pi i/3)=\cos(i-\pi/3)$$

Используем формулу косинуса разности:

$$\cos(i-\pi/3)=\cos(i)\cos(\pi/3)+\sin(i)\sin(\pi/3)$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$\cos(i)\cos(\pi/3)+\sin(i)\sin(\pi/3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}+$$

$$+\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-1}+e}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{e-e^{-1}}{2}\right)$$

Ответ: $\operatorname{ch}(1+\pi i/3)=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-1}+e}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{e-e^{-1}}{2}\right)$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$$

Функция Arctg является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$$

Подставим вместо z значение $\frac{-2\sqrt{3}+3i}{7}$:

$$\mathrm{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right) = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\frac{-2i\sqrt{3}-3}{7}}{1-\frac{-2i\sqrt{3}-3}{7}} =$$

$$= -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{7-2i\sqrt{3}-3}{7+2i\sqrt{3}+3} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{4-2i\sqrt{3}}{10+2i\sqrt{3}} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{2-i\sqrt{3}}{5+i\sqrt{3}}$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{2-i\sqrt{3}}{5+i\sqrt{3}} = -\frac{i}{2}[\ln\left|\frac{2-i\sqrt{3}}{5+i\sqrt{3}}\right| + i(\arg(\frac{2-i\sqrt{3}}{5+i\sqrt{3}}) + 2\pi k)] =$$

$$= -\frac{i}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\arg(\frac{2-i\sqrt{3}}{5+i\sqrt{3}}) + 2\pi k) \approx \frac{i}{2}\cdot 0{,}693 + \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k)$$

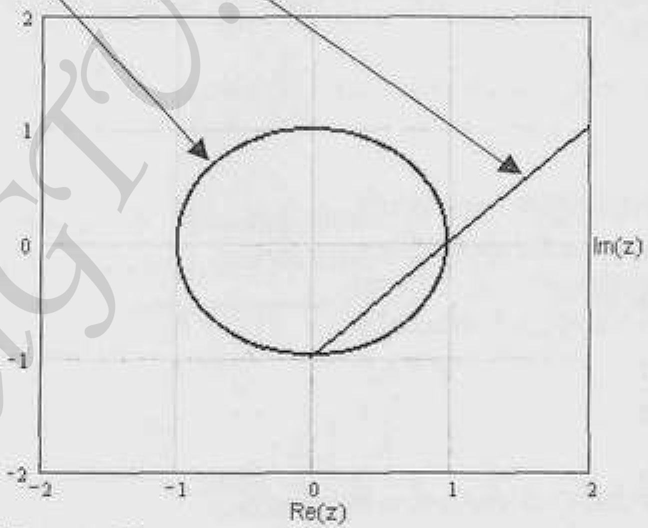
$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Ответ: $\mathrm{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right) \approx \frac{i}{2}\cdot 0{,}693 + \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k), k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z| \le 1, \quad \arg(z+i) > \pi/4$



Задача 5

Определить вид кривой:

$$z = \mathrm{th}\, 5t + \frac{5i}{\mathrm{ch}\, 5t}$$

Уравнение вида $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид $x = x(t)$, $y = y(t)$. В нашем случае:

$x(t) = \mathrm{th}\, 5t; \quad y(t) = 5/\mathrm{ch}\, 5t$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = \mathrm{th}\, 5t \Rightarrow t = \frac{1}{5}\mathrm{arth}\,(x)$$

$$y = \frac{5}{\mathrm{ch}\, 5t} \Rightarrow \mathrm{ch}\, 5t = \frac{5}{y} \Rightarrow t = \frac{1}{5}\mathrm{arch}\left(\frac{5}{y}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\frac{1}{5}\mathrm{arth}\,(x) = \frac{1}{5}\mathrm{arch}\left(\frac{5}{y}\right) \Rightarrow \mathrm{arch}\left(\frac{5}{y}\right) - \mathrm{arth}\,(x) = 0$$

Ответ: $\mathrm{arch}\left(\frac{5}{y}\right) - \mathrm{arth}(x) = 0$

Задача 6

Проверить, что v является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной мнимой части v(x,y) и значению $f(z_0)$:

$v = 3x^2y - y^3$

$f(0) = 1$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = 3x^2 - 3y^2 + 6ixy = 3(x+iy)^2 = 3z^2$$

Т.к. производная существует, то v является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int 3z^2dz = z^3 + C$$

Определим константу C:

$$f(0) = 0^3 + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$f(z) = z^3 + 1$

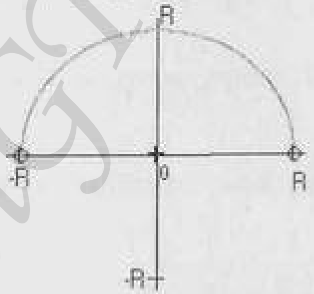
Ответ: $f(z) = z^3 + 1$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$\int\limits_L z\,\mathrm{Re}\,z^2dz;\ L:\{|z| = R; \mathrm{Im}\,z \geq 0\}$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = (x+iy)\,\mathrm{Re}\left(x^2 + 2ixy - y^2\right) = \underbrace{x^3 - xy^2}_{u(x,y)} + i\left(\underbrace{yx^2 - y^3}_{v(x,y)}\right)$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - y^2; \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 - 3y^2; \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y};$$

Условия Коши-Римана не выполняются, значит, функция не является аналитической. Тогда представим кривую в параметрическом виде:

$$z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = \sqrt{R^2 - t^2};$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} f[z(t)]z'(t)dt = \int\limits_{-R}^{R}\left(t + i\sqrt{R^2 - t^2}\right)\left(2t^2 - R^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1 - \frac{it}{\sqrt{R^2 - t^2}}\right)dt = -\frac{iR^4\pi}{2}$$

Ответ: $\int\limits_L f(z)dz = -\frac{iR^4\pi}{2}$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{z+2}{z+z^2-2z^3}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{z+2}{z+z^2-2z^3}=\frac{z+2}{-z(2z+1)(z-1)}=-\frac{1}{2z}\cdot\frac{z+2}{(z+0,5)(z-1)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

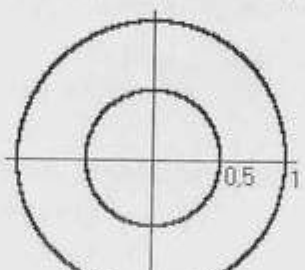
$$\frac{z+2}{(z+0,5)(z-1)}=\frac{A}{z+0,5}+\frac{B}{z-1}=\frac{Az-A+Bz+0,5B}{(z-0,5)(z+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=-1;B=2\}\Rightarrow\frac{z+2}{(z+0,5)(z-1)}=\frac{-1}{z+0,5}+\frac{2}{z-1}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{1}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+0,5}-\frac{2}{z-1}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=1; z=-0,5$



Рассмотрим область $|z|<0,5$:

$$f(z)=\frac{1}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+0,5}-\frac{2}{z-1}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1-(-2z)}+\frac{1}{1-z}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[(1-2z+4z^2-8z^3+\ldots)+(1+z+z^2+z^3+\ldots)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-2+4z-8z^2+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+1+z+z^2+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $0,5<|z|<1$:

$$f(z)=\frac{1}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+0,5}-\frac{2}{z-1}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{2z(1+\frac{1}{2z})}+\frac{1}{1-z}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{1}{2z}-\frac{1}{4z^2}+\frac{1}{8z^3}-\frac{1}{16z^4}+\ldots\right)+(1+z+z^2+z^3+\ldots)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{4z^3}+\frac{1}{8z^4}-\frac{1}{16z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+1+z+z^2+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>1$:

$$f(z)=\frac{1}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+0,5}-\frac{2}{z-1}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{2z(1+\frac{1}{2z})}-\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{1}{2z}-\frac{1}{4z^2}+\frac{1}{8z^3}-\frac{1}{16z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{4z^3}+\frac{1}{8z^4}-\frac{1}{16z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<0.5: f(z)=\left(\frac{1}{z}-2+4z-8z^2+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+1+z+z^2+\ldots\right)$$

7

$$0.5<|z|<1: f(z)=\left(\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{4z^3}+\frac{1}{8z^4}-\frac{1}{16z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+1+z+z^2+\ldots\right)$$

$$|z|>1: f(z)=\left(\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{4z^3}+\frac{1}{8z^4}-\frac{1}{16z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z-z_0.

$$f(z)=4\cdot\frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0=-2+2i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=4\cdot\frac{z+2}{(z-1)(z+3)}=\frac{3}{z+3}+\frac{1}{z-1}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{3}{z+3}=3\cdot\frac{1}{z+3}=3\cdot\frac{1}{(z-z_0)+1+2i}=3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1+2i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-z_0)-3+2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-3+2i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{3}{z+3}+\frac{1}{z-1}=3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1+2i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-3+2i)^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{(1+2i)^{n+1}}+\frac{1}{(-3+2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{(1+2i)^{n+1}}+\frac{1}{(-3+2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=e^{z/(z-3)}, z_0=3$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-3; e^{z/(z-3)}=e^{(z'+3)/z'}=e\cdot e^{3/z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=e\cdot e^{3/z'}=$$

$$=e\cdot\left(1+\frac{3}{z'}+\frac{9}{2!z'^2}+\frac{27}{3!z'^3}+...\right)=$$

$$=e+\frac{3e}{z'}+\frac{9e}{2!z'^2}+\frac{27e}{3!z'^3}+...$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=3$:

$$f(z)=e+\frac{3e}{z-3}+\frac{9e}{2!(z-3)^2}+\frac{27e}{3!(z-3)^3}+...$$

Ответ:

$$f(z)=e+\frac{3e}{z-3}+\frac{9e}{2!(z-3)^2}+\frac{27e}{3!(z-3)^3}+...$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{e^{z^3}}{\operatorname{ch}z-1-z^2/2}$$

Разложим числитель и знаменатель в ряды Лорана в окрестности точки z = 0:

$$f(z)=\frac{e^{z^3}}{\operatorname{ch}z-1-z^2/2}=\frac{1+z^3+\dfrac{z^6}{2!}+\dfrac{z^9}{3!}+\ldots}{-1-z^2/2+1+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}+\dfrac{z^6}{6!}+\ldots}=$$

$$=\frac{1+z^3+\dfrac{z^6}{2!}+\dfrac{z^9}{3!}+\ldots}{\dfrac{z^4}{4!}+\dfrac{z^6}{6!}+\dfrac{z^8}{8!}+\ldots}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{1+z^3+\dfrac{z^6}{2!}+\dfrac{z^9}{3!}+\ldots}{\dfrac{z^4}{4!}+\dfrac{z^6}{6!}+\dfrac{z^8}{8!}+\ldots}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{aligned}g(z)&=1+z^3+\frac{z^6}{2!}+\frac{z^9}{3!}+\ldots;\\ h(z)&=\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}+\ldots;\end{aligned}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0. Поскольку рассматриваемые функции представляют собой обычные степенные многочлены, то несложно увидеть, что $g(0)\neq 0$ и $h^{IV}(0)\neq 0$.

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 4 – 0 = 4.

Ответ: Точка z = 0 является полюсом 4-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$f(z)=\operatorname{th}z$

Эта функция не является аналитической при ch z = 0. Найдем z, соответствующие этому случаю:

$$\operatorname{ch}z=\cos iz=0\Rightarrow z=\frac{i\pi}{2}+i\pi k;\,k\in Z$$

Запишем данную функцию в виде отношения функций g(t) и h(t):

$$f(z)=\frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z};\begin{aligned}g(t)&=\operatorname{sh}z;\\ h(t)&=\operatorname{ch}z;\end{aligned}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при t = iπ/2 + iπk:

$$g(i\pi/2+i\pi k)\neq 0$$
$$h(i\pi/2+i\pi k)=0$$
$$h'(t)=\operatorname{sh}z;\,h'(\pi/2+\pi k)\neq 0$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = iπ/2 + iπk выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки z = iπ/2 + iπk являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = iπ/2 + iπk для функций h(z) и g(z). В данном случае, это 1 – 0 = 1.

Ответ: Точки $z=\dfrac{i\pi}{2}+i\pi k;\,k\in Z$ для данной функции являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z+1|=1/2} \underbrace{\frac{\operatorname{tg} z+2}{4z^2+\pi z}}_{f(z)} dz = \oint\limits_{|z+1|=1/2} \underbrace{\frac{\operatorname{tg} z+2}{z(4z+\pi)}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z=0$

$z=-\pi/4$

Точка $z = 0$ не входит в область, ограниченную данным контуром, поэтому не рассматривается.

Точка $z_1 = -\pi/4$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to-\pi/4}[f(z)(z+\pi/4)] = \lim_{z\to-\pi/4}\frac{(\operatorname{tg} z+2)(z+\pi/4)}{z(4z+\pi)} =$$

$$= \lim_{z\to-\pi/4}\frac{\operatorname{tg} z+2}{4z} = \frac{-1+2}{-\pi} = -\frac{1}{\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z+1|=1/2} \frac{\operatorname{tg} z+2}{z(4z+\pi)} dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\right) = -2i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z+1|=1/2} \frac{\operatorname{tg} z+2}{4z^2+\pi z} dz = -2i$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1/3} \underbrace{\frac{1-2z^4+3z^5}{z^4}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$\frac{1-2z^4+3z^5}{z^4} = \frac{1}{z^4} - 2 + 3z$$

Считая получившийся результат рядом Лорана по степеням z, т.е. в окрестности $z = 0$, мы приходим к выводу, что точка $z = 0$ является полюсом 4-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{6}\lim_{z\to0}\frac{d^3}{dz^3}[f(z)z^4] = \frac{1}{6}\lim_{z\to0}\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{1-2z^4+3z^5}{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{z\to0}(-48z+180z^2) = 0$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z^4+3z^5}{z^4} dz = 2\pi i\cdot 0 = 0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z^4+3z^5}{z^4} dz = 0$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1}\underbrace{\frac{e^{7z}-\mathrm{ch}5z}{z\sin 2iz}}_{f(z)}dz$$

Особые точки этой функции $z = i\pi k/2$, $k\in Z$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z)=\frac{e^{7z}-\mathrm{ch}5z}{z\sin 2iz}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{array}{l} g(z)=e^{7z}-\mathrm{ch}5z \\ h(z)=z\sin 2iz \end{array}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\mathop{\mathrm{res}}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}[f(z)z]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{7z}-\mathrm{ch}5z}{\sin 2iz}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{7e^{7z}-5\mathrm{sh}5z}{2i\,\mathrm{ch}2z}\right)=\frac{7}{2i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{7z}-\mathrm{ch}5z}{z\sin 2iz}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathop{\mathrm{res}}_{z_n} f(z)=2\pi i\cdot\frac{7}{2i}=7\pi$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{7z}-\mathrm{ch}5z}{z\sin 2iz}dz=7\pi$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z+3i|=2}\left(\frac{4\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{2-6i}}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)}-\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z+3i|=2}\underbrace{\frac{4\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{2-6i}}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)}}_{f_1(z)}dz+\oint\limits_{|z+3i|=2}\underbrace{\frac{-\pi}{e^{\pi z/2}-i}}_{f_2(z)}dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z+3i|=2}\frac{4\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{2-6i}}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: $z=1-3i$ и $z=3-3i$. При этом точка $z=3-3i$ не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка $z=1-3i$ является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\mathop{\mathrm{res}}_{z=1-3i} f_1(z)=\lim_{z\to 1-3i}\frac{d}{dz}\left[\frac{4\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{2-6i}(z-1+3i)^2}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)}\right]=\lim_{z\to 1-3i}\frac{d}{dz}\left[\frac{4\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{2-6i}}{(z-3+3i)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 1-3i}\left[\frac{(i-3)\pi}{5(z-3+3i)}\mathrm{ch}\frac{(3-i)\pi z}{20}+\frac{4}{(z-3+3i)^2}\mathrm{sh}\frac{(3-i)\pi z}{20}\right]=-i$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+3i|=2}\frac{4\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{2-6i}}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)}dz=2\pi i\cdot\mathop{\mathrm{res}}_{z=1-3i} f_1(z)=2\pi i\cdot(-i)=2\pi$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint_{|z+3i|=2} \frac{-\pi}{e^{\pi z/2}-i} dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$e^{\pi z/2}-i=0 \Rightarrow e^{\pi z/2}=i \Rightarrow \pi z/2=\ln(i)=\pi i/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z=4ik+i, k \in z$

Из этих точек только одна охвачена контуром $|z+3i|=2$ и должна приниматься во внимание. Это точка $z=-3i$, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=-3i} f_2(z) = \lim_{z\to -3i} \frac{-\pi(z+3i)}{e^{\pi z/2}-i} = \left\{\begin{matrix}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to -3i} \frac{-\pi}{\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2}} = -\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{-3\pi i/2}} = -\frac{2}{e^{-3\pi i/2}} = -\frac{2}{i} = 2i$$

Таким образом:

$$\oint_{|z+3i|=2} \frac{-\pi}{e^{\pi z/2}-i} dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=-3i} f_2(z) = 2\pi i \cdot (2i) = -4\pi$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint_{|z+3i|=2} \left(\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{2-6i}}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)} - \frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i} \right) dz =$$

$$= \oint_{|z+3i|=2} \left(\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{2-6i}}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)} \right) dz + \oint_{|z+3i|=2} \frac{-\pi}{e^{\pi z/2}-i} dz =$$

$= 2\pi - 4\pi = -2\pi$

Ответ: $\oint_{|z+3i|=2} \left(\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{2-6i}}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)} - \frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i} \right) dz = -2\pi$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}\sin t - 2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$z = e^{it}$; $\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$; $\sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$; $dt = \frac{dz}{iz}$;

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}\sin t - 2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{\frac{\sqrt{3}}{2i}(z-\frac{1}{z})-2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\frac{\sqrt{3}}{2}(z^2-1)-2iz} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{\sqrt{3}(z^2-1)-4iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{\sqrt{3}(z-i/\sqrt{3})(z-i\sqrt{3})}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = i/\sqrt{3}$; $\quad z = i\sqrt{3}$;

Точка $i\sqrt{3}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $i/\sqrt{3}$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=i/\sqrt{3}} f(z) = \lim_{z\to i/\sqrt{3}} [f(z)(z-i/\sqrt{3})] =$$

$$= \lim_{z\to i/\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{3}(z-i\sqrt{3})} = \frac{2}{\sqrt{3}(i/\sqrt{3}-i\sqrt{3})} = i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{3}(z-i/\sqrt{3})(z-i\sqrt{3})} = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot i = -2\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}\sin t - 2} = -2\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{2}+\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos\ t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin\ t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\ t,\sin\ t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{2}+\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(\sqrt{2}+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i(z\sqrt{2}+\frac{1}{2}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[(z+\sqrt{2}+1)(z+\sqrt{2}-1)\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-\sqrt{2}+1;\quad z=-\sqrt{2}-1;$

Точка $z=-\sqrt{2}-1$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=-\sqrt{2}+1$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-\sqrt{2}+1}f(z)=\lim_{z\to-\sqrt{2}+1}\frac{d}{dz}[f(z)(z-1+\sqrt{2})^2]=$$

$$=\lim_{z\to-\sqrt{2}+1}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[(z+1+\sqrt{2})\right]^2}=\frac{4}{i}\lim_{z\to-\sqrt{2}+1}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z+1+\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{4}{i}\lim_{z\to-\sqrt{2}+1}\frac{\sqrt{2}+1-z}{(\sqrt{2}+1+z)^3}=\frac{4}{i}\cdot\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1)^3}=\frac{4}{i}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{2^3}=\frac{\sqrt{2}}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[(z+\sqrt{2}+1)(z+\sqrt{2}-1)\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{i}\right)=2\sqrt{2}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{2}+\cos t)^2}=2\sqrt{2}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$ сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(1+z^2)^3}$$

Особые точки:

$z=i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=i$ является полюсом третьего порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=i}f(z)=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}[f(z)(z-i)^3]=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z+i)^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{-3}{(z+i)^4}\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5}=\frac{3}{16i}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}=2\pi i\frac{3}{16i}=\frac{3\pi}{8}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}=\frac{3\pi}{8}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^3}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^3}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\lambda x dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$(x^2+1)^3=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm i$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z>0$.

Из этого следует:

$z_m=\{i\}$

Эта особая точка является полюсом третьего порядка. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=i}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-i)^3}{(z^2+1)^3}e^{iz}\right]=\lim_{z\to i}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{e^{iz}}{(z+i)^3}\right]=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{iz-4}{(z+i)^4}e^{iz}\right]=\lim_{z\to i}\left[-\frac{z^2+8iz-19}{(z+i)^5}e^{iz}\right]=$$

$$=-\frac{-1-8-19}{(i+i)^5}e^{-1}=\frac{7}{8i}e^{-1}$$

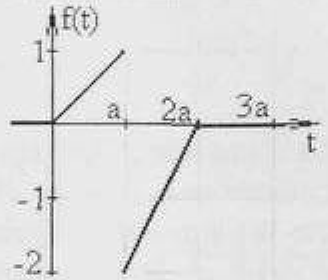
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^3}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{7\pi}{8}e^{-1}$$

Ответ: $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^3}dx=\frac{7\pi}{8}e^{-1}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)\begin{cases}\frac{t}{a} & 0<t<a\\ \frac{2t-4a}{a}, & a<t<2a\\ 0, & 2a<t\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{t}{a}\cdot\eta(t)+\frac{t-4a}{a}\eta(t-a)+\frac{4a-2t}{a}\eta(t-2a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{ap^2}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{4}{p}\right)e^{-ap}+\left(\frac{4}{p}-\frac{2}{ap^2}\right)e^{-2ap}$$

Ответ: $F(p)=\frac{1}{ap^2}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{4}{p}\right)e^{-ap}+\left(\frac{4}{p}-\frac{2}{ap^2}\right)e^{-2ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{Cp+D}{p^2-2}=$$

$$=\frac{Ap^3+Bp^2-2Ap-2B+Cp^3+Dp^2+Cp+D}{(p^2+1)(p^2+4)}=$$

$$=\frac{(A+C)p^3+(B+D)p^2+(-2A+C)p+D-2B}{(p^2+1)(p^2+4)}$$

Решив систему линейных уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+C=0\\B+D=0\\C-2A=1\\D-2B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1/3\\B=0\\C=1/3\\D=0\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2-2}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2-2}\to-\frac{1}{3}\cos t+\frac{1}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$-\frac{1}{3}\cos t+\frac{1}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$2y''+5y'=29\cos t$

$y(0)=-1,\quad y'(0)=0.$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует p·X(p) – x(0), а x''(t) соответствует p^2·X(p) – p·x(0) – x'(0). Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$2p^2Y(p)-2py(0)-2y'(0)+5pY(p)-5y(0)=\frac{29p}{p^2+1}$$

$$2p^2Y(p)+2p+5pY(p)+5=\frac{29p}{p^2+1}$$

$$(2p^2+5p)Y(p)=\frac{29p}{p^2+1}-2p-5$$

$$Y(p)=\frac{29}{(p^2+1)(2p+5)}-\frac{2}{2p+5}-\frac{5}{2}\frac{1}{p}\frac{1}{p+5}$$

Найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{29}{(p^2+1)(2p+5)}-\frac{2}{2p+5}-\frac{5}{2}\frac{1}{p}\frac{1}{p+5}$$

$$\frac{29}{(p^2+1)(2p+5)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{C}{2p+5}=\frac{(2A+C)p^2+(5A+2B)p+5B+C}{(p^2+1)(2p+5)}$$

$$\begin{cases}2A+C=0\\5A+2B=0\\5B+C=29\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=5\\C=4\end{cases}\Rightarrow Y(p)=-2\frac{p}{p^2+1}+5\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p+5/2}-\frac{5}{2}\frac{1}{p}\frac{1}{p+5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=-2\cos t+5\sin t+e^{-5t/2}-\frac{1}{2}(1-e^{-5t})$$

Ответ: $y(t)=-2\cos t+5\sin t+e^{-5t/2}-\frac{1}{2}(1-e^{-5t})$

Задача 25

Материальная точка массы m совершает прямолинейное колебание по оси Ox под действием восстанавливающей силы F=–kx, пропорциональной расстоянию x от начала координат и направленной к началу координат, и возмущающей силы f =Acos t. Найти закон движения x=x(t) точки, если в начальный момент времени $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$.
$k = m$, $A = 2m$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kx + A\cos t$$

$$\ddot{x}m + kx = A\cos t$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m + mx = 2m\cos t$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + x = 2\cos t$$

Перейдем к изображениям функций:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + X(p) = \frac{2p}{p^2+1}$$

$$(p^2+1)X(p) = \frac{2p}{p^2+1}$$

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} = 2\frac{p}{(p^2+1^2)^2}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = 2\cdot\frac{1}{2}t\sin t = t\sin t$$

Ответ: $x(t) = t\sin t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dot{x} = 2x + 8y + 1\\ \dot{y} = 3x + 4y\end{cases}$$

$x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases}pX(p) - x(0) = 2X(p) + 8Y(p) + 1/p\\ pY(p) - y(0) = 3X(p) + 4Y(p)\end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases}pX(p) - 2 = 2X(p) + 8Y(p) + 1/p\\ pY(p) - 1 = 3X(p) + 4Y(p)\end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 1 = 3X(p) + 4Y(p) \Rightarrow X(p) = \frac{1}{3}[pY(p) - 4Y(p) - 1]$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$\frac{p}{3}[pY(p) - 4Y(p) - 1] - 2 = \frac{2}{3}[pY(p) - 4Y(p) - 1] + 8Y(p) + 1/p$$

$$Y(p) = \frac{p + 4 + 3/p}{p^2 - 6p - 16}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{p+4+3/p}{p^2-6p-16} = \frac{p+4+3/p}{(p-3)^2-25} + \frac{3}{16p} - \frac{3}{16p} = \frac{19p/16 + 46/16}{(p-3)^2-25} - \frac{3}{16p} =$$

$$= \frac{19}{16}\frac{p-3}{(p-3)^2-25} + \frac{103}{80i}\frac{5i}{(p-3)^2-25} - \frac{3}{16p} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = \tfrac{19}{16}e^{3t}\cos 5it - \tfrac{103i}{80}e^{3t}\sin 5it - \tfrac{3}{16} = \tfrac{19}{16}e^{3t}\mathrm{ch}5t + \tfrac{103}{80}e^{3t}\mathrm{sh}5t - \tfrac{3}{16}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = 3x + 4y \Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{3}(\dot{y} - 4y) = \tfrac{1}{3}(10e^{3t}\mathrm{ch}5t + \tfrac{49}{5}e^{3t}\mathrm{sh}5t - \tfrac{19}{4}e^{3t}\mathrm{ch}5t -$$

$$- \tfrac{103}{20}e^{3t}\mathrm{sh}5t - \tfrac{3}{4}) = \tfrac{1}{3}(\tfrac{21}{4}e^{3t}\mathrm{ch}5t + \tfrac{93}{20}e^{3t}\mathrm{sh}5t - \tfrac{3}{4}) = \tfrac{7}{4}e^{3t}\mathrm{ch}5t + \tfrac{31}{20}e^{3t}\mathrm{sh}5t - \tfrac{1}{4}$$

Ответ:

$$x(t) = \tfrac{7}{4}e^{3t}\mathrm{ch}5t + \tfrac{31}{20}e^{3t}\mathrm{sh}5t - \tfrac{1}{4}$$

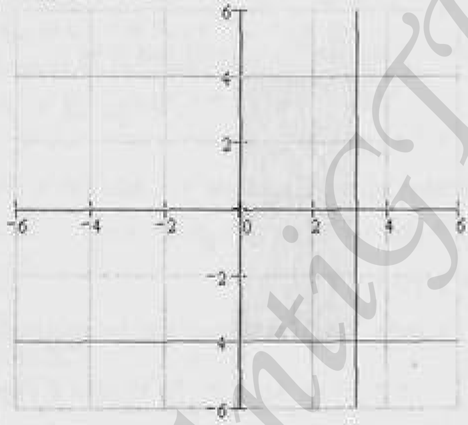
$$y(t) = \tfrac{19}{16}e^{3t}\mathrm{ch}5t + \tfrac{103}{80}e^{3t}\mathrm{sh}5t - \tfrac{3}{16}$$

Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = \cos(z)$; прямоугольник $0<x<\pi$, $-h<y<h$, $h>0$.

В качестве примера возьмем $h=4$:



Каждая из горизонтальных прямых преобразуется в окружность радиуса $\cos(ih)$, а вертикальные в луч, исходящий из точки $(0,-1)$ в направлении π радиан и во второй луч, исходящий из точки $(0,1)$ в направлении 0 радиан. Таким образом, исходная фигура отображается в полукольцо $\{|w|=\cos(ih), \mathrm{Im}(w)>0\}$: