Екзаменаційний білет № 13

І. Теоретична частина

1. Розв’язок СЛАР методом простої ітерації.

Метод ітерації (послідовних наближень)

Сутність методу полягає в наступному. Нехай є рівняння (1). Замінимо його еквівалентним

$$x = \varphi(x) \qquad (11)$$

Виберемо будь-яким способом початкове наближення x_0 й підставимо його в праву частину (11). Тоді отримаємо число

$$x_1 = \varphi(x_0) \qquad (12)$$

Підставимо x_1 в (12) замість x_0 і отримаємо

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

Повторюючи цей процес будемо мати послідовність чисел

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (13)$$

Якщо ця послідовність збіжна, тобто існує границя

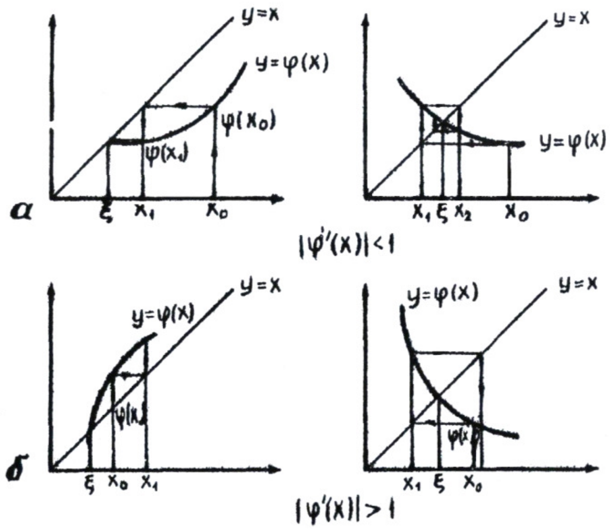
$$S = \lim_{n\to\infty} x_n ,$$

тоді, переходячи до границі в (14), і припустивши, що $\varphi(x)$ є безперервна, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) \text{ або } S = y(\zeta) \qquad (14)$$

Якщо границя (14) існує, вона є точним коренем рівняння (11) і, як наслідок, рівняння (1).

Геометрична інтерпретація методу ітерації має вигляд



На мал. 1 в околі ξ крива полога тобто $|\varphi'(x)| < 1$ й процес сходиться. На мал. 3 $|\varphi'(x)| > 1$ і процес розходиться. З'ясуємо достатню умову збіжності.

Теорема 3.

Нехай функція $\varphi(x)$ визначена й диференційована на відрізку $[a,b]$, причому всього її значення $\varphi(x) \in [a,b]$. Тоді, якщо існує правильний дріб q така, що

$$|\varphi'(x)| \le q < 1 \qquad (15)$$

при $a < x < b$, тоді:

1) процес ітерації

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \qquad n = 1,2,... \qquad (16)$$

сходиться незалежно від початкового наближення $x_0 \in [a,b]$;

2) граничне значення

$$S = \lim_{n\to\infty} x_n$$

є точним коренем рівняння (11).

Доказ.

Розглянемо два послідовних наближення

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \text{ і } x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)$$

Застосовуючи теорему Лагранжа, маємо $x_{n+1} - x_n = (x_n - x_{n-1})\varphi'(\bar{x}_n)$, де $\bar{x}_n \in (x_{n-1}, x_n)$. Отже, на підставі (15) одержимо

$$|x_{n+1} - x_n| \le q|x_n - x_{n-1}| \qquad (16)$$

Звідси при $n = 1,2,\ldots$ послідовноно одержуємо

$$|x_2 - x_1| \le q|x_1 - x_0|;$$

$$|x_3 - x_2| \le q|x_2 - x_1| \le q^2|x_1 - x_0|; \qquad (17)$$

$$\ldots$$

$$|x_{n+1} - x_n| \le q^n|x_1 - x_0|.$$

Розглянемо ряд

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots. \qquad (18)$$

для якого наші послідовні наближення x_n є $(n+1)$-мі частковими сумами, тобто

$$x_n = S_{n+1}.$$

У силу (17) члени ряду (18) за абсолютною величиною менше ніж відповідні члени геометричної прогресії зі знаменником $q < 1$, тому ряд (18) сходиться і притому абсолютно. Отже, існує

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \zeta ,$$

причому, очевидно, $\zeta \in [a,b]$

Переходячи до границі в рівності (15) у силу безперервності $\varphi(x)$ одержимо:

$$S = \varphi(\xi) \qquad (19)$$

т. о. S є корінь (15). Іншого кореня на $[a,b]$ (15) не має. Дійсно, якщо

$$\bar{\xi} = \varphi(\bar{\xi}) \qquad (20),$$

то з (19) і (20) одержимо

$$\bar{\xi} - \xi = \varphi(\bar{\xi}) - \varphi(\xi)$$

і, отже,

$$(\bar{\xi} - \xi)[1 - \varphi'(c)] = 0$$

де $c \in [\bar{\xi}, S]$, отже $\xi = \bar{\xi}$.

Зауваження. Метод ітерації збігається при будь-якому виборі x_0 з $[a,b]$. Завдяки цьому він є таким, що самовиправляється, тобто окрема помилка в обчисленнях, що не виводить за межі $[a,b]$

, не вплине на кінцевий результат. Кратність помилки округлення в ітераційних методах не накопичується від ітерації до ітерації.

Оцінка наближення

Отже, нехай $|\varphi'(x)| \le q < 1$ для $x \in [a,b]$.

Якщо ітерації виконувати доти, поки

$$|x_k - x_{k-1}| \le \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon ,$$

то гарантується виконання нерівності

$$|\xi - x_n| < \varepsilon .$$

2. Розв'язок задачи Коши методом степеневих рядів.

Последовательность выполнения этапа

I. Разрешить ДУ относительно старшей производной и исследовать правую часть полученного уравнения. Если правая часть - является аналитической функцией в начальной точке, то решение задачи можно искать в виде бесконечного ряда по степеням $(x - x_0)$.

II. Решить задачу методом неопределенных коэффициентов.

Алгоритм

1. Записать решение $y(x)$ в виде бесконечного степенного ряда по степеням $(x - x_0)$:
$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot (x - x_0)^k$$

2. Записать все входящие в ДУ производные в виде степенных рядов по степеням $(x - x_0)$, продифференцировав решение $y(x)$.

3. Выписать все коэффициенты ДУ при $y(x)$, производных $y(x)$ и свободном члене.

4. Представить коэффициенты ДУ, являющиеся функциями x, в виде рядов по степеням $(x - x_0)$.

5. Подставить полученные в п. 1, 2 и 4 выражения в исходное ДУ.

6. Раскрыть скобки и привести подобные слагаемые при одинаковых степенях $(x - x_0)$ в левой и правой части уравнения.

7. Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $(x - x_0)$ в левой и правой части уравнения - результат система алгебраических уравнений относительно неизвестных констант C_0, C_1, C_2 и т.д..

8. Воспользовавшись начальными условиями определить значения первых n констант $C_0, C_1 .... C_{n-1}$ (здесь n - порядок исходного уравнения).

9. Значения остальных констант определяются из системы п. 7.

10. Записать окончательное решение задачи в виде бесконечного ряда по степеням $(x - x_0)$ с подставленными значениями констант.

III. Решить задачу методом последовательного дифференцирования.

Алгоритм

1. Записать решение y(x) в виде бесконечного степенного ряда по степеням $(x - x_0)$:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k, \quad \text{где} \quad a_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$$

2. Определить значения первых n коэффициентов $a_0, a_1 \ldots a_{n-1}$ (здесь n - порядок исходного уравнения), воспользовавшись начальными условиями.

3. Выразить из ДУ старшую производную. Вычислить ее значение в начальной точке, используя начальные условия. Вычислить коэффициент a_n.

4. Продифференцировав по x выражение для старшей производной из п. 3 найти n+1 производную функции y(x). Вычислить ее значение в начальной точке, используя начальные условия и значение старшей производной, вычисленное в п. 3. Вычислить коэффициент a_{n+1}.

5. Остальные коэффициенты a_k вычисляются аналогично процедуре, описанной в п. 4.

6. Записать окончательное решение задачи в виде бесконечного ряда по степеням $(x - x_0)$ с подставленными значениями коэффициентов.

II. Практична частина

Побудувати таблицю інтегральної кривої звичайного диференціального рівняння

$$y'' + x*y' = e^{-sqr(x)}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0, \; x \in [0, 1]$$

методом Эйлера-Коши с кроком h=0.01.