/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[3]{-1/8}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\dots,n-1;\quad z\neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[3]{-1/8}$:

$$\sqrt[3]{-1/8}=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4};\ \sqrt[3]{-1/8}=-\frac{1}{2};\ \sqrt[3]{-1/8}=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=\left\{\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4};-\frac{1}{2};\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\operatorname{ch}(2-\pi i/6)$

Перейдем от гиперболического косинуса к тригонометрическому:

$$\operatorname{ch}(2-\pi i/6)=\cos(2i+\pi/6)$$

Используем формулу косинуса суммы:

$$\cos(2i+\pi/6)=\cos(2i)\cos(\pi/6)-\sin(2i)\sin(\pi/6)$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$\cos(2i)\cos(\pi/6)-\sin(2i)\sin(\pi/6)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2}-e^{2}}{2i}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2}-e^{2}}{2}\right)$$

Ответ: $\operatorname{ch}(2-\pi i/6)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2}-e^{2}}{2}\right)$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arctg}\left(-\frac{5i}{3}\right)$$

Функция Arctg является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$$

Подставим вместо z значение $-\frac{5i}{3}$:

$$\mathrm{Arctg}\left(-\frac{5i}{3}\right) = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\frac{5}{3}}{1-\frac{5}{3}} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}(-4)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}(-4) = -\frac{i}{2}[\ln|-4| + i(\arg(-4) + 2\pi k)] =$$

$$= -\frac{i}{2}\ln 4 + \frac{1}{2}(\pi + 2\pi k) \approx -\frac{i}{2}\cdot 1{,}386 + \frac{1}{2}(\pi + 2\pi k)$$

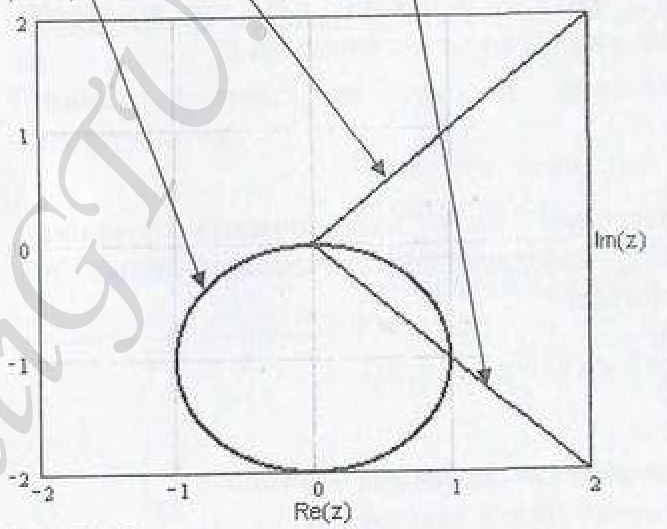
$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Ответ: $\mathrm{Arctg}\left(-\frac{5i}{3}\right) \approx -\frac{i}{2}\cdot 1{,}386 + \frac{1}{2}(\pi + 2\pi k), k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z+i| < 1, \quad -3\pi/4 \le \arg z \le -\pi/4$



Задача 5

Определить вид кривой:

$$z = \frac{1+t}{1-t} + i\frac{2+t}{2-t}$$

Уравнение вида $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид $x = x(t)$, $y = y(t)$. В нашем случае:

$$x(t) = \frac{1+t}{1-t}; \quad y(t) = \frac{2+t}{2-t}$$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = \frac{1+t}{1-t} \Rightarrow (1-t)x = 1+t \Rightarrow x-1 = t(x+1) \Rightarrow t = \frac{x-1}{x+1}$$

$$y = \frac{2+t}{2-t} \Rightarrow (2-t)x = 2+t \Rightarrow 2x-2 = t(x+1) \Rightarrow t = \frac{2(x-1)}{x+1}$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{2(y-1)}{y+1} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - \frac{2(y-1)}{y+1} = 0$$

Ответ: $\frac{x-1}{x+1} - \frac{2(y-1)}{y+1} = 0$

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной действительной части u(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$u = e^{-y}\cos x + x$$

$$f(0) = 1$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = -e^{-y}\sin x + 1 + ie^{-y}\cos x = 1 - e^{-y}(\sin x -$$
$$- i\cos x) = 1 + ie^{-y}(\cos x + i\sin x) = 1 + ie^{ix-y} = 1 + ie^{i(x+iy)} = 1 + ie^{iz}$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int(1 + ie^{iz})dz = z + e^{iz} + C$$

Определим константу С:

$$f(0) = 0 + e^0 + C = 1 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = z + e^{iz}$$

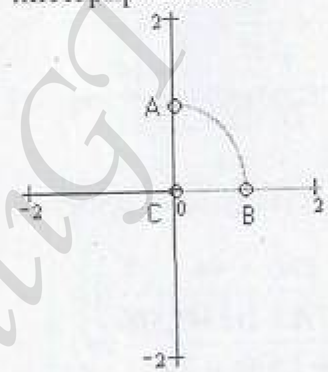
Ответ: $f(z) = z + e^{iz}$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int\limits_{ABC} z\bar{z}dz;\ AB: \{|z| = 1; \operatorname{Re} z \geq 0; \operatorname{Im} z \geq 0\};\ BC - \text{отрезок},\ z_B = 1; z_C = 0$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y), где z = x + iy:

$$f(x,y) = (x+iy)(x-iy) = \underbrace{x^2 + y^2}_{u(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

Условия Коши-Римана не выполняются, следовательно, функция не является аналитической. Тогда представим кривую, по которой идет интегрирование, в параметрическом виде:

$$AB: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = \sqrt{1-t^2}; z_A = z(0); z_B = z(1)$$

$$BC: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = 0; z_B = z(1); z_C = z(0)$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int\limits_{ABC} f(z)dz = \int\limits_0^1 f[z(t)]z'(t)dt_{AB} + \int\limits_1^0 f[z(t)]z'(t)dt_{BC} = \int\limits_0^1 (t^2 + 1 - t^2)\cdot(1 -$$
$$\left.\frac{it}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt + \int\limits_1^0 (t^2\cdot 1)dt = \int\limits_0^1\left(1 - \frac{it}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt + \left.\frac{t^3}{3}\right|_1^0 = t + i\sqrt{1-t^2}\ \Big|_0^1 -$$
$$-1/3 = 1 - i - 1/3 = 2/3 - i$$

Ответ: $\int\limits_{ABC} f(z)dz = 2/3 - i$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}=\frac{7(z+14)}{-z(2z+7)(z-7)}=-\frac{7}{2z}\cdot\frac{z+14}{(z+3{,}5)(z-7)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

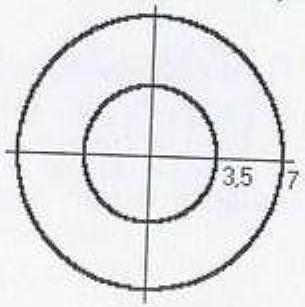
$$\frac{z+14}{(z+3{,}5)(z-7)}=\frac{A}{z+3{,}5}+\frac{B}{z-7}=\frac{Az-7A+Bz+3{,}5B}{(z+3{,}5)(z-7)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=-1;B=2\}\Rightarrow\frac{z+14}{(z+3{,}5)(z-7)}=\frac{-1}{z+3{,}5}+\frac{2}{z-7}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{7}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+3{,}5}-\frac{2}{z-7}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=-3{,}5; z=7$



Рассмотрим область $|z|<3{,}5$:

$$f(z)=\frac{7}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+3{,}5}-\frac{2}{z-7}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1-(-\frac{2z}{7})}+\frac{1}{1-\frac{z}{7}}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{2z}{7}+\frac{4z^2}{49}-\frac{8z^3}{343}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{7}+\frac{z^2}{49}+\frac{z^3}{343}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{7}+\frac{4z}{49}-\frac{8z^2}{343}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{7}+\frac{z}{49}+\frac{z^2}{343}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $3{,}5<|z|<7$:

$$f(z)=\frac{7}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+3{,}5}-\frac{2}{z-7}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{7}{2z(1-(-\frac{7}{2z}))}+\frac{1}{1-\frac{z}{7}}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{7}{2z}-\frac{49}{4z^2}+\frac{343}{8z^3}-\frac{2401}{16z^4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{7}+\frac{z^2}{49}+\frac{z^3}{343}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{7}{2z^2}-\frac{49}{4z^3}+\frac{343}{8z^4}-\frac{2401}{16z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{7}+\frac{z}{49}+\frac{z^2}{343}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>7$:

$$f(z)=\frac{7}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+3{,}5}-\frac{2}{z-7}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{7}{2z(1-(-\frac{7}{2z}))}-\frac{7}{z(1-\frac{7}{z})}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{7}{2z}-\frac{49}{4z^2}+\frac{343}{8z^3}-\frac{2401}{16z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{7}{z}+\frac{49}{z^2}+\frac{343}{z^3}+\frac{2401}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{7}{2z^2}-\frac{49}{4z^3}+\frac{343}{8z^4}-\frac{2401}{16z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{7}{z^2}+\frac{49}{z^3}+\frac{343}{z^4}+\frac{2401}{z^5}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<3{,}5: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{7}+\frac{4z}{49}-\frac{8z^2}{343}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{7}+\frac{z}{49}+\frac{z^2}{343}+\ldots\right)$$

$$3{,}5<|z|<7: f(z)=\left(\frac{7}{2z^2}-\frac{49}{4z^3}+\frac{343}{8z^4}-\frac{2401}{16z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{7}+\frac{z}{49}+\frac{z^2}{343}+\ldots\right)$$

$$|z|>7: f(z)=\left(\frac{7}{2z^2}-\frac{49}{4z^3}+\frac{343}{8z^4}-\frac{2401}{16z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{7}{z^2}+\frac{49}{z^3}+\frac{343}{z^4}+\frac{2401}{z^5}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z - z_0$.

$$f(z) = 4 \cdot \frac{z-2}{(z+1)(z-3)}, z_0 = 2-2i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z) = 4 \cdot \frac{z-2}{(z+1)(z-3)} = \frac{3}{z+1} + \frac{1}{z-3}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a} = \frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} - \frac{z^3}{a^4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{3}{z+1} = 3 \cdot \frac{1}{z+1} = 3 \cdot \frac{1}{(z-z_0)+3-2i} = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-z_0)^n}{(3-2i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-z_0)-1-2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-z_0)^n}{(-1-2i)^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1+2i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z) = \frac{3}{z+1} + \frac{1}{z-3} = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-z_0)^n}{(3-2i)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1+2i)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3(-1)^n}{(3-2i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+2i)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3(-1)^n}{(3-2i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+2i)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z) = z \cdot \sin \pi \frac{z+2}{z}, z_0 = 0$$

Преобразуем данное выражение:

$$z \cdot \sin \pi \frac{z+2}{z} = z \cdot \sin(\pi + \frac{2\pi}{z}) = -z \sin \frac{2\pi}{z}$$

Теперь следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z) = -z \cdot \sin \frac{2\pi}{z} = -z \cdot \left(\frac{2\pi}{z} - \frac{2^3 \pi^3}{3! z^3} + \frac{2^5 \pi^5}{5! z^5} - \frac{2^7 \pi^7}{7! z^7} + \ldots \right)$$

$$= z \cdot \left(-\frac{2\pi}{z} + \frac{2^3 \pi^3}{3! z^3} - \frac{2^5 \pi^5}{5! z^5} + \frac{2^7 \pi^7}{7! z^7} - \ldots \right) =$$

$$= -2\pi + \frac{2^3 \pi^3}{3! z^2} - \frac{2^5 \pi^5}{5! z^4} + \frac{2^7 \pi^7}{7! z^6} - \ldots$$

Поскольку $z_0 = 0$, то разложение в ряд Лорана в окрестности z_0 – это то же самое, что и разложение в ряд Лорана по степеням z. Таким образом, мы пришли к ответу.

Ответ:

$$f(z) = -2\pi + \frac{2^3 \pi^3}{3! z^2} - \frac{2^5 \pi^5}{5! z^4} + \frac{2^7 \pi^7}{7! z^6} - \ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z) = z\sin\left(\frac{3}{z^3}\right)$$

Тип особой точки для этой функции следует находить, применяя разложение в ряд Лорана в окрестности точки z=0:

$$f(z) = z\sin\left(\frac{3}{z^3}\right) = z\left(\frac{3}{z^3} - \frac{3^3}{3!z^9} + \frac{3^5}{5!z^{15}} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{3}{z^2} - \frac{3^3}{3!z^8} + \frac{3^5}{5!z^{14}} - \ldots$$

Рассмотрим получившийся ряд и выделим главную и правильную части ряда Лорана:

$$f(z) = \underbrace{0}_{\text{правильная часть}} + \underbrace{\frac{3}{z^2} - \frac{3^3}{3!z^8} + \frac{3^5}{5!z^{14}} - \ldots}_{\text{главная часть}}$$

Поскольку главная часть содержит бесконечное число членов, то точка z = 0 для заданной функции f(z) является существенной особой точкой.

Ответ: Точка z = 0 является существенно особой точкой для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = \frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{z^4 - 1}$$

Изолированными особыми точками являются z = 1, z = –1, z = i, z = –i. Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(z) = \frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{z^4 - 1};\ g(z) = \cos\frac{\pi}{2}z;\ h(z) = z^4 - 1;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 1, z = –1, z = i, z = –i:

$$g(1) = 0; g(-1) = 0; g(i) \neq 0; g(-i) \neq 0;$$

$$g'(z) = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}z; g'(1) \neq 0; g'(-1) \neq 0;$$

$$h(1) = 0; h(-1) = 0; h(i) = 0; h(-i) = 0;$$

$$h'(z) = 4z^3; h'(1) \neq 0; h'(-1) \neq 0; h'(i) \neq 0; h'(-i) \neq 0$$

При z = 1 и z = –1 порядок ненулевой производной для функции, стоящей в знаменателе, равен порядку ненулевой производной для функции, стоящей в числителе. Таким образом, можно сделать вывод, что z = 1 и z = –1 являются устранимыми особыми точками.

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = i и z = –i выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки z = i и z = –i являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это 1 – 0 = 1.

Ответ: Точки z = 1 и z = –1 являются устранимыми особыми точками.
Точки z = i и z = –i являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \underbrace{\frac{z(z+\pi)}{\sin 2z}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = \pi k/2,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадают только точки $z = 0$ и $z = \pi/2$.

Точка $z_1 = 0$ является устранимой особой точкой, следовательно, вычет в точке z_1 равен нулю.

Точка $z_2 = \pi/2$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to\pi/2}[f(z)(z-\pi/2)] = \lim_{z\to\pi/2}\frac{(z-\pi/2)z(z+\pi)}{\sin 2z} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} t = z-\pi/2 \\ z = t+\pi/2 \end{matrix}\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t+\pi/2)(t+3\pi/2)}{\sin(2t+\pi)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t(t+\pi/2)(t+3\pi/2)}{-\sin 2t} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t+\pi/2)(t+3\pi/2)}{-2t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(t+\pi/2)(t+3\pi/2)}{-2} = \frac{(\pi/2)(3\pi/2)}{-2} = -\frac{3\pi^2}{8}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{3\pi^2}{8}\right) = -\frac{3i\pi^3}{4}$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z} dz = -\frac{3i\pi^3}{4}$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{ze^{1/z}-z-1}{z^3}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$\frac{ze^{1/z}-z-1}{z^3} = \frac{-z-1+z\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right)}{z^3} =$$

$$= \frac{-z-1+z+1+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!z^2}+\ldots}{z^3} = \frac{\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!z^2}+\frac{1}{4!z^3}+\frac{1}{5!z^4}+\ldots}{z^3} =$$

$$= \frac{1}{2!z^4}+\frac{1}{3!z^5}+\frac{1}{4!z^6}+\frac{1}{5!z^7}+\ldots$$

Главная часть получившегося ряда содержит бесконечное число членов, из чего следует, что это – существенная особая точка. Тогда вычет в этой точке находится, как коэффициент при минус первой степени в лорановском разложении f(z) в окрестностях точки $z = 0$:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = C_{-1} = 0$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{ze^{1/z}-z-1}{z^3} dz = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ze^{1/z}-z-1}{z^3} dz = 0$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=5} \underbrace{\frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{z^2 \sin^2(z/3)}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции $z = 3ik\pi$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{z^2 \sin^2(z/3)} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad \begin{matrix} g(z) = \operatorname{sh} 2z - 2z \\ h(z) = z^2 \sin^2(z/3) \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to0}[f(z)z] = \lim_{z\to0}\left(\frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{z\sin^2(z/3)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to0}\left(\frac{2\operatorname{ch}2z - 2}{1-\cos^2(z/3) + \frac{2}{3}z\sin(z/3)\cos(z/3)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to0}\left(\frac{4\operatorname{sh}2z}{\frac{4}{3}\sin(z/3)\cos(z/3) + \frac{4}{9}z\cos^2(z/3) - \frac{2}{9}z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to0}\left(\frac{8\operatorname{ch}2z}{\frac{4}{3}\cos^2(z/3) - \frac{8}{27}z\sin(z/3)\cos(z/3) - \frac{2}{3}}\right) = \frac{8}{2/3} = 12$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=5} \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{z^2 \sin^2(z/3)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot 12 = 24\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=5} \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{z^2 \sin^2(z/3)} dz = 24\pi i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-6i|=2} \left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1} - \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)}\right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-6i|=2} \underbrace{\frac{-2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z-6i|=2} \underbrace{\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}}_{f_2(z)} dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z-6i|=2} \frac{-2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)} dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=1+6i и z=3+6i. При этом точка z=3+6i не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=1+6i является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=1+6i} f_1(z) = \lim_{z\to1+6i} \frac{d}{dz}\left[\frac{-2(z-1-6i)^2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)}\right] = \lim_{z\to1+6i}\frac{d}{dz}\left[\frac{-2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{1+6i}}{(z-3-6i)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to1+6i}\left[\frac{(-12-2i)\pi}{37(z-3-6i)}\operatorname{sh}\frac{(6+i)\pi z}{37} + \frac{2}{(z-3-6i)^2}\operatorname{ch}\frac{(6+i)\pi z}{37}\right] = -\frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-6i|=2} \frac{-2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)} dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=1+6i} f_1(z) = 2\pi i \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z-6i|=2} \frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\pi z/2}+1=0 \Rightarrow e^{\pi z/2}=-1 \Rightarrow \pi z/2=\ln(-1)=\pi i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=2i+4ik, k\in z$$

Из этих точек только одна охвачена контуром |z–6i|=2 и должна приниматься во внимание. Это точка z=6i, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=6i} f_2(z)=\lim_{z\to 6i}\frac{\pi(z-6i)}{e^{\pi z/2}+1}=\left\{\begin{matrix}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 6i}\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2}}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{3\pi i}}=\frac{2}{e^{3\pi i}}=\frac{2}{-1}=-2$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-6i|=2} \frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}dz=2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=-2i} f_2(z)=2\pi i\cdot(-2)=-4\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-6i|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}-\frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)}\right)dz=$$

$$=\oint\limits_{|z-6i|=2}\frac{-2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)}dz+\oint\limits_{|z-6i|=2}\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}dz=$$

$$=-\pi i-4\pi i=-5\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-6i|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}-\frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)}\right)dz=-5\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{3\sin t+5}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int\limits_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{3\sin t+5}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\frac{3}{2i}(z-\frac{1}{z})+5}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\frac{3}{2}(z^2-1)+5iz}=$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{3(z^2-1)+10iz}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{3(z+3i)(z+i/3)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-3i;\quad z=-i/3;$

Точка $-3i$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $-i/3$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-i/3} f(z)=\lim_{z\to -i/3}[f(z)(z+i/3)]=$$

$$=\lim_{z\to -i/3}\frac{2}{3(z+3i)}=\frac{2}{3(-i/3+3i)}=-\frac{i}{4}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{3(z+3i)(z+i/3)}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right)=\frac{1}{2}\pi$$

Ответ: $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{3\sin t+5}=\frac{1}{2}\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{13}+2\sqrt{3}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$z=e^{it}$; $\cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$; $\sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$; $dt=\frac{dz}{iz}$;

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{13}+2\sqrt{3}\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(\sqrt{13}+\sqrt{3}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i(\sqrt{13}z+\sqrt{3}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i\left[\sqrt{3}(z-\frac{1-\sqrt{13}}{2\sqrt{3}})(z+\frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=(1-\sqrt{13})/2\sqrt{3}$; $z=(-1-\sqrt{13})/2\sqrt{3}$;

Точка $z=(-1-\sqrt{13})/2\sqrt{3}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=(1-\sqrt{13})/2\sqrt{3}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=(1-\sqrt{13})/2\sqrt{3}} f(z)=\lim_{z\to(1-\sqrt{13})/2\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\left[f(z)\left(z-(1-\sqrt{13})/2\sqrt{3}\right)^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to(1-\sqrt{13})/2\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\frac{z}{i\left[\sqrt{3}\left(z+(1+\sqrt{13})/2\sqrt{3}\right)\right]^2}=\frac{1}{3i}\lim_{z\to(1-\sqrt{13})/2\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z+(1+\sqrt{13})/2\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3i}\lim_{z\to(1-\sqrt{13})/2\sqrt{3}}\left[-12\frac{2\sqrt{3}z-\sqrt{13}-1}{\left(2\sqrt{3}z+\sqrt{13}+1\right)^3}\right]=-\frac{4}{i}\cdot\frac{1-\sqrt{13}-\sqrt{13}-1}{\left(1-\sqrt{13}+\sqrt{13}+1\right)^3}=-\frac{4}{i}\cdot\frac{-2\sqrt{13}}{2^3}=\frac{\sqrt{13}}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i\left[\sqrt{3}(z-\frac{1-\sqrt{13}}{2\sqrt{3}})(z+\frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{i}\right)=2\sqrt{13}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{13}+2\sqrt{3}\cos t)^2}=2\sqrt{13}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m \operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2+2)^2(z^2+10)^2}$$

Особые точки:

$z=i\sqrt{10}$ $(\operatorname{Im}z>0)$; $z=-i\sqrt{10}$ $(\operatorname{Im}z<0)$

$z=i\sqrt{2}$ $(\operatorname{Im}z>0)$; $z=-i\sqrt{2}$ $(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=i\sqrt{2}$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{2}}f(z)=\lim_{z\to i\sqrt{2}}\frac{d}{dz}[f(z)(z-i\sqrt{2})^2]=\lim_{z\to i\sqrt{2}}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i\sqrt{2})^2(z^2+10)^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to i\sqrt{2}}\left[\frac{-2(3z^2+10+2\sqrt{2}iz)}{(z+i\sqrt{2})^3(z^2+10)^3}\right]=0$$

Точка $z=i\sqrt{10}$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{10}}f(z)=\lim_{z\to i\sqrt{10}}\frac{d}{dz}[f(z)(z-i\sqrt{10})^2]=\lim_{z\to i\sqrt{10}}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i\sqrt{10})^2(z^2+2)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to i\sqrt{10}}\left[\frac{-2(3z^2+2+2\sqrt{10}iz)}{(z+i\sqrt{10})^3(z^2+2)^3}\right]=-\frac{3\sqrt{10}i}{12800}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}=2\pi i\left(-\frac{3\sqrt{10}i}{12800}\right)=\frac{3\pi}{640\sqrt{10}}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}=\frac{3\pi}{640\sqrt{10}}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\lambda x dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$(x^2-x+1)^2=0\Rightarrow z_{1,2}=\tfrac12\pm i\tfrac{\sqrt3}{2}$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{\tfrac12+i\tfrac{\sqrt3}{2}\}$$

Эта особая точка является полюсом второго порядка. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}}{\mathrm{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-\frac12-i\frac{\sqrt3}{2})^2}{(z^2-z+1)^2}e^{2iz}\right]=$$

$$=\lim_{z\to\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+\frac12+i\frac{\sqrt3}{2})^2}e^{2iz}\right]=\lim_{z\to\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}}\left[\frac{-2+2iz+i-\sqrt3}{(z+\frac12+i\frac{\sqrt3}{2})^3}e^{2iz}\right]=$$

$$=\frac{1-i+\sqrt3}{4}e^{i-\sqrt3}=\frac{1-i+\sqrt3}{4}e^{-\sqrt3}(\cos1+i\sin1)$$

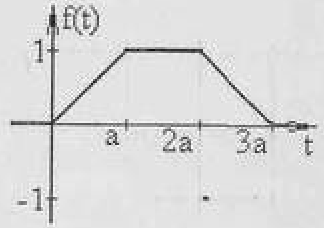
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{\pi e^{-\sqrt3}}{2}\left[(1+\sqrt3)\cos1+\sin1\right]$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}dx=\frac{\pi e^{-\sqrt3}}{2}\left[(1+\sqrt3)\cos1+\sin1\right]$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}\frac{t}{a}, & 0<t<a\\ 1, & a<t<2a\\ \frac{3a-t}{a}, & 2a<t<3a\\ 0, & 3a<t\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{t}{a}\cdot\eta(t)+\frac{a-t}{a}\cdot\eta(t-a)+\frac{2a-t}{a}\eta(t-2a)+\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{ap^2}+\left(\frac1p-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac2p-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-2ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac3p\right)e^{-3ap}$$

Ответ: $F(p)=\frac{1}{ap^2}+\left(\frac1p-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac2p-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-2ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac3p\right)e^{-3ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{p}{(p^2+4p+8)^2}$$

Перейдем к новой переменной (p+2):

$$\frac{p}{(p^2+4p+8)^2}=\frac{2p}{((p+2)^2+4)^2}=\frac{(p+2)-2}{((p+2)^2+4)^2}$$

Представим эту функцию, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{(p+2)-4}{((p+2)^2+4)^2}=\frac{(p+2)}{((p+2)^2+2^2)^2}-\frac{2}{((p+2)^2+2^2)^2}$$

Найдем оригинал функции, используя формулу смещения:

$$\frac{(p+2)}{((p+2)^2+2^2)^2}-\frac{2}{((p+2)^2+2^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{2^2(p+2)}{((p+2)^2+2^2)^2}-2\frac{1}{((p+2)^2+2^2)^2}\to$$

$$\to\frac{1}{8}e^{-2t}\cdot 2t\sin 2t-2e^{-2t}\cdot\left[\frac{1}{16}\sin 2t-\frac{t}{8}\cos 2t\right]=$$

$$=\frac{te^{-2t}}{4}\cdot\sin 2t-\frac{e^{-2t}}{8}\sin 2t+\frac{te^{-2t}}{4}\cos 2t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$\frac{te^{-2t}}{4}\cdot\sin 2t-\frac{e^{-2t}}{8}\sin 2t+\frac{te^{-2t}}{4}\cos 2t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''-3y'+2y=12e^{3t}$$
$$y(0)=2,\quad y'(0)=6.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)-3pY(p)+3y(0)+2Y(p)=\frac{12}{p-3}$$

$$p^2Y(p)-2p-6-3pY(p)+6+2Y(p)=\frac{12}{p-3}$$

$$(p^2-3p+2)Y(p)=(p-1)(p-2)Y(p)=\frac{12}{p-3}+2p=\frac{2p^2-6p+12}{p-3}$$

$$Y(p)=\frac{2p^2-6p+12}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

Найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{2p^2-6p+12}{(p-1)(p-2)(p-3)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-3}=$$

$$=\frac{Ap^2-5Ap+6A+Bp^2-4Bp+3B+Cp^2-3Cp+2C}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

$$\begin{cases}A+B+C=2\\-5A-4B-3C=-6\\6A+3B+2C=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=4\\B=-8\\C=6\end{cases}\Rightarrow Y(p)=\frac{4}{p-1}-\frac{8}{p-2}+\frac{6}{p-3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=4e^{t}-8e^{2t}+6e^{3t}$$

Ответ: $y(t)=4e^{t}-8e^{2t}+6e^{3t}$

Задача 25

Материальная точка массы m совершает прямолинейное колебание по оси Ox под действием восстанавливающей силы F=–kx, пропорциональной расстоянию x от начала координат и направленной к началу координат, и возмущающей силы f =Acos t. Найти закон движения x=x(t) точки, если в начальный момент времени $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$.
$k = 9m$, $A = 8m$, $x_0 = 0$, $v_0 = 3$ м/с.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kx + A\cos t$$

$$\ddot{x}m + kx = A\cos t$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 3$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m + mx = m\cos t$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + 9x = 8\cos t$$

Перейдем к изображениям функций:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + 9X(p) = \frac{8p}{p^2+1}$$

$$(p^2+9)X(p) - 3 = \frac{8p}{p^2+1}$$

$$X(p) = \frac{8p}{(p^2+1)(p^2+9)} + \frac{3}{p^2+9} = \frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+9} + \frac{3}{p^2+9}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = \cos t - \cos 3t + \sin 3t$$

Ответ: $x(t) = \cos t - \cos 3t + \sin 3t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = 2x + 3y + 1 \end{cases}$$

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = 2Y(p) \\ pY(p) - y(0) = 2X(p) + 3Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) - 2 = 2Y(p) \\ pY(p) - 1 = 2X(p) + 3Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 1 = 2X(p) + 3Y(p) + 1/p \Rightarrow X(p) = \frac{pY(p) - 1 - 3Y(p) - 1/p}{2}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p\frac{pY(p) - 1 - 3Y(p) - 1/p}{2} - 2 = 2Y(p) \Rightarrow Y(p) = \frac{p+5}{p^2 - 3p - 4}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{p+5}{p^2 - 3p - 4} = \frac{p+5}{(p-\frac{3}{2})^2 - \frac{8}{2}}$$

$$= \frac{5}{3}\frac{p-1}{(p-1)^2 - 4} + \frac{i}{3}\frac{2i}{(p-1)^2 - 4} - \frac{2}{3p} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = \tfrac{5}{3}e^t\cos 2it + \tfrac{i}{3}e^t\sin 2it - \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{3}e^t\operatorname{ch}2t - \tfrac{1}{3}e^t\operatorname{sh}2t - \tfrac{2}{3}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = 2x + 3y + 1 \Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{2}[\dot{y} - 3y - 1] = \tfrac{1}{2}(e^t\operatorname{ch}2t + 3e^t\operatorname{sh}2t -$$

$$- 5e^t\operatorname{ch}2t + e^t\operatorname{sh}2t + 2 - 1) = 2e^t\operatorname{sh}2t - 2e^t\operatorname{ch}2t + \tfrac{1}{2}$$

Ответ:

$$x(t) = 2e^t\operatorname{sh}2t - 2e^t\operatorname{ch}2t + \tfrac{1}{2}$$

$$y(t) = \tfrac{5}{3}e^t\operatorname{ch}2t - \tfrac{1}{3}e^t\operatorname{sh}2t - \tfrac{2}{3}$$

Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции w = f(z).

w = Arsh(z); первый квадрант.

Тогда z = sh w. Первый квадрант – это область {Re(z)<0; Im(z)>0}, т.е. {Im(sh w)>0; Re(sh w)<0}. Рассмотрим это неравенство подробнее (wx = Re(w), wy = Im(w)):

$$\operatorname{Im}(\operatorname{sh} w) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{w} - e^{-w}}{2}\right) = \operatorname{Im}\left[\frac{e^{wx+iwy} - e^{-wx-iwy}}{2}\right] =$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{e^{wx}(\cos wy + i\sin wy)}{2} - \frac{e^{-wx}(\cos wy - i\sin wy)}{2}\right] =$$

$$= \frac{(e^{wx} + e^{-wx})\sin wy}{2} > 0 \Rightarrow \sin[\operatorname{Im}(w)] > 0$$

$$\operatorname{Re}(\sin w) = \frac{(e^{wx} - e^{-wx})\cos wy}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases}\operatorname{Re}(w) > 0\\ \cos[\operatorname{Im}(w)] > 0\end{cases} \text{или} \begin{cases}\operatorname{Re}(w) < 0\\ \cos[\operatorname{Im}(w)] < 0\end{cases}$$

Т.о., первый квадрант отображается в области {Re(w)>0; cos[Re(w)]>0; sin[Im(w)]>0} и {Re(w)<0; cos[Re(w)]<0; sin[Im(w)]>0}, т.е. в горизонтальные полуполосы {Re(w)>0; Im(w)∈(2πk;π/2+2πk); k∈Z} и {Im(w)∈(2πk;–π/2+2πk); Re(w)<0; k∈Z}.