Лекція 4

Добутки векторів: скалярний, векторний, змішаний та їх застосування

4.1. Скалярний добуток

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають **число**, що дорівнює $|\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi$ - добутку довжин $|\vec{a}|$ та $|\vec{b}|$ цих векторів на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будемо позначати $(\vec{a},\vec{b})$.

Скалярний добуток двох векторів можна виразити через ортогональну проекцію на напрям. Якщо вектор $\vec{a}$ ненульовий, то скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ буде добутком довжини вектора $\vec{a}$ і ортогональної проекції вектора $\vec{b}$ на напрям вектора $\vec{a}$: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}||Пр_{\vec{a}}\vec{b}$. Аналогічно при $\vec{b}\neq 0$ маємо рівність $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{b}||Пр_{\vec{b}}\vec{a}$.

Дослідимо знак скалярного добутку $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi$:

$$- \; 0<\varphi<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right)>0;$$

$$- \; \frac{\pi}{2}<\varphi<\pi \Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right)<0;$$

$$- \; \varphi=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right)=0.$$

Властивості скалярного добутку:

1 . Скалярний добуток є комутативним : $\vec{a},\vec{b} \;=\; \vec{b},\vec{a}$.

Властивість безпосередньо випливає з визначення, оскільки скалярний добуток не залежить від порядку множників.

2 . $\lambda\vec{a},\vec{b} \;=\; \vec{a},\lambda\vec{b} \;=\lambda\; \vec{a},\vec{b}$;

3 . $(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c} \;=\; \vec{a},\vec{c} \;+\; \vec{b},\vec{c}$;

4 . Величину $\vec{a},\vec{a} \;=\vec{a}^2$ називають **скалярним квадратом** вектора $\vec{a}$. Властивість скалярного квадрата: $\vec{a}^2 \geq 0$, причому $\vec{a}^2 = 0$ тільки при $\vec{a}=\vec{0}$. Дійсно, $\vec{a}^2 = \;\vec{a},\vec{a}\; =|\vec{a}\,||\,\vec{a}\,|\,cos\,0 =|\,\vec{a}\,|^2$.

◀**Приклад 4.1.** Знайти довжину вектора $\vec{a}=3\vec{c}-2\vec{d}$, якщо $\left|\vec{c}\right|=5,\ \left|\vec{d}\right|=4,\ \ \vec{c},\vec{d}\ =60°$.

Розв'язання. Обчислимо скалярний квадрат вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}^2 = \;\vec{a},\vec{a}\; = \;3\vec{c}-2\vec{d},3\vec{c}-2\vec{d}\; =9\;\vec{c},\vec{c}\; -12\;\vec{c},\vec{d}\; +4\;\vec{d},\vec{d}\; =$$

$$=9\left|\vec{c}\right|^2-12\left|\vec{c}\right|\left|\vec{d}\right|cos\;\vec{c},\vec{d}\;+4\left|\vec{d}\right|^2=9\cdot25-12\cdot5\cdot4\cdot0{,}5+4\cdot16=169.$$

Отже, $\left|\vec{a}\right|=13$.▶

◀**Приклад 4.2.** У трикутнику *ABC* кут при вершині *A* дорівнює 120 °, а довжина сторони *AC* в три рази більше відстані між вершинами *A* і *B*. Знайти гострий кут φ між стороною *BC* і медіаною *AM* трикутника.

Розв'язання. Кут між *BC* і медіаною *AM* (рис. 4.1) дорівнює куту між векторами $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AM}$. Косинус кута виражається через скалярний добуток цих векторів і їх довжини за допомогою формули: $cos\,\varphi=\dfrac{\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AM}\,||\,\overrightarrow{BC}\,|}$.

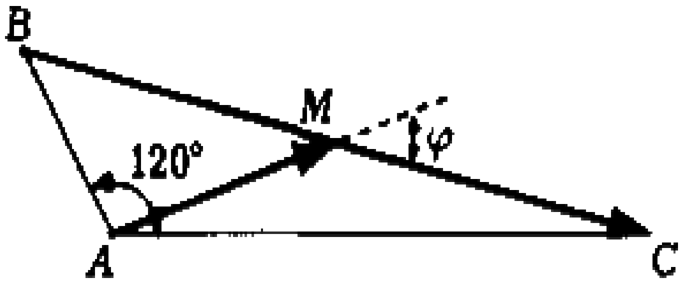

Рис 4.1. Рисунок до задачі 4.2.

Нехай $|AB| = s$. Тоді $|AC| = 3s$, і оскільки, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, то

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 0.5\overrightarrow{BC} = 0.5(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$, і тому

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.5(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) =$$

$$= 0.5(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) = 0.5(9s^2 - s^2) = 4s^2$$

Обчислимо довжини векторів $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AM}$:

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM}} = 0.5\sqrt{(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})} =$$
$$= 0.5\sqrt{9s^2 + 6s^2 \cos 120^\circ + s^2} = 0.5s\sqrt{7}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}} = 0.5\sqrt{(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})} =$$

$$= 0.5\sqrt{9s^2 - 6s^2 \cos 120^\circ + s^2} = s\sqrt{13}$$

Отже, $\cos\varphi = \dfrac{4s^2}{0.5s\sqrt{7}s\sqrt{13}} = \dfrac{8}{\sqrt{7}\sqrt{13}}$.

Оскільки $\varphi \in (0;\pi/2)$, то $\varphi = \arccos(8/\sqrt{91})$.►

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ з V^3 задані своїми координатами в

ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = x_a; y_a; z_a$, $\vec{b} = x_b; y_b; z_b$.

Обчислимо скалярний добуток:

$$\vec{a},\vec{b} \;=\; x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k},x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k} \;= x_a x_b\vec{i}^{\,2}+y_a y_b\vec{j}^{\,2}+z_a z_b\vec{k}^{\,2},$$

оскільки $\vec{i},\vec{j} \;=\; \vec{i},\vec{k} \;=\; \vec{k},\vec{j} \;=0;\;\; \vec{i},\vec{i} \;=\; \vec{j},\vec{j} \;=\; \vec{k},\vec{k} \;=1.$

Таким чином, $\vec{a},\vec{b} \;= x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$, тобто **скалярний добуток векторів в ортонормированному базисі дорівнює сумі попарних добутків однойменних координат.**

Критерій ортогональності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0.$$

Косинус кута між векторами:

$$cos\,\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x^2{}_a + y^2{}_a + z^2{}_a}\sqrt{x^2{}_b + y^2{}_b + z^2{}_b}}.$$

У випадку, коли $\vec{a}$ і $\vec{b}$ належать простору V^2 і відомі координати цих векторів в ортонормированном базисі $\vec{i},\vec{j}$:

$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j},\;\; \vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j}$, справедливі формули, аналогічні простору V^3:

- для скалярного добутку: $\vec{a},\vec{b} \;= x_a x_b + y_a y_b$;
- для критерію ортогональності: $x_a x_b + y_a y_b = 0$;
- для косинуса кута між ненульовими векторами:

$$cos(\angle(a,b)) = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x^2{}_a + y^2{}_a}\sqrt{x^2{}_b + y^2{}_b}}.$$

◀**Приклад 4.3.** Знайти значення параметра t, при якому вектори $\vec{a} = \; t;1-t;7 \;$, $\vec{b} = \; t+1;2;-2 \;$, що задані своїми координатами в ортонормированном базисі, будуть ортогональними.

Розв'язання. Використовуючи критерій ортогональності векторів, отримуємо рівняння:

$$t \;\; t+1 \;\; +2 \;\; 1-t \;\; -14=0 \Leftrightarrow t^2-t-14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=4 \end{array} \right. .$$ ▶

4.2. Векторний добуток

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$ такий, що:

а) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| sin \phi$, де $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

б) $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$;

в) якщо $\vec{c} \neq 0$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку.

Впорядкована трійка некомпланарних векторів називається правою, якщо з кінця третього вектора найкоротший поворот від першого вектора до другого здійснюється проти обертання годинникової стрілки.

Згідно з умовою а), вектор $\vec{c} = \vec{0}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. В окремому випадку, коли який-небудь із векторів ($\vec{a}$ чи $\vec{b}$) є нуль-вектором, то вони колінеарні, і як наслідок, $\vec{c} = 0$. Якщо $\vec{c} = \vec{0}$, то $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, проведених із спільного початку (рис. 4.2).

Векторний добуток позначається $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (або $\vec{c} = \left[\vec{a},\vec{b} \right]$)

Властивості векторного добутку.

1. Векторний добуток двох векторів не має комутативної (переставної) властивості. Для векторного добутку справджується рівність

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

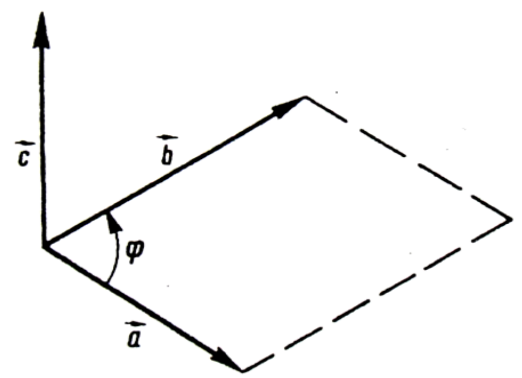

Рис. 4.2. Векторний добуток

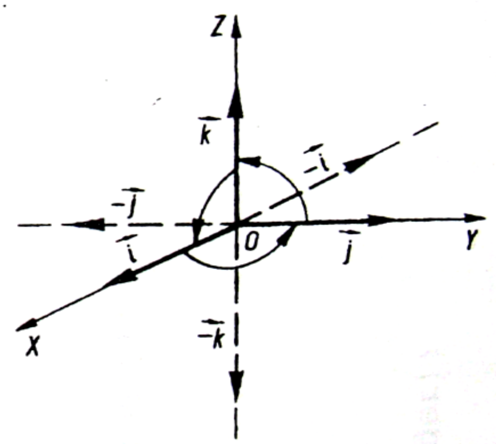

Рис. 4.3. Векторний добуток одиничних векторів

2. Розглянемо векторний добуток одиничних векторів координатних осей (ортів) (рис. 4.3). Згідно з означенням векторного добутку знаходимо

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

3. Векторний добуток має розподільну властивість відносно скалярного множника: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}).$

4. Векторний добуток має розподільну властивість відносно векторного множника: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$

5. Векторний добуток у координатній форма. Нехай задано вектор

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z); \ \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

у прямокутній системі координат з ортами $\vec{i}, \ \vec{j}, \ \vec{k}$. Знайдемо векторний добуток цих векторів: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \ a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \ \times \ b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \ =$

$$= a_x b_x \ \vec{i} \times \vec{i} \ + a_x b_y \ \vec{i} \times \vec{j} \ + a_x b_z \ \vec{i} \times \vec{k} \ +$$

$$+ a_y b_x \ \vec{j} \times \vec{i} \ + a_y b_y \ \vec{j} \times \vec{j} \ + a_y b_z \ \vec{j} \times \vec{k} \ +$$

$$+ a_z b_x \ \vec{k} \times \vec{i} \ + a_z b_y \ \vec{k} \times \vec{j} \ + a_z b_z \ \vec{k} \times \vec{k} \ .$$

Враховуючи властивість 2, дістанемо:

$$\vec{c} = a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} + a_y b_z \vec{i} - a_y b_x \vec{k} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} =$$

$$= \ a_y b_z - a_z b_y \ \vec{i} + \ a_z b_x - a_x b_z \ \vec{j} + \ a_x b_y - a_y b_x \ \vec{k}$$

Отже, проекції вектора $\vec{c}$ на координатні осі дорівнюють

$$\vec{c} = \text{пр}_x \, \vec{c} = a_y b_z - a_z b_y = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix},$$

$$\vec{c} = \text{пр}_y \, \vec{c} = a_z b_x - a_x b_z = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix},$$

$$\vec{c} = \text{пр}_z \, \vec{c} = a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Тоді для знаходження векторного добутку двох даних векторів маємо формулу

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

◄**Приклад 4.4.** Знайти векторний добуток $\vec{a} = (2, -1, 3)$ і $\vec{b} = (3, 1, 4)$.

Розв’язання: Маємо

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}.$$

Відповідь: $\vec{c} = \ -7,1,5$

Застосування векторного добутку

1) Обчислення площі трикутника.

Нехай дано трикутник з вершинами у точках $A\ \ x_1, y_1, z_1$, $B\ \ x_2, y_2, z_2$ і $C\ \ x_3, y_3, z_3$.Знайдемо площу трикутника *ABC* . Розглянемо два вектори $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ і $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, що збігаються із сторонами трикутника *ABC* (рис. 2.4). Модуль векторного добутку $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$, згідно з означенням,

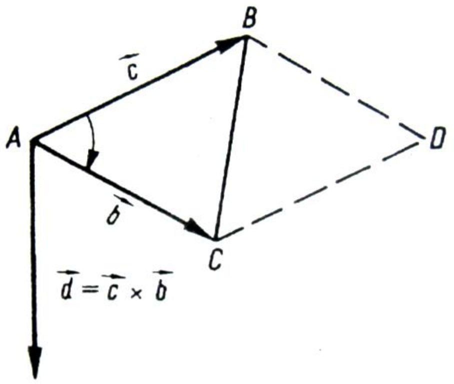

Рис. 4.4.

дорівнює площі паралелограма $ABCD$. Тоді площа трикутника ABC:

$S = \dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\ \ = \dfrac{1}{2}\ \vec{c} \times \vec{b}$. Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{c} = \ \ x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\ \ ,$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{b} = \ x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1 \ .$$

Тоді площа трикутнику

$$S = \frac{1}{2}\ \vec{c} \times \vec{b}\ = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Розглянемо вектор $\vec{d}$, який дорівнює добутку векторів $\vec{c}$ і $\vec{b}$.

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Проекція вектора $\vec{d}$ на координатній осі будуть

$$d_x = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},\ d_x = \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix},$$

$$d_z = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}, \text{ а довжина } \ \vec{d}\ = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}.$$

Тоді площа трикутника можна записати у вигляді

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{d}\right|.$$

Розглянемо окремий випадок, коли трикутник лежить в одній з координатних площин, наприклад у площині xOy. При цьому $z_1 = z_2 = z_3 = 0,$ а проекції вектора $\vec{d}$ дорівнюють відповідно

$$d_x = 0,\ d_y = 0,\ d_z = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Площа трикутника, який лежить у площині $z=0$ з вершинами в точках $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ і $C(x_3,y_3)$, дорівнює

$$S_{xy}=\frac{1}{2}\left|d_z\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{matrix}\right\|$$

Визначник другого порядку в останній формулі можна записати у вигляді визначника третього порядку:

$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. Тоді площа трикутника може бути виражена формулою: $S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|$.

Аналогічно можна записати формули площ трикутників, які лежать у координатних площинах yOz і xOz.

◀**Приклад 4.5.** Знайти площу трикутника, вершини якого розміщено в точках $A(1,2,3)$, $B(5,2,-1)$ і $C(-1,6,3)$.

Розв'зання. Маємо $\overrightarrow{AB}=(5-1,2-2,-1-3)=(4,0,-4)$,

$\overrightarrow{AC}=(-1-1,6-2,3-3)=(-2,4,0)$, тоді

$$S=0{,}5\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=0{,}5\sqrt{16^2+(-8)^2+16^2}=12 \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь: $S_{\Delta ABC}=12\ од^2$.

◀**Приклад 4.6.** Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{c} - 2\vec{d}$ і $\vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$ за умови, що $\left|\vec{c}\right| = 1$, $\left|\vec{d}\right| = 4$, а кут

$\varphi = \left(\vec{c}, \vec{d}\right) = 30°$.

Розв'язання:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3\vec{c} - 2\vec{d}\,) \times (\vec{c} + \vec{d}\,) = 3\vec{c} \times \vec{c} + 3\vec{c} \times \vec{d} - 2\vec{d} \times \vec{c} - 2\vec{d} \times \vec{d} =$$

$= 3\vec{c} \times \vec{d} + 2\vec{c} \times \vec{d} = 5\vec{c} \times \vec{d}$. Тому

$$S = 0.5\,|\,\vec{a} \times \vec{b}\,| = 0.5\,|\,5\vec{c} \times \vec{d}\,| = 2.5\,|\,\vec{c}\,|\,|\,\vec{d}\,|\, sin 30° = 5.$$

Відповідь: $S = 5$(од. кв.)

2) Умова паралельності (колінеарності, або лінійної залежності) двох векторів.

Два вектори тривимірного простору, що відмінні від нуль-вектора, паралельні тоді і тільки тоді, коли їхній векторний добуток дорівнює нуль-вектору.

а) Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралельні, тоді $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, де λ – деяке дійсне число, або

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda,$$

Тоді $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

б) Нехай векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, тоді $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, тобто $\vec{a}\,||\,\vec{b}$.

3) Момент сили відносно полюса

Відомо, що момент сили $\vec{F}$ відносно полюса (точки) *O* дорівнює векторному добутку радіус-вектора точки прикладення сили на вектор сили (рис. 2.5, а,б): $m_0\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$.

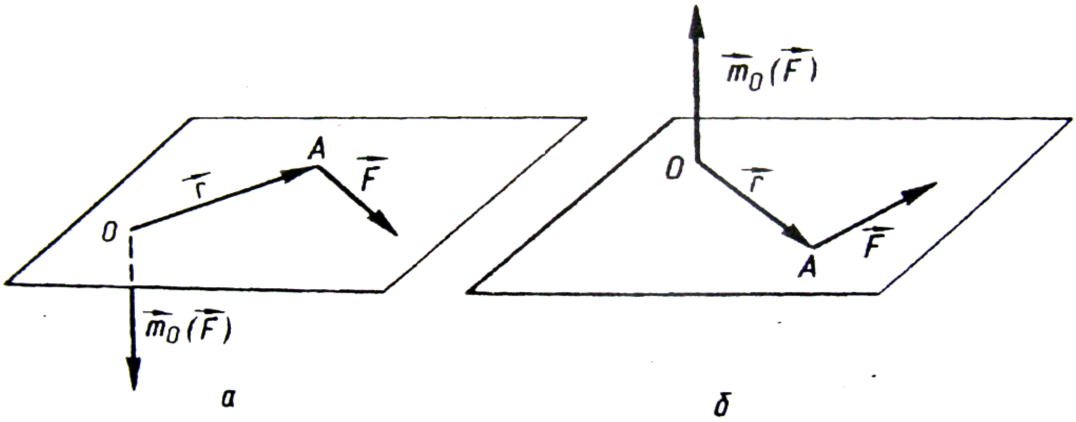

Рис. 2.5. Момент сили.

◄**Приклад 4.7.** Знайти всі вектори, що ортогональні векторам $\vec{n}_1 = (3,1,-2)$ і $\vec{n}_2 = (1,-1,1)$.

Розв'язання. Вектори $\vec{n}_1 = (3,1,-2)$ і $\vec{n}_2 = (1,-1,1)$ неколінеарні, оскільки їх координати непропорційні. Тоді існує єдина площина, що містить ці вектори. Шукана множина векторів, що ортогональні даними, збігається з множиною векторів, що перпендикулярні зазначеній площині, а ця множина збігається із множиною векторів, колінеарних векторному добутку

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$$

Відповідь: $\lambda(-\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k})$, де $\lambda \in R$.

4.3. Добуток трьох векторів

Послідовність множення трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна здійснити різними способами.

1. Можна два перших вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перемножити скалярно, а потім знайдене число помножити на третій вектор $\vec{c}$. При цьому вектор $\vec{a}\cdot\vec{b}\ \ \vec{c}$ буде колінеарний вектору $\vec{c}$, тобто $\vec{a}\cdot\vec{b}\ \ \vec{c}=\lambda\vec{c}$, де $\lambda=\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}\ \ $.

Очевидно, що $\vec{a}\cdot\vec{b}\ \ \vec{c}=\vec{c}\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}\ \ =\vec{c}\ \ \vec{b}\cdot\vec{a}\ \ $.

2. Можна вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ помножити векторно і знайдений вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ помножити скалярно на вектор $\vec{c}$: $\vec{a}\times\vec{b}\ \ \cdot\vec{c}$

В результаті дістанемо число, яке називається **змішаним добутком трьох векторів.**

3. Можна два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перемножити векторно і знайдений вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ помножити векторно на третій вектор $\vec{c}$. Дістанемо вектор $\vec{a}\times\vec{b}\ \ \times\vec{c}$,який називається **подвійним векторним добутком даних трьох векторів:** $d=\ \ \vec{a}\times\vec{b}\ \ \times\vec{c}$.

4.3.1. Змішаний добуток і його властивості

Властивості змішаного добутку.

1. Розглянемо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, які не лежать на одній площині. Побудуємо на цих векторах, як на ребрах, що виходить із однієї точки, паралелепіпед. Знайдемо об’єм паралелепіпеда: $V=QH$,

де Q – площа основи, а H – висота. Згідно з означенням векторного добутку двох векторів, $Q = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

Висота паралелепіпеда H дорівнює модулю проекції вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$: $H = \left|np_{\vec{e}}\vec{c}\right|$, де $\vec{e}$ – одиничний вектор векторного добутку $\vec{d}$.

Таким чином, $V = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \left|np_{\vec{e}}\vec{c}\right| = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right|$. Отже, геометрично змішаний добуток трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, взятий за абсолютною величиною, є об'ємом паралелепіпеда, побудованого на векторах, які перемножуються, як на ребрах, що виходять з однієї точки.

2. Змішаний добуток трьох векторів додатний, якщо розміщення векторів відповідає правій системі координат, і від'ємний, якщо розміщення векторів відповідає лівій системі координат.

Таким чином:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a},$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}.$$

3. Три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, відмінні від нуль-вектора, лежать на одній і тій самій площині, тобто є лінійно залежними, тоді і тільки тоді, коли їхній змішаний добуток дорівнює нулю.

4. Нехай задано три вектори в координатній формі:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z).$$

Тоді їхній змішаний добуток

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = d_x c_x + d_y c_y + d_z c_z.$$

Як відомо,

$$d_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix},\ d_y = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix},\ d_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким чином, змішаний добуток векторів, заданий в координатній формі, дорівнює

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Можна записати у вигляді $V = \pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ де знак «+» треба брати тоді, колі значення визначника додатне, і знак «–» тоді, коли це значення від’ємне. Якщо вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AD},\ \vec{b} = \overrightarrow{AB},\ \vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ задано координатами їхніх початку і кінця, тобто точками $A(x_0, y_0, z_0)$, $D(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $A_1(x_3, y_3, z_3)$, то $V = \pm\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}.$

Умову компланарності трьох векторів можна записати у вигляді

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{або}\quad \vec{a}\times\vec{b}\ \ \cdot\vec{c}=\pm\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

Аналогічно знаходимо умову приналежності чотирьох точок $A\ \ x_0, y_0, z_0$, $B\ \ x_1, y_1, z_1$, $C\ \ x_2, y_2, z_2$, $D\ \ x_3, y_3, z_3$ тривимірного простору однієї і тій самій площині (рис. 2.6). Дані точки лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ лежать у тій самій площині, а це буде тоді й тільки тоді, коли $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\ \ \cdot\overrightarrow{AD}=0,$або

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

5. Розглянемо застосування змішаного добутку векторів до обчислення об’єму трикутної піраміди. Нехай вершини трикутної піраміди (рис. 2.6) лежить у точках $A\ \ x_0, y_0, z_0$, $B\ \ x_1, y_1, z_1$, $C\ \ x_2, y_2, z_2$ і $D\ \ x_3, y_3, z_3$.

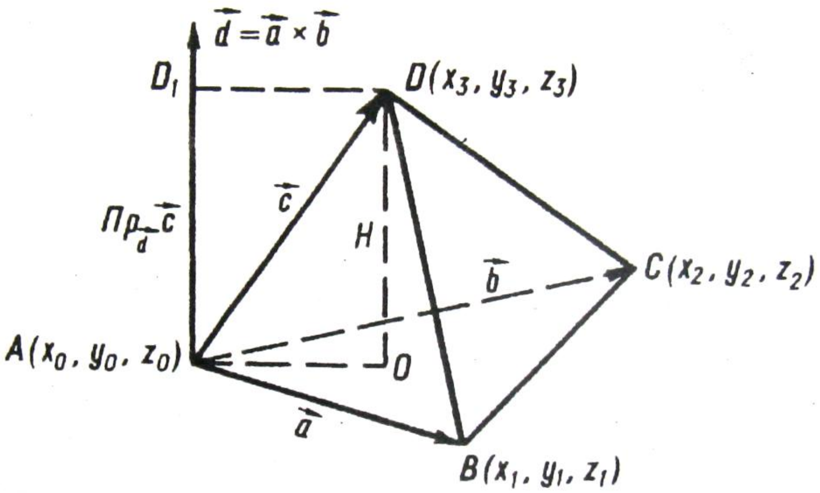

Рис. 4.6.

Площа трикутника ABC (основи піраміди) позначимо через Q, а її висоту $|DO|$ – через H. Об’єм піраміди $V = \frac{1}{3}QH$. Знайдемо вектори:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \quad x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \quad ,$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \quad x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0 \quad ,$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{AD} = \quad x_3 - x_0, y_3 - y_0, z_3 - z_0 \quad .$$

Тоді

$$Q = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|, \text{ а } H = \left|OD\right| = \left|np_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right|.$$

Таким чином,

$$V = \frac{1}{3}QH = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|np_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\left|\ \vec{a}\times\vec{b}\ \ \cdot\vec{c}\right|.$$

Тобто об’єм трикутної піраміди дорівнює 1/6 модуля змішаного добутку векторів, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять з однієї і тієї самої вершини:

$$V = \frac{1}{6}\left|\ \vec{a}\times\vec{b}\ \ \cdot\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}\right|.$$

◀**Приклад 4.8.** Визначити, чи будуть лінійно залежними вектори

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} = 3\vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{c} = 7\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Розв’язання. Обчислимо змішаний добуток векторів $\vec{a},\ \vec{b}$ і $\vec{c}$

$$\vec{a}\times\vec{b}\ \ \cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто дані вектори лінійно залежні.

Відповідь: лінійно залежні.

4.3.2. Подвійний векторний добуток

Трьом векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна поставити у відповідність вектор, що дорівнює $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}\,)$. Цей вектор називають **подвійний векторним добутком** векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Подвійний векторний добуток зустрічається в механіці і фізиці.

Подвійний векторний добуток виражається через лінійну комбінацію двох або трьох своїх множників за формулою:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}\,)=\vec{b}(\vec{a}\vec{c}\,)-\vec{c}(\vec{a}\vec{b}\,).$$

Доведення. Позначимо через x різницю лівої і правої частини цієї рівності

$$\vec{x}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}\,)-\vec{b}(\vec{a}\vec{c}\,)+\vec{c}(\vec{a}\vec{b}\,).$$

Нам достатньо показати, що $\vec{x}=\vec{0}$.

Припустимо, що вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ неколінеарні. Тоді їх векторний добуток не дорівнює нульовому вектору і ортогональний ненульовому вектору $\vec{b}$.

Вектори $\vec{i}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|},\quad \vec{j}=\dfrac{\vec{b}\times\vec{c}}{|\vec{b}\times\vec{c}|},\quad \vec{k}=\vec{i}\times\vec{j}$ утворюють правий ортонормований базис в V_3 (це відображено в означеннях). У цьому базисі справедливі наступні співвідношення:

$$\vec{b}=|\vec{b}|\vec{i}\,,\quad \vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{k}\,,\quad \vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\,,$$

і тому $\vec{b}\times\vec{c}=-|\vec{b}|c_2\vec{j}\,,\quad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}\,)=-|\vec{b}|c_2(a_1\vec{k}-a_3\vec{i}\,).$

Крім того, $\vec{a},\vec{c}\;=a_1c_1-a_3c_2,\quad \vec{a},\vec{b}\;=a_1|\vec{b}|.$

У результаті бачимо, що й у випадку неколінеарних векторів b і c виконується рівність

$$x = -|b|c_2(a_1k - a_3i) - (a_1c_1 - a_3c_2)|b|i + a_1|b|(c_1i + c_2k) = 0.$$