/ТФКП/ 2006

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{1/256}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi = \arg(z); \quad k = 0,1,\ldots,n-1; \quad z \neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{1/256}$:

$$\sqrt[4]{1/256} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt[4]{1/256} = \frac{1}{4}i$$

$$\sqrt[4]{1/256} = -\frac{1}{4}$$

$$\sqrt[4]{1/256} = -\frac{1}{4}i$$

Ответ: $\sqrt[4]{1/256} = \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{4}i; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}i\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: i^{3i}

Нам известно следующее равенство:

$$\alpha^z = e^{z\cdot \mathrm{Ln}\,\alpha}$$

Подставим в это равенство данные нашей задачи. Тогда:

$$i^{3i} = e^{3i\cdot \mathrm{Ln}(i)}$$

Как известно, главное значение Ln(i)=iπ/2. Тогда выражение можно преобразовать следующим образом:

$$i^{3i} = e^{3i\cdot(i\pi/2)} = e^{-3\pi/2}$$

Ответ: $i^{3i} = e^{-3\pi/2}$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arc}\sin(-1)$$

Функция Arcsin является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arc}\sin z = -i\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

Подставим вместо z значение (–1):

$$\mathrm{Arc}\sin(-1) = -i\mathrm{Ln}\left(-i + \sqrt{1 - (-1)^2}\right) = -i\mathrm{Ln}(-i)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-i\mathrm{Ln}(-i) = -i[\ln|-i| + i(\arg(-i) + 2\pi k)] =$$

$$= -i\ln 1 + \arg(-i) + 2\pi k \approx -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

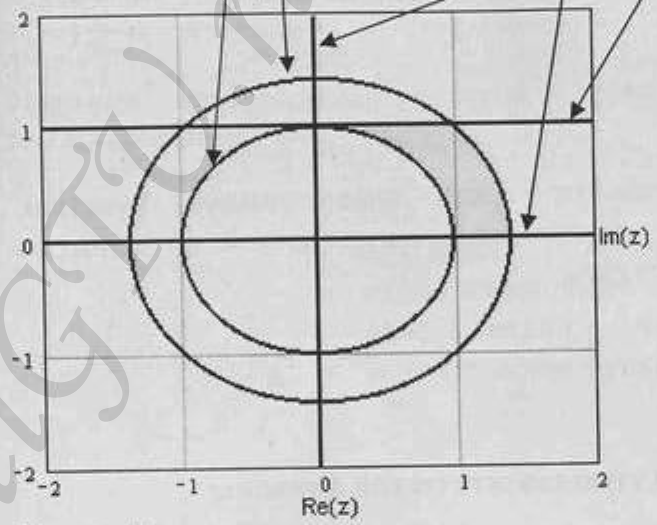
$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Ответ: $\mathrm{Arc}\sin(-1) \approx -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$1 < z\bar{z} < 2 \Leftrightarrow 1 < |z| < \sqrt{2}$, $\quad \mathrm{Re}\, z > 0$, $\quad 0 \le \mathrm{Im}\, z \le 1$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z = t^2 + 4t + 20 - i(t^2 + 4t + 4)$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t) = t^2 + 4t + 20; \quad y(t) = -(t^2 + 4t + 4)$

Выразим параметр t через x и y:

$x = t^2 + 4t + 20 \Rightarrow x - 16 = (t+2)^2 \Rightarrow t = \sqrt{x - 16} - 2$

$y = -(t^2 + 4t + 4) \Rightarrow -y = (t+2)^2 \Rightarrow t = \sqrt{-y} - 2$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$\sqrt{x - 16} - 2 = \sqrt{-y} - 2 \Rightarrow x - 16 = -y \Rightarrow x + y - 16 = 0$

Ответ: $x + y - 16 = 0$

Задача 6

Проверить, что v является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной мнимой части v(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$v = x^2 - y^2 - x$$

$$f(0) = 0$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = 2ix - 2y - i = 2i(x+iy) - i = 2iz - i$$

Т.к. производная существует, то v является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int (2iz - i)dz = iz^2 - iz + C$$

Определим константу C:

$$f(0) = i \cdot 0^2 - i \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = iz^2 - iz$$

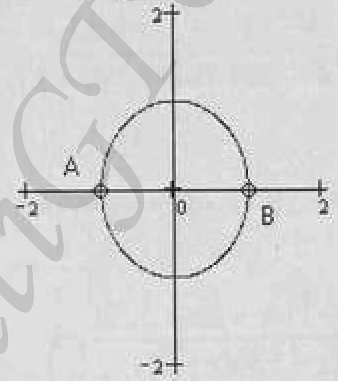
Ответ: $f(z) = iz^2 - iz$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\frac{1}{2i}\int_{|z|=R} \bar{z}dz;$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверка, является ли функция аналитической, не нужна, так как явно видно, что $\bar{z}$ – не аналитическая функция

Перейдем к рассмотрению кривой ABA в параметрическом виде:

$$AB: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = \sqrt{1-t^2}; z_A = z(-1); z_B = z(1)$$

$$BA: z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = -\sqrt{1-t^2}; z_B = z(1); z_A = z(-1)$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\frac{1}{2i}\int_L f(z)dz = \frac{1}{2i}\int_{ABA} f[z(t)]z'(t)dt = \frac{1}{2i}\int_{-1}^{1}\left(t - \sqrt{1-t^2}\right)\left(1 - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt +$$

$$+\frac{1}{2i}\int_{1}^{-1}\left(t + \sqrt{1-t^2}\right)\left(1 + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt = \frac{1}{2i}(-\pi - \pi) = i\pi$$

Ответ: $\frac{1}{2i}\int_L f(z)dz = i\pi$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}=\frac{11(z+22)}{-z(2z+11)(z-11)}=-\frac{11}{2z}\cdot\frac{z+22}{(z+5,5)(z-11)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

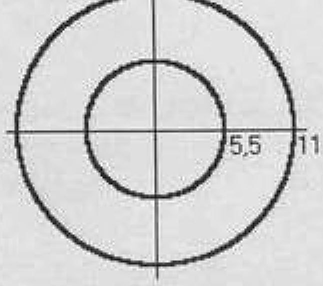
$$\frac{z+22}{(z+5,5)(z-11)}=\frac{A}{z+5,5}+\frac{B}{z-11}=\frac{Az-11A+Bz+5,5B}{(z+5,5)(z-11)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=-1;B=2\}\Rightarrow\frac{z+22}{(z+5,5)(z-11)}=\frac{-1}{z+5,5}+\frac{2}{z-11}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{11}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+5,5}-\frac{2}{z-11}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=-5,5; z=11$



Рассмотрим область $|z|<5,5$:

$$f(z)=\frac{11}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+5,5}-\frac{2}{z-11}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1-(-\frac{2z}{11})}+\frac{1}{1-\frac{z}{11}}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{2z}{11}+\frac{4z^2}{121}-\frac{8z^3}{1331}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{11}+\frac{z^2}{121}+\frac{z^3}{1331}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{11}+\frac{4z}{121}-\frac{8z^2}{1331}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{11}+\frac{z}{121}+\frac{z^2}{1331}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $5,5<|z|<11$:

$$f(z)=\frac{11}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+5,5}-\frac{2}{z-11}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{11}{2z(1-(-\frac{11}{2z}))}+\frac{1}{1-\frac{z}{11}}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{11}{2z}-\frac{121}{4z^2}+\frac{1331}{8z^3}-\frac{14641}{16z^4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{11}+\frac{z^2}{121}+\frac{z^3}{1331}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{11}{2z^2}-\frac{121}{4z^3}+\frac{1331}{8z^4}-\frac{14641}{16z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{11}+\frac{z}{121}+\frac{z^2}{1331}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>11$:

$$f(z)=\frac{11}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+5,5}-\frac{2}{z-11}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{11}{2z(1-(-\frac{11}{2z}))}-\frac{11}{z(1-\frac{11}{z})}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{11}{2z}-\frac{121}{4z^2}+\frac{1331}{8z^3}-\frac{14641}{16z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{11}{z}+\frac{121}{z^2}+\frac{1331}{z^3}+\frac{14641}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{11}{2z^2}-\frac{121}{4z^3}+\frac{1331}{8z^4}-\frac{14641}{16z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{11}{z^2}+\frac{121}{z^3}+\frac{1331}{z^4}+\frac{14641}{z^5}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<5,5: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{11}+\frac{4z}{121}-\frac{8z^2}{1331}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{11}+\frac{z}{121}+\frac{z^2}{1331}+\ldots\right)$$

$$5,5<|z|<11: f(z)=\left(\frac{11}{2z^2}-\frac{121}{4z^3}+\frac{1331}{8z^4}-\frac{14641}{16z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{11}+\frac{z}{121}+\frac{z^2}{1331}+\ldots\right)$$

$$|z|>11: f(z)=\left(\frac{11}{2z^2}-\frac{121}{4z^3}+\frac{1331}{8z^4}-\frac{14641}{16z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{11}{z^2}+\frac{121}{z^3}+\frac{1331}{z^4}+\frac{14641}{z^5}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z-z_0.

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+4},z_0=2+3i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+4}=\frac{1}{z-2i}+\frac{1}{z+2i}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{(z-z_0)+2+i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2+i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+2i}=\frac{1}{(z-z_0)+2+5i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2+5i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{1}{z-2i}+\frac{1}{z+2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2+i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2+5i)^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2+i)^{n+1}}+\frac{1}{(2+5i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2+i)^{n+1}}+\frac{1}{(2+5i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=z\cdot\cos\frac{z}{z-3},z_0=3$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-3;z\cdot\cos\frac{z}{z-3}=(z'+3)\cos\frac{z'+3}{z'}=(z'+3)[\cos1\cos\frac{3}{z'}-$$

$$-\sin1\sin\frac{3}{z'}]=z'\cos1\cos\frac{3}{z'}-z'\sin1\sin\frac{3}{z'}+3\cos1\cos\frac{3}{z'}-3\sin1\sin\frac{3}{z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=z'\cos1\cos\frac{3}{z'}-z'\sin1\sin\frac{3}{z'}+3\cos1\cos\frac{3}{z'}-3\sin1\sin\frac{3}{z'}=$$

$$=\left(1-\frac{3^2}{2!z'^2}+\frac{3^4}{4!z'^4}-\ldots\right)z'\cos1-\left(\frac{3}{z'}-\frac{3^3}{3!z'^3}+\frac{3^5}{5!z'^5}-\ldots\right)z'\sin1+$$

$$+3\left(1-\frac{3^2}{2!z'^2}+\frac{3^4}{4!z'^4}-\ldots\right)\cos1-3\left(\frac{3}{z'}-\frac{3^3}{3!z'^3}+\frac{3^5}{5!z'^5}-\ldots\right)\sin1=$$

$$=z'\cos1+3\cos1-3\sin1-\frac{3^2(\cos1+2!\sin1)}{2!z'}+\frac{3^3(2!\sin1-3!\cos1)}{2!3!z'^2}+$$

$$+\frac{3^4(3!\cos1+4!\sin1)}{3!4!z'^3}-\frac{3^5(4!\sin1-5!\cos1)}{4!5!z'^4}-\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=3$:

$$f(z)=z\cos1-3\sin1-\frac{3^2(\cos1+2!\sin1)}{2!(z-3)}+\frac{3^3(2!\sin1-3!\cos1)}{2!3!(z-3)^2}+$$

$$+\frac{3^4(3!\cos1+4!\sin1)}{3!4!(z-3)^3}-\frac{3^5(4!\sin1-5!\cos1)}{4!5!(z-3)^4}-\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=z\cos1-3\sin1-\frac{3^2(\cos1+2!\sin1)}{2!(z-3)}+\frac{3^3(2!\sin1-3!\cos1)}{2!3!(z-3)^2}+$$

$$+\frac{3^4(3!\cos1+4!\sin1)}{3!4!(z-3)^3}-\frac{3^5(4!\sin1-5!\cos1)}{4!5!(z-3)^4}-\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{e^{z^4}-1}{\cos z-1+z^2/2}$$

Разложим числитель и знаменатель в ряды Лорана в окрестности точки z = 0:

$$f(z)=\frac{e^{z^4}-1}{\cos z-1+z^2/2}=\frac{-1+1+z^4+\frac{z^8}{2!}+\frac{z^{12}}{3!}+...}{-1+z^2/2+1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+...}=$$

$$=\frac{z^4+\frac{z^8}{2!}+\frac{z^{12}}{3!}+...}{\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}-...}=\frac{1+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^8}{3!}+...}{\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\frac{z^4}{8!}-...}$$

Найдем предел этой функции при $z\to 0$:

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^8}{3!}+...}{\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\frac{z^4}{8!}-...}=4!=24$$

Существование конечного предела $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ является необходимым и достаточным условием того, что точка z_0 является устранимой особой точкой. Таким образом, существование предела $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=24$ доказывает, что точка z = 0 является устранимой особой точкой для функции f(z).

Ответ: Точка z = 0 является устранимой особой точкой для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\frac{\sin 3z^2}{z(z^3+1)}e^{1/z}$$

Изолированными особыми точками являются $z=0$, $z=-1$, $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(z)=f(z)=\frac{\sin 3z^2}{z(z^3+1)}e^{1/z};\ g(z)=e^{1/z}\sin 3z^2;\ h(z)=z(z^3+1);$$

Для каждой из функций найдем порядок производных, не обращающихся в ноль при $z=0$, $z=-1$, $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$g(0)=\infty\neq 0; g(1)\neq 0; g(\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2})\neq 0; g(\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2})\neq 0;$$

$$h(0)=0; h(1)=0; h(\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2})=0; h(\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2})=0;$$

$$h'(z)=4z^3+1; h'(0)\neq 0; h'(1)\neq 0; h'(\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2})\neq 0; h'(\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2})\neq 0$$

В случаях $z=0$, $z=-1$, $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ порядок ненулевой производной выше для функции, стоящей в знаменателе, т.е. точки $z=0$, $z=-1$, $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ являются полюсами функции. Поскольку в данном случае разность порядков ненулевых производных g(z) и h(z) равна единице, то точки $z=0$, $z=-1$, $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ являются полюсами 1-го порядка.

Ответ: Точки $z=0$, $z=-1$, $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ для данной функции являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-\pi|=1} \underbrace{\frac{(z^2+\pi)^2}{i\sin z}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = \pi k,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадает только точка $z = \pi$. Точка $z_1 = \pi$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to\pi}[f(z)(z-\pi)] = \lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)(z^2+\pi)^2}{i\sin z} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} t = z-\pi \\ z = t+\pi \end{matrix}\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t^2+2\pi t+\pi^2+\pi)^2}{i\sin(t+\pi)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t(t^2+2\pi t+\pi^2+\pi)^2}{-i\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t^2+2\pi t+\pi^2+\pi)^2}{-it} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(t^2+2\pi t+\pi^2+\pi)^2}{-i} = \lim_{t\to 0}[i(t^2+2\pi t+\pi^2+\pi)^2] =$$

$$= i(\pi^4+2\pi^3+\pi^2)$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-\pi|=1}\frac{(z^2+\pi)^2}{i\sin z}dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i\cdot i(\pi^4+2\pi^3+\pi^2) =$$

$$= -2(\pi^5+2\pi^4+\pi^3)$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-\pi|=1}\frac{(z^2+\pi)^2}{i\sin z}dz = -2(\pi^5+2\pi^4+\pi^3)$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1/3}\underbrace{\frac{1-z^4+z^6}{2z^3}}_{f(z)}dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$\frac{1-z^4+z^6}{2z^3} = \frac{1}{2z^3} - \frac{z}{2} + \frac{z^3}{2}$$

Считая получившийся результат рядом Лорана по степеням z, т.е. в окрестности $z = 0$, мы приходим к выводу, что точка $z = 0$ является полюсом 3-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}[f(z)z^3] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1-z^4+z^6}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{z\to 0}(-12z^2+30z^4) = 0$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1/3}\frac{1-z^4+z^6}{2z^3}dz = 2\pi i\cdot 0 = 0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1/3}\frac{1-z^4+z^6}{2z^3}dz = 0$

Задача 15
Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=0,5} \underbrace{\frac{e^{5z}-\mathrm{ch}6z}{z\sin\pi z}}_{f(z)}dz$$

Особые точки этой функции $z = k$, $k\in Z$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z)=\frac{e^{5z}-\mathrm{ch}6z}{z\sin\pi z}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{array}{l} g(z)=e^{5z}-\mathrm{ch}6z \\ h(z)=z\sin\pi z \end{array}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\underset{z=0}{\mathrm{res}}\, f(z)=\lim_{z\to 0}[f(z)z]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{5z}-\mathrm{ch}6z}{z\sin\pi z}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{5e^{z}-6\mathrm{sh}6z}{\pi\cos\pi z}\right)=\frac{5}{\pi}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=0,5}\frac{e^{5z}-\mathrm{ch}6z}{z\sin\pi z}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\underset{z_n}{\mathrm{res}}f(z)=2\pi i\cdot\frac{5}{\pi}=10i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=0,5}\frac{e^{5z}-\mathrm{ch}6z}{z\sin\pi z}dz=10i$

Задача 16
Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z+2i|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\frac{4\cos\frac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}\right)dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z+2i|=2}\underbrace{\frac{4\cos\frac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}}_{f_1(z)}dz+\oint\limits_{|z+2i|=2}\underbrace{\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}}_{f_2(z)}dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z+2i|=2}\frac{4\cos\frac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: $z=1-2i$ и $z=3-2i$. При этом точка $z=3-2i$ не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка $z=1-2i$ является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\underset{z=1-2i}{\mathrm{res}}\, f_1(z)=\lim_{z\to 1-2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{4(z-1+2i)^2\cos\frac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}\right]=\lim_{z\to 1-2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{4\cos\frac{\pi z}{1-2i}}{(z-3+2i)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 1-2i}\left[\frac{(-4-8i)\pi}{5(z-3+2i)}\sin\frac{(1+2i)\pi z}{5}-\frac{4}{(z-3+2i)^2}\cos\frac{(1+2i)\pi z}{5}\right]=1$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+2i|=2}\frac{4\cos\frac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}dz=2\pi i\cdot\underset{z=1-2i}{\mathrm{res}}\, f_1(z)=2\pi i\cdot 1=2\pi i$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z+2i|=2} \frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$e^{\pi z/2}+1=0 \Rightarrow e^{\pi z/2}=-1 \Rightarrow \pi z/2=\ln(-1)=\pi i \Rightarrow$

$\Rightarrow z=2i+4ik, k\in z$

Из этих точек только одна охвачена контуром $|z+2i|=2$ и должна приниматься во внимание. Это точка $z=-2i$, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=-2i} f_2(z)=\lim_{z\to-2i}\frac{\pi(z+2i)}{e^{\pi z/2}+1}=\left\{\begin{matrix}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to-2i}\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2}}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{-\pi i}}=\frac{2}{e^{-\pi i}}=\frac{2}{-1}=-2$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+2i|=2}\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=-2i}f_2(z)=2\pi i\cdot(-2)=-4\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z+2i|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\frac{4\cos\frac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}\right)dz=$$

$$=\oint\limits_{|z+2i|=2}\frac{4\cos\frac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}dz+\oint\limits_{|z+2i|=2}\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+i}dz=$$

$=2\pi i-4\pi i=-2\pi i$

Ответ: $\oint\limits_{|z+2i|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\frac{4\cos\frac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}\right)dz=-2\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{5}\sin t+3}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos\ t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin\ t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\ t,\sin\ t)dt=\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{5}\sin t+3}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\frac{\sqrt{5}}{2i}(z-\frac{1}{z})+3}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\frac{\sqrt{5}}{2}(z^2-1)+3iz}=$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{5}(z^2-1)+6iz}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{5}(z+i\sqrt{5})(z+i/\sqrt{5})}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-i\sqrt{5};\quad z=-i/\sqrt{5};$

Точка $-i\sqrt{5}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $-i/\sqrt{5}$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-i/\sqrt{5}}f(z)=\lim_{z\to-i/\sqrt{5}}[f(z)(z+i/\sqrt{5})]=$$

$$=\lim_{z\to-i/\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{5}(z+i\sqrt{5})}=\frac{2}{\sqrt{5}(-i/\sqrt{5}+i\sqrt{5})}=-\frac{i}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{5}(z+i\sqrt{5})(z+i/\sqrt{5})}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{2}\right)=\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{5}\sin t+3}=\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{10}+3\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = \oint_{|z|=1} F(z)\,dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{10}+3\cos t)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{(\sqrt{10}+\frac{3}{2}(z+\frac{1}{z}))^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{4z\,dz}{i(2\sqrt{10}z+3(z^2+1))^2} = \oint_{|z|=1} \frac{4z\,dz}{i\left[3(z-\frac{1-\sqrt{10}}{3})(z+\frac{1+\sqrt{10}}{3})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$$z = (1-\sqrt{10})/3; \quad z = (-1-\sqrt{10})/3;$$

Точка $z = (-1-\sqrt{10})/3$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z = (1-\sqrt{10})/3$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\underset{z=(1-\sqrt{10})/3}{\operatorname{res}} f(z) = \lim_{z\to(1-\sqrt{10})/3} \frac{d}{dz}\left[f(z)\left(z-(1-\sqrt{10})/3\right)^2\right] =$$

$$= \lim_{z\to(1-\sqrt{10})/3} \frac{d}{dz} \frac{4z}{i\left[3\left(z+(1+\sqrt{10})/3\right)\right]^2} = \frac{4}{9i} \lim_{z\to(1-\sqrt{10})/3} \frac{d}{dz} \frac{z}{\left(z+(1+\sqrt{10})/3\right)^2} =$$

$$= \frac{4}{9i} \lim_{z\to(1-\sqrt{10})/3} \left[-9\frac{3z-1-\sqrt{10}}{(3z+1+\sqrt{10})^3}\right] = -\frac{4}{i}\cdot\frac{1-\sqrt{10}-1-\sqrt{10}}{(1-\sqrt{10}+1+\sqrt{10})^3} = -\frac{4}{i}\cdot\frac{-2\sqrt{10}}{2^3} = \frac{\sqrt{10}}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1} \frac{4z\,dz}{i\left[3(z-\frac{1-\sqrt{10}}{3})(z+\frac{1+\sqrt{10}}{3})\right]^2} = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \underset{z_m}{\operatorname{res}} f(z) = 2\pi i \cdot \left(\frac{\sqrt{10}}{i}\right) = 2\sqrt{10}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{10}+3\cos t)^2} = 2\sqrt{10}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2(x^2+15)^2}$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_m \underset{z_m}{\operatorname{res}} R(z)$$ сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2(x^2+15)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+3)^2(z^2+15)^2}$$

Особые точки:

$z = i\sqrt{15}$ $(\operatorname{Im} z > 0)$; $z = -i\sqrt{15}$ $(\operatorname{Im} z < 0)$

$z = i\sqrt{3}$ $(\operatorname{Im} z > 0)$; $z = -i\sqrt{3}$ $(\operatorname{Im} z < 0)$

Точка $z = i\sqrt{3}$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\underset{z=i\sqrt{3}}{\operatorname{res}} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{3}} \frac{d}{dz}\left[f(z)(z-i\sqrt{3})^2\right] = \lim_{z\to i\sqrt{3}} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i\sqrt{3})^2(z^2+15)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to i\sqrt{3}} \left[\frac{-2(3z^2+15+2\sqrt{3}iz)}{(z+i\sqrt{3})^3(z^2+15)^3}\right] = 0$$

Точка $z = i\sqrt{15}$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\underset{z=i\sqrt{15}}{\operatorname{res}} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{15}} \frac{d}{dz}\left[f(z)(z-i\sqrt{15})^2\right] = \lim_{z\to i\sqrt{15}} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i\sqrt{15})^2(z^2+3)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to i\sqrt{15}} \left[\frac{-2(3z^2+3+2\sqrt{15}iz)}{(z+i\sqrt{15})^3(z^2+3)^3}\right] = \frac{\sqrt{15}}{21600\,i}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2(x^2+15)^2} = 2\pi i\left(\frac{\sqrt{15}}{21600\,i}\right) = \frac{\pi\sqrt{15}}{10800}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2(x^2+15)^2} = \frac{\pi\sqrt{15}}{10800}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+1)\sin x}{x^4+5x^2+4}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\lambda x dx = \operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_{m}\operatorname*{rez}_{z_m}R(z)e^{i\lambda z}\right\}, \lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$x^4+5x^2+4=0 \Rightarrow z_{1,2}=\pm i; z_{3,4}=\pm 2i;$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{i;2i\}$$

Эти особые точки являются простыми полюсами. Найдем в них вычеты:

$$1)\operatorname*{rez}_{z=i}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i}\frac{(z^3+1)(z-i)}{(z^2+1)(z^2+4)}e^{iz}=\lim_{z\to i}\frac{(z^3+1)e^{iz}}{(z+i)(z^2+4)}=$$

$$=\frac{(-i+1)e^{-1}}{(i+i)(-1+4)}=\frac{1-i}{6i}e^{-1}$$

$$2)\operatorname*{rez}_{z=2i}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 2i}\frac{(z^3+1)(z-2i)}{(z^2+1)(z^2+4)}e^{iz}=\lim_{z\to 2i}\frac{(z^3+1)e^{iz}}{(z+2i)(z^2+1)}=$$

$$=\frac{(-8i+1)e^{-2}}{(2i+2i)(-4+1)}=\frac{1-8i}{-12i}e^{-2}$$

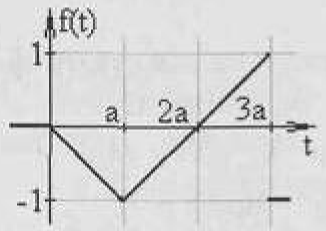
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+1)\sin x}{x^4+5x^2+4}dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_{m}\operatorname*{rez}_{z_m}R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{4\pi}{3}e^{-2}-\frac{\pi}{3}e^{-1}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+1)\sin x}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{4\pi}{3}e^{-2}-\frac{\pi}{3}e^{-1}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}-\dfrac{t}{a} & 0<t<a\\ \dfrac{t-2a}{a}, & a<t<3a\\ -1, & 2a<t\end{cases}$$

$$f(t)=-\frac{t}{a}\cdot\eta(t)+\frac{2t-2a}{a}\eta(t-a)+\frac{a-t}{a}\eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=-\frac{1}{ap^2}+\left(\frac{2}{ap^2}-\frac{2}{p}\right)e^{-ap}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-3ap}$$

Ответ: $F(p)=-\dfrac{1}{ap^2}+\left(\dfrac{2}{ap^2}-\dfrac{2}{p}\right)e^{-ap}+\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{ap^2}\right)e^{-3ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2-p+1}=$$

$$=\frac{Ap^2-Ap+A+Bp^2-Bp+Cp-C}{(p-1)(p^2-p+1)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(-A-B+C)p+(A-C)}{(p-1)(p^2-p+1)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\-A-B+C=2\\A-C=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=5\\B=-5\\C=2\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}=5\cdot\frac{1}{p-1}-5\cdot\frac{p}{p^2-p+1}+2\cdot\frac{1}{p^2-p+1}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$5\cdot\frac{1}{p-1}-5\cdot\frac{p}{p^2-p+1}+2\cdot\frac{1}{p^2-p+1}=$$

$$=5\cdot\frac{1}{p-1}-5\cdot\frac{p}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+2\cdot\frac{1}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=5\cdot\frac{1}{p-1}-5\cdot\frac{p-\frac{1}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\to$$

$$\to 5e^t-5e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$5e^t-5e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''+y'-2y=e^{-t}$$

$$y(0)=-1,\quad y'(0)=0.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+pY(p)-y(0)-2Y(p)=\frac{1}{p+1}$$

$$p^2Y(p)+p+pY(p)+1-2Y(p)=\frac{1}{p+1}$$

$$(p^2+p-2)Y(p)=(p+2)(p-1)Y(p)=\frac{1}{p+1}-p-1=\frac{-p(p+2)}{p+1}$$

$$Y(p)=\frac{-p(p+2)}{(p+1)(p+2)(p-1)}=\frac{-p}{(p+1)(p-1)}=-\frac{p}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)$$

Найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=-\frac{p}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)=\frac{1}{2}\frac{p}{p+1}-\frac{1}{2}\frac{p}{p-1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p+1}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)=-\frac{1}{2}\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{p-1}\Rightarrow y(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^t$$

Ответ: $y(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^t$

Задача 25

На материальную точку массы m действует сила сопротивления R=kv, пропорциональная скорости v. Какое расстояние пройдет точка за неограниченное время, если ей сообщена начальная скорость v_0?

$k = 3m$, $v_0 = 6$ м/с.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kv$$

$$\ddot{x}m + k\dot{x} = 0$$

Начальные условия:

$$\dot{x}(0) = v_0 = 6$$

$$x(0) = 0$$

Подставим значения k:

$$\ddot{x}m + 3m\dot{x} = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} = 0$$

Перейдем к изображениям функций:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + 3pX(p) - 3x(0) = 0$$

$$p(p+3)X(p) - 6 = 0$$

$$p(p+3)X(p) = 6$$

$$X(p) = \frac{6}{p(p+3)} = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+3}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = 2 - 2e^{-3t}$$

Ответ: $x(t) = 2 - 2e^{-3t}$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 3 \\ \dot{y} = x - y + 1 \end{cases}$$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = X(p) + 3Y(p) + 3/p \\ pY(p) - y(0) = X(p) - Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 3Y(p) + 3/p \\ pY(p) - 1 = X(p) - Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 1 = X(p) - Y(p) + 1/p \Rightarrow X(p) = pY(p) - 1 + Y(p) - 1/p$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p[pY(p) - 1 + Y(p) - 1/p] = [pY(p) - 1 + Y(p) - 1/p] + 3Y(p) + 3/p$$

$$Y(p) = \frac{p + 2/p}{p^2 - 4}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{p+2/p}{p^2-4} = \frac{p+2/p}{p^2-4} + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p} = \frac{3p/2}{p^2-4} - \frac{1}{2p} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{p}{p^2-4} - \frac{1}{2p} \to y(t) = \frac{3}{2}\operatorname{ch}2t - \frac{1}{2}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = x - y + 1 \Rightarrow x(t) = \dot{y} + y - 1 = 3\operatorname{sh}2t + \tfrac{3}{2}\operatorname{ch}2t - \tfrac{1}{2} - 1 =$$

$$= 3\operatorname{sh}2t + \tfrac{3}{2}\operatorname{ch}2t - \tfrac{3}{2}$$

Ответ:

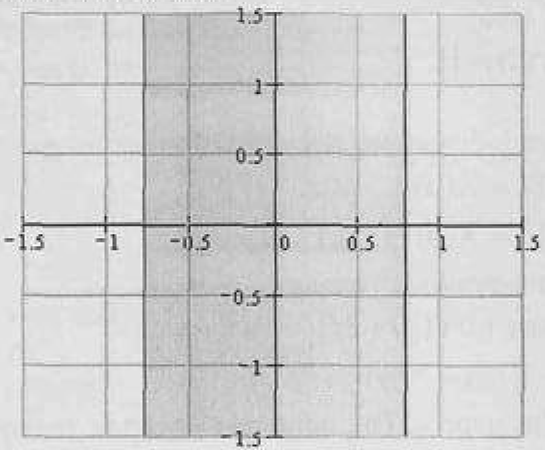
$$x(t) = 3\operatorname{sh}2t + \tfrac{3}{2}\operatorname{ch}2t - \tfrac{3}{2}$$

$$y(t) = \tfrac{3}{2}\operatorname{ch}2t - \tfrac{1}{2}$$

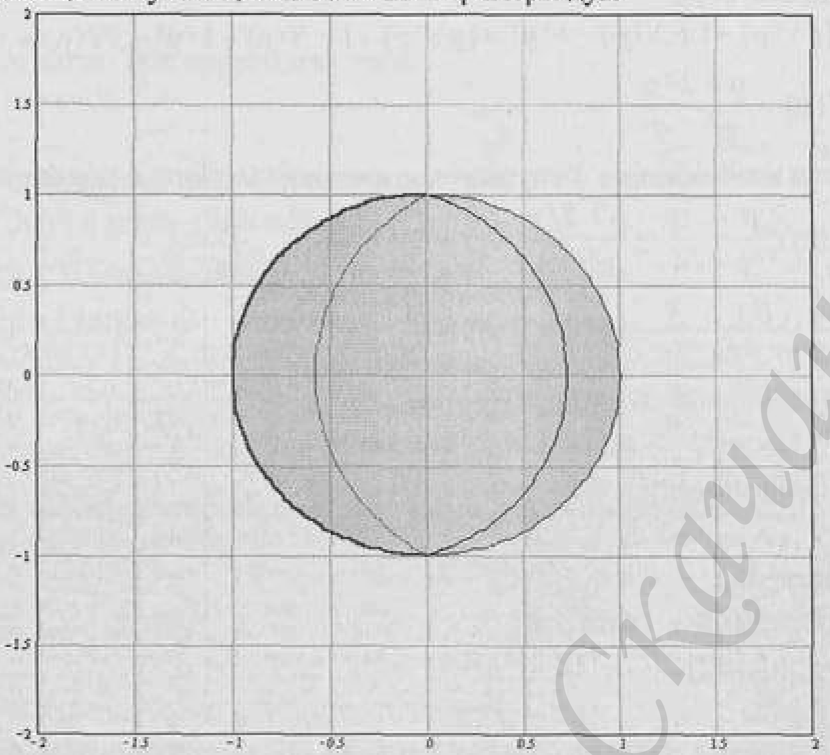
Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = tg(z)$; полоса $-\pi/4<x<\pi/4$.



Каждая из вертикальных линий в полосе преобразуется в дугу, опирающуюся на точки (0;1) и (0;–1). На рисунке показаны границы получающейся области и примеры дуг:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\ldots,n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$z=x+iy$ $\qquad$ $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Аналитические функции

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z \in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$