ИДЗ-10.1

1.22. Найти область определения указанной функции.

$$z = 4x + \frac{y}{2x - 5y}$$

Решение: Область определения:

$$2x - 5y \neq 0 \Rightarrow y \neq \frac{2}{5}x$$

Ответ: Область определения: Все точки координатной плоскости кроме прямой $y = \frac{2}{5}x$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы данной функции.

2.22. $z = tg\frac{2x - y^2}{x} = tg\left(2 - \frac{y^2}{x}\right)$

Найдем частные производные:

$$z'_x = \left(tg\left(2 - \frac{y^2}{x}\right)\right)'_x = \frac{1}{\cos^2\left(2 - \frac{y^2}{x}\right)} \cdot \left(2 - \frac{y^2}{x}\right)'_x = \frac{1}{\cos^2\left(2 - \frac{y^2}{x}\right)} \cdot \left(0 + \frac{y^2}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{y^2}{x^2 \cos^2\left(2 - \frac{y^2}{x}\right)}$$

$$z'_y = \left(tg\left(2 - \frac{y^2}{x}\right)\right)'_y = \frac{1}{\cos^2\left(2 - \frac{y^2}{x}\right)} \cdot \left(2 - \frac{y^2}{x}\right)'_y = \frac{1}{\cos^2\left(2 - \frac{y^2}{x}\right)} \cdot \left(0 - \frac{2y}{x}\right) =$$

$$= -\frac{2y}{x\cos^2\left(2 - \frac{y^2}{x}\right)}$$

Частные дифференциалы:

$$dz'_x = \frac{y^2 dx}{x^2 \cos^2\left(2 - \frac{y^2}{x}\right)}, \quad dz'_y = -\frac{2ydy}{x\cos^2\left(2 - \frac{y^2}{x}\right)}$$

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

3.22. $f(x, y, z) = \ln(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)$, $M_0(1,1,1)$

Решение:

$$f'_x = \left(\ln(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)\right)'_x = \frac{1}{(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)} \cdot (\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)'_x = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4} \cdot (\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)}$$

$$f'_x(M_0) = f'_x(1{,}1{,}1) = \frac{1}{5 \cdot 1 \cdot (1+1-1)} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$f'_y = \left(\ln(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)\right)'_y = \frac{1}{(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)} \cdot (\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)'_y = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{y^3} \cdot (\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)}$$

$$f'_y(M_0) = f'_y(1{,}1{,}1) = \frac{1}{4 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$f'_z = \left(\ln(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)\right)'_z = \frac{1}{(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)} \cdot (\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)'_z = -\frac{1}{(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)}$$

$$f'_z(M_0) = f'_z(1{,}1{,}1) = -\frac{1}{1} = -1$$

4. Найти полные дифференциалы указанных функций.

4.22. $z = arcctg(x - y)$

Вычислим частные производные первого порядка:

$$z'_x = \left(arcctg(x-y)\right)'_x = -\frac{1}{1+(x-y)^2} \cdot (x-y)'_x = -\frac{1}{1+(x-y)^2}$$

$$z'_y = \left(arcctg(x-y)\right)'_y = -\frac{1}{1+(x-y)^2} \cdot (x-y)'_y = \frac{1}{1+(x-y)^2}$$

3

Полный дифференциал:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = -\frac{dx}{1+(x-y)^2} + \frac{dy}{1+(x-y)^2} = \frac{-dx+dy}{1+(x-y)^2}$$

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

5.22. $u = \arcsin\dfrac{x}{2y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

Найдем производную сложной функции: $u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t$.

В данном случае:

$$u'_x = \left(\arcsin\frac{x}{2y}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{2y}\right)'_x = \frac{1}{2y\sqrt{1-\left(\frac{x}{2y}\right)^2}}$$

$$u'_y = \left(\arcsin\frac{x}{2y}\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{2y}\right)'_y = -\frac{x}{2y^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2y}\right)^2}}$$

$$x'_t = \cos t$$

$$y'_t = -\sin t$$

Таким образом:

$$u'_t=\frac{1}{2y\sqrt{1-\left(\frac{x}{2y}\right)^2}}\cdot\cos t+\frac{x}{2y^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2y}\right)^2}}\cdot(-\sin t)=$$

$$=\frac{1}{2\cos t\sqrt{1-\left(\frac{\sin t}{2\cos t}\right)^2}}\cdot\cos t+\frac{\sin t}{2\cos^2 t\sqrt{1-\left(\frac{\sin t}{2\cos t}\right)^2}}\cdot(-\sin t)$$

$$u'_t(\pi)=\frac{1}{2\cdot(-1)\cdot\sqrt{1-0}}\cdot(-1)+0=\frac{1}{2}=0{,}5$$

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

6.22. $x^2+y^2+z^2+2xy-yz-4x-3y-z=0$, $M_0(1,-1,1)$

$$\left(x^2+y^2+z^2+2xy-yz-4x-3y-z\right)'_x=(0)'_x$$
$$2x+0+2zz'_x+2y-yz'_x-4-0-z'_x=0$$
$$(2z-y-1)z'_x=4-2x-2y$$
$$z'_x=\frac{4-2x-2y}{2z-y-1}$$
$$z'_x(M_0)=z'_x(1,-1,1)=\frac{4-2+2}{2+1-1}=\frac{4}{2}=2$$

$$\left(x^2+y^2+z^2+2xy-yz-4x-3y-z\right)'_y=(0)'_y$$
$$0+2y+2zz'_y+2x-z-yz'_y-0-3-z'_y=0$$
$$(2z-y-1)z'_y=3-2x-2y+z$$
$$z'_y=\frac{3-2x-2y+z}{2z-y-1}$$
$$z'_y(M_0)=z'_y(1,-1,1)=\frac{3-2+2+1}{2+1-1}=\frac{4}{2}=2$$

ИДЗ 10-2.

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

3.22. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $u=xe^{\frac{y}{x}}$

Найдем частные производные функции u.

$$u'_x=\left(xe^{\frac{y}{x}}\right)'_x=(x)'_x e^{\frac{y}{x}}+x\left(e^{\frac{y}{x}}\right)'_x=e^{\frac{y}{x}}+xe^{\frac{y}{x}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x=e^{\frac{y}{x}}+xe^{\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)$$

$$u''_{xx}=\left(e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)\right)'_x=\left(e^{\frac{y}{x}}\right)'_x\left(1-\frac{y}{x}\right)+e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)'_x=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)+e^{\frac{y}{x}}\frac{y}{x^2}=\frac{y^2}{x^3}e^{\frac{y}{x}}$$

$$u''_{xy}=\left(e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)\right)'_y=\left(e^{\frac{y}{x}}\right)'_y\left(1-\frac{y}{x}\right)+e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)-e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$$

$$u'_y=\left(xe^{\frac{y}{x}}\right)'_y=x\left(e^{\frac{y}{x}}\right)'_y=xe^{\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x}\right)'_y=xe^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}=e^{\frac{y}{x}}$$

$$u''_{yy}=\left(e^{\frac{y}{x}}\right)'_y=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$$

Подставим $u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}$ в левую часть уравнения:

$x^2\cdot\frac{y^2}{x^3}e^{\frac{y}{x}}+2xy\cdot\left(-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\right)+y^2\cdot\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}=\frac{y^2}{x}e^{\frac{y}{x}}-2\frac{y^2}{x}e^{\frac{y}{x}}+\frac{y^2}{x}e^{\frac{y}{x}}=0$ – таким образом, данная функция удовлетворяет данному уравнению.

4. Исследовать на экстремум функцию.

4.22. $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

Решение: Найдем критические точки:

$$\begin{cases} z'_x=\dfrac{y}{2\sqrt{x}}-1=0 \\ z'_y=\sqrt{x}-2y+6=0 \end{cases}\Rightarrow y=2\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{x}-4\sqrt{x}+6=0\Rightarrow 3\sqrt{x}=6\Rightarrow\sqrt{x}=2$$

$x=4; y=4$

$M_0(4;4)$ – стационарная точка.

Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$z''_{xx}=-\dfrac{y}{4\sqrt{x^3}}$, $z''_{xy}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $z''_{yy}=-2=const$

$$z''_{xx}(M_0)=z''_{xx}(4;4)=-\frac{4}{4\cdot 8}=-\frac{1}{8}$$

$$z''_{xy}(M_0)=z''_{xy}(4;4)=\frac{1}{4}$$

$$z''_{yy}(M_0)=z''_{yy}(4;4)=-2$$

$z''_{xx}(M_0)\cdot z''_{yy}(M_0)-\left(z''_{xy}(M_0)\right)^2=-\frac{1}{8}\cdot(-2)-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}>0$, значит, в точке $M_0(4;4)$ существует экстремум, так как $z''_{xx}(M_0)<0$, то это – максимум:

$$\max z=z(M_0)=z(4;4)=8-16-4+24=12$$

Ответ: $\max z=z(4;4)=12$.