Екзаменаційний білет № 25

I. Теоретична частина

1. Інтерполяційні квадратурні формули.

Застосовуючи формулу (8) при *n = 1* маємо

$$H_0 = -\int_0^1 \frac{q(q-1)}{q} dq = \frac{1}{2};$$

$$H_1 = \int_0^1 q dq = \frac{1}{2};$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \qquad (10).$$

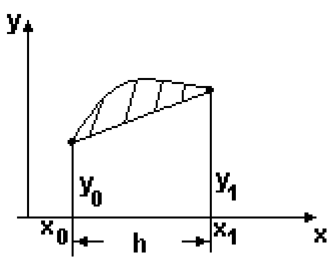
Це *формула трапецій*. Її залишковим членом, або абсолютною похибкою є

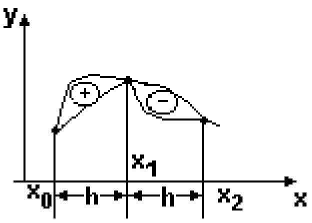
$$|R_1| \le \frac{M_2 (b-a)^3}{12}$$

$$R_1 = \int_{x_0}^{x_1} y dx - \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = -\frac{h^3}{12} y''(\xi),$$

де $\xi \in (x_0, x_1)$.

Звідси, якщо $y'' > 0$, то формула (10) дає значення інтеграла *з надлишком*, якщо $y'' < 0$, то з *недоліком*.





При $n = 2$ маємо:

$$H_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^2 (q-1)(q-2)dq = \frac{1}{4}(\frac{8}{3} - 6 + 4) = \frac{1}{6}$$

$$H_1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{1}\int_0^2 q(q-2)dq = \frac{2}{3}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^2 q(q-1)dq = \frac{1}{6}$$

Оскільки $x_2 - x_0 = 2h$, маємо:

$$\int_{x_0}^{x_2} ydx = \frac{n}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

це *формула Симпсона.*

Залишковий член формули Симпсона:

$$R_2 = -\frac{h^5}{90} y^{\mathrm{IV}}(\xi)$$

$$\xi \in (x_0, x_2)\,, \quad \left|R_2\right| \le \frac{M_4 (b-a)^5}{90 \cdot 2^5}$$

При $n = 3$ маємо *квадратурну формулу Ньютона*:

$$\int_{x_0}^{x_3} y dx = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

$$R_3 = -\frac{-3h^5}{80} y^{IV}(\xi)$$

або $\left| R_3 \right| \le \frac{M_4 (b-a)^5}{80 \cdot 3^4}$

Усе це так звані *інтерполяційні квадратурні формули.*

2. Методы Адамса для розв’язку задачі Коши.

6. Багатокрокові методи розв'язання задачі Коші – методи Адамса.

Припустимо маємо задачу Коші

$$y'(x) = f(x, y) \qquad (7)$$

з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0 \qquad (8)$$

Нехай також відомі з кроком *h* приблизні значення $y_{j-m}, \ldots, y_{j-1}, y_j$ розв’язку задачі Коші (7), (8). Уведемо позначення

$$f_j = f(x_j, y_j) \qquad (9)$$

Побудуємо інтерполяційний поліном ступеню *m*

$$L_m(x) = \sum_{i=0}^{n} p_{ni} \mathrm{f}_{j-i} \qquad (10)$$

який задовольняє вимогам

$$L_m(x_{j-i}) = f_{j-i} \qquad i = 0, 1, \ldots, m$$

Оскільки для точного розв'язку задачі Коші виконується рівняння

$$u_{j+1} = u_j + \int_{xj}^{xj+1} \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{u}(\mathrm{x}))\mathrm{dx}$$

де $x_{j+1} = x_j + h$, $u_j = u(x_j)$,

то природно вважати

$$y_{j+1} = y_j + \int_{xj}^{xj+1} \mathrm{L_m}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$$

тоді з урахуванням (10) маємо

$$y_{j+1} = y_j + h\sum_{i=0}^{m} \alpha_{mi} f_{j-i} \qquad (11)$$

де f_{j-I} – значення правої частини рівняння (7), обчислені за формулою (2), а

$$\alpha_{mj} = 1/h \int_{xj}^{xj+1} p_{mi}(x)dx\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, m$$

є константами і не залежать ні від постійної *h*, ні від *j*.

Зокрема,

для $m = 0$ маємо

$\alpha_{00} = 1;$

для $m = 1$ маємо

$\alpha_{10} = 3/2; \alpha_{11} = -1/2;$

для $m = 2$ маємо

$\alpha_{20} = 23/12; \alpha_{21} = -4/3; \alpha_{22} = 3/2;$

для $m = 3$ маємо

$\alpha_{30} = 55/24; \alpha_{31} = -59/24; \alpha_{32} = 37/24; \alpha_{33} = -3/8;$

Глобальна похибка методу Адамса має порядок $O(h^{m+1})$.

Якщо порівнювати, скажімо, метод Рунге-Кутта 4-го порядку точності та метод Адамса при $m = 3$, які мають той самий порядок глобальної похибки, то з'ясовується, що для переходу від точки $(x_к, y_k)$ до точки (x_{k+1}, y_{k+1}) перший потребує чотирьох обчислень правої частини рівняння (1) в той час як другий – лише одного.

Недоліком багатокрокових методів є те, що вони не є самостартуючими, тобто для початку обчислень за формулою (11), нам потрібно знати значення f_0, f_1, f_2 та f_3. Єдиним способом отримати їх є використання якого-небудь з однокрокових методів. Для їх отримання рекомендовано використовувати однокроковий метод того самого порядку точності, що й метод Адамса, яким обчислюються подальші значення інтегральної кривої.

II. Практична частина

За допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа, побудованого на проміжку

[1;9], обчислити значення функції

```
0.02*exp(x)*sin(3*x)
```

в точках [1.45, 2.33, 6.5, 7.7, 8.8] з точністю не гірше за 10^{-2}.