Екзаменаційний білет № 9

I. Теоретична частина

1. Система Штурма.
   Ряд Штурма (система Штурма) для вещественного многочлена — последовательность многочленов, позволяющая эффективно определять количество корней многочлена на промежутке и приближённо вычислять их с помощью теоремы Штурма. Ряд и теорема названы именем французского математика Жака Штурма.

Определение

[правит

Рассмотрим многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами. Конечная упорядоченная последовательность отличных от нуля многочленов с вещественными коэффициентами

$$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_s(x)$$

называется **рядом Штурма** для многочлена $f(x)$, если выполнены следующие условия:

- $f_s(x)$ не имеет вещественных корней;
- если $f_k(c) = 0$ и $1 \leqslant k \leqslant s-1$, то $f_{k-1}(c)f_{k+1}(c) < 0$;
- если $f(c) = 0$, то произведение $f_0(c)f_1(c)$ меняет знак с минуса на плюс, когда x, возрастая, проходит через точку c, то есть когда существует такое $\delta > 0$, что $f_0(x)f_1(x) < 0$ для $x \in (c-\delta, c)$ и $f_0(x)f_1(x) > 0$ для $x \in (c, c+\delta)$.

Иногда **ряд Штурма** также определяют как построенный определённым образом ряд Штурма.

Связанные определения

[правит

- **Значением** ряда Штурма в точке c называется количество смен знака в последовательности $f_0(c), f_1(c), \ldots, f_s(c)$ после исключения нулей.

Теорема Штурма

[правит

Пусть $f(x)$ — ненулевой многочлен с вещественными коэффициентами, $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_s(x)$ — некоторый ряд Штурма для него, [a, b] — промежуток вещественной прямой, причём $f(a)f(b) \neq 0$. Тогда число **различных** корней многочлена $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ равно $W(a) - W(b)$, где $W(c)$ — значение ряда Штурма в точке c.

Построение

[правит

Ряд Штурма существует для любого ненулевого вещественного многочлена.
Пусть многочлен $f(x)$, отличающийся от константы, не имеет кратных корней. Тогда ряд Штурма для него можно построить, например, следующим образом:

- $f_0(x) = f(x)$;
- $f_1(x) = f_0'(x)$;
- Если $f_k(x)$ ($k > 0$) имеет корни, то $f_{k+1}(x) = -f_{k-1}(x) \bmod f_k(x)$, где $f(x) \bmod g(x)$ — остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ в кольце многочленов $\mathbb{R}[x]$, иначе $s = k$.

Для произвольного многочлена, отличающегося от константы, можно положить

$$f_0(x) = \frac{f(x)}{(f(x), f'(x))},$$

и далее следовать приведенному выше способу. Здесь $(f(x), f'(x))$ — наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $f'(x)$. Если многочлен $f(x)$ есть ненулевая константа, то его ряд Штурма состоит из единственного многочлена $f_0(x) = f(x)$.

Применение

[править]

Ряд Штурма используется для определения количества вещественных корней многочлена на промежутке (см. теорему Штурма). Отсюда вытекает возможность его использования для приближённого вычисления вещественных корней методом двоичного поиска.

Пример

[править]

Построим указанным выше способом ряд Штурма для многочлена $f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

Многочлен $f_i(x)$	Знак многочлена в точке						
	$-\infty$	0	1	2	3	4	$+\infty$
$f_0(x) = x^2 - 4x + 3$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f_1(x) = 2x - 4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f_2(x) = 1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Значение ряда в точке	2	2	1	1	0	0	0

Таким образом, по теореме Штурма число корней многочлена $f(x)$ равно:

- $2 - 0 = 2$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$
- $2 - 0 = 2$ на промежутке $(0, 4)$
- $2 - 1 = 1$ на промежутке $(0, 2)$

2. Обчислення власних чисел і власних векторів матриці.

Нехай, задано лінійне перетворення $\vec{y}=A\vec{x}$ в n-мірному лінійному просторі . Ненульовий вектор $\vec{x}$ цього простору, для якого існує таке число λ, що $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ називається власним вектором цього перетворення , а число λ називається власним числом перетворення, що відповідає власному вектору $\vec{x}$.

Власний вектор характеризується тим, що при даному перетворенні він переходить в колінеарний йому вектор.

Наприклад, для перетворення $A\vec{x}=k\vec{x}$ кожний вектор є власним. При чому всім векторам відповідає одне й теж власне число k. При повороті на кут $\alpha=\pi$, $A\vec{x}=-\vec{x}$, тобто $\lambda=-1$.

Нехай матриця $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ є матрицею лінійного оператора

$\vec{y}=A\vec{x}$ і нехай вектор $\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ є власним вектором цього оператора (перетворення). Тоді, враховуючи, що $E\vec{x}=\vec{x}$ (E - одинична матриця), одержимо:

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x},\quad A\vec{x}=\lambda E\vec{x},\quad (A-E\cdot\lambda)\vec{x}=0,$$

або в розгорнутій формі:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Координати власного вектора $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ визначаються з системи (1). Ця система буде мати ненульові розв'язки, якщо ранг головної матриці менший кількості невідомих (див. § 4 п.2°), тобто головний визначник цієї системи рівний нулеві.

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (2)$$

Визначник $\Delta(\lambda)$ називається характеристичним многочленом, а рівняння (2) – характеристичним рівнянням матриці **A**. Корені цього рівняння є власними числами матриці (перетворення).

Для визначення власних векторів матриці, спочатку розв'язують рівняння (2), тобто знаходять власні числа цієї матриці. Координати власного вектора $\vec{x}^i$, що відповідають власному числу $\lambda=\lambda_i$ знаходять із системи (1) при $\lambda=\lambda_i$, $i=\overline{1,n}$.

Приклад: Знайти власні числа і власні вектори матриці

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Складаємо і розв'язуємо рівняння (2)

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 10 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0,\qquad (1+\lambda)(\lambda^2-\lambda-12)=0.$$

Коренями цього рівняння, тобто власними числами даної матриці є $\lambda_1=-3,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=4$.

Для кожного з цих чисел знайдемо власний вектор. Позначимо власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1=-3$ через $\vec{x}^1=(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)})$. Координати цього вектора визначаємо з системи (1) записаної при $\lambda_1=-3$.

$$\begin{cases} (-1+3)x_1^{(1)}+4x_2^{(1)}+2x_3^{(1)}=0, \\ (-1+3)x_2^{(1)}+x_3^{(1)}=0, \\ 10x_2^{(1)}+(2+3)x_3^{(1)}=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1^{(1)}+4x_2^{(1)}+2x_3^{(1)}=0, \\ 2x_2^{(1)}+x_3^{(1)}=0, \\ 10x_2^{(1)}+5x_3^{(1)}=0. \end{cases}$$

Розв'язуючи одержану систему довільним методом (можливо, навіть звичайною підстановкою), знайдемо $x_3^{(1)}=-2x_2^{(1)}$, $2x_1^{(1)}+4x_2^{(1)}+2\cdot(-2x_2^{(1)})=0$, $x_1^{(1)}=0$.

Тому власним вектором є $\vec{x}^1=\begin{pmatrix} 0 \\ x_2^{(1)} \\ -2x_2^{(1)} \end{pmatrix}=x_2^{(1)}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

де $x_2^{(1)}$ - довільне число.

При $\lambda_2=-1$, $\vec{x}^2=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},x_3^{(2)})$. Система (1) – має вигляд

$$\begin{cases} 0\cdot x_1^{(2)}+4x_2^{(2)}+2x_3^{(2)}=0, \\ 0\cdot x_1^{(2)}+0\cdot x_2^{(2)}+x_3^{(2)}=0, \\ 0\cdot x_1^{(2)}+10x_2^{(2)}+3x_3^{(2)}=0. \end{cases}$$

З цієї системи одержуємо, що $x_3^{(2)}=0$, $x_2^{(2)}=0$, $x_1^{(2)}$ - довільне число. Тому другим власним вектором матриці є $\vec{x}^2=(x_1^{(2)},0,0)=x_1^{(2)}\cdot(1,0,0)$. При

$\lambda_3=4$, $\vec{x}^3=\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix}$. Система (1) має вигляд $\begin{cases} -5x_1^{(3)}+4x_2^{(3)}+2x_3^{(3)}=0, \\ -5x_2^{(3)}+x_3^{(3)}=0, \\ 10x_2^{(3)}-2x_3^{(3)}=0. \end{cases}$
ї системи

$=5x_2^{(3)}$, $5x_1^{(3)}=4x_2^{(3)}+2\cdot 5x_2^{(3)}=14x_2^{(3)}$, $x_1^{(3)}=\frac{14}{5}x_2^{(3)}$. Отже

$=\left(\frac{14}{5}x_2^{(3)},\ x_2^{(3)},\ 5x_2^{(3)}\right)=\left(\frac{14}{5},1,5\right)\cdot x_2^{(3)}$ де $x_2^{(3)}$ - довільне число.

II. Практична частина

За допомогою узагальненої формули Сімпсона обчислити визначений інтеграл

$$\int_1^{10} -((10+10*\ln(x))*x+10*\ln(x)*x)*1/3\,dx$$

з точністю не гірше за 10^{-6}.