Екзаменаційний білет № 20

I. Теоретична частина

1. Обчислення власних значень матриці методом Данілевського.

   6.2.1. Метод Данилевского

   Этот простой и экономичный способ нахождения всех собственных значений и соответствующих им векторов был создан в 30-х годах XX века А.М. Данилевским. Метод основан на известном факте из линейной алгебры о том, что преобразование подобия не меняет характеристического многочлена матрицы (см. [2, с. 130]). В этом легко убедиться:

   .

   (Т.к.,то при записи характеристического уравнения на эту величину его можно сократить).

   При удачном подборе преобразования можно получить матрицу, собственный многочлен которой может быть выписан непосредственно по её виду. В методе Данилевского предлагается приводить исходную матрицу с помощью преобразования подобия к так называемой канонической форме Фробениуса:

   .

   Для матрицы характеристический многочлен может быть легко записан, если последовательно разлагать определитель по элементам первого столбца. В результате получим:

   .

   Из последнего соотношения видно, что элементы 1-й строки матрицы в форме Фробениуса являются коэффициентами её собственного многочлена и, следовательно, собственного многочлена исходной матрицы . Матрицы и связаны между собой преобразованием подобия .

   Решив полученное уравнение , находим собственные значения матрицы . Далее, неособенная матрица , полученная в методе Данилевского, используется при нахождении собственных векторов матрицы .

   Построение матрицы в методе Данилевского осуществляется последовательно с помощью преобразований подобия, которые переводят строки матрицы , начиная с последней, в соответствующие строки матрицы .
2. Средньоквадратичне наближення за допомогою тригонометричних рядів.

6. Середньоквадратичне наближення за допомогою тригонометричних багаточленів.

Наближення *періодичних* функцій, визначених на всій вісі *x*, найбільш раціонально здійснювати за допомогою *тригонометричних багаточленів*.

Нехай є безперервна функція $f(x)$, яка має період 2π. Будемо будувати апроксимуючий поліном у вигляді

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{m} (a_k \cos kx + bk \sin kx) .$$

Відомо, що тригонометрична система $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x$ є ортогональною з вагою $t(x) = 1$ на будь-якому проміжку довжиною 2π.

Коефіцієнти a_k, b_k у відповідності з (3) обчислюються за формулами:

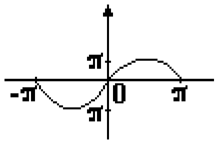
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_0 = 0, \quad b_k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

Це відомі з аналізу коефіцієнти Фурьє для функції $f(x)$, причому для *парної* функції $f(x)$ $b_k = 0$, а для *непарної* $a_k=0$.

Розглянемо наступний приклад. За допомогою тригонометричного полінома дев'ятого ступеня отримати наближення періодичної функції

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & 0 \le x \le \pi \\ x(\pi + x) & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$



Оскільки функція $f(x)$ є непарною,

$$a_k = 0, \quad к = 0, 1, 2, \ldots$$

Коефіцієнти b_k обчислимо як

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x(\pi - x) \sin kx dx = \frac{4}{\pi k^3} [1 - (-1)^k] \ldots$$

Отже,

$$b_{2m} = 0,\ b_{2m-1} = \frac{8}{\pi(2m-1)^3}$$

і шуканий тригонометричний поліном набуває вигляду:

$$T_9(x) = \frac{8}{\pi}[\sin x + \frac{\sin 3x}{27} + \frac{\sin 5x}{125} + \frac{\sin 7x}{343} + \frac{\sin 9x}{729}]$$

II. Практична частина

За допомогою методу послідовних наближень обчислити корінь рівняння

```
3/(2 + cos(x)) - x/1.5 = 0
```

з точністю не гірше за 10^{-7}.