Екзаменаційний білет № 14

I. Теоретична частина

1. Інтерполяція: формулювання задачі.

2. Загальне формулювання задачі інтерполяції.

Припустимо, що відомі значення деякої функції $f(x)$ в $n+1$ різних точках $x_0, x_1, \dots x_n$

$$f(x_i) = f_i; \qquad i = 0,1,\dots n$$

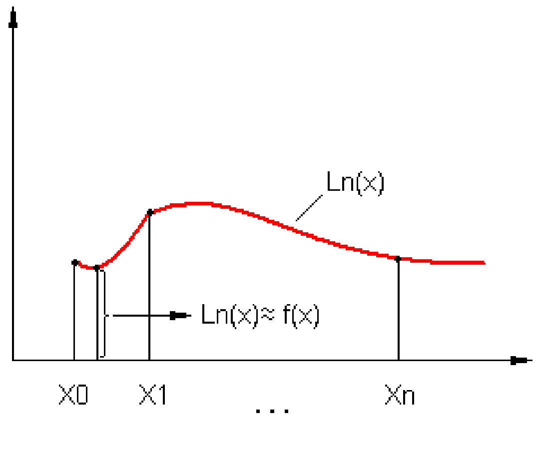
Виникає задача наближеного відновлення функції $f(x)$ у довільній точці x, що належить до інтервалу $[x_0, x_1]$. Для її розв'язання будується алгебраїчний поліном $L_n(x)$ ступеня n, що у точках x_i приймає значення f_i, тобто

$$L_n(x_i) = f_i, \qquad i= 0,1,\dots n \qquad (1)$$

Такий поліном називається *інтерполяційним*, а точки x_i, $i = 0,1, \dots, n$ називаються *вузлами інтерполяції*. Наближене відновлення f(x) за формулою

$$f(x) \approx L_n(x) \qquad (2)$$

називається *інтерполяцією*. Якщо x розташований поза мінімальним відрізком, що містить всі вузли інтерполяції $x_0,x_1,\dots x_n$, те заміну (2) називають *екстраполяцією*.



Теорема 1.

Існує єдиний інтерполяційний багаточлен n-й ступеню, що задовольняє умовам (1).

2. Використання методу подвійного перерахунку в чисельних методах.
   для Коші

4. Принцип Рунге.

Оскільки не існує прийнятної аналітичної оцінки точності однокрокових методів, для оцінки кроку *h*, який забезпечив би потрібну точність використовують так званий принцип Рунге, або метод подвійного перерахунку, який дозволяє виконати автоматичне коригування кроку h. Використання цього принципу зводиться до того, що спочатку в точку x_i приходять з кроком *h*, а потім – з кроком *2h*. Похибка в точці x_i при цьому оцінюється за формулою

$$\frac{\left|y_i^h - y_i^{2h}\right|}{2^r - 1} \le \varepsilon , \qquad (6)$$

де r - порядок методу. Для методів Ейлера, Ейлера-Коші та Рунге-Кутта 4-го порядку точності r доівнює 1, 2 та 4 відповідно.

Якщо нерівність (6) не задовольняється, то значення обчислюється з кроком $h/2$ і т. д. При цьому можна знайти уточнений за *Річардсоном* розв’язок у точці x_i:

$$y_i^* = \frac{2^r y_i^h - y_i^{2h}}{2^r - 1} ,$$

що має похибку $O(h^{r+1})$, а не $O(h^r)$.

Для вибору початкового кроку *h* користуються наступним співвідношенням

$$h_0 = 1/\sqrt[r]{\varepsilon} ,$$

де ε – точність, яку треба забезпечити.

Для інтегрування

8. Принцип Рунге.

Щоб визначити число проміжків для формули Симпсона, потрібно знайти максимум абсолютної величини 4-ої похідної. Щоб уникнути громіздких обчислень використовують принцип Рунге (подвійне перерахування).

Принцип Рунге полягає в наступному. Обчислимо інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, наприклад, за формулою трапецій із числом проміжків *n*:

$$\int_a^b f(x)dx = I_n - \frac{f''(\xi_n)(b-a)^3}{12n^2}$$

потім із числом проміжків *2n*:

$$\int_a^b f(x)dx = I_{2n} - \frac{f''(\xi_2)(b-a)^3}{12(2n)^2}$$

Звідки:

$$0 = I_n - I_{2n} - 3\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{12(2n)^2}$$

або

$$|R_n| = \frac{|f''(\xi)(b-a)^3|}{12(2n)^2} = \frac{1}{3}\left|\overset{\text{трап}}{I_n} - \overset{\text{трап}}{I_{2n}}\right|$$

Аналогічно для формули Симпсона:

$$\frac{|f^{IV}(\xi)(b-a)^5|}{180(4n)^4} = \frac{\left|\overset{\text{Симп}}{I_{2n}} - \overset{\text{Симп}}{I_{4n}}\right|}{15}$$

Таким чином, інтеграл обчислюють за обраною квадратурною формулою двічі: спочатку із числом проміжків *n*, а потім число проміжків подвоюють, тобто беруть *2n*.

Якщо $|R_n| \le \varepsilon$, де (ε – припустима похибка), те вважають

$$\int_a^b f(x)dx = I_{2n}$$

інакше розрахунок повторюють із числом проміжків *4n*. В якості початкового значення *n* рекомендують число близьке до

$$1/\sqrt[m]{\varepsilon}\,,$$

де $m = 2$ для формули трапецій і $m = 4$ для формули Симпсона.

Отже, використання принципу Рунге дозволяє *автоматично* отримати крок інтегрування, що забезпечує потрібну точність обчислення інтегралу.

II. Практична частина

Побудувати таблицю інтегральної кривої звичайного диференціального рівняння

$y'\sin(x) = y\ln(y)$

з початковими умовами $y(\pi/2) = \exp(1)$ на проміжку $a = \pi/2,\ b = 0.9\pi$ з кроком $(b - a)/5$ і з точністю не гірше за 10^{-4}.