Глава 18

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

18.1. Множества в n-мерном пространстве

Упорядоченную совокупность n действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют точкой, а сами эти числа – ее координатами. Запись $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ означает, что точка M имеет координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$. Множество всевозможных точек называется арифметическим (координатным) n-мерным пространством и обозначается символом A^n или A_n.

Арифметическое n-мерное пространство A^n называется n-мерным евклидовым пространством, если для любых двух точек $M'(x_1', x_2', \dots, x_n')$, $M''(x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$, принадлежащих A^n, определено расстояние по формуле

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x_1''-x_1')^2 + (x_2''-x_2')^2 + \dots + (x_n''-x_n')^2}.$$

Евклидово n-мерное пространство обозначается через E^n или E_n.

Примеры множеств в n-мерном евклидовом пространстве E^n.

1. Если для координат всех точек множества $\{M\}$ выполняется неравенство $\rho(M, M_0) < R$, или

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 < R^2,$$

то $\{M\}$ называется открытым n-мерным шаром.

2. Множество $\{M\}$ точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\rho(M, M_0) \le R$, или

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 \le R^2,$$

называется замкнутым n-мерным шаром радиуса R с центром в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

3. Множество $\{M\}$ точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которых $\rho(M, M_0) = R$, или

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 = R^2,$$

называется $(n-1)$-мерной сферой радиуса R с центром в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

4. Множество точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, координаты которых заданы как непрерывные функции $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, определенные на некотором отрезке $[a, b]$, называется непрерывной кривой в пространстве E^n. Аргумент t называется параметром кривой. Точка $A(x_1(a), x_2(a), \dots, x_n(a))$ называется началом, точка $B(x_1(b), x_2(b), \dots, x_n(b))$ – концом данной кривой.

Множество точек M n-мерного евклидова пространства E^n, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки M_0 меньше $\varepsilon > 0$, называется ε-окрестностью точки M_0. Другими словами, ε-окрестностью точки M_0 называется n-мерный открытый шар радиуса ε с центром в точке M_0.

Пусть $\{M\}$ – некоторое множество точек n-мерного евклидова пространства E^n. Точка A называется предельной точкой (или точкой сгущения) множества $\{M\}$, если любая ее окрестность содержит по крайней мере одну точку этого множества, отличную от A. Предельная точка может принадлежать или не принадлежать ему. Например, точки $x_1 = 3$, $x_2 = 7$ являются предельными для отрезка $[3, 7]$ и интервала $(3, 7)$, но первому они принадлежат, а второму не принадлежат. Множество, содержащее все свои предельные точки, называется замкнутым. Если существует окрестность точки B множества $\{M\}$, не содержащая никаких других точек этого множества, кроме самой точки B, то эта точка называется изолированной точкой множества $\{M\}$.

Точка M множества $\{M\}$ называется внутренней точкой этого множества, если существует такая ее ε-окрестность, все точки которой принадлежат множеству $\{M\}$. Открытым множеством называется множество, все точки которого внутренние. Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить в нем непрерывной кривой. Областью называется открытое связное множество. Точка M называется граничной точкой множества $\{M\}$, если любая ее ε-окрестность содержит как точки множества $\{M\}$, так и точки, не принадлежащие ему.

Совокупность всех граничных точек множества $\{M\}$ называется его границей. Если к области присоединить его границу, то полученное множество называется замкнутой областью. Например, множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, для которых $x^2 + y^2 \le 1$, является замкнутой областью; к области, определяемой неравенством $x^2 + y^2 < 1$, присоединены все его граничные точки, т.е. точки окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Множество называется ограниченным, если все его точки находятся внутри некоторого n-мерного шара.

Диаметром ограниченного множества $\{M\}$ называется верхняя грань расстояний между его любыми двумя точками.

Число A называется верхней гранью числового множества $\{X\}$, если: 1) $x \le A$ для всех $x \in X$; 2) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $x_\varepsilon \in X$, что

$x_\varepsilon > A - \varepsilon$. Верхняя грань множества X обозначается через $\sup X$ или $\sup\limits_{x \in X} x$. Например, для сегмента $X = [1, 8]$ $\sup x = 8$; для интервала $X = (2, 9)$ $\sup X = 9$.

Число a называется нижней гранью числового множества X, если: 1) $x \geq a$ для всех $x \in X$; 2) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $x_\varepsilon \in X$, что $x_\varepsilon < a + \varepsilon$. Нижняя грань множества X обозначается через $\inf X$ или $\inf\limits_{x \in X} x$. Например, если $X = (4, 5)$, то $\inf X = 4$; если $X = [6, 7]$, то $\inf X = 6$.

Всякое непустое множество действительных чисел, ограниченное сверху, имеет конечную верхнюю грань, а ограниченное снизу – конечную нижнюю грань. У всякого множества действительных чисел верхняя (нижняя) грань единственна.

18.2. Понятие функции нескольких переменных

Функция, определенная на некотором множестве X арифметического n-мерного пространства, называется функцией n аргументов

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ данного множества. В этом случае говорят, что задана функция точки M, и пишут $y = f(M)$, или $y = f(x)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим случаи, когда $n = 2$ и $n = 3$. Предположим, что X – некоторое множество точек плоскости, Y – подмножество множества всех действительных чисел. Так как в фиксированной декартовой прямоугольной системе координат Ox_1x_2 каждой точке M соответствует упорядоченная пара действительных чисел x_1, x_2 – ее координаты, то функция, заданная на указанном множестве X, является функцией двух аргументов, т.е. $y = f(x_1, x_2)$, где x_1, x_2 – координаты точки $M(x_1, x_2)$. Если координаты точки M обозначить буквами x и y, а функцию – буквой z, то $z = f(x, y)$. Переменные x и y при этом называются аргументами функции z или независимыми переменными. Значение функции $z = f(x, y)$, которое она принимает при $x = a$, $y = b$, обозначается через $f(a, b)$.

Область определения функции двух переменных представляет собой некоторое множество точек плоскости.

Графиком функции $z = f(x, y)$ называется множество точек $N(x, y, f(x, y))$, т.е. некоторое множество точек пространства. Например, график функции $z = x - y$ представляет собой плоскость в пространстве, проходящую через начало координат и пересекающую координатную плоскость Oxy по прямой, образующей равные углы с осями Ox и Oy; геометрическим изображением функции $z = x^2 + y^2$ является поверхность параболоида вращения, а функции $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ – полусфера радиуса $R = 3$ с центром в начале координат, расположенная выше плоскости Oxy. Отметим, что первые две функции определены на всей плоскости Oxy, третья – в круге радиуса $R=3$ с центром в начале координат, т.е. в области, заданной неравенством $x^2+y^2\le 9$.

Функцию

$$z=f(x,y) \tag{18.1}$$

можно представить так: $z-f(x,y)=0$, или в более общем виде

$$F(x,y,z)=0. \tag{18.2}$$

Функция, заданная формулой (18.1), называется явной, функция, определяемая уравнением (18.2), называется неявной.

Действительная функция, определенная на некотором множестве $\{X\}$ точек пространства, т.е. точек $M(x,y,z)$, где x,y,z – декартовы координаты, называется функцией трех переменных x,y,z. Функцию трех переменных x,y,z обозначим буквой u, тогда $u=f(x,y,z)$. Значение функции $u=f(x,y,z)$ при $x=a$, $y=b$, $z=c$ обозначается через $f(a,b,c)$. Областью определения функции трех переменных является некоторое множество точек пространства. Например, область определения функции $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ представляет собой шар радиуса $R=1$ с центром в начале координат, областью определения функции $u=1/\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ является множество точек, лежащих внутри указанного шара (граничные точки, т.е. точки сферы $x^2+y^2+z^2=1$, исключаются).

18.3. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Полное приращение функции двух переменных $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ определяется формулой

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y), \tag{18.3}$$

а ее частные приращения (по x и y соответственно) в той же точке – формулами

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y), \tag{18.4}$$

$$\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y), \tag{18.5}$$

x, y, $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ принадлежат области определения функции.

Аналогично определяются полное и частные приращения функции большего числа переменных.

Замечание. Частное приращение функции по одному из аргументов есть разность между двумя ее значениями, когда приращение получает только данный аргумент; полное приращение функции – разность между двумя значениями, когда приращения получают все ее аргументы.

Число A называется пределом функции $u=f(M)$ при M, стремящемся к M_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что при всех M, расстояние которых до точки M_0 меньше δ, т.е.

$$0<\rho(M, M_0)<\delta, \tag{18.6}$$

выполняется неравенство

$$|f(M)-A|<\varepsilon. \tag{18.7}$$

Функция $u=f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если выполняется условие

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0). \tag{18.8}$$

Необходимое и достаточное условие непрерывности функции $u=f(M)$ в точке M_0 выражается равенством

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}\Delta u=0, \text{ или } \lim_{\Delta\rho\to 0}(f(M)-f(M_0))=0,$$

где $\Delta\rho=\rho(M, M_0)$, $\Delta u=f(M)-f(M_0)$.

Теорема 18.1. (об устойчивости знака непрерывной функции).

Если функция $u=f(M)$ непрерывна в точке $M_0\in X$ и $f(M_0)\neq 0$, то существует δ-окрестность точки M_0, в которой $f(M)$ не обращается в нуль и имеет знак, совпадающий со знаком $f(M_0)$.

Теорема 18.2. *Если функция $z=f(x,y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она ограничена в этой области и достигает в ней своего наименьшего и наибольшего значения.*

Если в некоторой точке M_0 не выполнено условие (18.8), то эта точка называется точкой разрыва функции $u=f(M)$.

Точки разрыва функции двух переменных могут заполнять отдельные линии (линии разрыва). Например, для функции $u=1/(x^2+y^2-1)$ линией разрыва является окружность $x^2+y^2-1=0$ в плоскости Oxy. Точки разрыва функции трех переменных могут заполнять отдельные поверхности (поверхность разрыва). Так, для функции $u=1/(z-x^2-y^2)$ поверхностью разрыва является параболоид вращения $z=x^2+y^2$.

18.4. Частные производные функции нескольких переменных

Частной производной функции нескольких переменных по одной из них в фиксированной точке называется предел отношения соответствующего частного приращения этой функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции $z=f(x,y)$ частные производные в точке $M_0(x_0,y_0)$ по x и y соответственно определяются формулами:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Употребляются и другие обозначения: $z'_x(x_0,y_0)$, $f'_x(x_0,y_0)$, $z'_y(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$.

Частная производная функции $z=f(x,y)$ по переменной x выражает скорость изменения функции в данном направлении $(y=y_0)$ или скорость изменения функции $f(x,y_0)$ одной переменной.

Частные производные функции $z=f(x,y)$ имеют следующую геометрическую интерпретацию:

$$f'_x(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\alpha,\quad f'_y(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\beta,$$

где α – угол между осью Ox и касательной в точке $N\,(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ к линии пересечения поверхности $z=f(x,y)$ и плоскости $y=y_0$, β – угол между осью Oy и касательной в той же точке к линии пересечения данной поверхности с плоскостью $x=x_0$ (рис 18.1).

Очевидно,

$$f'_x(x_0,y_0)=\left.\frac{df(x,y_0)}{dx}\right|_{x=x_0},\quad f'_y(x_0,y_0)=\left.\frac{df(x_0,y)}{dy}\right|_{y=y_0},$$

т.е. частная производная в данной точке равна производной функции одной переменной, вычисленной при соответствующем значении аргумента, поэтому при нахождении частных производных пользуются обычными правилами дифференцирования.

При переходе от точки $M_0(x_0,y_0)$ к точке $M\,(x,y)$ получим новые значения частных производных. Следовательно, частные производные функции $f(x,y)$ также являются некоторыми функциями двух переменных:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y).$$

Пример 18.1. Найти значения частных производных функции $z=f(x,y)=2x^3+3x^2y+6xy-y^3$ в точке $M_0(-1,2)$.

Считая y постоянной и дифференцируя z, как функцию x, находим

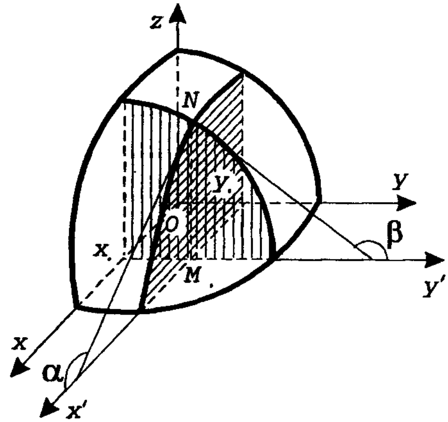

Рис. 18.1

частную производную по x, вычисляем ее значение в точке M_0:
$z'_x = (2x^3)'_x + (3x^2y)'_x + (6xy)'_x - (y^3)'_x = 6x^2 + 6xy + 6y - 0 = 6(x^2 + xy + y)$;
$f'_x(-1,2) = 6((-1)^2 + (-1)2 + 2) = 6.$

Считая x постоянной и дифференцируя z, как функцию y, находим частную производную по y и ее значение в точке M_0:
$z'_y = (2x^3)'_y + (3x^2y)'_y + (6xy)'_y - (y^3)'_y = 0 + 3x^2 + 6x - 3y^2 = 3(x^2 + 2x - y^2)$;
$f'_y(-1,2) = 3((-1)^2 + 2(-1) - 2^2) = -15.$

18.5. Полный дифференциал функции нескольких переменных

Если полное приращение функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ представимо в виде

$$\Delta z = P\Delta x + Q\Delta y + \varepsilon\Delta\rho,$$

где P, Q – постоянные, $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и $\varepsilon \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$, то $P\Delta x + Q\Delta y$ называют полным дифференциалом данной функции в этой точке и обозначают через dz: $dz = P\Delta x + Q\Delta y$. Следовательно,

$$\Delta z = dz + \varepsilon\Delta\rho,\ \varepsilon \to 0 \text{ при } \Delta\rho \to 0. \qquad (18.9)$$

Полный дифференциал функции двух переменных равен приращению аппликаты z касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности, являющейся графиком этой функции, когда аргументы x и y получают приращения Δx и Δy (рис 18.2, $\Delta z = KM$, $dz = KN$).

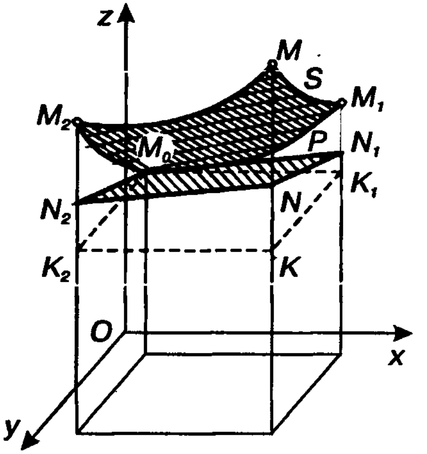

Рис. 18.2

Функция, обладающая непрерывными частными производными, имеет полный дифференциал, причем

$$dz = f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y. \qquad (18.10)$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ является функцией x, y при фиксированных dx и dy:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \text{ или } dz = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy.$$

Функция, имеющая полный дифференциал, называется дифференцируемой. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в ней.

Из формулы (18.9) следует, что $\Delta z \approx dz$, или

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y, \qquad (18.11)$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y. \qquad (18.12)$$

Если все первые частные производные функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывны, то полный дифференциал выражается формулой

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n. \tag{18.13}$$

Каждое слагаемое правой части этой формулы называется частным дифферециалом.

В частности, полный дифференциал функции трех переменных вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \tag{18.14}$$

Пример 18.2. Дана функция $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - 6x$ и две точки $A(4; 1)$, $B(3{,}96; 1{,}03)$. Требуется: 1) вычислить значение z функции в точке B; 2) вычислить приближенное значение z_1 функции в точке B исходя из значения z_0 функции в точке A, заменив приращение функции при переходе от точки A к точке B дифференциалом.

Вычисляем значения данной функции в точках A и B: $z_0 = f(A) = f(x_0, y_0) = f(4, 1) = 4^2 + 3\cdot 1\cdot 4 - 6\cdot 4 = 4$, $z = f(B) = f(x_1, y_1) = f(3{,}96; 1{,}03) = (3{,}96)^2 + 3\cdot 3{,}96\cdot 1{,}03 - 6\cdot 3{,}96 = 4{,}158$.

Находим приращения аргументов: $\Delta x = x_1 - x_0 = 3{,}96 - 4{,}00 = -0{,}04$, $\Delta y = y_1 - y_0 = 1{,}03 - 1{,}00 = 0{,}03$; значения частных производных $f'_x(x, y) = 2x + 3y - 6$, $f'_y = 3x$ в точке A: $f'_x(x_0, y_0) = f'_x(4, 1) = 2\cdot 4 + 3\cdot 1 - 6 = 5$, $f'_y(x_0, y_0) = f'_y(4, 1) = 3\cdot 4 = 12$; значение дифференциала в точке A по формуле (18.10): $dz = 5(-0{,}04) + 12\cdot 0{,}03 = 0{,}16$; значение функции в точке B по формуле (18.12): $z_1 = f(x_1, y_1) = f(3{,}96; 1{,}03) \approx 4 + 0{,}16 = 4{,}16$.

Пример 18.3. Вычислить приближенно $e^{(1,1)^2 - (0,9)^2}$.

Рассмотрим функцию $z = e^{x^2 - y^2}$. Искомое число можно считать приращенным значением этой функции при $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = -0{,}1$. Поскольку $f(x, y) = e^{x^2 - y^2} = e^0 = 1$, $\Delta z \approx dz = 2e^{x^2 - y^2}(xdx - ydy) = 2e^0(0{,}1 + 0{,}1) = 2\cdot 0{,}2 = 0{,}4$, то $e^{(1,1)^2 - (0,9)^2} \approx e^{1-1} + \Delta z = 1 + 0{,}4 = 1{,}4$.

Пример 18.4. Вычислить полный дифференциал функции $u = xyz$ при переходе от точки $M(6; 4; 2)$ к точке $N(5{,}92; 3{,}95; 2{,}07)$.

Так как $u'_x = yz$, $u'_y = xz$, $u'_z = xy$, то в соответствии с формулой (18.14) $du = yzdx + xzdy + xydz$. Подставив в эту формулу значения $x = 6$, $y = 4$, $z = 2$, $dx = \Delta x = 5{,}92 - 6 = -0{,}08$, $dy = \Delta y = 3{,}95 - 4 = -0{,}05$, $dz = \Delta z = 2{,}07 - 2 = 0{,}07$, получим $du = 4\cdot 2(-0{,}08) + 6\cdot 2(-0{,}05) + 6\cdot 4\cdot 0{,}07 = -0{,}64 - 0{,}6 + 1{,}68 = 0{,}44$.

Пример 18.5. Как изменится диагональ прямоугольника со сторонами $a = 8$ см, $b = 6$ см, если сторону a уменьшить на 3 мм, а сторону b увеличить на 7 мм?

Диагональ прямоугольника l через его стороны a и b выражается формулой $l=\sqrt{a^2+b^2}$. Введем в рассмотрение функцию $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Поскольку $x=8$, $y=6$, $\Delta x=-0{,}3$, $\Delta y=0{,}7$, $dz=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то $dz=\frac{8(-0{,}3)+6\cdot 0{,}7}{\sqrt{8^2+6^2}}=\ =0{,}18$.

Следовательно, диагональ увеличится на 0,18 см.

18.6. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

Частные производные функции нескольких переменных называют также частными производными первого порядка или первыми частными производными.

Частными производными второго порядка (или вторыми частными производными) данной функции называются соответствующие частные производные от ее первых частных производных.

Для функции $z=f(x,y)$ по определению имеем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=(f'_x(x,y))'_x=f''_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=(f'_y(x,y))'_y=f''_{yy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=(f'_x(x,y))'_y=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=(f'_y(x,y))'_x=f''_{yx}(x,y).$$

Вторые частные производные обозначаются также символами z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}. Производные z''_{xy}, z''_{yx} называются смешанными частными производными.

Частные производные появились в трудах И. Ньютона, Г. Лейбница, Я. Бернулли и И. Бернулли. Обозначения $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ввел Лежандр (1786), f'_x, z'_x – Ж. Лагранж (1797, 1801), $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ – К. Якоби (1837).

Теорема 18.3. *Если функция $z=f(x,y)$ и ее смешанные производные z''_{xy}, z''_{yx} определены в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и непрерывны в этой точке, то $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.*

Дифференцируя частные производные второго порядка как по x, так и по y, получаем частные производные третьего порядка или третьи частные производные:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Вообще, частная производная n-го порядка функции $z = f(x, y)$ есть первая частная производная от ее частной производной $(n-1)$ -го порядка.

Аналогично определяются и вычисляются частные производные второго и высших порядков от функции трех и большего числа переменных.

Полным дифференциалом второго порядка некоторой функции называется полный дифференциал от ее полного дифференциала.

Полным дифференциалом n-го порядка называется полный дифференциал от полного дифференциала $(n-1)$ -го порядка. Если $z = f(x, y)$, $dz = z'_x dx + z'_y dy$, то

$$d^2 z = d\,(dz) = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2,$$

$$d^3 z = d\,(d^2 z) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3, \ldots,$$

$$d^n z = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k \left(C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!} \right).$$

Эту формулу записывают и в следующем символическом виде:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(n)} z.$$

Формула Тейлора для функции двух переменных

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(a, b)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(a + \theta\Delta x, b + \theta\Delta y)}{(n+1)!}, \qquad (18.15)$$

или

$$f(M) = f(M_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(M_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(M')}{(n+1)!}, \qquad (18.16)$$

где $M'(a + \theta\Delta x, b + \theta\Delta y)$ – точка области S.

Формула Тейлора для функции большего числа переменных $u = f(M)$, $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, аналогична формуле (18.16).

З а м е ч а н и е . При $n = 1$ формула (18.15) принимает вид

$$f(x, y) = f(a, b) + (f'_x(a, b)\,\Delta x + f'_y(a, b)\,\Delta y) +$$

$$+ \frac{1}{2}(f''_{xx}(\xi, \eta)\,\Delta x^2 + 2f''_{xy}(\xi, \eta)\,\Delta x \Delta y + f''_{yy}(\xi, \eta)\,\Delta y^2),$$

где $\xi = a + \theta\Delta x$, $\eta = b + \theta\Delta y$, $0 < \theta < 1$.

П р и м е р 18.6. Дана функция $z = x^3 + 2x^2 y - 8xy^2 + y^3$. Найти ее частные производные второго порядка. Находим сначала первые производные: $z'_x = 3x^2 + 4xy - 8y^2$, $z'_y = 2x^2 - 16xy + 3y^2$.

Пользуясь определениями и правилами дифференцирования, получаем $z''_{xx}=6x+4y$, $z''_{xy}=4x-16y$, $z''_{yx}=4x-16y$, $z''_{yy}=-16x+6y$.

Пример 18.7. Дана функция $u=x^2y\cos 3t+y^2z^5$. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial t}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial z^2}$, $\frac{\partial^5 u}{\partial z^5}$.

Дифференцируя по одной из переменных, считаем все другие постоянными:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy\cos 3t,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x\cos 3t,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial t}=-6x\sin 3t;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2\cos 3t+2yz^5,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2z^5,\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial z}=10z^4,\ \frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial z^2}40z^3;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=5y^2z^4,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=20y^2z^3,\ \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}=60y^2z^2,\ \frac{\partial^4 u}{\partial z^4}=120y^2z,\ \frac{\partial^5 u}{\partial z^5}=120y^2.$$

Пример 18.8. Дана функция $z=\ln(x^2+y^2+2x+1)$. Показать, что $z''_{xx}+z''_{yy}\equiv 0$.

Найдем частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x^2+y^2+2x+1)'_x}{x^2+y^2+2x+1}=\frac{2x+2}{x^2+y^2+2x+1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x^2+y^2+2x+1)'_y}{x^2+y^2+2x+1}=\frac{2y}{x^2+y^2+2x+1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{2x+2}{x^2+y^2+2x+1}\right)'_x=\frac{2(x^2+y^2+2x+1)-(2x+2)(2x+2)}{(x^2+y^2+2x+1)^2}=$$

$$=\frac{2y^2-2x^2-4x-2}{(x^2+y^2+2x+1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+2x+1}\right)=\frac{2(x^2+y^2+2x+1)-2y2y}{(x^2+y^2+2x+1)^2}=\frac{2x^2-2y^2+4x+2}{(x^2+y^2+2x+1)^2}.$$

Составим сумму $z''_{xx}+z''_{yy}$ вторых частных производных и убедимся, что она тождественно равна нулю:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2y^2-2x^2-4x-2}{(x^2+y^2+2x+1)^2}+\frac{2x^2-2y^2+4x+2}{(x^2+y^2+2x+1)^2}\equiv 0.$$

18.7. Дифференцирование неявных и сложных функций

Функция n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется неявной, если она задана уравнением

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0, \tag{18.17}$$

не разрешенным относительно u.

Частные производные неявной функции, заданной уравнением (18.17), находятся по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_u},\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{F'_{x_2}}{F'_u}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} = -\frac{F'_{x_n}}{F'_u}.$$

В частности, если y – функция одной переменной x, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, то

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}; \tag{18.18}$$

если z – функция двух переменных x, y, заданная уравнением $F(x, y, z) = 0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Если $u = F(v_1, v_2, \dots, v_n)$, где $v_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, v_n = f_n(x_1, x_2, \dots x_n)$, то функция u называется сложной функцией независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Переменные $v_1, v_2, \dots, v_n$ называются промежуточными аргументами.

Частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по данной независимой переменной:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial x_1},\\
\frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial x_2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial u}{\partial x_n} &= \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial x_n}.
\end{aligned} \tag{18.19}$$

Если все промежуточные аргументы являются функциями одной независимой переменной t, то функция будет сложной функцией от t. Полная производная этой функции находится по формуле

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{dv_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\frac{dv_2}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\frac{dv_n}{dt}.$$

18.8. Экстремум функции нескольких переменных

Максимумом (минимумом) функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется такое ее значение $f(x_0, y_0)$, которое больше (меньше) всех других ее значений, принимаемых в точках $M(x, y)$, достаточно близких к точке M_0 и отличных от нее.

Максимум и минимум функции называется ее экстремумом. Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума.

Экстремум функции трех и большего числа переменных определяется аналогично.

Необходимые условия экстремума. В точке экстремума дифференцируемой функции нескольких переменных частные производные ее равны нулю.

Если $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума дифференцируемой функции $z = f(x,y)$, то

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0. \qquad (18.20)$$

Из этой системы уравнений находятся стационарные точки. Система (18.20) эквивалентна одному уравнению

$$df(x_0, y_0) = 0. \qquad (18.21)$$

В общем случае в точке экстремума $M_0(x_0, y_0)$ функции $z = f(x, y)$ выполняется равенство (18.21) или $df(x_0, y_0)$ не существует.

Достаточные условия экстремума. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка, т.е. точка, для которой выполняется равенство (18.21):

1) если

$$d^2 f(x_0, y_0) < 0 \ (\text{при } dx^2 + dy^2 > 0), \qquad (18.22)$$

то $f(x_0, y_0)$ – максимум функции $z = f(x, y)$;

2) если

$$d^2 f(x_0, y_0) > 0 \ (\text{при } dx^2 + dy^2 > 0), \qquad (18.23)$$

то $f(x_0, y_0)$ – минимум функции $z = f(x, y)$.

Эти условия эквивалентны следующим: пусть $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ и

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \ B = f''_{xy}(x_0, y_0), \ C = f''_{yy}(x_0, y_0), \qquad (18.24)$$

$$\Delta = AC - B^2, \qquad (18.25)$$

тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x, y)$ имеет экстремум в точке M_0: максимум при $A < 0$ (или $C < 0$), минимум при $A > 0$ (или $C > 0$);

2) если $\Delta < 0$, то экстремума в точке M_0 нет.

Для функции трех и большего числа переменных необходимые условия экстремума аналогичны условиям (18.20), а достаточные условия аналогичны условиям (18.22), (18.23).

Пример 18.9. Найти экстремум функции $f(x, y)=x^2+y^2-4x+6y+17$.

Поскольку $f'_x=2x-4, f'_y=2y+6, f''_{xx}=2, f''_{xy}=0, f''_{yy}=2, f'_x=0, f'_y=0$ при $x=2, y=-3, \Delta=2\cdot 2-0=4>0, A=2>0$, то в точке $M_0(2,-3)$ функция имеет минимум, причем $\min f(x,y)=f(2,-3)=4$.

Пример 18.10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x,y)=3-2x^2-xy-y^2$ в замкнутой области, заданной системой неравенств: $x\le 1$, $y\ge 0$, $y\le x$.

Область представляет собой треугольник OAB (рис. 18.3), причем $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$. Находим экстремум функции: $f'_x=-4x-y$, $f'_y=-x-2y; f'_x=0, f'_y=0$ при $x=0$, $y=0; f''_{xx}=-4, f''_{xy}=f''_{yx}=-1, f''_{yy}=-2$, $\Delta=AC-B^2=(-4)(-2)-(-1)^2=7>0$, $A=-4<0$, в точке $(0,0)$ функция достигает максимума: $\max f(x,y)=f(0,0)=3$. Найдем экстремумы на границе области: на стороне OA $(y=0)$ функция $z=f(x,0)=3-2x^2=\varphi(x)$ зависит от одной переменной $x; \varphi'(x)=-4x$, $\varphi''(x)=-4$, $\varphi'(x)=0$

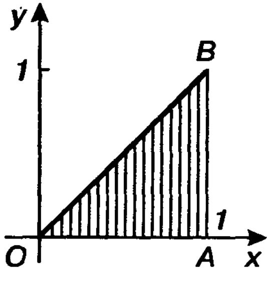

Рис. 18.3

при $x=0$; $\varphi''(0)=-4<0$, $x=0$ – точка максимума: $\varphi(0)=f(0,0)=3$. На прямой AB $(x=1)$ функция $z=f(1,y)=3-2-y-\ -y^2=1-y-y^2=\psi(y)$ зависит только от y; $\psi'(y)=-1-2y$, $\psi'(y)=0$ при $y=-1/2$, но эта точка не принадлежит отрезку AB. На стороне OB $(y=x)$ функция зависит только от x: $z=f(x,x)=\ =3-2x^2-x^2-x^2=3-4x^2=\varphi(x)$, $\varphi'(x)=-8x$, $\varphi''(x)=-8$, $\varphi=0$ при $x=0$, $\varphi''(0)=-8<0, f(0,0)=3$. Вычисляем значения функции в точках A и B: $f(A)=f(1,0)=1, f(B)=f(1,1)=-1$. Следовательно, в заданной области наименьшее значение данной функции равно -1, а наибольшее равно 3.

Пример 18.11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2-2x-2y+4$ в круге $x^2+y^2\le 4$.

Данная функция имеет минимум в точке $M(1,1)$, лежащей в заданной области, причем $\min(x,y)=f(1,1)=2$.

Исследуем изменение функции на границе области, т.е. на окружности $x^2+y^2=4$. Воспользуемся параметрическими уравнениями этой окружности $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$. На данной окружности функция становится функцией одной переменной t: $z=z(t)=4\cos^2 t+4\sin^2 t-4\cos t-4\sin t+4=$ $=8-4\cos t-4\sin t$. Поскольку $z'(t)=4\sin t-4\cos t$, $z'(t)=4\sin t-4\cos t=0$, $\operatorname{tg} t=1$, $t_1=\pi/4$, $t_2=(5/4)\pi$, $z''(t)=4\cos+4\sin t$, $z''(t_1)>0$, $z''(t_2)<0$, то t_1 –

точка минимума, t_2 – точка максимума, причем $\min z(t) = z(\pi/4) = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2{,}344$, $\max z(t) = z((5/4)\pi) = 8 + 4\sqrt{2} \approx 13{,}656$.

Рассматривая полученные экстремальные значения функции, заключаем, что в указанном круге наибольшее значение функции равно $8 + 4\sqrt{2} \approx 13{,}656$, достигается оно в точке $N(-2, -2)$, лежащей на границе окружности; наименьшее значение функции равно 2, достигается в точке минимума $M(1, 1)$.

18.9. Условный экстремум

Если разыскивается экстремум функции многих переменных, которые связаны между собой одним или несколькими уравнениями (число уравнений должно быть меньше числа переменных), то говорят об условном экстремуме. При решении задачи можно пользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа.

Чтобы найти условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при наличии уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$, составляют функцию Лагранжа

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \qquad (18.26)$$

где λ – неопределенный постоянный множитель, и ищут ее экстремум. Необходимые условия экстремума функции (18.26) выражаются системой трех уравнений с тремя неизвестными x, y, λ:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad \varphi(x, y) = 0. \qquad (18.27)$$

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала функции Лагранжа $d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2$ для испытуемой системы значений x, y, λ, полученной из системы (18.27) при условии, что dx и dy связаны уравнением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0 \quad (dx^2 + dy^2 \neq 0).$$

Функция $f(x, y)$ имеет условный максимум, если $d^2F < 0$, и условный минимум, если $d^2F > 0$.

Аналогично находится условный экстремум функции трех или большего числа переменных при наличии уравнений связи.

Если, например, требуется найти экстремум функции $f(x, y, z)$ при условиях

$$\varphi(x, y, z) = 0, \ \psi(x, y, z) = 0, \qquad (18.28)$$

то вводят функцию

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$$

и к уравнениям (18.28) присоединяют еще три уравнения: $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_z = 0$.

Пример 18.12. Найти экстремум функции $z=9-8x-6y$ при условии, что ее аргументы удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=25$.

Геометрически задача сводится к нахождению экстремальных значений аппликаты z точек пересечения плоскости $z=9-8x-6y$ с круговым цилиндром $x^2+y^2=25$.

Составляем функцию Лагранжа, определяемую формулой (18.26): $F(x,y)=9-8x-6y+\lambda(x^2+y^2-25)$, находим ее частные производные $F'_x=-8+2\lambda x$, $F'_y=-6+2\lambda y$. Система уравнений (18.27) принимает вид

$$-8+2\lambda x=0,\ -6+2\lambda y=0,\ x^2+y^2=25,$$

или

$$\lambda x-4=0,\ \lambda y-3=0,\ x^2+y^2=25.$$

Решив эту систему, получим: 1) $\lambda_1=1$, $x_1=4$, $y_1=3$; 2) $\lambda_2=-1$, $x_2=-4$, $y_2=-3$. Находим вторые частные производные: $F''_{xx}=2\lambda$, $F''_{xy}=0$, $F''_{yy}=2\lambda$ и второй дифференциал $d^2F=\lambda(dx^2+dy^2)$. Так как $d^2F>0$ при $\lambda_1=1$, $x_1=4$, $y_1=3$, то функция $f(x,y)$ в точке $(4,3)$ имеет условный минимум, причем $\min f(x,y)=f(4,3)=-41$. Поскольку $d^2F<0$ при $\lambda_2=-1$, $x_2=-4$, $y_2=-3$, то в точке $(-4,-3)$ функция имеет условный максимум $f(-4,-3)=59$.

18.10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в данной точке M (точке касания) называется плоскость, в которой лежат касательные в этой точке к всевозможным кривым, проведенным на данной поверхности через указанную точку.

Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания. Координаты вектора нормали $\mathbf{n}=(a,b,c)$ к поверхности

$$F(x,y,z)=0 \tag{18.29}$$

в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ пропорциональны значениям соответствующих частных производных функции $F(x,y,z)$ в этой точке: $a=\lambda(F'_x)_0$, $b=\lambda(F'_y)_0$, $c=\lambda(F'_z)_0$, где $(F'_x)_0=F'_x(x_0,y_0,z_0)$, $(F'_y)_0=F'_y(x_0,y_0,z_0)$, $(F'_z)_0=F'_z(x_0,y_0,z_0)$.

Координаты вектора $\mathbf{n}$ входят в уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$(F'_x)_0(x-x_0)+(F'_y)_0(y-y_0)+(F'_z)_0(z-z_0)=0, \tag{18.30}$$

а также в уравнение нормали к данной поверхности в той же точке:

$$\frac{x-x_0}{(F'_x)_0}=\frac{y-y_0}{(F'_y)_0}=\frac{z-z_0}{(F'_z)_0}. \qquad (18.31)$$

Пример 18.13. Записать уравнения нормали и касательной плоскости к поверхности $z=x^2+y^2$ в точке $M_0(1,-2,5)$.

Поскольку $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$, $F'_x=2x$, $F'_y=2y$, $F'_z=-1$, $x_0=1$, $y_0=-2$, $z_0=5$, $F'_x(x_0,y_0,z_0)=2$, $F'_y(x_0,y_0,z_0)=-4$, то на основании уравнений (18.30), (18.31) получаем $2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$, $2x-4y-z-5=0$ (уравнение касательной плоскости), $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-5}{-1}$ (уравнения нормали).

18.11. Семейства линий и их огибающие. Семейства поверхностей и их огибающие

Однопараметрическим семейством линий, лежащих в плоскости Oxy, называется множество линий, определяемое уравнением

$$F(x,y,C)=0, \qquad (18.32)$$

в котором параметр C может принимать различные действительные значения (при каждом фиксированном значении C получаем определенную линию семейства).

Огибающей семейства линий называется такая линия, которая в каждой точке касается некоторой линии семейства.

Множество всех точек, удовлетворяющих системе уравнений

$$F(x,y,C)=0,\ F'_c(x,y,C)=0, \qquad (18.33)$$

называется дискриминантной линией семейства (18.32).

Если в точках дискриминантной линии частные производные F'_x и F'_y одновременно в нуль не обращаются, то дискриминантная линия совпадает с огибающей семейства.

Множество линий, определяемое уравнением

$$F(x,y,C_1,C_2,\ldots,C_n)=0,$$

где $C_1,C_2,\ldots,C_n$ – независимые параметры, называется n-параметрическим семейством линий (параметры называются независимыми или существенными, если их число нельзя уменьшить путем введения новых параметров).

Однопараметрическим семейством поверхностей называется множество поверхностей, определяемое уравнением

$$F(x, y, z, C) = 0. \qquad (18.34)$$

Огибающей семейства поверхностей называется поверхность, которая в каждой своей точке касается некоторой поверхности семейства.

Огибающая семейства поверхностей (18.34) удовлетворяет системе уравнений

$$F(x, y, z, C) = 0,\ F'_C(x, y, z, C) = 0. \qquad (18.35)$$

Пример 18.14. Найти огибающую однопараметрического семейства линий $x^2 + (y - C)^2 = R^2$.

Система уравнений (18.33) запишется так:

$$x^2 + (y - C)^2 - R^2 = 0,\ 2(y - C) = 0.$$

Из этой системы находим, что $x^2 - R^2 = 0$, или $x = -R$, $x = R$.

Прямые $x = -R$, $x = R$ являются огибающей данного однопараметрического семейства линий – множества окружностей радиуса R с центрами на оси Oy (рис 18.4).

Пример 18.15. Найти огибающую однопараметрического семейства поверхностей $x^2 + y^2 + (z - C)^2 = R^2$.

Система уравнений (18.35) принимает вид

$$x^2 + y^2 + (z - C)^2 - R^2 = 0,\ 2(z - C) = 0,$$

откуда следует, что $x^2 + y^2 = R^2$.

Круговой цилиндр радиуса R, ось которого совпадает с осью Oz, является огибающей данного однопараметрического семейства сфер радиуса R, центр каждой из которых находится на оси Oz.

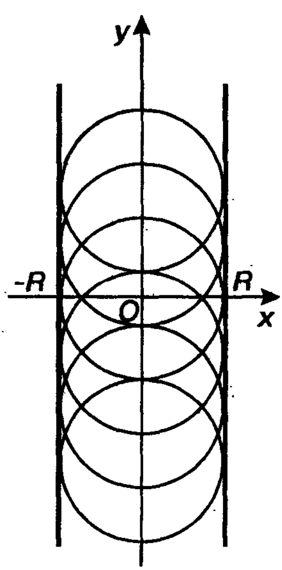

Рис. 18.4