Екзаменаційний білет № 21

I. Теоретична частина

1. Обчислення власних значень векторів матриці методом Данилевського.

6.2.1. Метод Данилевского

Этот простой и экономичный способ нахождения всех собственных значений и соответствующих им векторов был создан в 30-х годах XX века А.М. Данилевским. Метод основан на известном факте из линейной алгебры о том, что преобразование подобия не меняет характеристического многочлена матрицы (см. [2, с. 130]). В этом легко убедиться:

.

(Т.к.,то при записи характеристического уравнения на эту величину его можно сократить).

При удачном подборе преобразования можно получить матрицу, собственный многочлен которой может быть выписан непосредственно по её виду. В методе Данилевского предлагается приводить исходную матрицу с помощью преобразования подобия к так называемой канонической форме Фробениуса:

.

Для матрицы характеристический многочлен может быть легко записан, если последовательно разлагать определитель по элементам первого столбца. В результате получим:

.

Из последнего соотношения видно, что элементы 1-й строки матрицы в форме Фробениуса являются коэффициентами её собственного многочлена и, следовательно, собственного многочлена исходной матрицы . Матрицы и связаны между собой преобразованием подобия .

Решив полученное уравнение , находим собственные значения матрицы . Далее, неособенная матрица , полученная в методе Данилевского, используется при нахождении собственных векторов матрицы .

Построение матрицы в методе Данилевского осуществляется последовательно с помощью преобразований подобия, которые переводят строки матрицы , начиная с последней, в соответствующие строки матрицы .

2. Побудова узагальненого многочлена для функції, що задана на інтервалі.

Інтерполяція функції полягає в заміні заданої функції *f(x)* іншою функцією $L_n(x)$ за умови, що функції *f(x)* і $L_n(x)$ тотожні на заданій послідовності точок. Однак, подання функції за допомогою інтерполяційного многочлена не завжди є зручним: зі збільшенням кількості вузлів зростає його степінь, що не завжди приводить до поліпшення наближеного подання функції на заданому відрізку, або, скажімо, близькість ординат кривих *f(x)* і $L_n(x)$ на заданому відрізку ще не гарантує близькості на ньому похідних $f'(x)$ і $L_n'(x)$, тобто малої розбіжності кутових коефіцієнтів дотичних до цих кривих. Тому постає задача такого подання функції *f(x)* за допомогою функції $L_n(x)$, яке б характеризувало функцію *f(x)* на заданому відрізку в цілому, без копіювання її місцевих відхилень.

Такі міркування приводять до доцільності середньоквадратичного наближення функції.

У найбільш загальній формі цю задачу можна сформулювати наступним чином.

Для функції *f(x)*, заданої на відрізку [*a,b*], потрібно підібрати апроксимуючу функцію $\varphi(x)$ таку, щоб значення інтеграла

$$\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx \qquad (5.1)$$

було якнайменшим.

Якщо значення інтеграла (5.1) є малим, це означає, що в середньому на більшій частині відрізка [*a,b*] функції *f(x)* і $\varphi(x)$ *близькі* одна до одної, хоча в окремих точках або на дуже малій його частині різниця $f(x) - \varphi(x)$ може бути досить істотною (рис. 5.1).

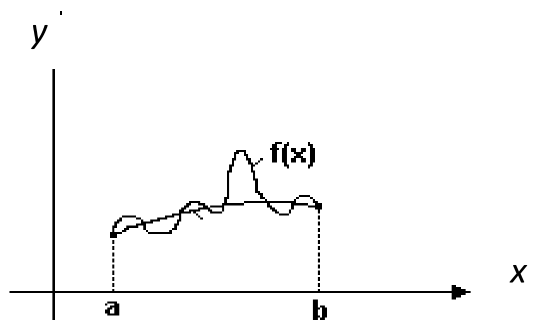

Рис. 5.1. Середньоквадратичне наближення функції *f(x)*за допомогою апроксимуючого многочлена $\varphi(x)$

Таким чином, наближення в сенсі середньоквадратичного приводить до згладжування місцевих похибок. Величина

$$\Delta = \sqrt{\left(\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx\right) / (b - a)}$$

називається середньоквадратичним відхиленням функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ і характеризує похибку наближення функції $f(x)$ за допомогою $\varphi(x)$ *у сенсі середньоквадратичного*.

Якщо функція задана своїми значеннями в $(n+1)$ точках $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n,$ (тобто невідома її аналітична форма), то природно замість інтеграла (5.1) розглядати суму виду

$$\sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - \varphi(x_i))^2 ,$$

а середньоквадратичне відхилення визначати за формулою

$$\Delta_n = \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - \varphi(x_i))^2\right) / (n+1)} .$$

При розв'язанні конкретних задач як апроксимуючу функцію $\varphi(x)$ найчастіше вибирають степеневий або тригонометричний поліном. Тоді задача середньоквадратичного наближення функцій у загальному випадку формулюється так.

Нехай $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ – задана на відрізку $[a, b]$ система лінійно незалежних і неперервних функцій. Узагальненим поліномом $P_m(x)$ m-го степеня по системі (базису) $\{\varphi_m(x)\}$ будемо називати вираз

$$P_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x), \qquad (5.2)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_m$ – деякі константи.

Потрібно підібрати такі значення $a_0, a_1, \ldots, a_m$ в узагальненому поліномі (5.2), щоб значення інтеграла

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \int_a^b (f(x) - P_m(x))^2 dx$$

було якнайменшим.

II. Практична частина

За допомогою методу простої ітерації обчислити корені системи лінійних рівнянь

```
318x0 + 85x1 + 24x2 + 112x3 + 92x4  = 5420
```

114x0 + 362x1 + 115x2 + 81x3 + 49x4 = 3147

34x0 + 26x1 + 205x2 + 92x3 + 49x4 = 3056

74x0 + 117x1 + 121x2 + 333x3 + 17x4 = 4517

120x0 + 107x1 + 8x2 + 42x3 + 280x4 = 6698

з точністю не гірше за 10^{-7}.