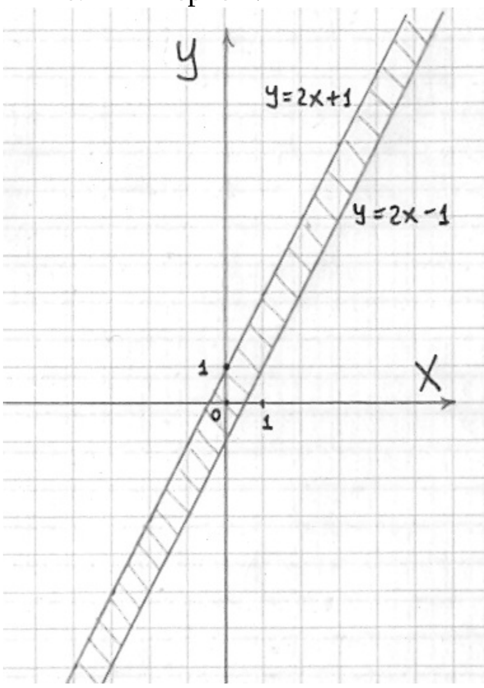
ИДЗ-10.1

1.18. Найти область определения указанной функции.
$z = \arcsin(2x - y)$

Решение: Найдем область определения:
$-1 \le 2x - y \le 1$

$$\begin{cases} -1 \le 2x - y \\ 2x - y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \le 2x + 1 \\ y \ge 2x - 1 \end{cases}$$

Выполним чертеж:



2. Найти частные производные и частные дифференциалы данной функции.

2.18. $z = \arcsin(2x^3 y)$

Найдем частные производные:

$$z'_x = (\arcsin(2x^3 y))'_x = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^3 y)^2}} \cdot (2x^3 y)'_x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-4x^6 y^2}} \cdot 2 \cdot 3x^2 y = \frac{6x^2 y}{\sqrt{1-4x^6 y^2}}$$

$$z'_x = (\arcsin(2x^3 y))'_y = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^3 y)^2}} \cdot (2x^3 y)'_y = \frac{2x^3}{\sqrt{1-4x^6 y^2}}$$

Частные дифференциалы:

$$dz'_x = \frac{6x^2 y dx}{\sqrt{1-4x^6 y^2}}$$

$$dz'_y = \frac{2x^3 dy}{\sqrt{1-4x^6 y^2}}$$

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

3.18. $f(x,y,z) = \dfrac{-z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M_0\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$

Решение:

$$f'_x = \left(\frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = -z\cdot\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_x = -z\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^2+y^2)'_x =$$

$$= \frac{z}{2\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cdot(2x+0) = \frac{xz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$f'_x(M_0) = f'_x\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{4^3}} = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

$$f'_y = \left(\frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y = -z\cdot\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_y = -z\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^2+y^2)'_y =$$

$$= \frac{z}{2\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cdot(0+2y) = \frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$f'_y(M_0) = f'_y\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{4^3}} = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

$$f'_z = \left(\frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_z = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_z(M_0) = f'_z\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}\right) = \frac{-1}{2} = -0{,}5$$

4. Найти полные дифференциалы указанных функций.

4.18. $z = \ln(x+xy-y^2)$

Вычислим частные производные первого порядка:

$$z'_x = \left(\ln(x+xy-y^2)\right)'_x = \frac{1}{x+xy-y^2}\cdot(x+xy-y^2)'_x = \frac{1+y}{x+xy-y^2}$$

$$z'_y = \left(\ln(x+xy-y^2)\right)'_y = \frac{1}{x+xy-y^2}\cdot(x+xy-y^2)'_y = \frac{x-2y}{x+xy-y^2}$$

Полный дифференциал:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{(1+y)dx}{x+xy-y^2} + \frac{(x-2y)dy}{x+xy-y^2} = \frac{(1+y)dx+(x-2y)dy}{x+xy-y^2}$$

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

5.18. $u = \arcsin\frac{x^2}{y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

Найдем производную сложной функции: $u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t$.

В данном случае:

$$u'_x = \left(\arcsin\frac{x^2}{y}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)'_x = \frac{y}{\sqrt{y^2-x^4}} \cdot \frac{2x}{y} = \frac{2x}{\sqrt{y^2-x^4}}$$

$$u'_y = \left(\arcsin\frac{x^2}{y}\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)'_y = \frac{y}{\sqrt{y^2-x^4}} \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2}\right) = -\frac{x^2}{y\sqrt{y^2-x^4}}$$

$x'_t = \cos t$, $y'_t = -\sin t$

Таким образом:

$$u'_t = \frac{2x}{\sqrt{y^2-x^4}} \cdot \cos t - \frac{x^2}{y\sqrt{y^2-x^4}} \cdot (-\sin t) =$$

$$= \frac{2\sin t}{\sqrt{\cos^2 t - \sin^4 t}} \cdot \cos t + \frac{\sin^2 t}{\cos t\sqrt{\cos^2 t - \sin^4 t}} \cdot \sin t$$

$$u'_t(\pi) = 0 + 0 = 0$$

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

6.18. $e^z - xyz - x + 1 = 0$, $M_0(2,1,0)$

$$(e^z - xyz - x + 1)'_x = (0)'_x$$

$$e^z z'_x - y(xz)'_x - 1 + 0 = 0$$

$$e^z z'_x - y(z + xz'_x) - 1 = 0$$

$$e^z z'_x - yz - xyz'_x - 1 = 0$$

$$(e^z - xy)z'_x = yz + 1$$

$$z'_x = \frac{yz+1}{e^z - xy}$$

$$z'_x(M_0) = z'_x(2,1,0) = \frac{0+1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$(e^z - xyz - x + 1)'_y = (0)'_y$$

$$e^z z'_y - x(yz)'_y - 0 + 0 = 0$$

$$e^z z'_y - x(z + yz'_y) = 0$$

$$e^z z'_y - xz - xyz'_y = 0$$

$$(e^z - xy)z'_y = xz$$

$$z'_y = \frac{xz}{e^z - xy}$$

$$z'_y(M_0) = z'_y(2,1,0) = \frac{0}{1-2} = 0$$

ИДЗ 10-2.

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

3.18. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$, $u = \frac{2x+3y}{x^2+y^2}$

Найдем частные производные функции u.

$$u'_x = \left(\frac{2x+3y}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{(2x+3y)'_x(x^2+y^2) - (2x+3y)(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2+y^2) - (2x+3y)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2+y^2-2x^2-3xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2-6xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u'_y = \left(\frac{2x+3y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{(2x+3y)'_y(x^2+y^2) - (2x+3y)(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{3(x^2+y^2) - (2x+3y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^2+3y^2-4xy-6y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^2-3y^2-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Подставим u'_x, u'_y, в левую часть уравнения:

$$x\cdot\frac{(2y^2-2x^2-6xy)}{(x^2+y^2)^2} + y\cdot\frac{(3x^2-3y^2-4xy)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x+3y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{2xy^2-2x^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{3x^2y-3y^3-4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(2x+3y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2xy^2-2x^3-6x^2y+3x^2y-3y^3-4xy^2+2x^3+3x^2y+2xy^2+3y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{0}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Получена правая часть данного уравнения

Таким образом, данная функция удовлетворяет данному уравнению.

4. Исследовать на экстремум функцию.

4.18. $z = xy(12-x-y) = 12xy - x^2y - xy^2$

Решение: Найдем критические точки:

$$\begin{cases} z'_x = 12y - 2xy - y^2 = 0 \\ z'_y = 12x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow -2xy = x^2 - 12x$$ – подставим в первое уравнение.

$$12y + x^2 - 12x - y^2 = 0$$

$$12(y-x)+(x-y)(x+y)=0$$
$$-12(x-y)+(x-y)(x+y)=0$$
$$(x-y)(x+y-12)=0$$

1) $y=x$

$$12x-x^2-2x^2=0$$
$$12x-3x^2=0$$
$$3x(4-x)=0$$

$M_1(0;0)$, $M_2(4;4)$ – стационарные точки.

2) $y=12-x$

$$12x-x^2-2x(12-x)=0$$
$$12x-x^2-24x+2x^2=0$$
$$x^2-12x=0$$
$$x(x-12)=0$$

$M_3(12;0)$

Очевидно, что $M_4(0;12)$ также является стационарной точкой

Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$z''_{xx}=-2y$, $z''_{xy}=12-2x-2y$, $z''_{yy}=-2x$

1) $M_1(0;0)$

$$z''_{xx}(M_1)=z''_{xx}(0;0)=0$$
$$z''_{xy}(M_1)=z''_{xy}(0;0)=12$$
$$z''_{yy}(M_1)=z''_{yy}(0;0)=0$$

$z''_{xx}(M_1)\cdot z''_{yy}(M_1)-\left(z''_{xy}(M_1)\right)^2=0\cdot 0-12^2=-144<0$, значит, в точке $M_1(0;0)$ нет экстремума

2) $M_2(4;4)$

$$z''_{xx}(M_2)=z''_{xx}(4;4)=-8$$
$$z''_{xy}(M_2)=z''_{xy}(4;4)=-4$$
$$z''_{yy}(M_2)=z''_{yy}(4;4)=-8$$

$z''_{xx}(M_2)\cdot z''_{yy}(M_2)-\left(z''_{xy}(M_2)\right)^2=-8\cdot(-8)-(-4)^2=64-16=48>0$, значит, в точке $M_2(4;4)$ существует экстремум, так как $z''_{xx}(M_2)<0$, то это – максимум:

$$\max z=z(M_2)=z(4;4)=16\cdot(12-8)=64$$

3) $M_3(12;0)$

$$z''_{xx}(M_3)=z''_{xx}(12;0)=0$$
$$z''_{xy}(M_3)=z''_{xy}(12;0)=-12$$
$$z''_{yy}(M_3)=z''_{yy}(12;0)=-24$$

$z''_{xx}(M_3)\cdot z''_{yy}(M_3)-\left(z''_{xy}(M_3)\right)^2=0\cdot(-24)-(-12)^2=-144<0$, значит, в точке $M_3(12;0)$ нет экстремума

4) $M_4(0;12)$ – очевидно, что в данной точке также нет экстремума.

Ответ: $\max z=z(4;4)=64$.