ТФКП

теория функций комплексного переменного

Консультационное пособие для школьников и студентов в решении задач с примерами решённых задач из задачника автора Чудесенко В.Ф.

Вариант 2

$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz$$

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz$$

Москва 2003

/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\dots,n-1;\quad z\neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$:

$$\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\qquad \sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ:

$$\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2};-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\cos(\pi/6+2i)$

Используем формулу косинуса суммы:

$$\cos(\pi/6+2i)=\cos(\pi/6)\cos(2i)-\sin(\pi/6)\sin(2i)$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$\cos(\pi/6)\cos(2i)-\sin(\pi/6)\sin(2i)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{e^{-2}-e^{2}}{2i}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{2}\frac{e^{-2}-e^{2}}{2}\right)$$

Ответ: $\cos(\pi/6+2i)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{e^{-2}+e^{2}}{2}\right)+i\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{-2}-e^{2}}{2}\right)$

Задача 3
Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arc}\sin(4)$$

Функция Arcsin является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arc}\sin z = -i\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

Подставим вместо z значение 4:

$$\mathrm{Arc}\sin(4) = -i\mathrm{Ln}\left(4i + \sqrt{1-4^2}\right) = -i\mathrm{Ln}\left(4i + \sqrt{-15}\right) =$$
$$= -i\mathrm{Ln}\left(\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot i\right)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

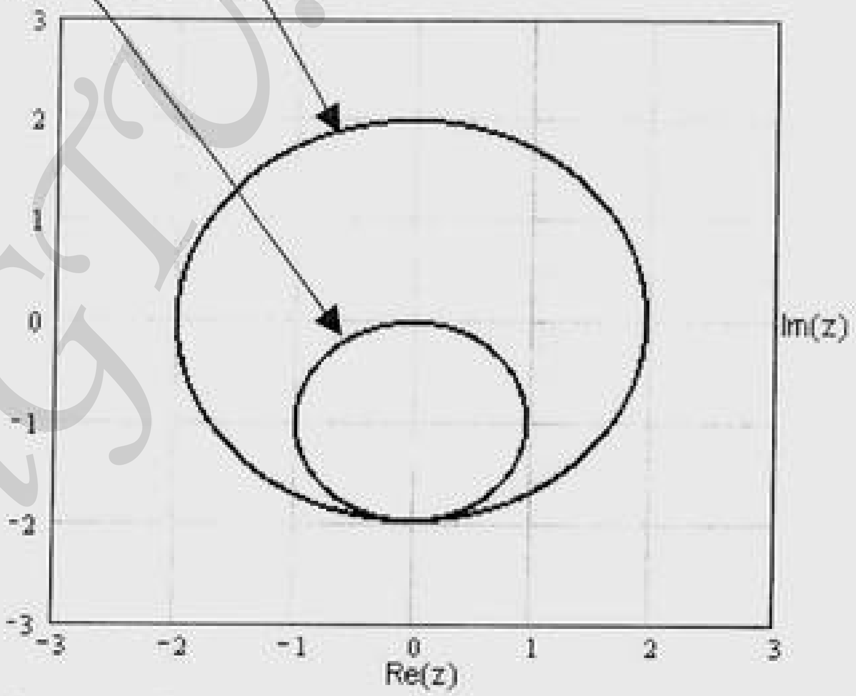
Подставим это выражение в полученное выше:

$$-i\mathrm{Ln}\left(\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot i\right) = -i\left[\ln\left|\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot i\right| + i\left(\arg\left(\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot i\right) + 2\pi k\right)\right] =$$
$$= -i\ln\left(4+\sqrt{15}\right) + \arg\left(\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot i\right) + 2\pi k \approx -i\cdot 2.063 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ответ: $\mathrm{Arc}\sin 4 = -i\cdot 2.063 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Задача 4
Вычертить область, заданную неравенствами:
$|z+i| \geq 1, \quad |z| < 2$



Задача 5
Определить вид кривой:
$z = 2\sec t - i3\mathrm{tg}\, t$

Уравнение вида $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид $x = x(t)$, $y = y(t)$. В нашем случае:
$x(t) = 2\sec t; \quad y(t) = -3\mathrm{tg}\, t$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = 2\sec t = \frac{2}{\cos t} \Rightarrow \cos t = \frac{2}{x} \Rightarrow t = \arccos\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$y = -3\mathrm{tg}\, t \Rightarrow \mathrm{tg}\, t = -\frac{y}{3} \Rightarrow t = \mathrm{arctg}\left(-\frac{y}{3}\right) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{3}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y)=0:

$$\arccos\left(\frac{2}{x}\right) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{3}\right) \Rightarrow \arccos\left(\frac{2}{x}\right) + \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{3}\right) = 0$$

Ответ: $\arccos\left(\frac{2}{x}\right) + \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{3}\right) = 0$

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной действительной части u(x,y) и значению $f(z_0)$:

$u = x^3 - 3xy^2 + 1$

$f(0) = 1$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = 3x^2 - 3y^2 + i \cdot 6xy = 3(x+iy)^2 = 3z^2$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int 3z^2 dz = z^3 + C$$

Определим константу C:

$f(0) = 0^3 + C = 1 \Rightarrow C = 1$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$f(z) = z^3 + 1$

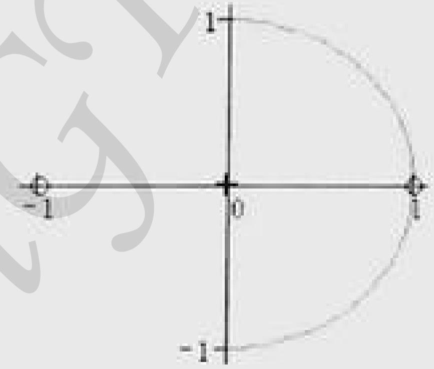
Ответ: $f(z) = z^3 + 1$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$\int_L (z+1)e^z dz;\ L:\{|z| = 1; \operatorname{Re} z \geq 0\}$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = (z+1)e^z = e^x(x+iy+1)\cdot(\cos y + i\sin y) =$$
$$= \underbrace{e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y)}_{u(x,y)} + i\underbrace{e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y)}_{v(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x\cos y + 2\cos y - y\sin y); \frac{\partial v}{\partial y} = e^x(x\cos y + 2\cos y - y\sin y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x(x\sin y - 2\sin y - y\cos y); \frac{\partial v}{\partial x} = e^x(x\sin y - 2\sin y - y\cos y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются, следовательно, функция является аналитической. Тогда результат от пути интегрирования не зависит:

$$\int_L (z+1)e^z dz = \int_{-i}^{i} (z+1)e^z dz = ze^z \Big|_{-i}^{i} = i(e^i + \frac{1}{e^i})$$

Ответ: $\int_L (z+1)e^z dz = i(e^i + \frac{1}{e^i})$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}=\frac{z-4}{z^2(z+2)(z-1)}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{z-4}{(z+2)(z-1)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

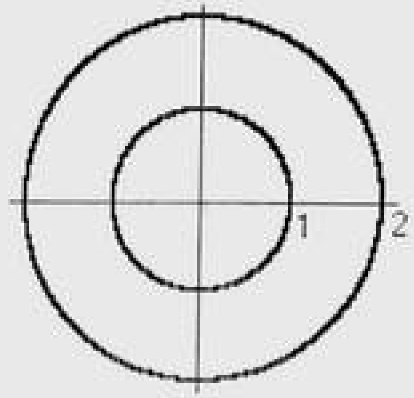
$$\frac{z-4}{(z+2)(z-1)}=\frac{A}{(z+2)}+\frac{B}{(z-1)}=\frac{Az-A+Bz+2B}{(z-0{,}5)(z+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=2;B=-1\}\Rightarrow\frac{z-4}{(z+2)(z-1)}=\frac{2}{(z+2)}-\frac{1}{(z-1)}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z-1}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=1; z=-2$



Рассмотрим область $|z|<1$:

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})}+\frac{1}{1-z}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots\right)+\left(1+z+z^2+z^3+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}-\frac{z}{8}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $1<|z|<2$:

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})}-\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}-\frac{z}{8}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^6}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>2$:

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{2}{z(1+\frac{2}{z})}-\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{2}{z}-\frac{4}{z^2}+\frac{8}{z^3}-\frac{16}{z^4}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{2}{z^3}-\frac{4}{z^4}+\frac{8}{z^5}-\frac{16}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^6}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<1: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}-\frac{z}{8}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+\ldots\right)$$

$$1<|z|<2: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}-\frac{z}{8}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^6}+\ldots\right)$$

$$|z|>2: f(z)=\left(\frac{2}{z^3}-\frac{4}{z^4}+\frac{8}{z^5}-\frac{16}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^6}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$.

$$f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)},\ z_0=2-3i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)}=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{2}{z-1}=2\cdot\frac{1}{z-1}=2\cdot\frac{1}{(z-z_0)+1-3i}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1-3i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-z_0)+2-3i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2-3i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1-3i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2-3i)^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(1-3i)^{n+1}}-\frac{1}{(2-3i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(1-3i)^{n+1}}-\frac{1}{(2-3i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=\sin\frac{z}{z-1},\ z_0=1$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-1;\ \sin\frac{z}{z-1}=\sin\frac{z'+1}{z'}=\sin\left(1+\frac{1}{z'}\right)=\sin1\cos\frac{1}{z'}+\cos1\sin\frac{1}{z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=\sin1\cos\frac{1}{z'}+\cos1\sin\frac{1}{z'}=\left(1-\frac{1}{2!z'^2}+\frac{1}{4!z'^4}-\frac{1}{6!z'^6}+\ldots\right)\sin1+$$

$$+\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{3!z'^3}+\frac{1}{5!z'^5}-\frac{1}{7!z'^7}+\ldots\right)\cos1=\left(\sin1-\frac{\sin1}{2!z'^2}+\frac{\sin1}{4!z'^4}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin1}{6!z'^6}+\ldots\right)+\left(\frac{\cos1}{z'}-\frac{\cos1}{3!z'^3}+\frac{\cos1}{5!z'^5}-\frac{\cos1}{7!z'^7}+\ldots\right)=$$

$$=\sin1+\frac{\cos1}{z'}-\frac{\sin1}{2!z'^2}-\frac{\cos1}{3!z'^3}+\frac{\sin1}{4!z'^4}+\frac{\cos1}{5!z'^5}-\frac{\sin1}{6!z'^6}-\frac{\cos1}{7!z'^7}+\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$:

$$f(z)=\sin1+\frac{\cos1}{z-1}-\frac{\sin1}{2!(z-1)^2}-\frac{\cos1}{3!(z-1)^3}+\frac{\sin1}{4!(z-1)^4}+\frac{\cos1}{5!(z-1)^5}-$$

$$-\frac{\sin1}{6!(z-1)^6}-\frac{\cos1}{7!(z-1)^7}+\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=\sin1+\frac{\cos1}{z-1}-\frac{\sin1}{2!(z-1)^2}-\frac{\cos1}{3!(z-1)^3}+\frac{\sin1}{4!(z-1)^4}+\frac{\cos1}{5!(z-1)^5}-$$

$$-\frac{\sin1}{6!(z-1)^6}-\frac{\cos1}{7!(z-1)^7}+\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z) = z^3 e^{7/z^2}$$

Тип особой точки для этой функции следует находить, применяя разложение в ряд Лорана в окрестности точки z=0:

$$f(z) = z^3 e^{7/z^2} = z^3\left(1 + \frac{7}{z^2} + \frac{49}{2!z^4} + \frac{343}{3!z^6} + \dots\right) =$$

$$= -z^3 + 7z + \frac{49}{2!z} + \frac{343}{3!z^3} + \dots$$

Рассмотрим получившийся ряд и выделим главную и правильную части ряда Лорана:

$$f(z) = \underbrace{-z^3 + 7z}_{\text{правильная часть}} + \underbrace{\frac{49}{2!z} + \frac{343}{3!z^3} + \dots}_{\text{главная часть}}$$

Поскольку главная часть содержит бесконечное число членов, то точка z = 0 для заданной функции f(z) является существенной особой точкой.

Ответ: Точка z = 0 является существенно особой точкой для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = \frac{1}{\cos z}$$

Эта функция не является аналитической при cos z = 0. Найдем z, соответствующие этому случаю:

$$\cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in z$$

Запишем данную функцию в виде отношения функций g(z) и h(z):

$$f(z) = \frac{1}{\cos z}; \quad \begin{matrix} g(z) = 1; \\ h(z) = \cos z; \end{matrix}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = \pi/2 + \pi k$:

$$g(\frac{\pi}{2} + \pi k) = 1$$

$$h(\frac{\pi}{2} + \pi k) = \cos(\frac{\pi}{2} + \pi k) = 0$$

$$h'(z) = -\sin z; h'(\frac{\pi}{2} + \pi k) = -\sin(\frac{\pi}{2} + \pi k) = \pm 1$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = \pi/2 + \pi k$ выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки $z = \pi/2 + \pi k$ являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при $z = \pi/2 + \pi k$ для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 1 – 0 = 1.

Ответ: Точки $z = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in z$ для данной функции являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-1-i|=5/4} \underbrace{\frac{2dz}{z^2(z-1)}}_{f(z)}$$

Найдем особые точки функции f(z):

z = 0
z = 1

Точка z = 0 не входит в область, ограниченную данным контуром, поэтому не рассматривается.
Точка $z_1 = 1$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\mathrm{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to 1}[f(z)(z-1)] = \lim_{z\to 1}\frac{2(z-1)}{z^2(z-1)} = \lim_{z\to 1}\frac{2}{z^2} = 2$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-1-i|=5/4} \frac{2dz}{z^2(z-1)} = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\mathrm{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i\cdot 2 = 4\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-1-i|=5/4} \frac{2dz}{z^2(z-1)} = 4\pi i$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1/2} \underbrace{\frac{2-z^2+3z^3}{4z^3}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$\frac{2-z^2+3z^3}{4z^3} = \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{4z} + \frac{3}{4}$$

Считая получившийся результат рядом Лорана по степеням z, т.е. в окрестности z = 0, мы приходим к выводу, что точка z = 0 является полюсом 3-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\mathrm{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}[f(z)z^3] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{2-z^2+3z^3}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\lim_{z\to 0}(18x-2) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathrm{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2-z^2+3z^3}{4z^3}dz = 2\pi i\cdot(-\frac{1}{4}) = -\frac{\pi i}{2}$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2-z^2+3z^3}{4z^3}dz = -\frac{\pi i}{2}$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{\cos 3z - 1 + 9z^2/2}{z^4 \operatorname{sh}(9z/4)}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции $z = 4ik\pi/9$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{\cos 3z - 1 + 9z^2/2}{z^4 \operatorname{sh}(9z/4)} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad g(z) = \cos 3z - 1 + 9z^2/2, \quad h(z) = z^4 \operatorname{sh}(9z/4)$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\cos 3z - 1 + 9z^2/2}{z^3 \operatorname{sh}(9z/4)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{9z - 3\sin 3z}{3z^2 \operatorname{sh}(9z/4) + \frac{9}{4} z^3 \operatorname{ch}(9z/4)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{9 - 9\cos 3z}{(6z + 81z^3/16)\operatorname{sh}(9z/4) + \frac{27}{2} z^2 \operatorname{ch}(9z/4)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{27\sin 3z}{(6 + \frac{729}{16} z^2)\operatorname{sh}(9z/4) + (\frac{81}{2} z + \frac{729}{64} z^3)\operatorname{ch}(9z/4)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{81\cos 3z}{(54 + \frac{2187}{16} z^2)\operatorname{ch}(9z/4) + (\frac{729}{4} z + \frac{6561}{256} z^3)\operatorname{sh}(9z/4)}\right) = \frac{81}{54} = \frac{3}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos 3z - 1 + 9z^2/2}{z^4 \operatorname{sh}(9z/4)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{3}{2} = 3\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos 3z - 1 + 9z^2/2}{z^4 \operatorname{sh}(9z/4)} dz = 3\pi i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z+6|=2} \left(z e^{\frac{1}{z+6}} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z+3)} \right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z+6|=2} \underbrace{z e^{\frac{1}{z+6}}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z+6|=2} \underbrace{\frac{2\cos\frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z+3)}}_{f_2(z)} dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint\limits_{|z+6|=2} z e^{\frac{1}{z+6}} dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left\{\begin{matrix} t = z+6 \\ z = t-6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z e^{\frac{1}{z+6}} = (t-6)e^{\frac{1}{t}}$$

Единственной особой точкой этой функции является $t=0$. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t-6)e^{\frac{1}{t}} = (t-6)\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2!t^2} + \frac{1}{3!t^3} + \frac{1}{4!t^4} + \frac{1}{5!t^5} + \ldots\right) =$$

$$= \left(t + 1 + \frac{1}{2!t} + \frac{1}{3!t^2} + \frac{1}{4!t^3} + \ldots\right) - \left(6 + \frac{6}{t} + \frac{6}{2!t^2} + \frac{6}{3!t^3} + \frac{6}{4!t^4} + \ldots\right) =$$

$$= t - 5 + \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2!} - 6\right) + \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{3!} - \frac{6}{2!}\right) + \frac{1}{t^3}\left(\frac{1}{4!} - \frac{6}{3!}\right) + \frac{1}{t^4}\left(\frac{1}{5!} - \frac{6}{4!}\right) + \ldots$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов, из чего следует, что $t=0$ является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t-6)e^{\frac{1}{t}}\right] = C_{-1} = \frac{1}{2!} - 6 = \frac{1}{2} - 6 = -\frac{11}{2}$$

Таким образом:

$$\oint_{|z+6|=2} z e^{\frac{1}{z+6}} dz = \oint_{|t|=2} (t-6)e^{\frac{1}{t}} dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{t=0}\left[(t-6)e^{\frac{1}{t}}\right] = 2\pi i\cdot\left(-\frac{11}{2}\right) = -11\pi i$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint_{|z+6|=2}\frac{2\cos\frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z+3)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=–5 и z=–3. При этом точка z=–3 не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=–5 является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=-5} f_2(z) = \lim_{z\to-5}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z+5)^2\cdot 2\cos\frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z+3)}\right] = \lim_{z\to-5}\frac{d}{dz}\left[\frac{2\cos\frac{\pi z}{5}}{(z+3)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to-5}\left[-\frac{2\pi}{5(z+3)}\sin\left(\frac{\pi z}{5}\right) - \frac{2}{(z+3)^2}\cos\left(\frac{\pi z}{5}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint_{|z+6|=2}\frac{2\cos\frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z+3)}dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=-5} f_2(z) = 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint_{|z+6|=2}\left(z e^{\frac{1}{z+6}} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z+3)}\right)dz = \oint_{|z+6|=2} z e^{\frac{1}{z+6}} dz +$$

$$+ \oint_{|z+6|=2}\frac{2\cos\frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z+3)}dz = \pi i - 11\pi i = -10\pi i$$

Ответ: $\oint_{|z+6|=2}\left(z e^{\frac{1}{z+6}} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z+3)}\right)dz = -10\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4+\sqrt{15}\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4+\sqrt{15}\sin t} = \oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{4+\frac{\sqrt{15}}{2i}(z-\frac{1}{z})} = \oint_{|z|=1}\frac{dz}{4iz+\frac{\sqrt{15}}{2}(z^2-1)} =$$

$$= \oint_{|z|=1}\frac{2dz}{8iz+\sqrt{15}(z^2-1)} = \oint_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{15}(z+i\sqrt{15}/5)(z+i\sqrt{15}/3)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = -i\sqrt{15}/5$; $z = -i\sqrt{15}/3$;

Точка $-i\sqrt{15}/3$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $-i\sqrt{15}/5$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-i\sqrt{15}/5} f(z) = \lim_{z\to-i\sqrt{15}/5}[f(z)(z+\frac{i\sqrt{15}}{5})] =$$

$$= \lim_{z\to-i\sqrt{15}/5}\frac{2}{(z+i\sqrt{15}/3)\sqrt{15}} = \frac{2}{(-i\sqrt{15}/5+i\sqrt{15}/3)\sqrt{15}} = -i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{15}(z+i\sqrt{15}/5)(z+i\sqrt{15}/3)} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i\cdot(-i) = 2\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4+\sqrt{15}\sin t} = 2\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{5}+\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{5}+\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(\sqrt{5}+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i(z\sqrt{5}+\frac{1}{2}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[(z+\sqrt{5}+2)(z+\sqrt{5}-2)\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=2-\sqrt{5};\quad z=-2-\sqrt{5};$

Точка $z=-2-\sqrt{5}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=2-\sqrt{5}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=2-\sqrt{5}}f(z)=\lim_{z\to2-\sqrt{5}}\frac{d}{dz}[f(z)(z-2+\sqrt{5})^2]=$$

$$=\lim_{z\to2-\sqrt{5}}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[(z+\sqrt{5}+2)\right]^2}=\frac{4}{i}\lim_{z\to2-\sqrt{5}}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z+\sqrt{5}+2)^2}=$$

$$=\frac{4}{i}\lim_{z\to2-\sqrt{5}}\frac{2+\sqrt{5}-z}{(2+\sqrt{5}+z)^3}=\frac{4}{i}\cdot\frac{2+\sqrt{5}-2+\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5})^3}=\frac{4}{i}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{4^3}=\frac{\sqrt{5}}{8i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[(z+\sqrt{5}+2)(z+\sqrt{5}-2)\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{8i}\right)=\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{5}+\cos t)^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z-1}{(z^2+4)^2}dz$$

Особые точки:

$z=2i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-2i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=2i$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=2i}f(z)=\lim_{z\to2i}\frac{d}{dz}[f(z)(z-2i)^2]=\lim_{z\to2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z-1}{(z+2i)^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to2i}\frac{-z+2i+2}{(z+2i)^3}=\frac{i}{32}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx=2\pi i\frac{i}{32}=-\frac{\pi}{16}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx=-\frac{\pi}{16}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\lambda x dx=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$(x^2+9)^2=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm 3i$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{3i\}$$

Эта особая точка является полюсом второго порядка. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=3i}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)(z-3i)^2}{(z^2+9)^2}e^{iz}\right]=\lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)}{(z+3i)^2}e^{iz}\right]=$$

$$=\frac{-4z+3i+5+iz^2-iz}{(z+3i)^3}e^{2iz}=\left(\frac{1}{12}+\frac{i}{27}\right)e^{-3}$$

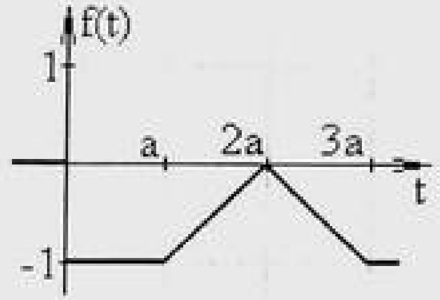
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{\pi}{3}e^{-6}$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx=\frac{\pi i}{3}e^{-6}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)\begin{cases}-1, & 0<t<a\\ \dfrac{t-2a}{a}, & a<t<2a\\ -\dfrac{t-2a}{a}, & 2a<t<3a\\ -1, & 3a<t\end{cases}$$

$$f(t)=-1\cdot\eta(t)+\frac{t-a}{a}\eta(t-a)+\frac{4a-2t}{a}\eta(t-2a)+\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=-\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}\right)e^{-ap}+\left(\frac{4}{p}-\frac{2}{ap^2}\right)e^{-2ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{3}{p}\right)e^{-3ap}$$

Ответ: $F(p)=-\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}\right)e^{-ap}+\left(\frac{4}{p}-\frac{2}{ap^2}\right)e^{-2ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{3}{p}\right)e^{-3ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}=\frac{A}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^2+p+1}=$$

$$=\frac{Ap^2+Ap+A+Bp^2+Bp+Cp+C}{(p+1)(p^2+p+1)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(A+B+C)p+(A+C)}{(p+1)(p^2+p+1)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+B+C=1 \\ A+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}=\frac{1}{p+1}+\frac{p}{p^2+p+1}+\frac{1}{p^2+p+1}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{1}{p+1}+\frac{p}{p^2+p+1}+\frac{1}{p^2+p+1}=$$

$$=\frac{1}{p+1}+\frac{p}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{p+1}+\frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\to$$

$$\to e^{-t}+e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$e^{-t}+e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''-y'=t^2$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)-pY(p)+y(0)=\frac{2}{p^3}$$

$$p^2Y(p)-1-pY(p)=\frac{2}{p^3}$$

$$p(p-1)Y(p)=\frac{2}{p^3}+1=\frac{2+p^3}{p^3}$$

$$Y(p)=\frac{p^3+2}{p^4(p-1)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{p^3+2}{p^4(p-1)}=\frac{Ap^3+Bp^2+Cp+D}{p^4}+\frac{E}{p-1}=$$

$$=\frac{Ap^4+Bp^3+Cp^2+Dp-Ap^3-Bp^2-Cp-D+Ep^4}{p^4(p-1)}$$

$$\begin{cases} A+E=0 \\ B-A=1 \\ C-B=0 \\ D-C=0 \\ -D=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=-2 \\ C=-2 \\ D=-2 \\ E=3 \end{cases} \Rightarrow Y(p)=\frac{-3p^3-2p^2-2p-2}{p^4}+\frac{3}{p-1}$$

$$Y(p)=-3\frac{1}{p}-2\frac{1}{p^2}-2\frac{1}{p^3}-2\frac{1}{p^4}+3\frac{1}{p-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=-3-2t-t^2-\frac{1}{3}t^3+3e^t$$

Ответ: $y(t)=-3-2t-t^2-\frac{1}{3}t^3+3e^t$

Задача 25

Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы F=–kx, пропорциональной смещению x и направленной в противоположную сторону, и силы сопротивления R=rv. В момент t=0 частица находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Найти закон движения x=x(t) частицы.

$k = m$, $r = 2m$, $x_0 = 1$м, $v_0 = 1$ м/с.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kx - rv$$

$$\ddot{x}m + r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 1$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m + 2m\dot{x} + mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + 2pX(p) - 2x(0) + X(p) = 0$$

$$(p^2 + 2p + 1)X(p) - p - 3 = 0$$

$$X(p) = \frac{p+3}{p^2+2p+1} = \frac{p+3}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{(p+1)^2}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = e^{-t} + 2te^{-t}$$

Ответ: $x(t) = e^{-t} + 2te^{-t}$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 1 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = -X(p) + 3Y(p) + 1/p \\ pY(p) - y(0) = X(p) + Y(p) \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = -X(p) + 3Y(p) + 1/p \\ pY(p) - 2 = X(p) + Y(p) \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 2 = X(p) + Y(p)$$

$$X(p) = pY(p) - 2 - Y(p)$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p[pY(p) - 2 - Y(p)] - 1 = -[pY(p) - 2 - Y(p)] + 3Y(p) + 1/p$$

$$(p^2 - 4)Y(p) = 2p + 3 + 1/p$$

$$Y(p) = \frac{2p + 3 + 1/p}{p^2 - 4}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{2p + 3 + 1/p}{p^2 - 4} = 2\frac{p}{p^2-4} + \frac{3}{2}\frac{2}{p^2-4} + \frac{1}{p}\frac{1}{p^2-4} \to$$

$$\to y(t) = 2\operatorname{ch}2t + \tfrac{3}{2}\operatorname{sh}2t - \tfrac{1}{4}(1 - \cos 2it) = \tfrac{9}{4}\operatorname{ch}2t + \tfrac{3}{2}\operatorname{sh}2t - \tfrac{1}{4}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = x + y \Rightarrow x(t) = \dot{y} - y = \tfrac{9}{2}\operatorname{sh}2t + 3\operatorname{ch}2t - \tfrac{9}{4}\operatorname{ch}2t - \tfrac{3}{2}\operatorname{sh}2t + \tfrac{1}{4} =$$

$$= 3\operatorname{sh}2t + \tfrac{3}{4}\operatorname{ch}2t + \tfrac{1}{4}$$

Ответ:

$$x(t) = 3\operatorname{sh}2t + \tfrac{3}{4}\operatorname{ch}2t + \tfrac{1}{4}$$

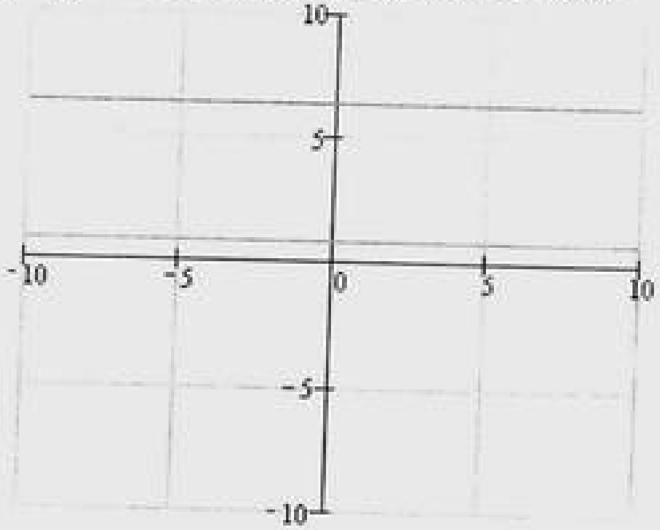
$$y(t) = \tfrac{9}{4}\operatorname{ch}2t + \tfrac{3}{2}\operatorname{sh}2t - \tfrac{1}{4}$$

Задача 27

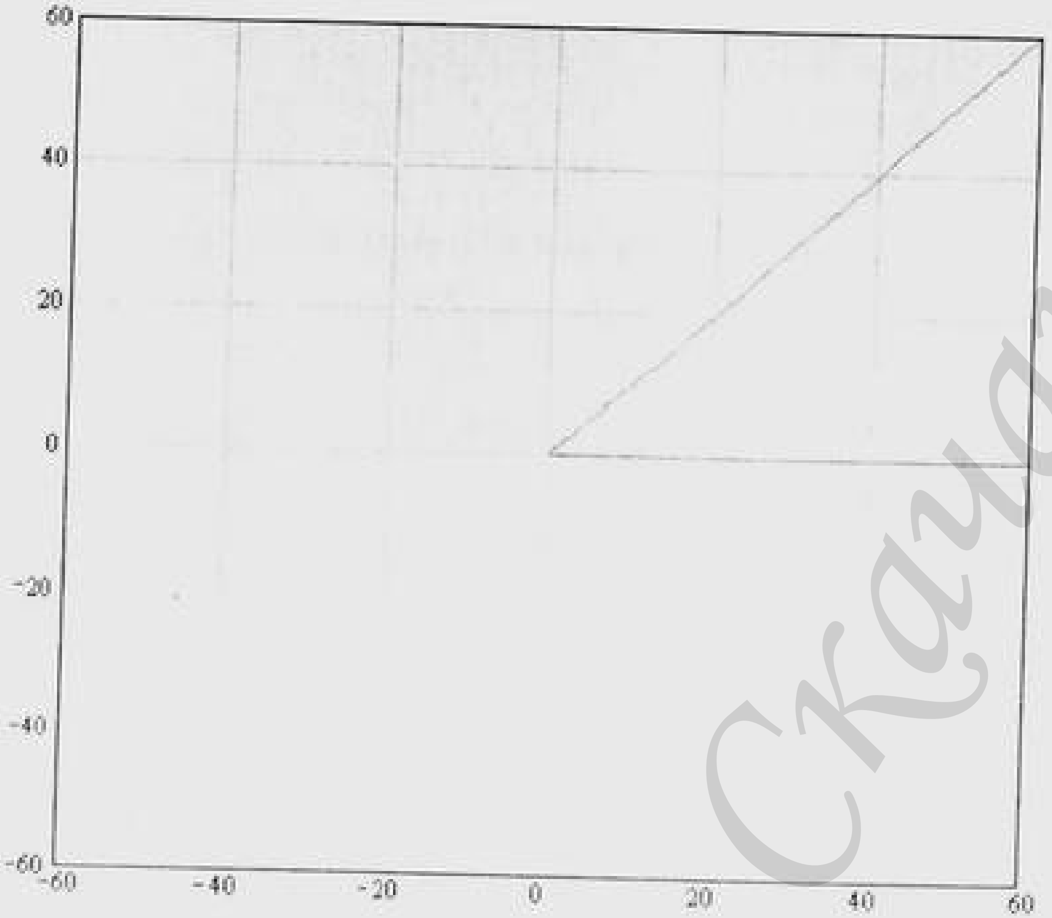
Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = e^z$; полоса $\alpha < y < \beta$, $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$.

Продемонстрируем на примере $\alpha = \pi/4$, $b = 2\pi$:



Каждая из границ полосы преобразуется в луч, исходящий из начала координат под углом α и β радиан соответственно. Заключенная между этими лучами область является отображением полосы:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\dots,n-1; z \ne 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$z = x + iy$ $\qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z - i}{z + i}$$

Аналитические функции

Функция $w = f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w = f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z \in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$