Министерство образования и науки Украины
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»
Факультет прикладной математики
Кафедра системного программирования и специализированых компьютерных систем

Расчётно-графическая работа

по дисциплине «Дискретная математика»

Выполнил: Сидоренко Владислав Олегович
Студент группы КВ-32

Вариант №43

Оценка:

г. Киев
2014

Задание 1

Решить уравнение $(A \backslash B) \backslash (C \backslash A\bar{B}) = A$, где $B = X\bar{A}$ в алгебре множеств. При решении использовать алгебраический метод. В качестве неизвестного принимается множество, обозначаемое символом X.

Решение:

$$(A \backslash B) \backslash (C \backslash A\bar{B}) = A$$

$$A\bar{B} \backslash (C(\bar{A} \cup B)) = A$$

$$A\bar{B} \backslash (C\bar{A} \cup CB) = A$$

$$A\bar{B} \cap \overline{C\bar{A}} \cap \overline{CB} = A$$

$$A\bar{B}(\bar{C} \cup A)(\bar{C} \cup \bar{B}) = A$$

$$A\bar{B}(\bar{C} \cup A\bar{B}) = A$$

$$\cancel{A\bar{B}\bar{C}} \cup A\bar{B} = A$$

Подставляем $B = X\bar{A}$:

$$A(\bar{X} \cup A) = A$$

$$\cancel{A\bar{X}} \cup A = A$$

$$A = A$$

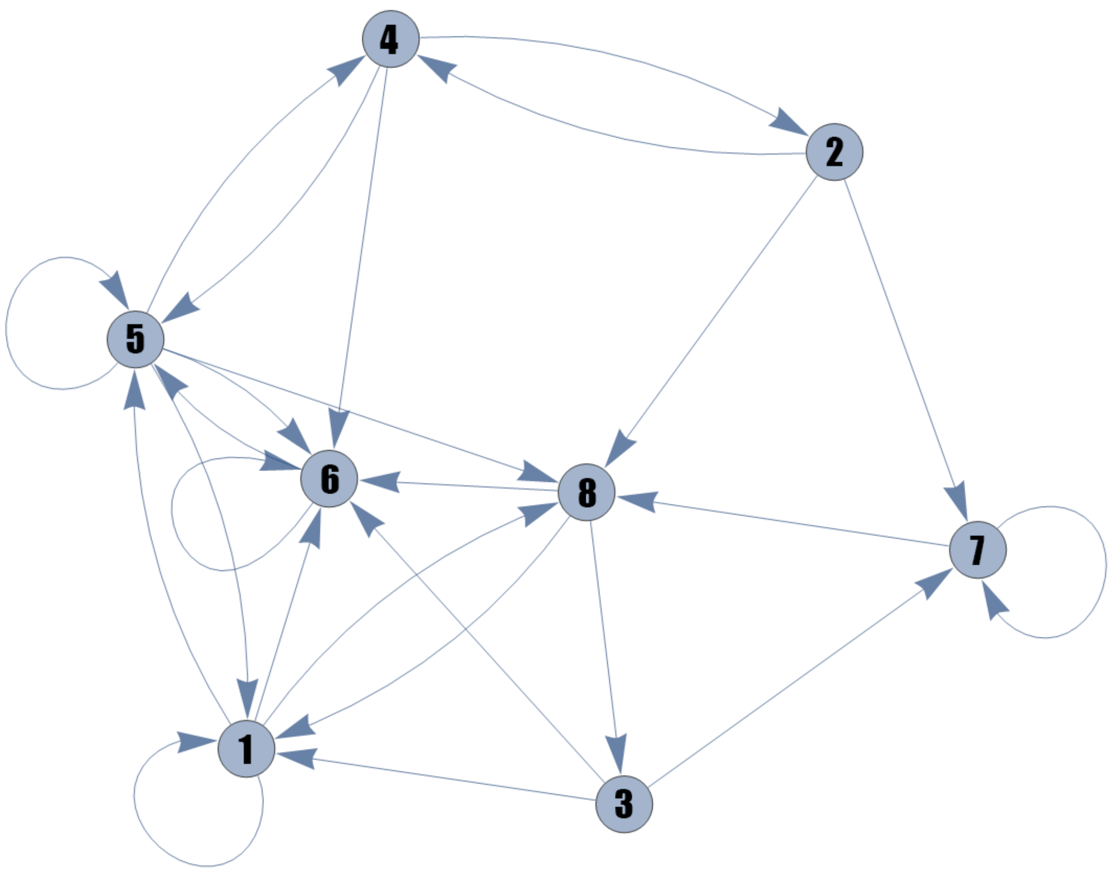
Ответ: $X = U$

Задание 2

Граф задан матрицей смежности:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1				1	1		1
2				1			1	1
3	1					1	1	
4		1			1	1		
5	1			1	1	1		1
6					1	1		
7							1	1
8	1		1			1		

Изобразим граф:



Для этого графа необходимо сделать следующее:

2.1. Выполнить разложение орграфа на компоненты сильной связности методом Мальгранжа-Томеску.

Дополняем матрицу столбцом σ_{x1} и строкой σ_{x1}^{-1}

	1	2	3	4	5	6	7	8	σ_{x1}
1	1				1	1		1	0
2				1			1	1	3
3	1					1	1		2
4		1			1	1			2
5	1			1	1	1		1	1
6					1	1			1
7							1	1	3
8	1		1			1			1
σ_{x1}^{-1}	0	2	1	2	1	2	2	1	

Записываем $\sigma_{x1} = \sigma_{x1}^{-1} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Отсюда $C(x_1) = \sigma_{x1} \cap \sigma_{x1}^{-1} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
То есть, весь граф является компонентой сильной связности.

2.2. Найти методами Магу все внутренне устойчивые множества вершин графа, все внешне устойчивые множества вершин графа, ядра графа.

2.2.1. Найдём внутренне-устойчивые множества

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1				1	1		1
2				1			1	1
3	1					1	1	
4		1			1	1		
5	1			1	1	1		1
6					1	1		
7							1	1
8	1		1			1		

Используем формализованный метод Магу:

$$(1 \vee 568)(2 \vee 478)(3 \vee 167)(4 \vee 256)\cancel{(5 \vee 1468)}(\mathbf{6} \vee \mathbf{5})(7 \vee 8)(8 \vee 136) =$$

$$= (1 \vee 568)(2 \vee 478)(3 \vee 167)(4 \vee 256)(5 \vee 6)(8 \vee 1367) =$$

$$= (15 \vee 16 \vee 568)(24 \vee 256 \vee 478 \vee \cancel{245678})(38 \vee 1367 \vee 1678) =$$

$$= (1245 \vee 1256 \vee 14578 \vee 1246 \vee \cancel{1256} \vee 14678 \vee \cancel{24568} \vee 2568 \vee 45678) \wedge$$
$$\wedge (38 \vee 1367 \vee 1678) =$$

$$= \overbrace{123458}^{\overline{S_1}} \vee \cancel{1234567} \vee \overbrace{\mathbf{1245678}}^{\overline{S_2}} \vee \cancel{123568} \vee \overbrace{123567}^{\overline{S_3}} \vee \overbrace{\mathbf{125678}}^{\overline{S_4}} \vee \overbrace{134578}^{\overline{S_5}} \vee \cancel{1345678} \vee$$
$$\vee \cancel{145678} \vee \overbrace{123468}^{\overline{S_6}} \vee \overbrace{123467}^{\overline{S_7}} \vee \cancel{124678} \vee \cancel{134678} \vee \cancel{134678} \vee \overbrace{\mathbf{14678}}^{\overline{S_8}} \vee \overbrace{\mathbf{23568}}^{\overline{S_9}} \vee$$
$$\vee \cancel{1235678} \vee \cancel{125678} \vee \overbrace{345678}^{\overline{S_{10}}} \vee \cancel{1345678} \vee \cancel{145678}$$

$S_1 = \{6,7\}$
$S_2 = \{3\}$
$S_3 = \{4,8\}$
$S_4 = \{3,4\}$
$S_5 = \{2,6\}$

$S_6 = \{5,7\}$
$S_7 = \{5,8\}$
$S_8 = \{2,3,5\}$
$S_9 = \{1,4,7\}$
$S_{10} = \{1,2\}$

Тогда получаем число внутренней устойчивости графа G:

$$\alpha(G) = \max_{i \in 1..10} |S_i| = 3$$

2.2.2. Найдём внешне-устойчивые множества

$$\cancel{(1 \vee 3 \vee 5 \vee 8)}(\mathbf{2} \vee \mathbf{4})(\mathbf{3} \vee \mathbf{8})\cancel{(4 \vee 2 \vee 5)}(5 \vee 1 \vee 6)\cancel{(6 \vee 1 \vee 3 \vee 4 \vee 5 \vee 8)}(7 \vee 2 \vee 3)(8 \vee 1 \vee 2 \vee 5 \vee 7) =$$

$$= (2 \vee 47 \vee 34)(\cancel{38} \vee 13 \vee 23 \vee 35 \vee 37 \vee \mathbf{8})(5 \vee 1 \vee 6) =$$

$$= (\cancel{123} \vee \mathbf{23} \vee \cancel{235} \vee \cancel{237} \vee 28 \vee 1347 \vee \cancel{2347} \vee \cancel{3457} \vee 347 \vee 378 \vee 134 \vee \cancel{234} \vee 345 \vee \cancel{347} \vee 348) \wedge$$
$$\wedge (5 \vee 1 \vee 6) =$$

$$= \overbrace{235}^{T_1} \vee \overbrace{123}^{T_2} \vee \overbrace{236}^{T_3} \vee \overbrace{258}^{T_4} \vee \overbrace{128}^{T_5} \vee \overbrace{268}^{T_6} \vee \cancel{13457} \vee \overbrace{\mathbf{1347}}^{T_7} \vee \cancel{13467} \vee \overbrace{3457}^{T_8} \vee \cancel{1347} \vee \overbrace{3467}^{T_9} \vee \overbrace{3578}^{T_{10}} \vee \overbrace{1378}^{T_{11}}$$
$$\vee \overbrace{3678}^{T_{12}} \vee \cancel{1345} \vee \overbrace{\mathbf{134}}^{T_{13}} \vee \cancel{1346} \vee \overbrace{\mathbf{345}}^{T_{14}} \vee \cancel{1345} \vee \cancel{3456} \vee \cancel{3458} \vee \cancel{1348} \vee \overbrace{3468}^{T_{15}}$$

$T_1 = \{2,3,5\}$
$T_2 = \{1,2,3\}$
$T_3 = \{2,3,6\}$
$T_4 = \{2,5,8\}$
$T_5 = \{1,2,8\}$

$T_6 = \{2,6,8\}$
$T_7 = \{1,3,4,7\}$
$T_8 = \{3,4,5,7\}$
$T_9 = \{3,4,6,7\}$
$T_{10} = \{3,5,7,8\}$

$T_{11} = \{1,3,7,8\}$
$T_{12} = \{3,6,7,8\}$
$T_{13} = \{1,3,4\}$
$T_{14} = \{3,4,5\}$
$T_{15} = \{3,4,6,8\}$

Получаем число внешней устойчивости графа G:

$$\beta(G) = \min_{i\epsilon 1..15} |T_i| = 3$$

2.2.3 Находим ядра графа:

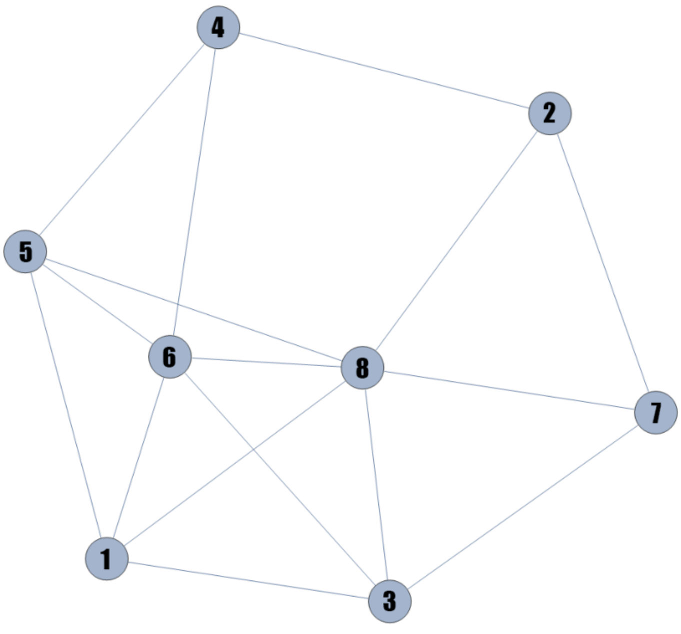
Ядро – такое подмножество вершин, которое одновременно является максимальным внутренне и минимальным внешне устойчивым.

Для данного графа это подмножество:

$$J_1 = S_8 = T_1 = \{2,3,5\}$$

2.3. Найти цикломатическое число и построить матрицу фундаментальных циклов графа. Построить три нефундаментальных цикла графа.

Преобразим заданный орграф в неограф. Изобразим его:



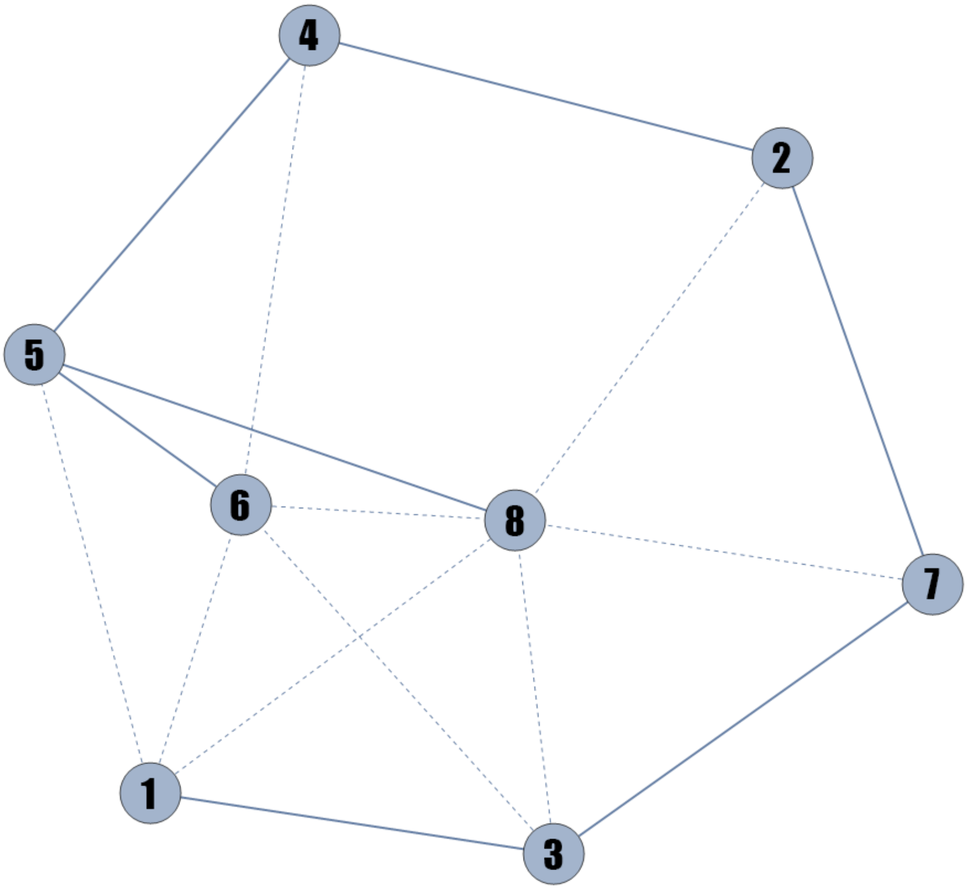
Составим матрицу смежности для данного неографа:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1			1		1	1		1
2				1			1	1
3	1					1	1	1
4		1			1	1		
5	1			1		1		1
6	1		1	1	1			1
7		1	1					1
8	1	1	1		1	1	1	

Найдём цикломатическое число данного графа (m – количество рёбер, n – количество вершин):

$$\nu(G) = m - n + 1 = 16 - 8 + 1 = 9$$

Построим остов графа:

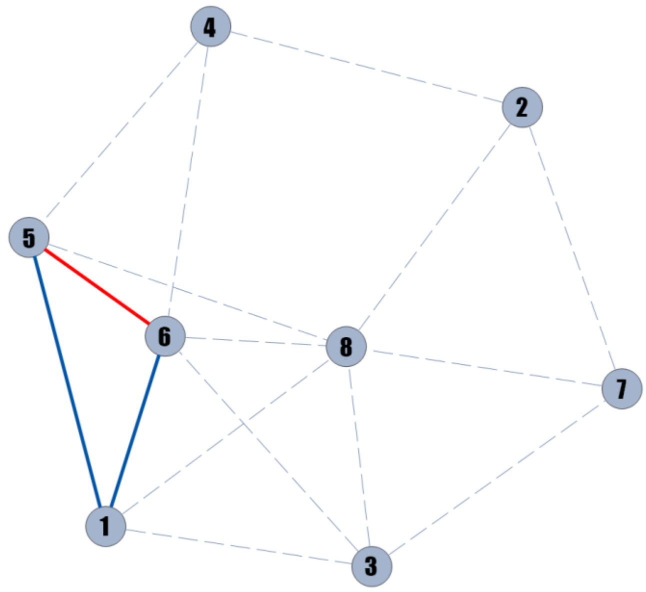


Построим матрицу фундаментальных циклов, назовем ребра, во избежание путаницы, двумя цифрами: номерами вершин, которые оно соединяет.

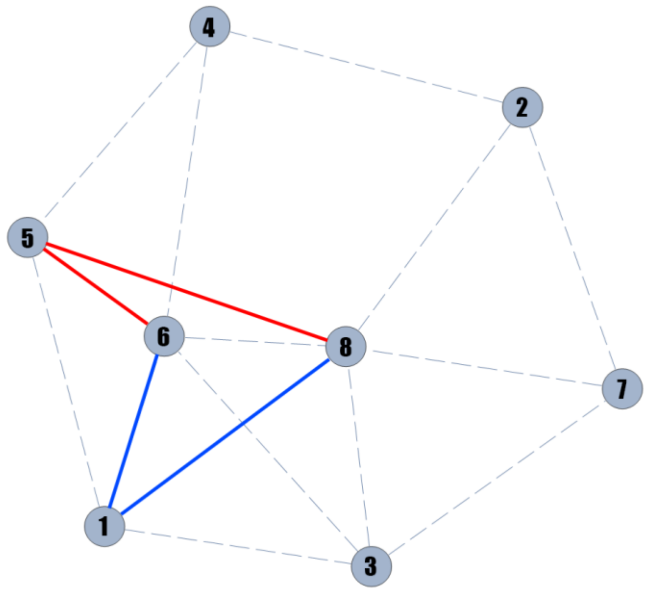
	15	16	18	28	36	38	46	68	78	13	27	24	37	45	56	58
ϕ_1	1									1	1	1	1	1		
ϕ_2		1								1	1	1	1	1	1	
ϕ_3			1							1	1	1	1	1		1
ϕ_4				1								1		1		1
ϕ_5					1						1	1	1	1	1	
ϕ_6						1					1	1	1	1		1
ϕ_7							1							1	1	
ϕ_8								1							1	1
ϕ_9									1		1	1		1		1

$\phi_1 \oplus \phi_2$	1	1													1	
$\phi_2 \oplus \phi_3$		1	1												1	1
$\phi_5 \oplus \phi_6$					1	1									1	1

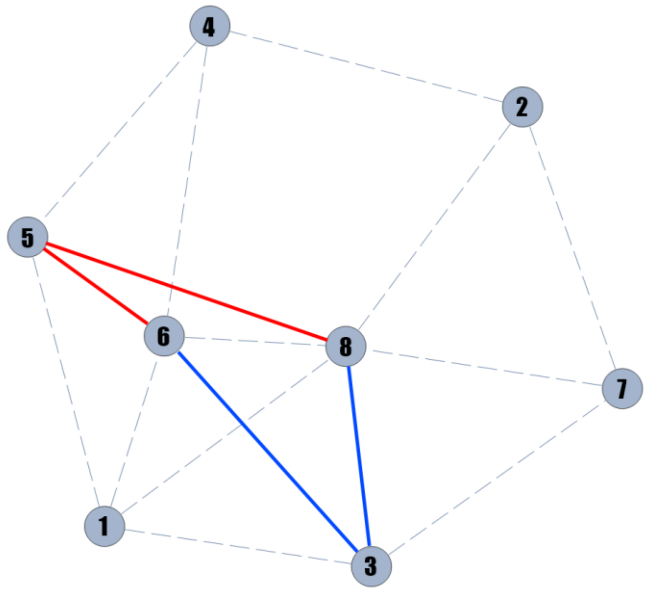
$\phi_1 + \phi_2$



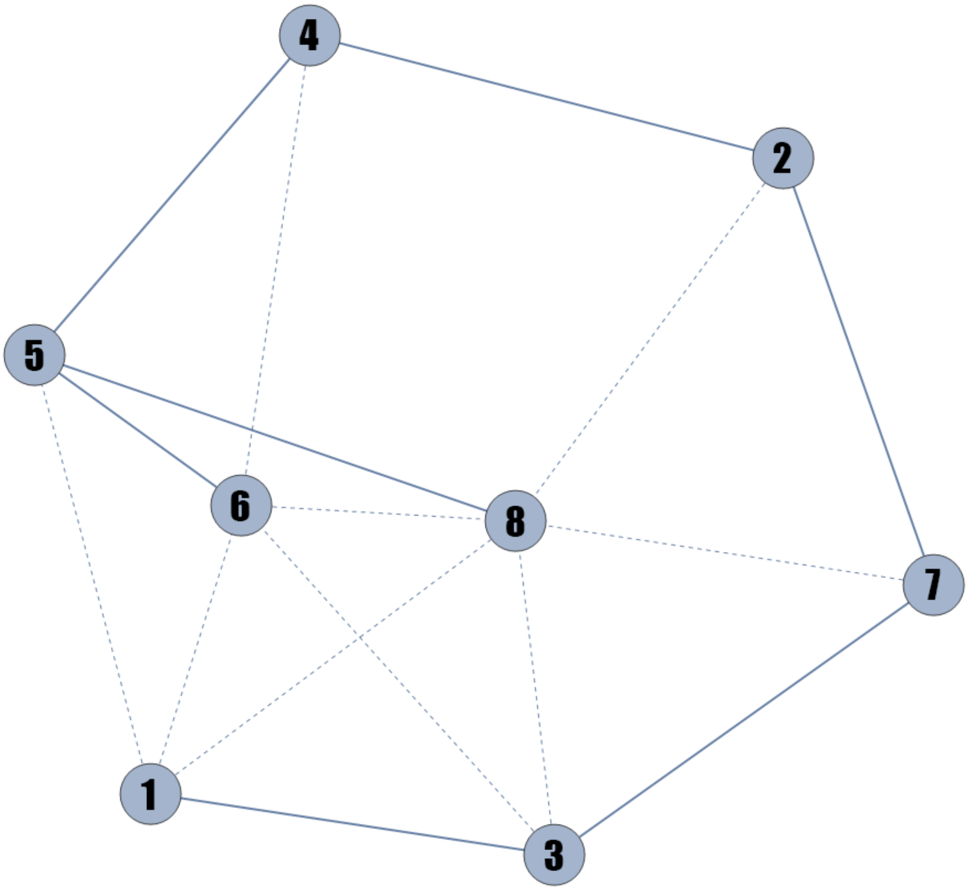
$\phi_2 + \phi_3$



$\phi_5 + \phi_6$



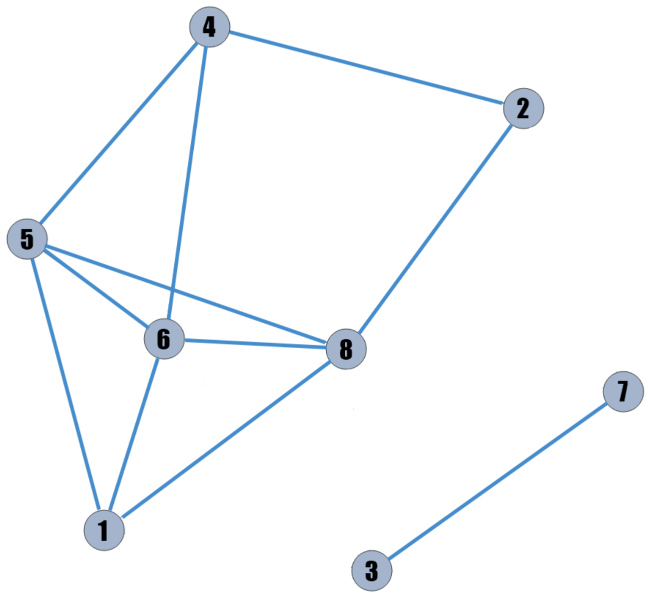
2.4. Построить матрицу фундаментальных разрезов графа. Построить три нефундаментальных разреза графа.



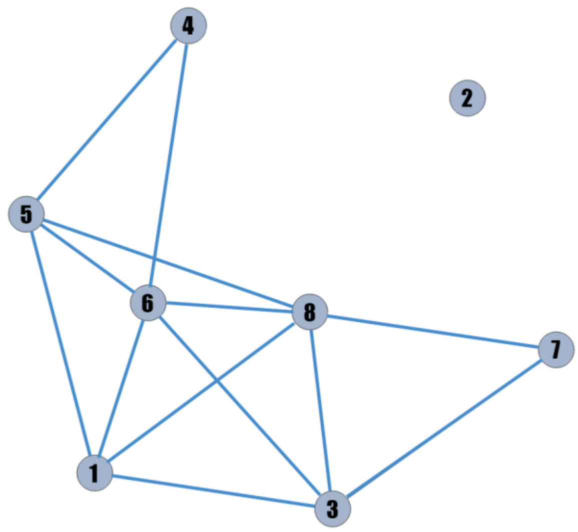
	15	16	18	28	36	38	46	68	78	13	27	24	37	45	56	58
k_1	1	1	1							1						
k_2	1	1	1		1	1			1		1					
k_3	1	1	1	1	1	1			1			1				
k_4	1	1	1		1	1							1			
k_5	1	1	1	1	1	1	1		1					1		
k_6		1			1		1	1							1	
k_7			1	1		1		1	1							1

$k_1 \oplus k_2$					1	1			1	1	1					
$k_2 \oplus k_3$				1							1	1				
$k_4 \oplus k_5$				1			1		1				1	1		

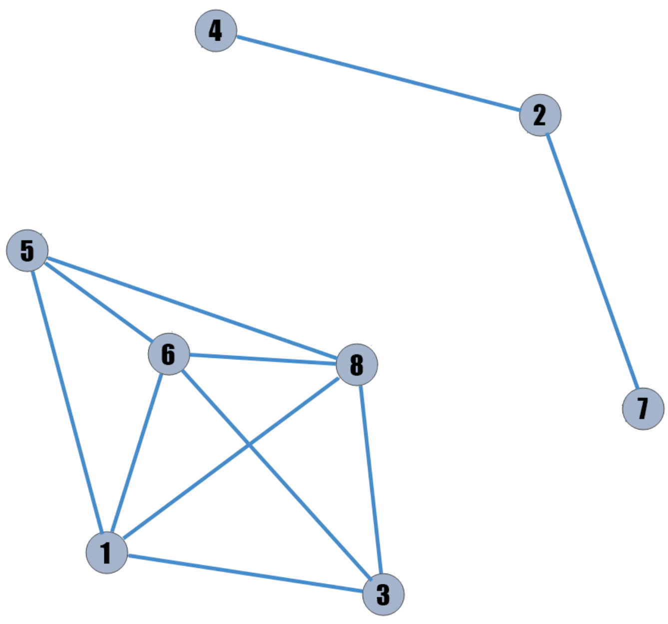
$k_1 + k_2$



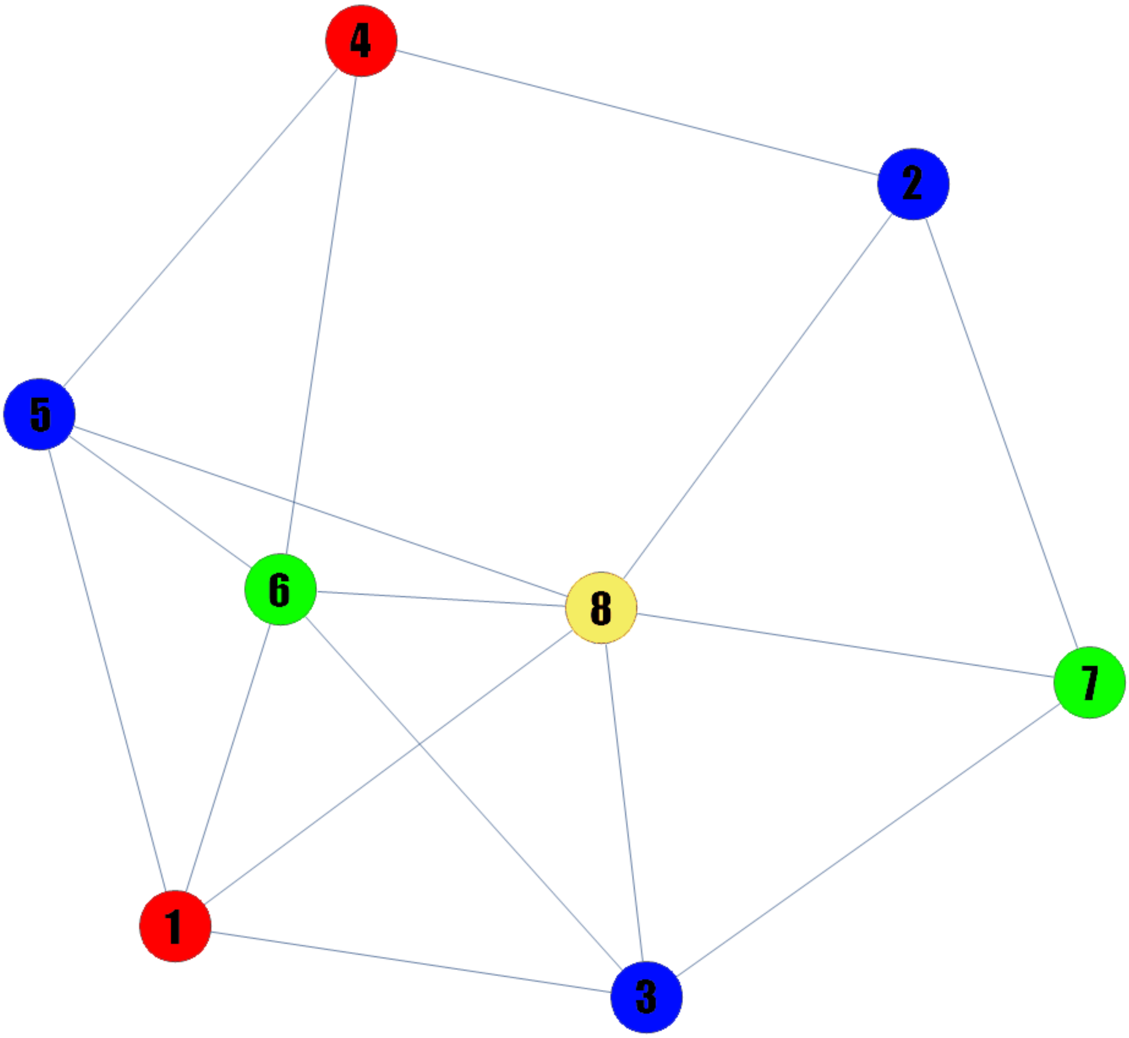
$k_2 + k_3$



$k_4 + k_5$



2.5. Произвести раскраску вершин графа, используя функцию Гранди.



При использовании функции Гранди нам понадобилось 4 цвета для раскраски. Это можно объяснить тем, что вершины 1,3,6,8 образовывают полный граф из 4х вершин. То есть, приблизительное хроматическое число графа G:

$$\gamma(G) = 4$$

2.6. Найти методом точного поиска хроматическое число графа.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1			1		1	1		1
2				1			1	1
3	1					1	1	1
4		1			1	1		
5	1			1		1		1
6	1		1	1	1			1
7		1	1					1
8	1	1	1		1	1	1	

Найдём внутренне-устойчивые множества для графа:

$$(1 \vee 3568)(2 \vee 478)(3 \vee 678)(4 \vee 56)(5 \vee 68)(7 \vee 8) =$$

$$= (15 \vee 168 \vee 3568)(24 \vee 256 \vee 478)(37 \vee 38 \vee 678) =$$

$$= (1245 \vee 1256 \vee 14578 \vee 12468 \vee \cancel{12568} \vee 14678 \vee \cancel{234568} \vee 23568 \vee 345678)(37 \vee 38 \vee 678) =$$

$$= \overbrace{123457}^{\Phi_1} \vee \overbrace{123458}^{\Phi_2} \vee \cancel{1245678} \vee \overbrace{123567}^{\Phi_3} \vee \cancel{123568} \vee \overbrace{125678}^{\Phi_4} \vee \cancel{134578} \vee \overbrace{134578}^{\Phi_5} \vee \cancel{145678} \vee \cancel{1234678}$$
$$\vee \overbrace{123468}^{\Phi_6} \vee \cancel{124678} \vee \cancel{134678} \vee \cancel{134678} \vee \overbrace{14678}^{\Phi_7} \vee \cancel{235678} \vee \overbrace{23568}^{\Phi_8} \vee \cancel{235678} \vee \cancel{345678}$$
$$\vee \cancel{345678} \vee \overbrace{345678}^{\Phi_9}$$

$1 \notin \Phi_8, \Phi_9$
$2 \notin \Phi_5, \Phi_7, \Phi_9$
$3 \notin \Phi_4, \Phi_7, \Phi_8$
$4 \notin \Phi_3, \Phi_4, \Phi_8$
$5 \notin \Phi_6, \Phi_7$
$6 \notin \Phi_1, \Phi_2, \Phi_5$
$7 \notin \Phi_2, \Phi_6, \Phi_8$
$8 \notin \Phi_1, \Phi_3$

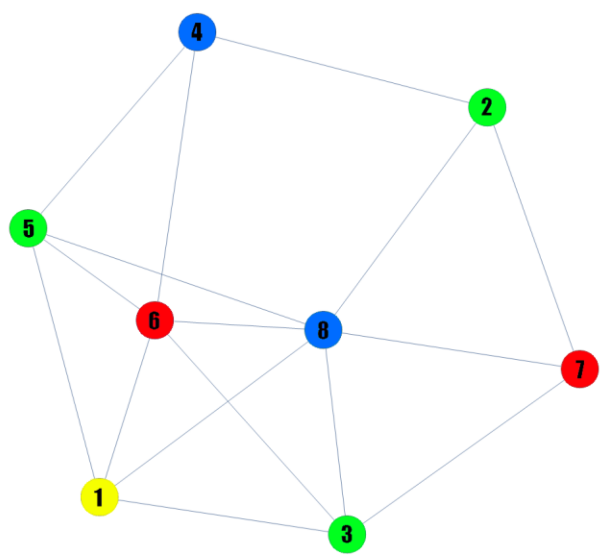
Записываем дальнейшее выражение в формализованном виде (число i означает y_i):

$$(8 \vee 9)(5 \vee 7 \vee 9)(4 \vee 7 \vee 8)(3 \vee 4 \vee 8)(6 \vee 7)(1 \vee 2 \vee 5)(2 \vee 6 \vee 8)(1 \vee 3) =$$

$$= (\mathbf{8} \vee 49 \vee 79)(56 \vee 69 \vee \mathbf{7})(14 \vee 18 \vee \mathbf{3})(16 \vee 18 \vee 56 \vee 58 \vee \mathbf{2}) = \cdots$$

Нетрудно заметить, что после конъюнкции этих двух скобок элементом, с минимальным количеством букв будет 2378, то есть $\psi = y_2 y_3 y_7 y_8$.
Тогда:

$\Phi_2 : S_1 = \{6,7\}$ – *красный цвет (0)*
$\Phi_3 : S_2 = \{4,8\}$ – *синий цвет (1)*
$\Phi_7 : S_3 = \{2,3,5\}$ – *зелёный цвет(2)*
$\Phi_8 : S_4 = \{1\}$ – *жёлтый цвет (3)*



То есть, точное хроматическое число данного графа $\gamma(G) = 4$.
Это подтверждает, что мы оптимально раскрасили граф функцией Гранди.

Задание 3

Решить задачу коммивояжера для данной матрицы расстояний

Для варианта 43 дана матрица расстояний:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	∞	14	25	20	18	9	30	16
2	8	∞	9	61	72	18	17	35
3	39	15	∞	21	27	18	94	27
4	42	65	31	∞	42	81	63	22
5	15	42	12	42	∞	36	18	27
6	12	25	10	72	28	∞	32	16
7	46	21	43	18	45	17	∞	22
8	52	28	50	30	27	31	16	∞

Решение:

Шаг 1.

- Приведём матрицу по строкам

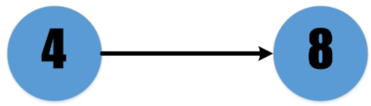
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	∞	5	16	11	9	0	21	7	9
2	0	∞	1	53	64	10	9	27	8
3	24	0	∞	6	12	3	79	12	15
4	20	33	9	∞	20	59	41	0	22
5	3	30	0	30	∞	24	6	15	12
6	2	15	0	62	18	∞	22	6	10
7	29	4	26	1	28	0	∞	5	17
8	36	12	34	14	11	15	0	∞	16

- Приведём матрицу по столбцам

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	∞	5	16	10	0	0	21	7
2	0	∞	1	52	55	10	9	27
3	24	0	∞	5	3	3	79	12
4	20	33	9	∞	11	59	41	0
5	3	30	0	29	∞	24	6	15
6	2	15	0	61	9	∞	22	6
7	29	4	26	0	19	0	∞	5
8	36	12	34	13	2	15	0	∞
	0	0	0	1	9	0	0	0

$$\sum = 109 + 10 = 119$$

Нулевые клетки	Число, вычитаемое из		Суммарный результат
	строки	столбца	
(1,5)	0	2	2
(1,6)	0	0	0
(2,1)	1	2	3
(3,2)	3	4	7
(4,8)	9	5	14
(5,3)	3	0	3
(6,3)	2	0	2
(7,4)	0	5	5
(7,6)	0	0	0
(8,7)	2	6	8



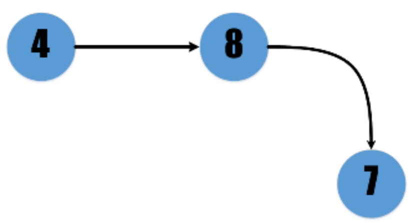
Шаг 2

- После удаления 4 строки и 8 столбца матрица приняла вид:

	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	5	16	10	0	0	21
2	0	∞	1	52	55	10	9
3	24	0	∞	5	3	3	79
5	3	30	0	29	∞	24	6
6	2	15	0	61	9	∞	22
7	29	4	26	0	19	0	∞
8	36	12	34	∞	2	15	0

- Приведение матрицы по строкам и столбцам невозможно, поэтому снова строим таблицу:

Нулевые клетки	Число, вычитаемое из		Суммарный результат
	строки	столбца	
(1,5)	0	2	2
(1,6)	0	0	0
(2,1)	1	2	3
(3,2)	3	4	7
(5,3)	3	0	3
(6,3)	2	0	2
(7,4)	0	5	5
(7,6)	0	0	0
(8,7)	2	6	8



Шаг 3

- После удаления 8 строки и 7 столбца матрица приняла такой вид. Нам необходимо поставить ∞ в ячейку (7,8) но такой ячейки нет. Поэтому мы ставим ∞ в ячейку (7,4) дабы избежать завершения пути на данном этапе не затронув остальные вершины.

	1	2	3	4	5	6
1	∞	5	16	10	0	0
2	0	∞	1	52	55	10
3	24	0	∞	5	3	3
5	3	30	0	29	∞	24
6	2	15	0	61	9	∞
7	29	4	26	∞	19	0

- Приведение по строкам невозможно, поэтому приводим по столбцам

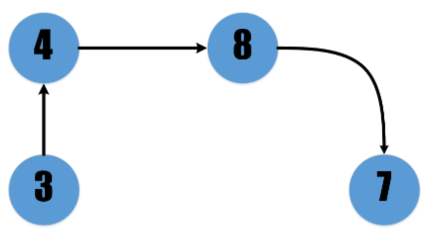
	1	2	3	4	5	6
1	∞	5	16	5	0	0
2	0	∞	1	47	55	10
3	24	0	∞	0	3	3
5	3	30	0	24	∞	24
6	2	15	0	56	9	∞
7	29	4	26	∞	19	0

0	0	0	5	0	0

$$\sum = 119 + 5 = 124$$

- Строим таблицу

Нулевые клетки	Число, вычитаемое из		Суммарный результат
	строки	столбца	
(1,5)	0	3	3
(1,6)	0	0	0
(2,1)	1	2	3
(3,2)	0	4	4
(3,4)	0	5	5
(5,3)	3	0	3
(6,3)	2	0	2
(7,6)	4	0	4



Шаг 4

- После удаления 3 строки и 4 столбца матрица примет такой вид. Нам необходимо поставить ∞ в ячейку (4,3), но такой нет. Поэтому ставим ∞ в ячейку (7,3), чтобы не допустить завершения пути на данном этапе.

	1	2	3	5	6
1	∞	5	16	0	0
2	0	∞	1	55	10
5	3	30	0	∞	24
6	2	15	0	9	∞
7	29	4	∞	19	0

- Приведение по строкам невозможно, поэтому приводим по столбцам

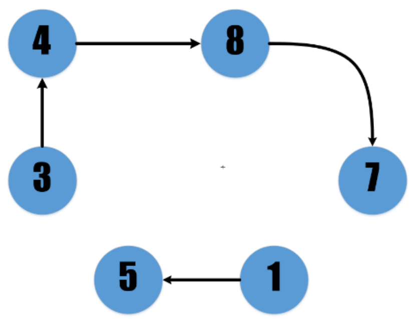
	1	2	3	5	6
1	∞	1	16	0	0
2	0	∞	1	55	10
5	3	26	0	∞	24
6	2	11	0	9	∞
7	29	0	∞	19	0

0	4	0	0	0

$$\sum = 124 + 4 = 128$$

- Строим таблицу

Нулевые клетки	Число, вычитаемое из		Суммарный результат
	строки	столбца	
(1,5)	0	9	9
(1,6)	0	0	0
(2,1)	1	2	3
(5,3)	3	0	3
(6,3)	2	0	2
(7,2)	0	1	1
(7,6)	0	0	0



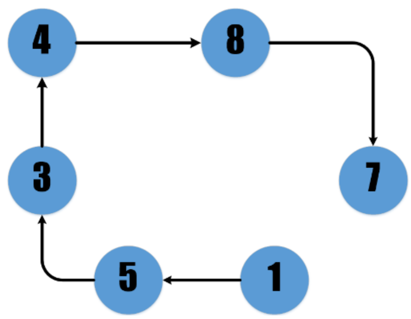
Шаг 5

- После удаления 1 строки и 5 столбца матрица примет такой вид. Ставим ∞ в (5,1)

	1	2	3	6
2	0	∞	1	10
5	∞	26	0	24
6	2	11	0	∞
7	29	0	∞	0

- Приведение по строкам и столбцам невозможно. Поэтому строим таблицу

Нулевые клетки	Число, вычитаемое из		Суммарный результат
	строки	столбца	
(2,1)	1	2	3
(5,3)	24	0	24
(6,3)	2	0	0
(7,2)	0	11	11
(7,6)	0	10	10



Шаг 6

- После удаления 5 строки и 3 столбца матрица примет такой вид. Так как мы не можем поставить ∞ в ячейку (3,5), то мы ставим ∞ в ячейку (7,1)

	1	2	6
2	0	∞	10
6	2	11	∞
7	∞	0	0

- Приводим матрицу по строкам. Приведение по столбцам невозможно.

	1	2	6	
2	0	∞	10	0
6	0	9	∞	2
7	∞	0	0	0

$$\sum = 128 + 2 = 130$$

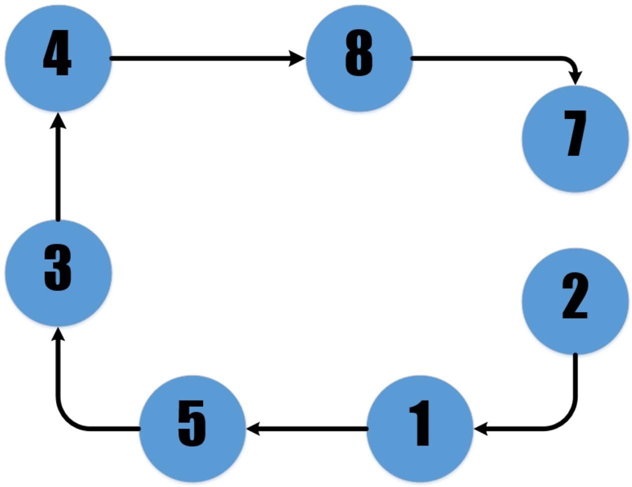
- Строим таблицу

Нулевые клетки	Число, вычитаемое из		Суммарный результат
	строки	столбца	
(2,1)	10	0	10
(6,1)	9	0	9
(7,2)	0	9	9
(7,6)	0	10	10

Далее решение разветвляется:

Решение 1: Выбираем путь из 2 в 1

Шаг 7.1.



- После удаления 2 строки и 1 столбца матрица примет такой вид. Ставим ∞ в (7,2)

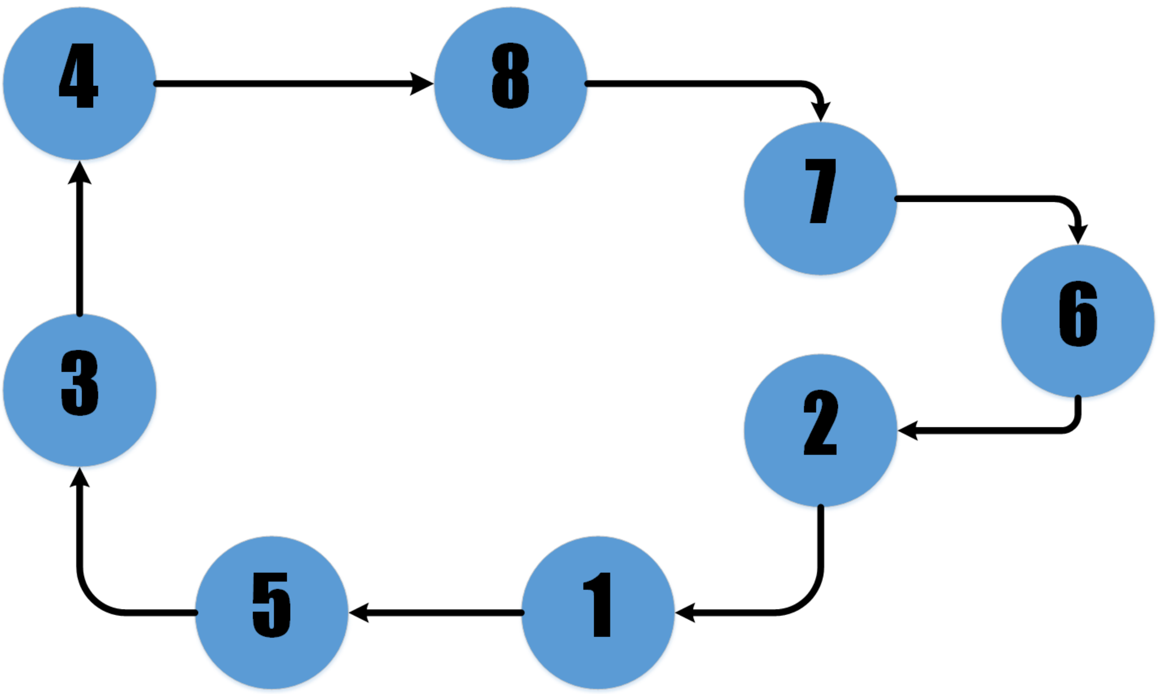
	2	6
6	9	∞
7	∞	0

- Приводим по строкам:

	2	6	
6	0	∞	9
7	∞	0	0

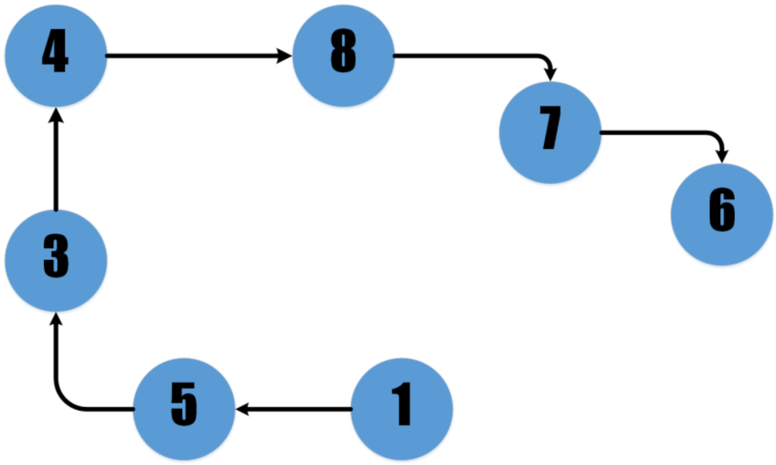
$$\sum = 130 + 9 = 139$$

- Оставшиеся клетки равноценны. На их основе добавляем недостающие дуги.



Решение 2: Выбираем путь из 7 в 6

Шаг 7.2.



- После удаления 7 строки и 6 столбца матрица примет такой вид. Ставим ∞ в (6,1)

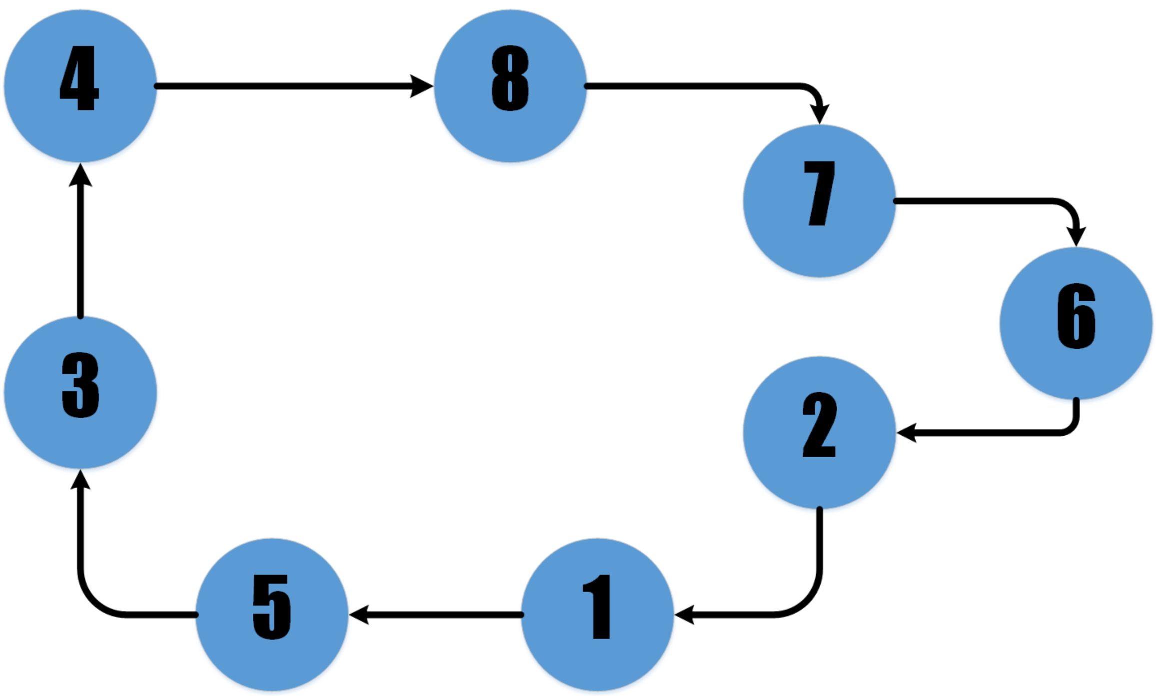
	1	2
2	0	∞
6	∞	9

- Приводим по строкам

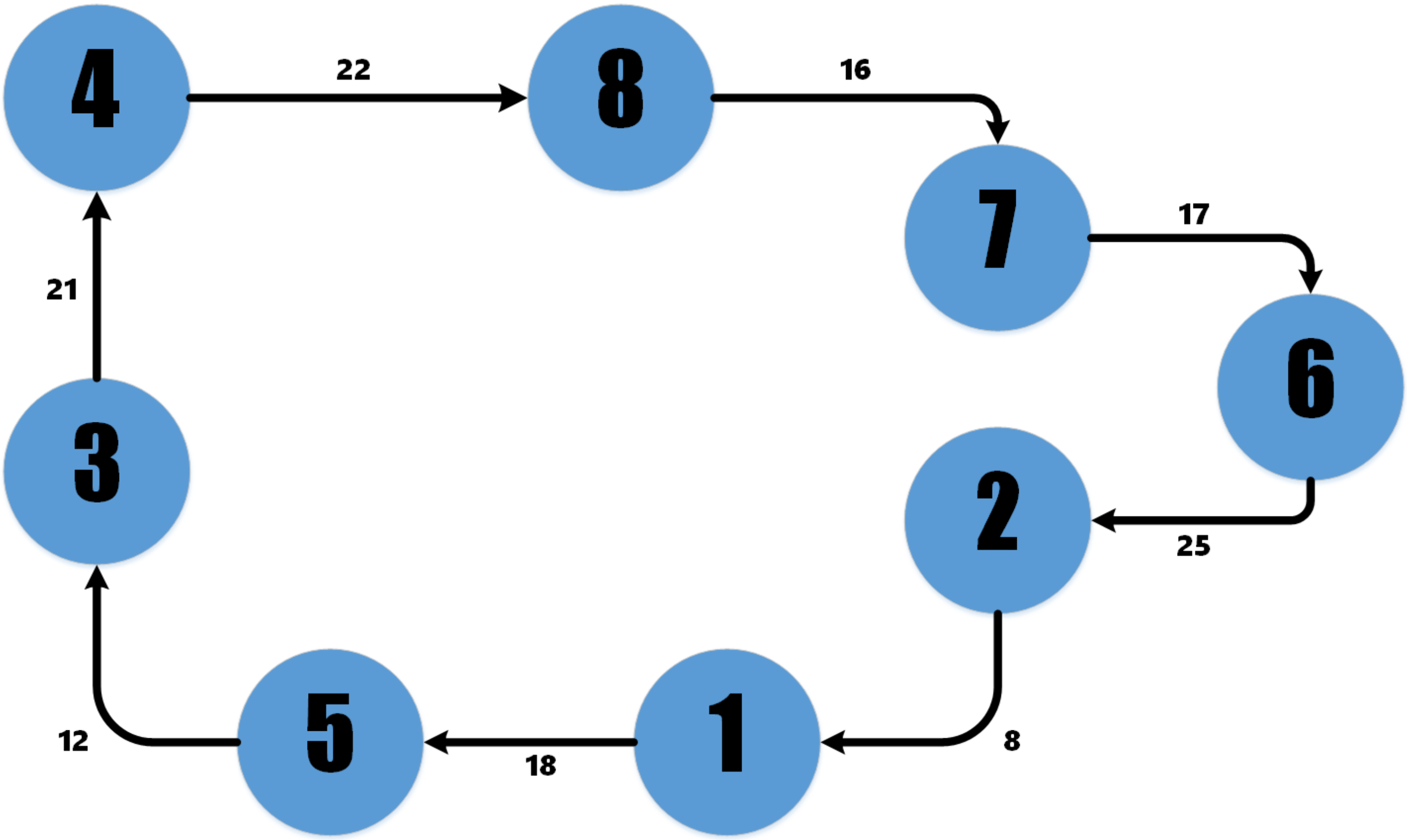
	1	2	
2	0	∞	0
6	∞	0	9

$$\sum = 130 + 9 = 139$$

- Оставшиеся клетки равноценны. На их основе добавляем недостающие дуги.



Результат:



На рёбрах указаны расстояния между вершинами графа. Проверяем результат:

$$\sum = \mathbf{22 + 16 + 17 + 25 + 8 + 18 + 12 + 21 = 139}$$