Екзаменаційний білет № 3

I. Теоретична частина

1. Обчислення значення поліному за схемою Горнера.

2. Обчислення поліноміальних функцій. Схема Горнера.

Нехай маємо поліном *n*–го ступеня

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + . . . + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

с дійсними коефіцієнтами a_k $(k = 0, 1, . . . , n)$. Припустимо, що треба знайти значення цього поліному при $x = \xi$:

$$P(\xi) = a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} + . . . + a_{n-1} \xi + a_n \qquad (2)$$

Обчислення $P(\xi)$ зручніше за все здійснювати наступним чином. Надамо формулу (2) у вигляді

$$P(\xi) = (. . . (((a_0 \xi + a_1) \xi + a_2) \xi + a_3) \xi + . . . + a_{m-1}) \xi + a_0)$$

Звідси, послідовно обчислюючи числа

$$b_0 = a_0$$

$$b_1 = a_1 + b_0 \xi$$

$$b_2 = a_2 + b_1 \xi \qquad (3)$$

$$. . .$$

$$b_n = a_n + b_{n-1} \xi$$

знаходимо

$$b_n = P(\xi)$$

Коефіцієнти $b_0, b_1, \ldots, b_n$ є коефіцієнтами поліному $Q(x)$, отриманого в результаті ділення поліному $P(\xi)$ на двочлен $x - \xi$. Отже, коефіцієнти (3) дозволяють без виконання ділення як такого отримати частку, а також залишок $P(\xi)$ від ділення $P(x)$ на $x - \xi$. На практиці обчислення виконуються за наступною схемою, яку називають схемою Горнера:

$$\begin{array}{rllll} & a_0 & a_1 & a_2 \; \ldots & a_n \\ + & & b_0\xi & b_1\xi \; \ldots & b_{n-1}\xi \\ \hline & b_0 & b_1 & b_2 \; \ldots & b_n = P(\xi) \end{array}$$

Приклад 1.

Обчислити значення поліному

$P(x) = 3x^2 + 2x^2 - 5x + 7$ при $x = 3$

$$\begin{array}{rllll} & 3 & 2 & -5 & 7 \\ + & & 9 & 33 & 84 \\ \hline & 3 & 12 & 28 & 91 = P(3) \end{array}$$

Зауваження. Користуючись схемою Горнера можна знайти межі дійсних коренів поліному $P(x)$.

Описание алгоритма [п

Задан многочлен $P(x)$:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Пусть требуется вычислить значение данного многочлена при фиксированном значении $x = x_0$. Представим многочлен $P(x)$ в следующем виде:

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots x(a_{n-1} + a_n x)\ldots)).$$

Определим следующую последовательность:

$$b_n = a_n$$
$$b_{n-1} = a_{n-1} + b_n x$$
...
$$b_i = a_i + b_{i+1} x$$
...
$$b_0 = a_0 + b_1 x$$

Искомое значение $P(x_0) = b_0$. Покажем, что это так.

В полученную форму записи $P(x)$ подставим $x = x_0$ и будем вычислять значение выражения, начиная со внутренних скобок. Для этого будем заменять подвыражения через b_i:

$$\begin{aligned} P(x_0) &= a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + \cdots x_0(a_{n-1} + a_n x_0)\ldots)) \\ &= a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + \cdots x_0(b_{n-1})\ldots)) \\ &\ \vdots \\ &= a_0 + x_0(b_1) \\ &= b_0 \end{aligned}$$

Использование схемы Горнера для деления многочлена на бином [п

При делении многочлена $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ на $x - c$ получается многочлен $b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2} x + b_{n-1}$ с остатком b_n.

При этом коэффициенты результирующего многочлена удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$b_0 = a_0,\ b_k = a_k + c b_{k-1}.$$

Таким же образом можно определить кратность корней (использовать схему Горнера для нового полинома). Так же схему можно использовать для нахождения коэффициентов при разложении полинома по степеням $x - c$: $P(x) = A_0 + A_1(x-c) + A_2(x-c)^2 + \cdots + A_n(x-c)^n$

2. Розв'язок задачі Коши для систем ЗДУ першого порядку.

2. Задача Коші.

Звичайним диференціальним рівнянням (ДР) порядку *r* називається рівняння

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^r(x)) = 0$$

Розв'язання ДР полягає у відшуканні функцій $y(x)$, які відповідають цьому рівнянню для всіх значень x у визначеному скінченому чи нескінченному інтервалі (a,b). Загальний розв'язок при цьому має вигляд

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_r),$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_r$ - константи інтегрування. Кожен вибір цих констант дає частинний розв'язок.

Задача Коші зводиться до знаходження частинного розв'язку, який відповідає r початковим умовам

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(r-1)}(x_0) = y_0^{(r-1)},$$

за якими обчислюються r сталих $C_1, C_2, ..., C_r$.

Чисельний розв'язок задачі Коші отримують у вигляді таблиці наближених значень функції $y(x)$.

Розрізняють дві групи чисельних методів розв'язання задачі Коші.

1. Однокрокові методи (методи Рунге-Кутта), у яких для обчислення функції $y(x)$ у черговій точці потрібна інформація тільки про попередній крок.

2. Багатокрокові методи, у яких для визначення чергового значення $y(x)$ потрібна інформація більш ніж про одну з попередніх точок. До них належать методи Адамса.

3. Однокрокові методи розв'язання задачі Коші - методи Рунге-Кутта.

Нехай треба розв'язати задачу Коші для нелінійного ДР першого порядку, розв'язаний відносно похідної

$$y'(x) = f(x, y) \qquad (1)$$

з початковими умовами (ПУ)

$$y(x_0) = y_0 .$$

Однокрокові методи характеризуються наступним:

1) Однокроковими вони є тому, що для обчислення y_{k+1}, необхідна інформація лише про точку ($y_k, x_к$).
2) Розв'язок, отриманий за допомогою цих методів, збігається з рядом Тейлора до членів порядку h^r.
3) Вони не вимагають обчислення *похідних* функції *f(x,y)*, а лише обчислення самої функції *f(x,y)*.

Наближений розв'язок задачі Коші будемо шукати на кінцевій множині точок відрізку [x_0, $x_0 + l$], яке зветься *сіткою*. Оберемо сітку $\omega_h = \{x_j\}$, $j = 0, 1, \ldots, N$, де

$$x_j = x_j + jh,\ h = l / N,\ N \text{ – позитивне ціле.}$$

3.1 Метод Ейлера

Розглянемо рівняння

$$y' = y$$

Його розв'язком є

$$y = Ce^x$$

Оскільки рівняння має вид

$$y'(x) = f(x, y)$$

маємо можливість обчислювати похідну інтегральної кривої в кожній із точок (x,y). Тоді грубий розв'язок ДР можна знайти в наступний спосіб. У початковий момент маємо лише одну точку (x_0 , y_0)

$$y' = f(x_0 , y_0)$$

Побудуємо дотичну у точці (x_0 , y_0) і перейдемо вздовж неї на малу відстань h, тобто обчислимо

$$y' = f(x_1 , y_1),$$

де $x_1 = x_0 + h,\ y_1 = y_0 + hy'$.

Продовжуючи цей процес для наступних точок отримаємо *ламану Ейлера*. Доведено, що якщо $\varphi(x)$ є ламана Ейлера, а $\varphi^*(x)$ – точний розв'язок рівняння (1), то

$$\lim_{h\to 0} |\varphi(x) - \varphi^*(x)| = 0$$

Найпростіші методи Рунга-Кутта можуть бути отримані з наочних міркувань.

Рівнянням прямої L є

$$y_{k+1} = y_k + y'_k(x_{k+1} - x_k) = y_k + h\, y'_k$$

але $y'_k = f(x_k, y_k)$. Отже, маємо

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k);$$

$$x_{k+1} = x_k + h,\quad k = 0,1,2,\ldots, \qquad (2),$$

це і є *метод Ейлера* для розв'язання задачі Коші. У відсутність похибки округлення, локальна похибка (тобто похибка на кроці) методу є $O(h^2)$. Глобальна (на інтервалі) похибка методу Ейлера становить $O(h)$.

Приклад 1.

На відрізку $[0;1]$ скласти таблицю значень розв'язків

рівняння

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

з ПУ $y(0)=1$ і кроком таблиці $h=0{,}2$.

У цьому рівнянні маємо

$$f(x,y)\equiv y-2x/y\ .$$

Через те що $x_0=0$ і $y_0=1$, для y_1 маємо

$$y_1=y_0+h(y_0-x_0/y_0)=1+0{,}2\cdot 1=1{,}2\ ;$$

$$x_1=x_0+h=0+0{,}2=0{,}2\ ;$$

$$y_2=y_1+h(y_1-x_1/y_1)=1{,}3733\ ;$$

$x_2=x_1+h=0{,}4$ і т.д.

3.2. Метод Ейлера-Коші.

У цьому методі знаходиться середній тангенс кута нахилу дотичної для двох точок (x_k, y_k) та (x_{k+1}, y^*_{k+1}).

Тобто

$$y^*_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k);$$

$$y_{k+1} = y_k + h[(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^*_{k+1})) / 2]; \qquad (3)$$

$$x_{k+1}=x_k+h\ ,\quad k=0,1,2,\ldots\ ,$$

Локальна похибка методу становить $O(h^3)$, а глобальна - $O(h^2)$. Неважко помітити, що формула (3) співпадає з рядом Тейлора до h^2 включно:

$$y(k) = y_0 + h\, y'_0 + h\, y'_0 + h^2\, y'_0 / 2!$$

$$y''_0 = (y'_1 + y'_0) / h,$$

таким чином

$$y(k) = y_0 + h\,y'_0 + h\,y'_0 + h^2\,(y'_1 + y'_0) / h = y_0 + h(y'_1 + y'_0) / 2$$

Удосконалений метод Ейлера.

$$y_{k+1/2} = y_k + h/2\, f(x_k, y_k);$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k + h/2,\, y_{k+1/2}); \qquad (4)$$

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

3.3. Метод Рунге-Кутта 4-го порядку точності. У цьому методі для переходу від точки ($x_к$, y_k) до точки (x_{k+1}, y_{k+1}) спочатку обчислюють

$$k_1 = hf(x_k, y_k);$$

$$k_2 = hf(x_k + h/2,\, y_k + k_1/2);$$

$$k_3 = hf(x_k + h/2,\, y_k + k_2/2);$$

$$k_4 = hf(x_k + h,\, y_k + k_3).$$

Потім приймають

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \quad x_{k+1} = x_k + h. \qquad (5)$$

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

Перехід від точки (x_{k+1}, y_{k+1}) до точки (x_{k+2}, y_{k+2}) виконується аналогічно. Локальна похибка методу становить $O(h^5)$, а глобальна - $O(h^4)$.

Оцінка похибки. Важко дати загальну аналітичну оцінку похибки методів Рунге-Кутта залежно від кроку h. Для методів четвертого порядку точності обчислюється відхилення

$$\theta = \frac{|k_2 - k_3|}{|k_1 - k_2|}.$$

Крок h вважається прийнятним, якщо величина не перевищує кількох сотих (до 0,05).

4. Принцип Рунге.

Оскільки не існує прийнятної аналітичної оцінки точності однокрокових методів, для оцінки кроку *h*, який забезпечив би потрібну точність використовують так званий принцип Рунге, або метод подвійного перерахунку, який дозволяє виконати автоматичне коригування кроку h. Використання цього принципу зводиться до того, що спочатку в точку x_i приходять з кроком *h*, а потім – з кроком *2h*. Похибка в точці x_i при цьому оцінюється за формулою

$$\frac{|y_i^h - y_i^{2h}|}{2^r - 1} \le \varepsilon, \qquad (6)$$

де r - порядок методу. Для методів Ейлера, Ейлера-Коші та Рунге-Кутта 4-го порядку точності r доівнює 1, 2 та 4 відповідно.

Якщо нерівність (6) не задовольняється, то значення обчислюється з кроком $h/2$ і т. д. При цьому можна знайти уточнений за *Річардсоном* розв'язок у точці x_i:

$$y_i^* = \frac{2^r y_i^h - y_i^{2h}}{2^r - 1},$$

що має похибку $O(h^{r+1})$, а не $O(h^r)$.

Для вибору початкового кроку *h* користуються наступним співвідношенням

$h_0 = 1/\sqrt[r]{\varepsilon}$,

де ε – точність, яку треба забезпечити.

II. Практична частина

Побудувати таблицю інтегральної кривої звичайного диференціального рівняння

$$x*y'' + 2*y' + x*y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0, \; x\in[0, 0.05]$$

методом Ейлера з кроком h=0.01.