Лекція 1

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРІВ

1.1. Векторні і скалярні величини

Відомо такі два типи величин:

1) величини, для визначення яких досить задати число. Ці величини називаються **скалярними** (наприклад, довжина, густина, температура);

2) величини, для визначення яких недостатньо знати тільки число. Ці величини називаються **векторними** або просто **векторами.** Далі під вектором будемо розуміти напрямлений відрізок. Векторними величинами є, наприклад, сила, швидкість, прискорення.

Розрізняють вектори **зв'язані, ковзні** і **вільні.**

Зв'язаний вектор — це величина, яка задається числом, точкою прикладання, лінією дії та напрямом (наприклад, сила).

Якщо величина визначається числом, лінією дії та напрямом, то така величина називається **ковзним вектором** (наприклад, кутова швидкість).

Вільним вектором називається величина, яка визначається числом і напрямом, а лінія дії і точка прикладання можуть бути довільними.

Далі розглядатимемо лише вільні вектори і називатимемо їх просто векторами.

Число визначає довжину вектора, а напрям визначає ту пряму, на якій розміщено вектор (пряма A_1C, рис. 1.1). Для напряму вектора достатньо задати кути, які складає пряма A_1C з осями координат, вони позначаються через α, β, γ. Косинуси цих кутів називаються **напрямними косинусами.**

Для побудови кутів α, β, γ досить із довільної точки A на прямій A_1C побудувати осі AX_1, AY_1, AZ_1, паралельні OX, OY, OZ.

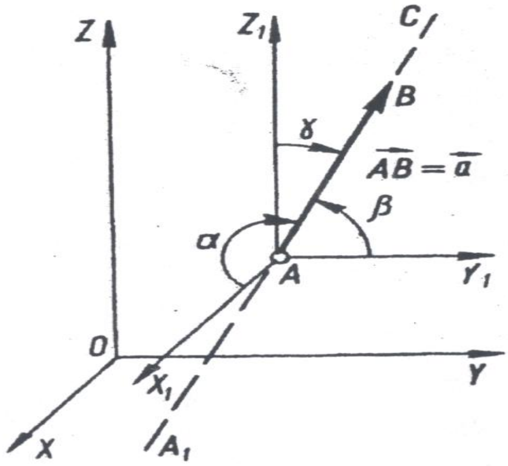


Рис. 1.1. Напрямні косинуси вільних векторів

Для побудови вектора на вказаній прямій A_1C обирається точка A, яка приймається за початок вектора. Число, яке виражає довжину вектора, дає змогу знайти його кінець. Для цього із точки A у заданому напрямі A_1C відкладаємо відрізок AB, довжина якого дорівнює довжині вектора. Кінець цього відрізка і є кінцем вектора. Побудований вектор позначається так: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Положення точки B визначено однозначно, тому що кути α, β, γ мають бути побудовані так, щоб при повороті осей OX, OY, OZ до прямої A_1C напрями вектора і осей збігалися. При цьому не враховується напрям повороту осі до вектора чи вектора до осі. Дійсно, хоч кути і будуть різними, але

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, X}\right) = \cos\left(\widehat{X, \vec{a}}\right) = \cos\alpha,$$
$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, Y}\right) = \cos\left(\widehat{Y, \vec{a}}\right) = \cos\beta,$$
$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, Z}\right) = \cos\left(\widehat{Z, \vec{a}}\right) = \cos\gamma.$$

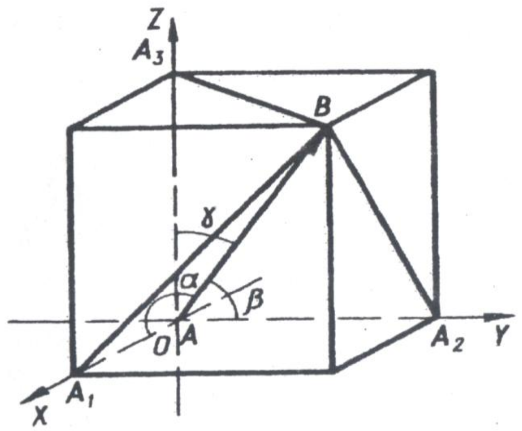


Рис. 1.2. Напрямні косинуси вектора та їх властивість

Таким чином, побудовано вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Початок вектора можна сумістити з початком координат. Тоді $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ (рис. 1.2). Якщо прийняти *OB* за діагональ паралелепіпеда і побудувати його, то за теоремою про квадрат діагоналі паралелепіпеда знайдемо

$$|OB|^2 = |OA_1|^2 + |OA_2|^2 + |OA_3|^2 .$$

Із прямокутних трикутників OA_1B, OA_2B, OA_3B знаходимо відповідно $|OA_1| = |OB|\cos\alpha$; $|OA_2| = |OB|\cos\beta$; $|OA_3| = |OB|\cos\gamma$. Підставимо знайдені дані у рівність для *OB* і поділимо її на $|OB|^2$, тоді

$$1 = cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma .$$

Таким чином, із трьох кутів α, β, γ лише два кути є незалежними. Вектор, початок якого збігається з початком координат, позначають $\overrightarrow{OB}$ або $\vec{r}$.

Довжиною або **модулем вектора** $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка *AB* і позначають $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$.

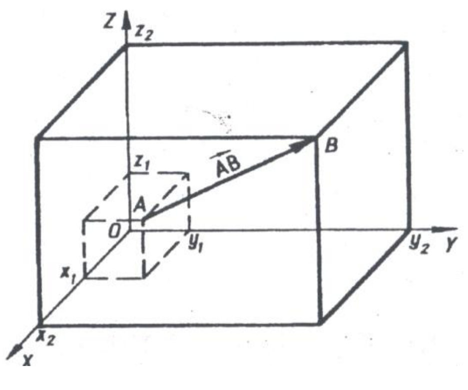
Два вектори називають **рівними між собою,** якщо рівні між собою їхні довжини (модулі), вони паралельні, тобто лежать на одній прямій або на паралельних прямих, і однаково напрямлені. Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називають **нульовим** або **нуль-вектором** і позначають $\vec{0}$.

1.2. Визначення вектора за координатами

Розглянутий спосіб описання вектора грунтується на наочності і узагальненню на випадок *n*-вимірного простору не піддається. Тому розглянемо інший спосіб описання вектора. Візьмемо тривимірний простір *XYZ*. Нехай у ньому задано вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Через початок і кінець цього вектора проведемо площини, паралельні координатним площинам. Координати точок перетину цих площин з координатними осями позначимо відповідно $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ (рис. 1.3). Початок і кінець вектора $\overrightarrow{AB}$ = $\vec{a}$ містяться в точках $A\ (x_1, y_1, z_1)$ і $B\ (x_2, y_2, z_2)$. Різниці $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ називають **координатами** вектора $\overrightarrow{AB}$ = $\vec{a}$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ однозначно визначається впорядкованою трійкою чисел $a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1$ які називають координатами. Записують це так:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z).$$



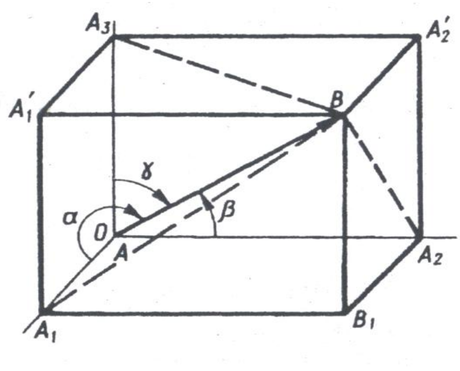


Рис. 1.3 Рис. 1.4

Справді, побудуємо на $\overrightarrow{AB}$, як на діагоналі, прямокутний паралелепіпед $AA_1B_1A_2A_2{}'BA_1{}'A_3$ (рис. 1.4) із сторонами $AA_1 = x_2-x_1$; $AA_2=y_2-y_1$; $AA_3=z_2-z_1$
Із прямокутних трикутників AA_1B, AA_2B, AA_3B знаходимо

$$a_x=x_2-x_1=|\vec{a}|\cos\alpha$$

$$a_y=y_2-y_1=|\vec{a}|\cos\beta$$

$$a_z=z_2-z_1=|\vec{a}|\cos\gamma$$

Оскільки при паралельному перенесенні вектора його довжина і кути не змінюються, то два рівних між собою вектори завжди мають одні і ті самі компоненти.

Два вектори рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їхні відповідні компоненти.

Якщо початок вектора збігається з початком координат, то вектор $\overrightarrow{OB}$ називається **радіусом-вектором точки** B і його компоненти збігаються з координатами його кінця — точки B.

Розглянемо n-вимірний простір.

***n*-вимірним (скінченновимірним) простором** або **простором *n* вимірів** називають множину впорядкованих сукупностей дійсних чисел $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ в обраній системі координат і позначають $\boldsymbol{R^n}$. Множина $\boldsymbol{R^n}$ називається ще **афінним простором** n вимірів. Елемент $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ множини $\boldsymbol{R^n}$ де $x_1, x_2 \ldots x_n$ — задані дійсні числа, називають точкою n-вимірного простору, а числа — координатами цієї точки і записують $P\,(x_1\, x_2 \ldots x_n)$. Якщо точка P належить простору $\boldsymbol{R^n}$ то пишуть $P \in \boldsymbol{R^n}$, або $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \boldsymbol{R^n}$.

Зазначимо, що окремими випадками n-вимірного простору є одновимірний простір $\boldsymbol{R^1}$, двовимірний простір $\boldsymbol{R^2}$ і тривимірний простір $\boldsymbol{R^3}$, які можна зобразити геометрично. Далі простори $\boldsymbol{R^1}$**,** $\boldsymbol{R^2}$**,** $\boldsymbol{R^3}$ називатимемо **наочними просторами.** Для *n*-вимірного простору, де $n > 4$, ця наочність зникає. Отже, зрозуміло як ввести поняття кута між двома осями в тривимірному просторі, а як це зробити для *n*-вимірного простору, поки що невідомо (взагалі це можна зробити за допомогою поняття вектора).

Будь-яка впорядкована пара точок *A* і *B* *n*-вимірного простору називається ***n*-вимірним вектором.** Одна з цих точок називається **початком,** друга — **кінцем вектора.**

Впорядкованій парі точок $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $B(y_1, y_2, ..., y_n)$ відповідає впорядкована сукупність різниць $a_1 = y_1 - x_1, a_2 = y_2 - x_2, ..., a_n = y_n - x_n$ яка називається **координатами вектора** $\vec{a}$:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n).$$

n-вимірний вектор можна визначити як довільний впорядкований набір $(a_1, a_2, ..., a_n)$ дійсних чисел у вибраній системі координат.

Вектор, всі координати якого дорівнюють нулю, називається **нуль-вектором.** Два *n*-вимірні вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ вважаються рівними між собою, якщо рівні між собою їхні відповідні компоненти, тобто $\vec{a} = \vec{b}$, якщо $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; $\ldots a_n = b_n$; $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n) = \vec{0}$, якщо $a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots a_n = 0$

Афінний простір називається **векторним простором,** якщо в ньому введено поняття вектора так, що:

1) будь-якій парі точок *A і B* відповідає єдиний вектор $\overrightarrow{AB}$;

2) для будь-якої точки *A* афінного простору і будь-якого вектора $\vec{a}$ існує єдина точка *B* така, що $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$;

3) для будь-яких трьох точок *A, B і C* справджується рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Компоненти *n*-вимірного вектора можна розміщувати у рядок або у стовпчик. У першому випадку говорять про **вектор-рядок** , а у другому — про **вектор-стовпець.** Вектор-рядок або вектор-стовпець називають ще **матрицею-рядком** або **матрицею- стовпцем** і позначають так:

$$\vec{a} = \|a_1 a_2 ... a_n\|, \text{ або } \vec{a} = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{Vmatrix} \qquad \vec{a} = (a_1 a_2 ... a_n), \text{ або } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$$

1.3. Операції над векторами у наочному просторі

Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{c}$, напрямлений із початку першого вектора в кінець другого, якщо початок другого вектора збігається з кінцем першого (рис. 1.5). Це правило додавання векторів

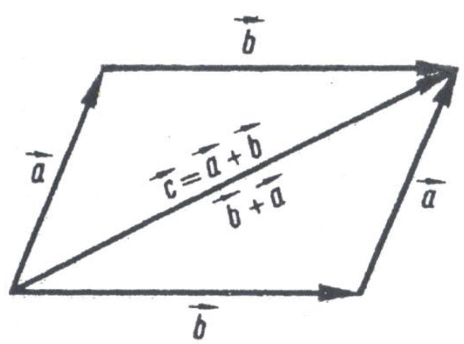


Рис. 1.5

називається **правилом трикутника.** Використовується також **правило паралелограма** додавання векторів.

Сумою векторів $\vec{a} + \vec{b}$ називається третій вектор $\vec{c}$, який виходить із спільного початку даних векторів і збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах.

Сумою будь-якого скінченного числа векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2 ... \vec{a}_n$ називається вектор $\vec{a}$, який утворюється внаслідок послідовного застосування правила трикутника (рис. 1.6).

Віднімання векторів. Два рівних між собою за довжиною, протилежних за напрямом і паралельних вектори $\vec{a}$ і $-\vec{a}$ називаються **протилежними векторами** (сума їх дорівнює нуль-вектору). Віднімання векторів визначається як дія, обернена до додавання

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$, якщо $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$, або $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Таким чином, *щоб від вектора* $\vec{a}$ *відняти вектор* $\vec{b}$, *треба до вектора* $\vec{a}$ *додати вектор, протилежний до вектора* $\vec{b}$ (рис. 1.7).

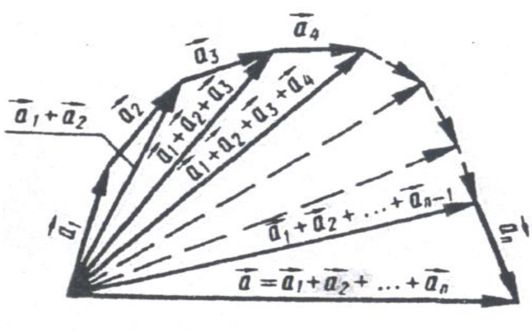


Рис. 1.6

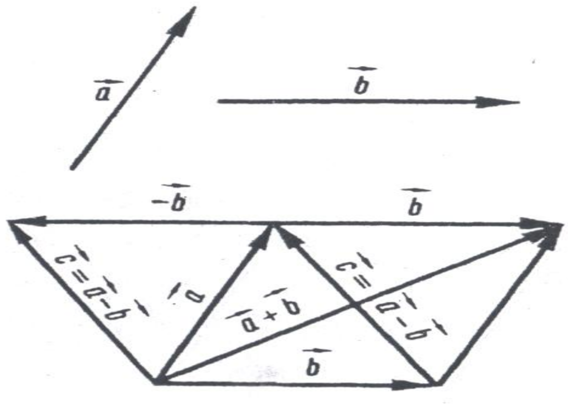


Рис. 1.7

Множення вектора на число. Нехай дано вектор $\vec{a}$ і деяке дійсне число λ. Тоді $\lambda \vec{a}$ є вектор, довжина якого дорівнює $|\lambda||\vec{a}|$. Якщо $\lambda > 0$ і $\vec{a} \neq 0$, то вектори $\lambda \vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені однаково (співнапрямлені); якщо $\lambda < 0$ і $\vec{a} \neq 0$, то вони напрямлені протилежно. Якщо $\lambda = 0$ або $\vec{a} = 0$, то $\lambda \vec{a} = 0$. Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ пов'язані співвідношенням $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, то вони називаються **колінеарними.**

Операції додавання векторів і множення вектора на число мають такі властивості.

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *для будь-яких векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ для *будь-яких векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$

3. *Для будь-якого вектора* $\vec{a}$ $\quad \vec{a} + 0 = \vec{a}$.

4. *Для будь-якого вектора* $\vec{a}$ *існує такий вектор* $\vec{a}'$, *що* $\quad \vec{a} + \vec{a}' = 0$.

Вектор $\vec{a}'$ *протилежний до вектора* $\vec{a}$.

5. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ *для будь-якого вектора* $\vec{a}$.

6. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ *для будь-якого вектора* $\vec{a}$ *і будь-яких дійсних чисел* α *і* β.

7. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) + (\alpha\vec{b})$ для *будь-яких векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *та будь-якого дійсного числа* α (рис. 1.8).

8. $(\alpha + \beta)\vec{a} - (\alpha\vec{a}) + (\beta\vec{a})$ для *будь-якого вектора* $\vec{a}$ *і будь-яких дійсних чисел* α *і* β.

Приклад 1.1. Яку умову мають задовольняти вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, щоб з них можна було утворити трикутник?

Розв'язання. Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють трикутник АВС (рис. 1.9).

Очевидно, умова $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ є необхідною і достатньою умовою того, що ці вектори утворюють трикутник.

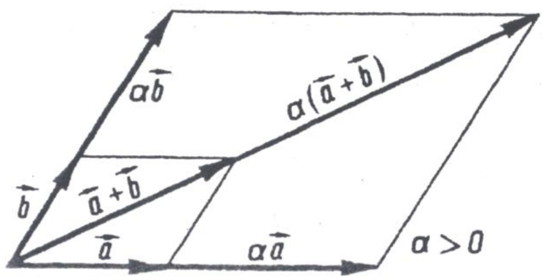


Рис. 1.8

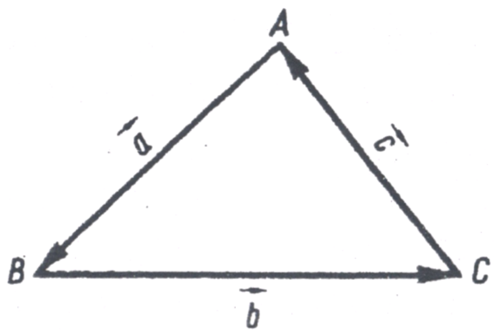


Рис. 1.9

1.4. Операції над векторами, заданими своїми координатами

Сумою двох векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots a_n)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots b_n)$, які належать одному простору і задані своїми координатами, називається третій вектор $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3, \dots c_n)$ координати якого дорівнюють сумі відповідних координат даних векторів:

$$c_1 = a_1 + b_1\ ;\ c_2 = a_2 + b_2;\ c_3 = a_3 + b_3; \qquad c_n = a_n + b_n.$$

Векторну рівність $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ можна записати ще так:

$(a_1, a_2, a_3, \dots a_n) + (b_1, b_2, b_3, \dots b_n) = (a_1 + b_2,\ a_2 + b_2, \dots a_n + b_n)$

(матриці-рядки можна додавати).

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які належать одному і тому самому простору, назвемо третій вектор $\vec{c}$, координати якого дорівнюють різниці координат векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\quad \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_2,\ a_2 - b_2, \dots a_n - b_n)$.

Операція додавання векторів одного і того самого простору, що задані своїми координатами, має властивості 1 - 4 наочного простору.

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *{переставний закон).*

2. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ *(сполучний закон).*

3. *Для будь-якого* $\vec{a}$*:* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

4. *Для будь-якого вектора* $\vec{a}$ *існує такий вектор* $\vec{a}\,'$ *що* $\vec{a} + \vec{a}\,' = 0$.

Вектор $\vec{a}\,'$ *називається вектором, протилежним до* $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$.

Вектор $-\vec{a}$ має компоненти $(-a_1, -a_2, -a_3, \ldots -a_n)$.

Перейдемо до множення n-вимірного вектора, заданого своїми координатами, на число.

Добутком n-вимірного вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ **на дійсне число** λ називається вектор, координати якого дорівнюють добуткам на це число координат вектора $\vec{a}$: $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \ldots \lambda a_n)$.

Два n-вимірних вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, \ldots b_n)$ називаються **колінеарними,** якщо справедливе співвідношення $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Як і в тривимірному просторі, операція множення вектора на число в n-вимірному просторі має властивості 5-8 наочного простору.

1.5. Система векторів і спосіб її задання. Лінійна комбінація векторів

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \text{ або } \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \ldots \\ a_{1n} \end{pmatrix},$$

$$\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \text{ або } \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{2n} \end{pmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vec{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}), \text{ або } \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \ldots \\ a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Нехай дано k векторів $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$. Помножимо кожний вектор на число λ_j, де $j = 1,2,\dots,k$, і знайдені результати додамо. У результаті цього дістанемо вектор, який називається лінійною **комбінацією даних векторів**:

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_k \vec{a}_k$$

Числа λ_j називаються **коефіцієнтами даної лінійної комбінації.**

Якщо вектор $\vec{a}_j$ має координати ($a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$), а вектор $\vec{b}$ має координати ($b_1, b_2, \dots, b_n$), то рівність запишеться у вигляді

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{nk} \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} b_1 = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_k a_{1k}, \\ b_2 = \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_k a_{2k}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_n = \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \dots + \lambda_k a_{nk}. \end{cases}$$

Ці рівності рівносильні. У першому випадку залежність записано у векторній формі, а у другому – в скалярній.

Розглянемо питання про те, чи може дорівнювати нулю лінійна комбінація векторів:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_k \vec{a}_k = 0$$

Якщо рівність можлива за умови, що принаймні одне з чисел λ_j де j=1, 2,…,k, не дорівнює нулю, то система даних векторів називається **лінійно залежною**, а рівність називається **нетривіальною**. Якщо ж рівність можлива лише за умови, що всі λ_j=0 одночасно дорівнюють нулю, то система даних векторів називається **лінійно незалежною,** а рівність - **тривіальною.**

1.6. Теореми про лінійно залежні і лінійно незалежні вектори

Теорема 1.1. *Якщо система векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ *лінійно залежна, то після приєднання до неї будь-якої кількості нових векторів знову утворюється лінійно залежна система.*

Доведення. Це випливає із рівності

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_k\vec{a}_k + \lambda_{k+1}\vec{a}_{k+1} + ... + \lambda_{k+m}\vec{a}_{k+m} = 0.$$

Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ лінійно залежна, то серед чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ є такі, які відрізняються від нуля. Навіть якщо всі $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, ..., \lambda_{k+m}$ дорівнюють нулю, то система векторів залишається лінійно залежною.●

Нехай задано систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$. Будь-яку частину векторів цієї системи назвемо її **підсистемою**. Тоді теорему 3.1 можна сформулювати так: якщо будь-яка підсистема даної системи векторів лінійно залежна, то і сама система, лінійно залежна.

Для системи лінійно незалежних векторів справедливе таке твердження: *якщо система складається із лінійно незалежних векторів, то будь-яка її підсистема також складається із лінійно незалежних векторів.*

Теорема 1.2. *Для того щоб система із к векторів була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб хоча б один із* k *векторів був лінійною комбінацією решти векторів.*

Теорема 1.3. *Будь-яка система векторів, до якої входить нуль-вектор,* є *лінійно залежною.*

Теорема 1.4. *Якщо система векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ *лінійно незалежна, а система векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k, \vec{b}$ *- лінійно залежна, то вектор* $\vec{b}$ *є лінійною комбінацією решти векторів системи.*

Доведення. Рівність $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_k \vec{a}_k + \lambda \vec{b} = 0$ можлива лише при $\lambda \neq 0$, тому що в протилежному випадку дана система буде лінійно незалежною. З останньої рівності знаходимо

$$\vec{b} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda}\vec{a}_2 - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda}\vec{a}_k.$$

Позначимо $\alpha_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda}; \alpha_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda}; ...; \alpha_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda}$, дістанемо

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_k \vec{a}_k.$$

Теорема 1.5. *Якщо система векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ *лінійно незалежна, а вектор* $\vec{b}$ *не можна подати у вигляді лінійної комбінації цих векторів, то система векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k, \vec{b}$ *є лінійно незалежною.*

Цю теорему легко довести методом від супротивного (самостійно).

1.7. Базис. Лінійний підпростір.

Будь-яку впорядковану сукупність *n* векторів називають **базисом деякого простору**, якщо:

1. Усі вектори даної сукупності лінійно незалежні;

2. Будь-який вектор цього простору є лінійною комбінацією даної сукупності векторів.

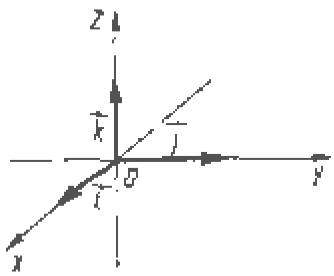
Теорема 1.6. *У n- вимірному просторі система векторів* $\vec{e}_1$=(1,0,0,..., 0), $\vec{e}_2$ = (0,1, 0,...,0),. . ., $\vec{e}_n$ (0,0.0,…,1) *є базисом цього простору.*

Доведення. Доведемо, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно незалежні. Для цього треба довести, що векторне рівняння $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n = \overrightarrow{0}$ має лише єдиний розв'язок : $\lambda_1 * 1 = 0;\ \lambda_2 * 1 = 0; \ldots;\ \lambda_n * 1 = 0.$

2) Легко помітити, що будь-який вектор $\vec{a}$ з відмінними від нуля компонентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *можна записати у вигляді* $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n$, тобто система $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ є базисом. Базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ називають ортонормованим, а рівність— **розкладом вектора** $\vec{a}$ у лінійному просторі за ортонормованнм базисом.

Для тривимірного простору ортонормовані вектори базису називаються: ортами і позначаються так:

$$\vec{\imath} = (1,0,0);\ \vec{\jmath} = (0,1,0);\ \vec{k} = (0,0,1).$$



Розклад вектора $\vec{a}$ для тривимірного простору має вигляд

$\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$. Оскільки a_1, a_2, a_3 є проекціями вектора $\vec{a}$ на осі координат, то $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$.

Теорема 1.7. *Будь-яка впорядкована система n лінійно незалежних векторів* $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots\ \vec{b}_n$ *n-вимірного простору є його базисом.*

Доведення. Для доведення того, що система векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots\ \vec{b}_n$ є базисом, достатньо довести, що система векторів $\vec{a}$, $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots\ \vec{b}_n$ до $\vec{a}$

— будь-який відмінний від нуля вектор n-вимірного лінійного простору, лінійно залежна.

Запишемо лінійну комбінацію векторів $\vec{a}$, $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ... \vec{b}_n$:

$\mu\vec{a} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ \vec{b}_i = 0$. Виражаємо вектори $\vec{b}_i$ через вектори базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$: $\vec{b}_i = \sum_{j=1}^{n} y_i \, \vec{e}_i$, $i,j=1,2,\dots,n$, тоді $\mu\vec{a} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} y_i \, \vec{e}_i = \vec{0}$, або

$$\mu\vec{a} + (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_{i1})\vec{e}_1 + (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_{i2})\vec{e}_2 + \cdots + (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_{in})\vec{e}_n = 0$$

Звідси випливає, що $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, тобто $\mu \neq 0$. Це означає, що система $\vec{a}$, $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ... \vec{b}_n$ лінійно залежна. Будь-який вектор $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ... \vec{b}_n$: $\vec{a} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \cdots + x_n\vec{b}_n$. Теорему доведено.

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ називаються **координатами вектора** $\vec{a}$ в базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ... \vec{b}_n$. Вираз $\vec{a} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \cdots + x_n\vec{b}_n$ називають **розкладом вектора $\vec{a}$ за базисом** $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ... \vec{b}_n$. Можна стверджувати, що один і той самий вектор у різних базисах має різні компоненти. Однак в одному і тому самому базисі компоненти вектора визначаються однозначно.

Теорема 1.8. *У заданому базисі компоненти вектора визначаються однозначно.*

Доведення. Припустимо, то вектор $\vec{a}$ в базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ... \vec{b}_n$ має різні компоненти:

$\vec{a}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\vec{a} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Тоді можна записати

$\vec{a} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \cdots + x_n\vec{b}_n$ та $\vec{a} = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + \cdots + y_n\vec{b}_n$

Віднімаючи від рівності дістанемо $(x_1 - y_1)\vec{b}_1$+$(x_2 - y_2)\vec{b}_2 + \cdots + (x_n - y_n)\vec{b}_n = 0$

Оскільки вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots. \vec{b}_n$. -лінійно незалежні, то рівність можлива тільки при

$$x_1 - y_1 = 0,\ x_2 - y_2 = 0, \ldots, x_n - y_n = 0,$$

звідки $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2 \ldots, x_n = y_n$.

Отже, розклад єдиний.

Наслідок. *У n-вимірному лінійному просторі максимальне число лінійно незалежних векторів дорівнює числу його вимірів (розмірності).*

Доведення. Раніше було доведено, що у n-вимірному просторі лінійно незалежних векторів є *n,* а додавання одного вектора, відмінного від нуль-вектора, робить систему векторів лінійно залежною. Відповідно до цього наслідку можна дати таке означення розмірності простору: максимальне число лінійно незалежних векторів простору називається **розмірністю простору**.

У нульовому просторі немає базису, оскільки система, яка складається з нуль-вектора, лінійно залежна. Тому розмірність нульового простору приймається рівною нулю. Може статись, що набір векторів простору з будь-яким номером є лінійно незалежною системою векторів. Тоді простір вважається **нескінченновимірним.**

Розглянуті теореми стосовно до наочних просторів дають змогу сформулювати такі твердження:

1. *Будь-які два непаралельні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на площині є лінійно незалежними, а будь-які три вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ лінійно залежними, причому*

будь який третій вектор можна подати у вигляді лінійної комбінації двох лінійно незалежних векторів;

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b},$$

2. *Будь-які три вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ які непаралельні і не лежать в одній площині, є лінійно незалежними. Причому будь-який, четвертий вектор $\vec{d}$ є лінійною комбінацією трьох даних векторів:*

$$\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\overrightarrow{b} + \alpha_3\vec{c}.$$

Зазначимо, що вектори, розміщені в одній і тій самій площині або паралельні одній і тій самій площині, називаються **компланарними.**
Умова компланарності векторів $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$: $\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b}$. Іноді цю умову записують у вигляді: $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0}$, $\lambda_3 \neq 0$.

Множина векторів називається **лінійним підпростором ,** якщо сума будь-яких векторів цієї множини є вектором, який належить до цієї самої множини, і добуток числа на вектор цієї множини є вектором, який належить до цієї самої множини.
Так, двовимірний простір є підпростором тривимірного простору, оскільки сума будь-яких двох векторів, які належать деякій площині, належить цій самій площині; те саме стосується і множення вектора на число.
Будь-який лінійний простір можна розглядати як підпростір. Нульовий простір (простір, який складається тільки з нульового вектора) є нульовим підпростором.
Розмірність підпростору визначається так само, як і для простору,— максимальним числом лінійно незалежних векторів.
Два підпростори γ_1 i γ_2 збігаються, якщо будь-який вектор $\vec{a} \in \gamma_1$ належить γ_2, і навпаки.

1.8. Матриці та їх види

Нехай задано систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ в n-вимірному просторі:

$$\begin{array}{l} \vec{a}_1 = \left(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}\right) \\ \vec{a}_2 = \left(a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}\right) \\ .... \\ \vec{a}_k = \left(a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kn}\right) \end{array}.$$

Складемо із координат векторів прямокутну таблицю, яка називається **прямокутною матрицею** і позначається буквою A:

$$A\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо поняття матриці незалежно від системи векторів. Запишемо прямокутну таблицю чисел із k рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kn} \end{Vmatrix}.$$

Прямокутна таблиця, складена із довільного набору величин, називається **прямокутною матрицею** . Величини називаються **елементами матриці,** сукупність елементів складає **рядок (стовпець) матриці.** Місце елемента визначається номером рядка і номером стовпця, на перетині яких він розміщений. У прийнятому позначенні перший індекс елемента вказує на номер рядка, а другий – на номер стовпця. Будь-який елемент матриці звичайно позначається через a_{ij}, де i – номер рядка, j – номер стовпця, на перетині яких розміщено цей елемент.

Символічний добуток числа рядків k на число стовпців n матриці називають **розмірністю матриці** і позначають $k\times n$.

Матриця, в якій число рядків дорівнює числу стовпців, називається **квадратною матрицею**:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11}\ b_{12}\ \dots b_{1n} \\ b_{21}\ b_{22}\ \dots b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}\ b_{n2}\ \dots b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її **порядком.** Так, матриця B має порядок n.

У квадратних матрицях зазвичай виділяють два види елементів: діагоналі квадрата, складеного із елементів матриці. Елементи $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$ складають так звану **головну діагональ** матриці B, а сукупність елементів $b_{1n}, b_{2(n-1)}, \dots, b_{n1}$-її другорядну **діагональ**.

Замінимо у матриці A рядки на стовпці так, щоб перший рядок став першим стовпцем, другий рядок – другим стовпцем, третій рядок – третім стовпцем тощо. В результаті цього дістанемо матрицю A^T **:**

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{21}\ \dots\ a_{n1} \\ a_{12}\ a_{22}\ \dots\ a_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1k}\ a_{2k}\ \dots\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

Матриця A^T називається **транспонованою матрицею** відносно матриці *A*. Перехід матриці *A* до матриці A^T називається **операцією транспонування.**

Матриця називається **нульовою**, якщо всі її елементи – нулі:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо в квадратній матриці всі елементи, розміщені поза головною діагоналлю, - нулі, то матриця називається **діагональною**:

$$\begin{pmatrix} b_{11}\ \ 0\ \dots 0 \\ 0\ \ \ b_{22} \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0\ \ \ 0\ \dots b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, називається **одиничною.** Одинична матриця позначається так:

$$E = \begin{pmatrix} 1\ \ 0 \dots 0 \\ 0\ \ 1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0\ \ 0 \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо для квадратної матриці B справджується рівність $b_{ij} = b_{ji}$, то матриця називається **симетричною**. Симетричні матриці інваріантні відносно транспонування, тобто транспонована і задана матриці збігаються. Якщо для квадратної матриці B справджується рівність $b_{ij} = -b_{ji}$, то матриця називається **кососиметричною**. Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$ - кососиметрична матриця.

Дві матриці однакових розмірностей, з однаковими відповідними елементами називаються **рівними між собою**.

Матриця, у якої всі елементи, що стоять над головною діагоналлю (або під головною діагоналлю) нулі, називається **нижньою трикутною** (або **верхньою трикутною**) матрицею.

Наприклад , $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$ - нижня трикутна матриця.

1.9. Дії над матрицями

Сумою двох матриць однакової розмірності називається матриця такої самої розмірності, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць, що додаються.

Сумою матриць A і B

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}\ a_{k2}\ \dots\ a_{kn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11}\ b_{12}\ \dots\ b_{1n} \\ b_{21}\ b_{22}\ \dots\ b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{k1}\ b_{k2}\ \dots\ b_{kn} \end{pmatrix}$$

є матриця C

$$C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}\ \ a_{12}+b_{12}\ \dots\ a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21}\ a_{22}+b_{22}\ \dots\ a_{2n}+b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}+b_{k1}\ a_{k2}+b_{k2}\ \dots\ a_{kn}+b_{kn} \end{pmatrix}.$$

Операція додавання матриць, як і операція додавання чисел у арифметиці, підлягає переставному (комутативному) закону:

$$A+B = B+A.$$

Із означення суми матриць випливає, що сума будь-якої матриці і нуль-матриці того самого розміру дорівнює даній матриці:

$$A+0=A, \quad 0+A=A.$$

Тобто нуль-матриця в теорії матриць виконує ту саму роль, що і число нуль у теорії чисел.

Матриці A і B називаються **протилежними**, якщо їхня сума $A+B=0$ є нуль-матриця. Матриця протилежна до матриці A, позначається $-A$, і її відповідні елементи протилежні до елементів матриці A, тоді

$$A-B = A+(-B).$$

Добутком матриці на число (або числа на матрицю) називається матриця, елементами якої є добутками елементів даної матриці на це число:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} \ \lambda a_{12} \ \ldots \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} \ \lambda a_{22} \ \ldots \lambda a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda a_{k1} \ \lambda a_{k2} \ \ldots \lambda a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Операція множення матриці на число має розподільну властивість.

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B.$$

Якщо порівняти означення операцій додавання і множення матриць на число з аналогічними операціями над векторами, то легко помітити повну їх аналогію.

Добутком двох матриць A і B, число стовпців першої з них дорівнює числу рядків другої, називається третя матриця C,елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-*го* стовпця матриці B.

Нехай дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ \ldots \ a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ \ldots \ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ a_{m2} \ \ldots \ a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} \ b_{12} \ \ldots \ b_{1p} \\ b_{21} \ b_{22} \ \ldots \ b_{2p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1} \ b_{n2} \ \ldots \ b_{np} \end{pmatrix}$$

Тоді їхній добуток

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mp} \end{pmatrix}, \text{ де}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$
$$i = 1,2,\ldots,m; \;\; j = 1,2,\ldots,p$$

Наведене правило множення матриць викликане необхідністю записувати в компактній формі системи лінійних рівнянь.

Дві матриці A і B називаються **узгодженими**, якщо число стовпців першої дорівнює числу рядків другої, тобто вони мають розміри $m\times n$ і $n\times p$. Перемножати можна тільки узгоджені матриці.

Приклад 1.2. Знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Ці матриці можна перемножати, тому що число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. За означенням знаходимо

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3 + 7\cdot 2 + (-4)\cdot(-1) \\ 2\cdot 3 + 5\cdot 2 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A\cdot B = \begin{pmatrix} 33 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Властивості операції множення матриць

1. Добуток будь-якої матриці на узгоджену з нею одиничну матрицю дорівнює нуль-матриці:

$$A\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

2. Добуток будь-якої матриці на узгоджену з нею одиничну матрицю дорівнює даній матриці:

$$\boldsymbol{A \cdot E = A}$$

3. Добуток матриць не має переставної (комутативної) властивості, тобто не завжди $A \cdot B = B \cdot A$. При цьому передбачається, що як $A \cdot B$, так і $B \cdot A$ мають сенс. Матриці для яких виконується співвідношення $A \cdot B = B \cdot A$ називаються **переставними.**

4. Нехай *A, B* і *C* – матриці, які можна додавати або перемножати, а α- деяке число, тоді справедливі такі рівності:

$$\alpha\left(A \cdot B\right) = \left(\alpha A\right) \cdot B = A \cdot \left(\alpha B\right)$$
$$A \cdot B \cdot C = \left(A \cdot B\right) \cdot C = A \cdot \left(B \cdot C\right)$$
$$A \cdot \left(B + C\right) = A \cdot B + A \cdot C$$

5. Якщо дано матриці *A* і *B*, то для транспонованих відповідних матриць A^T і B^T виконується співвідношення

$$\boldsymbol{(AB)^T = B^T A^T}$$

6. Якщо для квадратної матриці *A* виконується рівність $A^T = A$, то ця матриця симетрична.

Контрольні питання

1. Що є елементами *n*-вимірних просторів?
2. Які операції вводяться над векторами?
3. Що називається лінійною комбінацією системи векторів?
4. В якому випадку система векторів буде лінійно незалежною?

5. Для матриць $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ обчислити: а) AB; б) $A\left(B+B^T\right)$; в) $\left(AC\right)^T A$; г) BA^T; д) $C^T B$; є) $A^T AB$; ж) $C^T BA^T + 2C^T A^T$.

6. Навести приклади ненульових квадратних матриць A і B для яких $AB=\Theta$.

7. Довести, що якщо матриця є одночасно і симетричною, і кососиметричною, то вона є квадратною нульовою.