Екзаменаційний білет № 24

I. Теоретична частина

1. Средньоквадратичне наближення: формулювання задачі.

2. Формулювання задачі.

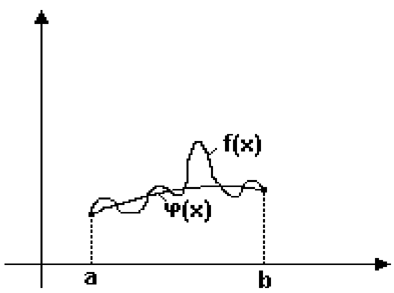
Інтерполяція функцій складається у заміні заданої функції $f(x)$ іншою функцією $L_n(x)$ за умови, що ці функції збігаються на заданій послідовності точок. Однак, подання функцій за допомогою інтерполяційного багаточлена не завжди є зручним: зі збільшенням числа вузлів зростає його ступінь, що не завжди приводить до поліпшення наближеного подання функції на заданому відрізку, або, скажімо, близькість ординат кривих $f(x)$ і $L_n(x)$ на заданому відрізку ще не гарантує близькості на ньому похідних $f`(x)$ і $L_n`(x)$, тобто малої розбіжності кутових коефіцієнтів дотичних до цих кривих. У цьому зв'язку виникає задача такого подання функції $f(x)$ за допомогою функції $L_n(x)$, що характеризувало б функцію $f(x)$ на розглянутому відрізку в цілому, без копіювання її місцевих відхилень.

Ці міркування приводять до доцільності середньоквадратичного наближення функції. У найбільш загальній формі цю задачу можна сформулювати наступним чином. Для функції $f(x)$, заданої на відрізку $[a,b]$ потрібно підібрати апроксимуючу функцію $\varphi(x)$ таку, щоб інтеграл

$$\int_a^b (f(x)-\varphi(x))^2\,dx \qquad (1)$$

був по можливості малий.

Якщо інтеграл (1) малий, це означає, що в середньому на більшій частині відрізка [a,b] функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ *близьки* одна до одної, хоча в окремих точках або на дуже малій його частині різниця $f(x) - \varphi(x)$ може бути досить великою.



Таким чином, наближення в сенсі середньоквадратичного приводить до згладжування місцевих похибок. Величина

$$\Delta = \sqrt{(\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx / (b-a)}$$

називається середньоквадратичним відхиленням функцій *f(x)* і *φ(x)* і характеризує похибку наближення функції *f(x)* за допомогою *φ(x) у сенсі середнього квадратичного*.

Якщо функція задана своїми значеннями у *(n+1)* точках $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$, (тобто невідома її аналітична форма) то природно замість інтеграла (1) розглядати суму виду

$$\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2 \ ,$$

а середньоквадратичне відхилення визначати за формулою

$$\Delta_n = \sqrt{(\sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - \varphi(x_i))^2 / (n+1)} \ .$$

При розв'язанні конкретних задач у якості апроксимуючої функції *φ(x)* найчастіше вибирають степеневі або тригонометричні поліноми.

Тоді задача середньоквадратичного наближення наближення функцій у загальному випадку формулюється в наступний спосіб.

Нехай $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, … , $\varphi_m(x)$ – задана на відрізку [a,b] система лінійно незалежних і безперервних функцій. Узагальненим поліномом $P_m(x)$ *m*-ї степені по системі $\{\varphi_m(x)\}$ будемо називати вираз

$$P_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x), \qquad (2)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_m$ – деякі константи.

Потрібно підібрати такі значення $a_0, a_1, \ldots, a_m$ в узагальненому поліномі (2), щоб інтеграл

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \int_a^b (f(x) - P_m(x))^2 dx$$

мав найменше значення.

2. Розв'язок алгебраїних рівнянь за допомогою зворотної інтерполяції.

12. Знаходження коренів рівняння методом зворотної

інтерполяції.

Найпростіший спосіб полягає в тому, що для рівняння $f(x) = 0$ складається таблиця функції $y = f(x)$ для значень x, близьких до кореня, а потім застосовуючи метод зворотної інтерполяції для $\tilde{y} = 0$.

Приклад 5.

Вирішити рівняння

$$e^x \sin x = 1$$

методом зворотної інтерполяції з точністю ε = 0.01.

Оскільки що f(0.5) <0, а f(1)>0 (f(x) = e^x sin x –1), то корінь рівняння лежить в інтервалі [0.5;1]. Складемо таблицю значень функції:

x	0.5	0.6	0.7	0.8
y	-0. 2096	0. 0288	0. 2973	0. 5965

Функція монотонна, тому можна перейти до розгляду зворотної функції $f^{-1}(y)$. З'ясуємо, чи достатня інтерполяція функції $f^{-1}(y)$ багаточленом 1-го ступеня $L_1(y)$ у точці $\overline{y} = 0$, тобто чи буде виконуватися нерівність:

$$\left| R_1(0) \le \frac{\max\left| f^{-1}(y'') \right|}{2} \right| \qquad \left| (y - y_0)(y - y_1) \right| < \varepsilon, \qquad \left| y_0 \cdot y_1 \right| < \varepsilon$$

Знаходимо $\max\left| f^{-1}(y'') \right|$

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x \sin x + e^x \cos x};$$

$$(f^{-1}(y)'' = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3} = -\frac{2\cos x}{(\sin x + \cos x)^3 e^{2x}};$$

$$((f^{-1}(y))'') \le \frac{2 \cdot 0.88}{e(\sin 0.5 + \cos 0.5)^3} \approx \frac{1.76}{e(0.4794 + 0.88)^3} \approx 0.4$$

Отже, $R_1(0) \le \frac{0.4}{2} \cdot 0.2096 \cdot 0.0288 \approx 0.0012$ і тому, лінійна інтерполяція для $f^{-1}(y)$ на відрізку *[-0,2096;0,0288]* забезпечує задану точність. Будуємо $L_1(y)$ і обчислюємо $L_1(0)$.

$$L_1(0) = 0,5.$$

II. Практична частина

Побудувати таблицю інтегральної кривої звичайного диференціального рівняння

xy′=yln(y/x)

з початковими умовами *y(1) = exp(3)* на проміжку a = 1, b = 3 з кроком *(b – a)/5* і з точністю не гірше за 10^{-2}.