ИДЗ-10.1

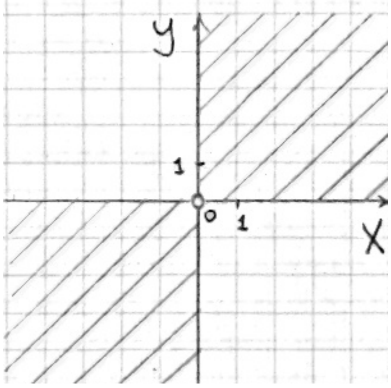
1.13. Найти область определения указанной функции.

$$z = \frac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$$

Решение: Область определения:

$$\begin{cases} xy \ge 0 \\ x \ne 0, y \ne 0 \text{ } \textit{одновременно} \end{cases}$$

Изобразим область определения на чертеже:



2. Найти частные производные и частные дифференциалы данной функции.

2.13. $z = \sin\sqrt{x - y^3}$

Найдем частные производные:

$$z'_x = \left(\sin\sqrt{x - y^3}\right)'_x = \cos\sqrt{x - y^3} \cdot (\sqrt{x - y^3})'_x = \cos\sqrt{x - y^3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x - y^3}}(x - y^3)'_x =$$

$$= \frac{\cos\sqrt{x - y^3}}{2\sqrt{x - y^3}}$$

$$z'_y = \left(\sin\sqrt{x - y^3}\right)'_y = \cos\sqrt{x - y^3} \cdot (\sqrt{x - y^3})'_y = \cos\sqrt{x - y^3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x - y^3}}(x - y^3)'_y =$$

$$= \frac{-3y^2\cos\sqrt{x - y^3}}{2\sqrt{x - y^3}}$$

Частные дифференциалы:

$$dz'_x = \frac{\cos\sqrt{x - y^3}}{2\sqrt{x - y^3}}dx, \; dz'_y = -\frac{3y^2\cos\sqrt{x - y^3}}{2\sqrt{x - y^3}}dy$$

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

3.13. $f(x, y, z) = \ln\sin\left(x - 2y + \frac{z}{4}\right)$, $M_0\left(1, \frac{1}{2}, \pi\right)$

Решение:

$$f'_x=\left(\ln\sin\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)\right)'_x=\frac{1}{\sin\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)}\cdot\left(\sin\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)\right)'_x=$$

$$=\frac{\cos\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)}{\sin\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)}\cdot\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)'_x=ctg\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)$$

$$f'_x(M_0)=f'_x\left(1,\frac{1}{2},\pi\right)=ctg\left(1-1+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$f'_y=\left(\ln\sin\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)\right)'_y=\frac{1}{\sin\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)}\cdot\left(\sin\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)\right)'_y=$$

$$=\frac{\cos\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)}{\sin\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)}\cdot\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)'_y=-2ctg\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)$$

$$f'_y(M_0)=f'_y\left(1,\frac{1}{2},\pi\right)=-2ctg\frac{\pi}{4}=-2$$

$$f'_z=\left(\ln\sin\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)\right)'_z=\frac{1}{\sin\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)}\cdot\left(\sin\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)\right)'_z=$$

$$=\frac{\cos\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)}{\sin\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)}\cdot\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)'_z=\frac{1}{4}ctg\left(x-2y+\frac{z}{4}\right)$$

$$f'_z(M_0)=f'_z\left(1,\frac{1}{2},\pi\right)=\frac{1}{4}ctg\frac{\pi}{4}=0{,}25$$

4. Найти полные дифференциалы указанных функций.

4.13. $z=e^{x+y-4}$

Вычислим частные производные первого порядка:

$$z'_x=\left(e^{x+y-4}\right)'_x=e^{x+y-4}\cdot(x+y-4)'_x=e^{x+y-4}\cdot(1+0-0)=e^{x+y-4}$$

$$z'_y=\left(e^{x+y-4}\right)'_y=e^{x+y-4}\cdot(x+y-4)'_y=e^{x+y-4}\cdot(0+1-0)=e^{x+y-4}$$

Полный дифференциал:

$$dz=z'_xdx+z'_ydy=e^{x+y-4}dx+e^{x+y-4}dy=e^{x+y-4}(dx+dy)$$

5. Вычислить значение производной сложной функции $u=u(x,y)$, где $x=x(t)$, $y=y(t)$, при $t=t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

5.13. $u=\arccos\dfrac{2x}{y}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\pi$.

Найдем производную сложной функции: $u'_t=u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t$.

В данном случае:

$$u'_x=\left(\arccos\frac{2x}{y}\right)'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{y}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x}{y}\right)'_x=-\frac{y^2}{\sqrt{y^2-4x^2}}\cdot\frac{2}{y}=-\frac{2y}{\sqrt{y^2-4x^2}}$$

$$u'_y=\left(\arccos\frac{2x}{y}\right)'_y=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{y}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x}{y}\right)'_y=-\frac{y^2}{\sqrt{y^2-4x^2}}\cdot\left(-\frac{2x}{y^2}\right)=\frac{2x}{\sqrt{y^2-4x^2}}$$

$x'_t=\cos t$, $y'_t=-\sin t$

Таким образом:

$$u'_t=-\frac{2y}{\sqrt{y^2-4x^2}}\cdot\cos t+\frac{2x}{\sqrt{y^2-4x^2}}\cdot(-\sin t)=$$

$$=-\frac{2\cos t}{\sqrt{\cos^2 t-4\sin^2 t}}\cdot\cos t+\frac{2\sin t}{\sqrt{\cos^2 t-4\sin^2 t}}\cdot(-\sin t)$$

$$u'_t(\pi)=-\frac{(-2)}{\sqrt{1-0}}\cdot(-1)+\frac{0}{\sqrt{1-0}}\cdot 0=-2+0=-2$$

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

6.13. $x\cos y+y\cos z+z\cos x=\pi/2$, $M_0\left(0,\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$

$$(x\cos y+y\cos z+z\cos x)'_x=(\pi/2)'_x$$

$$\cos y-y\sin z\cdot z'_x+z'_x\cos x-z\sin x=0$$

$$(\cos x+y\sin z)z'_x=z\sin x-\cos y$$

$$z'_x=\frac{z\sin x-\cos y}{\cos x+y\sin z}$$

$$z'_x(M_0)=z'_x\left(0,\frac{\pi}{2},\pi\right)=\frac{0-0}{1+0}=0$$

$$(x\cos y+y\cos z+z\cos x)'_y=(\pi/2)'_y$$

$$-x\sin y+\cos z-y\sin z\cdot z'_y+z'_y\cos x=0$$

$$(\cos x-y\sin z)z'_y=x\sin y-\cos z$$

$$z'_y=\frac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$$

$$z'_y(M_0)=z'_y\left(0,\frac{\pi}{2},\pi\right)=\frac{0+1}{1-0}=1$$

ИДЗ 10-2.

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

3.13. $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u = \ln(x^2 + y^2)$

Найдем частные производные функции u.

$$u'_x = \left(\ln(x^2 + y^2)\right)'_x = \frac{1}{(x^2 + y^2)} \cdot (x^2 + y^2)'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$u'_y = \left(\ln(x^2 + y^2)\right)'_y = \frac{1}{(x^2 + y^2)} \cdot (x^2 + y^2)'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

Подставим u'_x, u'_y, в левую часть уравнения:

$$y \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} - x \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} - \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0$$

Таким образом, данная функция удовлетворяет данному уравнению.

4. Исследовать на экстремум функцию.

4.13. $z = (x-5)^2 + y^2 + 1$

Решение: Найдем критические точки:

$$\begin{cases} z'_x = 2(x-5) = 0 \\ z'_y = 2y = 0 \end{cases}$$

$M_1(5;0)$ – стационарная точка.

Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$z''_{xx} = 2 = const$, $z''_{xy} = 0 = const$, $z''_{yy} = 2 = const$

$z''_{xx}(M_1) \cdot z''_{yy}(M_1) - \left(z''_{xy}(M_1)\right)^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$, значит, в точке $M_1(5;0)$ существует экстремум, так как $z''_{xx}(M_2) > 0$, то это – минимум:

$$\min z = z(M_1) = z(5;0) = 0 + 0 + 1 = 1$$

Ответ: $\min z = z(5;0) = 1$.