/ТФКП/ 2006

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{1/16}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi = \arg(z); \quad k = 0,1,\ldots,n-1; \quad z \neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{1/16}$:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \qquad \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}i \qquad \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{2}i$$

Ответ: $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}i; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}i\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\mathrm{Ln}(1-i)$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Подставим в эту формулу значения z:

$$\mathrm{Ln}(1-i) = \ln|1-i| + i\mathrm{Arg}(1-i) =$$

$$= \ln\sqrt{2} + i(\arg(1-i) + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Вычислим значения логарифма и аргумента:

$$\mathrm{Ln}(1-i) \approx 0{,}347 + i(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Ответ: $\mathrm{Ln}(1-i) \approx 0{,}347 + i(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Функция Arcsin является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arcsin}\,z=-i\mathrm{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$$

Подставим вместо z значение $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$:

$$\mathrm{Arcsin}\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=-i\mathrm{Ln}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}i+\sqrt{1-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)=$$

$$=-i\mathrm{Ln}\left(\frac{i+\sqrt{3}}{2}+\sqrt{\frac{3+i\sqrt{3}}{2}}\right)=-i\mathrm{Ln}\left(\frac{i+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{6+i2\sqrt{3}}\right)\approx$$

$$\approx -i\mathrm{Ln}(2{,}137+i\cdot 0{,}841)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-i\mathrm{Ln}(2{,}137+i\cdot 0{,}841)=-i[\ln|2{,}137+i\cdot 0{,}841|+$$

$$+i(\arg(2{,}137+i\cdot 0{,}841)+2\pi k)]\approx -i\ln(2{,}3)+$$

$$+\arg(2{,}137+i\cdot 0{,}841)+2\pi k\approx -i\cdot 0{,}831+0{,}375+2\pi k$$

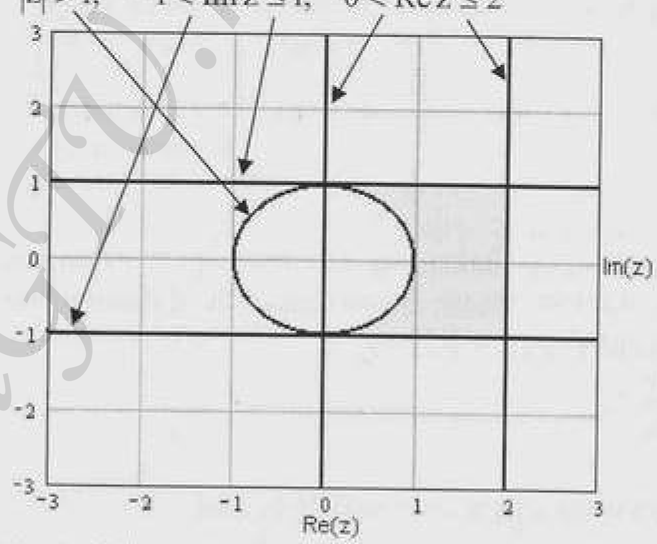
$$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Ответ: $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\approx -i\cdot 0{,}831+0{,}375+2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z|>1,\quad -1<\mathrm{Im}\,z\le 1,\quad 0<\mathrm{Re}\,z\le 2$



Задача 5

Определить вид кривой:

$$z=-2e^{it}+\frac{1}{e^{it}}=-2\cos t-i2\sin t+\cos t-i\sin t$$

Уравнение вида $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид $x = x(t)$, $y = y(t)$. В нашем случае:

$$x(t)=-\cos t;\quad y(t)=-3\sin t$$

Выразим параметр t через x и y:

$$x=-\cos t\Rightarrow \cos t=-x\Rightarrow t=\arccos(-x)$$

$$y=-3\sin t\Rightarrow \sin t=-\frac{y}{3}\Rightarrow t=\arcsin\left(-\frac{y}{3}\right)=-\arcsin\left(\frac{y}{3}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде $F(x,y)=0$:

$$\arccos(-x)=-\arcsin\left(\frac{y}{3}\right)\Rightarrow \arccos(-x)+\arcsin\left(\frac{y}{3}\right)=0$$

Ответ: $\arccos(-x)+\arcsin\left(\frac{y}{3}\right)=0$

Задача 6

Проверить, что v является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной мнимой части v(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$v = \frac{e^{2x}-1}{e^x}\sin y$$

$$f(0) = 2$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = e^{-x}(e^{2x}\cos y - \cos y + ie^{2x}\sin y + i\sin y) =$$

$$= e^{-x}[e^{2x}(\cos y + i\sin y) - (\cos y - i\sin y)] = e^{x+iy} - e^{-x-iy} =$$

$$= e^z - e^{-z}$$

Т.к. производная существует, то v является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int (e^z - e^{-z})dz = e^z + e^{-z} + C$$

Определим константу С:

$$f(0) = e^0 + e^0 + C = 2 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = e^z + e^{-z}$$

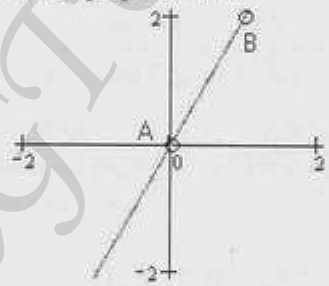
Ответ: $f(z) = e^z + e^{-z}$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_{AB} z\,\mathrm{Re}\,z^2 dz;\ AB - \text{отрезок прямой}: z_A = 0; z_B = 1+2i$$

Покажем прямую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = (x+iy)\mathrm{Re}(x^2 + 2ixy - y^2) = \underbrace{x^3 - xy^2}_{u(x,y)} + i\underbrace{(yx^2 - y^3)}_{v(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - y^2; \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 - 3y^2; \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y};$$

Условия Коши-Римана не выполняются, значит, функция не является аналитической. Тогда представим прямую в параметрическом виде:

$$z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = 2t; z_A = z(0); z_B = z(1)$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int_L f(z)dz = \int_0^1 f[z(t)]z'(t)dt = \int_0^1 (t+2it)\mathrm{Re}(t+2it)^2 \cdot (1+2i)dt =$$

$$= (1+2i)\int_0^1 (t+2it)\mathrm{Re}(t^2 + 4it^2 - 4t^2)dt = (1+2i)\int_0^1 t^3(1+2i)(1-4)dt =$$

$$= -3(1+2i)^2\int_0^1 t^3 dt = -3(1+2i)^2 \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1 = -\frac{3}{4}(1+2i)^2$$

Ответ: $\int_L f(z)dz = -\frac{3}{4}(1+2i)^2$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}=\frac{5(z+10)}{-z(2z+5)(z-5)}=-\frac{5}{2z}\cdot\frac{z+10}{(z+2{,}5)(z-5)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

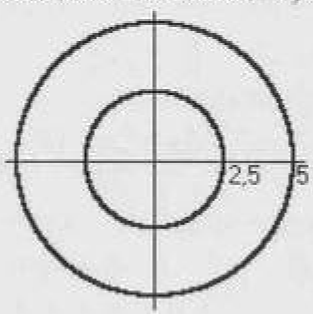
$$\frac{z+10}{(z+2{,}5)(z-5)}=\frac{A}{z+2{,}5}+\frac{B}{z-5}=\frac{Az-5A+Bz+2{,}5B}{(z+2{,}5)(z-5)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=-1;B=2\}\Rightarrow\frac{z+10}{(z+2{,}5)(z-5)}=\frac{-1}{z+2{,}5}+\frac{2}{z-5}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{5}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+2{,}5}-\frac{2}{z-5}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=-2{,}5; z=5$



Рассмотрим область $|z|<2{,}5$:

$$f(z)=\frac{5}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+2{,}5}-\frac{2}{z-5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1-(-\frac{2z}{5})}+\frac{1}{1-\frac{z}{5}}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{2z}{5}+\frac{4z^2}{25}-\frac{8z^3}{125}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{5}+\frac{z^2}{25}+\frac{z^3}{125}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{5}+\frac{4z}{25}-\frac{8z^2}{125}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{5}+\frac{z}{25}+\frac{z^2}{125}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $2{,}5<|z|<5$:

$$f(z)=\frac{5}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+2{,}5}-\frac{2}{z-5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{5}{2z(1-(-\frac{5}{2z}))}+\frac{1}{1-\frac{z}{5}}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{5}{2z}-\frac{25}{4z^2}+\frac{125}{8z^3}-\frac{625}{16z^4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{5}+\frac{z^2}{25}+\frac{z^3}{125}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{5}{2z^2}-\frac{25}{4z^3}+\frac{125}{8z^4}-\frac{625}{16z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{5}+\frac{z}{25}+\frac{z^2}{125}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>5$:

$$f(z)=\frac{5}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+2{,}5}-\frac{2}{z-5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{5}{2z(1-(-\frac{5}{2z}))}-\frac{5}{z(1-\frac{5}{z})}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{5}{2z}-\frac{25}{4z^2}+\frac{125}{8z^3}-\frac{625}{16z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{5}{z}+\frac{25}{z^2}+\frac{125}{z^3}+\frac{625}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{5}{2z^2}-\frac{25}{4z^3}+\frac{125}{8z^4}-\frac{625}{16z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{5}{z^2}+\frac{25}{z^3}+\frac{125}{z^4}+\frac{625}{z^5}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<2{,}5: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{5}+\frac{4z}{25}-\frac{8z^2}{125}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{5}+\frac{z}{25}+\frac{z^2}{125}+\ldots\right)$$

$$2{,}5<|z|<5: f(z)=\left(\frac{5}{2z^2}-\frac{25}{4z^3}+\frac{125}{8z^4}-\frac{625}{16z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{5}+\frac{z}{25}+\frac{z^2}{125}+\ldots\right)$$

$$|z|>5: f(z)=\left(\frac{5}{2z^2}-\frac{25}{4z^3}+\frac{125}{8z^4}-\frac{625}{16z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{5}{z^2}+\frac{25}{z^3}+\frac{125}{z^4}+\frac{625}{z^5}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z\text{-}z_0$.

$$f(z)=4\cdot\frac{z-2}{(z+1)(z-3)},\ z_0=-1-2i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=4\cdot\frac{z-2}{(z+1)(z-3)}=\frac{3}{z+1}+\frac{1}{z-3}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{3}{z+1}=3\cdot\frac{1}{z+1}=3\cdot\frac{1}{(z-z_0)-2i}=3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-2i)^{n+1}}=$$

$$=-3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(2i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-z_0)-4-2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-4-2i)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(4+2i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{3}{z+1}+\frac{1}{z-3}=-3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(2i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(4+2i)^{n+1}}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{(2i)^{n+1}}+\frac{1}{(4+2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{(2i)^{n+1}}+\frac{1}{(4+2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=ze^{\pi/(z-a)^2},\ z_0=a$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-a;\ ze^{\pi/(z-a)^2}=(z'+a)e^{\pi/z'^2}=z'e^{\pi/z'^2}+ae^{\pi/z'^2}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=z'e^{1/z'^2}+ae^{1/z'^2}=z'\left(1+\frac{1}{z'^2}+\frac{1}{2!z'^4}+\frac{1}{3!z'^6}+\ldots\right)+$$

$$+a\left(1+\frac{1}{z'^2}+\frac{1}{2!z'^4}+\frac{1}{3!z'^6}+\ldots\right)=\left(z'+\frac{1}{z'}+\frac{1}{2!z'^3}+\frac{1}{3!z'^5}+\ldots\right)+$$

$$+\left(a+\frac{a}{z'^2}+\frac{a}{2!z'^4}+\frac{a}{3!z'^6}+\ldots\right)=z'+a+\frac{1}{z'}+\frac{a}{z'^2}+\frac{1}{2!z'^3}+\frac{a}{2!z'^4}+$$

$$+\frac{1}{3!z'^5}+\frac{a}{3!z'^6}+\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=a$:

$$f(z)=z'+a+\frac{\pi^2}{z'}+\frac{a\pi^2}{z'^2}+\frac{\pi^4}{2!z'^3}+\frac{a\pi^4}{2!z'^4}+\frac{\pi^6}{3!z'^5}+\frac{a\pi^6}{3!z'^6}+\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=z'+a+\frac{\pi^2}{z'}+\frac{a\pi^2}{z'^2}+\frac{\pi^4}{2!z'^3}+\frac{a\pi^4}{2!z'^4}+\frac{\pi^6}{3!z'^5}+\frac{a\pi^6}{3!z'^6}+\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{e^{7z}-1}{\cos z-1+z^2/2}$$

Разложим числитель и знаменатель в ряды Лорана в окрестности точки z = 0:

$$f(z)=\frac{e^{7z}-1}{\cos z-1+z^2/2}=\frac{-1+1+7z+\frac{7^2z^2}{2!}+\frac{7^3z^3}{3!}+\dots}{-1+z^2/2+1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots}=$$

$$=\frac{7z+\frac{7^2z^2}{2!}+\frac{7^3z^3}{3!}+\dots}{\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}-\dots}=\frac{7+\frac{7^2z}{2!}+\frac{7^3z^2}{3!}+\dots}{\frac{z^3}{4!}-\frac{z^5}{6!}+\frac{z^7}{8!}-\dots}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{7+\frac{7^2z}{2!}+\frac{7^3z^2}{3!}+\dots}{\frac{z^3}{4!}-\frac{z^5}{6!}+\frac{z^7}{8!}-\dots}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad g(z)=7+\frac{7^2z}{2!}+\frac{7^3z^2}{3!}+\dots;\quad h(z)=\frac{z^3}{4!}-\frac{z^5}{6!}+\frac{z^7}{8!}-\dots;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0. Поскольку рассматриваемые функции представляют собой обычные степенные многочлены, то несложно увидеть, что g(0)≠0 и h'''(0)≠0.

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в числителе, то точка z = 0 является нулём функции. Порядок этого нуля находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 3 – 0 = 3.

Ответ: Точка z = 0 является нулём 3-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\frac{z^2}{(z^2-4)\cos\frac{1}{z-2}}$$

Перейдем к новой переменной:

$$t=\frac{1}{z-2}\Rightarrow z=\frac{2t+1}{t};\ f(t)=\frac{4t^2+4t+1}{(4t^2+4t+1-4t^2)\cos t}=\frac{4t^2+4t+1}{(4t+1)\cos t}$$

Изолированными особыми точками являются $t=-\frac{1}{4}$ и $t=\frac{\pi}{2}+\pi k; k\in Z$. Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(t)=\frac{4t^2+4t+1}{(4t+1)\cos t};\ g(z)=4t^2+4t+1;\ h(z)=(4t+1)\cos t;$$

Для каждой из функций найдем порядки производных, не обращающихся в ноль при $t=-\frac{1}{4}$ и $t=\frac{\pi}{2}+\pi k; k\in Z$:

$g(-1/4)\neq 0; g(\pi/2)\neq 0;$

$h(\frac{\pi}{2}+\pi k)=0; h(-1/4)=0;$

$h'(t)=4\cos t-(4t+1)\sin t; h'(\pi/2)\neq 0; h'(-1/4)\neq 0;$

$t=-\frac{1}{4}\to z=-2;\quad t=\pi/2+\pi k; k\in z\to z=2+\frac{1}{\pi/2+\pi k}$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $z=-2$ выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка $z=-2$ является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это $1-0=1$.

Исходя их тех же соображений, точки $z=2+\frac{1}{\pi/2+\pi k}$ являются полюсами 1-го порядка

Ответ: Точка $z=-2$ для данной функции является полюсом 1-го порядка.

Точки $z=2+\frac{1}{\pi/2+\pi k}$ для данной функции являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=\pi/2} \underbrace{\frac{z^2+z+3}{\sin z(\pi+z)}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z=\pi k,\ k\in Z$

В рассматриваемую область попадает только точка z = 0.
Точка $z_1 = 0$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z)=\lim_{z\to 0}[f(z)(z-0)]=\lim_{z\to 0}\frac{z(z^2+z+3)}{\sin z(\pi+z)}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{z(z^2+z+3)}{z(\pi+z)}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2+z+3}{\pi+z}=\frac{3}{\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z|=\pi/2}\frac{z^2+z+3}{\sin z(\pi+z)}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{z_i} f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{3}{\pi}\right)=6i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=\pi/2}\frac{z^2+z+3}{\sin z(\pi+z)}dz=6i$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=3} \underbrace{\frac{\cos z^2-1}{z^4}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: z = 0. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$\frac{\cos z^2-1}{z^4}=\frac{-1+1-\frac{z^4}{2!}+\frac{z^8}{4!}-\frac{z^{12}}{6!}+\ldots}{z^4}=-\frac{1}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^8}{6!}+\frac{z^{12}}{8!}-\ldots$$

Получившийся ряд не имеет главной части. Из этого следует, что особая точка z = 0 представляет собой устранимую особую точку. Вычет в этой точке всегда равен нулю:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=0$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{\cos z^2-1}{z^4}dz=2\pi i\cdot 0=0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=3}\frac{\cos z^2-1}{z^4}dz=0$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=2} \underbrace{\frac{\sin 3z - 3z}{z^2 \operatorname{sh}^2 iz}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции $z = ik\pi/2$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{\sin 3z - 3z}{z^2 \operatorname{sh}^2 iz} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad \begin{matrix} g(z) = \sin 3z - 3z \\ h(z) = z^2 \operatorname{sh}^2 iz \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin 3z - 3z}{z \operatorname{sh}^2 iz}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{3\cos z - 3}{-2z\sin z\cos z - 1 + \cos^2 z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{-9\sin 3z}{-4\sin z\cos z - 4z\cos^2 z + 2z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{-27\cos 3z}{6 - 12\cos^2 z + 8z\sin z\cos z}\right) = \frac{-27}{-6} = \frac{9}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin 3z - 3z}{z^2 \operatorname{sh}^2 iz} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{9}{2} = 9\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin 3z - 3z}{z^2 \operatorname{sh}^2 iz} dz = 9\pi i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-i|=2} \left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-1-i)^2(z-3-i)} + \frac{\pi i}{e^{\pi z/2} - i}\right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-i|=2} \underbrace{\frac{4\sin\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-1-i)^2(z-3-i)}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z-i|=2} \underbrace{\frac{\pi i}{e^{\pi z/2} - i}}_{f_2(z)} dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{4\sin\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-1-i)^2(z-3-i)} dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: $z=1+i$ и $z=3+i$. При этом точка $z=3+i$ не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка $z=1+i$ является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=1+i} f_1(z) = \lim_{z\to 1+i} \frac{d}{dz}\left[\frac{4\sin\frac{\pi z}{2+2i}(z-1-i)^2}{(z-1-i)^2(z-3-i)}\right] = \lim_{z\to 1+i} \frac{d}{dz}\left[\frac{4\sin\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-3-i)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1+i}\left[\frac{(1-i)\pi}{(z-3-i)}\cos\frac{(1-i)\pi z}{4} - \frac{4}{(z-3-i)^2}\sin\frac{(1-i)\pi z}{4}\right] = -1$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{4\sin\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-1-i)^2(z-3-i)} dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=1+i} f_1(z) = 2\pi i \cdot (-1) = -2\pi i$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z-i|=2}\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\pi z/2}-i=0\Rightarrow e^{\pi z/2}=i\Rightarrow \pi z/2=\ln(i)=\pi i/2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=4ik+i,k\in z$$

Из этих точек только одна охвачена контуром $|z-i|=2$ и должна приниматься во внимание. Это точка $z=i$, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=i}f_2(z)=\lim_{z\to i}\frac{\pi i(z-i)}{e^{\pi z/2}-i}=\left\{\begin{matrix}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{\pi i}{\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2}}=\frac{\pi i}{\frac{\pi}{2}e^{\pi i/2}}=\frac{2i}{e^{\pi i/2}}=\frac{2i}{i}=2$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-i|=2}\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=i}f_2(z)=2\pi i\cdot 2=4\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-i|=2}\left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-1-i)^2(z-3-i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz=$$

$$=\oint\limits_{|z-i|=2}\left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-1-i)^2(z-3-i)}\right)dz+\oint\limits_{|z-i|=2}\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}dz=$$

$$=4\pi i-2\pi i=2\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-i|=2}\left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-1-i)^2(z-3-i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz=2\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sqrt{3}\sin t-7}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sqrt{3}\sin t-7}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\frac{2\sqrt{3}}{i}(z-\frac{1}{z})-7}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{2\sqrt{3}(z^2-1)-7iz}=$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{2\sqrt{3}(z-2i/\sqrt{3})(z-i\sqrt{3}/2)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=2i/\sqrt{3};\quad z=i\sqrt{3}/2;$

Точка $2i/\sqrt{3}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $i\sqrt{3}/2$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{3}/2}f(z)=\lim_{z\to i\sqrt{3}/2}[f(z)(z-i\sqrt{3}/2)]=$$

$$=\lim_{z\to i\sqrt{3}/2}\frac{1}{2\sqrt{3}(z-2i/\sqrt{3})}=\frac{1}{2\sqrt{3}(i\sqrt{3}/2-2i/\sqrt{3})}=i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{2\sqrt{3}(z-2i/\sqrt{3})(z-i\sqrt{3}/2)}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot i=-2\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sqrt{3}\sin t-7}=-2\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{3}+\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$z=e^{it}$; $\cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$; $\sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$; $dt=\frac{dz}{iz}$;

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{3}+\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(\sqrt{3}+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i(z\sqrt{3}+\frac{1}{2}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[(z+\sqrt{3}+\sqrt{2})(z+\sqrt{3}-\sqrt{2})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-\sqrt{3}+\sqrt{2};\quad z=-\sqrt{3}-\sqrt{2};$

Точка $z=-\sqrt{3}-\sqrt{2}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=-\sqrt{3}+\sqrt{2}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-\sqrt{3}+\sqrt{2}}f(z)=\lim_{z\to-\sqrt{3}+\sqrt{2}}\frac{d}{dz}[f(z)(z-\sqrt{2}+\sqrt{3})^2]=$$

$$=\lim_{z\to-\sqrt{3}+\sqrt{2}}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[(z+\sqrt{2}+\sqrt{3})\right]^2}=\frac{4}{i}\lim_{z\to-\sqrt{3}+\sqrt{2}}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{4}{i}\lim_{z\to-\sqrt{3}+\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-z}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+z)^3}=\frac{4}{i}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2})^3}=\frac{4}{i}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^3}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[(z+\sqrt{3}+\sqrt{2})(z+\sqrt{3}-\sqrt{2})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}i}\right)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{3}+\cos t)^2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_{m}\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2+4}{(z^2+9)^2}dz$$

Особые точки:

$z=3i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-3i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=3i$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=3i}f(z)=\lim_{z\to3i}\frac{d}{dz}[f(z)(z-3i)^2]=\lim_{z\to3i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2+4}{(z+3i)^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to3i}\frac{6iz-8}{(z+3i)^3}=\frac{13}{108i}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}dx=2\pi i\frac{13}{108i}=\frac{13\pi}{54}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}dx=\frac{13\pi}{54}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin(x/2)}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(x/2)}{x^2+4}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\lambda x dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$x^2+4=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm 2i$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Из этого следует:

$z_m=\{2i\}$

Эта особая точка является простым полюсом. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=2i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 2i}\frac{z(z-2i)}{z^2+4}e^{2iz}=\lim_{z\to 2i}\frac{z}{z+2i}e^{2iz}=\frac{2i}{2i+2i}e^{-4}=$$

$$=\frac{e^{-4}}{2}$$

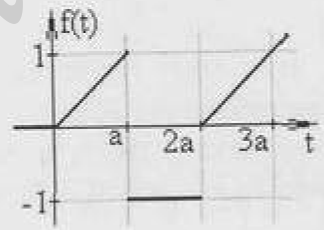
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin(x/2)}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{\pi}{2}e^{-4}$$

Ответ: $\int_0^{\infty}\frac{x\sin(x/2)}{x^2+4}dx=\frac{\pi}{2}e^{-4}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}\frac{t}{a} & 0<t<a\\ -1, & a<t<2a\\ \frac{t-2a}{a}, & 2a<t\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{t}{a}\cdot\eta(t)+\frac{-a-t}{a}\eta(t-a)+\frac{t-a}{a}\eta(t-2a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{ap^2}+\left(-\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}\right)e^{-2ap}$$

Ответ: $F(p)=\frac{1}{ap^2}+\left(-\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}\right)e^{-2ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)} = \frac{A}{p+2} + \frac{Bp+C}{p^2-2p+2} =$$

$$= \frac{Ap^2-2Ap+2A+Bp^2+2Bp+Cp+2C}{(p+2)(p^2-2p+2)} =$$

$$= \frac{(A+B)p^2+(-2A+2B+C)p+(2A+2C)}{(p+2)(p^2-2p+2)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B+C=5 \\ 2A+2C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)} = -\frac{1}{p+2} + \frac{p}{p^2-2p+2} + \frac{1}{p^2-2p+2}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$-\frac{1}{p+2} + \frac{p}{p^2-2p+2} + \frac{1}{p^2-2p+2} =$$

$$= -\frac{1}{p+2} + \frac{p}{(p-1)^2+1} + \frac{1}{(p-1)^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{p+2} + \frac{p-1}{(p-1)^2+1} + \frac{2}{(p-1)^2+1} \to$$

$$\to -e^{-2t} + e^t \cos t + 2 \cdot e^t \sin t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$-e^{-2t} + e^t \cos t + 2 \cdot e^t \sin t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2$$

$$y(0)=1, \quad y'(0)=2.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p \cdot X(p) - x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2 \cdot X(p) - p \cdot x(0) - x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 4Y(p) = \frac{4}{p-2} + \frac{8}{p^3}$$

$$p^2Y(p) - p - 2 + 4Y(p) = \frac{4}{p-2} + \frac{8}{p^3}$$

$$(p^2+4)Y(p) = \frac{4}{p-2} + \frac{8}{p^3} + p + 2$$

$$Y(p) = \frac{4}{(p-2)(p^2+4)} + \frac{8}{p^3(p^2+4)} + \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{p^2+4} = \frac{p^5+8p-16}{p^3(p-2)(p^2+4)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p) = \frac{p^5+8p-16}{p^3(p-2)(p^2+4)} = \frac{Ap^2+Bp+C}{p^3} + \frac{D}{p-2} + \frac{Ep+F}{p^2+4} =$$

$$= \frac{(A+D+E)p^5 + (F-2E+B-2A)p^4 + (C-2B+4A-2F+4D)p^3}{p^3(p-2)(p^2+4)} +$$

$$+ \frac{(-2C+4B-8A)p^2 + (4C-8B)p - 8C}{(p^2+1)(p^2+9)(p^2+4)}$$

$$\begin{cases} A+D+E=1 \\ F-2E+B-2A=0 \\ C-2B+4A-2F+4D=0 \\ -2C+4B-8A=0 \\ 4C-8B=8 \\ -8C=-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1/2 \\ B=0 \\ C=2 \\ D=1/2 \\ E=1 \\ F=1 \end{cases} \Rightarrow Y(p) = \frac{-p^2/2+2}{p^3} + \frac{1/2}{p-2} + \frac{p+1}{p^2+4} \Rightarrow$$

$$Y(p) = -\frac{1}{2}\frac{1}{p} + 2\frac{1}{p^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{p-2} + \frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{p^2+4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} + t^2 + \frac{1}{2}e^{2t} + \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t$$

Ответ: $y(t) = -\frac{1}{2} + t^2 + \frac{1}{2}e^{2t} + \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t$

Задача 25

Материальная точка массы m совершает прямолинейное колебание по оси Ox под действием восстанавливающей силы F=–kx, пропорциональной расстоянию x от начала координат и направленной к началу координат, и возмущающей силы f =Acos t. Найти закон движения x=x(t) точки, если в начальный момент времени $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$.
$k = 9m$, $A = 8m$, $x_0 = 1$ м, $v_0 = 0$.

Исходя из второго закона Ньютона:
$$am = -kx + A\cos t$$
$$\ddot{x}m + kx = A\cos t$$
Начальные условия:
$$x(0) = x_0 = 1$$
$$\dot{x}(0) = v_0 = 0$$

Подставим значения k и r:
$$\ddot{x}m + mx = m\cos t$$

Сократим все выражение на m:
$$\ddot{x} + 9x = 8\cos t$$

Перейдем к изображениям функций:
$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + 9X(p) = \frac{8p}{p^2+1}$$
$$(p^2+9)X(p) - p = \frac{8p}{p^2+1}$$
$$X(p) = \frac{8p}{(p^2+1)(p^2+9)} + \frac{p}{p^2+9} = \frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+9} + \frac{p}{p^2+9} = \frac{p}{p^2+1}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:
$$x(t) = \cos t$$

Ответ: $x(t) = \cos t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 3y + 2 \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$
$$x(0) = -1, \quad y(0) = 1.$$

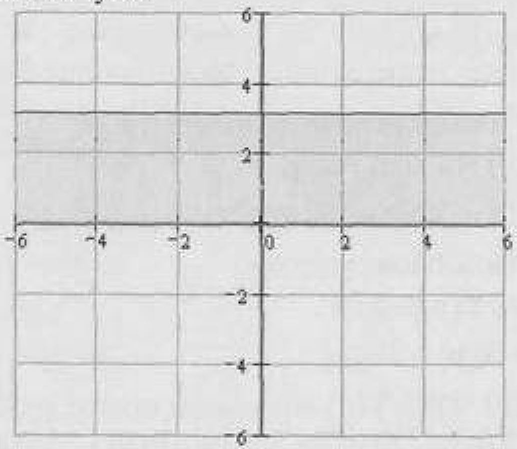
Перейдем к изображениям функций x и y:
$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = 3Y(p) + 2/p \\ pY(p) - y(0) = X(p) + 2Y(p) \end{cases}$$
Подставим начальные условия:
$$\begin{cases} pX(p) + 1 = 3Y(p) + 2/p \\ pY(p) - 1 = X(p) + 2Y(p) \end{cases}$$
Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:
$$pY(p) - 1 = X(p) + 2Y(p) \Rightarrow X(p) = pY(p) - 2Y(p) - 1$$
Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):
$$p[pY(p) - 2Y(p) - 1] + 1 = 3Y(p) + 2/p$$
$$Y(p) = \frac{p-1+2/p}{p^2-2p-3}$$
Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:
$$Y(p) = \frac{p-1+2/p}{p^2-2p-3} = \frac{p-1+2/p}{p^2-2p-3} + \frac{2}{3p} - \frac{2}{3p} = \frac{5p/3-7/3}{p^2-2p-3} - \frac{2}{3p} =$$
$$= \frac{5}{3}\frac{p-1}{(p-1)^2-4} + \frac{i}{3}\frac{2i}{(p-1)^2-4} - \frac{2}{3p} \to$$
$$\to y(t) = \tfrac{5}{3}e^t\cos 2it + \tfrac{1}{3}e^t\sin 2it - \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{3}e^t\operatorname{ch}2t - \tfrac{1}{3}e^t\operatorname{sh}2t - \tfrac{2}{3}$$
Зная y(t), найдем x(t):
$$\dot{y} = x + 2y \Rightarrow x(t) = \dot{y} - 2y = \tfrac{11}{3}e^t\operatorname{sh}2t - \tfrac{7}{3}e^t\operatorname{ch}2t + \tfrac{4}{3}$$

Ответ:
$$x(t) = \tfrac{11}{3}e^t\operatorname{sh}2t - \tfrac{7}{3}e^t\operatorname{ch}2t + \tfrac{4}{3}$$
$$y(t) = \tfrac{5}{3}e^t\operatorname{ch}2t - \tfrac{1}{3}e^t\operatorname{sh}2t - \tfrac{2}{3}$$

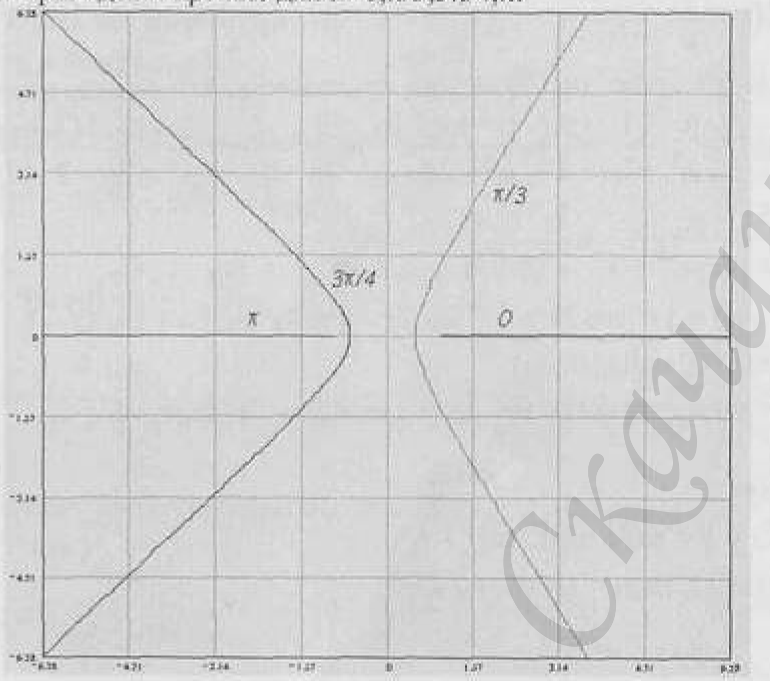
Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = ch(z)$; полоса $0<y<\pi$.



Каждая из горизонтальных линий в полосе преобразуется в кривую, проходящую через точку (cos x ; 0) и симметричную относительно оси абсцисс. Отображение совокупности таких кривых дает всю комплексную плоскость. В качестве примеров ниже приведены кривые для $x=0, \pi/3, 3\pi/4, \pi$:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\ldots,n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$z=x+iy$ $\qquad$ $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Аналитические функции

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z \in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$