ИНФОРМАЦИОННО-КОНСУЛЬТАЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

ТФКП

теория функций комплексного переменного

Консультационное пособие для школьников и студентов в решении задач с примерами решённых задач из задачника автора Чудесенко В.Ф.

Вариант 13

$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz$$

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz$$

Москва 2003

/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{16}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$\varphi = \arg(z); \quad k = 0,1,\dots,n-1; \quad z \neq 0$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{16}$:

$\sqrt[4]{16} = 2$

$\sqrt[4]{16} = 2i$

$\sqrt[4]{16} = -2$

$\sqrt[4]{16} = -2i$

Ответ: $\sqrt[4]{16} = \{2;2i;-2;-2i\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\mathrm{Ln}(-1+i)$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,\dots$

Подставим в эту формулу значения z:

$\mathrm{Ln}(-1+i) = \ln|-1+i| + i\mathrm{Arg}(-1+i) =$

$= \ln\sqrt{2} + i(\arg(-1+i) + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,\dots$

Вычислим значения логарифма и аргумента:

$\mathrm{Ln}(-1+i) \approx 0.347 + i(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,\dots$

Ответ: $\mathrm{Ln}(-1+i) \approx 0.347 + i(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k), k = 0,\pm1,\pm2,\dots$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\operatorname{Arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right)$$

Функция Arctg является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$$

Подставим вместо z значение $\frac{3+4i}{5}$:

$$\operatorname{Arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right) = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+\frac{3i-4}{5}}{1-\frac{3i-4}{5}} = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{5+3i-4}{5-3i+4} =$$

$$= -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+3i}{9-3i} = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{i(1+3i)}{9i+3} = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{i}{3}$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{i}{3} = -\frac{i}{2}[\ln\left|\frac{i}{3}\right| + i(\arg(\frac{i}{3}) + 2\pi k)] =$$

$$= -\frac{i}{2}\ln\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\arg(\frac{i}{3}) + 2\pi k) \approx \frac{i}{2}\cdot 1{,}099 + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

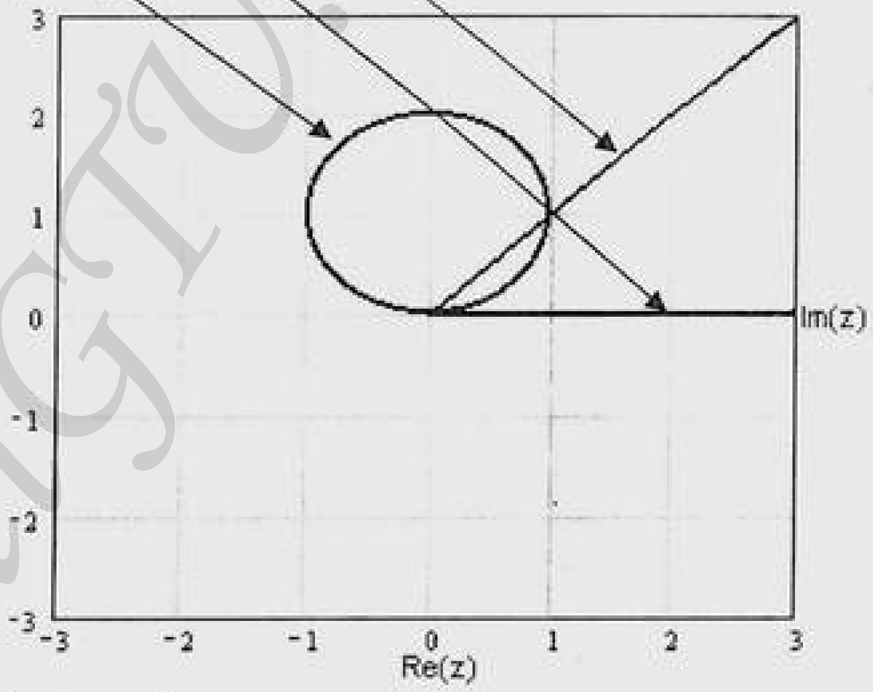
$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Ответ: $\operatorname{Arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right) \approx \frac{i}{2}\cdot 1{,}099 + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + 2\pi k), k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z-i| \le 1, \quad 0 < \arg z < \pi/4$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z = 2\operatorname{ch}3t - i3\operatorname{sh}3t$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + **i**y(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t) = 2\operatorname{ch}3t; \quad y(t) = -3\operatorname{sh}3t$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = 2\operatorname{ch}3t \Rightarrow \operatorname{ch}3t = \frac{x}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{3}\operatorname{arch}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$y = -3\operatorname{sh}3t \Rightarrow \operatorname{sh}3t = -\frac{y}{3} \Rightarrow t = -\frac{1}{3}\operatorname{arsh}\left(\frac{y}{3}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\frac{1}{3}\operatorname{arch}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{3}\operatorname{arsh}\left(\frac{y}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{3}\operatorname{arch}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{arsh}\left(\frac{y}{3}\right) = 0$$

Ответ: $\frac{1}{3}\operatorname{arch}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{arsh}\left(\frac{y}{3}\right) = 0$

Задача 6

Проверить, что v является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной мнимой части v(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$v = x^2 - y^2 + 2x + 1$$

$$f(0) = i$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = -2y + 2ix + 2i = 2(ix - y) + 2i =$$
$$= 2i(x+iy) + 2i = 2iz + 2i$$

Т.к. производная существует, то v является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int(2iz + 2i)dz = iz^2 + 2iz + C$$

Определим константу C:

$$f(0) = i\cdot 0^2 + 2i\cdot 0 + C = i \Rightarrow C = i$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = iz^2 + 2iz + i$$

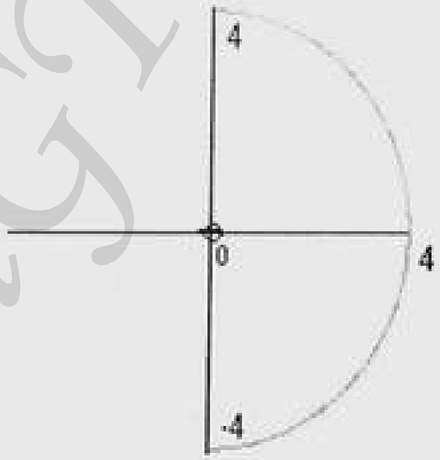
Ответ: $f(z) = iz^2 + 2iz + i$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_L |z|\bar{z}dz;\ L: \{|z| = 4; \operatorname{Re} z \ge 0\}$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = \sqrt{x^2+y^2}(x - iy) = \underbrace{x\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i\underbrace{(-y)\sqrt{x^2+y^2}}_{v(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-(x^2+2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \ne \frac{\partial v}{\partial y}$$

Условия Коши-Римана не выполняются, следовательно, функция не является аналитической. Тогда представим кривую, по которой идет интегрирование, в параметрическом виде:

$$z(t) = x(t) + iy(t);\ x(t) = \sqrt{16 - t^2};\ y(t) = t;\ z_A = z(-4);\ z_B = z(4)$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int_L f(z)dz = \int_{-4}^{4} f[z(t)]z'(t)dt = \int_{-4}^{4} 4(\sqrt{16-t^2} - it)(i - \frac{t}{\sqrt{16-t^2}})dt =$$

$$= 64i\cdot\arcsin(\frac{t}{4})\Big|_{-4}^{4} = 64i\pi$$

Ответ: $\int_L f(z)dz = 64i\pi$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{13z-338}{2z^3+13z^2-169z}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{13z-338}{2z^3+13z^2-169z}=\frac{13(z-26)}{z(z+13)(2z-13)}=\frac{13}{2z}\cdot\frac{z-26}{(z+13)(z-6{,}5)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

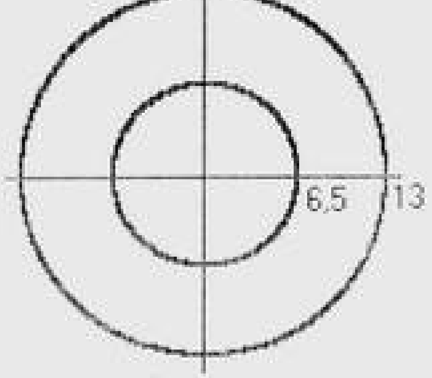
$$\frac{z-26}{(z+13)(z-6{,}5)}=\frac{A}{z+13}+\frac{B}{z-6{,}5}=\frac{Az-6{,}5A+Bz+13B}{(z+13)(z-6{,}5)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=2;B=-1\}\Rightarrow\frac{z-26}{(z+13)(z-6{,}5)}=\frac{2}{z+13}-\frac{1}{z-6{,}5}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{13}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+13}-\frac{1}{z-6{,}5}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=6{,}5; z=-13$



Рассмотрим область $|z|<6{,}5$:

$$f(z)=\frac{13}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+13}-\frac{1}{z-6{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{13}}+\frac{1}{1-\frac{2z}{13}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{13}+\frac{z^2}{169}-\frac{z^3}{2197}+\ldots\right)+\left(1+\frac{2z}{13}+\frac{4z^2}{169}+\frac{8z^3}{2197}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{13}+\frac{z}{169}-\frac{z^2}{2197}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{13}+\frac{4z}{169}+\frac{8z^2}{2197}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $6{,}5<|z|<13$:

$$f(z)=\frac{13}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+13}-\frac{1}{z-6{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{13}}-\frac{13}{2z(1-\frac{13}{2z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{13}+\frac{z^2}{169}-\frac{z^3}{2197}+\ldots\right)+\left(\frac{13}{2z}+\frac{169}{4z^2}+\frac{2197}{8z^3}+\frac{28561}{16z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{13}+\frac{z}{169}-\frac{z^2}{2197}+\ldots\right)+\left(\frac{13}{2z^2}+\frac{169}{4z^3}+\frac{2197}{8z^4}+\frac{28561}{16z^5}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>13$:

$$f(z)=\frac{13}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+13}-\frac{1}{z-6{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{13}{z(1+\frac{13}{z})}-\frac{13}{2z(1-\frac{13}{2z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{13}{z}-\frac{169}{z^2}+\frac{2197}{z^3}-\frac{28561}{z^4}+\ldots\right)+\left(\frac{13}{2z}+\frac{169}{4z^2}+\frac{2197}{8z^3}+\frac{28561}{16z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{13}{z^2}-\frac{169}{z^3}+\frac{2197}{z^4}-\frac{28561}{z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{13}{2z^2}+\frac{169}{4z^3}+\frac{2197}{8z^4}+\frac{28561}{16z^5}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<6{,}5: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{13}+\frac{z}{169}-\frac{z^2}{2197}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{13}+\frac{4z}{169}+\frac{8z^2}{2197}+\ldots\right)$$

$$6{,}5<|z|<13: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{13}+\frac{z}{169}-\frac{z^2}{2197}+\ldots\right)+\left(\frac{13}{2z^2}+\frac{169}{4z^3}+\frac{2197}{8z^4}+\frac{28561}{16z^5}+\ldots\right)$$

$$|z|>13: f(z)=\left(\frac{13}{z^2}-\frac{169}{z^3}+\frac{2197}{z^4}-\frac{28561}{z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{13}{2z^2}+\frac{169}{4z^3}+\frac{2197}{8z^4}+\frac{28561}{16z^5}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z-z_0.

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1}, z_0=2+i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right)$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{(z-z_0)+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{(z-z_0)+2+2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2+2i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2+2i)^{n+1}}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^n}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{(2+2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=\frac{(-1)^n}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{(2+2i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}, z_0=2$$

Перейдем к новой переменной z'=z–z_0.

$$z'=z-2:\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}=\cos\frac{z'^2+4}{z'^2}=\cos\left(1+\frac{4}{z'^2}\right)=\cos1\cos\frac{4}{z'^2}-\sin1\sin\frac{4}{z'^2}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки z'_0=0. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=\cos1\cos\frac{4}{z'}-\sin1\sin\frac{4}{z'}=\left(1-\frac{4^2}{2!z'^2}+\frac{4^4}{4!z'^4}-\frac{4^6}{6!z'^6}+\ldots\right)\cos1-$$

$$-\left(\frac{4}{z'}-\frac{4^3}{3!z'^3}+\frac{4^5}{5!z'^5}-\frac{4^7}{7!z'^7}+\ldots\right)\sin1=\left(\cos1-\frac{4^2\cos1}{2!z'^2}+\frac{4^4\cos1}{4!z'^4}-\right.$$

$$\left.-\frac{4^6\cos1}{6!z'^6}+\ldots\right)-\left(\frac{4\sin1}{z'}-\frac{4^3\sin1}{3!z'^3}+\frac{4^5\sin1}{5!z'^5}+\frac{4^7\sin1}{7!z'^7}+\ldots\right)=$$

$$=\cos1-\frac{4\sin1}{z'}-\frac{4^2\cos1}{2!z'^2}+\frac{4^3\sin1}{3!z'^3}+\frac{4^4\cos1}{4!z'^4}-\frac{4^5\sin1}{5!z'^5}-\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0=2:

$$f(z)=\cos1-\frac{4\sin1}{z-2}-\frac{4^2\cos1}{2!(z-2)^2}+\frac{4^3\sin1}{3!(z-2)^3}+\frac{4^4\cos1}{4!(z-2)^4}-$$

$$-\frac{4^5\sin1}{5!(z-2)^5}-\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=\cos1-\frac{4\sin1}{z-2}-\frac{4^2\cos1}{2!(z-2)^2}+\frac{4^3\sin1}{3!(z-2)^3}+\frac{4^4\cos1}{4!(z-2)^4}-$$

$$-\frac{4^5\sin1}{5!(z-2)^5}-\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z) = z^4 \sin\left(\frac{5}{z^2}\right)$$

Тип особой точки для этой функции следует находить, применяя разложение в ряд Лорана в окрестности точки z=0:

$$f(z) = z^4 \sin\left(\frac{5}{z^2}\right) = z^4\left(\frac{5}{z^2} - \frac{5^3}{3!z^6} + \frac{5^5}{5!z^{10}} - \ldots\right) =$$

$$= 5z^2 - \frac{5^3}{3!z^2} + \frac{5^5}{5!z^6} - \frac{5^7}{7!z^{10}} + \ldots$$

Рассмотрим получившийся ряд и выделим главную и правильную части ряда Лорана:

$$f(z) = \underbrace{5z^2}_{\text{правильная часть}} \underbrace{- \frac{5^3}{3!z^2} + \frac{5^5}{5!z^6} - \frac{5^7}{7!z^{10}} + \ldots}_{\text{главная часть}}$$

Поскольку главная часть содержит бесконечное число членов, то точка z = 0 для заданной функции f(z) является существенной особой точкой.

Ответ: Точка z = 0 является существенно особой точкой для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = \frac{1}{\sin z^2}$$

Перейдем к новой переменной:

$$t = z^2; f(t) = \frac{1}{\sin t}$$

Эта функция не является аналитической при sin t = 0. Найдем t, соответствующие этому случаю:

$$\sin t = 0 \Rightarrow t = \pi k; k \in z$$

Запишем данную функцию в виде отношения функций g(t) и h(t):

$$f(t) = \frac{1}{\sin t}; \quad \begin{matrix} g(t) = 1; \\ h(t) = \sin t; \end{matrix}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $t = \pi k$:

$$g(\pi k) \neq 0$$

$$h(\pi k) = 0$$

$$h'(t) = \cos t; h'(\pi k) \neq 0$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $t = \pi k$ выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки $t = \pi k$ являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при $t = \pi k$ для функций h(t) и g(t). В данном случае, это 1 – 0 = 1.

$$t = \pi k \Rightarrow z = \sqrt{t} = \sqrt{\pi k}; k \in z$$

Ответ: Точки $z = \sqrt{\pi k}; k \in z$ для данной функции являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13
Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{e^{zi}+2}{\sin 3zi}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = i\pi k/3,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадает только точка z = 0.
Точка $z_1 = 0$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)(z-0)] = \lim_{z\to 0}\frac{z(e^{zi}+2)}{\sin 3zi} = \lim_{z\to 0}\frac{z(e^{zi}+2)}{3zi} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{e^{zi}+2}{3i} = \frac{e^{0}+2}{3i} = \frac{2}{3i}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{zi}+2}{\sin 3zi} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{2}{3i} = \frac{4}{3}\pi$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{zi}+2}{\sin 3zi} dz = \frac{4}{3}\pi$

Задача 14
Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1/3} \underbrace{\frac{4z^5-3z^3+1}{z^6}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$\frac{4z^5-3z^3+1}{z^6} = \frac{4}{z} - \frac{3}{z^3} + \frac{1}{z^6}$$

Считая получившийся результат рядом Лорана по степеням z, т.е. в окрестности z = 0, мы приходим к выводу, что точка z = 0 является полюсом 6-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}[f(z)z^6] = \frac{1}{120}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}\left(\frac{4z^5-3z^3+1}{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{120}\lim_{z\to 0}(480) = \frac{480}{120} = 4$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{4z^5-3z^3+1}{z^6} dz = 2\pi i \cdot 4 = 8\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{4z^5-3z^3+1}{z^6} dz = 8\pi i$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=3} \underbrace{\frac{\operatorname{sh}\pi z - \pi z}{z^2 \sin^2(\pi z/6)}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции z = 6ik. Однако в контур попадает только z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh}\pi z - \pi z}{z^2 \sin^2(\pi z/6)} = \frac{g(z)}{h(z)}; \qquad \begin{matrix} g(z) = \operatorname{sh}\pi z - \pi z \\ h(z) = z^2 \sin^2(\pi z/6) \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при z = 0. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что z = 0 представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\operatorname{sh}\pi z - \pi z}{z\sin^2(\pi z/6)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{\pi - \pi\operatorname{ch}\pi z}{1-\cos^2(\pi z/6) + \frac{1}{3}\pi z\sin(\pi z/6)\cos(\pi z/6)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{\pi^2\operatorname{sh}\pi z}{\frac{2}{3}\pi\sin(\pi z/6)\cos(\pi z/6) + \frac{z}{9}\pi^2\cos^2(\pi z/6) - \frac{1}{18}\pi^2 z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{\pi^2\operatorname{ch}\pi z}{\frac{1}{3}\pi^2\cos^2(\pi z/6) - \frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{27}\pi^3 z\cos(\pi z/6)\sin(\pi z/6)}\right) = \frac{\pi^3}{\pi^2/6} = 6\pi$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{sh}\pi z - \pi z}{z^2 \sin^2(\pi z/6)} dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i\cdot 6\pi = 12\pi^2 i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{sh}\pi z - \pi z}{z^2 \sin^2(\pi z/6)} dz = 12\pi^2 i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z+i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)} - \frac{3\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z+i|=2}\underbrace{\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)}}_{f_1(z)}dz + \oint\limits_{|z+i|=2}\underbrace{\frac{-3\pi i}{e^{\pi z/2}+i}}_{f_2(z)}dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z+i|=2}\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=1–i и z=3–i. При этом точка z=3–i не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=1–i является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=1-i} f_1(z) = \lim_{z\to 1-i}\frac{d}{dz}\left[\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}(z-1+i)^2}{(z-1+i)^2(z-3+i)}\right] = \lim_{z\to 1-i}\frac{d}{dz}\left[\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-3+i)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1-i}\left[\frac{(1+i)\pi}{2(z-3+i)}\cos\frac{(1+i)\pi z}{4} - \frac{2}{(z-3+i)^2}\sin\frac{(1+i)\pi z}{4}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+i|=2}\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)}dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=1-i} f_1(z) = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{-3\pi i}{e^{\pi z/2}+i}dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$e^{\pi z/2}+i=0 \Rightarrow e^{\pi z/2}=-i \Rightarrow \pi z/2=\ln(-i)=-\pi i/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z=4ik-i, k\in z$

Из этих точек только одна охвачена контуром $|z+i|=2$ и должна приниматься во внимание. Это точка $z=-i$, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=-i} f_2(z)=\lim_{z\to -i}\frac{-3\pi i(z+i)}{e^{\pi z/2}+i}=\left\{\begin{matrix}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to -i}\frac{-3\pi i}{\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2}}=\frac{-6i}{e^{-\pi i/2}}=\frac{-6i}{-i}=6$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+i|=2}\frac{-3\pi i}{e^{\pi z/2}+i}dz=2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=-i} f_2(z)=2\pi i\cdot 6=12\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z+i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)}-\frac{3\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz=$$

$$=\oint\limits_{|z+i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)}\right)dz+\oint\limits_{|z+i|=2}\left(\frac{-3\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz=$$

$=-\pi i+12\pi i=11\pi i$

Ответ: $\oint\limits_{|z+i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)}-\frac{3\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz=11\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-2\sqrt{3}\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$z=e^{it}$; $\cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$; $\sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$; $dt=\frac{dz}{iz}$;

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{12}\sin t}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{4-\frac{\sqrt{12}}{2i}(z-\frac{1}{z})}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{4iz-\frac{\sqrt{12}}{2}(z^2-1)}=$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{8iz-\sqrt{12}(z^2-1)}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{-\sqrt{12}(z-i/\sqrt{3})(z-i\sqrt{3})}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=i/\sqrt{3}$; $z=i\sqrt{3}$;

Точка $i\sqrt{3}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $i/\sqrt{3}$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=i/\sqrt{3}} f(z)=\lim_{z\to i/\sqrt{3}}[f(z)(z-i/\sqrt{3})]=$$

$$=\lim_{z\to i/\sqrt{3}}\frac{2}{-\sqrt{12}(z-i\sqrt{3})}=\frac{2}{-\sqrt{12}(i/\sqrt{3}-i\sqrt{3})}=-\frac{i}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{-\sqrt{12}(z-i/\sqrt{3})(z-i\sqrt{3})}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)=2\pi i\cdot(-\frac{i}{2})=\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-2\sqrt{3}\sin t}=\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\cos t)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{(\sqrt{8}+\frac{\sqrt{7}}{2}(z+\frac{1}{z}))^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i(2\sqrt{8}z+\sqrt{7}(z^2+1))^2} = \oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i\left[\sqrt{7}(z-\frac{1-\sqrt{8}}{\sqrt{7}})(z+\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{7}})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = (1-\sqrt{8})/\sqrt{7}$; $z = (-\sqrt{8}-1)/\sqrt{7}$;

Точка $z = (-\sqrt{8}-1)/\sqrt{7}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z = (1-\sqrt{8})/\sqrt{7}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=(1-\sqrt{8})/\sqrt{7}} f(z) = \lim_{z\to(1-\sqrt{8})/\sqrt{7}} \frac{d}{dz}\left[f(z)\left(z-(1-\sqrt{8})/\sqrt{7}\right)^2\right] =$$

$$= \lim_{z\to(1-\sqrt{8})/\sqrt{7}} \frac{d}{dz} \frac{4z}{i\left[\sqrt{7}\left(z+(\sqrt{8}+1)/\sqrt{7}\right)\right]^2} = \frac{4}{7i} \lim_{z\to(1-\sqrt{8})/\sqrt{7}} \frac{d}{dz} \frac{z}{\left(z+(\sqrt{8}+1)/\sqrt{7}\right)^2} =$$

$$= \frac{4}{7i} \lim_{z\to(1-\sqrt{8})/\sqrt{7}} \left[-7\frac{z\sqrt{7}-1-\sqrt{8}}{\left(z\sqrt{7}+1+\sqrt{8}\right)^3}\right] = -\frac{4}{i}\cdot\frac{1-\sqrt{8}-1-\sqrt{8}}{\left(1-\sqrt{8}+1+\sqrt{8}\right)^3} = -\frac{4}{i}\cdot\frac{-2\sqrt{8}}{2^3} = \frac{\sqrt{8}}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i\left[\sqrt{7}(z-\frac{1-\sqrt{8}}{\sqrt{7}})(z+\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{7}})\right]^2} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i\cdot\left(\frac{\sqrt{8}}{i}\right) = 4\pi\sqrt{2}$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\cos t)^2} = 4\pi\sqrt{2}$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i\sum_m \operatorname*{res}_{z_m} R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z^2+1)dz}{(z^2+4z+13)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z^2+1)dz}{(z+2+3i)^2(z+2-3i)^2}$$

Особые точки:

$z = -2+3i$ $(\operatorname{Im} z > 0)$; $z = -2-3i$ $(\operatorname{Im} z < 0)$

Точка $z = -2+3i$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=-2+3i} f(z) = \lim_{z\to-2+3i} \frac{d}{dz}[f(z)(z+2-3i)^2] =$$

$$= \lim_{z\to-2+3i} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2+1}{(z+2+3i)^2}\right] = \lim_{z\to-2+3i}\left[\frac{2(2z+3iz-1)}{(z+2+3i)^3}\right] = \frac{7}{54i}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{(x^2+4x+13)^2} = 2\pi i\left(\frac{7}{54i}\right) = \frac{7\pi}{27}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{(x^2+4x+13)^2} = \frac{7\pi}{27}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\lambda x dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$x^4+5x^2+4=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm i;z_{3,4}=\pm 2i;$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{i;2i\}$$

Эти особые точки являются простыми полюсами. Найдем в них вычеты:

$$1)\underset{z=i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i}\frac{z^3(z-i)}{(z^2+1)(z^2+4)}e^{iz}=\lim_{z\to i}\frac{z^3e^{iz}}{(z+i)(z^2+4)}=$$

$$=\frac{-ie^{-1}}{(i+i)(-1+4)}=\frac{-i}{6i}e^{-1}=-\frac{1}{6}e^{-1}$$

$$2)\underset{z=2i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 2i}\frac{z^3(z-2i)}{(z^2+1)(z^2+4)}e^{iz}=\lim_{z\to 2i}\frac{z^3e^{iz}}{(z+2i)(z^2+1)}=$$

$$=\frac{-8ie^{-2}}{(2i+2i)(-4+1)}=\frac{-8i}{-12i}e^{-2}=\frac{2}{3}e^{-2}$$

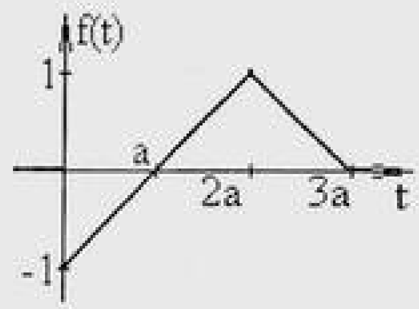
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{4\pi}{3}e^{-2}-\frac{\pi}{3}e^{-1}$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{4\pi}{3}e^{-2}-\frac{\pi}{3}e^{-1}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}\frac{t-a}{a} & 0<t<2a\\ \frac{3a-t}{a}, & 2a<t<3a\\ 0, & 3a<t\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{t-a}{a}\cdot\eta(t)+\frac{4a-2t}{a}\eta(t-2a)+\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}+\left(\frac{4}{p}-\frac{2}{ap^2}\right)e^{-2ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{3}{p}\right)e^{-3ap}$$

Ответ: $F(p)=\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}+\left(\frac{4}{p}-\frac{2}{ap^2}\right)e^{-2ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{3}{p}\right)e^{-3ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{1}{p^3+p^2+p}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{1}{p^3+p^2+p}=\frac{1}{p(p^2+p+1)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+p+1}=$$

$$=\frac{Ap^2+Ap+A+Bp^2+Cp}{p(p^2+p+1)}=\frac{(A+B)p^2+(A+C)p+A}{p(p^2+p+1)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\A+C=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-1\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{1}{p^3+p^2+p}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+p+1}-\frac{1}{p^2+p+1}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+p+1}-\frac{1}{p^2+p+1}=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{p}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\to$$

$$\to 1-e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$1-e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''-3y'+2y=e^t$$

$$y(0)=1,\quad y'(0)=0.$$

Из теории нам известно, что если $x(t)$ соответствует изображение $X(p)$, то $x'(t)$ соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а $x''(t)$ соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)-3pY(p)+3y(0)+2Y(p)=\frac{1}{p-1}$$

$$p^2Y(p)-p-3pY(p)+3+2Y(p)=\frac{1}{p-1}$$

$$(p^2-3p+2)Y(p)=(p-2)(p-1)Y(p)=\frac{p^2-4p+4}{p-1}$$

$$Y(p)=\frac{p^2-4p+4}{(p-1)(p-2)(p-1)}=\frac{(p-2)^2}{(p-1)(p-2)(p-1)}=$$

$$=\frac{p-1-1}{(p-1)^2}=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)^2}$$

Найдем оригинал $y(t)$:

$$Y(p)=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)^2}\Rightarrow y(t)=e^t-te^t$$

Ответ: $y(t)=e^t-te^t$

Задача 25

Материальная точка массы m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат с силой F=kx, пропорциональной расстоянию. На точку действует сила сопротивления среды R=rv, пропорциональная скорости v. При t=0 расстояние точки от начала координат x_0, а скорость v_0. Найти закон движения x=x(t) материальной точки.

$k = 4m$, $r = 3m$, $x_0 = 2$м, $v_0 = 0$.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = kx - rv$$

$$\ddot{x}m - r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 2$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m - 3m\dot{x} + 4mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 4x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) - 3pX(p) + 3x(0) + 4X(p) = 0$$

$$(p^2 - 3p + 4)X(p) - 2p + 6 = 0$$

$$X(p) = \frac{2p-6}{p^2-3p+4} = \frac{2p-6}{(p-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}} = \frac{2p-3}{(p-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}} - \frac{6}{\sqrt{7}}\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(p-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = 2e^{3t/2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t - \frac{6}{\sqrt{7}}e^{3t/2}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$$

Ответ: $x(t) = 2e^{3t/2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t - \frac{6}{\sqrt{7}}e^{3t/2}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 1 \\ \dot{y} = -\frac{3}{2}x + y \end{cases}$$

$x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = -X(p) - 2Y(p) + 1/p \\ pY(p) - y(0) = -\frac{3}{2}X(p) + Y(p) \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = -X(p) - 2Y(p) + 1/p \\ pY(p) = -\frac{3}{2}X(p) + Y(p) \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) = -\frac{3}{2}X(p) + Y(p) \Rightarrow X(p) = -\frac{2}{3}(p-1)Y(p)$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p[-\frac{2}{3}(p-1)Y(p)] - 1 = -[-\frac{2}{3}(p-1)Y(p)] - 2Y(p) + 1/p$$

$$Y(p) = \frac{3+3/p}{2(4-p^2)}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{3+3/p}{2(4-p^2)} = -\frac{3}{4}\frac{2}{p^2-4} - \frac{3}{2}\frac{1}{p}\frac{1}{p^2-4} \to$$

$$\to y(t) = -\frac{3}{4}\text{sh}2t + \frac{3}{8}(1-\cos 2it) = -\frac{3}{4}\text{sh}2t + \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\text{ch}2t$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = -\frac{3}{2}x + y \Rightarrow x(t) = -\frac{2}{3}(\dot{y} - y) =$$

$$= -\frac{2}{3}(-\frac{3}{2}\text{ch}2t - \frac{3}{4}\text{sh}2t + \frac{3}{4}\text{sh}2t - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\text{ch}2t) = \frac{3}{4}\text{ch}2t + \frac{1}{4}$$

Ответ:

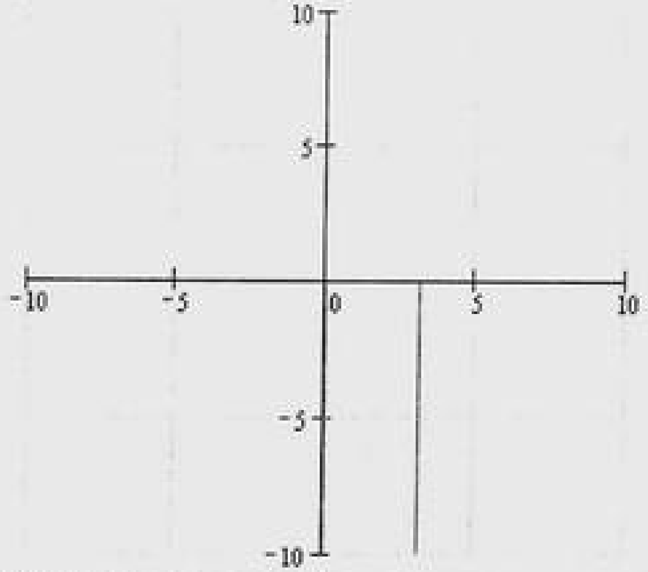
$$x(t) = \frac{3}{4}\text{ch}2t + \frac{1}{4}$$

$$y(t) = -\frac{3}{4}\text{sh}2t + \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\text{ch}2t$$

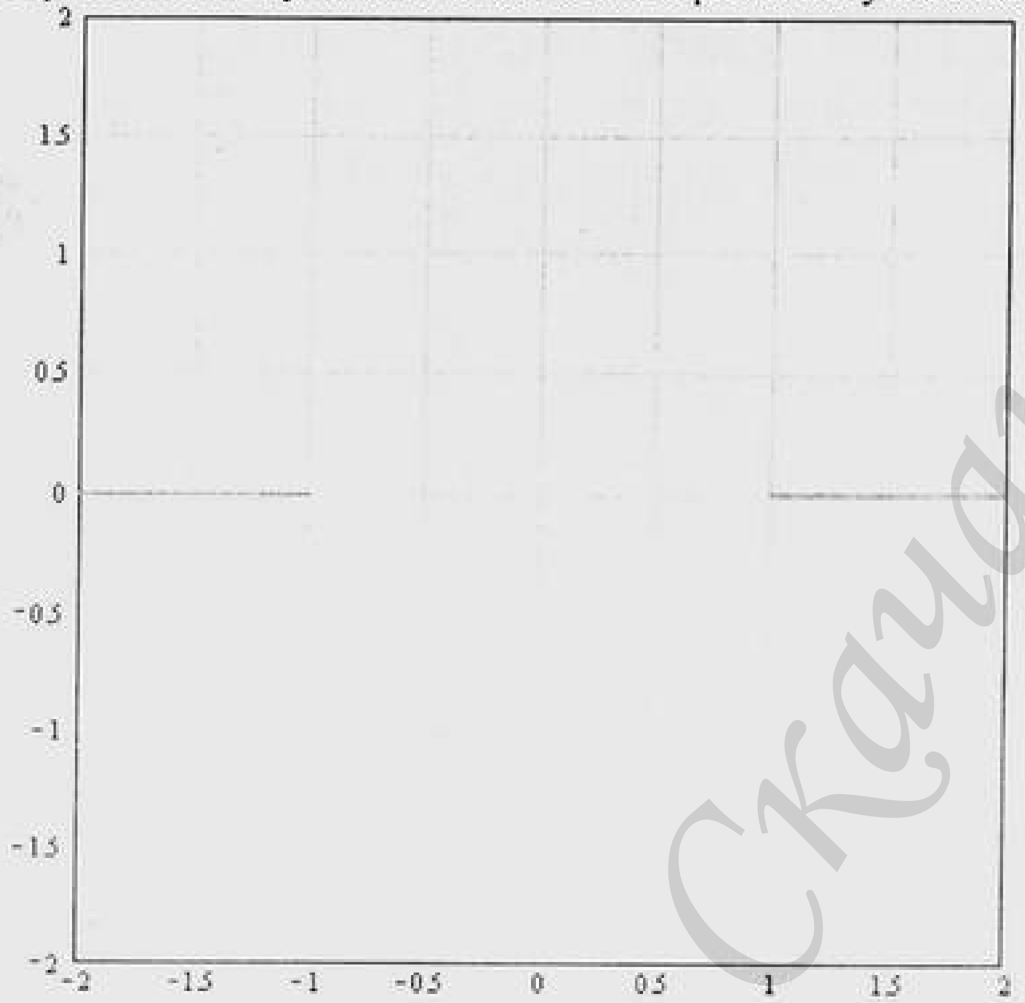
Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции w = f(z).

$w = \cos(z)$; полуполоса $0<x<\pi$, $y<0$.



Каждая из вертикальных линий в полуполосе преобразуется в кривую, исходящую из точки (cos x ; 0). Таким образом отображением полуполосы является вся верхняя полуплоскость:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \varphi=\arg z, k=0,1,\dots,n-1; z\neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z=x+iy \qquad e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z=-i\sin iz=\frac{e^z-e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z=\cos iz=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z=\arg z+2\pi k, k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

$$\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$$

$$\operatorname{Arctg} z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Аналитические функции

Функция w=f(z) называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция w=f(z) называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z\in G$.

Производная аналитической функции

$$w=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$