Лекція 3

3.1. Обернена матриця

Операція ділення для матриць не запроваджується, но для квадратних матриць можна побудувати аналог ділення – множення на обернену матрицю.

Оберненою матрицею до квадратної матриці A порядка n називають матрицю A^{-1} таку, що $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Матрицю A, для якої існує обернена матриця, називають оборотною.

З означення слідує, що матриці A і A^{-1}взаємообернені і переставні.

Властивості обернення матриць

1) Якщо обернена матриця існує, то вона єдина.

Доведення. Нехай матриці A_1^{-1} і A_2^{-1} обернені до матриці A. Тоді

$$A_1^{-1} = A_1^{-1}E = A_1^{-1}\left(AA_2^{-1}\right) = \left(A_1^{-1}A\right)A_2^{-1} = EA_2^{-1} = A_2^{-1}.$$

Отримали протиріччя, яке і є доведенням.

2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$

Доведення. Ця властивість слідує з означення.

3) $\left(A^{-1}\right)^{k} = \left(A^{k}\right)^{-1},\ k = 0,1,\ldots$

Доведення.

$$\left(A^{-1}\right)^{k}A^{k} = \left(A^{-1}\right)^{k-1}\left(A^{-1}A\right)A^{k-1} = \left(A^{-1}\right)^{k-1}A^{k-1} = \ldots = A^{-1}A = E$$

$$\Rightarrow \left(A^{-1}\right)^{k} = \left(A^{k}\right)^{-1}$$

4) $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

Доведення.

$$E = AA^{-1} = AEA^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = \left(AB\right)\left(B^{-1}A^{-1}\right).$$

$$E = \left(B^{-1}A^{-1}\right)\left(AB\right) \Rightarrow \left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

5) $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}.$

Доведення.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \Rightarrow \left(AA^{-1}\right)^{T} = \left(A^{-1}A\right)^{T} = E^{T} = E$$

$$\Rightarrow \left(A^{-1}\right)^{T}A^{T} = A^{T}\left(A^{-1}\right)^{T} = E \Rightarrow \left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$$

Знаходження оберненої матриці за допомогою визначників

Знайдемо умову оборотності квадратної матриці A порядка $\boldsymbol{n}$, тобто умову існування такої матриці A^{-1}, для якої $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.
Квадратну матрицю називають невиродженою, якщо її визначник не дорівнює 0.

Теорема 3.4. (критерій оборотності матриці). Матриця буде мати обернену тоді і тільки тоді, коли вона невироджена.

Доведення. Необхідність. За означенням, $AA^{-1} = E \rightarrow$
$|A||A^{-1}| = |E| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$, тобто матриця A – невироджена.

Достатність. Нехай $|A| \neq 0$. Покажемо, що вона має обернену.

Доведемо, що $AA^* = |A|E$, де

$$A^* = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_{ij},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$$- алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

З властивостей визначників слідує, що

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j^* = (a_{i1}\ a_{i2}\ \dots a_{in}) \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \dots \\ A_{jn} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} 0,\ i \neq j, \\ |A|,\ i = j \end{cases}$$

Отже, $AA^* = |A|E$. Аналогічно доводимо, що $A^*A = |A|E$.

Можна записати $A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$. Доведено.

Матрицю $A^* = (A_{ij})^T$ називають приєднаною до матриці A.

На цій теоремі грунтується **метод приєднаної матриці** знаходження оберненої матриці.

Схема метода приєднаної матриці.
Крок 1. Обчислюємо визначник матриці A.
Крок 2. Якщо $\det A = 0$, то обернена матриця не існує.
Якщо $\det A \neq 0$, то будуємо приєднану матрицю $A^* = (A_{ij})^T$.

Крок 3. Обернену матрицю знаходимо за формулою $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$.

Зауваження. Правильність обчислень перевіряється умовою
$A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Приклад 3.3. Знайти матрицю обернену заданій методом приєднаної матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання.

Крок 1. $det\, A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Крок 2. Обчислюємо всі алгебраїчні доповнення елементів матриці *A*:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -1,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2,\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 2,\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1,\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1,\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Знаходимо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Перевірка: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Розв’язання матричних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Розглянемо рівняння відносно матриці *X*: $AX=B$, де *A* і *B* – відомі матриці розмірністю $n\times n$ і $n\times l$ відповідно. Розв’язком цього рівняння (якщо воно існує) буде матриця *X* розмірністю $n\times l$. Якщо матриця *A* має обернену, то існує єдиний розв’язок матричного рівняння $X = A^{-1}B$. Дійсно, помноживши обидві частини рівняння зліва на матрицю A^{-1}, отримаємо:
$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$
Матричне рівняння $XA = B$ з матрицею *A*, що має обернену, має розв’язок $X = BA^{-1}$.

Властивості невироджених матриць

1) $\det A^{-1}\cdot \det A = 1.$

2) $(A^{-1})^{-1} = A.$

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

4) $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}.$

Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то вона називається **виродженою** або **особливою.**

Знаходження оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень

Алгоритм перетворення матриці до зведеного східчастого вигляду (метод Гауса – Жордано).

1. Зводять матрицю до східчастого вигляду (прямий хід метода Гауса).
2. Відкидають нульові рядки (це вже не є елеменарним перетворенням).
3. Останній рядок ділять на його лідера, одержують 1.
4. Додаючи до решти рядків новий останній рядок, помножений на відповідні коефіцієнти, дістають нулі над одиницею.
5. Повторюють кроки 1-4 для решти рядків (зворотній хід метода Гауса).

Процедуру перетворення матриці до зведеного східчастого вигляду називають **методом Гауса – Жордано**.
Будь-яку квадратну матрицю *n*-ого порядка з лінійно незалежними рядками можна перетворити в одиничну матрицю. Нехай *A* – квадратна матриця

n-ого порядка. Дописавши справа від неї одиничну матрицю E, отримаємо матрицю $A|E$ розмірністю $n \times 2n$, яку називають **розширеною матрицею**.

Схема знаходження оберненої матриці методом Гауса –Жордано.

Крок 1. Утворюють розширену матрицю $A|E$.

Крок 2. Застосовують до матриці $A|E$ прямий хід метода Гауса.

Матрицю A приводять до східчастого вигляду, одночасно перетворюючи і праву частину розширеної матриці.

Крок 3. Якщо матриця Z – східчаста форма матриці A, містить нульові рядки, то роблять висновок про те, що матриця A не має оберненої. Якщо матриця Z не має нульових рядків, то матриця A – має обернену, і матрицю Z вже зворотнім ходом метода Гауса перетворюють в одиничну матрицю E. Таким чином розширену матрицю перетворюють до зведеного східчастого вигляду:

$$(A|E) \sim \ldots \sim (E|A^{-1}).$$

Крок 4. Виписують матрицю A^{-1}- праву частину розширеної матриці.

Приклад 3.4. Знайти матрицю обернену заданій методом Гауса - Жордано.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання.

Крок 1. $(A|E) = B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$

Крок 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \\ \vec{b}_2 \leftarrow \vec{b}_2 - 2\vec{b}_1 \\ \vec{b}_3 \leftarrow \vec{b}_3 - \frac{5}{2}\vec{b}_1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -5/2 & 0 & 1 \end{array}\right)\left[\begin{array}{l} \\ \\ \vec{b}_3 \leftarrow \vec{b}_3 - \frac{1}{2}\vec{b}_2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right)\left[\begin{array}{l} \vec{b}_1 \leftarrow \vec{b}_1 - 2\vec{b}_3 \\ \\ \vec{b}_3 \leftarrow 2\vec{b}_3 \end{array}\right] \sim \ldots$$

Крок 3. Зворотній хід метода Гауса.

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right)\left[\begin{array}{l} \vec{b}_1 \leftarrow \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 \\ \\ \\ \end{array}\right] \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right)\left[\begin{array}{l} \vec{b}_1 \leftarrow \frac{1}{2}\vec{b}_1 \\ \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Крок 4. Виписуєм обернену матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$