ИНФОРМАЦИОННО-КОНСУЛЬТАЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

ТФКП

теория функций комплексного переменного

Консультационное пособие для школьников и студентов в решении задач с примерами решённых задач из задачника автора Чудесенко В.Ф.

Вариант 4

$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos\ y + i\sin\ y)$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz$$

Москва 2003

/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[3]{i}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\ldots,n-1;\quad z\neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[3]{i}$:

$$\sqrt[3]{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{i}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{i}=-i$$

Ответ: $\sqrt[3]{i}=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2};-i\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\operatorname{sh}(2+\pi i/4)$

Перейдем от гиперболического синуса к тригонометрическому:

$$\operatorname{sh}(2+\pi i/4)=-i\cdot\sin(2i-\pi/4)=i\cdot\sin(\pi/4-2i)$$

Используем формулу синуса разности:

$$i\cdot\sin(\pi/4-2i)=i[\sin(\pi/4)\cos(2i)-\cos(\pi/4)\sin(2i)]$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$i[\sin(\pi/4)\cos(2i)-\cos(\pi/4)\sin(2i)]=i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}-$$

$$-i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-2}-e^{2}}{2i}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}\right)$$

Ответ: $\operatorname{sh}(2+\pi i/4)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}\right)$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$$

Функция Arctg является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arctg}\,z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$$

Подставим вместо z значение $\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}$:

$$\mathrm{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right) = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\frac{-2i\sqrt{3}-3}{3}}{1-\frac{-2i\sqrt{3}-3}{3}} =$$

$$= -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{3-2i\sqrt{3}-3}{3+2i\sqrt{3}+3} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}$$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0, \pm1, \pm2, ...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}} = -\frac{i}{2}[\ln\left|\frac{-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\right| + i(\arg(\frac{-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}) + 2\pi k)] =$$

$$= -\frac{i}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\arg(\frac{-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}) + 2\pi k) \approx \frac{i}{2}\cdot 0{,}693 +$$

$$+\frac{1}{2}(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k)$$

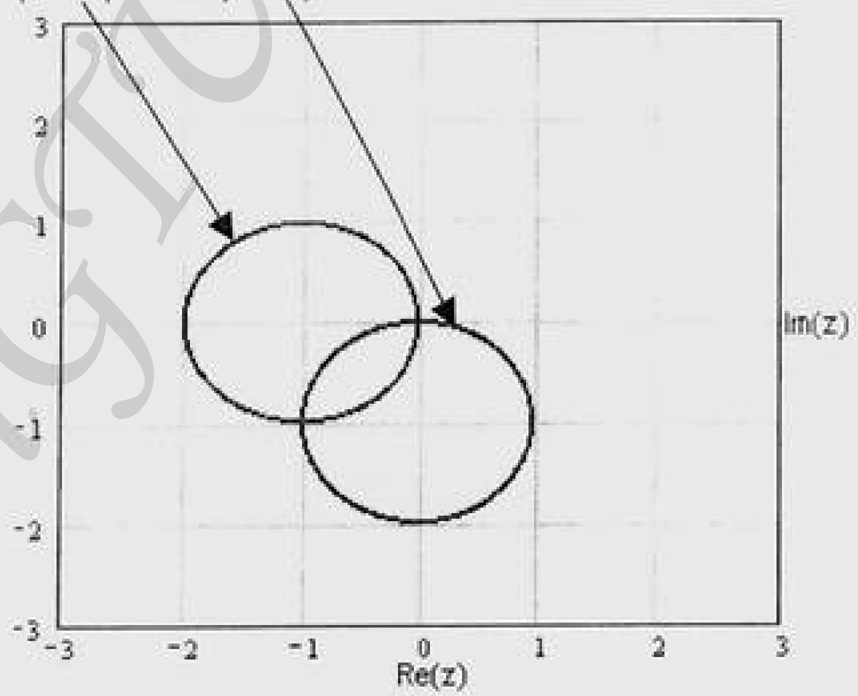
$k = 0, \pm1, \pm2, ...$

Ответ: $\mathrm{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right) \approx \frac{i}{2}\cdot 0{,}693 + \frac{1}{2}(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k), k = 0, \pm1, \pm2, ...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z+1| \geq 1, \quad |z+i| < 1$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z = 4\mathrm{tg}\,t - i3\sec t$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t) = 4\mathrm{tg}\,t; \quad y(t) = -3\sec t$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = 4\mathrm{tg}\,t \Rightarrow \mathrm{tg}\,t = \frac{x}{4} \Rightarrow t = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$y = -3\sec t = -\frac{3}{\cos t} \Rightarrow \cos t = -\frac{3}{y} \Rightarrow t = \mathrm{ar\cos}\left(-\frac{3}{y}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y)=0:

$$\mathrm{ar\cos}\left(-\frac{3}{y}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{4}\right) \Rightarrow \mathrm{ar\cos}\left(-\frac{3}{y}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{4}\right) = 0$$

Ответ: $\mathrm{ar\cos}\left(-\frac{3}{y}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{4}\right) = 0$

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ и значению $f(z_0)$:

$u = x^2 - y^2 - 2y$

$f(0) = 0$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x + iy) = 2x + 2i(y + 1) = 2z + 2i$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int(2z + 2i)dz = z^2 + 2iz + C$$

Определим константу C:

$f(0) = 0^2 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$f(z) = z^2 + 2iz$

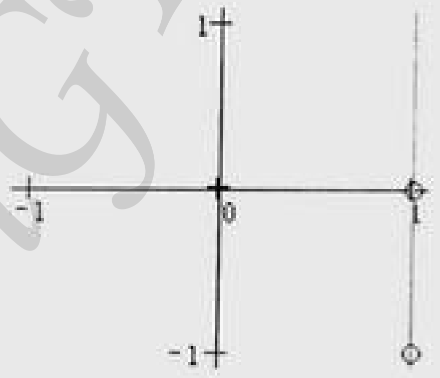
Ответ: $f(z) = z^2 + 2iz$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$\int\limits_{AB}(z^2 + 7z + 1)dz$; AB – отрезок прямой : $z_A = 1, z_B = 1 - i$

Покажем прямую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = x^2 + 2ixy - y^2 + 7x + 7iy + 1 =$$
$$= \underbrace{x^2 - y^2 + 7x + 1}_{u(x,y)} + i(\underbrace{2xy + 7y}_{v(x,y)})$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 7; \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 7; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются, следовательно, функция является аналитической. Тогда результат от пути интегрирования не зависит:

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{1}^{1-i}(z^2 + 7z + 1)dz = \frac{z^3}{3} + \frac{7z^2}{2} + z\Bigg|_{1}^{1-i} =$$
$$+ \frac{7(1+i)^2}{2} + (1+i) - \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{2} + 1\right) = \frac{2i-2}{3} + 7i + (1+i) - \frac{29}{6} =$$
$$= \frac{52i - 27}{6}$$

Ответ: $\int\limits_{AB} f(z)dz = \frac{52i - 27}{6}$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}=\frac{2z-16}{z^2(z+4)(z-2)}=\frac{2}{z^2}\cdot\frac{z-8}{(z+4)(z-2)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

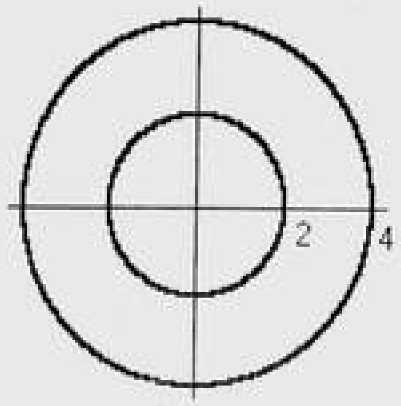
$$\frac{z-8}{(z+4)(z-2)}=\frac{A}{(z+4)}+\frac{B}{(z-2)}=\frac{Az-2A+Bz+4B}{(z+4)(z-2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=2;B=-1\}\Rightarrow\frac{z-8}{(z+4)(z-2)}=\frac{2}{(z+4)}-\frac{1}{(z-2)}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{2}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{(z+4)}-\frac{1}{(z-2)}\right)$$

Особые точки: $z=0;z=2;z=-4$



Рассмотрим область $|z|<2$:

$$f(z)=\frac{2}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{(z+4)}-\frac{1}{(z-2)}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1-(-\frac{z}{4})}+\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{16}-\frac{z^3}{64}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{4z}+\frac{1}{16}-\frac{z}{64}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}+\frac{z}{8}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $2<|z|<4$:

$$f(z)=\frac{2}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+4}-\frac{1}{z-2}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1-(-\frac{z}{4})}+\frac{2}{z(1-\frac{2}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{16}-\frac{z^3}{64}+\ldots\right)+\left(\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{8}{z^3}+\frac{16}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{4z}+\frac{1}{16}-\frac{z}{64}+\ldots\right)+\left(\frac{2}{z^3}+\frac{4}{z^4}+\frac{8}{z^5}+\frac{16}{z^6}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>4$:

$$f(z)=\frac{2}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+4}-\frac{1}{z-2}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{4}{z(1+\frac{4}{z})}+\frac{2}{z(1-\frac{2}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{4}{z}-\frac{16}{z^2}+\frac{64}{z^3}-\frac{256}{z^4}+\ldots\right)+\left(\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{8}{z^3}+\frac{16}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{4}{z^3}-\frac{16}{z^4}+\frac{64}{z^5}-\frac{256}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{2}{z^3}+\frac{4}{z^4}+\frac{8}{z^5}+\frac{16}{z^6}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<2:f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{4z}+\frac{1}{16}-\frac{z}{64}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}+\frac{z}{8}+\ldots\right)$$

$$2<|z|<4:f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{4z}+\frac{1}{16}-\frac{z}{64}+\ldots\right)+\left(\frac{2}{z^3}+\frac{4}{z^4}+\frac{8}{z^5}+\frac{16}{z^6}+\ldots\right)$$

$$|z|>4:f(z)=\left(\frac{4}{z^3}-\frac{16}{z^4}+\frac{64}{z^5}-\frac{256}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{2}{z^3}+\frac{4}{z^4}+\frac{8}{z^5}+\frac{16}{z^6}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z\text{-}z_0$.

$$f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)},\ z_0=-2+i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)}=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{2}{z-1}=2\cdot\frac{1}{z-1}=2\cdot\frac{1}{(z-z_0)-3+i}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-3+i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-z_0)-2+i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-2+i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-3+i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-2+i)^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(-3+i)^{n+1}}-\frac{2}{(-2+i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(-3+i)^{n+1}}-\frac{2}{(-2+i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=\sin\frac{2z-7}{z+2},\ z_0=-2$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z+2;\ \sin\frac{2z-7}{z+2}=\sin\frac{2z'-11}{z'}=\sin\left(2-\frac{11}{z'}\right)=\sin2\cos\frac{11}{z'}+\cos2\sin\frac{11}{z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=\sin2\cos\frac{11}{z'}+\cos2\sin\frac{11}{z'}=\left(1-\frac{11^2}{2!z'^2}+\frac{11^4}{4!z'^4}-\frac{11^6}{6!z'^6}+\ldots\right)\sin2+$$

$$+\left(\frac{11}{z'}-\frac{11^3}{3!z'^3}+\frac{11^5}{5!z'^5}-\ldots\right)\cos2=\sin2+\frac{11\cos2}{z'}-\frac{11^2\sin2}{2!z'^2}-\frac{11^3\cos2}{3!z'^3}+$$

$$+\frac{11^4\sin2}{4!z'^4}+\frac{11^5\cos2}{5!z'^5}-\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=-2$:

$$f(z)=\sin2+\frac{11\cos2}{z+2}-\frac{11^2\sin2}{2!(z+2)^2}-\frac{11^3\cos2}{3!(z+2)^3}+\frac{11^4\sin2}{4!(z+2)^4}+$$

$$+\frac{11^5\cos2}{5!(z+2)^5}-\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=\sin2+\frac{11\cos2}{z+2}-\frac{11^2\sin2}{2!(z+2)^2}-\frac{11^3\cos2}{3!(z+2)^3}+\frac{11^4\sin2}{4!(z+2)^4}+$$

$$+\frac{11^5\cos2}{5!(z+2)^5}-\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z) = \frac{\cos 7z - 1}{shz - z - z^3/6}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z) = \frac{\cos 7z - 1}{shz - z - z^3/6} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad g(z) = \cos 7z - 1; \quad h(z) = shz - z - z^3/6;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g'(z) = -7\sin 7z; g'(0) = -7\sin 0 = 0$$

$$g''(z) = -49\cos 7z; g''(0) = -49\cos 0 = -49$$

$$h'(z) = ch(z) - 1 - z^2/2; h'(0) = ch0 - 1 - 0 = 0$$

$$h''(z) = sh(z) - z; h''(0) = sh0 - 0 = 0;$$

$$h'''(z) = ch(z) - 1; h'''(0) = ch0 - 1 = 0;$$

$$h^{IV}(z) = sh(z); h^{IV}(0) = sh0 = 0;$$

$$h^{V}(z) = ch(z); h^{V}(0) = ch0 = 1;$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 5 – 2 = 3.

Ответ: Точка z = 0 является полюсом 3-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = z \cdot \operatorname{tg} z \cdot e^{1/z}$$

Одной из изолированных особых точек является z = 0. При малых z можно считать, что tg(z)=z. Тогда в окрестности точки z = 0 функцию можно разложить в ряд Лорана следующим образом:

$$f(z) \approx z^2 \cdot e^{1/z} = z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + ...\right) = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + ...$$

Поскольку главная часть содержит бесконечное число членов, то точка z = 0 для заданной функции f(z) является существенной особой точкой.

Заданная функция не является аналитической при cos z = 0. Найдем z, соответствующие этому случаю:

$$\cos z = 0 \Rightarrow z = \pi/2 + \pi k; k \in z$$

Для этих значений z при определении типа особой точки играет роль только множитель tg(z). Запишем tg(z) в виде отношения функций g(z) и h(z):

$$f(z) = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad g(z) = \sin z; \quad h(z) = \cos z;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = π/2 + πk:

$$g(\pi/2 + \pi k) = \pm 1$$

$$h(\pi/2 + \pi k) = \cos(\pi/2 + \pi k) = 0$$

$$h'(z) = -\sin z; h'(\pi/2) = -\sin(\pi/2 + \pi k) = \pm 1$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = π/2 + πk выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки z = π/2 + πk являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это 1 – 0 = 1.

Ответ: Точки $z = \pi/2 + \pi k; k \in z$ для данной функции являются полюсами 1-го порядка. Точка z = 0 является существенной особой точкой.

Задача 13
Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{2+\sin z}{z(z+2i)}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = 0$
$z = -2i$

Точка $z = -2i$ не входит в область, ограниченную данным контуром, поэтому не рассматривается.
Точка $z_1 = 0$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)(z-0)] = \lim_{z\to 0}\frac{2z+z\sin z}{z(z+2i)} = \lim_{z\to 0}\frac{2+\sin z}{z+2i} = \frac{1}{i} = -i$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z(z+2i)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot (-i) = 2\pi$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z(z+2i)} dz = 2\pi$

Задача 14
Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=2} \underbrace{\frac{\sin z^3}{1-\cos z}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Определим ее тип:

$$f(z) = \frac{\sin z^3}{1-\cos z} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad \begin{matrix} g(z) = \sin z^3 \\ h(z) = 1-\cos z \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$:

$g'(z) = 3z^2 \cos z^3; g'(0) = 0;$

$g''(z) = -9z^4 \sin z^3 + 6z\cos z^3; g''(0) = 0;$

$g'''(z) = -27z^6 \cos z^3 - 54x^3 \sin x^3 + 6\cos x^3; g'''(0) = 6 \neq 0;$

$h'(z) = \sin x; h'(0) = 0;$

$h''(z) = \cos x; h'(0) = 1 \neq 0$

Таким образом, $z = 0$ – это полюс 1-го порядка и вычет находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z\sin z^3}{1-\cos z}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^4}{z^2/2}\right) = \lim_{z\to 0}\left(2z^2\right) = 0$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z} dz = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z} dz = 0$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=2} \underbrace{\frac{\operatorname{ch}3z - 1 - 9z^2/2}{z^4 \operatorname{sh}(9z/8)}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции z = 8πik/9. Однако в контур попадает только z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch}3z - 1 - 9z^2/2}{z^4 \operatorname{sh}(9z/8)} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad g(z) = \operatorname{ch}3z - 1 - 9z^2/2, \quad h(z) = z^4 \operatorname{sh}(9z/8)$$

Определим порядки производных, ненулевых при z = 0. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что z = 0 представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\operatorname{ch}3z - 1 - 9z^2/2}{z^3 \operatorname{sh}(9z/8)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{3\operatorname{sh}3z - 9z}{3z^2 \operatorname{sh}(9z/8) + \frac{9}{8}z^3 \operatorname{ch}(9z/8)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{9\operatorname{ch}3z - 9}{(6z + \frac{81}{64}z^3)\operatorname{sh}(9z/8) + \frac{27}{4}z^2 \operatorname{ch}(9z/8)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{27\operatorname{sh}3z}{(6 + \frac{729}{64}z^2)\operatorname{sh}(9z/8) + (\frac{81}{4}z + \frac{729}{512}z^3)\operatorname{ch}(9z/8)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{81\operatorname{ch}3z}{(27 + \frac{2187}{128}z^2)\operatorname{ch}(9z/8) + (\frac{729}{16}z + \frac{6561}{4096}z^3)\operatorname{sh}(9z/8)}\right) = \frac{81}{27} = 3$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch}3z - 1 - 9z^2/2}{z^4 \operatorname{sh}(9z/8)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch}3z - 1 - 9z^2/2}{z^4 \operatorname{sh}(9z/8)} dz = 6\pi i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z+2|=2} \left(z \operatorname{ch}\frac{1}{z+2} - \frac{2\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)}\right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z+2|=2} \underbrace{z \operatorname{ch}\frac{1}{z+2}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z+2|=2} \underbrace{\frac{-2\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)}}_{f_2(z)} dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint\limits_{|z+2|=2} z \operatorname{ch}\frac{1}{z+2} dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left\{\begin{matrix} t = z+2 \\ z = t-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z \operatorname{ch}\frac{1}{z+2} = (t-2)\operatorname{ch}\frac{1}{t}$$

Единственной особой точкой этой функции является t=0. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t-2)\operatorname{ch}\frac{1}{t} = (t-2)\left(1 + \frac{1}{2!t^2} + \frac{1}{4!t^4} + \frac{1}{6!t^6} + \frac{1}{8!t^8} + \ldots\right) =$$

$$= \left(t + \frac{1}{2!t} + \frac{1}{4!t^3} + \frac{1}{6!t^5} + \ldots\right) - \left(2 + \frac{2}{2!t^2} + \frac{2}{4!t^4} + \frac{2}{6!t^6} + \ldots\right) =$$

$$= t - 2 + \frac{1}{2!t} - \frac{2}{2!t^2} + \frac{1}{4!t^3} - \frac{2}{4!t^4} + \frac{1}{6!t^5} - \frac{2}{6!t^6} + \frac{1}{8!t^7} - \ldots$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов. из чего следует. что t=0 является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t-2)\operatorname{ch}\frac{1}{t}\right] = C_{-1} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+2|=2} z\,\mathrm{ch}\frac{1}{z+2}\,dz = \oint\limits_{|t|=2}(t-2)\mathrm{ch}\frac{1}{t}\,dz = 2\pi i\,\underset{t=0}{\mathrm{res}}\left[(t-2)\mathrm{ch}\frac{1}{t}\right] =$$

$$= 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \pi i$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint\limits_{|z+2|=2}\frac{-2\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)}\,dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=1 и z=–1. При этом точка z=1 не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=–1 является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\underset{z=-1}{\mathrm{res}}\,f_2(z) = \lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left[\frac{-(z+1)^2\cdot 2\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)}\right] = \lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left[\frac{-2\sin\frac{\pi z}{2}}{(z-1)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to-1}\left[-\frac{\pi}{(z-1)}\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) + \frac{2}{(z-1)^2}\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right] = -\frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+2|=2}\frac{-2\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)}\,dz = 2\pi i\cdot\underset{z=-1}{\mathrm{res}}\,f_2(z) = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z+2|=2}\left(z\,\mathrm{ch}\frac{1}{z+2} - \frac{2\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)}\right)dz = \oint\limits_{|z+2|=2} z\,\mathrm{ch}\frac{1}{z+2}\,dz +$$

$$+ \oint\limits_{|z+2|=2}\frac{-2\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)}\,dz = \pi i - \pi i = 0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z+2|=2}\left(z\,\mathrm{ch}\frac{1}{z+2} - \frac{2\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)}\right)dz = 0$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{6+\sqrt{35}\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z)\,dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{6+\sqrt{35}\sin t} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{6+\frac{\sqrt{35}}{2i}(z-\frac{1}{z})} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{6iz+\frac{\sqrt{35}}{2}(z^2-1)} =$$

$$= \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{12iz+\sqrt{35}(z^2-1)} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{35}(z+i\sqrt{35}/7)(z+i\sqrt{35}/5)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = -i\sqrt{35}/7;\quad z = -i\sqrt{35}/5;$

Точка $-i\sqrt{35}/5$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $-i\sqrt{35}/7$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\underset{z=-i\sqrt{35}/7}{\mathrm{res}} f(z) = \lim_{z\to-i\sqrt{35}/7}[f(z)(z+i\sqrt{35}/7)] =$$

$$= \lim_{z\to-i\sqrt{35}/7}\frac{2}{(z+i\sqrt{35}/5)\sqrt{35}} = \frac{2}{(-i\sqrt{35}/7+i\sqrt{35}/5)\sqrt{35}} = -i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{35}(z+i\sqrt{35}/7)(z+i\sqrt{35}/5)} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\underset{z_n}{\mathrm{res}} f(z) = 2\pi i\cdot(-i) = 2\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{6+\sqrt{35}\sin t} = 2\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{11}}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i(2\sqrt{3}z+\frac{\sqrt{11}}{2}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{11}(z-\frac{1-2\sqrt{3}}{\sqrt{11}})(z+\frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{11}})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$$z=(1-2\sqrt{3})/\sqrt{11};\quad z=(-1-2\sqrt{3})/\sqrt{11};$$

Точка $z=(-1-2\sqrt{3})/\sqrt{11}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=(1-2\sqrt{3})/\sqrt{11}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=(1-2\sqrt{3})/\sqrt{11}}f(z)=\lim_{z\to(1-2\sqrt{3})/\sqrt{11}}\frac{d}{dz}\left[f(z)\left(z-(1-2\sqrt{3})/\sqrt{11}\right)^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to(1-2\sqrt{3})/\sqrt{11}}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[\sqrt{11}(z+(1+2\sqrt{3})/\sqrt{11})\right]^2}=\frac{4}{11i}\lim_{z\to(1-2\sqrt{3})/\sqrt{11}}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z+(1+2\sqrt{3})/\sqrt{11})^2}=$$

$$=\frac{4}{i}\lim_{z\to(1-2\sqrt{3})/\sqrt{11}}\left[-\frac{\sqrt{11}z-1-2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{11}z+1+2\sqrt{3}\right)^3}\right]=-\frac{4}{i}\cdot\frac{1-2\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}}{\left(1-2\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}\right)^3}=-\frac{4}{i}\cdot\frac{-4\sqrt{3}}{2^3}=\frac{2\sqrt{3}}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{11}(z-\frac{1-2\sqrt{3}}{\sqrt{11}})(z+\frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{11}})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{i}\right)=4\sqrt{3}\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos t)^2}=4\sqrt{3}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$ сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2+4)^2(z^2+16)}$$

Особые точки:

$z=2i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-2i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

$z=4i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-4i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=2i$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=2i}f(z)=\lim_{z\to2i}\frac{d}{dz}[f(z)(z-2i)^2]=\lim_{z\to2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+2i)^2(z^2+16)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to2i}\left[\frac{-4(z^2+8+iz)}{(z+2i)^3(z^2+16)^2}\right]=\frac{-i}{1152}$$

Точка $z=4i$ является простым полюсом и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=4i}f(z)=\lim_{z\to4i}[f(z)(z-4i)]=\lim_{z\to4i}\left[\frac{1}{(z^2+4)^2(z+4i)}\right]=\frac{-i}{1152}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}=2\pi i\left(-\frac{i}{1152}-\frac{i}{1152}\right)=\frac{4\pi}{1152}=\frac{\pi}{288}$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}=\frac{\pi}{288}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\lambda x dx = \mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\, R(z)e^{i\lambda z}\right\}, \lambda > 0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$(x^2+1)^2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm i$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0$.

Из этого следует:

$$z_m = \{i\}$$

Эта особая точка является полюсом второго порядка. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=i}{\mathrm{rez}}\, R(z)e^{i\lambda z} = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z-i)^2}{(z^2+1)^2}e^{iz}\right] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2}e^{iz}\right] =$$

$$= \frac{2iz+iz^3-z^2}{(z+i)^3}e^{iz} = 0$$

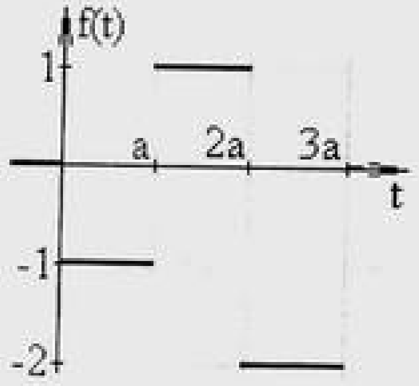
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}dx = \mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\, R(z)e^{i\lambda z}\right\} = 0$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}dx = 0$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t) = \begin{cases} -1, & 0 < t < a \\ 1, & a < t < 2a \\ -2, & 2a < t < 3a \\ 0, & 3a < t \end{cases}$$

$$f(t) = -1\cdot\eta(t) + 2\cdot\eta(t-a) - 3\cdot\eta(t-2a) + 2\cdot\eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{2}{p}e^{-ap} - \frac{3}{p}e^{-2ap} + \frac{2}{p}e^{-3ap}$$

Ответ: $F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{2}{p}e^{-ap} - \frac{3}{p}e^{-2ap} + \frac{2}{p}e^{-3ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{1}{p(p^2+1)^2}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{1}{p(p^2+1)^2}=\frac{A}{p}+\frac{Bp^3+Cp^2+Dp+E}{(p^2+1)^2}=$$

$$=\frac{Ap^4+2Ap^2+A+Bp^4+Cp^3+Dp^2+Ep}{p(p^2+1)^2}=$$

$$=\frac{(A+B)p^4+Cp^3+(2A+D)p^2+Ep+A}{p(p^2+1)^2}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\C=0\\2A+D=0\\E=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=0\\D=-2\\E=0\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{1}{p(p^2+1)^2}=\frac{1}{p}-\frac{p^3+2p}{(p^2+1)^2}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{1}{p}-\frac{p^3+2p}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{p}-\frac{p^3}{(p^2+1)^2}-\frac{2p}{(p^2+1)^2}\to$$

$$\left\{\frac{p^3}{(p^2+\alpha^2)^2}\to-\frac{1}{2}\alpha t\sin\alpha t+\cos\alpha t\right\}$$

$$\to 1-\cos t+\frac{1}{2}t\sin t-2\cdot\frac{1}{2}t\sin t=1-\cos t-\frac{1}{2}t\sin t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$1-\cos t-\frac{1}{2}t\sin t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''-y=\cos 3t$$

$$y(0)=1,\quad y'(0)=1.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)-Y(p)=\frac{p}{p^2+9}$$

$$p^2Y(p)-p-1-Y(p)=\frac{p}{p^2+9}$$

$$(p^2-1)Y(p)=\frac{p}{p^2+9}+p+1=\frac{p^3+10p+p^2+9}{p^2+9}$$

$$Y(p)=\frac{p^3+10p+p^2+9}{(p^2+9)(p^2-1)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{p^3+10p+p^2+9}{(p^2+9)(p^2-1)}=\frac{Ap+B}{p^2+9}+\frac{Cp+D}{p^2-1}=$$

$$=\frac{Ap^3+Bp^2-Ap-B+Cp^3+Dp^2+9Cp+9D}{(p^2+9)(p^2-1)}$$

$$\begin{cases}A+C=1\\B+D=1\\-A+9C=10\\-B+9D=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1/10\\B=0\\C=11/10\\D=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$Y(p)=-\frac{1}{10}\frac{p}{p^2+9}+\frac{11}{10}\frac{p}{p^2-1}+\frac{1}{p^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=-\frac{1}{10}\cos 3t+\frac{11}{10}\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t$$

Ответ: $y(t)=-\frac{1}{10}\cos 3t+\frac{11}{10}\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t$

Задача 25

Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы F=–kx, пропорциональной смещению x и направленной в противоположную сторону, и силы сопротивления R=rv. В момент t=0 частица находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Найти закон движения x=x(t) частицы.

$k = 5m$, $r = 2m$, $x_0 = 1м$, $v_0 = 1м/с$.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kx - rv$$

$$\ddot{x}m + r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 1$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m + 2m\dot{x} + 5mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + 2pX(p) - 2x(0) + 5X(p) = 0$$

$$(p^2 + 2p + 5)X(p) - p - 3 = 0$$

$$X(p) = \frac{p+3}{p^2 + 2p + 5} = \frac{p+3}{(p+1)^2 + 4} = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} + \frac{2}{(p+1)^2 + 4}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = e^{-t}\cos 2t + e^{-t}\sin 2t$$

Ответ: $x(t) = e^{-t}\cos 2t + e^{-t}\sin 2t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1 \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = X(p) + 2Y(p) + 1/p \\ pY(p) - y(0) = 4X(p) - Y(p) \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 2Y(p) + 1/p \\ pY(p) - 1 = 4X(p) - Y(p) \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 1 = 4X(p) - Y(p)$$

$$X(p) = \frac{pY(p) + Y(p) - 1}{4}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p\frac{pY(p) + Y(p) - 1}{4} = \frac{pY(p) + Y(p) - 1}{4} + 2Y(p) + \frac{1}{p}$$

$$(p^2 - 9)Y(p) = p - 1 + 4/p \Rightarrow Y(p) = \frac{p - 1 + 4/p}{p^2 - 9}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{p - 1 + 4/p}{p^2 - 9} = \frac{p}{p^2 - 9} - \frac{1}{3}\frac{3}{p^2 - 9} + \frac{4}{9}\frac{9}{p}\frac{1}{p^2 - 9} \to$$

$$\to y(t) = \operatorname{ch}3t - \tfrac{1}{3}\operatorname{sh}3t - \tfrac{4}{9}(1 - \cos 3it) = \operatorname{ch}3t - \tfrac{1}{3}\operatorname{sh}3t - \tfrac{4}{9}(1 - \operatorname{ch}3t) =$$

$$= \tfrac{13}{9}\operatorname{ch}3t - \tfrac{1}{3}\operatorname{sh}3t - \tfrac{4}{9}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = 4x - y \Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{4}(\dot{y} + y) = \tfrac{1}{4}(\tfrac{13}{3}\operatorname{sh}3t - \operatorname{ch}3t + \tfrac{13}{9}\operatorname{ch}3t - \tfrac{1}{3}\operatorname{sh}3t - \tfrac{4}{9}) =$$

$$= \tfrac{1}{4}(\tfrac{12}{3}\operatorname{sh}3t + \tfrac{4}{9}\operatorname{ch}3t - \tfrac{4}{9}) = \operatorname{sh}3t + \tfrac{1}{9}\operatorname{ch}3t - \tfrac{1}{9}$$

Ответ:

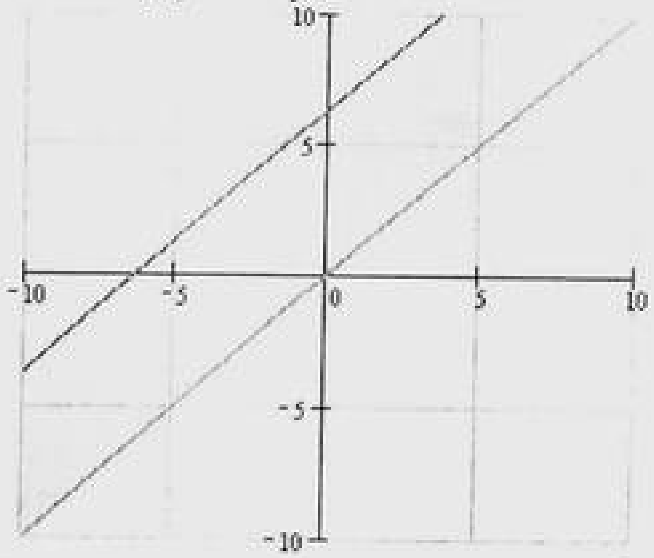
$$x(t) = \operatorname{sh}3t + \tfrac{1}{9}\operatorname{ch}3t - \tfrac{1}{9}$$

$$y(t) = \tfrac{13}{9}\operatorname{ch}3t - \tfrac{1}{3}\operatorname{sh}3t - \tfrac{4}{9}$$

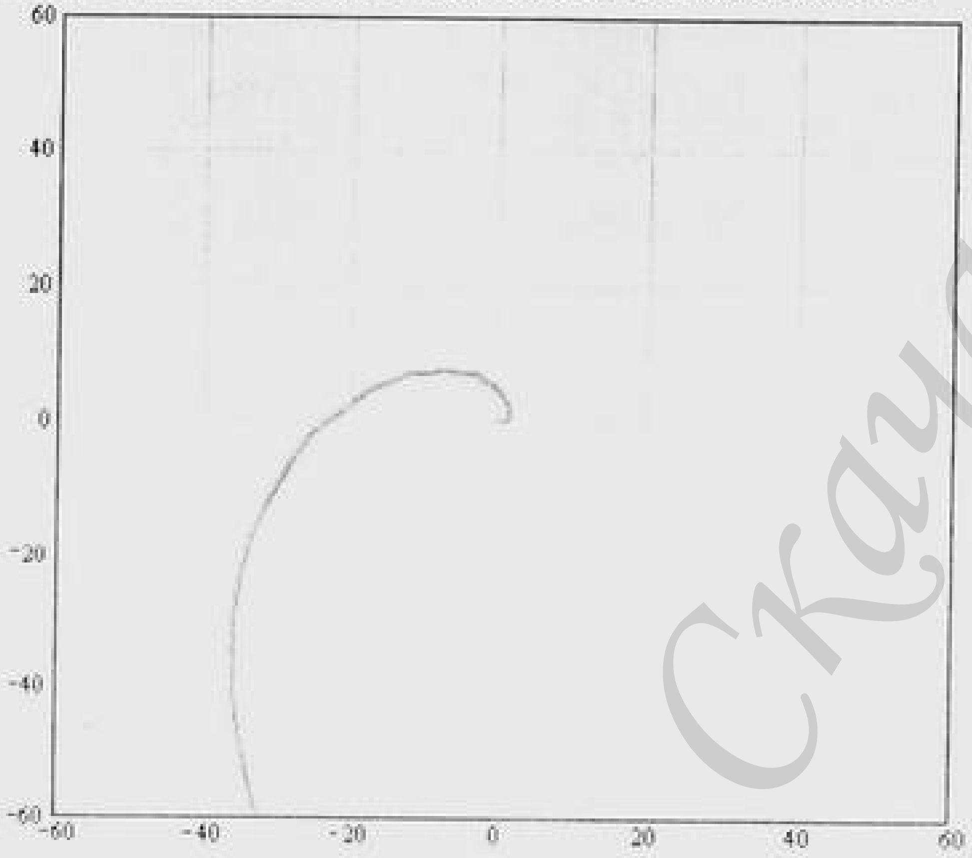
Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = e^z$; полоса между $y=x$ и $y=x+2\pi$.



Каждая из границ полосы преобразуется в раскручивающуюся спираль с центром в начале координат. Сдвиг мнимой части z на 2π приводит к тому, что эти две спирали совпадают. Таким образом, заключенная между ними область, являющаяся отображением исходной полосы, оказывается всей комплексной плоскостью:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\ldots,n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z=x+iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Аналитические функции

Функция w=f(z) называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция w=f(z) называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z \in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$