/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[3]{i/27}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\ldots,n-1;\quad z\neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[3]{i/27}$:

$$\sqrt[3]{i/27}=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{i}{6}$$

$$\sqrt[3]{i/27}=-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{i}{6}$$

$$\sqrt[3]{i/27}=-\frac{i}{3}$$

Ответ: $\sqrt[3]{i/27}=\left\{\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{i}{6};-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{i}{6};-\frac{i}{3}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $(-i)^{5i}$

Нам известно следующее равенство:

$$\alpha^{z}=e^{z\cdot \mathrm{Ln}\,\alpha}$$

Подставим в это равенство данные нашей задачи. Тогда:

$$(-i)^{5i}=e^{5i\cdot \mathrm{Ln}(-i)}$$

Как известно, главное значение $\mathrm{Ln}(-i)=-i\pi/2$. Тогда выражение можно преобразовать следующим образом:

$$(-i)^{5i}=e^{5i\cdot(-i\pi/2)}=e^{5\pi/2}$$

Ответ: $(-i)^{5i}=e^{5\pi/2}$

Скачано с Antigtu.ru

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arc}\cos(-3i)$$

Функция Arccos является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arc}\cos z = -i\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

Подставим вместо z значение (–3i):

$$\mathrm{Arc}\cos(-3i) = -i\mathrm{Ln}\left(-3i + \sqrt{(-3i)^2 - 1}\right) = -i\mathrm{Ln}\left(-3i + \sqrt{-10}\right) =$$
$$= -i\mathrm{Ln}\left(-3i + i\sqrt{10}\right)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-i\mathrm{Ln}\left(-3i + i\sqrt{10}\right) = -i[\ln\left|-3i + i\sqrt{10}\right| +$$
$$+ i(\arg(-3i + i\sqrt{10}) + 2\pi k)] = -i\ln(\sqrt{10} - 3) +$$
$$+ \arg(-3i + i\sqrt{10}) + 2\pi k \approx i \cdot 1{,}818 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ответ: $\mathrm{Arc}\cos(-3i) \approx i \cdot 1{,}818 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z - i| < 1, \quad \arg z \geq \pi/4, \quad \arg(z + 1 - i) \leq \pi/4$

Задача 5

Определить вид кривой:

$z = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4)$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t) = 2t^2 + 2t + 1; \quad y(t) = -(t^2 + t + 4)$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = 2t^2 + 2t + 1 \Rightarrow x - \frac{1}{2} = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$y = -(t^2 + t + 4) \Rightarrow -y - 3 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow t = \sqrt{-y - 3} - \frac{1}{2}$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\sqrt{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{-y - 3} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = -y - 3 \Rightarrow x + 2y + \frac{11}{2} = 0$$

Ответ: $x + 2y + \frac{11}{2} = 0$

Скачано с AntiGTU.ru

Задача 6

Проверить, что v является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной мнимой части v(x,y) и значению $f(z_0)$:

$v = 2xy - 2y$

$f(0) = 1$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = 2x + 2iy - 2 = 2z - 2$$

Т.к. производная существует, то v является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int (2z-2)dz = z^2 - 2z + C$$

Определим константу C:

$$f(0) = 0^2 - 2\cdot 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$f(z) = z^2 - 2z + 1$

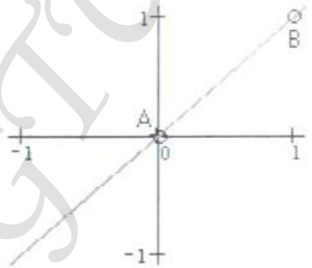
Ответ: $f(z) = z^2 - 2z + 1$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$\int\limits_{AB} z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz$; AB – отрезок прямой; $z_A = 0; z_B = 1+i$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = (x-iy)\,\mathrm{Im}\left(x^2 + 2ixy - y^2\right) = \underbrace{2x^2y}_{u(x,y)} + i\cdot\underbrace{(-2xy^2)}_{v(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4xy; \frac{\partial v}{\partial y} = -4xy; \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y};$$

Условия Коши-Римана не выполняются, значит, функция не является аналитической. Тогда представим кривую в параметрическом виде:

$$z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = t; z_A = z(0); z_B = z(1);$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_0^1 f[z(t)]z'(t)dt = \int\limits_0^1 (2t^3 - 2it^3)\cdot(1+i)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 2(1-i)t^3(1+i)dt = 2(1-i^2)\int\limits_0^1 t^3 dt = 4\cdot\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1 = 1$$

Ответ: $\int\limits_L f(z)dz = 1$

Скачано с AntiGTU.ru

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3}=\frac{13(z+26)}{-z(2z+13)(z-13)}=-\frac{13}{2z}\cdot\frac{z+26}{(z+6{,}5)(z-13)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

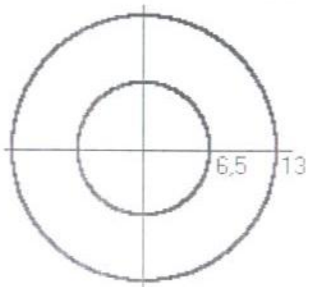
$$\frac{z+26}{(z+6{,}5)(z-13)}=\frac{A}{z+6{,}5}+\frac{B}{z-13}=\frac{Az-13A+Bz+6{,}5B}{(z+6{,}5)(z-13)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=-1;B=2\}\Rightarrow\frac{z+26}{(z+6{,}5)(z-13)}=\frac{-1}{z+6{,}5}+\frac{2}{z-13}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{13}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+6{,}5}-\frac{2}{z-13}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=-6{,}5; z=13$



Рассмотрим область $|z|<6{,}5$:

$$f(z)=\frac{13}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+6{,}5}-\frac{2}{z-13}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1-(-\frac{2z}{13})}+\frac{1}{1-\frac{z}{13}}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{2z}{13}+\frac{4z^2}{169}-\frac{8z^3}{2197}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{13}+\frac{z^2}{169}+\frac{z^3}{2197}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{13}+\frac{4z}{169}-\frac{8z^2}{2197}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{13}+\frac{z}{169}+\frac{z^2}{2197}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $6{,}5<|z|<13$:

$$f(z)=\frac{13}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+6{,}5}-\frac{2}{z-13}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{13}{2z(1-(-\frac{13}{2z}))}+\frac{1}{1-\frac{z}{13}}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{13}{2z}-\frac{169}{4z^2}+\frac{2197}{8z^3}-\frac{28561}{16z^4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{13}+\frac{z^2}{169}+\frac{z^3}{2197}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{13}{2z^2}-\frac{169}{4z^3}+\frac{2197}{8z^4}-\frac{28561}{16z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{13}+\frac{z}{169}+\frac{z^2}{2197}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>13$:

$$f(z)=\frac{13}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+6{,}5}-\frac{2}{z-13}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{13}{2z(1-(-\frac{13}{2z}))}-\frac{13}{z(1-\frac{13}{z})}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{13}{2z}-\frac{169}{4z^2}+\frac{2197}{8z^3}-\frac{28561}{16z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{13}{z}+\frac{169}{z^2}+\frac{2197}{z^3}+\frac{28561}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{13}{2z^2}-\frac{169}{4z^3}+\frac{2197}{8z^4}-\frac{28561}{16z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{13}{z^2}+\frac{169}{z^3}+\frac{2197}{z^4}+\frac{28561}{z^5}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<6{,}5: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{13}+\frac{4z}{169}-\frac{8z^2}{2197}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{13}+\frac{z}{169}+\frac{z^2}{2197}+\ldots\right)$$

$$6{,}5<|z|<13: f(z)=\left(\frac{13}{2z^2}-\frac{169}{4z^3}+\frac{2197}{8z^4}-\frac{28561}{16z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{13}+\frac{z}{169}+\frac{z^2}{2197}+\ldots\right)$$

$$|z|>13: f(z)=\left(\frac{13}{2z^2}-\frac{169}{4z^3}+\frac{2197}{8z^4}-\frac{28561}{16z^5}+\ldots\right)-\left(\frac{13}{z^2}+\frac{169}{z^3}+\frac{2197}{z^4}+\frac{28561}{z^5}+\ldots\right)$$

Скачано с AntiGTU.ru

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$.

$$f(z)=\frac{2z}{z^2-4}, z_0=-1+3i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+4}=\frac{1}{z-2i}+\frac{1}{z+2i}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-z_0)-3+3i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(3i-3)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-z_0)+1+3i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1+3i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{1}{z-2i}+\frac{1}{z+2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(3i-3)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1+3i)^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(3i-3)^{n+1}}+\frac{1}{(1+3i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(3i-3)^{n+1}}+\frac{1}{(1+3i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=z\cdot\cos\frac{z}{z-5}, z_0=5$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-5; z\cdot\cos\frac{z}{z-5}=(z'+5)\cos\frac{z'+5}{z'}=(z'+5)[\cos 1\cos\frac{5}{z'}-$$

$$-\sin 1\sin\frac{5}{z'}]=z'\cos 1\cos\frac{5}{z'}-z'\sin 1\sin\frac{5}{z'}+5\cos 1\cos\frac{5}{z'}-5\sin 1\sin\frac{5}{z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=z'\cos 1\cos\frac{5}{z'}-z'\sin 1\sin\frac{5}{z'}+5\cos 1\cos\frac{5}{z'}-5\sin 1\sin\frac{5}{z'}=$$

$$=\left(1-\frac{5^2}{2!z'^2}+\frac{5^4}{4!z'^4}-\ldots\right)z'\cos 1-\left(\frac{5}{z'}-\frac{5^3}{3!z'^3}+\frac{5^5}{5!z'^5}-\ldots\right)z'\sin 1+$$

$$+5\left(1-\frac{5^2}{2!z'^2}+\frac{5^4}{4!z'^4}-\ldots\right)\cos 1-5\left(\frac{5}{z'}-\frac{5^3}{3!z'^3}+\frac{5^5}{5!z'^5}-\ldots\right)\sin 1=$$

$$=z'\cos 1+5\cos 1-5\sin 1-\frac{5^2(\cos 1+2!\sin 1)}{2!z'}+\frac{5^3(2!\sin 1-3!\cos 1)}{2!3!z'^2}+$$

$$+\frac{5^4(3!\cos 1+4!\sin 1)}{3!4!z'^3}-\frac{5^5(4!\sin 1-5!\cos 1)}{4!5!z'^4}-\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=5$:

$$f(z)=z\cos 1-5\sin 1-\frac{5^2(\cos 1+2!\sin 1)}{2!(z-5)}+\frac{5^3(2!\sin 1-3!\cos 1)}{2!3!(z-5)^2}+$$

$$+\frac{5^4(3!\cos 1+4!\sin 1)}{3!4!(z-5)^3}-\frac{5^5(4!\sin 1-5!\cos 1)}{4!5!(z-5)^4}-\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=z\cos 1-5\sin 1-\frac{5^2(\cos 1+2!\sin 1)}{2!(z-5)}+\frac{5^3(2!\sin 1-3!\cos 1)}{2!3!(z-5)^2}+$$

$$+\frac{5^4(3!\cos 1+4!\sin 1)}{3!4!(z-5)^3}-\frac{5^5(4!\sin 1-5!\cos 1)}{4!5!(z-5)^4}-\ldots$$

Скачано с AntiGTU.ru

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z) = z\cos\left(\frac{2}{z^3}\right)$$

Тип особой точки для этой функции следует находить, применяя разложение в ряд Лорана в окрестности точки z=0:

$$f(z) = z\cos\left(\frac{2}{z^3}\right) = z\left(1 - \frac{2^2}{2!z^6} + \frac{2^4}{4!z^{12}} - \ldots\right) =$$

$$= z - \frac{2^2}{2!z^5} + \frac{2^4}{4!z^{11}} - \frac{2^6}{6!z^{17}} + \ldots$$

Рассмотрим получившийся ряд и выделим главную и правильную части ряда Лорана:

$$f(z) = \underbrace{z}_{\text{правильная часть}} \underbrace{- \frac{2^2}{2!z^5} + \frac{2^4}{4!z^{11}} - \frac{2^6}{6!z^{17}} + \ldots}_{\text{главная часть}}$$

Поскольку главная часть содержит бесконечное число членов, то точка z = 0 для заданной функции f(z) является существенной особой точкой.

Ответ: Точка z = 0 является существенно особой точкой для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = \frac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$$

Изолированными особыми точками являются $z = 2\pi k,\ k \in Z$. Следует также отдельно рассмотреть точку z = 0. Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(z) = \frac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}; \quad \begin{array}{l} g(z) = \sin 3z; \\ h(z) = z(1-\cos z); \end{array}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = \pi k$:

$$g(2\pi k) = 0;$$
$$g'(z) = \cos z; g'(2\pi k) \neq 0;$$
$$h(2\pi k) = 0;$$
$$h'(z) = 1 - \cos z + z\sin z; h'(2\pi k) = 0;$$
$$h''(z) = 2\sin z + z\cos z; h''(2\pi k \neq 0) \neq 0; h''(0) = 0;$$
$$h'''(z) = 3\cos z - z\sin z; h'''(0) \neq 0;$$

В случаях z = 0 порядок ненулевой производной выше для функции, стоящей в знаменателе, т.е. точка z = 0 является полюсом функции. Поскольку в данном случае разность порядков ненулевых производных g(z) и h(z) равна двум, то точка z = 0 является полюсом 2-го порядка.

Исходя их тех же соображений, точки $z = 2\pi k$ $(k \neq 0)$ являются полюсами 1-го порядка

Ответ: Точка z = 0 для данной функции является полюсом 2-го порядка.

Точки $z = 2\pi k \neq 0$ являются полюсами 1-го порядка.

Скачано с AntiGTU.ru

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-\pi|=2} \underbrace{\frac{\cos^2 z}{z\sin z}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = \pi k,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадает только точка $z = \pi$.

Точка $z_1 = \pi$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to\pi}[f(z)(z-\pi)] = \lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)\cos^2 z}{z\sin z} = \begin{Bmatrix} t = z-\pi \\ z = t+\pi \end{Bmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2(t+\pi)}{(t+\pi)\sin(t+\pi)} = \lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2 t}{-(t+\pi)\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2 t}{-(t+\pi)t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\cos^2 t}{-(t+\pi)} = -\frac{1}{\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-\pi|=2}\frac{\cos^2 z}{z\sin z}dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\right) = -2i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-\pi|=2}\frac{\cos^2 z}{z\sin z}dz = -2i$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1/3}\underbrace{\frac{e^z-\sin z}{z^2}}_{f(z)}dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$\frac{e^z-\sin z}{z^2} = \frac{\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots\right)-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\right)}{z^2} =$$

$$= \frac{1+\frac{z^2}{2!}+2\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+2\frac{z^7}{7!}+\ldots}{z^2} = \frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}+2\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}+\ldots$$

Правильная часть получившегося ряда содержит бесконечное число членов, из чего следует, что это – полюс. Порядок полюса равен порядку старшего члена главной части. Таким образом, $z = 0$ – это полюс 2-го порядка и вычет находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[f(z)z^2] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z-\sin z}{1}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0}(e^z-\cos z) = 0$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1/3}\frac{e^z-\sin z}{z^2}dz = 2\pi i\cdot 0 = 0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1/3}\frac{e^z-\sin z}{z^2}dz = 0$

Скачано с AntiGTU.ru

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=4} \underbrace{\frac{\operatorname{sh} iz - \sin iz}{z^3 \operatorname{sh}(z/3)}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции z = 3ikπ. Однако в контур попадает только z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh} iz - \sin iz}{z^3 \operatorname{sh}(z/3)} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad \begin{matrix} g(z) = \operatorname{sh} iz - \sin iz \\ h(z) = z^3 \operatorname{sh}(z/3) \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при z = 0. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что z = 0 представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\operatorname{sh} iz - \sin iz}{z^2 \operatorname{sh}(z/3)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{i\cos z - i\operatorname{ch} z}{2z\operatorname{sh}(z/3) + \frac{1}{3}z^2\operatorname{ch}(z/3)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{-i\sin z - i\operatorname{sh} z}{2\operatorname{sh}(z/3) + \frac{4}{3}z\operatorname{ch}(z/3) + \frac{1}{9}z^2\operatorname{sh}(z/3)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{-i\cos z - i\operatorname{ch} z}{2\operatorname{ch}(z/3) + \frac{2}{3}z\operatorname{sh}(z/3) + \frac{1}{27}z^2\operatorname{ch}(z/3)}\right) = \frac{-2i}{2} = -i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz - \sin iz}{z^3 \operatorname{sh}(z/3)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot (-i) = 2\pi$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz - \sin iz}{z^3 \operatorname{sh}(z/3)} dz = 2\pi$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} + \frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \underbrace{\frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z-2i|=2} \underbrace{\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}}_{f_2(z)} dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=1+2i и z=3+2i. При этом точка z=3+2i не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=1+2i является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=1+2i} f_1(z) = \lim_{z\to 1+2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{2(z-1-2i)^2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}\right] = \lim_{z\to 1+2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-3-2i)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1+2i}\left[\frac{(1-2i)\pi}{5(z-3-2i)}\cos\frac{(1-2i)\pi z}{10} - \frac{2}{(z-3-2i)^2}\sin\frac{(1-2i)\pi z}{10}\right] = -\frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=1+2i} f_1(z) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

Скачано с AntiGTU.ru

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\pi z/2}+1=0 \Rightarrow e^{\pi z/2}=-1 \Rightarrow \pi z/2=\ln(-1)=\pi i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=2i+4ik, k\in z$$

Из этих точек только одна охвачена контуром |z–2i|=2 и должна приниматься во внимание. Это точка z=2i, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=2i} f_2(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{\pi(z-2i)}{e^{\pi z/2}+1}=\left\{\begin{matrix}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2}}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{\pi i}}=\frac{2}{e^{\pi i}}=\frac{2}{-1}=-2$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=2i}f_2(z)=2\pi i\cdot(-2)=-4\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}+\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz=$$

$$=\oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}dz+\oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}dz=$$

$$=-\pi i-4\pi i=-5\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-2i|=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}+\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz=-5\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{3}\sin t+4}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{3}\sin t+4}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\frac{\sqrt{3}}{i}(z-\frac{1}{z})+3}4=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{3}(z^2-1)+4iz}=$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{3}(z+i\sqrt{3})(z+i/\sqrt{3})}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-i\sqrt{3};\quad z=-i/\sqrt{3};$

Точка $-i\sqrt{3}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $-i/\sqrt{3}$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-i/\sqrt{3}}f(z)=\lim_{z\to -i/\sqrt{3}}[f(z)(z+i/\sqrt{3})]=$$

$$=\lim_{z\to -i/\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}(z+i\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{3}(-i/\sqrt{3}+i\sqrt{3})}=-\frac{i}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{3}(z+i\sqrt{3})(z+i/\sqrt{3})}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{2}\right)=\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{3}\sin t+4}=\pi$

Скачано с AntiGTU.ru

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(\sqrt{7}+\frac{\sqrt{3}}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i(2\sqrt{7}z+\sqrt{3}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{3}(z-\frac{2-\sqrt{7}}{\sqrt{3}})(z+\frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{3}})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=(2-\sqrt{7})/\sqrt{3};\quad z=(-2-\sqrt{7})/\sqrt{3};$

Точка $z=(-2-\sqrt{7})/\sqrt{3}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=(2-\sqrt{7})/\sqrt{3}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=(2-\sqrt{7})/\sqrt{3}}f(z)=\lim_{z\to(2-\sqrt{7})/\sqrt{3}}\frac{d}{dz}[f(z)(z-(2-\sqrt{7})/\sqrt{3})^2]=$$

$$=\lim_{z\to(2-\sqrt{7})/\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[\sqrt{3}(z+(2+\sqrt{7})/\sqrt{3})\right]^2}=\frac{4}{3i}\lim_{z\to(2-\sqrt{7})/\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z+(2+\sqrt{7})/\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{4}{3i}\lim_{z\to(2-\sqrt{7})/\sqrt{3}}\left[-3\cdot\frac{z\sqrt{3}-2-\sqrt{7}}{(z\sqrt{3}+2+\sqrt{7})^3}\right]=-\frac{4}{i}\cdot\frac{2-\sqrt{7}-2-\sqrt{7}}{(2-\sqrt{7}+2+\sqrt{2})^3}=-\frac{4}{i}\cdot\frac{-2\sqrt{7}}{4^3}=\frac{\sqrt{7}}{8i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[\sqrt{3}(z-\frac{2-\sqrt{7}}{\sqrt{3}})(z+\frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{3}})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{8i}\right)=\frac{\sqrt{7}}{4}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos t)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-10x+29)^2}$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-10x+29)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2-10z+29)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z-5+2i)^2(z-5-2i)^2}$$

Особые точки:

$z=5+2i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=5-2i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=5+2i$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=5+2i}f(z)=\lim_{z\to5+2i}\frac{d}{dz}[f(z)(z-5-2i)^2]=$$

$$=\lim_{z\to5+2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-5+2i)^2}\right]=\lim_{z\to-2+3i}\left[\frac{-2}{(z-5+2i)^3}\right]=\frac{1}{32i}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-10x+29)^2}=2\pi i\left(\frac{1}{32i}\right)=\frac{\pi}{16}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-10x+29)^2}=\frac{\pi}{16}$

Скачано с AntiGTU.ru

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\lambda x dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$x^4+13x^2+36=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm 2i; z_{3,4}=\pm 3i;$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{2i;3i\}$$

Эти особые точки являются простыми полюсами. Найдем в них вычеты:

$$1)\underset{z=2i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 2i}\frac{(z^2+z)(z-2i)}{(z^2+4)(z^2+9)}e^{iz}=\lim_{z\to 2i}\frac{(z^2+z)e^{iz}}{(z+2i)(z^2+9)}=$$

$$=\frac{(-4+2i)e^{-2}}{(2i+2i)(-4+9)}=\frac{(-4+2i)e^{-2}}{20i}=\frac{(1+2i)e^{-2}}{10}$$

$$2)\underset{z=3i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 3i}\frac{(z^2+z)(z-2i)}{(z^2+4)(z^2+9)}e^{iz}=\lim_{z\to 3i}\frac{(z^2+z)e^{iz}}{(z^2+4)(z+3i)}=$$

$$=\frac{(-9+2i)e^{-3}}{(-9+4)(3i+3i)}=-\frac{(2+9i)e^{-3}}{30}$$

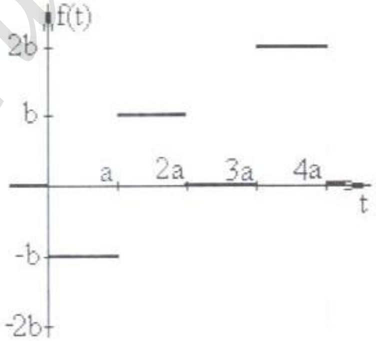
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{3\pi e^{-2}}{15}-\frac{2\pi e^{-3}}{15}$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx=\frac{3\pi e^{-2}}{15}-\frac{2\pi e^{-3}}{15}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}-b, & 0<t<a\\ b, & a<t<2a\\ 0, & 2a<t<3a\\ 2b, & 3a<t<4a\\ 0, & 4a<t\end{cases}$$

$$f(t)=-b\cdot\eta(t)+2b\cdot\eta(t-a)-b\cdot\eta(t-2a)+2b\cdot\eta(t-3a)-2b\cdot\eta(t-4a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=-\frac{b}{p}+\frac{2b}{p}e^{-ap}-\frac{b}{p}e^{-2ap}+\frac{2b}{p}e^{-3ap}-\frac{2b}{p}e^{-4ap}$$

Ответ: $F(p)=-\frac{b}{p}+\frac{2b}{p}e^{-ap}-\frac{b}{p}e^{-2ap}+\frac{2b}{p}e^{-3ap}-\frac{2b}{p}e^{-4ap}$

Скачано с AntiGTU.ru

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}=\frac{A}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+2}=$$

$$=\frac{Ap^2+2Ap+2A+Bp^2+Bp+Cp+C}{(p+1)(p^2+2p+2)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(2A+B+C)p+(2A+C)}{(p+1)(p^2+2p+2)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\2A+B+C=0\\2A+C=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=-2\\C=-2\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}=2\cdot\frac{1}{p+1}-2\cdot\frac{p}{p^2+2p+2}-2\cdot\frac{1}{p^2+2p+2}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$2\cdot\frac{1}{p+1}-2\cdot\frac{p}{p^2+2p+2}-2\cdot\frac{1}{p^2+2p+2}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{p+1}-2\cdot\frac{p}{(p+1)^2+1}-2\cdot\frac{1}{(p+1)^2+1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{p+1}-2\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+1}\to$$

$$\to 2e^{-t}-2e^{-t}\cos t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$2e^{-t}-2e^{-t}\cos t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''+y=2\cos t$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+Y(p)=\frac{2p}{p^2+1}$$

$$p^2Y(p)-1+Y(p)=\frac{2p}{p^2+1}$$

$$(p^2+1)Y(p)=\frac{2p}{p^2+1}+1=\frac{p^2+2p+1}{p^2+1}$$

$$Y(p)=\frac{p^2+2p+1}{(p^2+1)^2}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{p^2+2p+1}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{p^2+1}+\frac{2p}{(p^2+1)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=\sin t+2\cdot\frac{1}{2}t\sin t=\sin t+t\sin t$$

Ответ: $y(t)=\sin t+t\sin t$

Скачано с AntiGTU.ru

Задача 25

На материальную точку массы m действует сила сопротивления R=kv, пропорциональная скорости v. Какое расстояние пройдет точка за неограниченное время, если ей сообщена начальная скорость v_0?

$k = m/2$, $v_0 = 6$ м/с.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kv$$

$$\ddot{x}m + k\dot{x} = 0$$

Начальные условия:

$$\dot{x}(0) = v_0 = 6$$

$$x(0) = 0$$

Подставим значения k:

$$\ddot{x}m + \frac{m}{2}\dot{x} = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x} = 0$$

Перейдем к изображениям функций:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + \frac{1}{2}pX(p) - \frac{1}{2}x(0) = 0$$

$$p(p + \frac{1}{2})X(p) - 6 = 0$$

$$p(p + \frac{1}{2})X(p) = 6$$

$$X(p) = \frac{6}{p(p+1/2)} = \frac{12}{p} - \frac{12}{p+1/2}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = 12 - 12e^{-t/2}$$

Ответ: $x(t) = 12 - 12e^{-t/2}$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y \\ \dot{y} = 3x + 1 \end{cases}$$

$x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = 3Y(p) \\ pY(p) - y(0) = 3X(p) + 1/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) - 2 = 3Y(p) \\ pY(p) = 3X(p) + 1/p \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) = 3X(p) + 1/p$$

$$X(p) = \frac{pY(p) - 1/p}{3}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p\frac{pY(p) - 1/p}{3} - 2 = 3Y(p) \Rightarrow (p^2 - 9)Y(p) = 7$$

$$Y(p) = \frac{7}{p^2 - 9}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{7}{p^2 - 9} = \frac{7}{3}\frac{3}{p^2 - 9} \to y(t) = \frac{7}{3}\text{sh}3t$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = 3x + 1 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{3}(\dot{y} - 1) = \frac{1}{3}(7\text{ch}3t - 1) = \frac{7}{3}\text{ch}3t - \frac{1}{3}$$

Ответ:

$$x(t) = \frac{7}{3}\text{ch}3t - \frac{1}{3}$$

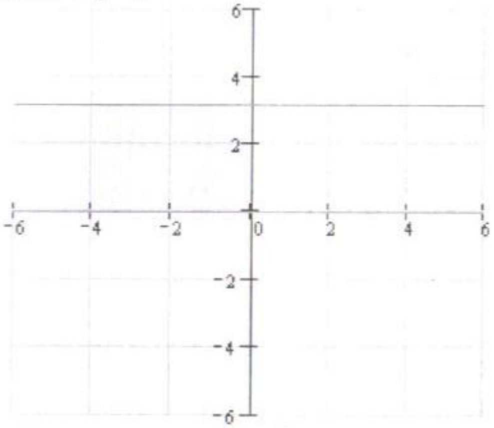
$$y(t) = \frac{7}{3}\text{sh}3t$$

Скачано с Antigtu.ru

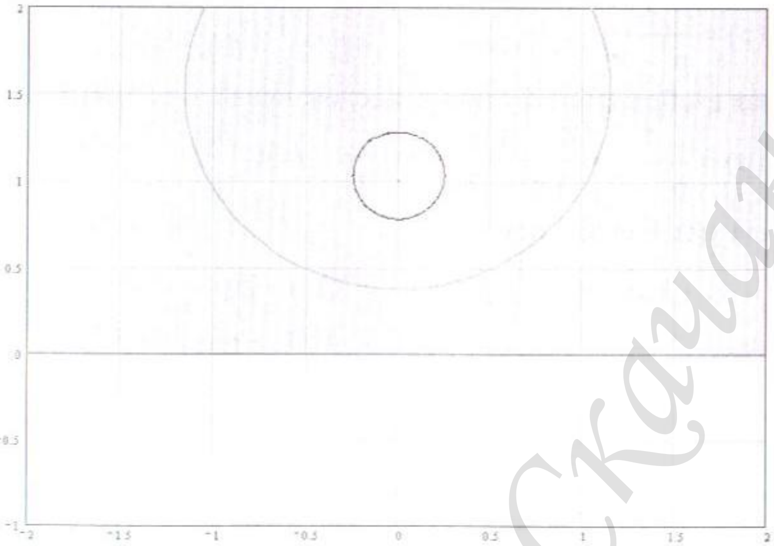
Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции w = f(z) .

w = cth(z); полоса 0<y<π.



Каждая из горизонтальных линий в полосе преобразуется в замкнутую кривую, лежащую в верхней полуплоскости. В пределе y=π/2 кривая сжимается в точку (0;1). В пределе y=0 нижняя граница кривой превращается в ось абсцисс, а сама кривая имеет бесконечный охват Отображение совокупности таких кривых дает всю верхнюю полуплоскость. В качестве примеров ниже приведены кривые для x=0,π/3,π/8,π/2:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\ldots, n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$z = x + iy$ $\qquad$ $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z - i}{z + i}$$

Аналитические функции

Функция w=f(z) называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция w=f(z) называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке z∈G.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Скачано с AntiGTU.ru