Екзаменаційний білет № 16

I. Теоретична частина

1. Інтерполяційний поліном Лагранжа.

3. Інтерполяційний поліном Лагранжа.

Інтерполяційний поліном виду

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_{ni} f_i \qquad (3),$$

де

$$p_{ni} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \qquad (4)$$

називається інтерполяційним багаточленом Лагранжа, а функції (4) – коефіцієнтами Лагранжа.

Зауваження: оскільки інтерполяційний багаточлен Лагранжа лінійно залежить від f_i, інтерполяційний багаточлен для суми двох функцій дорівнює сумі двох інтерполяційних багаточленів.

Приклад 1.

Побудувати поліном Лагранжа для функції, що визначена наступною таблицею.

x_i	0	2	3	5
y_i	1	3	2	5

У цьому випадку n = 3 , отже

$$L_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)}\cdot 1 + \frac{x(x-3)(x-5)}{2(2-3)(2-5)}\cdot 3 + \frac{x(x-2)(x-5)}{3(3-2)(3-5)}\cdot 2 + \frac{x(x-2)(x-3)}{5(5-2)(5-3)}\cdot 5 =$$

$$= 1 + 62/15\cdot x - 13/6\cdot x^2 + 3/10\cdot x^3.$$

2. Оцінка точності розв'язку задачі Коши.

4. Оцінювання похибки наближеного розв'язку задачі Коші.

Для методів Ейлера та його модифікацій, а також методів Рунге-Кутта і Адамса застосовують апріорні оцінки похибки наближеного розв'язку задачі Коші (1)-(2) . Однак ці оцінки здебільшого значно завищені. Тому їхнє значення не стільки практичне, скільки теоретичне, бо з них безпосередньо випливає висновок про збіжність цих методів. Крім того, апріорні оцінки містять у собі ряд сталих, для відшукання яких часто треба виконувати досить складні обчислення.

Тому, щоб оцінити похибку наближеного розв'язку задачі (1) - (2), намагаються використати інформацію, яку дістають в процесі чисельного розрахунку (такі оцінки називають *апостеріорними*). Найефективнішим оцінюванням є використання оцінки з подвійним перерахунком.

Розглянемо детальніше метод подвійного перерахункудля таких трьох випадків [2]:

1) задано крок інтегрування *h* і треба визначити точні цифри наближеного розв'язку в кожній вузловій точці ;

2) задано точність *ε*>0, з якою треба обчислити наближений розв'язок задачі, добираючи належним чином як сам метод, так і крок інтегрування *h*;

3) оцінити похибку $\varepsilon_k = y_k - y(x_k)$, де y_k і $y(x_k)$ – відповідно наближений і точний розв'язок задачі в кожній вузловій точці .

Для цього розв'язок задачі (1)-(2) у кожній вузловій точці обчислюють двічі: з кроком *h* і *h/2*. Позначатимемо їх відповідно y_k і y_k^*.

Десяткові розряди наближень y_k і y_k^*, які збігаються між собою, вважають точними цифрами наближеного розв'язку в точці .

Якщо наближений розв'язок задачі (1)-(2) треба обчислити з наперед заданою точністю є>0, то, використовуючи метод певного порядку точності, інтегрування з кроками *h* і *h/2* доцільно вести паралельно, щоб вчасно визначити неузгодженість між значеннями y_k і y_k^* і, можливо, перейти до нового кроку.

Якщо ж у точці значення y_k і y_k^* задовольняють нерівність $|y_k^* - y_k| < \varepsilon$, то крок інтегрування для наступної точки x_{k+1} треба збільшити, наприклад, подвоїти. Якщо $|y_k^* - y_k| < \varepsilon$, то крок ітегрування ділять навпіл. Цим забезпечують автоматичний вибір кроку інтегрування.

Нарешті, наявність наближених значень y_k і y_k^*, обчислених відповідно з кроком *h* і *h/2*, дає змогу наближено оцінити похибку методу $\varepsilon_k = y_k^* - y(x_k)$ у точці . Для одержання оцінки похибки, припустимо, що виконуються такі умови:

1) на кожному кроці інтегрування *h* похибка методу приблизно пропорційна до $h^{s+1} (s \geq 1)$, де S – порядок точності методу;

2) похибка методу на кожному кроці інтегрування однакова;

3) на кожному наступному кроці інтегрування сумарна похибка методу містить також усі похибки, зроблені на попередніх кроках.

Тому, якщо $y_1 - y(x_1) = Mh^{s+1}$, де *M* — невідомий коефіцієнт пропорційності, то

$$y_2 - y(x_2) = 2Mh^{s+1},$$
$$y_3 - y(x_3) = 3Mh^{s+1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n - y(x_n) = nMh^{s+1}.$$

Отже, для похибки в точці у випадку інтегрування з кроком *h* маємо рівність

$$y_k - y(x_k) = kMh^{s+1}, \qquad (4.1)$$

а при інтегруванні з кроком *h/2* – рівність

$$y - y(x_k) = 2kM\left(\frac{h}{2}\right)^{s+1}. \qquad (4.2)$$

Віднявши почленно (4.2) від рівності (4.1) та розв'язавши одержане рівняння щодо невідомого коефіцієнта *M*, знайдемо

$$M = \frac{2^s (y_k - y_k^*)}{kh^{s+1}(2^s - 1)}.$$

Підставивши це значення *M* в (4.2), отримаємо

$$y_k^* - y(x_k) = \frac{y_k - y_k^*}{2^s - 1}. \qquad (4.3)$$

Оцінювання абсолютної похибки за допомогою величини $|y_k - y_k^*|/(2^s - 1)$ називають правилом Рунге.

II. Практична частина

За допомогою схеми з вибором головного елемента обчислити корені системи лінійних рівнянь

252x0 + 114x1 + 32x2 + 36x3 + 67x4 = 7297

92x0 + 255x1 + 0x2 + 74x3 + 84x4 = 5448

19x0 + 63x1 + 217x2 + 49x3 + 83x4 = 5993

113x0 + 62x1 + 28x2 + 283x3 + 78x4 = 6855

74x0 + 9x1 + 8x2 + 109x3 + 205x4 = 6382