/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi = \arg(z);\quad k = 0,1,\ldots,n-1;\quad z \neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[3]{-1/8}$:

$$\sqrt[3]{-1/8} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4};\ \sqrt[3]{-1/8} = -\frac{1}{2};\ \sqrt[3]{-1/8} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \left\{\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: 1^{2i}

Нам известно следующее равенство:

$$\alpha^z = e^{z\cdot \mathrm{Ln}\,\alpha}$$

Подставим в это равенство данные нашей задачи. Тогда:

$$1^{2i} = e^{2i\cdot \mathrm{Ln}(1)}$$

Как известно, главное значение Ln(1)=0. Тогда выражение можно преобразовать следующим образом:

$$1^{2i} = e^0 = 1$$

Ответ: $1^{2i} = 1$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\operatorname{Arcctg}\left(\frac{2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$$

Функция Arcctg является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\operatorname{Arcctg}(z)=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Подставим вместо z значение $\frac{2\sqrt{3}+3i}{7}$:

$$\operatorname{Arcctg}\left(\frac{2\sqrt{3}+3i}{7}\right)=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{\frac{2\sqrt{3}+3i}{7}-i}{\frac{2\sqrt{3}+3i}{7}+i}=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{2\sqrt{3}+3i-7i}{2\sqrt{3}+3i+7i}=$$

$$=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{2\sqrt{3}-4i}{2\sqrt{3}+10i}=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+5i}$$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k), k=0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+5i}=\frac{i}{2}[\ln\left|\frac{\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+5i}\right|+i(\arg\left(\frac{\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+5i}\right)+2\pi k)]=$$

$$=\frac{i}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left[\arg\left(\frac{\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+5i}\right)+2\pi k\right]\approx-\frac{i}{2}\cdot0{,}693-\frac{1}{2}\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$$

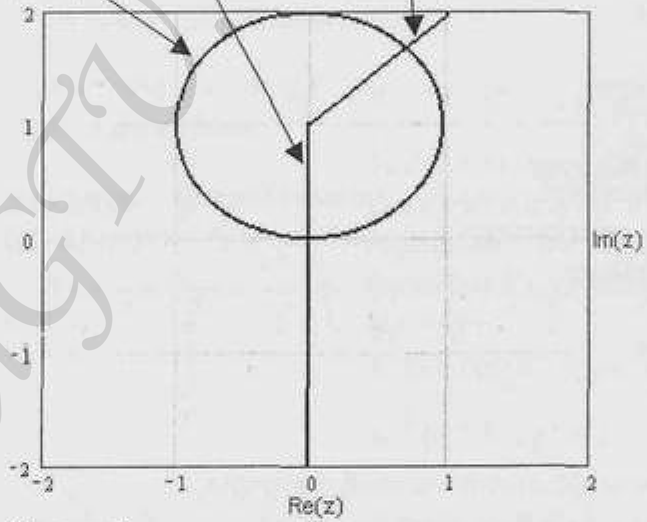
$k=0,\pm1,\pm2,...$

Ответ: $\operatorname{Arcctg}\left(\frac{2\sqrt{3}+3i}{7}\right)\approx-\frac{i}{2}\cdot0{,}693-\frac{1}{2}\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right], k=0,\pm1,\pm2,...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z-i|\le1,\quad -\pi/2<\arg(z-i)<\pi/4$



Задача 5

Определить вид кривой:

$$z=\frac{t-1+it}{t(t-1)}=\frac{1}{t}+\frac{i}{t-1}$$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$$x(t)=\frac{1}{t};\quad y(t)=\frac{1}{t-1}$$

Выразим параметр t через x и y:

$$x=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{1}{x};\ y=\frac{1}{t-1}\Rightarrow t-1=\frac{1}{y}\Rightarrow t=\frac{y+1}{y}$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\frac{1}{x}=\frac{y+1}{y}\Rightarrow\frac{1}{x}-\frac{y+1}{y}=0$$

Ответ: $\frac{1}{x}-\frac{y+1}{y}=0$

Задача 6

Проверить, что v является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x,y)$ и значению $f(z_0)$:

$$v = e^{-y}\sin x$$

$$f(0) = 1$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = -e^{-y}\sin x + ie^{-y}\cos x =$$

$$= e^{-y}(i\cos x - \sin x) = ie^{-y}(\cos x + i\sin x) =$$

$$= ie^{ix-y} = ie^{i(x+iy)} = ie^{iz}$$

Т.к. производная существует, то v является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции $f(z)$, можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int ie^{iz}dz = e^{iz} + C$$

Определим константу C:

$$f(0) = e^0 + C = 1 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция $f(z)$ выглядит следующим образом:

$$f(z) = e^{iz}$$

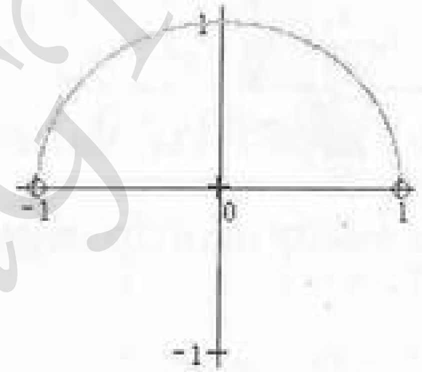
Ответ: $f(z) = e^{iz}$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_L (\cos iz + 3z^2)dz;\ L: \{|z| = 1; \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции $f(z)$ к функции $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $z = x + iy$:

$$f(z) = \cos(ix - y) + 3(x^2 + 2ixy - y^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-x-iy} + e^{x+iy}\right) + 3x^2 + 6ixy - 3y^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-x}(\cos y - i\sin y) + e^{x}(\cos y + i\sin y)\right] + 3x^2 + 6ixy - 3y^2 =$$

$$= \underbrace{3x^2 - 3y^2 + \frac{\cos y}{2}\left(e^{-x} + e^{x}\right)}_{u(x,y)} + i\cdot\underbrace{\left[6xy - \frac{\sin y}{2}\left(e^{-x} - e^{x}\right)\right]}_{v(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^x}{2}\left(12xe^{-x} - (e^{-2x} - 1)\cos y\right); \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^x}{2}\left(12xe^{-x} - (e^{-2x} - 1)\cos y\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{e^x}{2}\left(12ye^{-x} + (e^{-2x} + 1)\sin y\right); \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e^x}{2}\left(12ye^{-x} + (e^{-2x} + 1)\sin y\right); \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются, следовательно, функция является аналитической. Тогда результат от пути интегрирования не зависит:

$$\int_L (\cos iz + 3z^2)dz = \int_{-1}^{1} (\cos iz + 3z^2)dz = \operatorname{sh} z + z^3\Big|_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e} + 2$$

Ответ: $\int_L (\cos iz + 3z^2)dz = e - \frac{1}{e} + 2$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}=\frac{4(z+16)}{-z^2(z+4)(z-8)}=-\frac{4}{z^2}\cdot\frac{z+16}{(z+4)(z-8)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

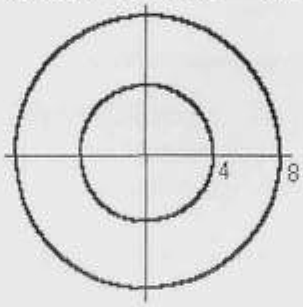
$$\frac{z+16}{(z+4)(z-8)}=\frac{A}{z+4}+\frac{B}{z-8}=\frac{Az-8A+Bz+4B}{(z+4)(z-8)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=-1;B=2\}\Rightarrow\frac{z+16}{(z+4)(z-8)}=\frac{-1}{z+4}+\frac{2}{z-8}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{4}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+4}-\frac{2}{z-8}\right)$$

Особые точки: $z=0;z=-4;z=8$



Рассмотрим область $|z|<4$:

$$f(z)=\frac{4}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+4}-\frac{2}{z-8}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1-(-\frac{z}{4})}+\frac{1}{1-\frac{z}{8}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{16}-\frac{z^3}{64}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{8}+\frac{z^2}{64}+\frac{z^3}{512}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{4z}+\frac{1}{16}-\frac{z}{64}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{8z}+\frac{1}{64}+\frac{z}{512}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $4<|z|<8$:

$$f(z)=\frac{4}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+4}-\frac{2}{z-8}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{4}{z(1+\frac{4}{z})}+\frac{1}{1-\frac{z}{8}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{4}{z}-\frac{16}{z^2}+\frac{64}{z^3}-\frac{256}{z^4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{8}+\frac{z^2}{64}+\frac{z^3}{512}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{4}{z^3}-\frac{16}{z^4}+\frac{64}{z^5}-\frac{256}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{8z}+\frac{1}{64}+\frac{z}{512}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>8$:

$$f(z)=\frac{4}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+4}-\frac{2}{z-8}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{4}{z(1+\frac{4}{z})}-\frac{8}{z(1-\frac{8}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{4}{z}-\frac{16}{z^2}+\frac{64}{z^3}-\frac{256}{z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{8}{z}+\frac{64}{z^2}+\frac{512}{z^3}+\frac{4096}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{4}{z^3}-\frac{16}{z^4}+\frac{64}{z^5}-\frac{256}{z^6}+\ldots\right)-\left(\frac{8}{z^3}+\frac{64}{z^4}+\frac{512}{z^5}+\frac{4096}{z^6}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<4: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{4z}+\frac{1}{16}-\frac{z}{64}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{8z}+\frac{1}{64}+\frac{z}{512}+\ldots\right)$$

$$4<|z|<8: f(z)=\left(\frac{4}{z^3}-\frac{16}{z^4}+\frac{64}{z^5}-\frac{256}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{8z}+\frac{1}{64}+\frac{z}{512}+\ldots\right)$$

$$|z|>8: f(z)=\left(\frac{4}{z^3}-\frac{16}{z^4}+\frac{64}{z^5}-\frac{256}{z^6}+\ldots\right)-\left(\frac{8}{z^3}+\frac{64}{z^4}+\frac{512}{z^5}+\frac{4096}{z^6}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z\text{-}z_0$.

$$f(z)=4\cdot\frac{z-2}{(z+1)(z-3)},z_0=-2-i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=4\cdot\frac{z-2}{(z+1)(z-3)}=\frac{3}{z+1}+\frac{1}{z-3}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{3}{z+1}=3\cdot\frac{1}{z+1}=3\cdot\frac{1}{(z-z_0)-1-i}=3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-1-i)^{n+1}}=$$

$$=-3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-z_0)-5-i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-5-i)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(5+i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{3}{z+1}+\frac{1}{z-3}=-3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1+i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(5+i)^{n+1}}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{(1+i)^{n+1}}+\frac{1}{(5+i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{(1+i)^{n+1}}+\frac{1}{(5+i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=z\cdot\cos\pi\frac{z+3}{z-1},z_0=1$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-1;\ z\cdot\cos\pi\frac{z+3}{z-1}=(z'+1)\cos\pi\frac{z'+4}{z'}=(z'+1)[\cos\pi\cos\frac{4\pi}{z'}-\sin\pi\sin\frac{4\pi}{z'}]=$$

$$=(z'+1)[\sin\frac{4\pi}{z'}-\cos\frac{4\pi}{z'}]=z'\sin\frac{4\pi}{z'}-z'\cos\frac{4\pi}{z'}+\sin\frac{4\pi}{z'}-\cos\frac{4\pi}{z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=z'\sin\frac{4\pi}{z'}-z'\cos\frac{4\pi}{z'}+\sin\frac{4\pi}{z'}-\cos\frac{4\pi}{z'}=$$

$$=\left(\frac{4\pi}{z'}-\frac{(4\pi)^3}{3!z'^3}+\frac{(4\pi)^5}{5!z'^5}-\ldots\right)z'-\left(1-\frac{(4\pi)^2}{2!z'^2}+\frac{(4\pi)^4}{4!z'^4}-\ldots\right)z'+$$

$$+\left(\frac{4\pi}{z'}-\frac{(4\pi)^3}{3!z'^3}+\frac{(4\pi)^5}{5!z'^5}-\ldots\right)-\left(1-\frac{(4\pi)^2}{2!z'^2}+\frac{(4\pi)^4}{4!z'^4}-\ldots\right)=$$

$$=-z'+4\pi-1+\frac{4\pi(4\pi+2!)}{2!z'}-\frac{(4\pi)^2(2!4\pi-3!)}{2!3!z'^2}+\frac{(4\pi)^3(3!4\pi-4!)}{3!4!z'^3}+$$

$$+\frac{(4\pi)^4(4!4\pi-5!)}{4!5!z'^4}-\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$:

$$f(z)=-z+4\pi+\frac{4\pi(4\pi+2!)}{2!(z-1)}-\frac{(4\pi)^2(2!4\pi-3!)}{2!3!(z-1)^2}+\frac{(4\pi)^3(3!4\pi-4!)}{3!4!(z-1)^3}+$$

$$+\frac{(4\pi)^4(4!4\pi-5!)}{4!5!(z-1)^4}-\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=-z+4\pi+\frac{4\pi(4\pi+2!)}{2!(z-1)}-\frac{(4\pi)^2(2!4\pi-3!)}{2!3!(z-1)^2}+\frac{(4\pi)^3(3!4\pi-4!)}{3!4!(z-1)^3}+$$

$$+\frac{(4\pi)^4(4!4\pi-5!)}{4!5!(z-1)^4}-\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{\cos 5z-1}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{\cos 5z-1}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{aligned}g(z)&=\cos 5z-1;\\ h(z)&=\operatorname{ch} z-1-z^2/2;\end{aligned}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g'(z)=-5\sin 5z;g'(0)=-5\sin 0=0$$

$$g''(z)=-25\cos 5z;g''(0)=-25\cos 0=-25$$

$$h'(z)=\operatorname{sh} z-z;h'(0)=\operatorname{sh}0-0=0$$

$$h''(z)=\operatorname{ch} z-1;h''(0)=\operatorname{ch}0-1=0;$$

$$h'''(z)=\operatorname{sh} z;h'''(0)=\operatorname{sh}0=0;$$

$$h^{IV}(z)=\operatorname{ch} z;h^{IV}(0)=\operatorname{ch}0=1;$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 4 – 2 = 2.

Ответ: Точка z = 0 является полюсом 2-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\frac{\sin \pi z}{(z^3-1)^2}$$

Изолированными особыми точками являются $z=1$, $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{\sin \pi z}{(z^3-1)^2};\quad \begin{aligned}g(z)&=\sin \pi z;\\ h(z)&=(z^3-1)^2;\end{aligned}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $z=1$, $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$g(1)=0;g(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2})\neq 0;g(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2})\neq 0;$$

$$g'(z)=\pi\cos\pi z;g'(1)\neq 0;$$

$$h(1)=0;h(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2})=0;h(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2})=0;$$

$$h'(z)=6z^2(z^3-1);h'(1)=0;h'(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2})=0;h(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2})=0;$$

$$h''(z)=18z^4+12z(z^3-1);h''(1)\neq 0;h''(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2})\neq 0;h''(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2})\neq 0;$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $z=1$ выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки $z=1$ являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при $z=1$ для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 2 – 1 = 1.

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это 2 – 0 = 2.

Ответ: Точка z = 1 является полюсом 1-го порядка.

Точки $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ являются полюсами 2-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\underbrace{\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+\sin z+2}{z^2+\pi z}dz}_{f(z)} = \underbrace{\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+\sin z+2}{z(z+\pi)}dz}_{f(z)}$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = 0$
$z = -\pi$

Точка $z = -\pi$ не входит в область, ограниченную данным контуром, поэтому не рассматривается.
Точка $z_1 = 0$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to-\pi}[f(z)\cdot z] = \lim_{z\to 0}\frac{z(z^2+\sin z+2)}{z(z+\pi)} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{z^2+\sin z+2}{z+\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+\sin z+2}{z(z+\pi)}dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right) = 4i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+\sin z+2}{z^2+\pi z}dz = 4i$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\underbrace{\oint\limits_{|z|=2} z^2 \sin\frac{i}{z^2}dz}_{f(z)}$$

У этой функции одна особая точка: z = 0. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$z^2\sin\frac{i}{z^2} = z^2\left(\frac{i}{z^2}+\frac{i}{3!z^6}+\frac{i}{5!z^{10}}+\frac{i}{7!z^{14}}+\ldots\right) =$$

$$= i+\frac{i}{3!z^4}+\frac{i}{5!z^8}+\frac{i}{7!z^{12}}+\ldots$$

Главная часть получившегося ряда содержит бесконечное число членов, из чего следует, что это – существенная особая точка. Тогда вычет в этой точке находится, как коэффициент при минус первой степени в лорановском разложении f(z) в окрестностях точки z = 0:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = C_{-1} = 0$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=2} z^2\sin\frac{i}{z^2}dz = 2\pi i\cdot 0 = 0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2} z^2\sin\frac{i}{z^2}dz = 0$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1}\underbrace{\frac{\text{ch}2z-1-2z^2}{z^4\sin(2\pi z/3)}}_{f(z)}dz$$

Особые точки этой функции $z = 3ik/2$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z)=\frac{\text{ch}2z-1-2z^2}{z^4\sin(2\pi z/3)}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad g(z)=\text{ch}2z-1-2z^2 \quad h(z)=z^4\sin(2\pi z/3)$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\underset{z=0}{\text{res}}f(z)=\lim_{z\to0}[f(z)z]=\lim_{z\to0}\left(\frac{\text{ch}2z-1-2z^2}{z^3\sin(2\pi z/3)}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to0}\left(\frac{2\text{sh}2z-4z}{3z^2\sin(2\pi z/3)+\frac{2}{3}\pi z^3\cos(2\pi z/3)}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to0}\left(\frac{4\text{ch}2z-4}{(6z-\frac{4}{9}\pi^2z^3)\sin(2\pi z/3)+4\pi z^2\cos(2\pi z/3)}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to0}\left(\frac{8\text{sh}2z}{(6-4\pi^2z^2)\sin(2\pi z/3)+(12\pi z-\frac{8}{27}\pi^3z^3)\cos(2\pi z/3)}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to0}\left(\frac{16\text{ch}2z}{(16\pi-\frac{32}{9}\pi^3z^2)\cos(2\pi z/3)+(\frac{16}{81}\pi^4z^3-16\pi^2z)\sin(2\pi z/3)}\right)=\frac{16}{16\pi}=\frac{1}{\pi}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\cos2z-1+2z^2}{z^4\text{sh}(\pi z/3)}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\underset{z_n}{\text{res}}f(z)=2\pi i\cdot\frac{2}{\pi}=4i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\cos2z-1+2z^2}{z^4\text{sh}(\pi z/3)}dz=4i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-5|=2}\left(z\,\text{ch}\frac{2}{z-5}+\frac{4\cos\frac{\pi z}{4}}{(z-4)^2(z-2)}\right)dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-5|=2}\underbrace{z\,\text{ch}\frac{2}{z-5}}_{f_1(z)}dz+\oint\limits_{|z-5|=2}\underbrace{\frac{4\cos\frac{\pi z}{4}}{(z-4)^2(z-2)}}_{f_2(z)}dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint\limits_{|z-5|=2}z\,\text{ch}\frac{2}{z-5}dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left\{\begin{matrix}t=z-5\\ z=t+5\end{matrix}\right\}\Rightarrow z\,\text{ch}\frac{2}{z-5}=(t+5)\text{ch}\frac{2}{t}$$

Единственной особой точкой этой функции является $t=0$. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t+5)\text{ch}\frac{2}{t}=(t+5)\left(1+\frac{2^2}{2!t^2}+\frac{2^4}{4!t^4}+\frac{2^6}{6!t^6}+\frac{2^8}{8!t^8}+...\right)=$$

$$=\left(t+\frac{2^2}{2!t}+\frac{2^4}{4!t^3}+\frac{2^6}{6!t^5}+...\right)+\left(5+\frac{5\cdot2^2}{2!t^2}+\frac{5\cdot2^4}{4!t^4}+\frac{5\cdot2^6}{6!t^6}+...\right)=$$

$$=t+5+\frac{2^2}{2!t}+\frac{5\cdot2^2}{2!t^2}+\frac{2^4}{4!t^3}+\frac{5\cdot2^4}{4!t^4}+\frac{2^6}{6!t^5}+\frac{5\cdot2^6}{6!t^6}+\frac{2^8}{8!t^7}+...$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов, из чего следует, что $t=0$ является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\underset{t=0}{\text{res}}\left[(t+5)\text{ch}\frac{2}{t}\right]=C_{-1}=\frac{2^2}{2!}=2$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-5|=2} z\,\mathrm{ch}\frac{2}{z-5}dz = \oint\limits_{|t|=2}(t+5)\mathrm{ch}\frac{2}{t}dt = 2\pi i \operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+5)\mathrm{ch}\frac{2}{t}\right] =$$

$$= 2\pi i\cdot 2 = 4\pi i$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint\limits_{|z-5|=2}\frac{4\cos\frac{\pi z}{4}}{(z-4)^2(z-2)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=2 и z=4. При этом точка z=2 не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=4 является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=4} f_2(z) = \lim_{z\to 4}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-4)^2\cdot 4\cos\frac{\pi z}{4}}{(z-4)^2(z-2)}\right] = \lim_{z\to 4}\frac{d}{dz}\left[\frac{4\cos\frac{\pi z}{4}}{(z-2)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 4}\left[-\frac{\pi}{(z-2)}\sin\left(\frac{\pi z}{4}\right) - \frac{4}{(z-2)^2}\cos\left(\frac{\pi z}{4}\right)\right] = 1$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-5|=2}\frac{4\cos\frac{\pi z}{4}}{(z-4)^2(z-2)}dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=4} f_2(z) = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-5|=2}\left(z\,\mathrm{ch}\frac{2}{z-5} + \frac{4\cos\frac{\pi z}{4}}{(z-4)^2(z-2)}\right)dz = \oint\limits_{|z-5|=2} z\,\mathrm{ch}\frac{2}{z-5}dz +$$

$$+ \oint\limits_{|z-5|=2}\frac{4\cos\frac{\pi z}{4}}{(z-4)^2(z-2)}dz = 4\pi i + 2\pi i = 6\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-5|=2}\left(z\,\mathrm{ch}\frac{2}{z-5} + \frac{4\cos\frac{\pi z}{4}}{(z-4)^2(z-2)}\right)dz = 6\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3\sqrt{7}\sin t + 8}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3\sqrt{7}\sin t + 8} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\frac{3\sqrt{7}}{2i}(z - \frac{1}{z}) + 8} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\frac{3\sqrt{7}}{2}(z^2 - 1) + 8iz} =$$

$$= \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{3\sqrt{7}(z^2-1) + 16iz} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{3\sqrt{7}(z + i\sqrt{7}/3)(z + 3i/\sqrt{7})}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = -i\sqrt{7}/3$; $z = -3i/\sqrt{7}$;

Точка $-3i/\sqrt{7}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $-i\sqrt{7}/3$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-i\sqrt{7}/3} f(z) = \lim_{z\to -i\sqrt{7}/3}[f(z)(z + i\sqrt{7}/3)] =$$

$$= \lim_{z\to -i\sqrt{7}/3}\frac{2}{3\sqrt{7}(z + 3i/\sqrt{7})} = \frac{2}{3\sqrt{7}(-i\sqrt{7}/3 + 3i/\sqrt{7})} = -i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{3\sqrt{7}(z + i\sqrt{7}/3)(z + 3i/\sqrt{7})} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i\cdot(-i) = 2\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3\sqrt{7}\sin t + 8} = 2\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2+\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2+\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(2+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{i(2z+\frac{1}{2}(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left(z+2+\sqrt{3}\right)^2\left(z+2-\sqrt{3}\right)^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=-2-\sqrt{3}\quad z=-2+\sqrt{3};$

Точка $z=-2-\sqrt{3}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=-2+\sqrt{3}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-2+\sqrt{3}}f(z)=\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{d}{dz}[f(z)(z+2-\sqrt{3})^2]=\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left(z+2+\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{4}{i}\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z+2+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4}{i}\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{-z+2+\sqrt{3}}{\left(z+2+\sqrt{3}\right)^3}=$$

$$=\frac{4}{i}\cdot\frac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{\left(-2+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}\right)^3}=\frac{4}{i}\cdot\frac{4}{(2\sqrt{3})^3}=\frac{2}{3\sqrt{3}i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{z=1}\frac{4zdz}{i\left(z+2+\sqrt{3}\right)^2\left(z+2-\sqrt{3}\right)^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{2}{3\sqrt{3}i}\right)=\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2+\cos t)^2}=\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$ сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(z^2-1)dz}{(z^2+8z+17)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(z^2-1)dz}{(z+4+i)^2(z+4-i)^2}$$

Особые точки:

$z=-4+i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-4-i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точка $z=5+2i$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=-4+i}f(z)=\lim_{z\to-4+i}\frac{d}{dz}[f(z)(z+4-i)^2]=$$

$$=\lim_{z\to-4+i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2-1}{(z+4+i)^2}\right]=\lim_{z\to-4+i}\left[\frac{2(4z+iz+1)}{(z+4+i)^3}\right]=\frac{4}{i}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx=2\pi i\left(\frac{4}{i}\right)=8\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx=8\pi$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\lambda x dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$x^4+10x^2+9=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm i; z_{3,4}=\pm 3i;$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{i;3i\}$$

Эти особые точки являются простыми полюсами. Найдем в них вычеты:

$$1)\underset{z=i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i}\frac{(z^3+5z)(z-i)}{(z^2+1)(z^2+9)}e^{iz}=\lim_{z\to i}\frac{(z^3+5z)e^{iz}}{(z+i)(z^2+9)}=$$

$$=\frac{(-i+5i)e^{-1}}{(i+i)(-1+9)}=\frac{e^{-1}}{4}$$

$$2)\underset{z=3i}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 3i}\frac{(z^3+5z)(z-3i)}{(z^2+1)(z^2+9)}e^{iz}=\lim_{z\to 3i}\frac{(z^3+5z)e^{iz}}{(z^2+1)(z+3i)}=$$

$$=\frac{(-27i+15i)e^{iz}}{(-9+1)(3i+3i)}=\frac{e^{-3}}{4}$$

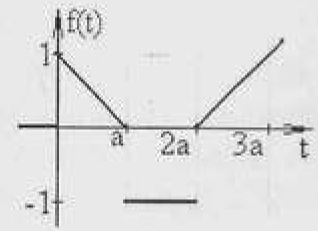
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{rez}}R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{\pi e^{-1}}{2}+\frac{\pi e^{-3}}{2}$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx=\frac{\pi e^{-1}}{2}+\frac{\pi e^{-3}}{2}$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)\begin{cases}\dfrac{a-t}{a} & 0<t<a\\ -1, & a<t<2a\\ \dfrac{t-2a}{a}, & 2a<t\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{a-t}{a}\cdot\eta(t)+\frac{t-2a}{a}\eta(t-a)+\frac{t-a}{a}\eta(t-2a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{2}{p}\right)e^{-ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}\right)e^{-2ap}$$

Ответ: $F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{2}{p}\right)e^{-ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}\right)e^{-2ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{1-p}{p(p^2+3p+3)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{1-p}{p(p^2+3p+3)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+3p+3}=$$

$$=\frac{Ap^2+3Ap+3A+Bp^2+Cp}{p(p^2+3p+3)}=\frac{(A+B)p^2+(3A+C)p+3A}{p(p^2+3p+3)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\3A+C=-1\\3A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/3\\B=-1/3\\C=-2\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{1-p}{p(p^2+3p+3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+3p+3}-2\cdot\frac{1}{p^2+3p+3}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+3p+3}-2\cdot\frac{1}{p^2+3p+3}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{(p+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}}-2\cdot\frac{1}{(p+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{p+\frac{3}{2}}{(p+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}}-\sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(p+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}e^{-3t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}e^{-3t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''+4y=3\sin t+10\cos 3t$$

$$y(0)=-2,\quad y'(0)=3.$$

Из теории нам известно, что если $x(t)$ соответствует изображение $X(p)$, то $x'(t)$ соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а $x''(t)$ соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+4Y(p)=\frac{3}{p^2+1}+\frac{30}{p^2+9}$$

$$p^2Y(p)+2p-3+4Y(p)=\frac{3}{p^2+1}+\frac{30}{p^2+9}$$

$$(p^2+4)Y(p)=\frac{3}{p^2+1}+\frac{30}{p^2+9}+3-2p=\frac{-2p^5+3p^4+43p^2-18p+84}{(p^2+1)(p^2+9)}$$

$$Y(p)=\frac{-2p^5+3p^4+43p^2-18p+84}{(p^2+1)(p^2+9)(p^2+4)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал $y(t)$:

$$Y(p)=\frac{-2p^5+3p^4+43p^2-18p+84}{(p^2+1)(p^2+9)(p^2+4)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}+\frac{Ep+F}{p^2+9}=$$

$$=\frac{(A+C+E)p^5+(B+D+F)p^4+(13A+10C+5E)p^3+(13B+10D+5F)p^2+}{(p^2+1)(p^2+9)(p^2+4)}+$$

$$+\frac{(36A+9C+4E)p+36B+9D+4F}{(p^2+1)(p^2+9)(p^2+4)}$$

$$\begin{cases}A+C+E=-2\\B+D+F=3\\13A+10C+5E=0\\13B+10D+5F=43\\36A+9C+4E=-18\\36B+9D+4F=84\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E=-27/6\\F=-9/6\\C=20/6\\D=16/6\\A=-5/6\\B=11/6\end{cases}\Rightarrow Y(p)=\frac{1}{6}\left(\frac{-5p+11}{p^2+1}+\frac{20p+16}{p^2+4}-\frac{27p+9}{p^2+9}\right)\Rightarrow$$

$$Y(p)=\frac{1}{6}\left(-5\frac{p}{p^2+1}+11\frac{1}{p^2+1}+20\frac{p}{p^2+4}+8\frac{2}{p^2+4}-27\frac{p}{p^2+9}-3\frac{3}{p^2+9}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=-\frac{5}{6}\cos t+\frac{11}{6}\sin t+\frac{10}{3}\cos 2t+\frac{4}{3}\sin 2t-\frac{9}{2}\cos 3t-\frac{1}{2}\sin 3t$$

Ответ: $y(t)=-\frac{5}{6}\cos t+\frac{11}{6}\sin t+\frac{10}{3}\cos 2t+\frac{4}{3}\sin 2t-\frac{9}{2}\cos 3t-\frac{1}{2}\sin 3t$

Задача 25

Материальная точка массы m совершает прямолинейное колебание по оси Ox под действием восстанавливающей силы F=–kx, пропорциональной расстоянию x от начала координат и направленной к началу координат, и возмущающей силы f =Acos t. Найти закон движения x=x(t) точки, если в начальный момент времени $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$.

$k = 9m$, $A = m$, $x_0 = 1/8$ м, $v_0 = 3$ м/с.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kx + A\cos t$$

$$\ddot{x}m + kx = A\cos t$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1/8$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 3$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m + mx = m\cos t$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + 9x = \cos t$$

Перейдем к изображениям функций:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + 9X(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

$$(p^2+9)X(p) - \frac{p}{8} - 3 = \frac{p}{p^2+1}$$

$$X(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p^2+9)} + \frac{1}{8}\frac{p}{p^2+9} + 3\frac{1}{p^2+9} = \frac{1}{8}\frac{p}{p^2+1} + 3\frac{1}{p^2+9}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = \frac{1}{8}\cos t + 3\cos 3t$$

Ответ: $x(t) = \frac{1}{8}\cos t + 3\cos 3t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + 2 \\ \dot{y} = 3x \end{cases}$$

$x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = -2X(p) + Y(p) + 2/p \\ pY(p) - y(0) = 3X(p) \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = -2X(p) + Y(p) + 2/p \\ pY(p) = 3X(p) \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) = 3X(p) \Rightarrow X(p) = \frac{pY(p)}{3}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p\frac{pY(p)}{3} - 1 = -2\frac{pY(p)}{3} + Y(p) + 2/p$$

$$Y(p) = \frac{3 + 6/p}{p^2 + 2p - 3}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{3+6/p}{p^2+2p-3} = \frac{2p+7}{p^2+2p-3} - \frac{2}{p} = 2\frac{p+1}{(p+1)^2-4} - \frac{5i}{2}\frac{2i}{(p+1)^2-4} - \frac{2}{p} \to$$

$$\to y(t) = 2e^{-t}\cos 2it - \tfrac{5i}{2}e^{-t}\sin 2it - 2 = 2e^{-t}\mathrm{ch}2t + \tfrac{5}{2}e^{-t}\mathrm{sh}2t - 2$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = 3x \Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{3}\dot{y} = \tfrac{1}{3}(3e^{-t}\mathrm{ch}2t + \tfrac{3}{2}e^{-t}\mathrm{sh}2t) = e^{-t}\mathrm{ch}2t + \tfrac{1}{2}e^{-t}\mathrm{sh}2t$$

Ответ:

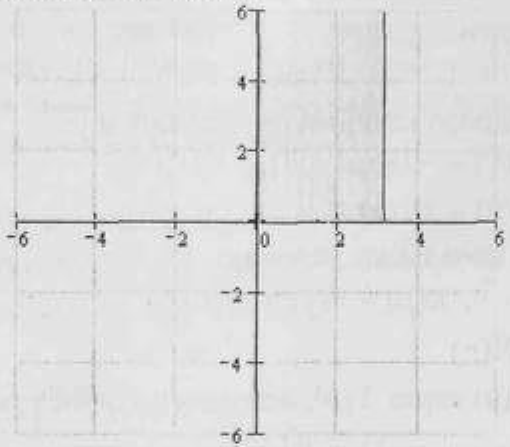
$x(t) = e^{-t}\mathrm{ch}\,2t + \tfrac{1}{2}e^{-t}\mathrm{sh}\,2t$

$y(t) = 2e^{-t}\mathrm{ch}\,2t + \tfrac{5}{2}e^{-t}\mathrm{sh}\,2t - 2$

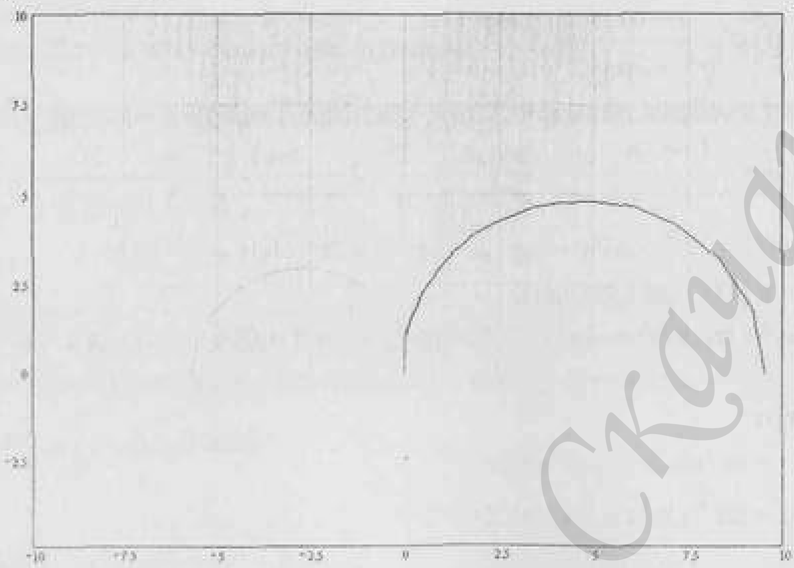
Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = \mathrm{tg}(z)$; полуполоса $0<x<\pi$, $y>0$.



Каждая из вертикальных линий в полосе преобразуется в половину дуги, опирающейся на точки (0;1) и (0;−1), лежащую в верхней полуплоскости причем, чем ближе x к $\pi/2$, тем большую область она охватывает. Таким образом отображением полуполосы является вся верхняя полуплоскость. Для примера приведены случаи $x = 7\pi/15$ и $x = 5\pi/9$:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,...,n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z=x+iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\mathrm{sh}\, z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \mathrm{ch}\, z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z \qquad \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm1, \pm2, ...$$

$$\mathrm{Arc}\sin z = -i\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}) \qquad \mathrm{Arc}\cos z = -i\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$$

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \mathrm{Arcctg}\, z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Аналитические функции

Функция w=f(z) называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция w=f(z) называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z \in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$