/ТФКП/ 2007

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[3]{1/8}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$\varphi = \arg(z); \quad k = 0,1,\dots,n-1; \quad z \neq 0$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[3]{1/8}$:

$$\sqrt[3]{1/8} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{1/8} = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sqrt[3]{1/8} = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ответ: $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \left\{\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}; -\dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\sin(\pi/6 - 3i)$

Используем формулу синуса разности:

$$\sin(\pi/6 - 3i) = \sin(\pi/6)\cos(3i) - \cos(\pi/6)\sin(3i)$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$\sin(\pi/6)\cos(3i) - \cos(\pi/6)\sin(3i) = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-3} + e^{3}}{2} -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{e^{-3} - e^{3}}{2i} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-3} + e^{3}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{e^{-3} - e^{3}}{2}\right)$$

Ответ: $\sin(\pi/6 - 3i) = \left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^{-3} + e^{3}}{2}\right) + i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{e^{-3} - e^{3}}{2}\right)$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\operatorname{Arc}\cos(-5)$$

Функция Arccos является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\operatorname{Arc}\cos z = -i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

Подставим вместо z значение (–5):

$$\operatorname{Arc}\cos(-5) = -i\operatorname{Ln}\left(-5+\sqrt{(-5)^2-1}\right) = -i\operatorname{Ln}\left(-5+2\sqrt{6}\right)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-i\operatorname{Ln}\left(-5+2\sqrt{6}\right) = -i[\ln\left|-5+2\sqrt{6}\right| +$$

$$+ i(\arg(-5+2\sqrt{6})+2\pi k)] = -i\ln(5-2\sqrt{6}) +$$

$$+\arg(-5+2\sqrt{6}) + 2\pi k \approx i\cdot 2{,}292 + \pi + 2\pi k$$

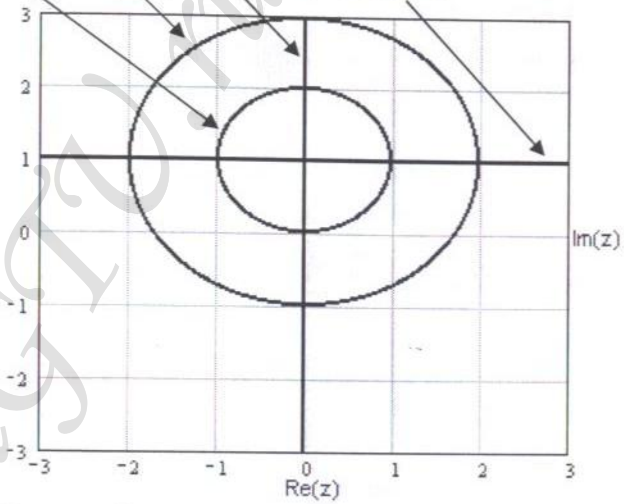
$$k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Ответ: $\operatorname{Arc}\cos(-5) \approx i\cdot 2{,}292+\pi+2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$1 \le |z-i| < 2,\quad \operatorname{Re} z \le 0,\quad \operatorname{Im} z > 1$



Задача 5

Определить вид кривой:

$$z = 2e^{it} + \frac{1}{2e^{it}} = 2\cos t + i2\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{i}{2}\sin t$$

Уравнение вида $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид $x = x(t)$, $y = y(t)$. В нашем случае:

$$x(t) = \frac{5}{2}\cos t;\quad y(t) = \frac{3}{2}\sin t$$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = \frac{5}{2}\cos t \Rightarrow \cos t = \frac{2}{5}x \Rightarrow t = \arccos\left(\frac{2}{5}x\right)$$

$$y = \frac{3}{2}\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{2}{3}y \Rightarrow t = \arcsin\left(\frac{2}{3}y\right)$$

Получим уравнение кривой в виде $F(x,y) = 0$:

$$\arccos\left(\frac{2}{5}x\right) = \arcsin\left(\frac{2}{3}y\right) \Rightarrow \arccos\left(\frac{2}{5}x\right) - \arcsin\left(\frac{2}{3}y\right) = 0$$

Ответ: $\arccos\left(\frac{2}{5}x\right) - \arcsin\left(\frac{2}{3}y\right) = 0$

Задача 6

Проверить, что v является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной мнимой части v(x,y) и значению $f(z_0)$:

$v = 2xy + 2x$

$f(0) = 0$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x + iy) = 2x + 2iy + 2i = 2z + 2i$$

Т.к. производная существует, то v является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int(2z + 2i)dz = z^2 + 2iz + C$$

Определим константу C:

$$f(0) = 0^2 + 2i\cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$f(z) = z^2 + 2iz$

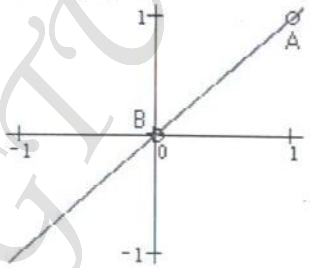
Ответ: $f(z) = z^2 + 2iz$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_{AB} e^{|z|^2}\,\mathrm{Im}\,z\,dz;\ AB - \text{отрезок прямой}: z_A = 1 + i, z_B = 0$$

Покажем прямую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = e^{x^2+y^2}\,\mathrm{Im}(x + iy) = \underbrace{ye^{x^2+y^2}}_{u(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xye^{x^2+y^2};\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y};$$

Условия Коши-Римана не выполняются, следовательно, функция не является аналитической. Тогда представим кривую, по которой идет интегрирование, в параметрическом виде:

$$z(t) = x(t) + iy(t);\ x(t) = t;\ y(t) = t;\ z_A = z(1);\ z_B = z(0)$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_1^0 f[z(t)]z'(t)dt = \int_1^0 te^{2t^2}(1+i)dt =$$

$$= (1+i)\int_1^0 te^{2t^2}dt = \frac{(1+i)}{4}e^{2t^2}\Big|_1^0 = \frac{(1+i)}{4}(1 - e^2)$$

Ответ: $\int_{AB} f(z)dz = \frac{(1+i)}{4}(1 - e^2)$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}=\frac{3(z+6)}{-z(2z+3)(z-3)}=-\frac{3}{2z}\cdot\frac{z+6}{(z+1{,}5)(z-3)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

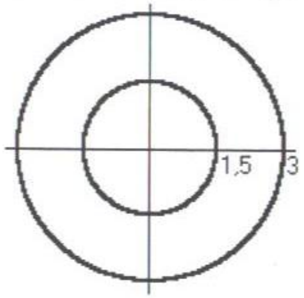
$$\frac{z+6}{(z+1{,}5)(z-3)}=\frac{A}{z+1{,}5}+\frac{B}{z-3}=\frac{Az-3A+Bz+1{,}5B}{(z+1{,}5)(z-3)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=-1;B=2\}\Rightarrow\frac{z+6}{(z+1{,}5)(z-3)}=\frac{-1}{z+1{,}5}+\frac{2}{z-3}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{3}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+1{,}5}-\frac{2}{z-3}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=-1{,}5; z=3$



Рассмотрим область $|z|<1{,}5$:

$$f(z)=\frac{3}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+1{,}5}-\frac{2}{z-3}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1-(-\frac{2z}{3})}+\frac{1}{1-\frac{z}{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{2z}{3}+\frac{4z^2}{9}-\frac{8z^3}{27}+\dots\right)+\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^3}{27}+\dots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{3}+\frac{4z}{9}-\frac{8z^2}{27}+\dots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3}+\frac{z}{9}+\frac{z^2}{27}+\dots\right)$$

Рассмотрим область $1{,}5<|z|<3$:

$$f(z)=\frac{3}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+1{,}5}-\frac{2}{z-3}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{3}{2z(1-(-\frac{3}{2z}))}+\frac{1}{1-\frac{z}{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{3}{2z}-\frac{9}{4z^2}+\frac{27}{8z^3}-\frac{81}{16z^4}+\dots\right)+\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^3}{27}+\dots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{3}{2z^2}-\frac{9}{4z^3}+\frac{27}{8z^4}-\frac{81}{16z^5}+\dots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3}+\frac{z}{9}+\frac{z^2}{27}+\dots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>3$:

$$f(z)=\frac{3}{2z}\cdot\left(\frac{1}{z+1{,}5}-\frac{2}{z-3}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{3}{2z(1-(-\frac{3}{2z}))}-\frac{3}{z(1-\frac{3}{z})}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{3}{2z}-\frac{9}{4z^2}+\frac{27}{8z^3}-\frac{81}{16z^4}+\dots\right)-\left(\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+\frac{27}{z^3}+\frac{81}{z^4}+\dots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{3}{2z^2}-\frac{9}{4z^3}+\frac{27}{8z^4}-\frac{81}{16z^5}+\dots\right)-\left(\frac{3}{z^2}+\frac{9}{z^3}+\frac{27}{z^4}+\frac{81}{z^5}+\dots\right)$$

Ответ:

$$|z|<1{,}5: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{3}+\frac{4z}{9}-\frac{8z^2}{27}+\dots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3}+\frac{z}{9}+\frac{z^2}{27}+\dots\right)$$

$$1{,}5<|z|<3: f(z)=\left(\frac{3}{2z^2}-\frac{9}{4z^3}+\frac{27}{8z^4}-\frac{81}{16z^5}+\dots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3}+\frac{z}{9}+\frac{z^2}{27}+\dots\right)$$

$$|z|>3: f(z)=\left(\frac{3}{2z^2}-\frac{9}{4z^3}+\frac{27}{8z^4}-\frac{81}{16z^5}+\dots\right)-\left(\frac{3}{z^2}+\frac{9}{z^3}+\frac{27}{z^4}+\frac{81}{z^5}+\dots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$.

$$f(z)=4\cdot\frac{z+2}{(z-1)(z+3)},\ z_0=-3-i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=4\cdot\frac{z+2}{(z-1)(z+3)}=\frac{3}{z+3}+\frac{1}{z-1}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{3}{z+3}=3\cdot\frac{1}{z+3}=3\cdot\frac{1}{(z-z_0)-i}=3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-i)^{n+1}}=$$

$$=-3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{i^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-z_0)-4-i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-4-i)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(4+i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{3}{z+3}+\frac{1}{z-1}=-3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{i^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(4+i)^{n+1}}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{i^{n+1}}+\frac{1}{(4+i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{i^{n+1}}+\frac{1}{(4+i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=\sin\frac{z^2-4z}{(z-2)^2},\ z_0=2$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-2;\ \sin\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}=\sin\frac{z'^2+4}{z'^2}=\sin\left(1+\frac{4}{z'^2}\right)=\sin1\cos\frac{4}{z'^2}+\cos1\sin\frac{4}{z'^2}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=\sin1\cos\frac{4}{z'}+\cos1\sin\frac{4}{z'}=\left(1-\frac{4^2}{2!z'^2}+\frac{4^4}{4!z'^4}-\frac{4^6}{6!z'^6}+\ldots\right)\sin1+$$

$$+\left(\frac{4}{z'}-\frac{4^3}{3!z'^3}+\frac{4^5}{5!z'^5}-\frac{4^7}{7!z'^7}+\ldots\right)\cos1=\left(\sin1-\frac{4^2\sin1}{2!z'^2}+\frac{4^4\sin1}{4!z'^4}-\right.$$

$$\left.-\frac{4^6\sin1}{6!z'^6}+\ldots\right)+\left(\frac{4\cos1}{z'}-\frac{4^3\cos1}{3!z'^3}+\frac{4^5\cos1}{5!z'^5}+\frac{4^7\cos1}{7!z'^7}+\ldots\right)=$$

$$=\sin1+\frac{4\cos1}{z'}-\frac{4^2\sin1}{2!z'^2}-\frac{4^3\cos1}{3!z'^3}+\frac{4^4\sin1}{4!z'^4}+\frac{4^5\cos1}{5!z'^5}-\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2$:

$$f(z)=\sin1+\frac{4\cos1}{z-2}-\frac{4^2\sin1}{2!(z-2)^2}-\frac{4^3\cos1}{3!(z-2)^3}+\frac{4^4\sin1}{4!(z-2)^4}+$$

$$+\frac{4^5\cos1}{5!(z-2)^5}-\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=\sin1+\frac{4\cos1}{z-2}-\frac{4^2\sin1}{2!(z-2)^2}-\frac{4^3\cos1}{3!(z-2)^3}+\frac{4^4\sin1}{4!(z-2)^4}+$$

$$+\frac{4^5\cos1}{5!(z-2)^5}-\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{\sin z^3-z^3}{e^z-1-z}$$

Разложим числитель и знаменатель в ряды Лорана в окрестности точки z = 0:

$$f(z)=\frac{\sin z^3-z^3}{e^z-1-z}=\frac{-z^3+z^3-\frac{z^9}{3!}+\frac{z^{15}}{5!}-\ldots}{-1-z+1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots}=$$

$$=\frac{-\frac{z^9}{3!}+\frac{z^{15}}{5!}-\frac{z^{21}}{7!}+\ldots}{\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots}=\frac{-\frac{z^7}{3!}+\frac{z^{13}}{5!}-\frac{z^{19}}{7!}+\ldots}{\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\ldots}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{-\frac{z^7}{3!}+\frac{z^{13}}{5!}-\frac{z^{19}}{7!}+\ldots}{\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\ldots}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad g(z)=-\frac{z^7}{3!}+\frac{z^{13}}{5!}-\frac{z^{19}}{7!}+\ldots;\quad h(z)=\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\ldots;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0. Поскольку рассматриваемые функции представляют собой обычные степенные многочлены, то несложно увидеть, что $g^{VII}(0)\neq 0$ и $h(0)\neq 0$.

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 7 – 0 = 7.

Ответ: Точка z = 0 является полюсом 7-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\frac{e^{1/z}}{(e^z-1)(1-z)^3}$$

Изолированной особой точкой являются z = 0 и z = 1. Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{e^{1/z}}{(e^z-1)(1-z)^3};\quad g(z)=e^{1/z};\quad h(z)=(e^z-1)(1-z)^3;$$

Для каждой из функций найдем порядок производных, не обращающихся в ноль при z = 0 и z = 1:

$$g(0)=\infty\neq 0; g(1)\neq 0$$

$$h(0)=0; h(1)=0;$$

$$h'(z)=e^z(1-z)^3-3(e^z-1)(1-z)^2; h'(0)\neq 0; h'(1)=0$$

$$h''(z)=e^z(1-z)^3-6e^z(1-z)^2+6(e^z-1)(1-z); h''(1)=0;$$

$$h'''(z)=e^z(1-z)^3-9e^z(1-z)^2+18e^z(1-z)-6e^z+6; h'''(1)\neq 0;$$

В случаях z = 0 порядок ненулевой производной выше для функции, стоящей в знаменателе, т.е. точка z = 0 является полюсом функции. Поскольку в данном случае разность порядков ненулевых производных g(z) и h(z) равна единице, то точка z = 0 является полюсом 1-го порядка.

Исходя их тех же соображений, точка z = 1 является полюсом 3-го порядка

Ответ: Точка z = 0 для данной функции является полюсом 1-го порядка.

Точка z = 0 для данной функции является полюсом 3-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z+1|=2}\underbrace{\frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}}_{f(z)}dz=\oint\limits_{|z+1|=2}\underbrace{\frac{\sin^2 z-3}{z(z+2\pi)}}_{f(z)}dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = 0$

$z = -2\pi$

Точка $z = -2\pi$ не входит в область, ограниченную данным контуром, поэтому не рассматривается.

Точка $z_1 = 0$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z)=\lim_{z\to 0}[f(z)(z+0)]=\lim_{z\to 0}\frac{z(\sin^2 z-3)}{z(z+2\pi)}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2 z-3}{z+2\pi}=$$

$$=\frac{-3}{2\pi}=-\frac{3}{2\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z+1|=2}\frac{\sin^2 z-3}{z(z+2\pi)}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{z_i} f(z)=2\pi i\cdot\left(-\frac{3}{2\pi}\right)=-3i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z+1|=2}\frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz=-3i$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1/2}\underbrace{\frac{z^5-3z^3+5z}{z^4}}_{f(z)}dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$\frac{z^5-3z^3+5z}{z^4}=z-\frac{3}{z}+\frac{5}{z^3}$$

Считая получившийся результат рядом Лорана по степеням z, т.е. в окрестности $z = 0$, мы приходим к выводу, что точка $z = 0$ является полюсом 3-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}[f(z)z^3]=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^4-3z^2+5}{1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(12z^2-6)=\frac{-6}{2}=-3$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_C f(z)dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1/2}\frac{z^5-3z^3+5z}{z^4}dz=2\pi i\cdot(-3)=-6\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1/2}\frac{z^5-3z^3+5z}{z^4}dz=-6\pi i$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=2} \underbrace{\frac{sh3z - \sin 3z}{z^3 sh(-iz)}}_{f(z)} dz$$

Особые точки этой функции $z = ik\pi/2$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{sh3z - \sin 3z}{z^3 sh(-iz)} = \frac{g(z)}{h(z)}; \quad \begin{matrix} g(z) = sh3z - \sin 3z \\ h(z) = z^3 sh(-iz) \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{sh3z - \sin 3z}{z^2 sh(-iz)}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{3ch3z - 3\cos 3z}{-2iz\sin z - iz^2\cos z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{9sh3z + 9\sin 3z}{-2i\sin z - 4iz\cos z + iz^2\sin z}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{используем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{27ch3z + 27\cos 3z}{-6i\cos z + 6iz\sin z + iz^2\cos z}\right) = \frac{54}{-6i} = -\frac{9}{i} = 9i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{sh3z - \sin 3z}{z^3 sh(-iz)} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot 9i = -18\pi$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2} \frac{sh3z - \sin 3z}{z^3 sh(-iz)} dz = -18\pi$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-5i|=2} \left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2} - i} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{1+5i}}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)}\right) dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-5i|=2} \underbrace{\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+5i}}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z-5i|=2} \underbrace{\frac{\pi i}{e^{\pi z/2} - i}}_{f_2(z)} dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z-5i|=2} \frac{2\cos\frac{\pi z}{1+5i}}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)} dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: $z=1+5i$ и $z=3+5i$. При этом точка $z=3+5i$ не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка $z=1+5i$ является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=1+5i} f_1(z) = \lim_{z\to 1+5i} \frac{d}{dz}\left[\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+5i}(z-1-5i)^2}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)}\right] = \lim_{z\to 1+5i} \frac{d}{dz}\left[\frac{2\cos\frac{\pi z}{1+5i}}{(z-3-5i)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1+5i}\left[\frac{(5i-1)\pi}{13(z-3-5i)}\sin\frac{(1-5i)\pi z}{26} - \frac{2}{(z-3-5i)^2}\cos\frac{(1-5i)\pi z}{26}\right] = \frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-5i|=2} \frac{2\cos\frac{\pi z}{1+5i}}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)} dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=1+5i} f_1(z) = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \pi i$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z-5i|=2} \frac{\pi i}{e^{\pi z/2} - i} dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\pi z/2} - i = 0 \Rightarrow e^{\pi z/2} = i \Rightarrow \pi z/2 = \ln(i) = \pi i/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 4ik + i, k \in z$$

Из этих точек только одна охвачена контуром $|z-5i|=2$ и должна приниматься во внимание. Это точка $z=5i$, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=5i} f_2(z) = \lim_{z\to 5i} \frac{\pi i(z-5i)}{e^{\pi z/2} - i} = \left\{\begin{matrix}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 5i} \frac{\pi i}{\frac{\pi}{2} e^{\pi z/2}} = \frac{\pi i}{\frac{\pi}{2} e^{5\pi i/2}} = \frac{2i}{e^{5\pi i/2}} = \frac{2i}{i} = 2$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-5i|=2} \frac{\pi i}{e^{\pi z/2} - i} dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=i} f_2(z) = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-5i|=2} \left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2} - i} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{1+5i}}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)} \right) dz =$$

$$= \oint\limits_{|z-5i|=2} \frac{2\cos\frac{\pi z}{1+5i}}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)} dz + \oint\limits_{|z-5i|=2} \frac{\pi i}{e^{\pi z/2} - i} dz =$$

$$= \pi i + 4\pi i = 5\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-5i|=2} \left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2} - i} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{1+5i}}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)} \right) dz = 5\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t - 5}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it}; \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right); \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right); dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z) dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t - 5} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz/iz}{\frac{\sqrt{6}}{i}(z - \frac{1}{z}) - 5} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{6}(z^2-1) - 5iz} =$$

$$= \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{6}(z - i\sqrt{6}/3)(z - i\sqrt{6}/2)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = i\sqrt{6}/3; \quad z = i\sqrt{6}/2;$

Точка $i\sqrt{6}/2$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $i\sqrt{6}/3$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{6}/3} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{6}/3} [f(z)(z - i\sqrt{6}/3)] =$$

$$= \lim_{z\to i\sqrt{6}/3} \frac{1}{\sqrt{6}(z - i\sqrt{6}/2)} = \frac{1}{\sqrt{6}(i\sqrt{6}/3 - i\sqrt{6}/2)} = i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{6}(z - i\sqrt{6}/3)(z - i\sqrt{6}/2)} = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot i = -2\pi$$

Ответ: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t - 5} = -2\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{(3+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{i(3z+\frac{1}{2}(z^2+1))^2} = \oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i\left(z+3+2\sqrt{2}\right)^2\left(z+3-2\sqrt{2}\right)^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$$z = -3-2\sqrt{2} \quad z = -3+2\sqrt{2};$$

Точка $z = -3-2\sqrt{2}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z = -3+2\sqrt{2}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-3+2\sqrt{2}} f(z) = \lim_{z\to-3+2\sqrt{2}} \frac{d}{dz}[f(z)(z+3-2\sqrt{2})^2] = \lim_{z\to-3+2\sqrt{2}} \frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left(z+3+2\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{4}{i}\lim_{z\to-3+2\sqrt{2}} \frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z+3+2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{4}{i}\lim_{z\to-3+2\sqrt{2}} \frac{-z+3+2\sqrt{2}}{\left(z+3+2\sqrt{2}\right)^3} =$$

$$= \frac{4}{i}\cdot\frac{3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}}{\left(-3+2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}\right)^3} = \frac{4}{i}\cdot\frac{6}{(4\sqrt{2})^3} = \frac{3}{16\sqrt{2}i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i\left(z+3+2\sqrt{2}\right)^2\left(z+3-2\sqrt{2}\right)^2} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i\cdot\left(\frac{3}{16\sqrt{2}i}\right) = \frac{3}{8\sqrt{2}}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2} = \frac{3}{8\sqrt{2}}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i\sum_m \operatorname*{res}_{z_m} R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+5)^2(z^2+1)^2}$$

Особые точки:

$z = i\sqrt{5}$ $(\operatorname{Im} z > 0)$; $z = -i\sqrt{5}$ $(\operatorname{Im} z < 0)$

$z = i$ $(\operatorname{Im} z > 0)$; $z = -i$ $(\operatorname{Im} z < 0)$

Точка $z = i$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[f(z)(z-i)^2] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2(z^2+5)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to i}\left[\frac{-2(3z^2+5+2iz)}{(z+i)^3(z^2+5)^3}\right] = 0$$

Точка $z = i\sqrt{5}$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{5}} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{5}}\frac{d}{dz}[f(z)(z-i\sqrt{5})^2] = \lim_{z\to i\sqrt{5}}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i\sqrt{5})^2(z^2+1)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to i\sqrt{5}}\left[\frac{-2(3z^2+1+2\sqrt{5}iz)}{(z+i\sqrt{5})^3(z^2+1)^3}\right] = -\frac{3i\sqrt{5}}{800}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2} = 2\pi i\left(-\frac{3i\sqrt{5}}{800}\right) = \frac{3\pi\sqrt{5}}{400}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2} = \frac{3\pi\sqrt{5}}{400}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\lambda x dx=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$x^2-2x+10=0\Rightarrow z_{1,2}=1\pm 3i$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{1+3i\}$$

Эта особая точка является простым полюсом. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=1+3i}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 1+3i}\frac{z(z-1-3i)}{z^2-2z+10}e^{iz}=\lim_{z\to 1+3i}\frac{z}{z-1+3i}e^{iz}=$$

$$=\frac{1+3i}{1+3i-1+3i}e^{i(1+3i)}=\frac{1+3i}{6i}e^{i-3}=\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{6}\right)e^{-3}(\cos 1-i\sin 1)$$

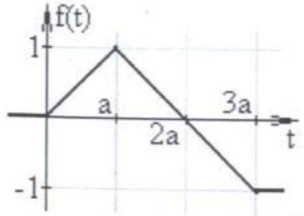
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\pi e^{-3}\cos 1-\frac{\pi}{3}e^{-3}\sin 1$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx=\pi e^{-3}\cos 1-\frac{\pi}{3}e^{-3}\sin 1$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{a} & 0<t<a\\ \dfrac{2a-t}{a}, & a<t<3a\\ -1, & 3a<t\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{t}{a}\cdot\eta(t)+\frac{2a-2t}{a}\eta(t-a)+\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{ap^2}+\left(\frac{2}{p}-\frac{2}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{3}{p}\right)e^{-3ap}$$

Ответ: $F(p)=\dfrac{1}{ap^2}+\left(\dfrac{2}{p}-\dfrac{2}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\dfrac{1}{ap^2}-\dfrac{3}{p}\right)e^{-3ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{e^{-p/2}}{(p^2+1)(p^2+2)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{e^{-p/2}}{(p^2+1)(p^2+2)} = \left(\frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{Cp+D}{p^2+2}\right)e^{-p/2} =$$

$$= \frac{Ap^3+Bp^2+2Ap+2B+Cp^3+Dp^2+Cp+D}{(p^2+1)(p^2+4)}e^{-p/2} =$$

$$= \frac{(A+C)p^3+(B+D)p^2+(2A+C)p+D+2B}{(p^2+1)(p^2+4)}e^{-p/2}$$

Решив систему линейных уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ C+2A=0 \\ D+2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=0 \\ D=-1 \end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{e^{-p/2}}{(p^2+1)(p^2+2)} = \left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+2}\right)e^{-p/2}$$

Используя формулу запаздывания, по такому изображению найти оригинал несложно:

$$\left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+2}\right)e^{-p/2} \to \eta(t-\frac{1}{2})\left[\sin(t-\frac{1}{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}})\right]$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$\eta(t-\frac{1}{2})\left[\sin(t-\frac{1}{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}})\right]$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$y''+4y = 8\sin 2t$

$y(0)=3, \quad y'(0)=-1.$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует p·X(p) – x(0), а x''(t) соответствует p^2·X(p) – p·x(0) – x'(0). Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 4Y(p) = \frac{16}{p^2+4}$$

$$p^2Y(p) - 3p + 1 + 4Y(p) = \frac{16}{p^2+4}$$

$$(p^2+4)Y(p) = \frac{16}{p^2+4} + 3p - 1$$

$$Y(p) = \frac{16}{(p^2+4)^2} + \frac{3p}{p^2+4} - \frac{1}{p^2+4} = \frac{16}{(p^2+4)^2} + 3\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{p^2+4}$$

Найдем оригинал y(t):

$$Y(p) = \frac{16}{(p^2+4)^2} + 3\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{p^2+4}$$

$$\frac{1}{(p^2+\alpha^2)^2} \to \frac{1}{2\alpha^3}\sin\alpha t - \frac{1}{2\alpha^2}t\cos\alpha t$$

$$\frac{16}{(p^2+4)^2} + 3\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{p^2+4} \to y(t) = \sin 2t - 2t\cos 2t +$$

$$+3\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t = \frac{1}{2}\sin 2t + (3-2t)\cos 2t$$

Ответ: $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + (3-2t)\cos 2t$

Задача 25

Материальная точка массы m совершает прямолинейное колебание по оси Ox под действием восстанавливающей силы F=–kx, пропорциональной расстоянию x от начала координат и направленной к началу координат, и возмущающей силы f =Acos t. Найти закон движения x=x(t) точки, если в начальный момент времени $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$.
$k = m$, $A = 2m$, $x_0 = 1$м, $v_0 = 0$.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kx + A\cos t$$

$$\ddot{x}m + kx = A\cos t$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m + mx = 2m\cos t$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + x = 2\cos t$$

Перейдем к изображениям функций:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + X(p) = \frac{2p}{p^2+1}$$

$$(p^2+1)X(p) - p = \frac{2p}{p^2+1}$$

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} + \frac{p}{p^2+1} = 2\frac{p}{(p^2+1^2)^2} + \frac{p}{p^2+1}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = 2\cdot\frac{1}{2}t\sin t + \cos t = t\sin t + \cos t$$

Ответ: $x(t) = t\sin t + \cos t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 4x + y + 1 \end{cases}$$

$x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = X(p) + Y(p) \\ pY(p) - y(0) = 4X(p) + Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = X(p) + Y(p) \\ pY(p) = 4X(p) + Y(p) + 1/p \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) = 4X(p) + Y(p) + 1/p \Rightarrow X(p) = \frac{pY(p) - Y(p) - 1/p}{4}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p\frac{pY(p) - Y(p) - 1/p}{4} - 1 = \frac{pY(p) - Y(p) - 1/p}{4} + Y(p)$$

$$Y(p) = \frac{5 - 1/p}{p^2 - 2p - 3}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{5 - 1/p}{p^2 - 2p - 3} = \frac{5 - 1/p}{p^2 - 2p - 3} - \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p} = \frac{17/3 - p/3}{(p-1)^2 - 4} + \frac{1}{3p} =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{p-1}{(p-1)^2 - 4} - \frac{8i}{3}\frac{2i}{(p-1)^2 - 4} + \frac{1}{3p} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}e^t\cos 2it - \tfrac{8i}{3}e^t\sin 2it = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}e^t \mathrm{ch}2t + \tfrac{8}{3}e^t \mathrm{sh}2t$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = 4x + y + 1 \Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{4}(\dot{y} - y - 1) = \tfrac{1}{4}(5e^t\mathrm{ch}2t + 2e^t\mathrm{sh}2t - \tfrac{1}{3} +$$

$$+ \tfrac{1}{3}e^t\mathrm{ch}2t - \tfrac{8}{3}e^t\mathrm{sh}2t - 1) = \tfrac{4}{3}e^t\mathrm{ch}2t - \tfrac{1}{6}e^t\mathrm{sh}2t - \tfrac{1}{3}$$

Ответ:

$$x(t) = \tfrac{4}{3}e^t\mathrm{ch}2t - \tfrac{1}{6}e^t\mathrm{sh}2t - \tfrac{1}{3}$$

$$y(t) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}e^t\mathrm{ch}2t + \tfrac{8}{3}e^t\mathrm{sh}2t$$

Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции w = f(z) .

w = arcsin(z); первый квадрант.

Тогда z = sin w. Первый квадрант – это область {Re(z)<0; Im(z)>0}, т.е. {Im(sin w)>0; Re(sin w)<0}. Рассмотрим это неравенство подробнее (wx = Re(w), wy = Im(w)):

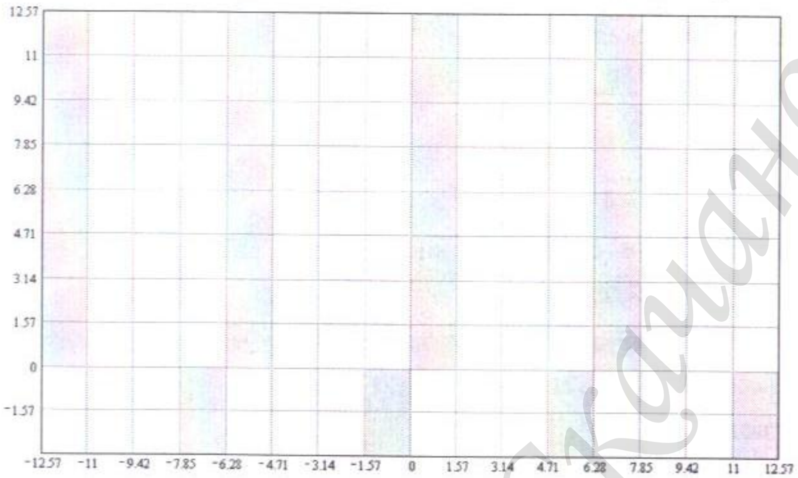
$$\operatorname{Im}(\sin w) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\right) = \operatorname{Im}\left[\frac{e^{iwx-wy} - e^{-iwx+wy}}{2i}\right] =$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{e^{-wy}(\cos wx + i\sin wx)}{2i} - \frac{e^{wy}(\cos wx - i\sin wx)}{2i}\right] =$$

$$= \frac{(e^{wy} - e^{-wy})\cos wx}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases}\operatorname{Im}(w) > 0\\ \cos[\operatorname{Re}(w)] > 0\end{cases} \text{или} \begin{cases}\operatorname{Im}(w) < 0\\ \cos[\operatorname{Re}(w)] < 0\end{cases}$$

$$\operatorname{Re}(\sin w) = \frac{(e^{-wy} + e^{wy})\sin wx}{2} > 0 \Rightarrow \sin[\operatorname{Re}(w) > 0]$$

Т.о., первый квадрант отображается в области {Im(w)>0; cos[Re(w)]>0; sin[Re(w)]>0} и {Im(w)<0; cos[Re(w)]<0; sin[Re(w)]>0}, т.е. в вертикальные полуполосы {Re(w)∈(2πk;π/2+2πk); Im(w)>0; k∈Z} и { Im(w)<0; Re(w)∈(2πk-π/2;2πk); k∈Z}.



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\ldots,n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

z=x+iy $\qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z - i}{z + i}$$

Аналитические функции

Функция w=f(z) называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция w=f(z) называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке z∈G.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$