/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[3]{i/8}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\dots,n-1;\quad z\neq 0$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[3]{i/8}$:

$$\sqrt[3]{i/8}=\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{1}{4}$$

$$\sqrt[3]{i/8}=-\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{1}{4}$$

$$\sqrt[3]{i/8}=-i\frac{1}{2}$$

Ответ: $\sqrt[3]{i/8}=\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{1}{4};-\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{1}{4};-i\frac{1}{2}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\cos(\pi/3+3i)$

Используем формулу косинуса суммы:

$$\cos(\pi/3+3i)=\cos(\pi/3)\cos(3i)-\sin(\pi/3)\sin(3i)$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$\cos(\pi/3)\cos(3i)-\sin(\pi/3)\sin(3i)=\frac{1}{2}\frac{e^{-3}+e^{3}}{2}-$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-3}-e^{3}}{2i}=\left(\frac{1}{2}\frac{e^{-3}+e^{3}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-3}-e^{3}}{2}\right)$$

Ответ: $\cos(\pi/3+3i)=\left(\frac{1}{2}\frac{e^{-3}+e^{3}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-3}-e^{3}}{2}\right)$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arsh}(-4i)$$

Функция Arsh является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arsh}\,z = i\cdot \mathrm{Arcsin}\left(\frac{z}{i}\right) = i\cdot\left[-i\cdot \mathrm{Ln}\left(i\cdot\frac{z}{i}+\sqrt{1-\left(\frac{z}{i}\right)^2}\right)\right] =$$

$$= \mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$$

Подставим вместо z значение (–4i):

$$\mathrm{Arsh}(-4i) = \mathrm{Ln}\left(-4i+\sqrt{1+(-4i)^2}\right) = \mathrm{Ln}\left(-4i+\sqrt{-15}\right) =$$
$$= \mathrm{Ln}\left(-4i+i\sqrt{15}\right)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$\mathrm{Ln}\left(-4i+i\sqrt{15}\right) = \ln\left|-4i+i\sqrt{15}\right| + i\left[\arg\left(-4i+i\sqrt{15}\right)+2\pi k\right] =$$

$$= \ln(4-\sqrt{15}) + i\left[\arg\left(-4i+i\sqrt{15}\right)+2\pi k\right] \approx -2{,}063 + i\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$$

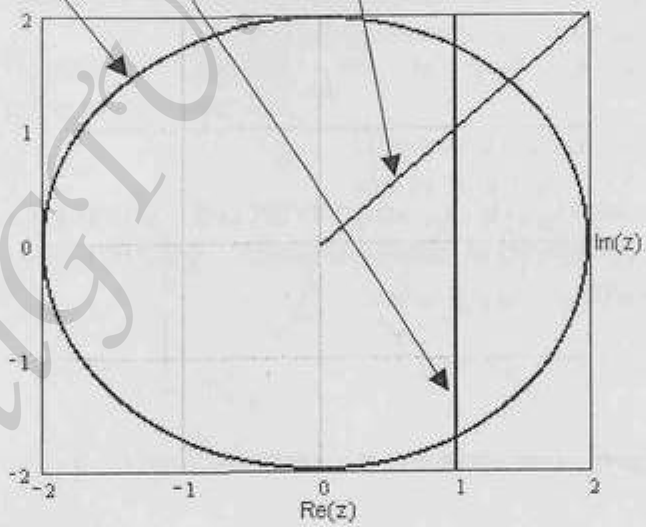
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ответ: $\mathrm{Arsh}(-4i) \approx -2{,}063 + i\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right], k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z| < 2, \quad \mathrm{Re}\,z \geq 1, \quad \arg z < \pi/4$



Задача 5

Определить вид кривой:

$$z = 3e^{it} - \frac{1}{2e^{it}} = 3\cos t + i3\sin t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{i}{2}\sin t$$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$$x(t) = \frac{5}{2}\cos t; \quad y(t) = \frac{7}{2}\sin t$$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = \frac{5}{2}\cos t \Rightarrow \cos t = \frac{2}{5}x \Rightarrow t = \arccos\left(\frac{2}{5}x\right)$$

$$y = \frac{7}{2}\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{2}{7}y \Rightarrow t = \arcsin\left(\frac{2}{7}y\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\arccos\left(\frac{2}{5}x\right) = \arcsin\left(\frac{2}{7}y\right) \Rightarrow \arccos\left(\frac{2}{5}x\right) - \arcsin\left(\frac{2}{7}y\right) = 0$$

Ответ: $\arccos\left(\frac{2}{5}x\right) - \arcsin\left(\frac{2}{7}y\right) = 0$

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной действительной части u(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$u = 1 - \sin y \cdot e^x$$

$$f(0) = 1 + i$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = -e^x \sin y + ie^x \cos y = e^x(i\cos y - \sin y) =$$

$$= -ie^x(\cos y + i\sin y) = -ie^{x+iy} = -ie^z$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int(-ie^z)dz = -ie^z + C$$

Определим константу С:

$$f(0) = -ie^0 + C = 1 + i \Rightarrow C = 1 + i + i = 1 + 2i$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = -ie^z + 1 + 2i$$

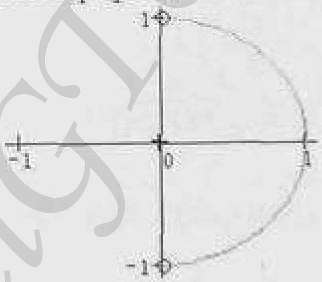
Ответ: $f(z) = -ie^z + 1 + 2i$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_L(\sin iz + z)dz;\ L:\{|z| = 1; \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = \sin(ix - y) + x + iy =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-x-iy} - e^{x+iy}\right) + x + iy =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{-x}(\cos y - i\sin y) - e^x(\cos y + i\sin y)\right] + x + iy =$$

$$= \underbrace{x - \frac{1}{2}e^{-x}\sin y - \frac{1}{2}e^x \sin y}_{u(x,y)} + i\underbrace{\left(y - \frac{1}{2}e^{-x}\cos y + \frac{1}{2}e^x \cos y\right)}_{v(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{\sin y}{2}\left(e^{-x} - e^x\right); \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \frac{\sin y}{2}\left(e^{-x} - e^x\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos y(e^{2x} + 1); \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}e^{-x}\cos y(e^{2x} + 1); \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются, следовательно, функция является аналитической. Тогда результат от пути интегрирования не зависит:

$$\int_L(\sin iz + z)dz = \int_{-1}^{1}(\sin iz + z)dz = i \cdot \operatorname{ch} z + \frac{z^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = 0$$

Ответ: $\int_L(\sin iz + z)dz = 0$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}=\frac{2z+16}{-z^2(z+2)(z-4)}=-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{z+8}{(z+2)(z-4)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

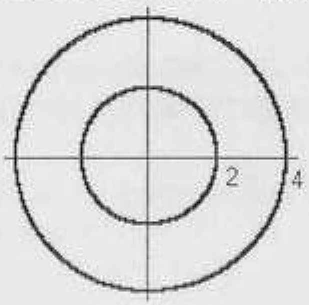
$$\frac{z+8}{(z+2)(z-4)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z-4}=\frac{Az-4A+Bz+2B}{(z+2)(z-4)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=-1;B=2\}\Rightarrow\frac{z+8}{(z+2)(z-4)}=\frac{-1}{z+2}+\frac{2}{z-4}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{2}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+2}-\frac{2}{z-4}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=-2; z=4$



Рассмотрим область $|z|<2$:

$$f(z)=\frac{2}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+2}-\frac{2}{z-4}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})}+\frac{1}{1-\frac{z}{4}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{16}+\frac{z^3}{64}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}-\frac{z}{8}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4z}+\frac{1}{16}+\frac{z}{64}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $2<|z|<4$:

$$f(z)=\frac{2}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+2}-\frac{2}{z-4}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{2}{z(1+\frac{2}{z})}+\frac{1}{1-\frac{z}{4}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{2}{z}-\frac{4}{z^2}+\frac{8}{z^3}-\frac{16}{z^4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{16}+\frac{z^3}{64}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{2}{z^3}-\frac{4}{z^4}+\frac{8}{z^5}-\frac{16}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4z}+\frac{1}{16}+\frac{z}{64}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>4$:

$$f(z)=\frac{2}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+2}-\frac{2}{z-4}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{2}{z(1+\frac{2}{z})}-\frac{4}{z(1-\frac{4}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{2}{z}-\frac{4}{z^2}+\frac{8}{z^3}-\frac{16}{z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{4}{z}+\frac{16}{z^2}+\frac{64}{z^3}+\frac{256}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{2}{z^3}-\frac{4}{z^4}+\frac{8}{z^5}-\frac{16}{z^6}+\ldots\right)-\left(\frac{4}{z^3}+\frac{16}{z^4}+\frac{64}{z^5}+\frac{256}{z^6}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<2: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}-\frac{z}{8}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4z}+\frac{1}{16}+\frac{z}{64}+\ldots\right)$$

$$2<|z|<4: f(z)=\left(\frac{2}{z^3}-\frac{4}{z^4}+\frac{8}{z^5}-\frac{16}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4z}+\frac{1}{16}+\frac{z}{64}+\ldots\right)$$

$$|z|>4: f(z)=\left(\frac{2}{z^3}-\frac{4}{z^4}+\frac{8}{z^5}-\frac{16}{z^6}+\ldots\right)-\left(\frac{4}{z^3}+\frac{16}{z^4}+\frac{64}{z^5}+\frac{256}{z^6}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$.

$$f(z)=4\cdot\frac{z+2}{(z-1)(z+3)},\ z_0=-2+i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=4\cdot\frac{z+2}{(z-1)(z+3)}=\frac{3}{z+3}+\frac{1}{z-1}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{3}{z+3}=3\cdot\frac{1}{z+3}=3\cdot\frac{1}{(z-z_0)+1+i}=3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-z_0)-3+i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(-3+i)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3-i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{3}{z+3}+\frac{1}{z-1}=3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1+i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(3-i)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}-\frac{1}{(3-i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}-\frac{1}{(3-i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}},\ z_0=1$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-1;\ e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}}=e^{\frac{2(1-z'^2)}{z'^2}}=e^{\frac{2}{z'^2}-1}=e^{-1}\cdot e^{2/z'^2}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=e^{-1}\cdot e^{2/z'^2}=$$

$$=e^{-1}\cdot\left(1+\frac{2}{z'^2}+\frac{4}{2!z'^4}+\frac{8}{3!z'^6}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{e}+\frac{2}{z'^2e}+\frac{4}{2!z'^4e}+\frac{8}{3!z'^6e}+\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$:

$$f(z)=\frac{1}{e}+\frac{2}{(z-1)^2e}+\frac{4}{2!(z-1)^4e}+\frac{8}{3!(z-1)^6e}+\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=\frac{1}{e}+\frac{2}{(z-1)^2e}+\frac{4}{2!(z-1)^4e}+\frac{8}{3!(z-1)^6e}+\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{\cos z^3-1}{\sin z-z+z^3/6}$$

Разложим числитель и знаменатель в ряды Лорана в окрестности точки z = 0:

$$f(z)=\frac{\cos z^3-1}{\sin z-z+z^3/6}=\frac{-1+1-\frac{z^6}{2!}+\frac{z^{12}}{4!}-\frac{z^{18}}{6!}+\ldots}{z^3/6-z+z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots}=$$

$$=\frac{-\frac{z^6}{2!}+\frac{z^{12}}{4!}-\frac{z^{18}}{6!}+\ldots}{\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}-\ldots}=\frac{-\frac{z}{2!}+\frac{z^7}{4!}-\frac{z^{13}}{6!}+\ldots}{\frac{1}{5!}-\frac{z^2}{7!}+\frac{z^4}{9!}-\ldots}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{-\frac{z}{2!}+\frac{z^7}{4!}-\frac{z^{13}}{6!}+\ldots}{\frac{1}{5!}-\frac{z^2}{7!}+\frac{z^4}{9!}-\ldots}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad g(z)=-\frac{z}{2!}+\frac{z^7}{4!}-\frac{z^{13}}{6!}+\ldots;\quad h(z)=\frac{1}{5!}-\frac{z^2}{7!}+\frac{z^4}{9!}-\ldots;$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g'(z)=-\frac{1}{2}+7\frac{z^6}{4!}-13\frac{z^{12}}{6!}+\ldots;g'(0)=-\frac{1}{2}$$

$$h(0)=\frac{1}{5!}$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в числителе, то точка z = 0 является нулем функции. Порядок этого нуля находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 1 – 0 = 1.

Ответ: Точка z = 0 является нулем 1-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\frac{1}{z^2}+\sin\frac{1}{z^2}$$

Особой точкой здесь является только точка z = 0. Тип этой особой точки следует находить, применяя разложение в ряд Лорана в ее окрестности:

$$f(z)=\frac{1}{z^2}+\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)=\frac{1}{z^2}+\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!z^6}+\frac{1}{5!z^{10}}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{2}{z^2}-\frac{1}{3!z^6}+\frac{1}{5!z^{10}}-\frac{1}{7!z^{14}}+\ldots$$

Рассмотрим получившийся ряд и выделим главную и правильную части ряда Лорана:

$$f(z)=\underbrace{0}_{\text{правильная часть}}+\underbrace{\frac{2}{z^2}-\frac{1}{3!z^6}+\frac{1}{5!z^{10}}-\frac{1}{7!z^{14}}+\ldots}_{\text{главная часть}}$$

Поскольку главная часть содержит бесконечное число членов, то точка z = 0 для заданной функции f(z) является существенной особой точкой.

Ответ: Точка z = 0 является существенно особой точкой для заданной функции.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1/4} \underbrace{\frac{\ln(e+z)}{z\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = 0$

$z = -\pi/4 + \pi k,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадает только точка $z = 0$.

Точка $z_1 = 0$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\mathrm{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)(z-0)] = \lim_{z\to 0}\frac{z\ln(e+z)}{z\sin(z+\pi/4)} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\ln(e+z)}{\sin(z+\pi/4)} = \frac{\ln(e)}{\sin(\pi/4)} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z|=1/4} \frac{\ln(e+z)}{z\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)} dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{k} \mathrm{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1/4} \frac{\ln(e+z)}{z\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)} dz = 2\sqrt{2}\pi i$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=2} \underbrace{\frac{z-\sin z}{z^4}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$\frac{z-\sin z}{z^4} = \frac{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\right)}{z^4} = \frac{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}-\ldots}{z^4}$$

$$= \frac{1}{3!z}-\frac{z}{5!}+\frac{z^3}{7!}-\ldots$$

Правильная часть получившегося ряда содержит бесконечное число членов, из чего следует, что это – полюс. Порядок полюса равен порядку старшего члена главной части. Таким образом, $z = 0$ – это полюс 1-го порядка и вычет находится следующим образом:

$$\mathrm{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right) = \frac{1}{6}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathrm{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{z^4} dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{z^4} dz = \frac{\pi i}{3}$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=0,5} \underbrace{\frac{e^{5z}-1-\sin 5z}{z^2\operatorname{sh}5z}}_{f(z)}dz$$

Особые точки этой функции $z = \pi ik/5$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z)=\frac{e^{5z}-1-\sin 5z}{z^2\operatorname{sh}5z}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{array}{l} g(z)=e^{5z}-1-\sin 5z \\ h(z)=z^2\operatorname{sh}5z \end{array}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0}f(z)=\lim_{z\to 0}[f(z)z]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{5z}-1-\sin 5z}{z\operatorname{sh}5z}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{5e^{5z}-5\cos 5z}{\operatorname{sh}5z+5z\operatorname{ch}5z}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{25e^{5z}+25\sin 5z}{10\operatorname{ch}5z+25z\operatorname{sh}5z}\right)=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=0,5}\frac{e^{5z}-1-\sin 5z}{z^2\operatorname{sh}5z}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\frac{5}{2}=5\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=0,5}\frac{e^{5z}-1-\sin 5z}{z^2\operatorname{sh}5z}dz=5\pi i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-5|=2}\left(z\sin\frac{i}{z-5}+\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{12}}{(z-6)^2(z-8)}\right)dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-5|=2}\underbrace{z\sin\frac{i}{z-5}}_{f_1(z)}dz+\oint\limits_{|z-5|=2}\underbrace{\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{12}}{(z-6)^2(z-8)}}_{f_2(z)}dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint\limits_{|z-5|=2}z\sin\frac{i}{z-5}dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left\{\begin{array}{l}t=z-5\\ z=t+5\end{array}\right\}\Rightarrow z\sin\frac{i}{z-5}=(t+5)\sin\frac{i}{t}$$

Единственной особой точкой этой функции является t=0. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t+5)\sin\frac{i}{t}=(t+5)\left(\frac{i}{t}-\frac{i^3}{3!t^3}+\frac{i^5}{5!t^5}-\frac{i^7}{7!t^7}+\frac{i^9}{9!t^9}-...\right)=$$

$$=\left(i-\frac{i^3}{3!t^2}+\frac{i^5}{5!t^4}-\frac{i^7}{7!t^6}+...\right)+\left(\frac{5i}{t}-\frac{5i^3}{3!t^3}+\frac{5i^5}{5!t^5}-\frac{5i^7}{7!t^7}+...\right)=$$

$$=i+\frac{5i}{t}-\frac{i^3}{3!t^2}-\frac{5i^3}{3!t^3}+\frac{i^5}{5!t^4}+\frac{5i^5}{5!t^5}-\frac{i^7}{7!t^6}-\frac{5i^7}{7!t^7}+...$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов, из чего следует, что t=0 является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+5)\sin\frac{i}{t}\right]=C_{-1}=5i$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-5|=2} z\sin\frac{i}{z-5}\,dz = \oint\limits_{|t|=2}(t+5)\sin\frac{i}{t}\,dz = 2\pi i\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+5)\sin\frac{i}{t}\right] =$$

$$= 2\pi i\cdot(5i) = -10\pi$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint\limits_{|z-5|=2}\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{12}}{(z-6)^2(z-8)}\,dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=6 и z=8. При этом точка z=8 не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=6 является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=6} f_2(z) = \lim_{z\to 6}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-6)^2\cdot 2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{12}}{(z-6)^2(z-8)}\right] = \lim_{z\to 6}\frac{d}{dz}\left[\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{12}}{z-8}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 6}\left[\frac{\pi i}{6(z-8)}\cos\left(\frac{\pi z}{12}\right) - \frac{2i}{(z-8)^2}\sin\left(\frac{\pi z}{12}\right)\right] = -\frac{i}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-5|=2}\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{12}}{(z-6)^2(z-8)}\,dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=6} f_2(z) = 2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{2}\right) = \pi$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-5|=2}\left(z\sin\frac{i}{z-5} + \frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{12}}{(z-6)^2(z-8)}\right)dz = \oint\limits_{|z-5|=2} z\sin\frac{i}{z-5}\,dz +$$

$$+\oint\limits_{|z-5|=2}\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{12}}{(z-6)^2(z-8)}\,dz = -10\pi + \pi = -9\pi$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-5|=2}\left(z\sin\frac{i}{z-5} + \frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{12}}{(z-6)^2(z-8)}\right)dz = -9\pi$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{35}\sin t - 6}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z)\,dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{35}\sin t - 6} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\frac{\sqrt{35}}{2i}(z-\frac{1}{z}) - 6} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\frac{\sqrt{35}}{2}(z^2-1) - 6iz} =$$

$$= \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{35}(z^2-1) - 12iz} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{35}(z - i\sqrt{35}/5)(z - i\sqrt{35}/7)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = i\sqrt{35}/5$; $z = i\sqrt{35}/7$;

Точка $i\sqrt{35}/5$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $i\sqrt{35}/7$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{35}/7} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{35}/7}[f(z)(z - i\sqrt{35}/7)] =$$

$$= \lim_{z\to i\sqrt{35}/7}\frac{2}{\sqrt{35}(z - i\sqrt{35}/5)} = \frac{2}{\sqrt{35}(i\sqrt{35}/7 - i\sqrt{35}/5)} = i$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{\sqrt{35}(z - i\sqrt{35}/5)(z - i\sqrt{35}/7)} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i\cdot i = -2\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{35}\sin t - 6} = -2\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{2}\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{2}\cos t)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{(\sqrt{7}+\frac{\sqrt{2}}{2}(z+\frac{1}{z}))^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i(2\sqrt{7}z+\sqrt{2}(z^2+1))^2} = \oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i\left[\sqrt{2}(z-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}})(z+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$$z = (\sqrt{5}-\sqrt{7})/\sqrt{2};\quad z = (-\sqrt{5}-\sqrt{7}/\sqrt{2};$$

Точка $z = (-\sqrt{5}-\sqrt{7})/\sqrt{2}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z = (\sqrt{5}-\sqrt{7})/\sqrt{2}$ является полюсом второго порядка.

Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=(\sqrt{5}-\sqrt{7})/\sqrt{2}} f(z) = \lim_{z\to(\sqrt{5}-\sqrt{7})/\sqrt{2}} \frac{d}{dz}[f(z)(z-(\sqrt{5}-\sqrt{7})/\sqrt{2})^2] =$$

$$= \lim_{z\to(\sqrt{5}-\sqrt{7})/\sqrt{2}} \frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[\sqrt{2}(z+(\sqrt{5}+\sqrt{7})/\sqrt{2})\right]^2} = \frac{2}{i}\lim_{z\to(\sqrt{5}-\sqrt{7})/\sqrt{2}} \frac{d}{dz}\frac{z}{(z+(\sqrt{5}+\sqrt{7})/\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{2}{i}\lim_{z\to(\sqrt{5}-\sqrt{7})/\sqrt{2}}\left[-2\frac{z\sqrt{2}-\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(z\sqrt{2}+\sqrt{7}+\sqrt{5})^3}\right] = -\frac{4}{i}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{7}+\sqrt{5})^3} = -\frac{4}{i}\cdot\frac{-2\sqrt{7}}{(2\sqrt{5})^3} = \frac{\sqrt{7}}{5\sqrt{5}i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i\left[\sqrt{2}(z-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}})(z+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}})\right]^2} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{5\sqrt{5}i}\right) = \frac{2\sqrt{7}}{5\sqrt{5}}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{2}\cos t)^2} = \frac{2\sqrt{7}}{5\sqrt{5}}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+7x^2+12}dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i\sum_m \operatorname*{res}_{z_m} R(z)$$ сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+7x^2+12}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z^2+3)(z^2+4)}dz$$

Особые точки:

$$z = 2i\quad (\operatorname{Im} z > 0);\quad z = -2i\quad (\operatorname{Im} z < 0)$$

$$z = i\sqrt{3}\quad (\operatorname{Im} z > 0);\quad z = -i\sqrt{3}\quad (\operatorname{Im} z < 0)$$

Точки $z = 2i$ и $z = i\sqrt{3}$ являются простыми полюсами и вычеты в них вычисляются следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to 2i}[f(z)(z-2i)] = \lim_{z\to 3i}\frac{1}{(z+2i)(z^2+3)} = \frac{i}{4}$$

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{3}} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{3}}[f(z)(z-i\sqrt{3})] = \lim_{z\to i\sqrt{3}}\frac{1}{(z+i\sqrt{3})(z^2+4)} = \frac{-i}{2\sqrt{3}}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+7x^2+12}dx = 2\pi i(\frac{i}{4}-\frac{i}{2\sqrt{3}}) = 2\pi i\frac{i(\sqrt{3}-2)}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+7x^2+12}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\lambda x\,dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$x^2-2x+10=0\Rightarrow z_{1,2}=1\pm 3i$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{1+3i\}$$

Эта особая точка является простым полюсом. Найдем в ней вычет:

$$\underset{z=1+3i}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to 1+3i}\frac{z(z-1-3i)}{z^2-2z+10}e^{iz}=\lim_{z\to 1+3i}\frac{z}{z-1+3i}e^{iz}=$$

$$=\frac{1+3i}{1+3i-1+3i}e^{i(1+3i)}=\frac{1+3i}{6i}e^{i-3}=\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{6}\right)e^{-3}(\cos 1-i\sin 1)$$

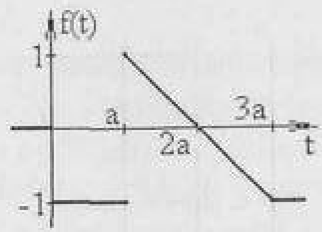
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\frac{\pi}{3}e^{-3}\cos 1+\pi e^{-3}\sin 1$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx=\frac{\pi}{3}e^{-3}\cos 1+\pi e^{-3}\sin 1$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}-1 & 0<t<a\\ \dfrac{2a-t}{a}, & a<t<3a\\ -1, & 3a<t\end{cases}$$

$$f(t)=-1\cdot\eta(t)+\frac{3a-t}{a}\eta(t-a)+\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=-\frac{1}{p}+\left(\frac{3}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{3}{p}\right)e^{-3ap}$$

Ответ: $F(p)=-\frac{1}{p}+\left(\frac{3}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac{1}{ap^2}-\frac{3}{p}\right)e^{-3ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{5}{(p-1)(p^2+4p+5)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{5}{(p-1)(p^2+4p+5)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+4p+5}=$$

$$=\frac{Ap^2+4Ap+5A+Bp^2-Bp+Cp-C}{(p-1)(p^2+4p+5)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(4A-B+C)p+(5A-C)}{(p-1)(p^2+4p+5)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\4A-B+C=0\\5A-C=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/2\\B=-1/2\\C=-5/2\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{5}{(p-1)(p^2+4p+5)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4p+5}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p^2+4p+5}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4p+5}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p^2+4p+5}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{(p+2)^2+1}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1}\to$$

$$\to\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t-\frac{3}{2}\cdot e^{-2t}\sin t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t-\frac{3}{2}\cdot e^{-2t}\sin t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$y''-y'-6y=2$

$y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

Из теории нам известно, что если $x(t)$ соответствует изображение $X(p)$, то $x'(t)$ соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а $x''(t)$ соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)-pY(p)+y(0)-6Y(p)=\frac{2}{p}$$

$$p^2Y(p)-p-pY(p)+1-6Y(p)=\frac{2}{p}$$

$$(p^2-p-6)Y(p)=(p-3)(p+2)Y(p)=\frac{2}{p}+p-1=\frac{p^2-p+2}{p}$$

$$Y(p)=\frac{p^2-p+2}{p(p-3)(p+2)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал $y(t)$:

$$Y(p)=\frac{p^2-p+2}{p(p-3)(p+2)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{p+2}=$$

$$=\frac{(A+B+C)p^2+(-A+2B-3C)p-6A}{p(p-3)(p+2)}$$

$$\begin{cases}A+B+C=1\\-A+2B-3C=-1\\-6A=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1/3\\B=8/15\\C=4/5\end{cases}\Rightarrow$$

$$Y(p)=-\frac{1}{3}\frac{1}{p}+\frac{8}{15}\frac{1}{p-3}+\frac{4}{5}\frac{1}{p+2}\Rightarrow y(t)=-\frac{1}{3}+\frac{8}{15}e^{3t}+\frac{4}{5}e^{-2t}$$

Ответ: $y(t)=-\frac{1}{3}+\frac{8}{15}e^{3t}+\frac{4}{5}e^{-2t}$

Задача 25

Материальная точка массы m совершает прямолинейное колебание по оси Ox под действием восстанавливающей силы $F=-kx$, пропорциональной расстоянию x от начала координат и направленной к началу координат, и возмущающей силы $f=A\cos t$. Найти закон движения $x=x(t)$ точки, если в начальный момент времени $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$.
$k = m$, $A = m$, $x_0 = 1$м, $v_0 = 0{,}5$м/с.

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kx + A\cos t$$

$$\ddot{x}m + kx = A\cos t$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0{,}5$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m + mx = m\cos t$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + x = \cos t$$

Перейдем к изображениям функций:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + X(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

$$(p^2+1)X(p) - p - 0{,}5 = \frac{p}{p^2+1}$$

$$X(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2} + \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1} = \frac{p}{(p^2+1^2)^2} + \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = \frac{1}{2}t\sin t + \cos t + \frac{1}{2}\sin t = t\sin t + \cos t + \frac{1}{2}\sin t$$

Ответ: $x(t) = t\sin t + \cos t + \frac{1}{2}\sin t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dot{x} = x - 2y + 1\\ \dot{y} = -3x\end{cases}$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases}pX(p) - x(0) = X(p) - 2Y(p) + 1/p\\ pY(p) - y(0) = -3X(p)\end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases}pX(p) = X(p) - 2Y(p) + 1/p\\ pY(p) - 1 = -3X(p)\end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 1 = -3X(p) \Rightarrow X(p) = \frac{1 - pY(p)}{3}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p\frac{1 - pY(p)}{3} = \frac{1 - pY(p)}{3} - 2Y(p) + 1/p \Rightarrow Y(p) = \frac{p - 1 + 3/p}{p^2 - p - 6}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{p - 1 + 3/p}{p^2 - p - 6} = \frac{p - 1 + 3/p}{p^2 - p - 6} + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p} = \frac{3p/2 - 3/2}{p^2 - p - 6} - \frac{1}{2p} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{p - \frac{1}{2}}{(p - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}} + \frac{3i}{10}\frac{\frac{5}{2}i}{(p - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}} - \frac{1}{2p} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = \tfrac{3}{2}e^{t/2}\cos\tfrac{5}{2}it + \tfrac{3i}{10}e^{t/2}\sin\tfrac{5}{2}it - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}e^{t/2}\operatorname{ch}\tfrac{5}{2}t - \tfrac{3}{10}e^{t/2}\operatorname{sh}\tfrac{5}{2}t - \tfrac{1}{2}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = -3x \Rightarrow x(t) = -\tfrac{1}{3}\dot{y} = -\tfrac{1}{3}(\tfrac{18}{5}e^{t/2}\operatorname{sh}\tfrac{5}{2}t) = -\tfrac{6}{5}e^{t/2}\operatorname{sh}\tfrac{5}{2}t$$

Ответ:

$$x(t) = -\tfrac{6}{5}e^{t/2}\operatorname{sh}\tfrac{5}{2}t$$

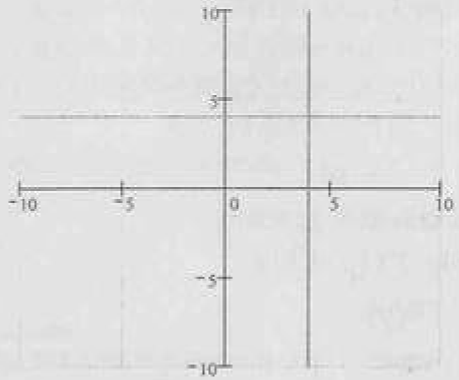
$$y(t) = \tfrac{3}{2}e^{t/2}\operatorname{ch}\tfrac{5}{2}t - \tfrac{3}{10}e^{t/2}\operatorname{sh}\tfrac{5}{2}t - \tfrac{1}{2}$$

Задача 27

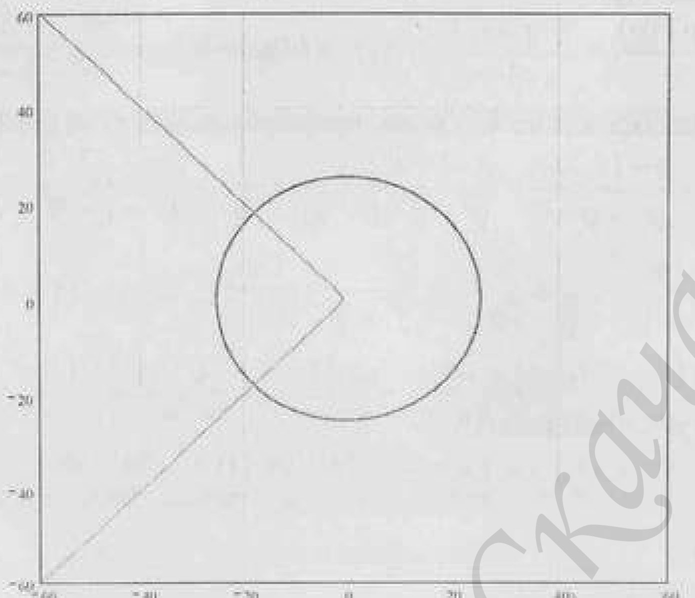
Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

$w = ch(z)$; прямоугольная сетка $x=C$, $y=C$.

В качестве наглядного примера возьмем $C=5\pi/4$:



Каждая из вертикальных прямых преобразуется в окружность радиуса $\cos(iC)$, а каждая горизонтальная – в два луча, исходящие из точки $(0;\cos C)$ в направлении $\pm C$ радиан:



Таким образом, при $C\in(-\infty;\infty)$ сетка отображается во всю комплексную плоскость.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\ldots,n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z=x+iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

Аналитические функции

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z\in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$