Лекція 8

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

8.1. Алгебраїчні криві першого порядку

Розглянемо криві, які в заданій прямокутній системі координат описуються алгебраїчним рівнянням першого порядку $ax+bx+c=0$, де хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля (за умови що коефіцієнти a та b одночасно не обертаються в нуль, $a^2+b^2\neq 0$). Це рівняння називають **лінійним рівнянням**.

Теорема 8.1. Будь пряма на площині є алгебраїчною кривою першого порядку і будь-яка алгебраїчна крива першого порядку на площині є прямою.

Доведення. Розглянемо довільну пряму L на площині. Нехай точка $M_0(x_0;y_0)$ лежить на L, а ненульовий вектор $\vec{n}=(a,b)$— перпендикулярний цій прямій. При таких вихідних умовах довільна точка $M(x;y)$ належить прямій L тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ ортогональний вектору n (рис.8.1.)

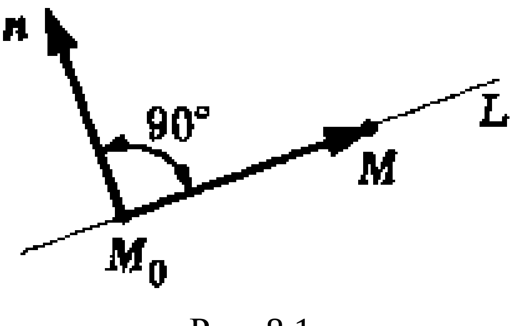


Рис. 8.1.

Знаючи координати векторів $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$ та $\vec{n}$, запишемо умову ортогональності цих векторів через їх скалярний добуток:

$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ або $ax+by+c=0$, де $c=-ax_0-by_0$.

Оскільки $\vec{n}\neq\vec{0}$, то або $a\neq 0$, або $b\neq 0$. Перше твердження теореми доведено.

Для доведення другого розглянемо довільне рівняння першого порядку з двома невідомими $ax+by+c=0,\ a^2+b^2\neq 0$. Це рівняння має хоча б один розв'язок. Наприклад, якщо $a\neq 0$, то розв'язком рівняння є $x=-c/a, y=0$. Це означає, що геометричний образ рівняння є непорожнім і містить певні точки. Нехай точка $M_0(x_0;y_0)$ належить вказаному образу, тобто виконується рівність $ax_0+by_0+c=0$. Віднімемо цю рівність від рівняння $ax+by+c=0$. В результаті отримаємо нове рівняння, еквівалентне вихідному. Це нове рівняння після перегрупування доданків набуде вигляду: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$. Отримане рівняння є умовою ортогональності векторів $\vec{n}=(a,b)$ і $\overrightarrow{M_0M}$, де M - це точка з координатами $(x;y)$. Отже, якщо точка належить геометричному образу рівняння $ax+by+c=0$, то вектор n ортогональний вектору $\overrightarrow{M_0M}$, тобто точка M належить прямій, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$ ●

Рівняння виду $ax+by+c=0,\ a^2+b^2\neq 0$ називають **загальним рівнянням прямої.**

Коефіцієнти a і b в загальному рівнянні прямої мають простий геометричний зміст. Це координати вектора, що перпендикулярний прямій. Такий вектор називають **нормальним вектором прямої**. Він, як і загальне рівняння прямої, визначається з точністю до (ненульового) числового множника.

Нехай пряма *L* задана рівнянням $ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$. Якщо точка $M_0(x_0;y_0)$ належить прямій *L*, то її координати задовольняють рівнянню, тобто $ax_0+by_0+c=0$. В будь-якій точці $M_1(x_1;y_1)$, що не належить прямій *L*, значення лівої частини рівняння $ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$ дорівнює

$$ax_1+by_1+c=ax_1+by_1-ax_0-by_0=a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)=\left(\vec{n},\overrightarrow{M_0M_1}\right)\neq 0$$

Знак скалярного добутку $\left(\vec{n},\overrightarrow{M_0M_1}\right)$ визначається кутом між вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$ і нормальним вектором прямої $\vec{n}$.

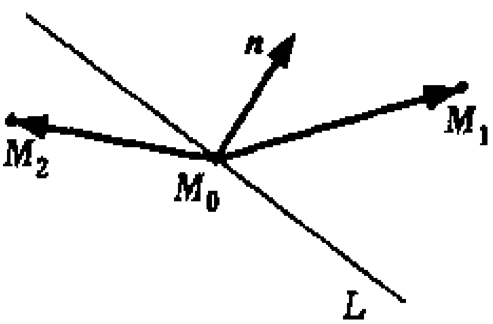


Рис. 8.2.

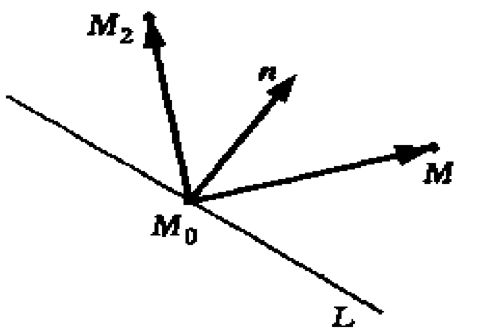


Рис. 8.3.

Якщо точки M_1 і M_2 розташовані по одну сторону від прямої *L* (рис. 8.3) то, підставивши їх координати в ліву частину рівняння $ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$, ми отримаємо значення з одним знаком. Якщо така підстановка координат точок M_1 і M_2 призводить до значень із різними знаками, то ці точки лежать по різні сторони від прямої *L* (рис. 8.2).

◄**Приклад 7.1.** З'ясувати, як по відношенню до прямої $3x-4y+5=0$ розташовані точки *A(4, 4)* і *B(6, 6)*.

Розв’язання. Підставимо координати точки *A* в ліву частину загального рівняння прямої, отримаємо (+1), а підстановка координат точки *B* призводить до числа (-1). Отже, точки *A* та *B* розташовані по різні боки від даної прямої.►

Рівняння $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ дозволяє за координатами точки на прямій *L* і координатам нормального вектора прямої *L* записати рівняння прямої без додаткових обчислень.

8.1.1. Спеціальні види рівняння прямої

Крім *загального рівняння прямої* на площині часто використовують й інші види рівнянь прямої: кожному виду рівняння відповідає свій геометричний зміст коефіцієнтів. Зафіксуємо на площині прямокутну систему координат *Oxy*.

Рівняння з кутовим коефіцієнтом. Визначимо пряму *L* на площині, задавши точку $M_0(x_0;y_0)$ на цій прямій і кут φ, на який треба повернути проти годинникової стрілки вісь абсцис *Ox* до співпадіння з прямою.

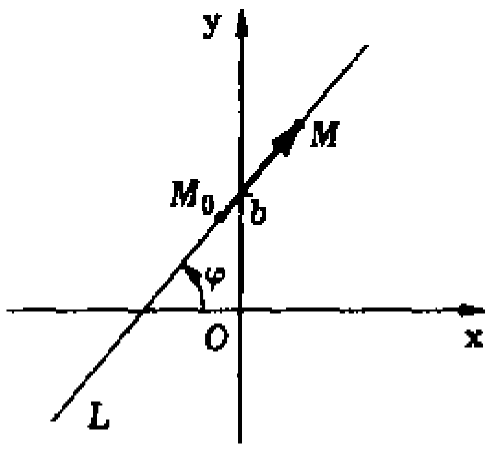


Рис. 8.4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Припустимо, що $\varphi \neq \pi/2$. Точка M $(x; y)$ належить прямій L тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ утворює з віссю Ox кут φ або π-φ, при цьому відношення координат цього вектора дорівнює tg φ. Цю умову можна записати у вигляді: $\frac{y-y_0}{x-x_0} = tg\phi$. Знаходячи y, приходимо до рівняння $y = kx + b$, де $k = tg\phi; b = y_0 - x_0 tg\phi$.

Рівняння виду $y = kx + b$ називають **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом**. Параметр k (**кутовий коефіцієнт прямої**) дорівнює тангенсу кута нахилу прямої. Параметр b дорівнює ординаті точки перетину прямої з віссю Oy.

Векторне і параметричні рівняння прямої. Визначимо пряму L на площині точкою $M_0(x_0; y_0)$на цій прямій і ненульовим вектором $\vec{s} = (l, m)$, що паралельний їй. Такий вектор s називають **напрямним вектором прямої** ***L*** (рис. 8.5).

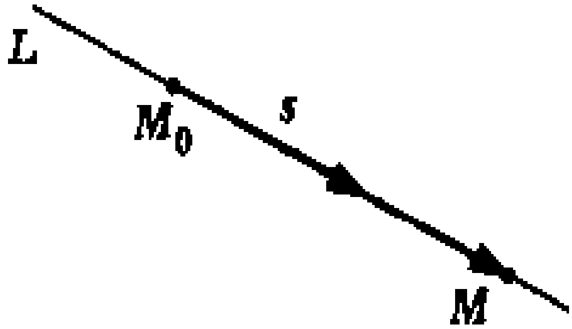


Рис. 8.5. Векторне і параметричне рівняння прямої

Якщо точка M $(x; y)$ належить прямий L, то це еквівалентно тому, що вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\vec{s}$, тобто ці вектори належать одному і тому ж простору V_1. Оскільки, вектор $\vec{s}$ не дорівнює нульовому, він утворює базис в цьому просторі V_1. Отже, для деякого числа t

виконується рівність $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$. Скориставшись тим, що $\overrightarrow{M_0M} = \left(x - x_0; y - y_0\right)$, $\vec{s} = \left(l, m\right)$, запишемо цю рівність в координатах:

$$\begin{cases} x - x_0 = lt \\ y - y_0 = mt \end{cases},$$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}.$$

Це рівняння називають **параметричними рівняннями прямої.** Точка $M(x_0; y_0)$, що лежить на прямій, відповідає значенню параметра $t = 0$.

Якщо рівність $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$ записати через радіус-вектори r_0 і r точок M_0 і M відповідно, то в результаті отримаємо **векторне рівняння прямої** $r - r_0 = ts$ або $r = r_0 + ts$.

Канонічне рівняння прямої. Колінеарність векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ еквівалентна рівності відношення їх однойменних координат:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Це рівняння називають **канонічним рівнянням прямої**.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Задамо пряму L на площині двома різними точками $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$ на ній. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ є напрямним вектором $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1\right)$ прямої L. Підставимо координати цього вектора і координати точки $M_1(x_1; y_1)$ в канонічне рівняння прямої.

Отримаємо $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Це рівняння називають **рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки**.

Рівняння прямої у відрізках. Визначимо пряму *L* її точками *A (a, 0) і B (0, b)* перетину з осями координат, припускаючи, що ці дві точки не збігаються з початком системи координат, тобто що $a \neq 0$ і $b \neq 0$.

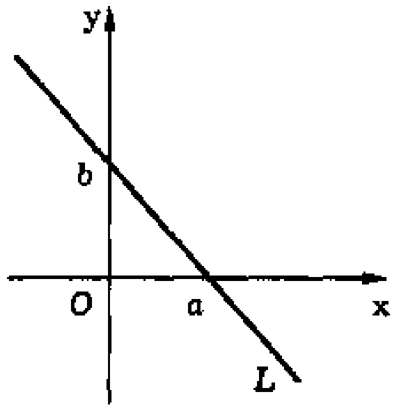


Рис. 7.6. Рівняння прямої у відрізках

Запишемо рівняння прямої *L* у вигляді *рівняння прямої, що проходить через дві точки A* та *B*, де *A* – точка перетину з віссю *Ox*, а *B* – точка перетину прямої з віссю *Oy*:

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0},$$

звідки $-x/a+1=y/b$ або $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Це рівняння прямої називають **рівнянням прямої в відрізках.**

Нормальне рівняння прямої. Визначимо пряму *L* за допомогою одиничного вектора $\vec{n}$, що перпендикулярний їй, і відстані $p > 0$ до прямої від початку системи координат. Існують два одиничних вектора, що перпендикулярні прямій L. З цих двох виберемо той, який має початок в

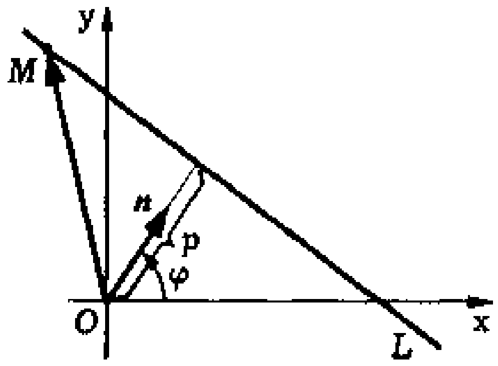


Рис. 8.7. Нормальне рівняння прямої

точці O і напрямлений "у бік прямої" L (рис. 8.7).

Обраний вектор $\vec{n}$ однозначно визначається своїм кутом φ з віссю Ox, який визначається проти ходу годинникової стрілки. Координати вектора $\vec{n}$ обчислюються через цей кут: $\vec{n} = (cos\varphi; sin\varphi)$.

Умова, що точка $M(x; y)$ належить прямий L, еквівалентна тому, що ортогональна проекція радіус-вектора точки M на напрям нормального вектора прямої дорівнює відстані p від точки O до прямої: $пр_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = p$.

Проекція $пр_{\vec{n}}\overrightarrow{OM}$ збігається зі скалярним добутком векторів $\overrightarrow{OM}$ і $\vec{n}$, оскільки довжина нормального вектора $\vec{n}$ дорівнює одиниці, і це призводить до рівності $\left(\overrightarrow{OM}, \vec{n}\right) = p$. Запишемо скалярний добуток $\left(\overrightarrow{OM}, \vec{n}\right)$ в координатах: $x cos\phi + y sin\phi - p = 0$.

Це рівняння називають **нормальним рівнянням прямої.** Параметрами в цьому рівнянні є кут φ між нормальним вектором прямої і віссю Ox і відстань від початку системи координат до прямої.

Загальне рівняння прямої $ax + by + c = 0$ можна перетворити в її нормальне рівняння діленням на нормуючий множник $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$, знак якого вибирається протилежним знаку *c*. За абсолютною величиною нормуючий множник є довжиною нормального вектора (a,b) прямої, а вибір знака означає вибір потрібного напрямку з двох можливих. Якщо *c* = 0, то пряма проходить через початок координат (*p* = 0). В цьому випадку знак нормуючого множника можна обирати будь-який.

◄**Приклад 8.2.** Записати нормальне рівняння прямої із її загального рівняння $3x-4y+10=0$

Розв'язання. Обчислимо нормуючий множник $\pm\sqrt{a^2+b^2}$, який для даної прямий від'ємний і дорівнює $-\sqrt{3^2+4^2}=-5$. Тому нормальне рівняння прямої має вигляд:

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0.$$

В даному випадку маємо *p* = 2,

$cos\varphi=-3/5, sin\varphi=4/5, \varphi=arccos(-3/5)$►

8.2. Взаємне розташування двох прямих

Фіксуємо на площині прямокутну систему координат. Дві прямі на площині можуть бути паралельними, співпадати або перетинатися. Прямі що перетинаються можуть бути перпендикулярними. Яка з цих можливостей реалізується для прямих L_1 і L_2, завжди можна з'ясувати за допомогою їх загальних рівнянь:

$$L_1 : a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$L_2 : a_2x+b_2y+c_2=0$$

Для паралельності прямих L_1 і L_2 необхідно і достатньо, щоб були колінеарними їх нормальні вектори $\vec{n}_1 = \left(a_1; b_1\right)$ і $\vec{n}_2 = \left(a_2; b_2\right)$ а колінеарність векторів рівносильна пропорційності їх координат. Тому

$$L_1 \,||\, L_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Оскільки остання рівність перетворюється на співвідношення $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, то отримана умова паралельності двох прямих може бути записана за допомогою визначника другого порядку:

$$L_1 \,||\, L_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Прямі L_1 і L_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли ортогональні їх нормальні вектори. Умова ортогональності нормальних векторів $\vec{n}_1 = \left(a_1; b_1\right)$ і $\vec{n}_2 = \left(a_2; b_2\right)$еквівалентна рівності нулю їх скалярного добутку $\vec{n}_1 \vec{n}_2 = 0$, тобто $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

І умову паралельності, і умову перпендикулярності можна записати через кутові коефіцієнти прямих. Для цього необхідно виразити кутові коефіцієнти прямих через коефіцієнти їх загальних рівнянь: $k_1 = -a_1 / b_1$, $k_2 = -a_2 / b_2$. Ці вирази дозволяють записати умови наступним чином:

- умова паралельності: $k_1 = k_2$;

- умова перпендикулярності: $k_1 k_2 = -1$.

Дві прямі, що перетинаються L_1і L_2 утворюють два суміжних кута. Один з цих кутів збігається з кутом між нормальними векторами. А кут між двома векторами можна обчислити за допомогою скалярного добутку. Зазначимо, що косинуси двох суміжних кутів відрізняються знаками, оскільки $cos(\pi - \varphi) = -cos\,\varphi$. При цьому додатне значення косинуса відповідає гострому куту. Значення φ (меншого з кутів між прямими L_1 і L_2) обчислюється за формулою:

$$cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Кут між прямими можна також виразити через кутові коефіцієнти прямих. Цей кут є різницею кутів нахилу прямих. Якщо $k_1 = tg\varphi_1$ і $k_2 = tg\varphi_2$ - кутовий коефіцієнт прямої L_1 і L_2, то

$$tg\varphi = tg(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

Значення гострого кута повороту з урахуванням його напрямку визначається за формулою:

$$\varphi = arctg\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

8.3. Відстань від точки до прямої

Для обчислення відстані від даної точки *M* до прямої *L* можна використовувати різні способи. Наприклад, якщо на прямій *L* взяти довільну точку M_0, то можна визначити *ортогональну проекцію вектора* $\overrightarrow{M_0M}$ *на напрям нормального вектора прямої*. Ця проекція з точністю до знака і є потрібна відстань.

Інший спосіб обчислення відстані від точки до прямої базується на використанні **нормального рівняння прямої**.

Нехай пряма *L* задана нормальним рівнянням. Якщо точка *M* (*x; y*) не лежить на прямій *L*, то ортогональна проекція $np_{\vec{n}}\overrightarrow{OM}$ і радіус-вектора

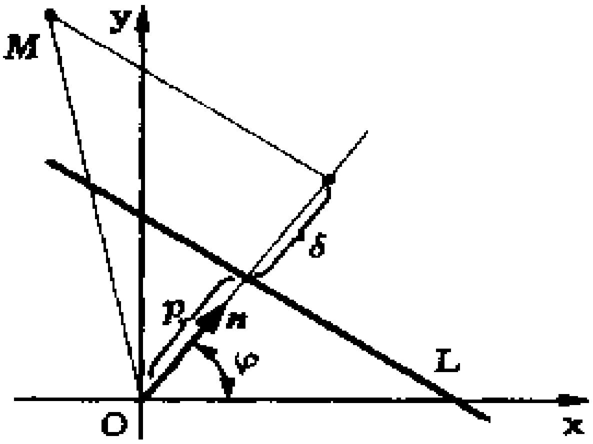


Рис. 8.8. Відстань від точки до прямої

точки M на напрямок одиничного нормального вектора $\vec{n}$ прямої L дорівнює скалярному добутку векторів $\overrightarrow{OM}$ і $\vec{n}$, тобто $x\cos\varphi + y\sin\varphi$. Ця ж проекція дорівнює сумі відстані p від початку координат до прямої і деякої величини δ. Величина δ по абсолютній величині дорівнює відстані від точки M до прямої. При цьому $\delta > 0$, якщо точки M і O знаходяться по різні сторони від прямої, і $\delta < 0$, якщо ці точки розташовані по одну сторону від прямої. Величину δ називають **відхиленням точки *M* від прямої**. Відхилення δ для точки $M\,(x;\,y)$ від прямої L обчислюється як різниця проекції $np_{\vec{n}}\overrightarrow{OM}$ і відстані p від початку координат до прямої, тобто $\delta = x\cos\varphi + y\sin\varphi - p$.

За цією формулою можна отримати і відстань $p(M, L)$ від точки $M\,(x;\,y)$ до прямої L, заданої нормальним рівнянням:

$$p(M, L) = |\,\delta\,| = |\,x\cos\varphi + y\sin\varphi - p\,|.$$

Враховуючи наведену вище процедуру перетворення загального рівняння прямої в її нормальне рівняння, отримуємо формулу для відстані від точки $M\,(x;\,y)$ до прямої L, що задана своїм загальним рівнянням:

$$p(M,L)=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

◀**Приклад 8.3.** Знайти загальні рівняння висоти *AH*, медіани *AM* і бісектриси *AD* трикутника *ABC*, що виходять з вершини *A*. Відомі координати вершин трикутника *A* (-1; -3), *B* (7, 3), *C* (1; 7).

Розв'язання. Під зазначеними рівняннями маються на увазі рівняння прямих L_{AH}, L_{AM} і L_{AD}, на яких розташовані відповідно висота *AH*, медіана

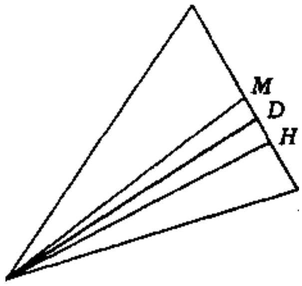


Рис. 8.9. Ілюстрація до задачі 8.3

AM і бісектриса *AD* зазначеного трикутника.

Щоб знайти рівняння прямої L_{AM}, скористаємося тим, що медіана ділить протилежну сторону трикутника навпіл. Знайшовши координати (x_1; y_1) середини сторони *BC* x_1 =(7 + 1)/2=4, y_1= (3+7)/2=5, записуємо рівняння для L_{AM} у вигляді рівняння *прямої що проходить через дві задані точки*:

$$\frac{x+1}{4+1}=\frac{y+3}{5+3}.$$

Після перетворень одержуємо загальне рівняння медіани:

$$8x - 5y - 7 = 0$$

Щоб знайти рівняння висоти $L_{AH,}$ скористаємося тим, що висота перпендикулярна протилежній стороні трикутника. Отже, вектор $\overrightarrow{BC}$, що перпендикулярний висоті *AH*, буде нормальним вектором прямої L_{AH}. Рівняння цієї прямої отримуємо, підставляючи координати точки *A* і нормального вектора прямої L_{AH} в нормальне рівняння прямої:

$$(-6)(x+1)+4(y+3)=0.$$

Після перетворень одержуємо загальне рівняння висоти

$$3x-2y-3=0.$$

Щоб знайти рівняння бісектриси L_{AD}, скористаємося тим, що бісектриса AD належить множині тих точок $N(x;y)$, які рівновіддалені від прямих L_{AB} і $L_{AC.}$ Рівняння цієї множини має вигляд:

$$p(N, L_{AB}) = p(N, L_{AC})$$

Воно задає дві прямі, що проходять через точку A і ділять кути між прямими L_{AB} і L_{AC} навпіл. Скориставшись рівнянням прямої, що проходить через дві точки, знайдемо загальні рівняння прямих L_{AB} і L_{AC} :

$$L_{AB}:\ \frac{x+1}{7+1}=\frac{y+3}{3+3}$$

$$L_{AC}:\ \frac{x+1}{1+1}=\frac{y+3}{7+3}$$

Після перетворень одержуємо

$$L_{AB}:\ 3x-4y-9=0$$

$$L_{AC}:\ 5x-y+2=0.$$

Рівняння бісектриси, як геометричного місця точок, що рівновіддалені від сторін кута, запишемо у вигляді:

$$\frac{|3x-4y-9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|5x-y+2|}{\sqrt{5^2+(-1)^2}}$$

Перетворимо його, розкривши модулі:

$$3x-4y-9=\pm 5\frac{5x-y+2}{\sqrt{26}}$$

В результаті отримаємо загальні рівняння двох прямих

$$(3\mp 25/\sqrt{26})x+(-4\pm 5/\sqrt{26})y+(-9\mp 10/\sqrt{26})=0.$$

Щоб вибрати з них рівняння бісектриси, врахуємо, що вершини B і C трикутника розташовані по різні сторони від шуканої прямої і тому підстановки їх координат в ліву частину загального рівняння прямої L_{AD} повинні давати значення із різними знаками. Вибираємо рівняння, відповідне верхньому знаку, тобто

$$(3-25/\sqrt{26})x+(-4+5/\sqrt{26})y+(-9-10/\sqrt{26})=0$$

Підстановка координат точки B в ліву частину цього рівняння дає від'ємне значення, оскільки

$$(3-25/\sqrt{26})7+(-4+5/\sqrt{26})3+(-9-10/\sqrt{26})=$$
$$=21-12-9+(-175+15-10)/\sqrt{26}=-170/\sqrt{26}$$

і такий же знак виходить для координат точки C, так як

$$(3-25/\sqrt{26})1+(-4+5/\sqrt{26})7+(-9-10/\sqrt{26})=$$
$$=3-28-9(-25+35-10)/\sqrt{26}=-34<0$$

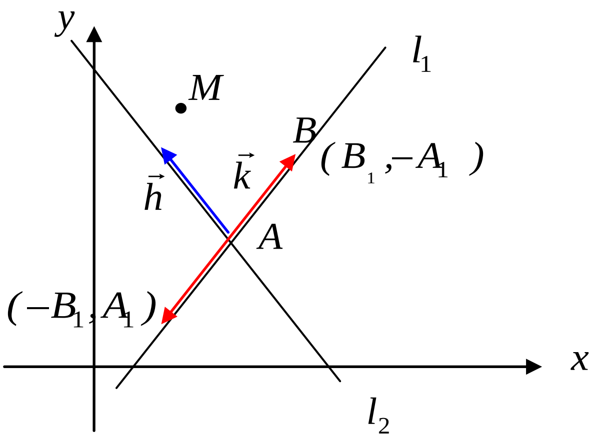
Отже, вершини B і C розташовані по одну сторону прямої з обраним рівнянням, а тому рівнянням бісектриси є

$$(3+25/\sqrt{26})x+(-4-5/\sqrt{26})y+(-9+10/\sqrt{26})=0$$ ►

8.4. Приклади розв’язання типових задач

Задача 1. В декартовій прямокутній системі координат задано дві прямі, що перетинаються $A_1x+B_1y+C_1=0 \ i \ A_2x+B_2y+C_2=0$ і точка $M(x_0,y_0)$, що неналежить жодній з заданих прямих. Знайти напрямки сторін того з чотирьох кутів, утворених прямими, в якому лежить точка M.

***Означення**. Кажуть, що точка M лежить в середині кута, сторонами якого є промені $\vec{h}$ і $\vec{k}$, якщо точка M і промінь $\vec{k}$ лежать з однієї сторони від прямої, що містить промінь $\vec{h}$, і точка M і промінь $\vec{h}$ лежать з однієї сторони від прямої, що містить промінь $\vec{k}$.*



Розв'язання. Нехай точка $A(x_A,y_A)$ - точка перетину заданих прямих. Точка A ділить першу пряму на два променя: напрямок одного з них визначається вектором $(B_1,-A_1)$, а напрямок іншого – вектором $(-B_1,A_1)$. Якщо розташувати вектори так, щоб вони виходили з точки А, то кінець потрібного нам вектора повинен лежати з тієї ж сторони другої прямої, що і точка М. Нехай точка В – кінець вектора $(B_1,-A_1)$. Тоді її координати $B(x_A+B_1,y_A-A_1)$. Щоб дізнатися, чи задовольняє умову задачи вектор $(B_1,-A_1)$, чи протилежний йому вектор $(-B_1,A_1)$ підставимо в рівняння другої прямої координати точок М і В. Якщо отримаємо числа різних знаків, то умові буде задовольняти вектор $(-B_1,A_1)$. Аналогічні міркування проводимо і для другої прямої. Знайдені таким чином вектори і будуть визначати напрямки сторін кута, що містить точку М.

Задача 2. Знайти умови, необхідні і достатні для того, щоб точка $M(x_0, y_0)$ лежала в середині трикутника, сторони якого задано рівняннями:

$$(BC): A_1x + B_1y + C_1 = 0; \ (CA): \ A_2x + B_2y + C_2 = 0;$$
$$(AB): A_3x + B_3y + C_3 = 0 \quad .$$

Означення. *Кажуть, що точка* M *лежить в середині трикутника ABC, якщо вона розташована з однієї сторони від прямої (AB) разом із точкою C, з однієї сторони від прямої (BC) разом із точкою A і з однієї сторони від прямої (AC) разом із точкою B.*

Розв'язання. Знайдемо координати (x_3, y_3) точки С перетину першої та другої прямих розв'язуємо систему рівнянь за правилом Крамера):

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \ y_3 = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

$$A_3x_3 + B_3y_3 + C_3 = A_3\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} + B_3\left(-\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}\right) + C_3 =$$

$$= \frac{A_3\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_3\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_3\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

Для того, щоб точки *M* і *C* лежали з одного боку від прямої *AB*, необхідно і достатньо, щоб числа $A_3x_0 + B_3y_0 + C_3$ і $\dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$ були однакових знаків. Так само запевняємося в тому, що для того, щоб точки *M* і *B* лежали з однієї сторони від прямої (*AC*), необхідно і достатньо, щоб були однакові знаки у чисел $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$ і $\dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}$. І, на останок, щоб точки *M* і *A* були розташовані з однієї сторони від прямої (*BC*), необхідно і достатньо, щоб були однакових знаків числа $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1$ і $\dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}$. Звідси слідує, що якщо точка M лежить в середині трикутника ABC, то числа $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1;\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2;\ A_3x_0 + B_3y_0 + C_3$ або мають такий самий знак, як і визначники $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$, або знаки їм протилежні. І навпаки, якщо ця умова виконана, то числа

$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1;\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2;\ A_3x_0 + B_3y_0 + C_3$ або мають такі самі

знаки, як і числа $\dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}, \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}, \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$, або знаки

їм протилежні. Таким чином, для того, щоб точка М лежала в середині трикутника, сторони якого мають рівняння

$$(BC):\ A_1x + B_1y + C_1 = 0;\ (CA):\ A_2x + B_2y + C_2 = 0;$$
$$(AB):\ A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

Необхідно і достатньо, щоб числа

$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1;\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2;\ A_3x_0 + B_3y_0 + C_3$ мали б такий самий

знак, що і визначники $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$, або знак

протилежний їм.

Висновки: для того, щоб точка М лежала в середині трикутника, сторони якого мають рівняння

$$(BC):\ A_1x + B_1y + C_1 = 0;\ (CA):\ A_2x + B_2y + C_2 = 0;$$
$$(AB):\ A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

Необхідно і достатньо, щоб числа

$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1;\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2;\ A_3x_0 + B_3y_0 + C_3$ мали б такий самий

знак, що і визначники $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$, або знак

протилежний їм.

Задача 3. В прямокутній декартовій системі координат задано рівняння прямих $A_1x+B_1y+C_1=0$ *і* $A_2x+B_2y+C_2=0$ і точка $M(x_0,y_0)$. Записати рівняння бісектриси того кута між заданими прямими в якому лежить точка М.

Розв'язання. Нехай точка $P(x,y)$- довільна точка шуканої бісектриси, що лежить в середині потрібного кута. За означенням бісектриси, як геометричного місця точок, що рівновіддалені від сторін кута, можемо записати:

$\dfrac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\dfrac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$. Так як точки М і Р лежать в середині одного кута, то вони розташовані з однієї сторони як відносно першої прямої, так і відносно другої прямої. Тому числа

$A_1x+B_1y+C_1$ *і* $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ мають однакові знаки; числа

$A_2x+B_2y+C_2$ *і* $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ також мають однакові знаки. Тоді рівняння шуканої бісектриси буде $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, якщо

числа $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ *і* $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ одного знака, і

$\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, якщо ці числа протилежних знаків.

Висновки: шукане рівняння бісектриси: $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$

або $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Задача 4. (обов'язкова) Задано координати вершин трикутника ABC: A(-2;6), B(8;11), C(2;-2).

Знайти:

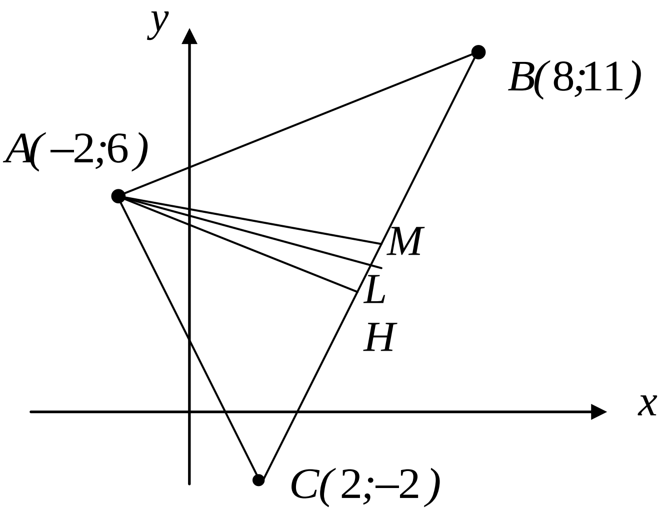
1) Канонічне та загальне рівняння сторони AB; рівняння прямої у відрізках, рівняння з кутовим коефіцієнтом та загальне рівняння сторони BC; нормальне та загальне рівняння сторони AC; довжини всіх сторін трикутника.

2) Внутрішні кути трикутника ABC.

3) Рівняння медіани AM, бісектриси AL та висоти AH, що проведені з вершини A.

4) Площу трикутника ABC.

Розв'язання.



1) Сторона AB: напрямний вектор $\overrightarrow{AB} = (10;5)$. Канонічне рівняння:

$\frac{x+2}{10} = \frac{y-6}{5}$. Загальне рівняння:

$5x + 10 = 10y - 60;\ 5x - 10y + 70 = 0;$

$x - 2y + 14 = 0.$

Довжина сторони AB: $|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$ (од.)

Сторона BC: напрямний вектор $\overrightarrow{BC} = (-6;-13)$;

Кутовий коефіцієнт: $k=\dfrac{-13}{-6}$. Шукане рівняння з кутовим коефіцієнтом набуває вигляду: $y=\dfrac{13}{6}x+b$. Підставимо у рівняння координати точки С: $-2=\dfrac{13}{6}\cdot 2+b \Rightarrow b=-\dfrac{19}{3} \Rightarrow y=\dfrac{13}{6}x-\dfrac{19}{3}$. Помножимо обидві частини рівняння на (-6) і перенесемо всі доданки в ліву частину: $13x-6y-38=0$. Це загальне рівняння сторони ВС.

Довжина сторони ВС: $|BC|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{6^2+13^2}=\sqrt{205}$ (од.)

Сторона АС: напрямний вектор $\overrightarrow{AC}=(4;-8)$; запишемо будь-який вектор, що перпендикулярний напрямному: $\vec{n}_{AC}=(2;1)$, шукане загальне рівняння набуде вигляду: $2(x-2)+(y+2)=0 \Rightarrow 2x+y-2=0$..

Помноживши обидві частини на нормуючий множник $\dfrac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ отримаємо нормальне рівняння: $x\dfrac{2}{\sqrt{5}}+y\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}=0$.

Довжина сторони АС: $|AC|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$.

2) Кути трикутника шукатимемо, використавши скалярний добуток векторів.

Кут А: $\cos A=\dfrac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{10\cdot 4+5\cdot(-8)}{5\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}}=0 \Rightarrow \angle A=90^0$.

Кут В:

$$\cos B=\frac{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{-10\cdot(-6)-5\cdot(-13)}{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{205}}=\frac{5}{\sqrt{41}} \Rightarrow \angle B=\arccos\frac{5}{\sqrt{41}}.$$

Кут С: оскільки трикутник прямокутний, то $\angle C=\frac{\pi}{2}-arccos\frac{5}{\sqrt{41}}$.

3) Рівняння медіани AM: знайдемо координати точки M, як середини відрізка BC: $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{8+2}{2}=5;\ y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{11-2}{2}=4{,}5$.

Напрямний вектор $\overrightarrow{AM}=(7;-1{,}5)$. Канонічне рівняння медіани:

$$\frac{x+2}{7}=\frac{y-6}{-1{,}5}.$$

Рівняння висоти AH знайдемо, як рівняння прямої, що перпендикулярна BC і проходить через точку A: вектором нормалі прямої (AH) може слугувати напрямний вектор прямої (BC). Тоді загальне рівняння висоти:

$$-6(x+2)-13(y-6)=0\Rightarrow -6x-13y+66=0\Rightarrow 6x+13y-66=0.$$

Рівняння бісектриси AL: шукатимемо, як рівняння геометричного місця точок, що рівновіддалені від сторін кута: $\frac{|x-2y+14|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x+y-2|}{\sqrt{5}}$. Для розкриття модулів візьмемо будь-яку точку в середині того самого кута A, нехай це буде точка P(0;5). Підставимо координати цієї точки в рівняння сторін. $0-2\cdot 5+14=4>0$ і $2\cdot 0+5-2=3>0$. Отже, шукане рівняння бісектриси набуває вигляду:

$$\frac{x-2y+14}{\sqrt{5}}=\frac{2x+y-2}{\sqrt{5}}\Rightarrow x-2y+14=2x+y-2\Rightarrow x+3y-16=0.$$

4) Площу трикутника ABC знайдемо використавши векторний добуток. Для цього

запишемо вектори $\overrightarrow{AB}=(10;5;0)$ і $\overrightarrow{AC}=(4;-8;0)$ як вектори простору

R^3. Їх векторний добуток $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 10 & 5 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{vmatrix} = -100k$. Площа трикутника

дорівнюватиме половині довжини цього вектора: $S_{\Delta ABC}=50$(кв.од.).

Відповідь: 1) Рінняння: АВ: $x-2y+14=0.$; ВС: $13x-6y-38=0.$;

АС: $x\frac{2}{\sqrt{5}}+y\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}=0$.

Довжини: $|AB|=5\sqrt{5}$; $|BC|=\sqrt{205}$; $|AC|=4\sqrt{5}$.

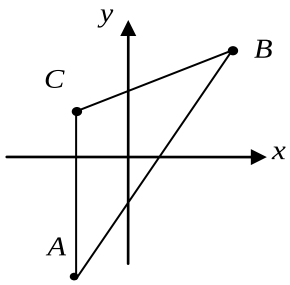
2) $\angle A=90^0$; $\angle B=arccos\frac{5}{\sqrt{41}}$; $\angle C=\frac{\pi}{2}-arccos\frac{5}{\sqrt{41}}$.

3) Медіана АМ: $\frac{x+2}{7}=\frac{y-6}{-1{,}5}$; висота АН: $6x+13y-66=0$; бісектриса

AL: $x+3y-16=0$.

4) $S_{\Delta ABC}=50$(од.кв.)

Задача 5. Задано рівняння сторони АВ: $2x-y-2=0$ трикутника АВС, координати вершини С(-3;2) і тангенси внутрішніх кутів, прилеглих до сторони АВ: $tgA=\frac{1}{2}$ *і* $tgB=\frac{4}{3}$. Знайти рівняння двох інших сторін трикутника.



Розв'язання. Невідомі рівняння будемо шукати як рівняння прямих з кутовим коефіцієнтом. Позначимо кутовий коефіцієнт прямої (АВ) через $k_1 = 2$; кутовий коефіцієнт прямої (ВС) через k_2 і кутовий коефіцієнт прямої (АС) через k_3.

Означення. *Тангенс кута між прямими, що задані своїми рівняннями з кутовими коефіцієнтами* $y = k_1 x + b_1$ *і* $y = k_2 x + b_2$ *визначається за формулою* $tg\phi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. (Домашнє завдання – довести формулу).

Тоді тангенс кута між прямими (АВ) і (ВС) $tgB = \dfrac{4}{3} = \dfrac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} \Rightarrow k_2 = \dfrac{2}{11}$.

Шукане рівняння сторони (ВС) набуде вигляду: $y = \dfrac{2}{11}x + b_1$. Знайдемо b_1 підставивши в рівняння координати точки С:

$2 = \dfrac{2}{11} \cdot (-3) + b_1 \Rightarrow b_1 = \dfrac{28}{11}$. Рівняння (ВС): $y = \dfrac{2}{11}x + \dfrac{28}{11}$. Аналогічно, знайдемо рівняння (АС): $tgA = \dfrac{1}{2} = \dfrac{k_3 - 2}{1 + 2k_3} \Rightarrow k_3 = \infty$. Отже, пряма (АС) має рівняння $x + 3 = 0$.

Відповідь: (ВС): $2x - 11y + 28 = 0$; (АС): $x + 3 = 0$.

Задача 6. (обов'язкова) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку А(-2; 1):

1) паралельну осі Оу;

2) що утворює з віссю Ох кут $\frac{3}{4}\pi$;

3) перпендикулярно вектору $\vec{a} = (4;2)$;

4) паралельно бісектрисі першого координатного кута;

5) перпендикулярно прямій $6x - y + 2 = 0$;

такої, що відтинає на осі Оу відрізок довжиною 5.

Розв'зання.

1) $x = -2$.

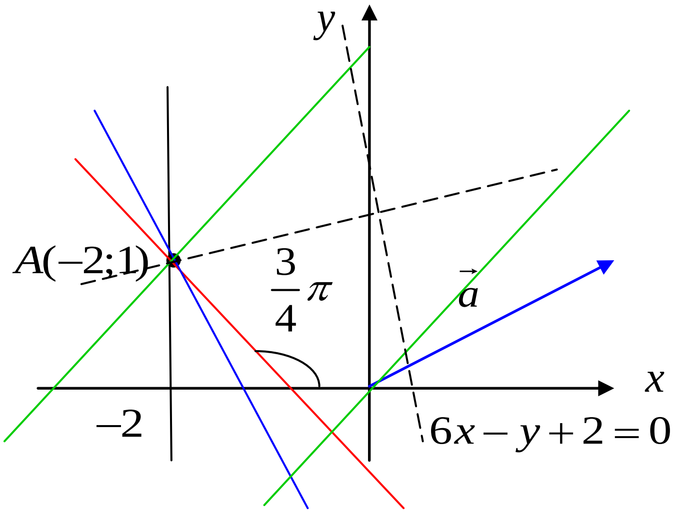
2) $tg\frac{3}{4}\pi = -1;\ y = -x + b \to 1 = -(-2) + b \to b = -1$.

$y = -x - 1$

3) $4x + 2y + C = 0 \to 4(-2) + 2 \cdot 1 + C = 0 \to C = 6$

$4x + 2y + 6 = 0$ *або* $2x + y + 3 = 0$

4) Рівняння бісектриси: $y = x$. Напрямний вектор прямої може бути $\vec{b} = (1;1)$. Тоді $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} \to x - y + 3 = 0$.



5) Вектор $\vec{c}=(6;-1)$ може бути напрямним вектором шуканої прямої,

тоді $\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y-1}{-1}\to x+6y-4=0$

6) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{5}=1\to\frac{-2}{a}+\frac{1}{5}=1\to a=-2.5$$ або $$\frac{x}{-2.5}+\frac{y}{5}=1$$

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{5}=1\to\frac{-2}{a}-\frac{1}{5}=1\to a=-2.5$$

$$\frac{x}{-5/3}-\frac{y}{5}=1\to 3x+y+5=0$$

Задача 7. З пучка прямих, що визначаються рівнянням $y+3=k(x-2)$ знайти ту пряму, що проходить через точку А(-2;5).

Розв'язання. Підставимо координати точки А в рівняння пучка для визначення *k*: $5+3=k(-2-2)\to k=-2$.

Підставимо отримане значення k в рівняння пучка:

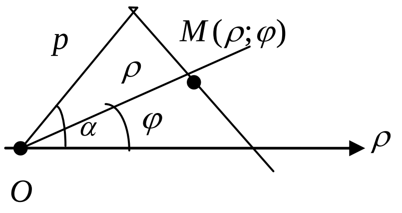
$y+3=-2(x-2)\to 2x+y-1=0$.

Відповідь: $2x+y-1=0$.

Задача 8. Скласти рівняння прямої у полярних координатах, якщо відомо, що вона проходить через точку $M\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$ і нахилена до полярної осі під кутом $\frac{2\pi}{3}$.

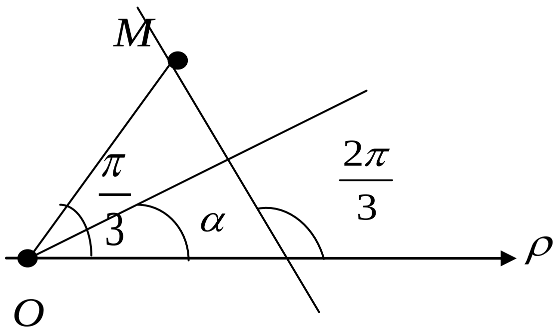
Розв'язання.

Рівняння прямої в полярних координатах має вигляд: $\rho\cos(\varphi-\alpha)=p$.



Тоді $\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{6}$.

$p=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$.



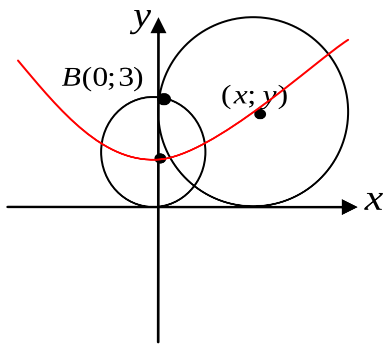
Отже рівняння шуканої прямої $\rho\cos(\varphi-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$.

Відповідь: $\rho\cos(\varphi-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$.

Задача 9. (обов'язкова) Знайти множину точок площини – центрів кіл, що дотикаються до осі абсцис та проходить через точку B(0;3), зробити рисунок.

Розв'язання. Шукане геометричне місце точок має таку властивість: відстань від центра кола до точки B дорівнює відстані від центра до осі абсцис і дорівнює радіусу кола. Нехай координати ценра кола (x, y), тоді $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=y$. Виконаємо дії:

$x^2+y^2-6y+9=y^2 \Rightarrow y=\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{2}$ - це парабола.



Відповідь: шукана множина точок – це парабола.