Лекція 7

Рівняння кривих

7.1. Лінія на площині. Способи задання

Нехай задана деяка площину, на якій визначено ПДСК. Нехай у цій площині задана деяка лінія L. Рівняння вигляду $F(x,y)=0$ визначає **пласку лінію** L, якщо цьому рівнянню задовольняють координати x та y будь-якої точки кривої L, та не задовольняють координати x та y жодної точки, що не належить лінії L. Сама лінія L є **геометричним місцем точок**, координати яких задовольняють рівняння $F(x,y)=0$ (звичайно ж, у заданій системі координат).

Якщо рівняння $F(x,y)=0$ у заданій системі координат є рівнянням лінії L, то це рівняння визначає лінію L. Можливий варіант, коли це рівняння або визначає образ, відмінний від того, що звичайно розуміють під терміном "лінія", (наприклад, $x^2+y^2=0$), або взагалі не визначає ніякого геометричного образу (наприклад, $x^2+y^2+13=0$).

Пласкі лінії поділяють на дві групи: **алгебраїчні і трансцендентні**.

Пласку лінію називають **алгебраїчною**, якщо функція $F(x,y)$ в лівій частині рівняння $F(x,y)=0$ є алгебричним поліномом, тобто її можна представити в вигляді:

$$F(x,y)=\sum_{k,l} a_{kl}\, x^k y^l$$

Будь-яку не алгебраїчну лінію називають **трансцендентною**.

Алгебраїчну лінію будемо називати лінією n*-го* порядку, якщо в деякій ПДСК функція $F(x,y)$ є алгебраїчним поліномом n*-ої* степені, тобто

$$\max_{k,l}(k+l)=n$$

Іншими словами, алгебраїчна лінія n*-го* порядку – це лінія, яка визначається в деякій ПДСК алгебраїчним рівнянням n*-ої* степені з двома невідомими.

Приклади*:*

$5x^5 - tg\,x + 3y = 0$ – трансцендентна;

$sin(x^2 + 2x - y^3) = 0$ – трансцендентна;

$3x^5 + 13x^3y^4 - 2y^3x + 2 = 0$ – алгебраїчна лінія 7-го порядку.

7.2. Способи задання лінії на площині

Лінію можна задати за допомогою неявної функції, або неявно.

Інший спосіб – явне задання лінії. Це можливо лише в тому випадку, коли рівняння $F(x,y) = 0$ однозначно розв'язується відносно однієї змінної x або y. В цьому випадку отримаємо рівняння виду:

$$y = f_1(x) \quad \text{або} \quad x = f_2(y).$$

Для аналітичного представлення лінії L часто буває зручно виражати змінні координати x та y точок цієї лінії за допомогою третьої допоміжної змінної (параметра) t:

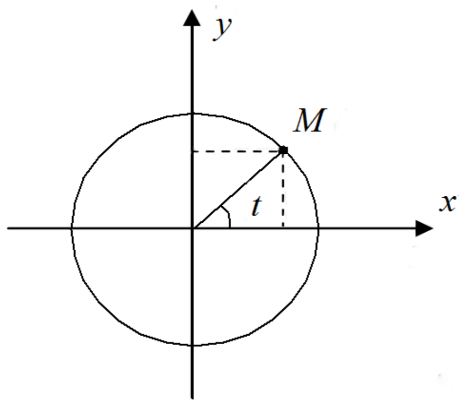
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad t \in T,$$

де функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ неперервні. Це третій спосіб задання лінії — **параметричний**.

Параметричне представлення лінії на площині природно виникає, якщо розглядати лінію як шлях, пройдений матеріальною точкою, яка неперервно рухається згідно певного закону.

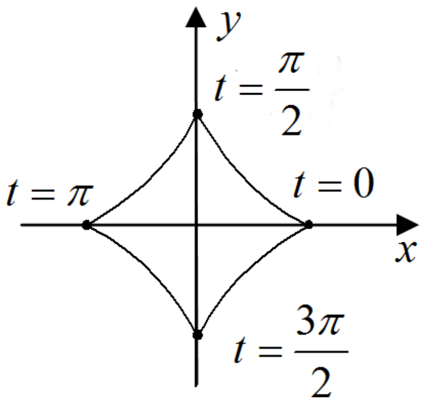
◄**Приклад 7.1.** Записати параметричні рівняння заданих кривих:

1) **Коло:** $x^2 + y^2 = R^2$.



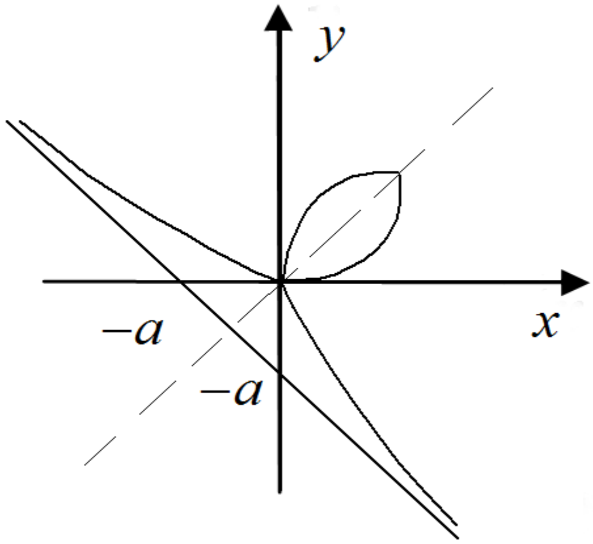
Нехай $M(x,y)$ –довільна точка, що лежить на колі, а t – кут між її радіус-вектором та віссю OX, який відраховується проти годинникової стрілки. Очевидно, що $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$, $t \in [0;\ 2\pi)$.

2) **Астроїда:** $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.



$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases},\ t \in [0;\ 2\pi).$$

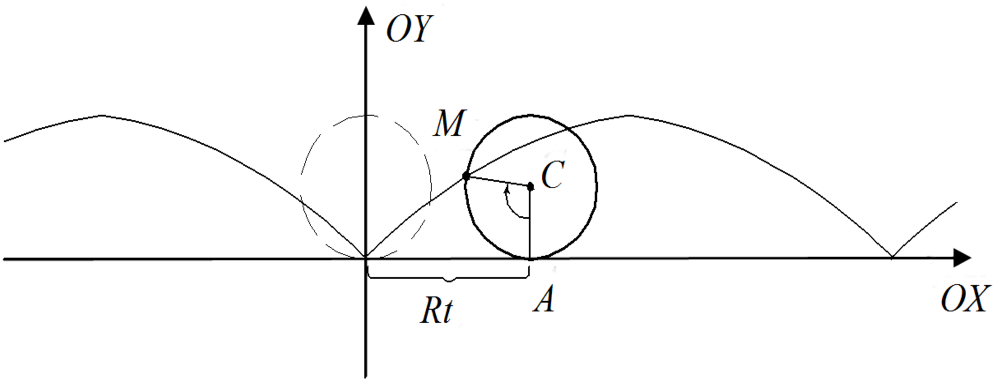
3) **Лист Декарта:** $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.



$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

4) Циклоїда.

Це, фактично, шлях, який описується однією з точок кола M, що котиться без ковзання по нерухомій прямій.



Нехай вісь OX – пряма, по якій котиться коло, точка O – одна з точок, в яких точка M виходить на вказану пряму, вісь OY спрямована так, щоб її додатня піввісь лежала по той бік OX, що і коло, яке котиться.

Фіксуймо довільне положення кола. Позначимо літерою C його центр, а літерою A – точку дотику з віссю OX. Нехай параметр t – кут, на який повернулося коло при переміщенні з положення з точкою дотику на початку координат в те положення, що розглядається. Оскільки ковзання немає, то

$OA = Rt$ (R – радіус кола). На основі визначення координат x, y та лінійних властивостей проекції отримуємо:

$$x = pr_{OX}\overrightarrow{OM} = pr_{OX}\overrightarrow{OA} + pr_{OX}\overrightarrow{AC} + pr_{OX}\overrightarrow{CM}$$

$$y = pr_{OY}\overrightarrow{OM} = pr_{OY}\overrightarrow{OA} + pr_{OY}\overrightarrow{AC} + pr_{OY}\overrightarrow{CM}$$

Враховуючи, що $\angle ACM = t + 2\pi k,\ k \in \square$, маємо

$$pr_{OX}\overrightarrow{OA} = Rt \qquad pr_{OX}\overrightarrow{AC} = 0 \qquad pr_{OX}\overrightarrow{CM} = -R\sin t$$

$$pr_{OY}\overrightarrow{OA} = 0 \qquad pr_{OY}\overrightarrow{AC} = R \qquad pr_{OY}\overrightarrow{CM} = -R\cos t.$$

Підставивши ці результати в попередній запис, отримаємо параметричне рівняння циклоїди:

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases} \qquad t \in \square$$

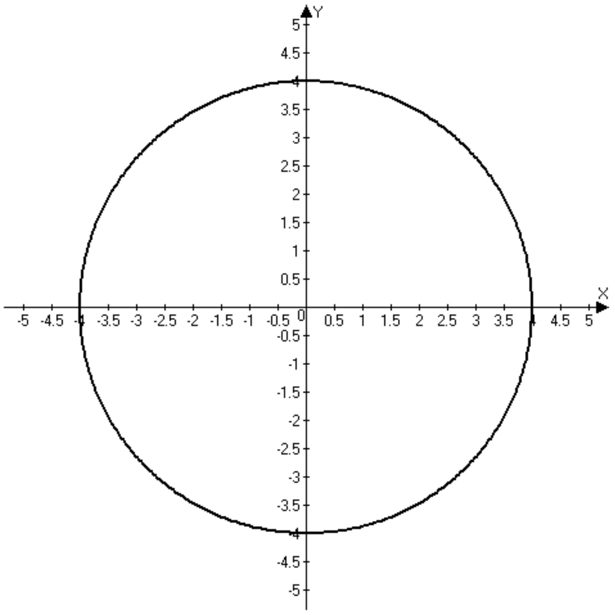
▶

7.3. Побудови лінії в полярній системі координат (ПСК)

З інтервалу зміни полярного кута φ візьмемо точки, у яких досить легко обчислити значення функції $\rho(\varphi)$, а потім з'єднаємо ці точки плавною лінією.

Приклад 7.2. Побудувати задані криві в ПСК:

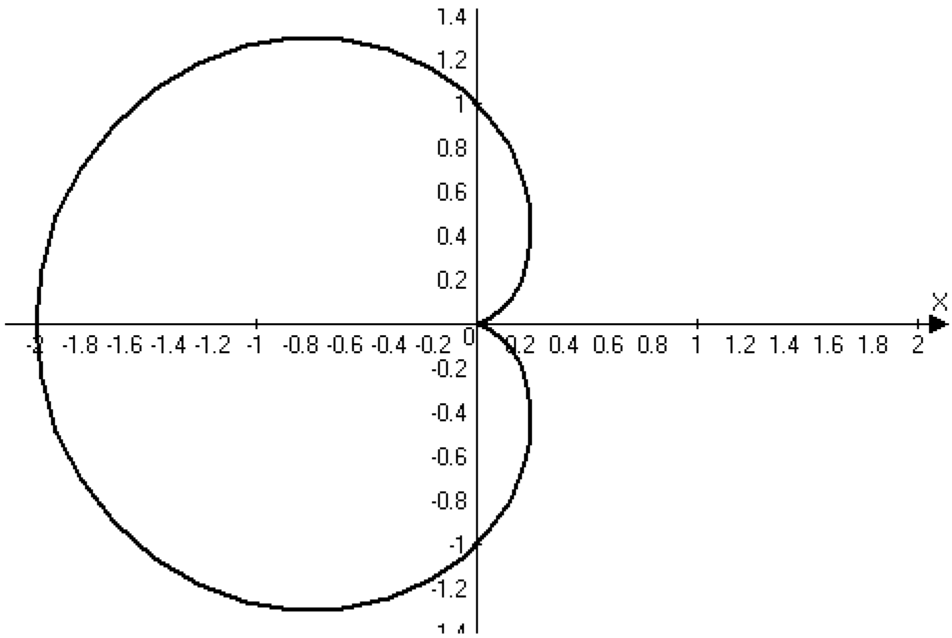
1) $\rho = 4$. Це означає, що для будь якого значення кута φ відстань $\rho(\varphi)$ залишається незмінною і такою, що дорівнює 4. При побудові кривих зручно поєднати декартову систему координат з полярною:



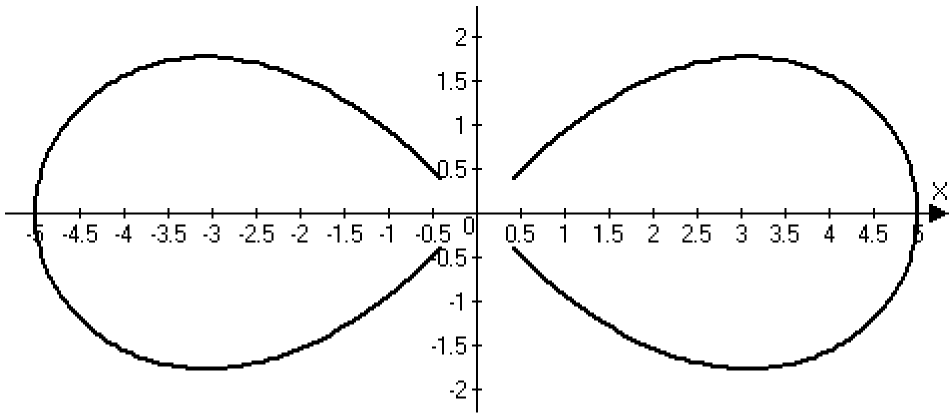
2) $\rho=\left(1-\cos\varphi\right)$. Для побудови кривої створимо табличку:

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
ρ	0	$1-\sqrt{3}/2$	$1-1/\sqrt{2}$	$1/2$	1

φ	π	$5\pi/6$	$3\pi/4$	$2\pi/3$
ρ	2	$1+\sqrt{3}/2$	$1+1/\sqrt{2}$	$3/2$



3) **Лемніската Бернуллі**:



$$\rho = a\sqrt{cos\,2\varphi}$$

$$cos\,2\varphi \geq 0 \;\Rightarrow\; \varphi \in \left[-\pi/4;\, \pi/4\right]$$

$$\varphi \in \left[3\pi/4;\, 5\pi/4\right]$$

Завдання для самостійної роботи

1. Записати рівняння лемніскати Бернуллі в ПДСК.
2. Побудувати наступні лінії, які задано в ПСК:

– $\rho = a\,sin\,3\varphi$

– $\rho = a\,cos\,\varphi + b\,sin\,\varphi$

– $\rho = \dfrac{2}{cos\,\varphi - sin\,\varphi}$

3. Намалювати на площині криву, що задана параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = sin\,t \\ y = sin^2 t \end{cases}.$$