# Екзаменаційний білет № 2

**I. Теоретична частина**

1. ***Розв'язок рівнянь методом хорд.***

## *Метод хорд (пропорційного поділу)*

Це більш швидкий спосіб знаходження кореня рівняння (1). Припустимо для визначеності, що

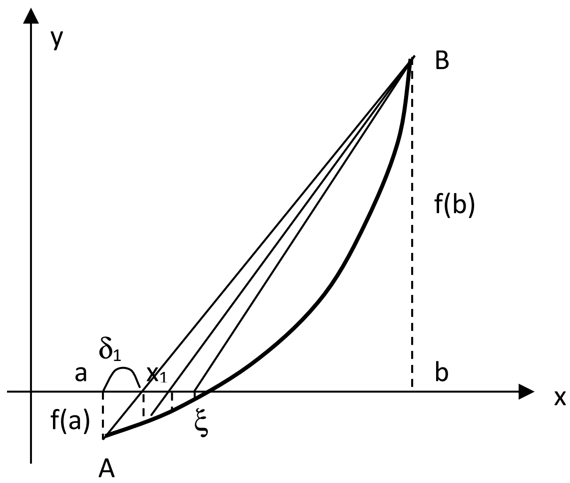
*f(a) < 0* і *f(b) > 0*. Замість того, щоб ділити відрізок навпіл, більш природно розділити його у відношенні *f(a)/f(b)*. Це дасть наближення значення кореня

$$x_1 = a + h_1, \qquad (3)$$

де

$$h_1 = \frac{-f(a)}{-f(a)+f(b)} \cdot (b-a) = -\frac{f(a)}{f(b)-f(a)} \cdot (b-a), \qquad (4).$$

Далі, застосовуючи цей прийом до того з відрізків $[a, x_1]$ або $[x_1, b]$ на кінцях якого *f(x)* має протилежні знаки, одержимо друге наближене кореня $x_2$ до точки $\zeta$.



Геометрично метод еквівалентний заміні кривої $y = f(x)$ хордою, що проходить через точки $A\ [a, f(a)]$ і $B[b, f(b)]$. Справді, рівнянням хорди AB є

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

звідси, поклавши $x = x_1$ і $y = 0$, отримаємо

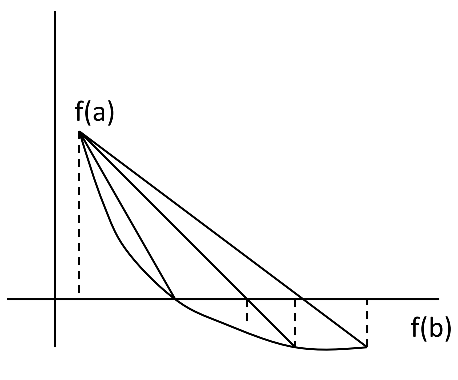
$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b-a)\,.$$

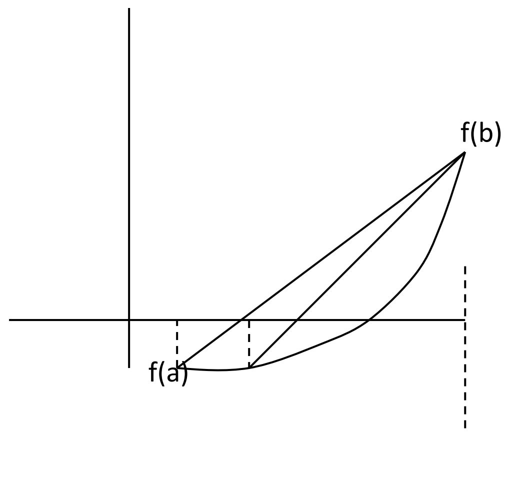
Остання функція еквівалентна виразам (3) і (4). Для доказу збіжності припустимо, що корінь відділений і друга похідна $f''(x)$ зберігає постійний знак на [a, b].

Нехай $f''(x) > 0$ при $a \le x \le b$, тобто крива опукла донизу і розташована нижче хорди AB. Можливі два випадки:

$f(a) > 0$ і

$f(a) < 0$



У першому випадку кінець $a$ нерухомий і послідовні наближення починаючи з $x_0 = b$, обчислювані за формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} \cdot (x_n - a), \qquad n=0, 1, 2, .... \qquad (5),$$

утворять обмежену монотонну спадну послідовність, причому

$$a < \xi < \ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_2 < x_1 < x_0$$

У другому випадку нерухомим є кінець $b$, а послідовні наближення починаючи з $x_0 = a$, обчислювані за формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n), \qquad n=0, 1, 2, .... \qquad (6)$$

утворять монотонну зростаючу послідовність, причому

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n < x_{n+1} < \ldots < \xi < b$$

Отже, можна зробити наступні висновки:

1) нерухомим є той кінець, для якого знак $f(x)$ збігається зі знаком $f''(x)$;

2) послідовні наближення $x_n$ лежать по той бік кореня ξ, де $f(x)$ має знак, протилежний знаку $f''(x)$.

В обох випадках кожне наступне наближення $x_{n+1}$ ближче до ξ, чим попереднє $x_n$. Нехай

$$\bar{\zeta} = \lim_{n\to\infty} x_n \quad (a \prec \bar{\xi} \prec b)$$

Ця границя існує, тому що послідовність $\{x_n\}$ обмежена й монотонна. Переходячи до границі в рівності (3), для першого випадку будемо мати:

$$\bar{\zeta} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f(\bar{\xi}) - f(a)}(\xi - a)$$

звідси $f(\bar{\xi}) = 0$. Оскільки за припущенням рівняння *f(x) = 0* має єдиний корінь в інтервалі [a, b], то $\bar{\xi} = \xi$, що й було потрібно довести.

Для оцінки точності скористаємося наступною теоремою.

*Теорема 2.*

Нехай ξ-точний, а $\bar{x}$ - наближений корінь рівняння *f(x) = 0*, розташовані на тому самому відрізку [a, b], причому $|f'(x)| \geq m_1 \geq 0$ при $a \leq x \leq b$ (зокрема за $m_1$ можна взяти мінімум модулю $f'(x)$ на інтервалі [a, b]). У такому випадку справедлива оцінка

$$|\bar{x} - \xi| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}$$

*Доказ.*

Застосовуючи теорему Лагранжа, маємо $f(\bar{x}) - f(\xi) = (\bar{x} - \xi) f'(c)$, де *c* належить проміжку між $\bar{x}$ і $\xi$ значення, тобто $c \in (a, b)$. Звідси, оскільки $f(\xi) = 0$ і $|f'(c)| \geq m_1$ одержимо

$$|f(\bar{x}) - f(\xi)| = |f(\bar{x})| \geq m_1 |\bar{x} - \xi|$$

отже $|\bar{x} - \xi| \leq \dfrac{f(\bar{x})}{m_1}$.

Використовуючи цю формулу, маємо

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1},$$

де $|f'(x)| \geq m_1$, при $a \leq x \leq b$.

## 2. Интерполяційні формули Гаусса.

Описание задачи. Пусть имеется $2n+1$ равноотстоящих узлов интерполирования

$$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = const \quad (i = -n, -(n-1), \ldots, n-1)$, и для функции $y = f(x)$ известны её значения в этих узлах

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 0, \pm 1, \ldots, \pm n).$$

Требуется построить полином $P(x)$ степени не выше $2n$ такой, что

$$P(x_i) = y_i \text{ при } i = 0, \pm 1, \ldots, \pm n.$$

Будем искать этот полином в виде

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+a_3(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + a_4(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$+a_5(x - x_{-2})(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$$

$$\ldots + a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)})\ldots(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)\ldots$$

$$\ldots(x - x_{n-1}) + a_{2n}(x - x_{-(n-1)})\ldots(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)\ldots$$

$$\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Вводя обобщённые степени, получим:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_{-1})^{[3]} +$$

$$+a_4(x - x_{-1})^{[4]} + \ldots + a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)})^{[2n-1]} + a_{2n}(x - x_{-(n-1)})^{[2n]}. \tag{1}$$

Учитывая, что $\Delta^k P(x_i) = \Delta^k y_i$ для всех соответствующих значений $i$ и $k$ получим

$a_{2n} = \dfrac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!\,h^{2n}}$, далее введя переменную $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ и сделав соответствующую замену в формуле (1), получим *первую интерполяционную формулу Гаусса*:

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, \tag{2}$$

где $x = x_0 + qh$ и $q^{[m]} = q(q-1)\ldots[q-(m-1)]$.

Первая интерполяционная формула Гаусса содержит центральные разности

$$\Delta y_0,\ \Delta^2 y_{-1},\ \Delta^3 y_{-1},\ \Delta^4 y_{-2},\ \Delta^5 y_{-2},\ \Delta^6 y_{-3}, \ldots$$

Аналогично можно получить *вторую интерполяционную формулу Гаусса*, содержащую центральные разности

$$\Delta y_{-1},\ \Delta^2 y_{-1},\ \Delta^3 y_{-2},\ \Delta^4 y_{-2},\ \Delta^5 y_{-3},\ \Delta^6 y_{-3}, \ldots$$

Вторая интерполяционная формула Гаусса имеет вид

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(q+2)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, \tag{3}$$

где $x = x_0 + qh$.

## II. Практична частина

За допомогою схеми єдиного поділу обчислити корені системи лінійних рівнянь

```
134x0 + 27x1 + 40x2 + 49x3 + 17x4  = 3044

86x0 + 249x1 + 107x2 + 50x3 + 3x4  = 5446
```

$$14x_0 + 13x_1 + 134x_2 + 86x_3 + 19x_4 = 3384$$

$$89x_0 + 9x_1 + 119x_2 + 245x_3 + 24x_4 = 6514$$

$$14x_0 + 43x_1 + 36x_2 + 102x_3 + 197x_4 = 6728$$