Екзаменаційний білет № 22

I. Теоретична частина

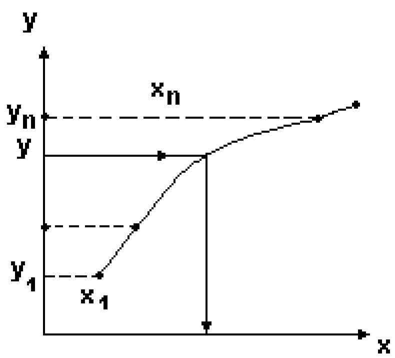
1. Зворотна інтерполяція.

11. Зворотна інтерполяція.

Зворотна інтерполяція полягає в тому, що за заданим значенням функції y треба визначити відповідні значення аргументу x. При розв'язанні задачі зворотної інтерполяції треба розрізняти два випадки: коли функція y є монотонною і коли вона не є такою. В першому випадку для розв'язання задачі зворотної інтерполяції можна скористатися наступним прийомом. Оскільки існує взаємнооднозначна відповідність між x_i та y_i,, виходячи з таблиці пар (x_i , y_i), побудуємо інтерполяційний багаточлен, наприклад, Лагранжа використовуючи y_i у якості незалежної змінної, тобто $L_n(y)$. Тоді потрібне значення y можна обчислити зі співвідношення

$$L_n(y) = 0$$

При цьому похибка визначення y обчислюється як залишковий член багаточлена $L_n(y)$.



При зворотній інтерполяції довільної функції (у тому числі й немонотонної) виписується той або інший інтерполяційний поліном $L_n(x)$ для функції $f(x)$, а потім з рівняння

$$Z_n (x) = \overline{y} ,$$

отримуються його корені, що і будуть наближеними значеннями $\overline{x}$.

Їх точність визначається співвідношенням:

$$\left|\bar{x}-\tilde{x}\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!m_1}\left|m_1(\tilde{x})\right|, \qquad (18)$$

$$M_{n+1} \ge \max\left|f^{(n+1)}(x)\right|, \qquad m_1 \le mib\left|f'(x)\right|.$$

Якщо задана точність не досягнута, варто підвищити ступінь полінома.

2. Побудова узагальненого многочлена для функції, що задана таблично.

4. Середньоквадратичне наближення функцій заданих за допомогою таблиці.

Розглянемо тепер випадок, коли функція $f(x)$ задана за допомогою таблиці, тобто парами

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n),$. Побудуємо поліном

$$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$$

При цьому коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_m$ повинні вибиратися таким чином, щоб сума квадратів різниць $P_m(x_i) - y_i$ була найменшою. Тобто,

$$\sum = \sum_{i=0}^{n} (a_0 x_i^m + a_1x_i^{m-1} + \ldots + a_m - y_i)^2$$

була найменшою. Для виконання цієї умови досить, щоб

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial a_0} = 0$$
$$\frac{\partial \Sigma}{\partial a_1} = 0$$
$$\ldots,$$
$$\frac{\partial \Sigma}{\partial a_m} = 0$$

що дає $(m+1)$ рівняння із $(m+1)$ невідомим, тобто нормальну систему. Наприклад, маємо функцію, задану за допомогою наступної таблиці

x_i	1	2	3	4
y_i	0	1	3	5

Побудуємо поліном першого ступеня

$$P_1(x) = a_0x + a_1.$$

Маємо нормальну систему:

$$\frac{\partial \sum_i (a_0x_i + a_1 - y_i)^2}{\partial a_0} = 0$$

$$\frac{\partial \sum_i (a_0x_i + a_1 - y_i)^2}{\partial a_1} = 0$$

Виконавши диференціювання, отримаємо:

$$2\sum_i (a_0x_i + a_1 - y_i)x_i = 0$$

$$2\sum_i (a_0x_i + a_1 - y_i) = 0$$

Або:

$$a_0\sum_i x_i^2 + a_1\sum_i x_i - \sum_i y_i x_i = 0$$

$$a_0\sum_i x_i + 4a_1 - \sum_i y_i = 0$$

Остаточно маємо:

$$30a_0 + 10a_1 - 31 = 0$$

$$10a_0 + 4a_1 - 9 = 0$$

Звідки

$$a_0 = 1{,}7;\ a_1 = -2;$$

Тоді

$$P_1(x) = 1{,}7x - 2;$$

II. Практична частина

За допомогою методу дотичних обчислити корінь рівняння

```
-x*x*x +10*cos(x) + 5 = 0
```

з точністю не гірше за 10^{-7}.