Ч _1_01_08

$\sqrt[3]{-i}$

представим число $z=-i$ *в тригонометрической форме*:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\text{где } r=\sqrt{\operatorname{Re}(z)^2+\operatorname{Im}(z)^2};\cos\varphi=\frac{\operatorname{Re}(z)}{r};\sin\varphi=\frac{\operatorname{Im}(z)}{r}$$

$$r=1$$

$$\begin{cases}\cos\varphi=0\\ \sin\varphi=-1\end{cases}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{2}$$

$$z=1\left(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi(k-1)}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi(k-1)}{n}\right),k=1,2,...,n$$

$$\sqrt[3]{-i}=1\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},k=1$$

$$\sqrt[3]{-i}=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i,k=2$$

$$\sqrt[3]{-i}=1\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},k=3$$

1_04_08

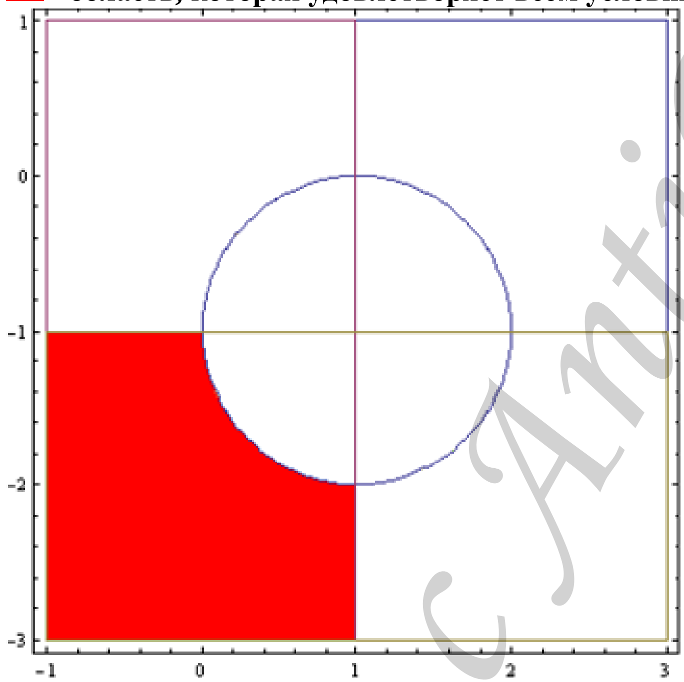
$|z-1+i|\ge 1, \operatorname{Re} z<1, \operatorname{Im} z\le -1$

На графике:

На горизонтальной оси отложена Re(z) – *реальная часть числа*.

На вертикальной оси отложена Im(z) – *мнимая часть числа*.

- область, которая удовлетворяет всем условиям (ответ)



$Ч\_1\_06\_08$

$v = e^x \cos y,\ f(0) = 1 + i$

$$Условия\ Коши - Римана: \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{-\partial V}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow U(x,y) = \int -e^x \sin y \, \mathrm{dx} + \varphi(y) = -e^x \sin y + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -e^x \cos y + \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-\partial U}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x \cos y = -\left(-e^x \cos y + \varphi'(y)\right) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C$$

$$U(x,y) = -e^x \sin y + C$$

$$f(z) = U(x,y) + i \cdot V(x,y) = -e^x \sin y + C + i\left(e^x \cos y\right) = ie^x \cos y + i^2 e^x \sin y + C =$$

$$= ie^x \left(\cos y + i \sin y\right) + C = ie^x \cdot e^{iy} + C = ie^{x+iy} + C = ie^z + C$$

$$f(0) = 1 + i \Rightarrow C = 1$$

$$f(z) = 1 + ie^z$$

$Ч\_1\_07\_08$

$$\int\limits_{ABC} z^3 e^{z^4}\,\mathrm{dz}$$

$ABC - ломаная, z_A = i, z_B = 1, z_C = 0$

$$AB:\begin{cases} x = t \\ y = 1 - y \end{cases} \Rightarrow z = x + iy = t + i(1-t), \mathrm{dz} = (1+i)\,\mathrm{dt}$$

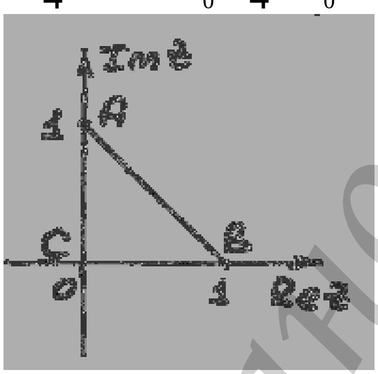
$$BC:\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = t, \mathrm{dz} = \mathrm{dt}$$

$$\int\limits_{ABC} z^3 e^{z^4}\,\mathrm{dz} = \int\limits_{AB} z^3 e^{z^4}\,\mathrm{dz} + \int\limits_{BC} z^3 e^{z^4}\,\mathrm{dz} =$$

$$= \int_0^1 \left(t + i(1-t)\right)^3 e^{\left(t+i(1-t)\right)^4} (1+i)\,\mathrm{dt} + \int_1^0 t^3 e^{t^4}\,\mathrm{dt} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 e^{\left(t+i(1-t)\right)^4} \left(4\left(t + i(1-t)\right)^3 (1+i)\,\mathrm{dt}\right) + \frac{1}{4}\int_1^0 e^{t^4}\left(4t^3\,\mathrm{dt}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} e^{\left(t+i(1-t)\right)^4}\Big|_0^1 + \frac{1}{4} e^{t^4}\Big|_0^1 = \frac{1-e}{4}$$



$Ч\_1\_08\_08$

$$\frac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}$$

Знаменатель данной функции обращается в нуль при $z_1=0, z_2=4, z_3=-8$

$$f(z)=\frac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}=\frac{4z-64}{z^2(z-4)(z+8)}$$

С центром в точке $z=0$ *можно построить три области, в которых данная функция аналитична*: $0<|z|<4, 4<|z|<8, |z|>8$

Разложим дробь на элементарные

$$\frac{4z-64}{z^2(z-4)(z+8)}=\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}+\frac{s}{z-4}+\frac{w}{z+8}=$$

$$=\frac{az(z-4)(z+8)+b(z-4)(z+8)+sz^2(z+8)+wz^2(z-4)}{z^2(z-4)(z+8)}$$

$$az(z-4)(z+8)+b(z-4)(z+8)+sz^2(z+8)+wz^2(z-4)=4z-64\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z=0:-32b=-64\\ z=4:192s=-48\\ z=-8:-768w=-96\\ z=-1:-27a-27b+9s-3w=-60\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2\\ s=-1/4\\ w=1/8\\ a=1/8\end{cases}$$

$$\frac{4z-64}{z^2(z-4)(z+8)}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{z+8}$$

1) $0<|z|<4$

$$\frac{4z-64}{z^2(z-4)(z+8)}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{z+8}=\frac{4z-64}{z^2(z-4)(z+8)}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1-z/4}+$$

$$+\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{1+z/8}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{16}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n+\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{8}\right)^n=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2^{n+2}+(-1)^n\right)z^n}{8^{n+2}}$$

2) $4<|z|<8$

$$\frac{4z-64}{z^2(z-4)(z+8)}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{4z}\cdot\frac{1}{1-4/z}+\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{1+z/8}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{4z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n+\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{8}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{8^{n+2}}$$

3) $|z|>8$

$$\frac{4z-64}{z^2(z-4)(z+8)}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{4z}\cdot\frac{1}{1-4/z}+\frac{1}{8z}\cdot\frac{1}{1+8/z}=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{4z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n+\frac{1}{8z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-8}{z}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{8z}+\frac{2}{z^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n8^{n-1}}{z^{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n8^{n-1}-4^{n-1}}{z^{n+1}}$$

Ч _1_ 09 _ 08

$\frac{z-1}{z(z+1)}, z_0 = -2-3i$

Фунция имеет две особые точки : $z_1 = 0, z_2 = -1$, *а центр разложения находится* z_0. *Расстояние от* z_0 *до* z_1 *равно* $\sqrt{13}$, *расстояние от* z_0 *до* z_2 *равно* $\sqrt{10}$.

Можно построить три сходящхся ряда Лорана по степеням $z - z_0$

1) *в круге* $|z - z_0| < \sqrt{10}$

2) *в кольце* $\sqrt{10} < |z - z_0| < \sqrt{13}$

3) *вне круга* $|z - z_0| > \sqrt{13}$

Разложим дробь на элементарные

$$\frac{z-1}{z(z+1)} = \frac{-1}{z-0} + \frac{2}{z+1}$$

1) $|z - z_0| < \sqrt{10}$

$$\frac{z-1}{z(z+1)} = \frac{-1}{-2-3i-0+z-(-2-3i)} + \frac{2}{-2-3i-z_2+z-(-2-3i)} = \frac{-1}{-2-3i-0}\frac{1}{1+\frac{z-(-2-3i)}{-2-3i-0}} +$$

$$+\frac{2}{-2-3i+1}\frac{1}{1+\frac{z-(-2-3i)}{-2-3i+1}} = \frac{1}{2+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2+3i}{2+3i}\right)^n + \frac{2}{-1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2+3i}{1+3i}\right)^n$$

2) $\sqrt{10} < |z - z_0| < \sqrt{13}$

$$\frac{z-1}{z(z+1)} = \frac{-1}{-2-3i-0+z-(-2-3i)} + \frac{2}{z-(-2-3i)-2-3i+1} = \frac{-1}{-2-3i-0}\frac{1}{1+\frac{z-(-2-3i)}{-2-3i-0}} +$$

$$+\frac{2}{z-(-2-3i)}\frac{1}{1+\frac{-2-3i+1}{z-(-2-3i)}} = \frac{1}{2+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2+3i}{2+3i}\right)^n + \frac{2}{z+2+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+3i}{z+2+3i}\right)^n$$

3) $|z - z_0| > \sqrt{13}$

$$\frac{z-1}{z(z+1)} = \frac{-1}{z-(-2-3i)-2-3i-0} + \frac{2}{z-(-2-3i)-2-3i+1} = \frac{-1}{z-(-2-3i)} \cdot \frac{1}{1+\frac{-2-3i-0}{z-(-2-3i)}} +$$

$$+\frac{2}{z-(-2-3i)}\frac{1}{1+\frac{-2-3i+1}{z-(-2-3i)}} = \frac{-1}{z+2+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+3i}{z+2+3i}\right)^n + \frac{2}{z+2+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+3i}{z+2+3i}\right)^n$$

$Ч\_1\_11\_08$

$$\frac{e^z-1}{\sin z - z + z^3/6}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{\sin z - z + z^3/6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{\cos z - 1 + z^2/2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{-\sin z + z}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{-\cos z+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{\sin z}=\infty$$

т.е. $z=0-$ *полюс*

Определим его порядок

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{\sin z - z + z^3/6}{e^z-1}=\frac{\left(z-z^3/3!+z^5/5!-\ldots\right)-z+z^3/6}{\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots\right)-1}=$$

$$=\frac{z^5/5!-\ldots}{\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots}=z^4\frac{1/5!-\ldots}{\frac{1}{1!}+\frac{z}{2!}+\ldots}$$

т.е. $z=0-$ *полюс 4го порядка*

$Ч\_1\_13\_08$

$$\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{2z|z-1|}{\sin z}\,dz$$

В контур интегрирования попадают 2 *особых точки*:

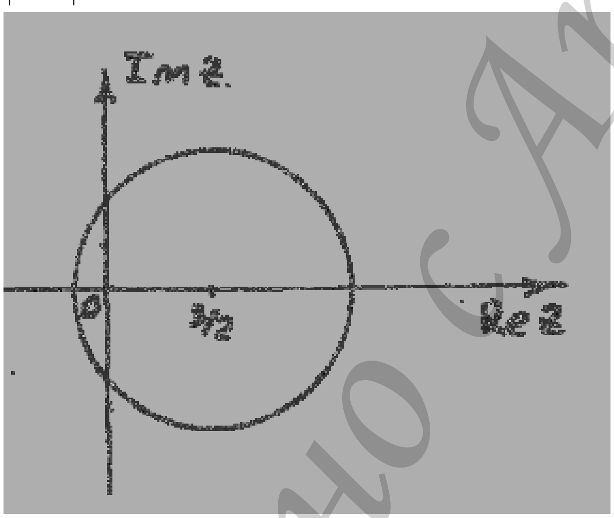
$z = 0 -$ *устранимая особая точка и* $z = \pi -$ *полюс* 1 *порядка*

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0$$

$$\operatorname*{res}_{z=\pi} f(z) = \lim_{z\to\pi} \frac{2z|z-1|(z-\pi)}{\sin z} = -\lim_{z\to\pi} \frac{2z|z-1|(z-\pi)}{\sin(z-\pi)} =$$

$$= -\lim_{z\to\pi}\left(\frac{z-\pi}{\sin(z-\pi)}2z|z-1|\right) = -2\pi|\pi-1| = 2\pi(1-\pi)$$

$$\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{2z|z-1|}{\sin z}\,dz = 2\pi i\left(0+2\pi(1-\pi)\right) = 4\pi^2(1-\pi)i$$



Ч _1_17_08

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{8-3\sqrt{7}\sin t}$$

полагаем: $z=e^{it}\Rightarrow \sin t=\frac{z^2-1}{2iz},\,dt=\frac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{8-3\sqrt{7}\sin t}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{8-3\sqrt{7}\frac{z^2-1}{2iz}}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\frac{-3\sqrt{7}}{2}z^2+8iz+\frac{3\sqrt{7}}{2}}=$$

$$=\frac{-2}{3\sqrt{7}}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z-3i/\sqrt{7}\right)\left(z-i\sqrt{7}/3\right)}$$

Особые точки подынтегральной функции:

$z=3i/\sqrt{7}$

$z=i\sqrt{7}/3$

В контур интегрирования попадет только

$z=i\sqrt{7}/3$ – *полюс* 1*го порядка*

$$\frac{-2}{3\sqrt{7}}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z-3i/\sqrt{7}\right)\left(z-i\sqrt{7}/3\right)}=\frac{-2}{3\sqrt{7}}2\pi i\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{7}/3}f(z)=$$

$$=\frac{-4\pi i}{3\sqrt{7}}\lim_{z\to i\sqrt{7}/3}\frac{1}{z-3i/\sqrt{7}}=\frac{-4\pi i}{3\sqrt{7}}\cdot\frac{3i\sqrt{7}}{2}=2\pi$$

$Ч\_1\_19\_08$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+9\right)} \mathrm{dx}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(\mathrm{z})=\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+9\right)}$$

Её особые точки : $\mathrm{z}_1=2i, z_2=-2i, z_3=3i, z_4=-3i$

В верхней полуплоскости лежат z_1 – *полюс* 2*го порядка и* z_3 – *полюс* 1*го порядка*

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(\mathrm{z})=\lim_{z\to 2i} \frac{d}{\mathrm{dz}} \frac{1}{(z+2i)^2\left(z^2+9\right)}=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\left(-2(z+2i)^{-3}\left(z^2+9\right)^{-1}+(z+2i)^{-2}\cdot(-1)\left(z^2+9\right)^{-2}\cdot 2z\right)=\frac{3i}{800}$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(\mathrm{z})=\lim_{z\to 3i} \frac{1}{\left(z^2+4\right)^2(z+3i)}=\frac{-i}{150}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+9\right)} \mathrm{dx}=2\pi i\cdot\left(\operatorname*{res}_{z=z_1} f(\mathrm{z})+\operatorname*{res}_{z=z_2} f(\mathrm{z})\right)=2\pi i\cdot\left(\frac{3i}{800}+\frac{-i}{150}\right)=\frac{7\pi}{1200}$$