/ТФКП/ 2007

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

ТФКП. Вариант 14.

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\dots,n-1;\quad z\neq 0$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$:

$$\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}}=\frac{\sqrt{3}}{4}-i\frac{1}{4}\qquad \sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{1}{4}$$

$$\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}}=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\qquad \sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}}=-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ответ: $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}=\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{4}-i\dfrac{1}{4};-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+i\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}+i\dfrac{\sqrt{3}}{4};-\dfrac{1}{4}-i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\cos(\pi/4-2i)$

Используем формулу косинуса разности:

$\cos(\pi/4-2i)=\cos(\pi/4)\cos(2i)+\sin(\pi/4)\sin(2i)$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$\cos(\pi/4)\cos(2i)+\sin(\pi/4)\sin(2i)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-2}-e^{2}}{2i}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}\right)$$

Ответ: $\cos(\pi/4-2i)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{e^{-2}+e^{2}}{2}\right)+i\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{e^{2}-e^{-2}}{2}\right)$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arcth}\left(\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}\right)$$

Функция Arcth является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arcth}\,z=-i\cdot\mathrm{Arcctg}\left(\frac{z}{i}\right)=-i\cdot\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{\frac{z}{i}-i}{\frac{z}{i}+i}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-1}$$

Подставим вместо z значение $\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}$:

$$\mathrm{Arcth}\left(\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}+1}{\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}-1}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{8+i3\sqrt{3}+7}{8+i3\sqrt{3}-7}=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{15+i3\sqrt{3}}{1+i3\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(3\frac{5+i\sqrt{3}}{1+i3\sqrt{3}}\right)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где z≠0, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),k=0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(3\frac{5+i\sqrt{3}}{1+i3\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}[\ln\left|3\frac{5+i\sqrt{3}}{1+i3\sqrt{3}}\right|+i(\arg\left(3\frac{5+i\sqrt{3}}{1+i3\sqrt{3}}\right)+2\pi k)]=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{i}{2}\left[\arg\left(3\frac{5+i\sqrt{3}}{1+i3\sqrt{3}}\right)+2\pi k\right]\approx\frac{1}{2}\cdot1{,}099+\frac{i}{2}\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$$

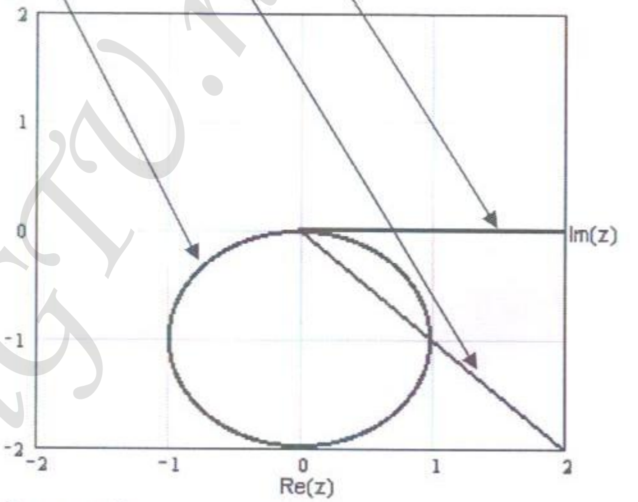
$k=0,\pm1,\pm2,...$

Ответ: $\mathrm{Arcth}\left(\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}\right)\approx\frac{1}{2}\cdot1{,}099+\frac{i}{2}\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right],k=0,\pm1,\pm2,...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z+i|>1,\quad -\pi/4\le\arg z<0$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z=-4\,\mathrm{sh}\,5t-i5\,\mathrm{ch}\,5t$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t)=-4\,\mathrm{sh}\,5t;\quad y(t)=-5\,\mathrm{ch}\,5t$

Выразим параметр t через x и y:

$$x=-4\,\mathrm{sh}\,5t\Rightarrow\mathrm{sh}\,5t=-\frac{x}{4}\Rightarrow t=-\frac{1}{5}\mathrm{arsh}\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$y=-5\,\mathrm{ch}\,5t\Rightarrow\mathrm{ch}\,5t=-\frac{y}{5}\Rightarrow t=\frac{1}{5}\mathrm{arch}\left(-\frac{y}{5}\right)=\frac{1}{5}\mathrm{arch}\left(\frac{y}{5}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$-\frac{1}{5}\mathrm{arsh}\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{1}{5}\mathrm{arch}\left(\frac{y}{5}\right)\Rightarrow\mathrm{arsh}\left(\frac{x}{4}\right)+\mathrm{arch}\left(\frac{y}{5}\right)=0$$

Ответ: $\mathrm{arsh}\left(\frac{x}{4}\right)+\mathrm{arch}\left(\frac{y}{5}\right)=0$

Задача 6

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной действительной части u(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$u = x^2 - y^2 - 2x + 1$$

$$f(0) = 1$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = 2x + 2iy - 2 = 2z - 2$$

Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int (2z-2)dz = z^2 - 2z + C$$

Определим константу C:

$$f(0) = 0^2 - 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = z^2 - 2z + 1$$

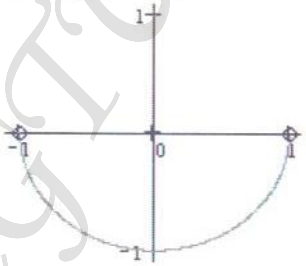
Ответ: $f(z) = z^2 - 2z + 1$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int_L (\operatorname{ch} z + z)dz;\ L: \{|z| = 1; \operatorname{Im} z \le 0\}$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = \operatorname{ch}(x+iy) + x + iy = \frac{1}{2}\left(e^{x+iy} + e^{-x-iy}\right) + x + iy =$$

$$= \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}\cos y + x}_{u(x,y)} + i[\underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}\sin y + y}_{v(x,y)}]$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}e^{-x}\left(e^{2x}\cos y - \cos y + 2e^x\right); \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}e^{-x}\left(e^{2x}\cos y - \cos y + 2e^x\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}e^{-x}\sin y(e^{2x}+1); \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}e^{-x}\sin y(e^{2x}+1); \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются, следовательно, функция является аналитической. Тогда результат от пути интегрирования не зависит:

$$\int_L (\operatorname{ch} z + z)dz = \int_{-1}^{1}\left(\frac{e^z}{2} + \frac{e^{-z}}{2} + z\right)dz = \left.\frac{e^z}{2} - \frac{e^{-z}}{2} + \frac{z^2}{2}\right|_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}$$

Ответ: $\int_L (\operatorname{ch} z + z)dz = e - \frac{1}{e}$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}=\frac{7(z-28)}{z^2(z+14)(z-7)}=\frac{7}{z^2}\cdot\frac{z-28}{(z+14)(z-7)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

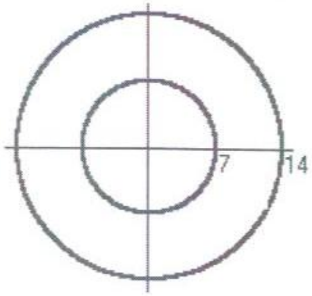
$$\frac{z-28}{(z+14)(z-7)}=\frac{A}{z+14}+\frac{B}{z-7}=\frac{Az-7A+Bz+14B}{(z+14)(z-7)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=2;B=-1\}\Rightarrow\frac{z-28}{(z+14)(z-7)}=\frac{2}{z+14}-\frac{1}{z-7}.$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{7}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+14}-\frac{1}{z-7}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=7; z=-14$



Рассмотрим область $|z|<7$:

$$f(z)=\frac{7}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+14}-\frac{1}{z-7}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{14}}+\frac{1}{1-\frac{z}{7}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{14}+\frac{z^2}{196}-\frac{z^3}{2744}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{7}+\frac{z^2}{49}+\frac{z^3}{343}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{14z}+\frac{1}{196}-\frac{z}{2744}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{7z}+\frac{1}{49}+\frac{z}{343}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $7<|z|<14$:

$$f(z)=\frac{7}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+14}-\frac{1}{z-7}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{14}}-\frac{7}{z(1-\frac{7}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{14}+\frac{z^2}{196}-\frac{z^3}{2744}+\ldots\right)+\left(\frac{7}{z}+\frac{49}{z^2}+\frac{343}{z^3}+\frac{2401}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{14z}+\frac{1}{196}-\frac{z}{2744}+\ldots\right)+\left(\frac{7}{z^3}+\frac{49}{z^4}+\frac{343}{z^5}+\frac{2401}{z^6}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>14$:

$$f(z)=\frac{7}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+14}-\frac{1}{z-7}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{14}{z(1+\frac{14}{z})}-\frac{7}{z(1-\frac{7}{z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{14}{z}-\frac{196}{z^2}+\frac{2744}{z^3}-\frac{38416}{z^4}+\ldots\right)+\left(\frac{7}{z}+\frac{49}{z^2}+\frac{343}{z^3}+\frac{2401}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{14}{z^3}-\frac{196}{z^4}+\frac{2744}{z^5}-\frac{38416}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{7}{z^3}+\frac{49}{z^4}+\frac{343}{z^5}+\frac{2401}{z^6}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<7: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{14z}+\frac{1}{196}-\frac{z}{2744}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{7z}+\frac{1}{49}+\frac{z}{343}+\ldots\right)$$

$$7<|z|<14: f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{14z}+\frac{1}{196}-\frac{z}{2744}+\ldots\right)+\left(\frac{7}{z^3}+\frac{49}{z^4}+\frac{343}{z^5}+\frac{2401}{z^6}+\ldots\right)$$

$$|z|>14: f(z)=\left(\frac{14}{z^3}-\frac{196}{z^4}+\frac{2744}{z^5}-\frac{38416}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{7}{z^3}+\frac{49}{z^4}+\frac{343}{z^5}+\frac{2401}{z^6}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$.

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1},z_0=1-2i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right)$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{(z-z_0)+1-3i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1-3i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{(z-z_0)+1-i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1-i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1-3i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(1-i)^{n+1}}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^n}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(1-3i)^{n+1}}+\frac{1}{(1-i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=\frac{(-1)^n}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(1-3i)^{n+1}}+\frac{1}{(1-i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

ТФКП. Вариант 14.

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=\sin\frac{z+i}{z-i},z_0=i$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z-i;\sin\frac{z+i}{z-i}=\sin\frac{z'+2i}{z'}=\sin\left(1+\frac{2i}{z'}\right)=\sin1\cos\frac{2i}{z'}+\cos1\sin\frac{2i}{z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=\sin1\cos\frac{2i}{z'}+\cos1\sin\frac{2i}{z'}=\left(1+\frac{2^2}{2!z'^2}+\frac{2^4}{4!z'^4}+\frac{2^6}{6!z'^6}+...\right)\sin1+$$

$$+\left(\frac{2i}{3z'}+\frac{2^3 i}{3!z'^3}+\frac{2^5 i}{5!z'^5}+\frac{2^7 i}{7!z'^7}+...\right)\cos1=\left(\sin1+\frac{2^2\sin1}{2!z'^2}+\frac{2^4\sin1}{4!z'^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{2^6\sin1}{6!z'^6}+...\right)+\left(\frac{2i\cos1}{z'}+\frac{2^3 i\cos5}{3!z'^3}+\frac{2^5 i\cos1}{5!z'^5}+\frac{2^7 i\cos1}{7!z'^7}+...\right)=$$

$$=\sin1+\frac{2i\cos1}{z'}+\frac{2^2\sin1}{2!z'^2}+\frac{2^3 i\cos1}{3!z'^3}+\frac{2^4\sin1}{4!z'^4}+\frac{2^5 i\cos1}{5!z'^5}+...$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$:

$$f(z)=\sin1+\frac{2i\cos1}{z-i}+\frac{2^2\sin1}{2!(z-i)^2}+\frac{2^3 i\cos1}{3!(z-i)^3}+\frac{2^4\sin1}{4!(z-i)^4}+$$

$$+\frac{2^5 i\cos1}{5!(z-i)^5}+..$$

Ответ:

$$f(z)=\sin1+\frac{2i\cos1}{z-i}+\frac{2^2\sin1}{2!(z-i)^2}+\frac{2^3 i\cos1}{3!(z-i)^3}+\frac{2^4\sin1}{4!(z-i)^4}+$$

$$+\frac{2^5 i\cos1}{5!(z-i)^5}+..$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z)=\frac{\cos 3z-1}{\sin z-z+z^3/6}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{\cos 3z-1}{\sin z-z+z^3/6}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{array}{l} g(z)=\cos 3z-1; \\ h(z)=\sin z-z+z^3/6; \end{array}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g'(z)=-3\sin 3z; g'(0)=-3\sin 0=0$$

$$g''(z)=-9\cos 3z; g'(0)=-9\cos 0=-9$$

$$h'(z)=\cos(z)-1+z^2/2; h'(0)=\cos 0-1=0$$

$$h''(z)=-\sin(z)+z; h''(0)=-\sin 0+0=0;$$

$$h'''(z)=-\cos(z)+1; h'''(0)=-\cos 0+1=0;$$

$$h^{IV}(z)=\sin(z); h^{IV}(0)=\sin 0=0;$$

$$h^{V}(z)=\cos(z); h^{V}(0)=\cos 0=1;$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g(z) и h(z). В данном случае, это 5 – 2 = 3.

Ответ: Точка z = 0 является полюсом 3-го порядка для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z)=\frac{\sin 3z-3\sin z}{z(\sin z-z)}$$

Изолированной особой точкой является z = 0. Запишем данную функцию в виде отношения g(z) и h(z):

$$f(z)=\frac{\sin 3z-3\sin z}{z(\sin z-z)};\quad \begin{array}{l} g(z)=\sin 3z-3\sin z; \\ h(z)=z(\sin z-z); \end{array}$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0:

$$g(0)=0;$$

$$g'(z)=3\cos 3z-3\cos z; g'(0)=0;$$

$$g''(z)=-9\sin 3z+3\sin z; g''(0)=0;$$

$$g'''(z)=-27\cos 3z+3\cos z; g'''(0)\neq 0;$$

$$h(0)=0;$$

$$h'(z)=\sin z-z+z(\cos z-1); h'(0)=0;$$

$$h''(z)=2\cos z-2-z\sin z; h''(0)=0;$$

$$h'''(z)=-3\sin z-z\cos z; h'''(0)=0$$

$$h^{IV}(z)=-4\cos z+z\sin z; h^{IV}(0)\neq 0$$

Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это 4 – 3 = 1.

Ответ: Точка z = 0 для данной функции является полюсом 1-го порядка.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-2|=3} \underbrace{\frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}}_{f(z)}dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z=\pi$

$z=-\pi$

Точка $z=-\pi$ не входит в область, ограниченную данным контуром, поэтому не рассматривается.

Точка $z_1=\pi$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z)=\lim_{z\to\pi}[f(z)(z-\pi)]=\lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)(\cos^2 z+1)}{z^2-\pi^2}=$$

$$=\lim_{z\to\pi}\frac{\cos^2 z+1}{z+\pi}=\frac{2}{2\pi}=\frac{1}{\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{k}\operatorname{res}_{z_i} f(z)=2\pi i\cdot\frac{1}{\pi}=2i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}dz=2i$

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{e^{2z}-z}{z^2}}_{f(z)}dz$$

У этой функции одна особая точка: $z=0$. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить ее тип:

$$\frac{e^{2z}-z}{z^2}=\frac{-z+\left(1+2z+\frac{4z^2}{2!}+\frac{8z^3}{3!}+\frac{16z^4}{4!}+\ldots\right)}{z^2}=$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{4}{2!}+\frac{8z}{3!}+\frac{16z^2}{4!}+\ldots$$

Правильная часть получившегося ряда содержит бесконечное число членов, из чего следует, что это – полюс. Порядок полюса равен порядку старшего члена главной части. Таким образом, $z=0$ – это полюс 2-го порядка и вычет находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[f(z)z^2]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(e^{2z}-z\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(2e^{2z}-1\right)=2-1=1$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2}dz=2\pi i\cdot 1=2\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2}dz=2\pi i$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{\operatorname{ch}4z-8z^2-1}{z^4\operatorname{sh}(8z/3)}}_{f(z)}dz$$

Особые точки этой функции z = 3ik/8. Однако в контур попадает только z = 0. Определим тип этой особой точки:

$$f(z)=\frac{\operatorname{ch}4z-8z^2-1}{z^4\operatorname{sh}(8z/3)}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{array}{l} g(z)=\operatorname{ch}4z-8z^2-1\\ h(z)=z^4\operatorname{sh}(8z/3)\end{array}$$

Определим порядки производных, ненулевых при z = 0. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что z = 0 представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to0}[f(z)z]=\lim_{z\to0}\left(\frac{\operatorname{ch}4z-8z^2-1}{z^3\operatorname{sh}(8z/3)}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to0}\left(\frac{4\operatorname{sh}4z-16z}{3z^2\operatorname{sh}(8z/3)+\frac{8}{3}z^3\operatorname{ch}(8z/3)}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to0}\left(\frac{16\operatorname{ch}4z-16}{(6z+\frac{64}{9}z^3)\operatorname{sh}(8z/3)+16z^2\operatorname{ch}(8z/3)}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to0}\left(\frac{64\operatorname{sh}4z}{(6+64z^2)\operatorname{sh}(8z/3)+(48z+\frac{512}{27}z^3)\operatorname{ch}(8z/3)}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to0}\left(\frac{256\operatorname{ch}4z}{(64+\frac{2048}{9}z^2)\operatorname{ch}(8z/3)+(256z+\frac{4096}{81}z^3)\operatorname{sh}(8z/3)}\right)=\frac{256}{64}=4$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{ch}4z-8z^2-1}{z^4\operatorname{sh}(8z/3)}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot4=8\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{ch}4z-8z^2-1}{z^4\operatorname{sh}(8z/3)}dz=8\pi i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-2|=2}\left(z\operatorname{ch}\frac{3}{z-2}+\frac{2\cos\frac{\pi z}{3}}{(z-3)^2(z-5)}\right)dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-2|=2}\underbrace{z\operatorname{ch}\frac{3}{z-2}}_{f_1(z)}dz+\oint\limits_{|z-2|=2}\underbrace{\frac{2\cos\frac{\pi z}{3}}{(z-3)^2(z-5)}}_{f_2(z)}dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint\limits_{|z-2|=2}z\operatorname{ch}\frac{3}{z-2}dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left\{\begin{array}{l}t=z-2\\ z=t+2\end{array}\right\}\Rightarrow z\operatorname{ch}\frac{3}{z-2}=(t+2)\operatorname{ch}\frac{3}{t}$$

Единственной особой точкой этой функции является t=0. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t+2)\operatorname{ch}\frac{3}{t}=(t+2)\left(1+\frac{3^2}{2!t^2}+\frac{3^4}{4!t^4}+\frac{3^6}{6!t^6}+\frac{3^8}{8!t^8}+\ldots\right)=$$

$$=\left(t+\frac{3^2}{2!t}+\frac{3^4}{4!t^3}+\frac{3^6}{6!t^5}+\ldots\right)+\left(2+\frac{2\cdot3^2}{2!t^2}+\frac{2\cdot3^4}{4!t^4}+\frac{2\cdot3^6}{6!t^6}+\ldots\right)=$$

$$=t+2+\frac{3^2}{2!t}+\frac{2\cdot3^2}{2!t^2}+\frac{3^4}{4!t^3}+\frac{2\cdot3^4}{4!t^4}+\frac{3^6}{6!t^5}+\frac{2\cdot3^6}{6!t^6}+\frac{3^8}{8!t^7}+\ldots$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов, из чего следует, что t=0 является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+2)\operatorname{ch}\frac{3}{t}\right]=C_{-1}=\frac{3^2}{2!}=\frac{9}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-2|=2} z\,\mathrm{ch}\frac{3}{z-2}dz = \oint\limits_{|t|=2}(t+2)\mathrm{ch}\frac{3}{t}dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+2)\mathrm{ch}\frac{3}{t}\right] =$$

$$= 2\pi i\cdot\left(\frac{9}{2}\right) = 9\pi i$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint\limits_{|z-2|=2}\frac{2\cos\frac{\pi z}{3}}{(z-3)^2(z-5)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: z=3 и z=5. При этом точка z=5 не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка z=3 является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=3} f_2(z) = \lim_{z\to3}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-3)^2\cdot 2\cos\frac{\pi z}{3}}{(z-3)^2(z-5)}\right] = \lim_{z\to3}\frac{d}{dz}\left[\frac{2\cos\frac{\pi z}{3}}{(z-5)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to3}\left[-\frac{2\pi}{3(z-5)}\sin\left(\frac{\pi z}{3}\right) - \frac{2}{(z-5)^2}\cos\left(\frac{\pi z}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-2|=2}\frac{2\cos\frac{\pi z}{3}}{(z-3)^2(z-5)}dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=3} f_2(z) = 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-2|=2}\left(z\,\mathrm{ch}\frac{3}{z-2} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{3}}{(z-3)^2(z-5)}\right)dz = \oint\limits_{|z-2|=2} z\,\mathrm{ch}\frac{3}{z-2} +$$

$$+ \oint\limits_{|z-2|=2}\frac{2\cos\frac{\pi z}{3}}{(z-3)^2(z-5)}dz = 9\pi i + \pi i = 10\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-2|=2}\left(z\,\mathrm{ch}\frac{3}{z-2} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{3}}{(z-3)^2(z-5)}\right)dz = 10\pi i$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-\sqrt{21}\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-\sqrt{21}\sin t} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{5-\frac{\sqrt{21}}{2i}(z-\frac{1}{z})} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{5iz-\frac{\sqrt{21}}{2}(z^2-1)} =$$

$$= \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{10iz-\sqrt{21}(z^2-1)} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{-\sqrt{21}(z-i\sqrt{21}/7)(z-i\sqrt{21}/3)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z = i\sqrt{21}/7;\quad z = i\sqrt{21}/3;$

Точка $i\sqrt{21}/3$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $i\sqrt{21}/7$ является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{21}/7} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{21}/7}[f(z)(z-i\sqrt{21}/7)] =$$

$$= \lim_{z\to i\sqrt{21}/7}\frac{2}{-\sqrt{21}(z-i\sqrt{21}/3)} = \frac{2}{-\sqrt{21}(i\sqrt{21}/7-i\sqrt{21}/3)} = -\frac{i}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{-\sqrt{21}(z-i\sqrt{21}/7)(z-i\sqrt{21}/3)} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i\cdot(-\frac{i}{2}) = \pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-\sqrt{21}\sin t} = \pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{it};\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\cos t)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{(\sqrt{6}+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{i(z\sqrt{6}+\frac{1}{2}(z^2+1))^2} = \oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i\left[(z+\sqrt{6}+\sqrt{5})(z+\sqrt{6}-\sqrt{5})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$$z=-\sqrt{6}+\sqrt{5};\quad z=-\sqrt{6}-\sqrt{5};$$

Точка $z=-\sqrt{6}-\sqrt{5}$ не попадает в область, огра́ниченную контуром интегрирования.

Точка $z=-\sqrt{6}+\sqrt{5}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-\sqrt{6}+\sqrt{5}} f(z) = \lim_{z\to-\sqrt{6}+\sqrt{5}} \frac{d}{dz}[f(z)(z-\sqrt{5}+\sqrt{6})^2] =$$

$$= \lim_{z\to-\sqrt{6}+\sqrt{5}} \frac{d}{dz} \frac{4z}{i\left[(z+\sqrt{5}+\sqrt{6})\right]^2} = \frac{4}{i} \lim_{z\to-\sqrt{6}+\sqrt{5}} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z+\sqrt{5}+\sqrt{6})^2} =$$

$$= \frac{4}{i} \lim_{z\to-\sqrt{6}+\sqrt{5}} \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}-z}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}+z)^3} = \frac{4}{i}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{5}}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{5})^3} = \frac{4}{i}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{(2\sqrt{5})^3} = \frac{\sqrt{6}}{5\sqrt{5}i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i\left[(z+\sqrt{6}+\sqrt{5})(z+\sqrt{6}-\sqrt{5})\right]^2} = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{5\sqrt{5}i}\right) = \frac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{5}}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\cos t)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{5}}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2}dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_m \operatorname*{res}_{z_m} R(z)$$

сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2}{(z^2+5)^2}dz$$

Особые точки:

$$z = i\sqrt{5}\quad (\operatorname{Im} z>0);\quad z=-i\sqrt{5}\quad (\operatorname{Im} z<0)$$

Точка $z=i\sqrt{5}$ является полюсом второго порядка и вычет в ней вычисляется следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=i\sqrt{5}} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{5}} \frac{d}{dz}[f(z)(z-i\sqrt{5})^2] = \lim_{z\to i\sqrt{5}} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+i\sqrt{5})^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to i\sqrt{5}} \frac{2\sqrt{5}iz}{(z+i\sqrt{5})^3} = \frac{1}{i4\sqrt{5}}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2}dx = 2\pi i \frac{1}{i4\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\lambda x dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_{m}\operatorname*{rez}_{z_m}R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$x^2+2x+2=0\Rightarrow z_{1,2}=-1\pm i$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Из этого следует:

$$z_m=\{-1+i\}$$

Эта особая точка является простым полюсом. Найдем в ней вычет:

$$\operatorname*{rez}_{z=-1+i}R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to-1+i}\frac{(z+1)(z+1-i)}{z^2+2z+2}e^{2iz}=\lim_{z\to-1+i}\frac{z+1}{z+1+i}e^{2iz}=$$

$$=\frac{-1+i+1}{-1+i+1+i}e^{2i(-1+i)}=\frac{i}{2i}e^{2i(-1+i)}=\frac{1}{2}e^{-2}[\cos(-2)+i\sin(-2)]$$

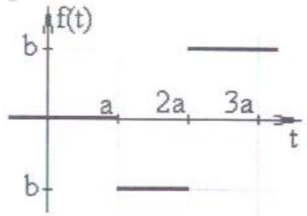
Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx=\operatorname{Im}\left\{2\pi i\sum_{m}\operatorname*{rez}_{z_m}R(z)e^{i\lambda z}\right\}=\pi e^{-2}\cos 2$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx=\pi e^{-2}\cos 2$

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)=\begin{cases}0, & 0<t<a\\ -1, & a<t<2a\\ 1, & 2a<t\end{cases}$$

$$f(t)=-1\cdot\eta(t-a)+2\cdot\eta(t-2a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=-\frac{1}{p}e^{-ap}+\frac{2}{p}e^{-2ap}$$

Ответ: $F(p)=-\frac{1}{p}e^{-ap}+\frac{2}{p}e^{-2ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}=\frac{A}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^2+4p+5}=$$

$$=\frac{Ap^2+4Ap+5A+Bp^2+Bp+Cp+C}{(p+1)(p^2+4p+5)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(4A+B+C)p+(5A+C)}{(p+1)(p^2+4p+5)}$$

Решив линейную систему уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\4A+B+C=3\\5A+C=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1/2\\B=1/2\\C=9/2\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4p+5}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{p^2+4p+5}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4p+5}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{p^2+4p+5}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{(p+2)^2+1}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+1}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1}\to$$

$$\to-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t+\frac{7}{2}\cdot e^{-2t}\sin t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t+\frac{7}{2}\cdot e^{-2t}\sin$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$2y''+3y'+y=3e^t$$
$$y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$2p^2Y(p)-2py(0)-2y'(0)+3pY(p)-3y(0)+Y(p)=\frac{3}{p-1}$$

$$2p^2Y(p)-2+3pY(p)+Y(p)=\frac{3}{p-1}$$

$$(2p^2+3p+1)Y(p)=(p+1)(2p+1)Y(p)=\frac{3}{p-1}+2=\frac{3+2p-2}{p-1}=\frac{2p+1}{p-1}$$

$$Y(p)=\frac{2p+1}{(p-1)(p+1)(2p+1)}=\frac{1}{(p-1)(p+1)}=\frac{1}{p^2-1}$$

Найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{1}{p^2-1}\Rightarrow y(t)=\operatorname{sh}t$$

Ответ: $y(t)=\operatorname{sh}t$

Задача 25

Материальная точка массы m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат с силой F=kx, пропорциональной расстоянию. На точку действует сила сопротивления среды R=rv, пропорциональная скорости v. При t=0 расстояние точки от начала координат x_0, а скорость v_0. Найти закон движения x=x(t) материальной точки.

$k = 4m,\ r = 3m,\ x_0 = 1м,\ v_0 = 1м/с.$

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = kx - rv$$

$$\ddot{x}m - r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 1$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m - 3m\dot{x} + 4mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 4x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) - 3pX(p) + 3x(0) + 4X(p) = 0$$

$$(p^2 - 3p + 4)X(p) - p + 2 = 0$$

$$X(p) = \frac{p-2}{p^2-3p+4} = \frac{p-2}{(p-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}} = \frac{p-\frac{3}{2}}{(p-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}} - \frac{1}{\sqrt{7}}\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(p-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = e^{3t/2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{7}}e^{3t/2}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$$

Ответ: $x(t) = e^{3t/2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{7}}e^{3t/2}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dot{x} = 3x + 5y + 2\\ \dot{y} = 3x + y + 1\end{cases}$$

$$x(0) = 0,\quad y(0) = 2.$$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases}pX(p) - x(0) = 3X(p) + 5Y(p) + 2/p\\ pY(p) - y(0) = 3X(p) + Y(p) + 1/p\end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases}pX(p) = 3X(p) + 5Y(p) + 2/p\\ pY(p) - 2 = 3X(p) + Y(p) + 1/p\end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) - 2 = 3X(p) + Y(p) + 1/p \Rightarrow X(p) = \frac{pY(p) - 2 - Y(p) - 1/p}{3}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p\frac{pY(p) - 2 - Y(p) - 1/p}{3} = 3\frac{pY(p) - 2 - Y(p) - 1/p}{3} + 5Y(p) + 2/p$$

$$Y(p) = \frac{2p - 5 + 3/p}{p^2 - 4p - 12}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{2p-5+3/p}{p^2-4p-12} = \frac{2p-5+3/p}{(p-2)^2-16} + \frac{1}{4p} - \frac{1}{4p} = \frac{\frac{9}{4}p - 6}{(p-2)^2-16} - \frac{1}{4p} =$$

$$= \frac{9}{4}\frac{p-2}{(p-2)^2-16} - \frac{3}{8i}\frac{4i}{(p-2)^2-16} - \frac{1}{4p} \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = \tfrac{9}{4}e^{2t}\cos 4it + \tfrac{3i}{8}e^{2t}\sin 4it - \tfrac{1}{4} = \tfrac{9}{4}e^{2t}\mathrm{ch}4t - \tfrac{3}{8}e^{2t}\mathrm{sh}4t - \tfrac{1}{4}$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = 3x + y + 1 \Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{3}(\dot{y} - y - 1) = \tfrac{1}{3}(3e^{2t}\mathrm{ch}4t + \tfrac{33}{4}e^{2t}\mathrm{sh}4t -$$

$$-\tfrac{9}{4}e^{2t}\mathrm{ch}4t + \tfrac{3}{8}e^{2t}\mathrm{sh}4t + \tfrac{1}{4} - 1) = \tfrac{1}{4}e^{2t}\mathrm{ch}4t + \tfrac{23}{8}e^{2t}\mathrm{sh}4t - \tfrac{1}{4}$$

Ответ:

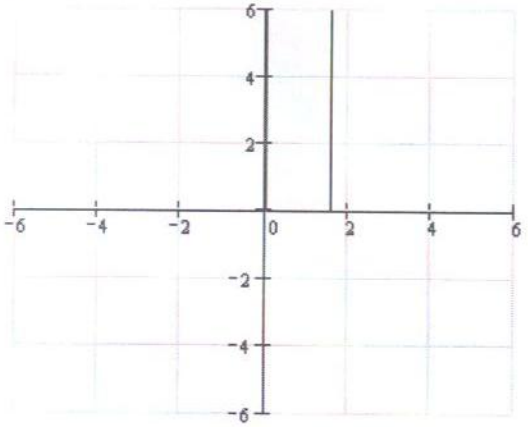
$$x(t) = \tfrac{1}{4}e^{2t}\mathrm{ch}4t + \tfrac{23}{8}e^{2t}\mathrm{sh}4t - \tfrac{1}{4}$$

$$y(t) = \tfrac{9}{4}e^{2t}\mathrm{ch}4t - \tfrac{3}{8}e^{2t}\mathrm{sh}4t - \tfrac{1}{4}$$

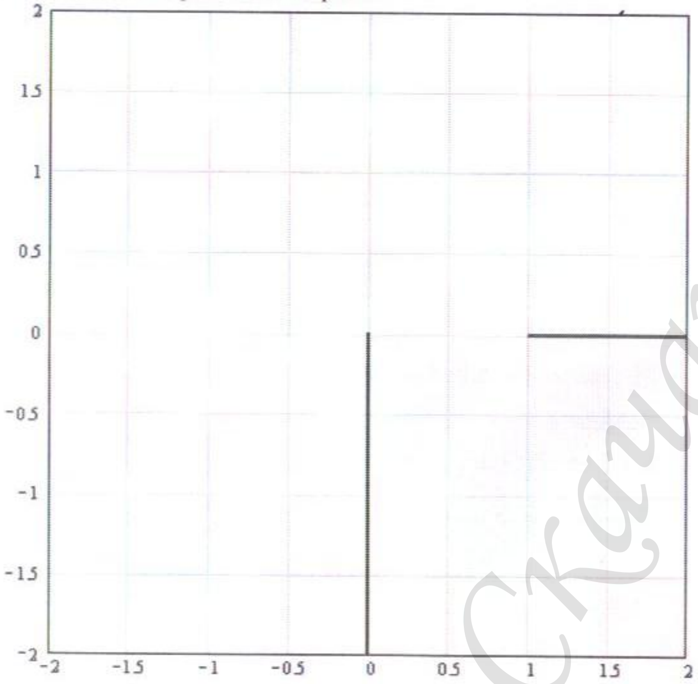
Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции w = f(z) .

w = cos(z); полуполоса 0<x<π/2, y>0.



Каждая из вертикальных линий в полуполосе преобразуется в кривую, исходящую из точки (cos x ; 0) и лежащую в нижнем правом квадранте. Таким образом отображением полуполосы является нижний правый квадрант:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\ldots, n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$$z = x + iy \qquad e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz} \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z - i}{z + i}$$

Аналитические функции

Функция w=f(z) называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция w=f(z) называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке z∈G.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$