Екзаменаційний білет № 7

I. Теоретична частина

1. Розв’язок рівнянь методом простої итерації.

7. Метод ітерації (послідовних наближень)

Сутність методу полягає в наступному. Нехай є рівняння (1). Замінимо його еквівалентним

$$x = \varphi(x) \qquad (11)$$

Виберемо будь-яким способом початкове наближення x_0 й підставимо його в праву частину (11). Тоді отримаємо число

$$x_1 = \varphi(x_0) \qquad (12)$$

Підставимо x_1 в (12) замість x_0 і отримаємо

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

Повторюючи цей процес будемо мати послідовність чисел

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, \dots \qquad (13)$$

Якщо ця послідовність збіжна, тобто існує границя

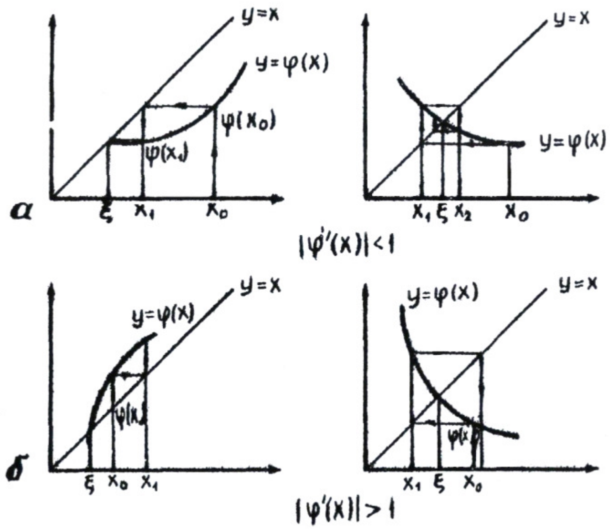
$$S = \lim_{n\to\infty} x_n ,$$

тоді, переходячи до границі в (14), і припустивши, що $\varphi(x)$ є безперервна, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) \text{ або } S = y(\zeta) \qquad (14)$$

Якщо границя (14) існує, вона є точним коренем рівняння (11) і, як наслідок, рівняння (1).

Геометрична інтерпретація методу ітерації має вигляд



На мал. 1 в околі ξ крива полога тобто $|\varphi'(x)| < 1$ й процес сходиться. На мал. 3 $|\varphi'(x)| > 1$ і процес розходиться. З'ясуємо достатню умову збіжності.

Теорема 3.

Нехай функція $\varphi(x)$ визначена й диференційована на відрізку $[a,b]$, причому всього її значення $\varphi(x) \in [a,b]$. Тоді, якщо існує правильний дріб q така, що

$$|\varphi'(x)| \le q < 1 \qquad (15)$$

при $a < x < b$, тоді:

1) процес ітерації

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \qquad n = 1,2,... \qquad (16)$$

сходиться незалежно від початкового наближення $x_0 \in [a,b]$;

2) граничне значення

$$S = \lim_{n\to\infty} x_n$$

є точним коренем рівняння (11).

Доказ.

Розглянемо два послідовних наближення

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \text{ і } x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)$$

Застосовуючи теорему Лагранжа, маємо $x_{n+1} - x_n = (x_n - x_{n-1})\varphi'(\bar{x}_n)$, де $\bar{x}_n \in (x_{n-1}, x_n)$. Отже, на підставі (15) одержимо

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}| \qquad (16)$$

Звідси при $n = 1,2,...$ послідовноно одержуємо

$$|x_2 - x_1| \leq q|x_1 - x_0|;$$

$$|x_3 - x_2| \leq q|x_2 - x_1| \leq q^2|x_1 - x_0|; \qquad (17)$$

$$\ldots$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n|x_1 - x_0|.$$

Розглянемо ряд

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) + ... \qquad (18)$$

для якого наші послідовні наближення x_n є $(n+1)$-мі частковими сумами, тобто

$$x_n = S_{n+1}.$$

У силу (17) члени ряду (18) за абсолютною величиною менше ніж відповідні члени геометричної прогресії зі знаменником $q < 1$, тому ряд (18) сходиться і притому абсолютно. Отже, існує

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \zeta ,$$

причому, очевидно, $\zeta \in [a,b]$

Переходячи до границі в рівності (15) у силу безперервності $\varphi(x)$ одержимо:

$$S = \varphi(\xi) \qquad (19)$$

т. о. S є корінь (15). Іншого кореня на $[a,b]$ (15) не має. Дійсно, якщо

$$\bar{\xi} = \varphi(\bar{\xi}) \qquad (20),$$

то з (19) і (20) одержимо

$$\bar{\xi} - \xi = \varphi(\bar{\xi}) - \varphi(\xi)$$

і, отже,

$$(\bar{\xi} - \xi)[1 - \varphi'(c)] = 0$$

де $c \in [\bar{\xi}, S]$, отже $\xi = \bar{\xi}$.

Зауваження. Метод ітерації збігається при будь-якому виборі x_0 з $[a,b]$. Завдяки цьому він є таким, що самовиправляється, тобто окрема помилка в обчисленнях, що не виводить за межі $[a,b]$

, не вплине на кінцевий результат. Кратність помилки округлення в ітераційних методах не накопичується від ітерації до ітерації.

Оцінка наближення

Отже, нехай $\left|\varphi'(x)\right| \le q < 1$ для $x \in [a,b]$.

Якщо ітерації виконувати доти, поки

$$\left|x_k - x_{k-1}\right| \le \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon ,$$

то гарантується виконання нерівності

$$\left|\xi - x_n\right| < \varepsilon .$$

2. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності.

3.3. Метод Рунге-Кутта 4-го порядку точності. У цьому методі для переходу від точки ($x_к$, y_k) до точки (x_{k+1}, y_{k+1}) спочатку обчислюють

$$k_1 = hf(x_k, y_k);$$

$$k_2 = hf(x_k + h/2, y_k + k_1/2);$$

$$k_3 = hf(x_k + h/2, y_k + k_2/2);$$

$$k_4 = hf(x_k + h, y_k + k_3).$$

Потім приймають

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \quad x_{k+1} = x_k + h. \qquad (5)$$

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad k = 0,1,2,...,$$

Перехід від точки (x_{k+1}, y_{k+1}) до точки (x_{k+2}, y_{k+2}) виконується аналогічно. Локальна похибка методу становить $O(h^5)$, а глобальна - $O(h^4)$.

Оцінка похибки. Важко дати загальну аналітичну оцінку похибки методів Рунге-Кутта залежно від кроку h. Для методів четвертого порядку точності обчислюється відхилення

$$\theta = \frac{|k_2 - k_3|}{|k_1 - k_2|}.$$

Крок h вважається прийнятним, якщо величина не перевищує кількох сотих (до 0,05).

II. Практична частина

За допомогою метод прогону обчислити корені системи лінійних рівнянь

```
107x0 + 78x1 + 0x2 + 0x3 + 0x4  = 2706

19x0 + 11x1 + 82x2 + 0x3 + 0x4  = 862

0x0 + 20x1 + 59x2 + 20x3 + 0x4  = 915

0x0 + 0x1 + 37x2 + 72x3 + 96x4  = 3809

0x0 + 0x1 + 0x2 + 109x3 + 223x4  = 7195
```