ИНФОРМАЦИОННО-КОНСУЛЬТАЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

ТФКП

теория функций комплексного переменного

Консультационное пособие для школьников и студентов в решении задач с примерами решённых задач из задачника автора Чудесенко В.Ф.

Вариант 7

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz$$

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz$$

Москва 2003

/ТФКП/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Теория функций комплексного переменного». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория функций комплексного переменного» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений. Задачи, не представляющие особого интереса, были исключены из предложенных решений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра
- Векторный анализ (элементы теории поля)

ТФКП. Вариант 7.

Задача 1

Найти все значения корня: $\sqrt[3]{-1}$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$$\varphi=\arg(z);\quad k=0,1,\ldots,n-1;\quad z\neq 0$$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[3]{-1}$:

$$\sqrt[3]{-1}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt[3]{-1}=-1$$

$$\sqrt[3]{-1}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\sqrt[3]{-1}=\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};-1;\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Задача 2

Представить в алгебраической форме: $\sin(\pi/3+i)$

Используем формулу синуса суммы:

$$\sin(\pi/3+i)=\sin(\pi/3)\cos(i)+\cos(\pi/3)\sin(i)$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми аргументами в виде показательных:

$$\sin(\pi/3)\cos(i)+\cos(\pi/3)\sin(i)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}\right)+i\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\right)$$

Ответ: $\sin(\pi/3+i)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}\right)+i\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\right)$

Задача 3

Представить в алгебраической форме:

$$\mathrm{Arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Функция Arth является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\mathrm{Arth}\,z = i\cdot \mathrm{Arctg}\left(\frac{z}{i}\right) = i\cdot\left(-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+i\frac{z}{i}}{1-i\frac{z}{i}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}$$

Подставим вместо z значение $\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}$:

$$\mathrm{Arcth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{3+3+i2\sqrt{3}}{3-3-i2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{6+i2\sqrt{3}}{-i2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{3}+i}{-i} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(i\sqrt{3}-1\right)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k = 0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(i\sqrt{3}-1\right) = \frac{1}{2}[\ln\left|i\sqrt{3}-1\right| + i(\arg\left(i\sqrt{3}-1\right)+2\pi k)] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{i}{2}\left[\arg\left(i\sqrt{3}-1\right)+2\pi k\right] \approx \frac{1}{2}\cdot 0{,}693 + \frac{i}{2}\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$$

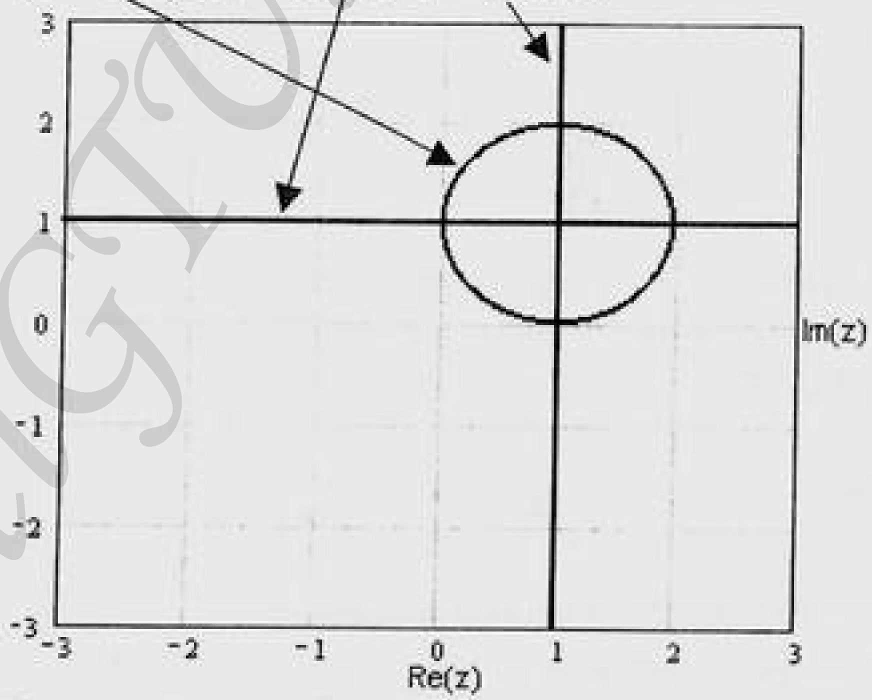
$k = 0,\pm1,\pm2,...$

Ответ: $\mathrm{Arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right) \approx \frac{1}{2}\cdot 0{,}693 + \frac{i}{2}\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right], k = 0,\pm1,\pm2,...$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z-1-i|\le 1,\quad \mathrm{Im}\,z > 1,\quad \mathrm{Re}\,z \ge 1$



Задача 5

Определить вид кривой:

$z = 3\,\mathrm{cosec}\,t + i3\,\mathrm{ctg}\,t$

Уравнение вида z = z(t) = x(t) + iy(t) определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид x = x(t), y = y(t). В нашем случае:

$x(t) = 3\,\mathrm{cosec}\,t;\quad y(t) = 3\,\mathrm{ctg}\,t$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = 3\,\mathrm{cosec}\,t = \frac{3}{\sin t} \Rightarrow \sin t = \frac{3}{x} \Rightarrow t = \arcsin\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$y = 3\,\mathrm{ctg}\,t \Rightarrow \mathrm{ctg}\,t = \frac{y}{3} \Rightarrow t = \mathrm{arcctg}\left(\frac{y}{3}\right)$$

Получим уравнение кривой в виде F(x,y) = 0:

$$\arcsin\left(\frac{3}{x}\right) = \mathrm{arcctg}\left(\frac{y}{3}\right) \Rightarrow \arcsin\left(\frac{3}{x}\right) - \mathrm{arcctg}\left(\frac{y}{3}\right) = 0$$

Ответ: $\arcsin\left(\frac{3}{x}\right) - \mathrm{arcctg}\left(\frac{y}{3}\right) = 0$

ТФКП. Вариант 7.

Задача 6

Проверить, что v является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной мнимой части v(x,y) и значению $f(z_0)$:

$$v = e^{-y}\sin x + y$$

$$f(0) = 1$$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдем производную аналитической функции:

$$f'(z) = f'(x+iy) = -e^{-y}\sin x + 1 + ie^{-y}\cos x =$$

$$= e^{-y}(i\cos x - \sin x) + 1 = ie^{-y}(\cos x + i\sin x) + 1 =$$

$$= ie^{ix-y} + 1 = ie^{i(x+iy)} + 1 = ie^{iz} + 1$$

Т.к. производная существует, то v является мнимой частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f(z), можно найти саму функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int (ie^{iz} + 1)dz = e^{iz} + z + C$$

Определим константу С:

$$f(0) = e^0 + 0 + C = 1 \Rightarrow C = 0$$

Итак, аналитическая функция f(z) выглядит следующим образом:

$$f(z) = e^{iz} + z$$

Ответ: $f(z) = e^{iz} + z$

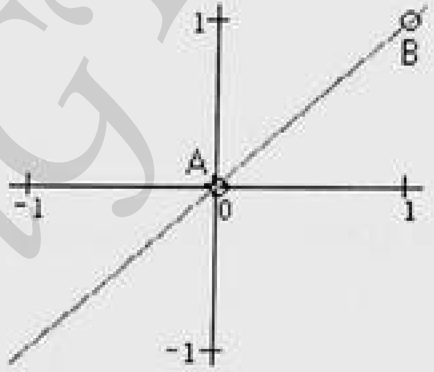
ТФКП. Вариант 7.

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int\limits_{AB} \bar{z}^2 dz;\ AB - \text{отрезок прямой}, z_A = 0, z_B = 1 + i$$

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:



Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции f(x,y), где z = x + iy:

$$f(z) = \bar{z}^2 = (x - iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i\underbrace{(-2xy)}_{v(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial v}{\partial y} = -2x; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \frac{\partial v}{\partial x} = -2y; \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана не выполняются, следовательно, функция не является аналитической. Тогда представим кривую, по которой идет интегрирование, в параметрическом виде:

$$z(t) = x(t) + iy(t); x(t) = t; y(t) = t; z_A = z(0); z_B = z(1)$$

Тогда найти исходный интеграл несложно:

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int_0^1 f[z(t)]z'(t)dt = \int_0^1 (t - it)^2(1+i)dt =$$

$$= \int_0^1 (-2it^2)(1+i)dt = \int_0^1 (2t^2 - 2it^2)dt =$$

$$= \frac{2t^3}{3} - \frac{2it^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - i\frac{2}{3}$$

Ответ: $\int\limits_{AB} f(z)dz = \frac{2}{3} - i\frac{2}{3}$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z.

$$f(z)=\frac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}=\frac{7z-98}{z(z+7)(2z-7)}=\frac{7}{2z}\cdot\frac{z-14}{(z+7)(z-3{,}5)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

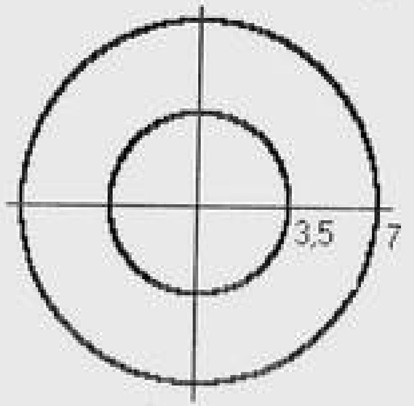
$$\frac{z-14}{(z+7)(z-3{,}5)}=\frac{A}{z+7}+\frac{B}{z-3{,}5}=\frac{Az-3{,}5A+Bz+7B}{(z+7)(z-3{,}5)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A=2;B=-1\}\Rightarrow\frac{z-14}{(z+7)(z-3{,}5)}=\frac{2}{z+7}-\frac{1}{z-3{,}5}$$

Отсюда f(z) примет следующий вид:

$$f(z)=\frac{7}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+7}-\frac{1}{z-3{,}5}\right)$$

Особые точки: $z=0; z=3{,}5; z=-7$



Рассмотрим область $|z|<3{,}5$:

$$f(z)=\frac{7}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+7}-\frac{1}{z-3{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{7}}+\frac{1}{1-\frac{2z}{7}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{7}+\frac{z^2}{49}-\frac{z^3}{343}+\ldots\right)+\left(1+\frac{2z}{7}+\frac{4z^2}{49}+\frac{8z^3}{343}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{7}+\frac{z}{49}-\frac{z^2}{343}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{7}+\frac{4z}{49}+\frac{8z^2}{343}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $3{,}5<|z|<7$:

$$f(z)=\frac{7}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+7}-\frac{1}{z-3{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{z}{7}}-\frac{7}{2z(1-\frac{7}{2z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{7}+\frac{z^2}{49}-\frac{z^3}{343}+\ldots\right)+\left(\frac{7}{2z}+\frac{49}{4z^2}+\frac{343}{8z^3}+\frac{2401}{16z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{7}+\frac{z}{49}-\frac{z^2}{343}+\ldots\right)+\left(\frac{7}{2z^2}+\frac{49}{4z^3}+\frac{343}{8z^4}+\frac{2401}{16z^5}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>7$:

$$f(z)=\frac{7}{2z}\cdot\left(\frac{2}{z+7}-\frac{1}{z-3{,}5}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{7}{z(1+\frac{7}{z})}-\frac{7}{2z(1-\frac{7}{2z})}\right]=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left[\left(\frac{7}{z}-\frac{49}{z^2}+\frac{343}{z^3}-\frac{2401}{z^4}+\ldots\right)+\left(\frac{7}{2z}+\frac{49}{4z^2}+\frac{343}{8z^3}+\frac{2401}{16z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{7}{z^2}-\frac{49}{z^3}+\frac{343}{z^4}-\frac{2401}{z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{7}{2z^2}+\frac{49}{4z^3}+\frac{343}{8z^4}+\frac{2401}{16z^5}+\ldots\right)$$

Ответ:

$$|z|<3{,}5: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{7}+\frac{z}{49}-\frac{z^2}{343}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{7}+\frac{4z}{49}+\frac{8z^2}{343}+\ldots\right)$$

$$3.5<|z|<7: f(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{7}+\frac{z}{49}-\frac{z^2}{343}+\ldots\right)+\left(\frac{7}{2z^2}+\frac{49}{4z^3}+\frac{343}{8z^4}+\frac{2401}{16z^5}+\ldots\right)$$

$$|z|>7: f(z)=\left(\frac{7}{z^2}-\frac{49}{z^3}+\frac{343}{z^4}-\frac{2401}{z^5}+\ldots\right)+\left(\frac{7}{2z^2}+\frac{49}{4z^3}+\frac{343}{8z^4}+\frac{2401}{16z^5}+\ldots\right)$$

Задача 9

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$.

$$f(z)=\frac{z-1}{z(z+1)},\ z_0=-1+2i$$

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z-1}{z(z+1)}=\frac{2}{z+1}-\frac{1}{z}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{2}{z+1}=2\cdot\frac{1}{z+1}=2\cdot\frac{1}{(z-z_0)+2i}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-z_0)-1+2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2i-1)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z)=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(2i-1)^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(2i)^{n+1}}-\frac{1}{(2i-1)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{(2i)^{n+1}}-\frac{1}{(2i-1)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

$$f(z)=\sin\frac{3z-i}{3z+i},\ z_0=-\frac{i}{3}$$

Перейдем к новой переменной $z'=z-z_0$.

$$z'=z+\frac{i}{3};\sin\frac{3z-i}{3z+i}=\sin\frac{3z'-2i}{3z'}=\sin\left(1-\frac{2i}{3z'}\right)=\sin1\cos\frac{2i}{3z'}-\cos1\sin\frac{2i}{3z'}=f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z'_0=0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z')=\sin1\cos\frac{2i}{3z'}-\cos1\sin\frac{2i}{3z'}=\left(1+\frac{2^2}{3^2 2!z'^2}+\frac{2^4}{3^4 4!z'^4}+\frac{2^6}{3^6 6!z'^6}+\ldots\right)\sin1-$$

$$-\left(\frac{2i}{3z'}+\frac{2^3 i}{3^3 3!z'^3}+\frac{2^5 i}{3^5 5!z'^5}+\frac{2^7 i}{3^7 7!z'^7}+\ldots\right)\cos1=\left(\sin1+\frac{2^2\sin1}{3^2 2!z'^2}+\frac{2^4\sin1}{3^4 4!z'^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{2^6\sin1}{3^6 6!z'^6}+\ldots\right)-\left(\frac{2i\cos1}{3z'}+\frac{2^3 i\cos5}{3^3 3!z'^3}+\frac{2^5 i\cos1}{3^5 5!z'^5}+\frac{2^7 i\cos1}{3^7 7!z'^7}+\ldots\right)=$$

$$=\sin1-\frac{2i\cos1}{3z'}+\frac{2^2\sin1}{3^2 2!z'^2}-\frac{2^3 i\cos1}{3^3 3!z'^3}+\frac{2^4\sin1}{3^4 4!z'^4}-\frac{2^5 i\cos1}{3^5 5!z'^5}+\ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=-i/3$:

$$f(z)=\sin1-\frac{2i\cos1}{3(z+\frac{1}{3})}+\frac{2^2\sin1}{3^2 2!(z+\frac{1}{3})^2}-\frac{2^3 i\cos1}{3^3 3!(z+\frac{1}{3})^3}+\frac{2^4\sin1}{3^4 4!(z+\frac{1}{3})^4}-$$

$$-\frac{2^5 i\cos1}{3^5 5!(z+\frac{1}{3})^5}+\ldots$$

Ответ:

$$f(z)=\sin1-\frac{2i\cos1}{3(z+\frac{1}{3})}+\frac{2^2\sin1}{3^2 2!(z+\frac{1}{3})^2}-\frac{2^3 i\cos1}{3^3 3!(z+\frac{1}{3})^3}+\frac{2^4\sin1}{3^4 4!(z+\frac{1}{3})^4}-$$

$$-\frac{2^5 i\cos1}{3^5 5!(z+\frac{1}{3})^5}+\ldots$$

Задача 11

Определить тип особой точки z = 0 для данной функции:

$$f(z) = z\sin\left(\frac{6}{z^2}\right)$$

Тип особой точки для этой функции следует находить, применяя разложение в ряд Лорана в окрестности точки z=0:

$$f(z) = z\sin\left(\frac{6}{z^2}\right) = z\left(\frac{6}{z^2} - \frac{6^3}{3!z^6} + \frac{6^5}{5!z^{10}} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{6}{z} - \frac{6^3}{3!z^5} + \frac{6^5}{5!z^9} - \ldots$$

Рассмотрим получившийся ряд и выделим главную и правильную части ряда Лорана:

$$f(z) = \underbrace{0}_{\text{правильная часть}} + \underbrace{\frac{6}{z} - \frac{6^3}{3!z^5} + \frac{6^5}{5!z^9} - \ldots}_{\text{главная часть}}$$

Поскольку главная часть содержит бесконечное число членов, то точка z = 0 для заданной функции f(z) является существенной особой точкой.

Ответ: Точка z = 0 является существенно особой точкой для заданной функции.

Задача 12

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = \frac{(z+\pi)\sin(\pi z/2)}{z\sin^2 z}$$

Эта функция не существует при $z = \pi k$ ($k \in Z$). Запишем данную функцию в виде отношения функций g(z) и h(z):

$$f(z) = \frac{(z+\pi)\sin(\pi z/2)}{z\sin^2 z};$$

$$g(z) = (z+\pi)\sin(\pi z/2)$$
$$h(z) = z\sin^2 z$$

Для каждой из функций найдем порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = \pi k$:

$$g(z) = (z+\pi)\sin(\pi z/2); g(\pi k) \neq 0;$$
$$h(z) = z\sin^2 z; h(\pi k) = 0;;$$
$$h'(z) = z\sin 2z + \sin^2 z; h'(\pi k) = 0;$$
$$h''(z) = 2\sin 2z + 2z(\cos^2 z - \sin^2 z); h''(\pi k) \neq 0;$$

Тип и порядок особой точки можно определить, как разницу между порядками производных, не обратившихся в ноль в особой точке, функций g(z) и h(z). Если порядок g(z) выше – это ноль, а если ниже – полюс. Разность порядков ненулевых производных даст порядок особой точки. Таким образом, $z = \pi k$ – полюс 2-го порядка

Ответ: $z = \pi k$ – полюс 2-го порядка

ТФКП. Вариант 7.

Задача 13

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-1|=3} \underbrace{\frac{ze^z}{\sin z}}_{f(z)} dz$$

Найдем особые точки функции f(z):

$z = \pi k,\ k \in Z$

В рассматриваемую область попадают только точки $z = 0$ и $z = \pi$.

Точка $z_1 = 0$ является устранимой особой точкой, следовательно, вычет в точке z_1 равен нулю.

Точка $z_2 = \pi$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to\pi}[f(z)(z-\pi)] = \lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)ze^z}{\sin z} = \left\{\begin{matrix} t = z-\pi \\ z = t+\pi \end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t(t+\pi)e^{t+\pi}}{\sin(t+\pi)} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t+\pi)e^{t+\pi}}{-\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t+\pi)e^{t+\pi}}{-t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}(t+\pi)e^{t+\pi} = \pi e^{\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot \pi e^{\pi} = 2\pi^2 i \cdot e^{\pi}$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz = 2\pi^2 i \cdot e^{\pi}$

ТФКП. Вариант 7.

Задача 14

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4}}_{f(z)} dz$$

У этой функции одна особая точка: $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$\frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4} = 3 - \frac{2}{z} + \frac{5}{z^4}$$

Считая получившийся результат рядом Лорана по степеням z, т.е. в окрестности $z = 0$, мы приходим к выводу, что точка $z = 0$ является полюсом 4-го порядка. В соответствии с этим, найдем вычет в данной точке:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{6}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}[f(z)z^4] = \frac{1}{6}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{z\to 0}(72z - 12) = -\frac{12}{6} = -2$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z)$$

В данном случае:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4} dz = 2\pi i \cdot (-2) = -4\pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4} dz = -4\pi i$

Задача 15

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=0,2} \underbrace{\frac{e^{8z}-\mathrm{ch}4z}{z\sin 4\pi z}}_{f(z)}dz$$

Особые точки этой функции $z = k/4$, $k\in Z$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z)=\frac{e^{8z}-\mathrm{ch}4z}{z\sin 4\pi z}=\frac{g(z)}{h(z)};\quad \begin{matrix} g(z)=e^{8z}-\mathrm{ch}4z \\ h(z)=z\sin 4\pi z \end{matrix}$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$. Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз мы опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\mathop{\mathrm{res}}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}[f(z)z]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{8z}-\mathrm{ch}4z}{\sin 4\pi z}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{используем пра -}\\ \text{вило Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{8e^{8z}-4\mathrm{sh}4z}{4\pi\cos 4\pi z}\right)=\frac{8}{4\pi}=\frac{2}{\pi}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=0,2}\frac{e^{8z}-\mathrm{ch}4z}{z\sin 4\pi z}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathop{\mathrm{res}}_{z_n} f(z)=2\pi i\cdot\frac{2}{\pi}=4i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=0,2}\frac{e^{8z}-\mathrm{ch}4z}{z\sin 4\pi z}dz=4i$

Задача 16

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z+5i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}+\frac{8\mathrm{ch}\frac{\pi i z}{1-5i}}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}\right)dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z+5i|=2}\underbrace{\frac{8\mathrm{ch}\frac{\pi i z}{1-5i}}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}}_{f_1(z)}dz+\oint\limits_{|z+5i|=2}\underbrace{\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}}_{f_2(z)}dz$$

Используем вычеты для взятия первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z+5i|=2}\frac{8\mathrm{ch}\frac{\pi i z}{1-5i}}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: $z=1-5i$ и $z=3-5i$. При этом точка $z=3-5i$ не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка $z=1-5i$ является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\mathop{\mathrm{res}}_{z=1-5i} f_1(z)=\lim_{z\to 1-5i}\frac{d}{dz}\left[\frac{8\mathrm{ch}\frac{\pi i z}{1-5i}(z-1+5i)^2}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}\right]=\lim_{z\to 1-5i}\frac{d}{dz}\left[\frac{8\mathrm{ch}\frac{\pi i z}{1-5i}}{(z-3+5i)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 1-5i}\left[\frac{(20-4i)\pi}{13(z-3+5i)}\mathrm{sh}\frac{(5-i)\pi z}{26}-\frac{8}{(z-3+5i)^2}\mathrm{ch}\frac{(5-i)\pi z}{26}\right]=2$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+5i|=2}\frac{8\mathrm{ch}\frac{\pi i z}{1-5i}}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}dz=2\pi i\cdot\mathop{\mathrm{res}}_{z=1-5i} f_1(z)=2\pi i\cdot 2=4\pi i$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z+5i|=2} \frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\pi z/2}+i=0 \Rightarrow e^{\pi z/2}=-i \Rightarrow \pi z/2=\ln(-i)=-\pi i/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=4ik-i, k\in z$$

Из этих точек только одна охвачена контуром |z+5i|=2 и должна приниматься во внимание. Это точка z=–5i, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=-5i} f_2(z)=\lim_{z\to -5i}\frac{\pi i(z+5i)}{e^{\pi z/2}+i}=\lim_{z\to -5i}\frac{\pi i(z+5i)}{e^{\pi z/2}+i}=\left\{\begin{matrix}\text{используем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to -5i}\frac{\pi i}{\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2}}=\frac{\pi i}{\frac{\pi}{2}e^{-5\pi i/2}}=\frac{2i}{e^{-5\pi i/2}}=\frac{2i}{-i}=-2$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z+5i|=2}\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=-5i}f_2(z)=2\pi i\cdot(-2)=-4\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z+5i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}+\frac{8\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{1-5i}}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}\right)dz=$$

$$=\oint\limits_{|z+5i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz+\oint\limits_{|z+5i|=2}\left(\frac{8\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{1-5i}}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}\right)dz=$$

$$=-4\pi i+4\pi i=0$$

Ответ: $\oint\limits_{|z+5i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}+\frac{8\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{1-5i}}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}\right)dz=0$

Задача 17

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-3\sin t}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-3\sin t}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz/iz}{5-\frac{3}{2i}(z-\frac{1}{z})}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{5iz-\frac{3}{2}(z^2-1)}=$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{10iz-3(z^2-1)}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{-3(z-i/3)(z-3i)}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=3i;\quad z=i/3;$

Точка 3i не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка i/3 является простым полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=i/3}f(z)=\lim_{z\to i/3}[f(z)(z-i/3)]=\lim_{z\to i/3}\frac{2}{-3(z-3i)}=-\frac{i}{4}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{2dz}{-3(z-i/3)(z-3i)}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right)=\frac{1}{2}\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-3\sin t}=\frac{1}{2}\pi$

Задача 18

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+3\cos t)^2}$$

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{it};\ \cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\ dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к контурному интегралу:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+3\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(4+\frac{3}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i(8z+3(z^2+1))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[3(z-\frac{\sqrt{7}-4}{3})(z+\frac{\sqrt{7}+4}{3})\right]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки:

$z=(\sqrt{7}-4)/3;\quad z=(-\sqrt{7}-4)/3;$

Точка $z=(-\sqrt{7}-4)/3$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=(\sqrt{7}-4)/3$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=(\sqrt{7}-4)/3}f(z)=\lim_{z\to(\sqrt{7}-4)/3}\frac{d}{dz}\left[f(z)\left(z-(\sqrt{7}-4)/3\right)^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to(\sqrt{7}-4)/3}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[3\left(z+(\sqrt{7}+4)/3\right)\right]^2}=\frac{4}{9i}\lim_{z\to(\sqrt{7}-4)/3}\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z+(\sqrt{7}+4)/3\right)^2}=$$

$$=\frac{4}{9i}\lim_{z\to(\sqrt{7}-4)/3}\left[-9\frac{3z-4-\sqrt{7}}{\left(3z+4+\sqrt{7}\right)^3}\right]=-\frac{4}{i}\cdot\frac{\sqrt{7}-4-4-\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}-4+4+\sqrt{7}\right)^3}=-\frac{4}{i}\cdot\frac{-8}{(2\sqrt{7})^3}=\frac{4}{7\sqrt{7}i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left[3(z-\frac{\sqrt{7}-4}{3})(z+\frac{\sqrt{7}+4}{3})\right]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_n}f(z)=2\pi i\cdot\left(\frac{4}{7\sqrt{7}i}\right)=\frac{8}{7\sqrt{7}}\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(4+3\cos t)^2}=\frac{8}{7\sqrt{7}}\pi$

Задача 19

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+10x^2+9}dx$$

Известно, что если функция рациональна, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m\operatorname*{res}_{z_m}R(z)$$ сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+10x^2+9}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z^2+9)(z^2+1)}dz$$

Особые точки:

$z=3i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-3i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

$z=i\quad(\operatorname{Im}z>0);\quad z=-i\quad(\operatorname{Im}z<0)$

Точки $z=3i$ и $z=i$ являются простыми полюсами и вычеты в них вычисляются следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=3i}f(z)=\lim_{z\to3i}[f(z)(z-3i)]=\lim_{z\to3i}\frac{1}{(z+3i)(z^2+1)}=\frac{i}{48}$$

$$\operatorname*{res}_{z=i}f(z)=\lim_{z\to i}[f(z)(z-i)]=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z^2+9)(z+i)}=\frac{-i}{16}$$

Используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+10x^2+9}dx=2\pi i\left(\frac{i}{48}+\frac{-i}{16}\right)=2\pi i\left(\frac{-2i}{48}\right)=2\pi i\left(\frac{2}{48i}\right)=\frac{\pi}{12}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+10x^2+9}dx=\frac{\pi}{12}$

Задача 20

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2}dx$$

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\lambda x\,dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_{m}\underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$x^4+3x^2+2=0\Rightarrow z_{1,2}=\pm i\sqrt{2};z_{3,4}=\pm i;$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z>0$. Из этого следует:

$$z_m=\{i\sqrt{2};i\}$$

Эти особые точки являются простыми полюсами. Найдем в них вычеты:

$$1)\ \underset{z=i\sqrt{2}}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i\sqrt{2}}\frac{(z^2+3)(z-i\sqrt{2})}{(z^2+2)(z^2+1)}e^{2iz}=\lim_{z\to i\sqrt{2}}\frac{(z^2+3)e^{2iz}}{(z+i\sqrt{2})(z^2+1)}=$$

$$=\frac{(-2+3)e^{-2\sqrt{2}}}{(i\sqrt{2}+i\sqrt{2})(-2+1)}=-\frac{e^{-\sqrt{2}}}{2i\sqrt{2}}=\frac{ie^{-2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$$

$$2)\ \underset{z=i}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i}\frac{(z^2+3)(z-i)}{(z^2+2)(z^2+1)}e^{2iz}=\lim_{z\to i}\frac{(z^2+3)e^{2iz}}{(z+i)(z^2+2)}=$$

$$=\frac{(-1+3)e^{-2}}{(i+i)(-1+2)}=\frac{2e^{-2}}{2i}=\frac{e^{-2}}{i}=-ie^{-2}$$

Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

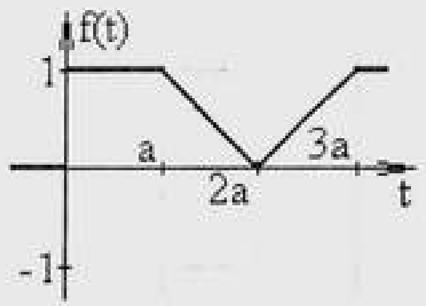
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2}dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_{m}\underset{z_m}{\mathrm{rez}}\,R(z)e^{i\lambda z}\right\}=2\pi e^{-2}-\frac{\pi e^{-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2}dx=2\pi e^{-2}-\frac{\pi e^{-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

ТФКП. Вариант 7.

Задача 21

По данному графику оригинала найти изображение:



Исходя из этого графика, запишем оригинал функции:

$$f(t)\begin{cases}1, & 0<t<a\\ \dfrac{2a-t}{a}, & a<t<2a\\ \dfrac{t-2a}{a}, & 2a<t<3a\\ 1, & 3a<t\end{cases}$$

$$f(t)=1\cdot\eta(t)+\frac{a-t}{a}\eta(t-a)+\frac{2t-4a}{a}\eta(t-2a)+\frac{3a-t}{a}\eta(t-3a)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, найдем изображение функции, как сумму изображений слагаемых оригинала функции:

$$F(p)=\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\frac{2}{ap^2}-\frac{4}{p}\right)e^{-2ap}+\left(\frac{3}{p}-\frac{1}{ap^2}\right)e^{-3ap}$$

Ответ: $F(p)=\dfrac{1}{p}+\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{ap^2}\right)e^{-ap}+\left(\dfrac{2}{ap^2}-\dfrac{4}{p}\right)e^{-2ap}+\left(\dfrac{3}{p}-\dfrac{1}{ap^2}\right)e^{-3ap}$

Задача 22

Найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{6}{p^3-8}$$

Представим это выражение, как сумму простых слагаемых:

$$\frac{6}{p^3-8}=\frac{6}{(p-2)(p^2+2p+4)}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+4}=$$

$$=\frac{Ap^2+2Ap+4A+Bp^2-2Bp+Cp-2C}{(p-2)(p^2+2p+4)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(2A-2B+C)p+4A-2C}{(p-2)(p^2+2p+4)}$$

Решив систему линейных уравнений, найдем A, B и C:

$$\begin{cases}A+B=0\\2A-2B+C=0\\4A-2C=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/2\\B=-1/2\\C=-2\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{6}{p^3-8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+2p+4}-2\cdot\frac{1}{p^2+2p+4}$$

По такому изображению найти оригинал несложно:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+2p+4}-2\cdot\frac{1}{p^2+2p+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{(p+1)^2+3}-2\cdot\frac{1}{(p+1)^2+3}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+3}\to$$

$$\to\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-t}\cos\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}\sin\sqrt{3}t$$

Ответ: оригинал функции выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-t}\cos\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}\sin\sqrt{3}t$$

Задача 24

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''-9y=\sin t-\cos t$$

$$y(0)=-3,\quad y'(0)=-2.$$

Из теории нам известно, что если x(t) соответствует изображение X(p), то x'(t) соответствует $p\cdot X(p)-x(0)$, а x''(t) соответствует $p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$. Руководствуясь этими соображениями, перейдем от оригиналов функций к их изображениям:

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)-9Y(p)=\frac{1}{p^2+1}-\frac{p}{p^2+1}$$

$$p^2Y(p)+3p+2-9Y(p)=\frac{1}{p^2+1}-\frac{p}{p^2+1}$$

$$(p^2-9)Y(p)=\frac{1}{p^2+1}-\frac{p}{p^2+1}-3p-2$$

$$Y(p)=\frac{1}{(p^2+1)(p^2-9)}-\frac{p}{(p^2+1)(p^2-9)}-\frac{3p}{(p^2-9)}-\frac{2}{(p^2-9)}$$

Разложим эту функцию на простые слагаемые и найдем оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{1}{(p^2+1)(p^2-9)}-\frac{p}{(p^2+1)(p^2-9)}-\frac{3p}{(p^2-9)}-\frac{2}{(p^2-9)}=$$

$$=\frac{1}{10}\frac{1}{p^2-9}-\frac{1}{10}\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{10}\frac{p}{p^2-9}+\frac{1}{10}\frac{p}{p^2+1}-\frac{3p}{p^2-9}-\frac{2}{p^2-9}=$$

$$=-\frac{19}{10}\frac{1}{p^2-9}-\frac{1}{10}\frac{1}{p^2+1}-\frac{31}{10}\frac{p}{p^2-9}+\frac{1}{10}\frac{p}{p^2+1}=$$

$$=-\frac{19}{30}\frac{3}{p^2-9}-\frac{1}{10}\frac{1}{p^2+1}-\frac{31}{10}\frac{p}{p^2-9}+\frac{1}{10}\frac{p}{p^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=-\frac{19}{30}\mathrm{sh}3t-\frac{1}{10}\sin t-\frac{31}{10}\mathrm{ch}3t+\frac{1}{10}\cos t$$

Ответ: $y(t)=-\frac{19}{30}\mathrm{sh}3t-\frac{1}{10}\sin t-\frac{31}{10}\mathrm{ch}3t+\frac{1}{10}\cos t$

Задача 25

Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы F=–kx, пропорциональной смещению x и направленной в противоположную сторону, и силы сопротивления R=rv. В момент t=0 частица находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Найти закон движения x=x(t) частицы.

$k = 3m,\ r = 2m,\ x_0 = 1м,\ v_0 = 0.$

Исходя из второго закона Ньютона:

$$am = -kx - rv$$

$$\ddot{x}m + r\dot{x} + kx = 0$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0$$

Подставим значения k и r:

$$\ddot{x}m + 2m\dot{x} + 3mx = 0$$

Сократим все выражение на m:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0$$

Перейдем к изображениям функции:

$$p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + 2pX(p) - 2x(0) + 3X(p) = 0$$

$$(p^2 + 2p + 3)X(p) - p - 2 = 0$$

$$X(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+3} = \frac{p+2}{(p+1)^2+2} = \frac{p+1}{(p+1)^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(p+1)^2+2}$$

По такому изображению несложно найти оригинал:

$$x(t) = e^{-t}\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$$

Ответ: $x(t) = e^{-t}\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$

Задача 26

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2 \end{cases}$$

$x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

Перейдем к изображениям функций x и y:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = 3X(p) + Y(p) \\ pY(p) - y(0) = -5X(p) - 3Y(p) + 2/p \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} pX(p) - 2 = 3X(p) + Y(p) \\ pY(p) = -5X(p) - 3Y(p) + 2/p \end{cases}$$

Выразим X(p) через Y(p), используя второе уравнение:

$$pY(p) = -5X(p) - 3Y(p) + 2/p$$

$$X(p) = \frac{-pY(p) - 3Y(p) + 2/p}{5}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и найдем Y(p):

$$p\left[\frac{-pY(p) - 3Y(p) + 2/p}{5}\right] - 2 = 3\left[\frac{-pY(p) - 3Y(p) + 2/p}{5}\right] + Y(p)$$

$$Y(p) = \frac{6/p + 8}{4 - p^2}$$

Зная изображение функции, несложно найти ее оригинал:

$$Y(p) = \frac{6/p+8}{4-p^2} = -\frac{6}{p}\frac{1}{p^2-4} + 4\frac{2}{p^2-4} \to$$

$$\to y(t) = \tfrac{6}{4}(1 - \cos 2it) + 4\operatorname{sh}2t = \tfrac{3}{2}(1 - \operatorname{ch}2t) + 4\operatorname{sh}2t = \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2}\operatorname{ch}2t + 4\operatorname{sh}2t$$

Зная y(t), найдем x(t):

$$\dot{y} = -5x - 3y + 2 \Rightarrow x(t) = -\tfrac{1}{5}(\dot{y} + 3y - 2) =$$

$$= -\tfrac{1}{5}(-3\operatorname{sh}2t + 8\operatorname{ch}2t + \tfrac{9}{2} - \tfrac{9}{2}\operatorname{ch}2t + 12\operatorname{sh}2t - 2) = -\tfrac{1}{5}(\tfrac{7}{2}\operatorname{ch}2t + \tfrac{5}{2} + 9\operatorname{sh}2t) =$$

$$= -\tfrac{7}{10}\operatorname{ch}2t - \tfrac{1}{2} - \tfrac{9}{5}\operatorname{sh}2t$$

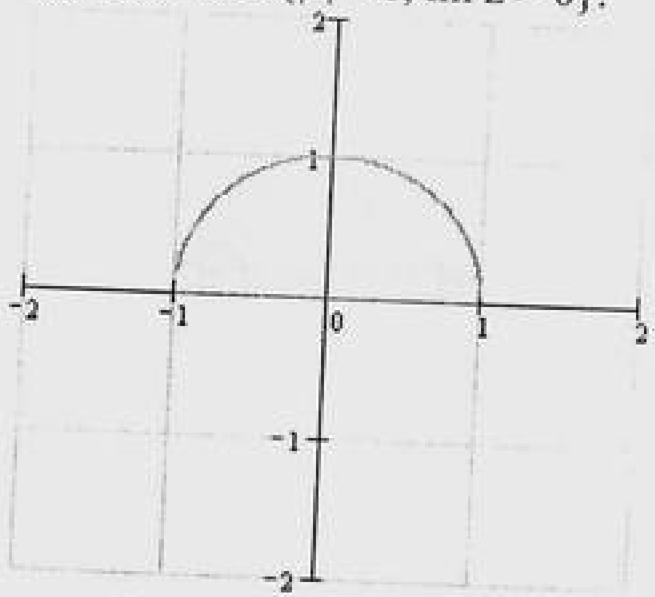
Ответ:

$$x(t) = -\tfrac{7}{10}\operatorname{ch}2t - \tfrac{1}{2} - \tfrac{9}{5}\operatorname{sh}2t$$

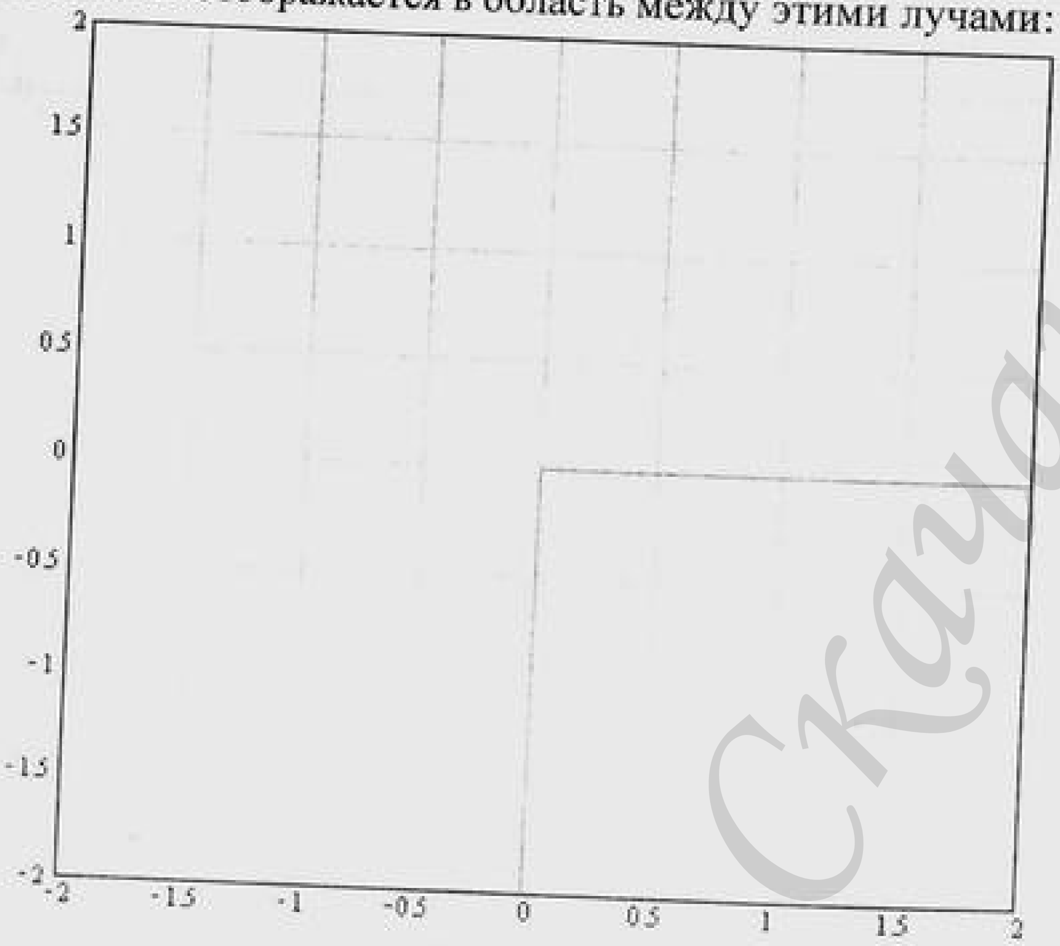
$$y(t) = \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2}\operatorname{ch}2t + 4\operatorname{sh}2t$$

Задача 27

Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w = f(z)$.
$w = (1-z)/(1+z)$; область $D:\{|z| < 1,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$.



Нижняя граница области преобразуется в луч, исходящий из центра координат под углом 0. Верхняя граница области преобразуется в такой же луч, только угол равен $-\pi/2$. Область D отображается в область между этими лучами:



ПРИЛОЖЕНИЕ

Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z, k = 0,1,\ldots, n-1; z \neq 0$$

Элементарные функции комплексного переменного

$z=x+iy$ $\qquad$ $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\mathrm{sh}\, z = -i\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \mathrm{ch}\, z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z \qquad \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \mathrm{Arccos}\, z = -i\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz} \qquad \mathrm{Arcctg}\, z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z - i}{z + i}$$

Аналитические функции

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z \in G$.

Производная аналитической функции

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$