Екзаменаційний білет № 18

I. Теоретична частина

1. І-ша й ІІ-га интерполяційні формули Ньютона.

9. Перша й друга інтерполяційні формули Ньютона.

Висока точність наближення функції може бути досягнута двома шляхами:

1. Додаються нові вузли інтерполяції, і функція інтерполюється по всіх вузлах багаточленом максимально високого ступеня.
2. Після додавання нових вузлів інтерполяції значення функції обчислюються шляхом інтерполяції по найближчих вузлах, ступінь інтерполяційного багаточлена при цьому не збільшується.

Якщо немає на те особливих причин, вузли таблиці зазвичай беруть розміщеними рівномірно. Якщо вузли вибираються поблизу точки *x*, де відновлюється значення функції, то проміжна точка ξ в оцінці залишкового члена

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod\nolimits_{n+1}(x)$$

також знаходиться поблизу точки *x* і, таким чином, величина $f^{(n+1)}(\xi)$ змінюється не дуже сильно при виборі вузлів в околиці x.

Отже, величина, що має вирішальний вплив на значення похибки, є

$$|\Pi_{n+1}(x)| = |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|,$$

тобто добуток відстаней від точки *x* до вузлів інтерполяції. Величина $\Pi_{n+1}(x)$ буде мінімальна, якщо взяти *n* вузлів, найближчих до *x*. В ідеалі - по обох боках від *x*.

Нехай

$$x_k = x_0 + kh;\ k = 0,1\ldots n;\ f_k = f(x_k)$$

і

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

З огляду на зв'язок між розподіленими і кінцевими різницями інтерполяційний багаточлен (13) можна переписати

$$l_n(x) = l_n(x_0 + qh) = f_0 + q\frac{\Delta f_0}{1!} + q(q-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \cdots q(q-1)\ldots(q-n+1)\frac{\Delta^n f_0}{n!} \tag{14}$$

Це інтерполяційний багаточлен Ньютона для інтерполяції вперед, або *перша інтерполяційна формула Ньютона*. У ній початок відліку q розташовано в крайньому лівому вузлі x_0, і використані КР, що йдуть у таблиці КР вправо вниз. Інтерполяційний багаточлен (14) зручно використовувати на початку таблиці і для екстраполяції лівіше x_0, тобто для $q < 0$. Змінна q є, фактично, числом кроків, необхідним для досягнення точки x із точки x_0.

Залишковий член цього інтерполяційного багаточлена

$$R_n(x) = h^{n+1} \cdot \Pi_{n+1}(q) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \tag{15}$$

де

$$\Pi_{n+1}(q) = q(q-1)\ldots(q-n)$$

Інтерполяційний багаточлен з вузлами $x_0, x_{-1}, x_{-2}, \ldots x_{-n}$, де $x_{-k} = x_0 - kh$ має вигляд

$$l_n(x) = l_n(x_0 + qh) = f_0 + q\frac{\Delta f_{-1}}{1!} + q(q+1)\frac{\Delta^2 f_{-2}}{2!} + \ldots q(q+1)\ldots(q+n-1)\frac{\Delta^n f_{-n}}{n!} \tag{16}$$

Залишковим членом якого є

$$R_n(x) = h^{n+1} \cdot q(q+1)\ldots(q+n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{17}$$

Цей полином називається інтерполяційним багаточленом Ньютона для інтерполяції назад або *другою інтерполяційною формулою Ньютона*. У ньому початок відліку q розташовано в крайньому правому вузлі, а використовувані КР ідуть у таблиці вправо нагору.

x_i				
x_{-4}	f_{-4}	Δf_{-4}	$\Delta^2 f_{-4}$	$\Delta^3 f_{-4}$
x_{-3}	f_{-3}	Δf_{-3}	$\Delta^2 f_{-3}$	$\Delta^3 f_{-3}$
x_{-2}	f_{-2}	Δf_{-2}	$\Delta^2 f_{-2}$	
x_{-1}	f_{-1}	Δf_{-1}		
x_0	f_0			

Приклад 5.

По заданій таблиці $f(x) = lg(x)$, знайти $lg(1044)$.

	X	f
x_{-5}	*1000*	*3. 0000000*
x_{-4}	*1010*	*3. 0043214*
x_{-3}	*1020*	*3. 0086002*
x_{-2}	*1030*	*3. 0128372*
x_{-1}	*1040*	*3. 0170333*
x_0	*1050*	*3. 0211893*

Покладемо $x_0 = 1050$, тоді $h = 10$

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1044 - 1050}{10} = -0.6$$

Складемо таблицю КР

x	F	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
1000	*3. 0000000*	*43214*	*– 426*	*8*
1010	*3. 0043214*	*42788*	*– 418*	*9*
1020	*3. 0086002*	*42370*	*– 409*	*8*
1030	*3. 0128372*	*41961*	*– 401*	
1040	*3. 0170333*	<u>*41560*</u>		
1050	<u>*3. 0211893*</u>			

КР у таблиці прийнято виписувати без явної вказівки на розташування коми, тобто в числі одиниць останнього десяткового розряду.

Згідно (17) маємо:

$$lg\ 1044 = 3.0211893 + (-0.6)\cdot 0.0041560 + \frac{(-0.6)(-0.6+1)}{2}\cdot 0.0000401 +$$

$$+ \frac{(-0.6)(-0.6+1)(-0.6+2)}{6}\cdot 0.0000008 = 3.0187005$$

2. Розв’язок систем нелінійних рівнянь.

2. Метод Ньютона.

Розглянемо систему:

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ &f_2(x1, x2, \dots, xn) = 0 \qquad\qquad (1) \\ &\qquad \dots \\ &f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{aligned}$$

з дійсними лівими частинами.

Перепишемо цю систему у векторно-матричній формі:

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}$ - вектор-функція

Тоді маємо векторне рівняння

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0 \qquad (1')$$

Скористаємося для розв'язання системи методом послідовних наближень. Покладемо, що знайдено р-е наближення

$$\vec{x}^{(\rho)} = (x_1^{\rho}, x_2^{\rho}, \dots x_n^{\rho})$$

одного з ізольованих коренів $\vec{x} = x_1, x_2, \dots x_n$ векторного рівняння (1'). Тоді точний корінь (1') можна представити у вигляді

$$\vec{x} = \vec{x}^{(\rho)} + \vec{\varepsilon}^{(\rho)} \qquad (2)$$

де $\vec{\varepsilon}^{(\rho)} = (\varepsilon_1^{(\rho)}, \varepsilon_2^{(\rho)}, \dots \varepsilon_n^{(\rho)})$ - поправка.

Підставивши (2) в (1') маємо

$$\vec{f}(\vec{\chi}^{(\rho)} + \vec{\varepsilon}^{(\rho)}) = 0 \tag{3}$$

Думаючи, що функція $\vec{f}(\vec{x})$, яка є безперервно диференціьована в якійсь опуклій області, що містить $(\vec{x})$ й $\vec{x}^{(\rho)}$, розкладемо ліву частину (3) по ступенях малого вектора $\vec{\varepsilon}^{(\rho)}$, обмежуючись мінімальними членами.

$$\vec{f}(\vec{x}^{(p)} + \vec{\varepsilon}^{(p)}) = \vec{f}(\vec{x}^{(p)}) + f'(\vec{x}^{(p)})\vec{\varepsilon}^{(p)} = 0 \tag{4}$$

або

$$\begin{cases} \vec{f}_1(\vec{x}_1^{(p)} + \vec{\varepsilon}_1^{(p)}, \vec{x}_2^{(p)} + \vec{\varepsilon}_2^{(p)}, ..., \vec{x}_n^{(p)} + \vec{\varepsilon}_n^{(p)}) = \vec{f}_1(\vec{x}_1^{(p)}, \vec{x}_2^{(p)}, ..., \vec{x}_n^{(p)}) + f'_{1x1}(\vec{x}_1^{(p)}, \vec{x}_2^{(p)}, ..., \vec{x}_n^{(p)})\vec{\varepsilon}_1^{(p)} + \\ + ... + f'_{1xn}(\vec{x}_1^{(p)}, \vec{x}_2^{(p)}, ..., \vec{x}_n^{(p)})\vec{\varepsilon}_n^{(p)} = 0 \\ \qquad \cdots \\ \vec{f}_n(\vec{x}_1^{(p)} + \vec{\varepsilon}_1^{(p)}, \vec{x}_2^{(p)} + \vec{\varepsilon}_2^{(p)}, ..., \vec{x}_n^{(p)} + \vec{\varepsilon}_n^{(p)}) = \vec{f}_1(\vec{x}_n^{(p)}, \vec{x}_2^{(p)}, ..., \vec{x}_n^{(p)}) + f'_{1x1}(\vec{x}_1^{(p)}, \vec{x}_2^{(p)}, ..., \vec{x}_n^{(p)})\vec{\varepsilon}_1^{(p)} + \\ + ... + f'_{1xn}(\vec{x}_1^{(p)}, \vec{x}_2^{(p)}, ..., \vec{x}_n^{(p)})\vec{\varepsilon}_n^{(p)} = 0 \end{cases}$$

Це система (4’)

Таким чином, під похідною $\vec{f}'(\vec{x})$ будемо мати на увазі матрицю Якобі системи функцій f_1, f_2, … , f_n відносно x_1, x_2, … , x_n

$$\vec{f}'(\vec{\chi}) = W(\vec{\chi}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \; \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \; \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \; \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

Система (4′) є лінійною системою щодо поправок $\varepsilon_i^{(p)}$ *(i=1,2,…n)* с матрицею $W(\vec{\chi})$, тому (4) може бути переписана в такий спосіб:

$$\vec{f}(\vec{x}^{(p)}) + W(\vec{x}^{(p)})\vec{\varepsilon}^{(p)} = 0$$

Звідси, вважаючи, що матриця $W(\vec{x}^{(p)})$ є неособлива, одержимо

$$\vec{\varepsilon}^{(p)} = -W^{-1}(\vec{x}^{(p)})\vec{f}(\vec{x}^{(p)})$$

і, отже,

$$\vec{x}^{(p+1)} = \vec{x}^{(p)} - W^{-1}(\vec{x}^{(p)})\vec{f}(\vec{x}^{(p)}),\ p=0,1,\ldots$$

Це так званий *метод Ньютона*. За нульове наближення можна вибрати грубе значення шуканого кореня.

Приклад:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

Покладемо $x_0 = y_0 = z_0 = 0.5$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z \\ 3x^2 - 4y + z^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{f}(\vec{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 - 1 \\ 0{,}50 + 0{,}25 - 2{,}0 \\ 0{,}75 - 2{,}0 + 0{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ -1{,}25 \\ -1{,}0 \end{bmatrix}$$

Складемо матрицю Якобі

$$W(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{bmatrix}$$

$$W(\vec{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det W(\vec{x}^{(0)}) = -40$$

Знайдемо зворотну матрицю

$$W^{-1}(\vec{x}^{(0)}) = -\frac{1}{40}\begin{bmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

Тоді

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - W^{-1}(\vec{x}^{(0)})\vec{f}(\vec{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}25 \\ -1{,}25 \\ -1{,}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}875 \\ 0{,}5 \\ 0{,}375 \end{bmatrix}$$

Обчислимо тепер $\vec{x}^{(2)}$

$$\vec{f}(\vec{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0{,}15625 \\ 0{,}28125 \\ 0{,}43750 \end{bmatrix}$$

$$W(\vec{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1{,}75 & 1 & 0{,}75 \\ 3{,}5 & 1 & -4 \\ 5{,}25 & -4 & 0{,}75 \end{bmatrix}$$

$\det W(\vec{x}^{(1)})$ = -64,74

$$W^{-1}(\vec{x}^{(1)}) = -\frac{1}{64{,}75}\begin{bmatrix} -15{,}25 & -3{,}75 & -4{,}75 \\ -23{,}625 & -2{,}625 & 9{,}625 \\ -19{,}25 & 12{,}25 & -1{,}75 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{(2)} = \vec{x}^{(1)} - W^{-1}(\vec{x}^{(1)})\vec{f}(\vec{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0{,}75981 \\ 0{,}49622 \\ 0{,}36993 \end{bmatrix}$$

і т.д.

II. Практична частина

За допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа, побудованого на проміжку

[1;10], обчислити значення функції

```
0.1*x*x*x*cos(3*x)
```

в точках [1.45, 4.33, 6.5, 7.7, 9.8] з точністю не гірше за 10^{-2}.