UNIVERSIDADE SÃO TOMÁS DE MOÇAMBIQUE

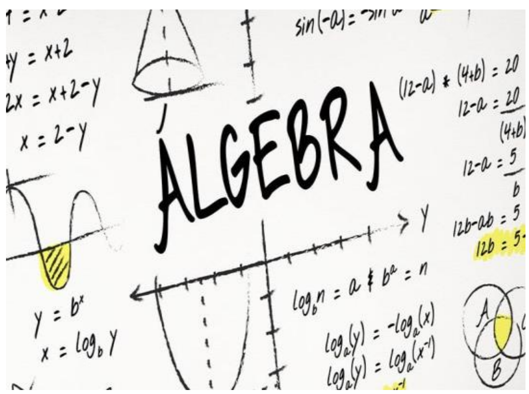
CURSO: LASIR

1°SEMESTRE

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

INTRODUÇAO A ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA.

1. ÁLGEBRA



1.1. O Que é álgebra?

A álgebra é um dos principais ramos das matemáticas. Seu objeto de estudo são estruturas abstratas operando em padrões fixos, dentro dos quais contém além números e operações aritméticas também letras, que representam operações concretas, variáveis , incógnitas ou coeficientes.

Por palavras mais simples, trata-se do ramo das matemáticas que se ocupa pelas operações com e entre símbolos, representados geralmente por letras. O seu nome provem do árabe *al-ŷabr* (“**reintegração**” ou “**recomposição**”).

A álgebra é um dos ramos das matemáticas que possui maior aplicação. Permite representar problemas formais da vida quotidiana. Por exemplo as equações e variáveis algébricas permitem calcular proporções desconhecidas

1.2. Breve Historia da Álgebra

Al Juarismi, criou a álgebra

A álgebra nasceu na cultura árabe, por volta do ano 820 d. C., data em que se publicou o primeiro tratado através do "Compendio de cálculo por reintegração e comparação", obra do matemático e astrónomo persa Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi, também conhecido como Al Juarismi.

Neste compendio o sábio oferecia solução sistemática de equações lineares e quadráticas, empregando operações simbólicas. Estes métodos logo se desenvolveram em matemática do islão medieval e converteram a álgebra em uma disciplina da matemática independente, ao lado da aritmética e da geometria.

Estes estudos eventualmente abriram caminhos no ocidente. Graças a eles a álgebra abstrata surgiu já no seculo XIX, com a consolidação de numerosos complexos, fruto de pensadores como Gabriel Cramer (1704-1752), Leonhard Euler (1707-1783) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

1.3. Para que serve a Álgebra?

A álgebra é muito útil dentro do campo das matemáticas, mas também tem muita utilidade da vida quotidiana. Permite fazer orçamentos, faturação, cálculo de custos, etc.

Também muitas operações importantes em contabilidade, administração e engenharia se realizam com base em cálculos algébricos que manejam uma ou varias variáveis, expressando-as em relações logicas e detectáveis

A álgebra permite-nos lidar melhor com conceitos complexos e abstratos, expressando-os de um modo mais simples e ordenado mediante notação algébrica.

1.4. Ramos da álgebra

1.4.1. Álgebra elementar.

Como o nome indica, compreende os conceitos mais básicos da matéria, onde há operações aritméticas com uma serie de letras (símbolos), que representam quantidades ou relações desconhecidas, ou seja, trata fundamentalmente do manejo de equações e de variáveis, incógnitas, coeficientes, índices, raízes, etc.

1.4.2. Álgebra abstrata.

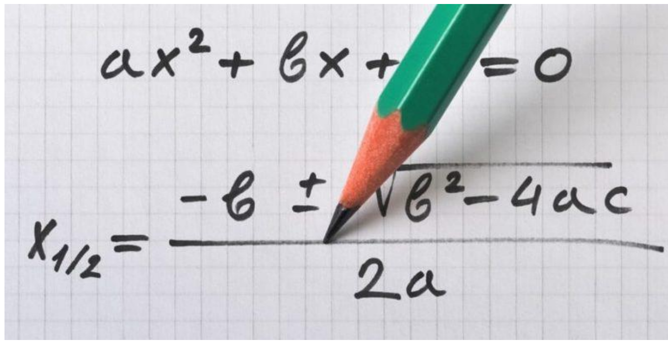
Também chamada álgebra moderna ou ainda álgebra superior, é a parte de álgebra que se dedica ao estudo das estruturas algebraicas de grupo anéis, espaço vetorial, etc, representa um grau de maior complexidade quando comparado com a elementar.

1.5. Linguagem algébrica

A álgebra requere, antes de tudo, o seu próprio modo de expressar seus enunciados que é diferente da linguagem aritmética, composta unicamente por números e símbolos. A álgebra geralmente recorre a relações de variáveis e operações tradicionais e também complexas

A linguagem algébrica, é uma linguagem mais sintética que a aritmética e permite expressar relações gerais por meio de enunciados breves. Mais ainda permite incluir no padrão formal variáveis desconhecidas um vinculo com o resto que é conhecido. É assim que surgem equações cuja a forma de resolução implica o reordenamento dos termos algébricos para ir isolando as incógnitas variáveis

1.6. Expressões algébricas



A álgebra conta com múltiplas formulas para resolver seus polinómios

As expressões algébricas são a forma de escrever em linguagem algébrica. Nelas não só encontramos números e letras, mas também outro tipo de sinais e de disposições como os coeficientes, graus e sinais aritméticos usuais.

De uma forma geral as expressões algébricas podem ser classificadas em dois grupos:

1.6.1. Monómios.

Uma expressão algébrica que contem em si mesma toda informação necessária para a sua resolução, exemplo:

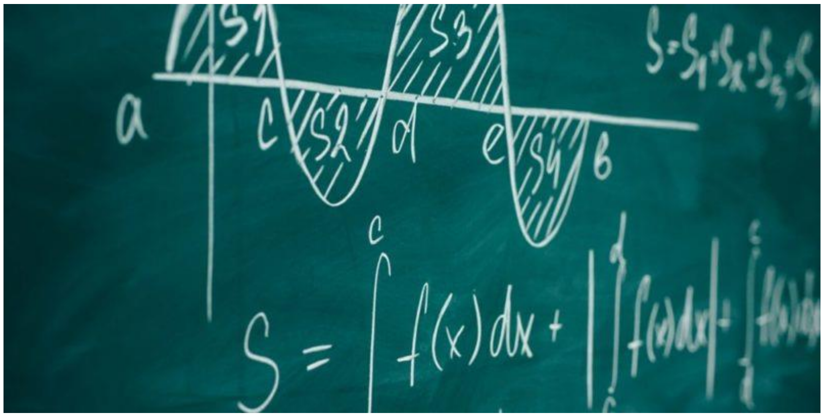
$$\mathbf{6x^2 + 32y^4}$$

1.6.2. Polinómios.

Cadeia de expressões algebraicas, ou seja, cadeia de monómios com um sentido global e que deve se resolver em conjunto, por exemplo:

$$\mathbf{3n5y^3+23n^5y8z^3 - \pi^2\ 3n - 22 + 26n^4}.$$

2. GEOMETRIA ANALÍTICA



2.1. O que É Geometria Analítica?

A geometria analítica é o ramo da matemática que se dedica ao estudo em pormenor das figuras geométricas e seus respectivos dados, tais áreas, volumes, pontos de intersecção, ângulos de inclinação, etc.

A geometria analítica, para os seus estudos emprega técnicas básicas de analise matemática e de álgebra. Ela utiliza o sistema de coordenadas conhecido como **plano cartesiano,** que é bidimensional e é composto por dois eixos, um das abcissas **(o eixo x**) e outro das ordenadas **(o eixo y).**

No plano cartesiana se pode estudar todas figuras geométricas de interesse, atribuindo a cada ponto da mesma um lugar pontual nas coordenadas **(x,y)**

Os estudos da geometria analítica geralmente compreendem a interpretação matemática de uma figura geométrica, ou seja, a formulação de uma equação ou a representação gráfica de uma equação matemática.

Esta equivalência pode ser escrita a através da formula **y=f(x)**, onde f é uma função qualquer tipo

2.2. Breve Historia da Geometria Analítica

Rene Descartes, criou a Geometria Analítica

René Descartes, filosofo francês (1596-1650), é considerado o fundador desta área de estudos das matemáticas, com o seu apêndice titulado "*La Geometrie*" na sua celebre obra "*Discurso del método*"

Contudo, há evidencias de que o seculo XI, o matemático persa Omar Khayyam (1048-1131), empregou ideias semelhantes, que Descartes dificilmente podia saber, dai se-lhe atribuir a copaternidade da Geometria Analitica com Rene Descartes. Quer isto dizer que ambos, provavelmente inventaram a geometria separadamente.

O matemático holandês Franz Van Schooten (1615-1660) e seus colaboradores ampliaram, desenvolveram e divulgaram a geometria analítica no ocidente.

Era frequente chamar de "Geometria cartesiana", para render homenagem ao seu criador, mas esse termo hoje em dia é apenas usado para referir-se unicamente ao apêndice de René Descartes

2.3. Aplicações da geometria analítica

Ponte suspensa desenhada graças a geometria analítica.

A geometria analítica é uma das ferramentas conceptuais mais uteis a humanidade e nos dias de hoje as suas aplicações podemos ver em muitos exemplos, tais como:

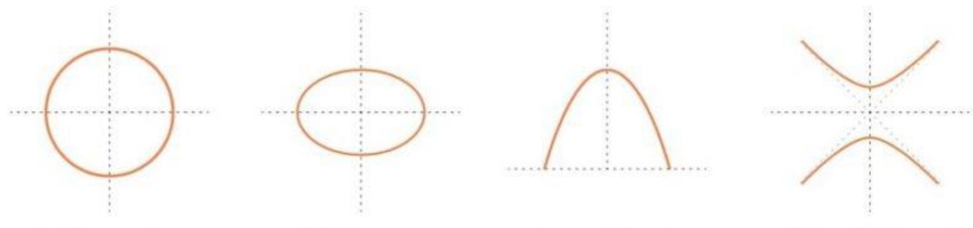
2.3.1. Pontes suspensas, desde as antigas pontes suspensas de madeira ate as versões modernas com cabos de aço, o principio geométrico da parábola se aplica em cada uma delas

2.3.2. As antenas parabólicas, para captar sinal de satélite para a nossas telefonias moveis, têm formas de um paraboloide, uma figura que vem da geometria analítica.

2.3.3. A observação astronómica, os corpos celestiais orbitam em uma trajectória que descreve uma elipse, como descreveu e desenhou Johannes Kepler (1571-1630) e na obra de Copérnico (1473-1543), uma circunferência. Estes cálculos só foram possíveis graças a Geometria analítica.

2.4. Fórmulas da geometria analítica

A geometria analítica fornece formulas para as figuras geométricas. Ela estuda as figuras geométricas e obtém suas equações básicas para representa-las tais como:



Círculo **Elipse** **Parábola** **Hipérbole**

2.4.1. **Rectas**, descritas pela formula $ax+by = c$

2.4.2. **Círculos**, descritos pela formula $x^2 + y^2 = r^2$

2.4.3. **Hipérboles**, descritas pela formula $xy = 1$

2.4.4. **Parábolas**, descritas pela formula $y = ax^2 + bx + c$

2.4.5. **Elipses**, descritas pela formula $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

UNIVERSIDADE SÃO TOMÁS DE MOÇAMBIQUE

CURSO: LASIR

1°SEMESTRE

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

3. MATRIZES

Definição: uma e um conjunto de números ordenados em filas e colunas. Para defini-la se utiliza letras maiúsculas.

Cada elemento da matriz $a_{ij,}$ esta definido por sub-índices: o primeiro indica a fila a pertence (i), e o segundo a coluna (j)

As matrizes são representadas são normalmente representadas como se segue

$$\mathbf{A_{mxn}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad A_{mxn} = (a_{ij}) \text{ onde } \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

A dimensão de uma matriz e definida como o numero de filas e coluna e designa-se **mxn**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m filas
n colunas

exemplos: $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

Ordem=2x2 Ordem=2x3 Ordem=3x2 Ordem=3x3

4. TIPOS DE MATRIZES

4.1. Matriz Fila: tem apenas uma fila **F=** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

4.2. Matriz Coluna: tem apenas uma coluna **C=**$\begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$

4.3. Matriz Quadrada: tem o mesmo numero de filas e colunas

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & \\ & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -8 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -4 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Para facilitar, usa-se a notação $\boldsymbol{A = [a_{ij}]_n}$ para representar, de forma abreviada, matrizes quadradas de ordem n

4.4. Matriz Rectangular: tem o numero de filas diferente do das colunas

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

4.5. Matriz Diagonal: matriz quadrada cujos elementos fora da diagonal principal são nulos

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D_1= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4.6. Matriz Escalar: matriz diagonal com todos elementos da diagonal principal iguais.

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad E_1= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

4.7. Matriz Identidade: matriz diagonal com todos elementos da diagonal principal iguais a 1.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_1= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.8. Matriz Nula: matriz com todos elementos iguais a 0.

$$N= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.9. Matriz Triangular: uma matriz é triangular superior se é quadrada e todos elementos que se encontram abaixo da diagonal principal são nulos. Uma matriz e triangular inferior se é quadrada e todos elementos que se encontram acima da diagonal principal são todos nulos.

$$T_s=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad\qquad T_i=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Triangular Superior   Triangular Inferior

4.10. Matriz Simétrica: matriz quadrática com todos elementos simétricos em relação diagonal principal, quer dizer $a_{ij}=a_{ji}$.

$$S=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

4.11. Matriz Anti-simétrica: matriz quadrática com todos elementos simétricos em relação a diagonal principal opostos, quer dizer $a_{ij}= -a_{ji}$. Da definição se deduz que os elementos da diagonal principal de uma matriz anti-simetrica devem ser nulos

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

4.12. Matriz Transposta A^t: é aquela que se obtem trocando as suas linhas com as suas colunas.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -6 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t=\begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \\ -3 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Propriedades da Matriz transposta:

1) $(A^t)^t = A$
2) $(A+B)^t = A^t+B^t$
3) $(\alpha B)^t= \alpha B^t$ com α $\alpha \in R$
4) $(AB)^t = A^t B^t$

4.13. Matriz Escalonada: é uma matriz que se verificam em simultâneo as seguintes duas condições:

1) Todas as filas 0 estão na parte inferior da matriz.
2) O primeiro elemento não nulo de cada fila, exceptuando a primeira, se encontra mais a direita que o primeiro elemento não nulo da fila anterior.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

A é uma matriz escalonada de dimensão 3x4

Portanto uma matriz está na forma escalonada se o número de zeros que precede o primeiro elemento não nulo de cada linha cresce de cada linha para a seguinte abaixo dela até que restem ou não, apenas linhas nulas.

Nota: A matriz não precisa ser quadrada para ser escalonada.

5. IGUALDADE DE MATRIZES

Duas matrizes A e B, de ordem m× n, são iguais se todos os seus elementos são iguais, quer dizer

$$a_{ij}=b_{ij} \text{ , } \forall\ i, j.$$

Também se pode escrever

$$a_{ij}=b_{ij},\ \forall i \in \{1,2, \dots m\} \text{ , } \forall j \in \{1,2, \dots n\}$$

$$A = \begin{pmatrix} s & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -t \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix} \qquad B= \begin{pmatrix} s & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -t \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix}$$

6. OPERAÇOES SOBRE MATRIZES.

6.1. Adição de Matrizes

Dadas as matrizes $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{mxn}}$ e $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b_{ij}}]_{\boldsymbol{mxn}}$, a adição das matrizes A e B é a matriz $\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{c_{ij}}]_{\boldsymbol{mxn}}$ onde $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ para $\forall\ i, j$

Notação: C=A+B $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}]_{\boldsymbol{mxn}}$

Exemplo: dadas as matrizes

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -t \\ i & 2 & 0 \\ 1 & t & 3j \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{pmatrix} s & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -t \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix},$$

calcule C=A+B para $\forall\ i, j, s, t \in \mathbb{R}$

$$C=\begin{pmatrix} 2+s & 4 & -2 \\ -4 & 6 & -2t \\ i & 4 & 0 \\ 2 & 2t & 3j \end{pmatrix}$$

6.1.1. Propriedades da Adição de Matrizes

Considere as matrizes $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{mxn}}$, $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b_{ij}}]_{\boldsymbol{mxn}}$ e $\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{c_{ij}}]_{\boldsymbol{mxn}}$ então são validas as seguintes propriedades para a adição de matrizes:

1) Comutatividade: A+B=B+A
2) Associatividade: (A+B) +C=A+(B+C)
3) Elemento Neutro da Soma: A+ O= A, $0 = [\mathbf{0}]_{\boldsymbol{mxn}}$
4) Elemento Simétrico: $A + (-A) = 0 \quad (A - A = 0)$

Observação. $-A = -1 \quad A = [\mathbf{-1}(\boldsymbol{a_{ij}})]_{\boldsymbol{mxn}} = [-\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{mxn}}$

6.2. Multiplicação de Matriz por um Escalar

Dado o escalar α, o produto da matriz A pelo escalar é uma matriz da mesma ordem cujos elementos foram multiplicados pelo valor α. Em outras palavras, se $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{mxn}}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ o produto de A pelo escalar α é uma matriz C de elementos C_{ij} e com $c_{ij} = \propto a_{ij}$ para todos os valores i, j definidos na matriz A. Isto é: $\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{c_{ij}}]_{\boldsymbol{mxn}}$ onde $c_{ij}= \alpha c_{ij}$ para $\forall\ i, j$

Notação: $C = \propto A = \propto [a_{ij}]_{mxn}$

Exemplo: Dada a matriz M=$\begin{pmatrix} 2+s & 4 & -2 \\ -4 & 6 & -2t \\ i & 4 & 0 \\ 2 & 2t & 3j \end{pmatrix}$, multiplique por $\propto = -2$

$$\propto M = -2\begin{pmatrix} 2+s & 4 & -2 \\ -4 & 6 & -2t \\ i & 4 & 0 \\ 2 & 2t & 3j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)(2+s) & (-2)4 & (-2)(-2) \\ (-2)(-4) & (-2)6 & (-2)(-2t) \\ (-2)i & (-2)4 & (-2)\ 0 \\ (-2)2 & (-2)\ 2t & (-2)3j \end{pmatrix}$$

$$\propto M = \begin{pmatrix} -4-2s & -8 & 8 \\ 8 & -12 & 4t \\ -2i & -8 & 0 \\ -4 & -4t & -6j \end{pmatrix}$$

6.2.1. Propriedades da Multiplicação de Matrizes por Escalar

Sejam A e B duas matrizes da mesma ordem e α, β dois escalares, então e valido:

1) α(βA) =(αβ)A
2) α(A+B) =αA+αB
3) (α+β)A= αA+βA,
4) 1.A=A

6.3. Multiplicação de Matrizes

Dadas as matrizes $\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{a_{ij}}\right]_{\boldsymbol{mxn}}$ e $\boldsymbol{B} = \left[\boldsymbol{b_{ij}}\right]_{\boldsymbol{mxn}}$, o produto das matrizes A e B é a matriz $\boldsymbol{C} = \left[\boldsymbol{c_{ij}}\right]_{\boldsymbol{mxn}}$ cujos elementos c_{ij} da forma:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik} b_{kj}$$

Partindo da definição de

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2t} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} & & a_{3t} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mt} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{31} & b_{33} & & b_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{t1} & b_{t2} & b_{t3} & \cdots & b_{tn} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{31} & c_{33} & & c_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Os elementos do matriz produto C, serão dados pela seguinte equação:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \dots + a_{it}b_{tj}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik}b_{kj}$$

Exemplo: Sejam dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 3x3 e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{bmatrix}$ 3x4

Para obter a matriz $\boldsymbol{C = AxB} = [\boldsymbol{C_{ij}}]_{\boldsymbol{3x4}}$ com os elementos

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik}b_{kj}\ , i = 1 \dots 3\ \ j = 1 \dots 4$$

Assim teremos para:

1ª Linha

C_{11}= (2.1)+(3.2)+ (4.3) =2+6+12=20

C_{12}= (2.1)+(3.4)+ (4.9) =2+12+36=50

C_{13}= (2.1)+(3.8) +(4.27) =2+24+108=134

C_{14}= (2.1)+(3.16)+ (4.81) =2+48+324=374

2ª Linha

C_{21}= (3.1)+(4.2) +(5.3) =3+8+15=26

C_{22}= (3.1)+(4.4)+ (5.9) =3+16+45=64

C_{23}= (3.1)+(4.8) +(5.27) =3+36+135=170

C_{24}= (3.1)+(4.16) +(5.81) =3+64+405=472

3 Linha

C_{31}= (4.1)+(5.2)+ (6.3) =4+10+18=32

C_{32}= (4.1)+(5.4) +(6.9) =4+20+54=78

C_{33}= (4.1)+(5.8)+ (6.27) =4+40+162=206

C_{34}= (4.1)+(5.16) +(6.81) =4+80+486=570

No fim teremos a matriz seguinte:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 50 & 134 & 374 \\ 26 & 64 & 170 & 472 \\ 32 & 78 & 206 & 570 \end{bmatrix} = 3x4$$

Para multiplicação de matrizes, há que ter atenção com a ordem das linhas e colunas das matrizes a multiplicar, isto e, só se pode multiplicar matrizes quando o número de colunas da primeira matriz A for igual ao número de linhas da segunda matriz B. A matriz C resultante da multiplicação A.B terá o número de linhas igual ao matriz A e o número de colunas igual ao número da B

$A_{mxn} \cdot B_{nxp} = C_{mxp}$

6.3.1. Propriedades da Multiplicação de Matrizes

Considere A, B e C matrizes, então valem as seguintes propriedades para a multiplicação de matrizes:

1) Associativa: A(BC)=(AB)C=B(AC)
2) Distributiva: A(B+C) =AB+AC
3) (A+B)C=AC+BC
4) α(AB)=(αA)B=A(αB) , $\alpha \in R$

Note-se que em geral $AB \neq BA$, portanto a multiplicação não e comutativa

6.3.2. Exercícios

1. Uma matriz $A \in M_{3x3}$ tem a seguinte propriedade $a_{ij} = \frac{1}{i+j}$ e uma matriz $B \in M_{3x3}$ tem a seguinte propriedade $b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i+j} & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases}$

a) Construa as matrizes A e B
b) Calcule A+B, A-B
c) De as expressões em termos de i e j para $(A+B)_{ij}$ e $(A-B)_{ij}$

2. Demostre que $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. Demostrar que A(BC)= (AB)C, onde A,B e C são matrizes adequadas
4. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ determinar matriz B tal que

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Seja a matriz$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ determine a matriz B tal que AB=BA

6. Uma fábrica produz dois tipos de refrigerantes, RT1 e RT2, em três modelos de embalagens: A, B y C. As quantidades de refrigerantes tipo RT1 engarrafados por semana são: 200 unidades do modelo A, 100 do modelo B e 150 unidades do modelo C; a quantidade de refrigerantes do tipo RT2 produzidos por semana são: 150 do modelo A, 250 modelo B e 400 do modelo C. O modelo A leva 20 horas no engarrafamento e 1 hora na selagem. O modelo B leva 25 horas no engarrafamento e 1,5 horas na selagem enquanto que o modelo C leva 30 horas no engarrafamento e 2 horas na selagem.

   a) Descreva a informação dada na forma matricial

7. Dadas as matrizes $M = \begin{pmatrix} 1-s & 4 & -2 \\ -4 & 6 & -2t \\ 2i & 4 & 0 \\ 2 & 2t & 2j \end{pmatrix} \quad e \quad S = \begin{pmatrix} 2-2s & 8 & 8 \\ 8 & 10 & 4t \\ 4 & 4t & -6j \end{pmatrix}$

   determine

a) R=MS
b) $T=(M.S)^t$
c) V=1/2MS
d) X=SM

7. POTENCIA DE UMA MATRIZ

Seja *A* uma matriz quadrada e *p* um número inteiro positivo, a potência *p* da matriz *A*, denotada por A^p está definida por:

$$A^p = \underbrace{A \ldots A}_{p\ vezes}$$

Dadas as matrizes $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{n}}$ com a_{ij}=i-j calcule A^p para p=2,3,4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

assim $A^2=A.A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3=AAA=A^2A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Observações:

1. Calcular A^p equivale a calcular $A^{p-1}.A$. Assim, se quiser encontrar $\boldsymbol{A^{50}}$, calcule $\boldsymbol{A^{49}}$ e multiplique o resultado por *A* (para o que previamente calculou o valor de $\boldsymbol{A^{48}}$ e assim por diante).
2. Por definição, se $p = 0$ e $A \neq 0$, então $A^0 = I$

7.1. Exercício:. Calcular A4 e A5

8. TRAÇO DE UMA MATRIZ

Dada $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{n}}$ o traço de A, denotado por Tr(A), é o número dado pela soma dos elementos da diagonal principal. Isto é:

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \text{ i=j}$$

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow$ Tr(A)= 1+0+7+5=13

8.1. Propriedades do traço:

Dadas as matrizes $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{n}}$ e $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b_{ij}}]_{\boldsymbol{n}}$ são verdadeiras as seguintes propriedades

1) Tr(A+B) = Tr(A) +Tr(B)
2) Tr(αA) = αTr(A)
3) Tr(A’) =Tr(A)
4) Tr(AB) =Tr(BA)

9. MATRIZ ELEMENTAR

Uma matriz é denominada elementar se for obtida por meio de uma única mudança na matriz identidade. Essa mudança pode ser de um dos seguintes tipos:

1) A troca de uma linha (ou coluna) por outra linha (ou coluna);
2) A multiplicação de uma linha (ou coluna) por um valor **α∈R**;
3) A soma de uma linha (ou coluna), multiplicada pelo valor α∈R, com outra linha (ou coluna)

Exemplos:

a) A matriz elementar de ordem 2 obtida ao trocarmos a linha 1 pela linha 2 da matriz identidade de ordem 2 dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) A matriz elementar de ordem 4 obtida ao dividir a linha 3 da matriz identidade (de ordem 4) por −7 é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{3}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) A matriz elementar de ordem 3 obtida ao multiplicar a linha 2 por 4 e somar com a linha 3 da matriz identidade (de ordem 3) é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 + 4L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição: Dadas matrizes A e B de dimensão mxn, diz-se que B é equivalente a A por linhas, se B é obtido a partir de A por meio de um numero finito de operações elementares de linhas.

Definição: Una matriz A de ordem mxn se diz **reduzida** por linhas se:

1) O primeiro elemento não nulo de cada linha é 1
2) Cada coluna de A que tem o primeiro elemento não nulo de linhas não nulas, tem todos outros elementos iguais a zero.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

.

Teorema: Toda matriz A de dimensão mxn é equivalente por linhas a uma matriz reduzida por linha

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-3F_1 \end{matrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} F_2=(-1)F_2 \\ F_3=F_3-2F_2 \end{matrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $F_1=F_1-2F_2$ Matriz reduzida por linha

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. MATRIZ ESCALONADA REDUZIDA

Definição: Una matriz $\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{a_{ij}}\right]_{\boldsymbol{mxn}}$ é uma matriz escalonada **reduzida** por linhas se

1) A é reduzida por linha;
2) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo)
3) Se as linhas 1,2,3…,r com (r ≤m) são linhas não nulas de A, e se o primeiro elemento não nulo se encontra na linha i ocorre na coluna k então, $k_1 < k_2 \ldots < k_r$. Esta condição impõe a forma escalonada da matriz, isto é, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem apenas linhas nulas, se houverem.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

r=5

i=1 k=2 $k_1<k_2<k_4<k_3<k_4<k_5<k_4$

i=2 k=4

i=3 k=5 2<4<5<6<7

i=4 k=6

i=5 k=7

UNIVERSIDADE SÃO TOMÁS DE MOÇAMBIQUE

CURSO: LASIR

1°SEMESTRE

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

11. DETERMINANTE DE UMA MATRIZ

11.1. Determinantes de 2ª e 3ª Ordem

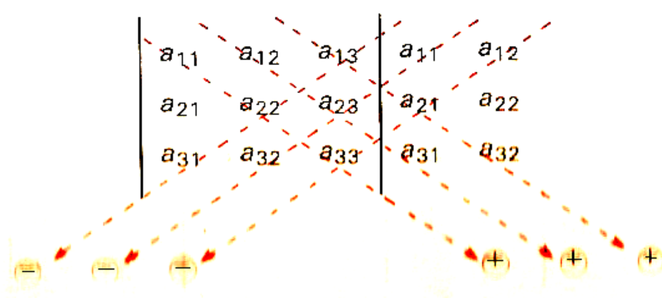
Dada uma matriz quadrada de ordem 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, o valor do determinante se define como $\mathbf{det}\, \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

Exemplo:

se $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ então $\mathbf{det}\, \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 3.2 - 2.(-1) = 8}$

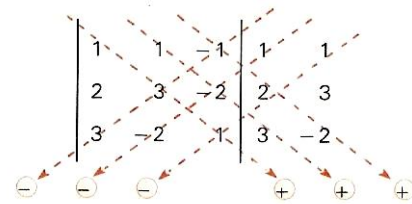
Considerando agora uma matriz de ordem 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ o determinante da matriz pode ser dado pelo **método de Sarrus** que consiste em:

- Repetir ao lado do determinante as duas primeiras colunas da matriz
- Obter o produto segundo o esquema.



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemplo: se $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ então fazendo



Teremos $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix}$

det(A)=1.3.1+1. (-2).3+(-1).2.2] - [(-1).3.3+1. (-2).2+1.2.1]

=3-6-4+9+4-2=12-8=4

11.2. Menor de uma Matriz

Dada uma matriz quadrada, $\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{a_{ij}}\right]_{\boldsymbol{n}}$ n = a , o menor da matriz A, denotado por M_{ij}, é uma sub-matriz de ordem n – 1 obtida ao cancelarmos a linha i e a coluna j

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i1} & a_{ij} & & a_{in} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{M} = \left[\boldsymbol{a_{ij}}\right]_{\boldsymbol{n-1}}$$

Exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ então:

O menor M_{34} é obtido ao eliminarmos a linha 3 e a coluna 4, isto é:

$$M_{53}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

De igual modo obtemos o M_{44}, que será:

$$M_{44}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 6\\0 & 0 & 1 & 3\\3 & 4 & 7 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$M_{42}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 5 & 6\\0 & 1 & 2 & 3\\3 & 7 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$M_{25}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\3 & 4 & 7 & 1\\0 & 0 & 0 & -1\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

11.3. Cofactor de uma matriz Δ_{ij}

Definição: O cofactor $\boldsymbol{\Delta_{ij}}$ do elemento na posição (i, j) de uma matriz A é dado pelo valor do determinante M_{ij}, multiplicado pelo valor $(-1)^{i+j}$ Isto é:

$$\Delta_{ij}= (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{i+j}} det(M_{ij})$$

ou

$$\Delta_{ij}= (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Exemplo:

Seja a matriz quadrada, $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 6\\0 & 0 & 1 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, calcular

$\boldsymbol{\Delta_{34}}$, $\boldsymbol{\Delta_{32}}$,.$\boldsymbol{\Delta_{11}}$,$\boldsymbol{\Delta_{31}}$, $\boldsymbol{\Delta_{33}}$, $\boldsymbol{\Delta_{14}}$, $\boldsymbol{\Delta_{23}}$, $\boldsymbol{\Delta_{32}}$,

$$\Delta_{34}= (-1)^{(3+4)}.|M_{34}| = (-1).\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}2 & 3\\0 & 0\\1 & 1\end{matrix} =)$$

$$\Delta_{34}= (-1)\big((2.0.1 + 3.1.1 + 4.0.1) - (4.0.1 + 2.1.1 + 3.0.1)\big)$$
$$= -1(0 + 3 + 0 - 0 - 2 - 0) = -1$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{(3+2)}.|M_{32}| = (-1).\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} =$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}((2.1.1 + 4.4.1 + 6.0.1) - (6.1.1 + 2.4.1 + 4.0.1)$$
$$= -1(2 + 16 + 0 - 6 - 8 - 0) = -4$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = (+1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}.|M_{11}| = (+1).\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 0$$

$\boldsymbol{\Delta_{11}}$= (1) ((0.0.1+1.0.1+4.0.1) -(4.0.1+0.0.1+1.0.1) =0

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = (+1)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 19 - 18 = 1$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}((3.1.1 + 4.4.1 + 6.0.1) - (6.1.1 + 3.4.1 + 4.0.1) = 1(19 - 18) = 1$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = (+1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 12 - 8 = 4$$

$\boldsymbol{\Delta_{33}}$=2.0.1+3.4.1+6.0.1-(6.0.1+2.4.1+3.0.1) =0+12+0-(0+8+0) =12-8=4

$$\Delta_{14} = (-1)^{1+4}|M_{44}| = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = (-1)(18 - 14) = -4$$

$\boldsymbol{\Delta_{32}}$=(-1)((2.1.1+4.4.1+6.0.1)-(6.1.1+2.4.1+3.0.1))=(-1)(18-14)=-4

11.4. Determinante de ordem n

Seja dada uma matriz de ordem n $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i1} & a_{ij} & & a_{in} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Define-se $$\det[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \Lambda\ a_{nj_n}$$

onde $J = J(j_1, j_2, \ldots j_n)$ é o número de inversões da permutação $(j_1, j_2, \ldots j_n)$ e ρ indica que a soma é estendida a todas as n! Permutações de (1,2,...,n).

Observação:

- ✓ Se a permutação $(j_1, j_2, \ldots j_n)$ tem um número par de inversões, o coeficiente $(-1)^J$ do termo correspondente no somatória é positivo e para caso de serem impares $(-1)^J$ será negativo.
- ✓ Em cada termo da somatória, existe um e apenas um elemento de cada linha, e apenas um elemento de cada coluna

11.4.1. Propriedades dos determinantes

Sejam A, B, I_n e N matrizes quadradas e k um escalar:

1. Se I_n é a matriz identidade, então: $\det(I_n) = 1$
2. Se N é uma matriz nula, então: det(N) =0
3. Se uma linha (ou coluna) da matriz A for nula, então: det(A) =0
4. A matriz A bem como a sua transposta A^t, possuem o mesmo determinante, isto é: $\det(A^t) = \det(A)$
5. Se B é a matriz obtida pela multiplicação de uma linha (ou coluna) da matriz A por um escalar k, então: det(B) = k det(A)
6. Se B = kA, onde k é um escalar, então: $\det(B) = k^n \det(A)$
7. Se B é a matriz obtida pela troca de duas linhas (ou colunas) de A, então: det(B) = - det(A)
8. Se A tem duas linhas (ou colunas) iguais, então: det(A) = 0
9. Se a diferença entre os elementos de duas linhas (ou colunas) de uma matriz A é uma mesma constante, então: det(A) = 0
10. Se uma linha (ou coluna) de A for múltipla de uma outra linha (ou coluna) de A, então: det(A) = 0
11. Ao fixar todas as linhas (ou colunas) de uma matriz excepto uma delas, o determinante de A será uma função linear da linha (ou coluna) não fixada da matriz.

12. O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante. Esta propriedade é válida para as colunas.
13. Ao multiplicar (ou dividir) uma linha (ou coluna) de uma matriz por um número real k, o determinante da matriz será multiplicado (ou dividido) por k.
14. det(A.B)=det(A).det(B)

11.4.2. Desenvolvimento de Laplace

O desenvolvimento de Laplace é uma fórmula de recorrência que nos permite obter o determinante de uma matriz de ordem *n*, a partir dos determinantes das sub-matrizes quadradas de ordem *n*-1. O procedimento fica simplificado se forem aplicadas as outras propriedades dos determinantes enunciadas acima.

Sabendo que:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Pode-se escrever esta soma como:

$$\det(A) = a_{11}\,(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Ou ainda: $\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Observe que o determinante da matriz inicial 3×3 pode ser expresso em função dos determinantes das sub-matrizes 2×2 , isto é, $\det A = a_{11}\,|A_{11}| - a_{12}\,|A_{12}| + a_{13}\,|A_{13}|$

Onde A_{ij} é a sub-matríz da inicial, de onde a *i*-ésima linha e a *j*-ésima coluna foram retiradas. Além disso, se considerarmos $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ obtemos a seguinte expressão:

$$\det A = a_{11}\,\Delta_{11} + a_{12}\,\Delta_{12} + a_{13}\,\Delta_{13}$$

Esta propriedade continua a ser válida para matrizes de ordem n, e assim podemos expressar.

$$\det A_{n\times n} = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + a_{i3}\Delta_{i3} + \Lambda + a_{in}\Delta_{in} = \sum_{j}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} \text{ ou ainda:}$$

$$\det A_{n\times n} = \sum_{j}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Lembrar que número Δ_{ij} (que é o determinante afectado pelo sinal $(-1)^{i+j}$ da sub-matriz A_{ij}, obtida de A retirando a i-ésima linha e a j-ésima coluna) é o cofactor ou complemento algébrico do elemento a_{ij} definido anteriormente

Observe que na fórmula dada, o determinante foi *desenvolvido* pela i-ésima linha. Uma fórmula análoga é valida para as colunas.

Exemplo1: calcular o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Escolhe-se qualquer linha ou coluna para calcular o determinante. Escolhendo a primeira linha teremos:

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.\Delta_{11} + (-2).\Delta_{12} + 3.\Delta_{13}$$

$$= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2-1) + 2(4-2) + 3(-2+2) = 1 + 4 + 0 = 5$$

Podemos também fazer o desenvolvimento a partir de uma coluna, coluna 2, que sera:

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2.\Delta_{12} + 1.\Delta_{22} + (-1)\Delta_{32}$$

$$= -2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 1.(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(4-2) + 1(2+6) + 1(-1-6) = 4 + 8 - 7 = 5$$

Por exemplo no exercício anterior podemos aplicar a propriedade 12, isto é, o determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante.

Neste caso $L_3 \rightarrow L_3 + L_2$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1.(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.(1+4) = 5$$

Exemplo 2: Calcular o determinante da Matriz C= $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Aplicando a propriedade 12, isto é, $C_1 \rightarrow C_1 - 2C_2$ podemos criar mais um zero na 2ªlinha.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & -3 & 0 \\ -8 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -5 & -3 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -5 & -3 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a propriedade 13, multiplicando a 1ªcoluna por (-1) e a matriz fica também é multiplicada por (-1).

$$2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -5 & -3 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 5 & -3 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a propriedade 12, isto é, $L_1 \rightarrow L_1 + 4L_3$ podemos criar mais um zero na 3ª Coluna.

$$-2\begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 5 & -3 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 37 & 15 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 37 & 15 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -2(-111-75) = 372$$

11.5. Exercícios:

Usando operações elementares e o método de Laplace calcule o determinante das seguintes matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -6 & -1 & -17 \end{pmatrix}$$

UNIVERSIDADE SÃO TOMÁS DE MOÇAMBIQUE

CURSO: LASIR

1°SEMESTRE

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

12. INVERSA DE UMA MATRIZ

12.1. Matriz Adjunta: Adj (A)

Dada $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{n}}$, a matriz adjunta de A é dada por:

$$Adj(A) = \left(cof(A)\right)^t$$

onde Cof (A) é a matriz formada pelos cofatores A_{ij} da matriz A, ou seja, é a matriz onde cada elemento a_{ij}é igual ao cofator A_{ij} da matriz A.

Exemplo: se $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

Os cofatores de A serão:

$A_{11}= (-1)^{1+1}\det [-4] =-4$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\det[2]=-2$ $\Longrightarrow$ $cof(A) = \bar{A} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, e

$A_{21}= (-1)^{2+1}\det [-2] =2$

$A_{22}= (-1)^{1+1}\det [1] =1$

$$Adj(A) = \bar{A}' = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

12.2. Exercício:. Encontrar a matriz adjunta de B dada por: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$$Cof(B) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculando os cofactores da matriz B teremos:

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \, det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = 5 - 29 = -19$$

$$B_{12} = (-1)^{1+2} \, det \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = -(-15 - 4) = 19$$

$$B_{13} = (-1)^{1+3} \, det \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = -18 - 1 = -19$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1} \, det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = -(5 - 0) = -5$$

$$B_{22} = (-1)^{2+2} \, det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 10$$

$$B_{23} = (-1)^{2+3} \, det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = -(12 - 1) = -11$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1} \, det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 4$$

$$B_{32} = (-1)^{3+2} \, det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = -(8 - 0) = -8$$

$$B_{33} = (-1)^{3+3} \, det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = 2 + 3 = 5$$

$$\mathrm{Adj(B)} = (\mathrm{Cof(B)})' = \overline{\mathrm{B}}'$$

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{pmatrix}$$

Mas também podemos calcular o determinante da matriz B que será: $\det(\mathrm{B}) = -19$**,** pois

$$\det(B)=b_{11}B_{11}+b_{12}B_{12}+b_{13}B_{13}$$

$$= 2.(-19) + 1.19 + 0.(-19)$$

$$= -38 + 19 + 0 = -19$$

det=1.19+1.10+6.(-8)=19+10-48=29-48=-19

Fazendo agora, Adj(B).B

$$adj(B).B = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-19).2 + (-5).(-3) + 4.1 & (-19).1 + (-5).1 + 4.6 & (-19).0 + (-5).4 + 4.5 \\ 19.2 + 10.(-3) + (-8).1 & 19.1 + 10.1 + (-8).6 & 19.0 + 10.4 + (-8).5 \\ (-19).2 + (-11).(-3) + 5.1 & (-19).1 + (-11).1 + 5.6 & (-19).0 + (-11).4 + 5.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{bmatrix}$$

$$= -19. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vemos que afinal $Adj(B).B = det(B).I_3 = -19. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Teorema:

Se A é uma matriz de ordem n, então

Adj (A). A= A. Adj(A) =det(A).I_n

12.3. Matriz singular

Definição: Uma matriz é dita singular se o seu determinante é nulo. Caso contrário, dizemos que a matriz é não singular.

Por exemplo, a matriz

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ é uma matriz singular porque:

$\det(\mathrm{A}) = 1.(-4) - [2.(-2)] = -4 + 4 = 0$

Já a matriz identidade de ordem 3 é não singular, pois det(I_3) =1.

Em geral, uma matriz identidade de ordem qualquer é não singular

12.4. Matriz Inversa

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é inversível se existe uma única matriz B (da mesma ordem) tal que:

$$\mathbf{AB=BA=I_n}$$

B é chamada matriz inversa de A.

Notação: $B=A^{-1}$

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ então a matriz $B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ é a respectiva matriz inversa porque:

$$AB = B.A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedade. Se A é inversível, então, A é não singular

Prova. Será suficiente encontrar que o det (A) não é nulo. Demonstrando por absurdo, supomos o contrário, isto é, det (A)=0, e devemos chegar a uma contradição

Usando as propriedades dos determinante e temos,

$$\det(A.B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$= 0.\det(B)=0$$

Por outro lado, temos por hipótese que A é inversível, então existe B tal que AB= I, assim

$$\det(AB)=\det(I)$$

$$=1$$

Assim, 0 =1, impossível, é uma contradição!

Uma vez que a contradição foi encontrada, então o enunciado é verdadeiro. Assim, a propriedade fica demonstrada.

Logo, A é não singular.

Sabendo que $\det(A) \neq 0$, para A inversível, uma forma de verificar a existência da matriz inversa é encontrar o valor do determinante da matriz.

Após essa verificação, o passo seguinte será encontrarmos a matriz inversa, A^{-1}.

Exemplo, as matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, podemos afirmar que apenas A possui inversa porque a matriz B é singular, logo não inversivel.

Mas como obter a inversa da matriz A^{-1}?

12.5. Matriz a partir da Matriz Adjunta

Se existe A^{-1}, então:

$$A.A^{-1}=A^{-1}.A=I$$

Pela propriedade da matriz adjunta sabemos que:

$$A.\left(\frac{Adj(A)}{\det(A)}\right) = \left(\frac{Adj(A)}{\det(A)}\right).A = I_n$$

Assim, a única possibilidade para que se verifique esta igualdade é ser:

$$A^{-1} = \left(\frac{Adj(A)}{\det(A)}\right)$$

Exemplo: se $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, vamos determinar a A^{-1}.

1. Calcular o $\det(A) = -6$

2. Formar a matriz $\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

3. Encontrar a matriz $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

4. Logo $A^{-1} = \left[\frac{Adj(A)}{\det(A)}\right] = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

12.6. Propriedades da Inversa de uma Matriz

Se A e B são inversíveis, então validas as seguintes propriedades:

1. $(A.B)^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$
2. $[(A^{-1})]^{-1} = A$
3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
4. $det(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$

12.7. Exercício:

1. seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, verifique se a sua matriz inversa é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & {}^{5}/_{19} & {}^{-4}/_{19} \\ -1 & {}^{-10}/_{19} & {}^{8}/_{19} \\ 1 & {}^{11}/_{19} & {}^{-5}/_{19} \end{bmatrix}$$

2. Calcule a Inversa da Matriz $A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\, det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = 25 + 18 = 43$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\, det \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 20 + 18 = 38$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\, det \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = 12 - 15 = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\, det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = -(10 + 9) = -19$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\, det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 20 - 9 = 11$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\, det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = 12 + 6 = 18$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\, det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 12 - 15 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\, det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 20 - 9 = -11$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\, det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = 20 + 8 = 28$$

$$Cof(A) = \begin{vmatrix} 43 & 38 & -3 \\ -19 & 11 & 18 \\ -3 & -11 & 28 \end{vmatrix} \Longrightarrow adj(A) = \left(Cof(A)\right)' = \begin{vmatrix} 43 & -19 & -3 \\ 38 & 11 & -11 \\ -3 & 18 & 28 \end{vmatrix}$$

$\boldsymbol{det = -4\,.(-19)\ + 5.11\ \ + 6.18 = 245}$ **,** então:

$$A^{-1} = \frac{1}{245}\begin{vmatrix} 43 & -19 & -3 \\ 38 & 11 & -11 \\ -3 & 18 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 43/245 & -19/245 & -3/245 \\ 38/245 & 11/245 & -11/245 \\ -3/245 & 18/245 & 28/245 \end{vmatrix} =$$

3. Calcular as inversas das matrizes abaixo a partir dos seus determinantes:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

12.8. Matriz Inversa a partir Método de Gauss-Jordan:

O método de Gauss-Jordan consiste em fazer transformações elementares em filas da matriz ate obter a matriz identidade. Fazendo estas operações com a matriz identidade chega-se a matriz $A^{-1.}$

Recordar que são operações elementares na matriz são:

1. Multiplicar ou dividir uma fila por um numero real diferente de zero.
2. Somar o subtrair uma fila a outra multiplicada por um numero real não nulo.
3. Mudar a posição das filas entre si.

Vejamos como se aplica o método de Gauss-Jordan, obtendo a inversa da Matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

i) Consideramos la matriz formada por A e a matriz identidade correspondente. No caso será:

$$(A|I_2) = \left(\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

ii) Fazer uma matriz triangular superior, isto é fazemos zeros por baixo da diagonal principal, usando transformações elementares de filas. A melhor forma de obtê-los e fazer zero os elementos por baixo da diagonal na primeira coluna usando a primeira linha. De seguida, fazer zeros os elementos por baixo da diagonal na segunda coluna usando a segunda fila e, assim sucessivamente. Neste caso basta somar a fila 2 com a fila 1 para se obter:

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

iii) Uma vez feita a matriz triangular superior, faz-se a matriz triangular inferior, fazendo zeros os elementos por cima da diagonal principal. O processo e parecido com o anterior:

Fazer zero os elementos por cima da diagonal na ultima coluna usando a ultima fila. De seguida, fazer zero os elementos por cima da diagonal na penúltima coluna usando a penúltima linha, e assim sucessivamente.

No caso se obtém:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1-2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

iv) Já se tem uma matriz diagonal. O que falta e dividir cada fila por um numero adequado para se obter 1 na diagonal principal, isto é, obter a matriz identidade na parte esquerda.

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F_1}{3};\frac{F_2}{3}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

v) Uma vez que se tem a matriz identidade na parte esquerda, a parte direita constitui a matriz inversa.de ao aplicar o método de Gauss-Jordan, em algum momento uma fila for zero, então a matriz não tem inversa.

Nota: Quanto maior for a ordem da matriz, melhor será aplicar o método de Gauss em comparação com o método directo

Exemplo: Calcular a inversa da matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(B|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3-F_1}= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2F_2-F_3}= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{4F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$(I_3|B^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & -1/2 \\ -1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

12.9. **Exercícios:** calcular as inversas das matrizes abaixo pelo método de Gauss-Jordan

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$