1 Домашняя работа №3

1. Составим уравнения и решим их :
$\begin{cases} EX = \int_{\beta}^{\infty} x\alpha^{-1}e^{-\frac{x-\beta}{\alpha}} \\ EX^2 = \int_{\beta}^{\infty} x^2\alpha^{-1}e^{-\frac{x-\beta}{\alpha}} \end{cases} =$
$\begin{cases} EX = \alpha + \beta \\ EX^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \end{cases} =$
$\begin{cases} \alpha = EX - \sqrt{DX} \\ \beta = \sqrt{DX} \end{cases}$
$\Rightarrow \alpha^* = \sqrt{S^2}, \beta^* = \overline{X} - \sqrt{S^2}$

2. Запишем функцию правдоподобия:
$f(\overline{X}, \alpha) = (\frac{1}{2})^n \cdot e^{-(|X_1-\alpha|+|X_2-\alpha|+..+|X_n-\alpha|)}$
$\Rightarrow Lf(\overline{X}, \alpha) = n \cdot ln\frac{1}{2} - (|X_1 - \alpha| + |X_2 - \alpha| + .. + |X_n - \alpha|)$
$\Rightarrow$ логарифм функции правдоподобия достигает максимум, когда сумма $(|X_1-\alpha|+|X_2-\alpha|+..+|X_n-\alpha|)$ достигает минимум. А данная сумма достигает минимум при α равной выборочной медиане.
То есть $\alpha^* = \overline{z}_{\frac{1}{2}}$

3. (a) $f(\overline{X}, \theta) = \theta^n X_1^{\theta-1} X_2^{\theta-1} .. X_n^{\theta-1} = \theta^n (X_1..X_n)^{\theta-1}$
$\Rightarrow Lf(\overline{X}, \theta) = n \cdot ln\theta + (\theta - 1)(lnX_1 + ..lnX_n)$
$Lf(\overline{X}, \theta)' = \frac{n}{\theta} + (lnX_1 + ..lnX_n)$ у которой ноль достигается в точке $-\frac{n}{lnX_1+..lnX_n} = -\frac{1}{\frac{1}{n}(lnX_1+..lnX_n)} = -\frac{1}{\overline{lnX}}$, которая является точкой максимума функции L
$\theta^* = -\frac{1}{\overline{lnX}}$

   (b) $f(\overline{X}, \theta) = 2^n \frac{X_1 \cdot X_2..X_n}{\theta^{2n}}$
$\Rightarrow Lf(\overline{X}, \theta) = n \cdot ln2 + (lnX_1 + .. + lnX_n) - 2n \cdot ln\theta$
$Lf(\overline{X}, \theta)' = -\frac{2n}{\theta}$ – это функция падает с ростом $theta$, а значит L максимальна в точке $X_{(n)}$
$\theta^* = X_{(n)}$

   (c) $f(\overline{X}, \theta) = \frac{\theta^n e^{-\frac{\theta^2}{2}(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+..+\frac{1}{X_n})}}{(\sqrt{2\pi})^n (X_1..X_n)^{\frac{1}{2}}}$
$\Rightarrow Lf(\overline{X}, \theta) = n \cdot ln\theta - \frac{\theta^2}{2}(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + .. + \frac{1}{X_n}) - \frac{n}{2}ln(2\pi) - \frac{1}{2}(lnX_1 + .. + lnX_n)$
$Lf(\overline{X}, \theta)' = \frac{n}{\theta} - \theta(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + .. + \frac{1}{X_n})$ у которой ноль достигается в точке $\sqrt{\frac{n}{(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+..+\frac{1}{X_n})}} = \frac{1}{\sqrt{\overline{X^{-1}}}}$, которая является точкой максимума функции L
$\theta^* = \frac{1}{\sqrt{\overline{X^{-1}}}}$

   (d) $f(\overline{X}, \theta) = \frac{\theta^n (lnX_1 \cdot lnX_2..lnX_n)^{\theta-1}}{X_1 \cdot X_2..X_n}$
$\Rightarrow Lf(\overline{X}, \theta) = n \cdot ln\theta + (\theta - 1)(ln(lnX_1) + ln(lnX_2) + .. + ln(lnX_n)) - (lnX_1 + .. + lnX_n)$
$Lf(\overline{X}, \theta)' = \frac{n}{\theta} + \theta(ln(lnX_1) + ln(lnX_2) + .. + ln(lnX_n))$ у которой ноль достигается в точке $-\sqrt{\frac{n}{(ln(lnX_1)+ln(lnX_2)+..+ln(lnX_n))}} = \frac{-1}{\sqrt{\overline{ln(lnX)}}}$, которая является точкой максимума функции L
$\theta^* = \frac{-1}{\sqrt{\overline{ln(lnX)}}}$

   (e) $f(\overline{X}, \theta) = \frac{e^{-(|X_1|+|X_2|+..+|X_n|)}}{2^n(1-e^{-\theta})^n}$
$\Rightarrow Lf(\overline{X}, \theta) = -(|X_1| + |X_2| + .. + |X_n|) - n \cdot ln2 - n \cdot ln(1 - e^{-\theta})$ – это функция падает с ростом θ, а значит L максимальна в точке наименьшей из допустимых θ. Так как $\theta \geq |y| \Rightarrow$ максимум достигается в точке $max_i|X_i|$
$\theta^* = max_i|X_i|$