

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Севастопольский государственный университет»

Кафедра информационных систем

КУРСОВОЙ ПРОЕКТ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»
НА ТЕМУ:
«ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В ИНФОРМАТИКЕ»

Студента 2 курса группы ИС/б-21-о
направление подготовки 09.03.02

(подпись) _____ Куркчи А.Э.

« » _____ 2015г.

Руководитель _____

(должность, ученое звание, фамилия и
инициалы)

Оценка: _____

г. Севастополь

2015 г.

Содержание

Введение	3
1. Приближенное решение нелинейных	4
2. Решение систем линейных уравнений прямыми и итерационными методами	8
3. Численное дифференцирование и интегрирование функций	12
4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений.....	17
5. Одномерная оптимизация.....	22
6. Многомерная оптимизация	26
7. Методы обработки экспериментальных данных	29
Заключение.....	36
Библиографический список.....	37

Введение

Целью проведения курсовой работы является закрепление, углубление и обобщение знаний, получаемых во время обучения.

В связи с развитием новой вычислительной техники инженерная практика наших дней все чаще и чаще встречается с математическими задачами, точное решение которых получить весьма сложно или невозможно. В этих случаях обычно прибегают к тем или иным приближенным вычислениям. Численные методы дают приближенное решение задачи. Это значит, что вместо точного решения и (функции или функционала) некоторой задачи мы находим решение у другой задачи, близкое в некотором смысле (например, по норме) к искомому. Основная идея всех методов — дискретизация или аппроксимация (замена, приближение) исходной задачи другой задачей, более удобной для решения на ЭВМ, причем решение аппроксимирующей задачи зависит от некоторых параметров, управляя которыми, можно определить решение с требуемой точностью.

Полученные численными методами результаты обычно содержат погрешности, являясь лишь приближениями к искомому ответам. Вызвано это рядом объективных причин, среди которых есть не связанные непосредственно с методами вычислений. Погрешности появляются уже на первом этапе, ибо математическая модель задачи — это приближенное, идеализированное описание задачи на языке математики. Ради того чтобы получаемая в итоге математическая задача оказалась доступной для дальнейших исследований, учитывают лишь наиболее важные параметры, условия и особенности исходной задачи. Понятно, что чем меньше факторов отбрасывается, тем точнее получается модель. Несмотря на приближенность результатов математического моделирования, без него в приложениях математики не обойтись. Оно представляет собой обязательную ступень при переходе от нематематической задачи к математической.

В курсовой работе рассматриваются не прикладные, а типовые математические задачи, которые могут возникнуть при переходе от реальных систем к их математическим моделям, поэтому основное внимание уделяется последнему этапу.

ПЗ 1

Приближенное решение нелинейных уравнений

1. Цель

Выполнение практического задания имеет целью формирование навыков практических расчетов при решении нелинейных уравнений. В данной работе необходимо изучить правила выбора начального приближения, критерии останова вычислений и условия сходимости методов ложного положения и Ньютона-Рафсона.

2. Ход работы

2.1 Графическое определение действительных корней уравнения

Дано $f(x) := x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ уравнение с коэффициентами $a := -7$ $b := 7$ $c := 15$.
График функции изображён на рисунке 1.

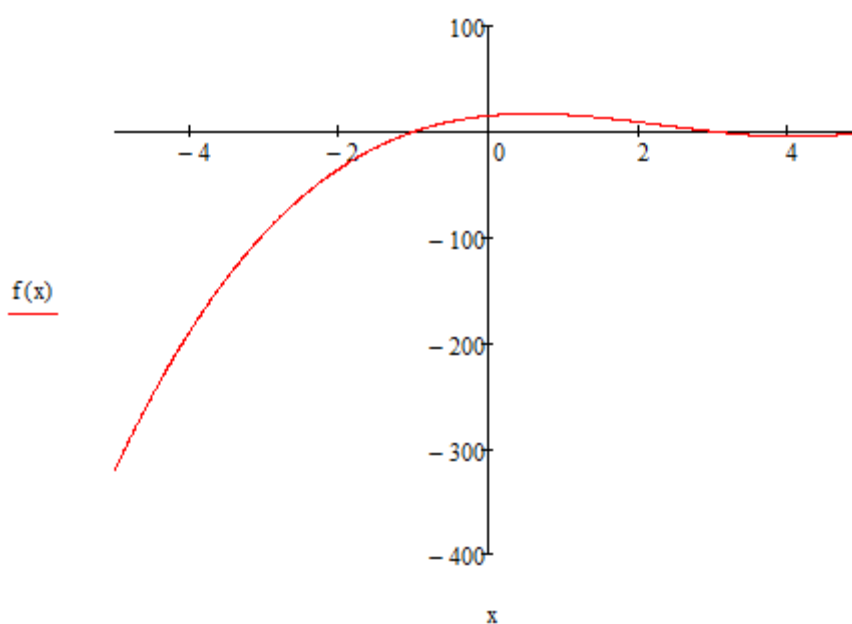


Рисунок 1 – график функции $f(x)$

Из графика видно, что приближенное значение корня – абсцисса точки пересечения графика функции с осью Ox , то есть $x \in [-2, 0]$.

2.2 Уточнение значения минимального по абсолютному значению корня уравнения, используя МЛП

При решении нелинейных уравнений, если известен интервал изоляции корня, его значение можно выяснить методом ложного положения. При этом неподвижный конец интервала изоляции выбирается исходя из условия Фурье: $f(A) \cdot fdd(A) = 910$ $f(B) \cdot fdd(B) = -210$

Тогда $x_0 = b$, и на каждом шаге значение x уточняется по формуле:

$$x_n(n) := \begin{cases} B & \text{if } n = 0 \\ \left[x_n(n-1) - \frac{f(x_n(n-1))}{f(x_n(n-1)) - f(A)} \cdot (x_n(n-1) - A) \right] & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

Погрешность на каждом шаге вычисляется по формуле:

$$\Delta n(n) := |x_n(n) - \xi| \quad (2), \text{ где } \xi := -1.$$

Найти корень уравнения $f(x)=0$ методом ложного положения с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ на отрезке $[-2,0]$. Так как $f(a)<0$, а $f(b)>0$, то на данном интервале график функции переходит через ось абсцисс. Последовательно найдем приближения.

$$x_n(1) = -0.6 \quad x_n(2) = -0.86216 \quad x_n(3) = -0.95531 \quad x_n(4) = -0.98581 \quad x_n(5) = -0.99553 \quad x_n(6) = -0.99859 \\ x_n(7) = -0.99956 \quad x_n(8) = -0.99986 \quad x_n(9) = -0.99996 \quad x_n(10) = -0.99999$$

$$\Delta n(1) = 0.4 \quad \Delta n(2) = 0.13784 \quad \Delta n(3) = 0.04469 \quad \Delta n(4) = 0.01419 \quad \Delta n(5) = 0.00447 \quad \Delta n(6) = 0.00141 \\ \Delta n(7) = 0.00044 \quad \Delta n(8) = 0.00014 \quad \Delta n(9) = 0.00004 \quad \Delta n(10) = 0.00001$$

На десятом приближении можно увидеть, что необходимая точность достигнута.

Ответ: число итераций – 10, $x_n(10) = -0.99999$

Блок-схема алгоритма реализации алгоритма ложного положения приведена в приложении А.

2.3 Уточнение значения минимального по абсолютному значению корня уравнения, используя МНР

Если корень уравнения $f(x)=0$ отделен, и $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки на интервале $[a,b]$, то для уточнения значения корня используют метод Ньютона-Рафсона. Первое значение x определяется из условия: $f(b)f''(b)>0$. На каждом шаге значение x уточняются по формуле:

$$x_n(n) := x_n(n-1) - \frac{f(x_n(n-1))}{f'(x_n(n-1))} \quad (3)$$

А погрешность по формуле:

$$\Delta n(n) := \left| \frac{f(x_n(n))}{f'(x_n(n))} \right| \quad (4)$$

Последовательно найдем приближения.

$$x_n(1) = -2.14286 \quad x_n(2) = -1.08932 \quad x_n(3) = -1.00867 \quad x_n(4) = -1.00086 \quad x_n(5) = -1.00008 \quad x_n(6) = -1.00001 \\ \Delta n(1) = 0.82683 \quad \Delta n(2) = 0.08617 \quad \Delta n(3) = 0.00864 \quad \Delta n(4) = 0.00086 \quad \Delta n(5) = 0.00008 \quad \Delta n(6) = 0.00001$$

На шестом приближении можно увидеть, что необходимая точность достигнута.

Ответ: 6 итерации, $x_n(6) = -1.00001$

Блок-схема алгоритма реализации алгоритма Ньютона – Рафсона приведена в приложении Б.

ВЫВОДЫ

В процессе выполнения практического задания были изучены алгоритмы практических расчетов при решении нелинейных уравнений. Были изучены правила выбора начального приближения, критерии останова вычислений и условия сходимости методов ложного положения и Ньютона-Рафсона.

Графическое определение действительных корней уравнения является простейшим методом нахождения приближенного значения корня уравнения, но он не дает результата высокой точности, поэтому мы можем определить к какому промежутку относится корень заданного уравнения.

После проведения расчетов можно сделать вывод, что самым быстрым в реализации оказался алгоритм Ньютона-Рафсона, так как нужная точность была достигнута на четвертой итерации, в то время как при алгоритме ложного положения только на шестой. Однако, следует отметить, что при реализации алгоритма Ньютона-Рафсона может возникнуть сложность с нахождением производной функции,

ПЗ 2

Решение систем линейных уравнений прямыми и итерационными методами

1. Цель

Выполнение практического задания имеет целью формирование навыков практических расчетов при решении систем линейных уравнений прямыми и итерационными методами. В данной работе необходимо изучить правила выбора вектора начального приближения, критерии останова вычислений и условия сходимости методов простой итерации и Зейделя.

2. Ход работы

Рассматривается линейная система из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 7x + 0,09y - 0,03z = 5,7 \\ 0,09x + 4y - 0,15z = 7,7 \\ 0,04x + 0,08y + 6z = 16,3 \end{cases}$$

Расположим уравнения в порядке убывания их b . После этого записываем уравнения относительно x, y, z .

$$\begin{cases} x = (5,7 - 0,09y + 0,03z) * \frac{1}{7} \\ y = (7,7 - 0,09x + 0,15z) * \frac{1}{4} \\ z = (16,3 - 0,04x - 0,08y) * \frac{1}{6} \end{cases}$$

Первое приближение – $x_{(0)}=0, y_{(0)}=0, z_{(0)}=0$.

1. Метод простой итерации.

Для решения СЛАУ этим методом используем формулы (2.1).

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)}) \\ x_3^{(k)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(k-1)} - a_{32}x_2^{(k-1)}) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Используя первое приближение к решению системы вычисляем новое значение x, y, z . Далее, используя выше вычисленные значения и используем на следующем шаге итерации. Производим такие действия, пока не достигнута

необходимая точность $\varepsilon=10^{-4}$. В Таблице 1 представлены этапы вычисления. Видно, что для достижения нужной точности понадобилось 4 итерации.

#	x	y	z	Dx	Dy	Dz	Dmax	ε
0	0	0	0	-	-	-	-	0,0001
1	0,81428571	1,92500000	2,71666667	0,81428571	1,92500000	2,71666667	2,71666667	
2	0,80117857	2,00855357	2,68557143	0,01310714	0,08355357	0,03109524	0,08355357	
3	0,79997105	2,00768241	2,68454476	0,00120753	0,00087116	0,00102667	0,00120753	
4	0,79997785	2,00767108	2,68456443	0,00000680	0,00001133	0,00001967	0,00001967	

Таблица 1 – Нахождение корней уравнения методом простых итераций.

2. Итерационный метод Зейделя.

Для решения СЛАУ этим методом используем формулы (2.2).

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)}) \\ x_3^{(k)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Используя первое приближение к решению системы вычисляем новое значение $x_{(1)}$. Далее вычисляют новое значение $y_{(1)}$, используя уже вычисленный $x_{(1)}$. Используя вычисленные значения $x_{(1)}$ и $y_{(1)}$, находим новое значение $z_{(1)}$. Производим такие действия, пока не достигнута необходимая точность $\varepsilon=10^{-4}$. В Таблице 2 представлены этапы вычисления. Видно, что для достижения нужной точности понадобилось 4 итерации.

#	x	y	z	Dx	Dy	Dz	Dmax	ε
0	0	0	0	-	-	-	-	0,0001
1	0,81428571	1,90667857	2,68581571	0,81428571	1,90667857	2,68581571	2,68581571	
2	0,80128191	2,00768925	2,68455560	0,01300380	0,10101067	0,00126012	0,10101067	
3	0,79997781	2,00767133	2,68456453	0,00130411	0,00001791	0,00000893	0,00130411	
4	0,79997807	2,00767166	2,68456452	0,00000027	0,00000033	0,00000001	0,00000033	

Таблица 2 – Нахождение корней уравнения итерационный метод Зейделя.

ВЫВОДЫ

В процессе выполнения практического задания были сформированы навыки практических расчетов решения систем линейных уравнений методом простых итераций и итерационным методом Зейделя.

Метод простой итерации — один из простейших численных методов решения уравнений. численный метод решения математических задач, приближённый метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Суть такого метода заключается в нахождении по приближённому значению величины следующего приближения (являющегося более точным). Метод позволяет получить значения корней системы с заданной точностью.

Итерационный метод Зейделя является модификацией метода простых итераций, где после задания начального приближения $x_{(0)}$ вместо параллельного итерирования производится последовательное итерирование, причем на каждой итерации в каждое последующее уравнение подставляются значения неизвестных, полученных из предыдущих уравнений. Используя этот метод, мы можем достигнуть заданной точности за меньшее количество итераций, чем при методе простых итераций.

Для данной системы линейных алгебраических уравнений мы достигли заданной точности в первом и втором методе за 4 итерации.

ПЗ 3

Численное интегрирование функций. Численное дифференцирование функций.

1. Цель

Выполнение практического задания имеет целью формирование навыков практических расчетов при дифференцировании и интегрировании функций методом построения линейных квадратурных формул, выявление особенностей применения формул трапеций и Симпсона, применением формул симметричной аппроксимации с остаточным членом при интерполировании по трем и пяти точкам.

2. Ход работы

2.1 Численное интегрирование функций.

Дана подынтегральная функция $y_i = f(x_i)$ и 5 точек:

y=f(x)	Значения X _i					Значения Y _i				
	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	Y ₀	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄
cos(x)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	1,0000	0,9950	0,9801	0,9553	0,9211

Таблица 3 – Исходные данные

Рассчитаем значение определенного интеграла $p1 = \int_{x_0}^{x_4} y \, dx$, используя общую формулу трапеций (3.1).

$$\int_a^b y \, dx = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1} + \frac{y_N}{2} \right) \quad (3.1)$$

$$h = \frac{b - a}{N} \quad (3.2)$$

Результат: $h1 = 0,1$; $p1 = 0,389095$.

По формуле (3.3), где, $\xi \in [a, b]$ рассчитаем значение остаточного члена определенного интеграла. За ξ примем значение 0,25.

$$R = -\frac{Nh^3}{12} y''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} y''(\xi) \quad (3.3)$$

Результат: $R1 = 0,000333$.

Рассчитаем значение определенного интеграла $p2 = \int_{x_0}^{x_4} y \, dx$, используя общую формулу Симпсона (3.4).

$$\int_a^b y \, dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_N) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2] \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1} \\ \sigma_2 &= y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Результат: $\sigma_1 = 1,9503$, $\sigma_2 = 0,9801$, $p_2 = 0,389417$.

По формуле (3.6) рассчитаем значение остаточного члена определенного интеграла.

$$R = -\frac{mh^5}{90} y^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{(4)}(\xi) \quad (3.6)$$

Результат: $R_2 = -0,0000002$.

Выполним расчеты по значениям подынтегральной функции в узлах x_0 , x_2 , x_4 по тем же формулам.

Результат: $h_2 = 0,2$, $p_3 = 0,388130$, $R_3 = 0,001333$; $\sigma_1 = 0,9801$, $\sigma_2 = 0$, $p_2 = 0,389433$, $R_4 = -0,00000355$.

Составим таблицу значений интеграла и сравним их.

Метод	Результат
-	0,389418
Трапеции (5 точек)	0,389095
Симпсона (5 точек)	0,389417
Трапеции (3 точек)	0,388130
Симпсона (3 точек)	0,389433

Таблица 4 – Конечные результаты.

2.2 Численное дифференцирование функций.

Пусть даны точки x_0, x_1, \dots, x_n – равноотносящиеся, т.е. $x_{i+1} - x_i = h$ ($i=0,1,\dots,n-1$) и пусть для функции $y=y(x)$ известны значения $y_i = y(x_i)$ ($i=0,1,\dots,n-1$).

$y=f(x)$	Значения $x_i; y_i$				
	$i-2$	$i-1$	i	$i+1$	$i+2$
$y=\cos(x)$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
	1,0000	0,9950	0,9801	0,9553	0,9211

Таблица 5 – Входные данные.

Вычислим значение h : $h = 0,3 - 0,2 = 0,1$.

Вычислим производную функции $y = f(x)$ в центральном узле по формуле (3.7) ($n=2$). Расчеты выполним с 6-ю знаками после запятой.

$$y'_0 = \frac{1}{2h} (y_1 - y_{-1}) - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\xi) \quad (3.7)$$

За ξ примем значение 0,5 и найдем 1-5 производные функции $y = f(x)$, которые будем использовать в последующих вычислениях.

Производная	Значение
y'	$-\sin(x)$
y''	$-\cos(x)$
y'''	$\sin(x)$
y''''	$\cos(x)$
y'''''	$-\sin(x)$

Таблица 6 – Производные высших порядков.

Найдем значение третьей производной в точке ξ : $y'''(\xi) = 0,2474040$.

Подставим найденные значения в формулу (3.7).

$$y'_0 = -0,198912$$

Вычислим производную функции $y = f(x)$ в центральном узле по формуле (3.8) ($n=4$). Расчеты выполним с 6-ю знаками после запятой.

$$y'_0 = \frac{2}{3h} (y_1 - y_{-1}) - \frac{1}{12h} (y_2 - y_{-2}) + \frac{h^4}{30} y^{(5)}(\xi) \quad (3.8)$$

Найдем значение третьей производной в точке ξ : $y'''' = -0,2474040$

Подставим найденные значения в формулу (3.8).

$$y'_0 = -0,198917$$

Составим таблицу, где сравним полученные результаты с теоретическим значением производной.

Теоретическое значение	-0,198669
$n = 2$	-0,198912
$n = 4$	-0,198669

Таблица 7 – Таблица результатов.

ВЫВОДЫ

В процессе выполнения практического задания были сформированы навыки практических расчетов при дифференцировании и интегрировании функций методом построения линейных квадратурных формул, выявление особенностей применения формул трапеций и Симпсона, применением формул симметричной аппроксимации с остаточным членом при интерполировании по трем и пяти точкам.

После нахождения интеграла двумя методами с 5, а затем с 3 точками была составлена таблица результатов, где найденные значения сравниваются с теоретическим значением. Видно, наиболее близким оказался метод Симпсона с 5 точками. Также можно сделать вывод, что увеличение количества точек приводит к уточнению, и тем самым улучшению, результата интегрирования.

При дифференцировании с 2 и 4 точками мы получили значения близкие к теоретическому. Однако при увеличении количества точек с 2 до 4 мы получаем более сложную формулу для вычисления, однако это увеличивает и точность результата.

ПЗ 4

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Цель

Выполнение практического задания имеет целью формирование навыков решения обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера и его модификацией, методом Рунге-Кутты.

2. Ход работы

1. Модификация методом Эйлера

Усовершенствованный метод Эйлера, когда сначала вычисляют промежуточные значения, является более точным по сравнению с классическим методом Эйлера.

Нам дано дифференциальное уравнение $y' = \frac{y^2 \ln x - y}{x}$, заданный интервал $[1, 2]$, шаг $h = 0.1$ и начальное условие $y_0 = 1$.

Для вычисления значений y_k будем использовать 3 формулы:

$$x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{h}{2} \quad (4.1) \quad y_{k+\frac{2}{2}} = y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k) \quad (4.2)$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}) \quad (4.3)$$

k	xk	yk	f(xk, yk)
0	1,000	1,000000	-1
0,5	1,050	0,950000	-0,8628256
1	1,100	0,913717	-0,7583136
1,5	1,150	0,875802	-0,6683481
2	1,200	0,846883	-0,5967665
2,5	1,250	0,817044	-0,5344658
3	1,300	0,793436	-0,4832823
3,5	1,350	0,769272	-0,4382787
4	1,400	0,749608	-0,4003859
4,5	1,450	0,729589	-0,3667625
5	1,500	0,712932	-0,3378969
5,5	1,550	0,696037	-0,3120753
6	1,600	0,681724	-0,2895569
6,5	1,650	0,667247	-0,2692681
7	1,700	0,654798	-0,2513444
7,5	1,750	0,642230	-0,2350922
8	1,800	0,631288	-0,2205782
8,5	1,850	0,620259	-0,2073428
9	1,900	0,610554	-0,1954138
9,5	1,950	0,600783	-0,1844803
10	2,000	0,592106	-0,1745479

Таблица 8 – Вычисление значений по усовершенствованному методу Эйлера.

Таким образом мы получили значения функций в точках x_1, x_2 :

x_k	y_k
1,000	1,000000
1,100	0,913717
1,200	0,846883
1,300	0,793436
1,400	0,749608
1,500	0,712932
1,600	0,681724
1,700	0,654798
1,800	0,631288
1,900	0,610554
2,000	0,592106

Таблица 9 – Таблица результатов.

2. Метод Рунге-Кутты

Нам дано дифференциальное уравнение $y' = -\frac{y}{x} + \ln xy^2$, заданный интервал $[1, 2,5]$, шаг $h = 0.1$ и начальное условие $y_0 = -2$.

Метод Рунге-Кутты характеризуется повышенной точности и принадлежит к многошаговым методам численного интегрирования задачи Коши:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \quad (4.4)$$

Пусть h – шаг интегрирования. Вычисление приближенного значения y_{k+1} при решении задачи Коши в точке x_{k+1} методом Рунге-Кутты заключается в выполнении операций, связанных с определением на каждом k -ом шаге коэффициентов:

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_k, y_k), \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= h \cdot f(x_k + h, y_k + k_3); \end{aligned} \quad (4.5)$$

и далее значений:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (4.6)$$

k	x _k	y _k	f(x _k , y _k)	f(x _k +h/ 2, y _k +k ₁ /2)	f(x _k +h/ 2, y _k +k ₂ /2)	f(x _k +h, y _k +k ₃)	k ₁	k ₂	k ₃	k ₄
0	1,0000 00	- 2,0000 00	2,0000 00	1,9856 56	1,9864 72	1,9468 63	0,2000 00	0,1985 66	0,1986 47	0,1946 86
1	1,1000 00	- 1,8018 15	1,9474 41	1,8881 50	1,8921 41	1,8179 57	0,1947 44	0,1888 15	0,1892 14	0,1817 96
2	1,2000 00	- 1,6130 48	1,8185 94	1,7346 84	1,7408 94	1,6501 44	0,1818 59	0,1734 68	0,1740 89	0,1650 14
3	1,3000 00	- 1,4393 83	1,6507 91	1,5575 70	1,5648 25	1,4701 36	0,1650 79	0,1557 57	0,1564 82	0,1470 14
4	1,4000 00	- 1,2832 88	1,4707 46	1,3780 93	1,3854 61	1,2944 97	0,1470 75	0,1378 09	0,1385 46	0,1294 50
5	1,5000 00	- 1,1450 82	1,2950 40	1,2084 81	1,2153 79	1,1321 11	0,1295 04	0,1208 48	0,1215 38	0,1132 11
6	1,6000 00	- 1,0238 34	1,1325 72	1,0546 54	1,0607 97	0,9867 90	0,1132 57	0,1054 65	0,1060 80	0,0986 79
7	1,7000 00	- 0,9179 97	0,9871 68	0,9186 13	0,9239 11	0,8593 20	0,0987 17	0,0918 61	0,0923 91	0,0859 32
8	1,8000 00	- 0,8258 04	0,8596 23	0,8001 41	0,8046 19	0,7488 58	0,0859 62	0,0800 14	0,0804 62	0,0748 86
9	1,9000 00	- 0,7455 04	0,7490 98	0,6979 08	0,7016 46	0,6538 03	0,0749 10	0,0697 91	0,0701 65	0,0653 80
10	2,0000 00	- 0,6754 71	0,6539 92	0,6101 26	0,6132 23	0,5722 95	0,0653 99	0,0610 13	0,0613 22	0,0572 29
11	2,1000 00	- 0,6142 55	0,5724 42	0,5349 16	0,5374 74	0,5024 84	0,0572 44	0,0534 92	0,0537 47	0,0502 48
12	2,2000 00	- 0,5605 93	0,5025 99	0,4704 94	0,4726 03	0,4426 68	0,0502 60	0,0470 49	0,0472 60	0,0442 67
13	2,3000 00	- 0,5134 02	0,4427 57	0,4152 53	0,4169 95	0,3913 37	0,0442 76	0,0415 25	0,0416 99	0,0391 34
14	2,4000 00	- 0,4717 59	0,3914 07	0,3677 94	0,3692 34	0,3471 88	0,0391 41	0,0367 79	0,0369 23	0,0347 19
15	2,5000 00	- 0,4348 81	0,3472 43	0,3269 15	0,3281 09	0,3091 11	0,0347 24	0,0326 91	0,0328 11	0,0309 11

Таблица 10 – Расчеты Метод Рунге-Кутты.

Таким образом мы получили значения функций в точках:

xk	yk
1	-2,000000
1,1	-1,801815
1,2	-1,613048
1,3	-1,43938
1,4	-1,28329
1,5	-1,14508
1,6	-1,02383
1,7	-0,918
1,8	-0,8258
1,9	-0,7455
2	-0,67547
2,1	-0,61425
2,2	-0,56059
2,3	-0,5134
2,4	-0,47176
2,5	-0,43488

Таблица 11 – Таблица результатов.

ВЫВОДЫ

В процессе выполнения практического задания были сформированы навыки практических расчетов при решении обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера и его модификацией, методом Рунге-Кутты.

Метод Рунге-Кутта по сравнению с методом Эйлера имеет на порядок меньшую погрешность, однако более сложен в использовании. При меньших требованиях к точности метод Эйлера даст результат сравнимой точности за меньшее количество операций.

ПЗ 5

Одномерная оптимизация

1. Цель

Выполнение практического задания имеет целью формирование навыков определения наименьшего и наибольшего значения функции, решения методами: половинного деления, средней точки и «золотого» сечения. Условия окончания вычислений.

2. Ход работы

1. Алгоритм Свенна:

Шаг 1. Вычислить $f(x_0)$; $f(x_0+h)$; $f(x_0-h)$; $k = 1$;

Шаг 2. Если $f(x_0+h) < f(x_0)$, то $x_1 = x_0+h$, перейти к шагу 5

Шаг 3. Если $f(x_0-h) < f(x_0)$, то $h = -h$; $x_1 = x_0+h$, перейти к шагу 5

Шаг 4. $a = x_0-h$; $b = x_0+h$; конец

Шаг 5. Если $f(x_{k-1}) \leq f(x_k)$, то перейти к шагу 7

Шаг 6. $k = k+1$; $h = 2h$; $x_{k+1} = x_k + h$; перейти к шагу 5

Шаг 7. Если $x_{k-1} < x_{k+1}$, то $a = x_{k-1}$; $b = x_{k+1}$; конец

Шаг 8. $a = x_{k+1}$; $b = x_{k-1}$; конец

Дана функция $f(x)=x^2+2$. Нам требуется найти точку экстремума (min по заданию) с точностью $\varepsilon = 0,2$. За x_0 примем значение $x_0 = 1$ и шаг $h = 2$.

Шаг 1:

Вычисляем значение функции в точке x_0 , (x_0+h) и (x_0-h) .

k	x	f(x)	f(x ₀ +h)	f(x ₀ -h)
1	1	3	11	3

Таблица 12 – Значения функции в точках.

Шаг 2:

Так как не выполняется условие $f(x_0+h) < f(x_0)$, то переходим к шагу 3.

Шаг 3:

Так как не выполняется условие $f(x_0-h) < f(x_0)$, то переходим к шагу 4.

Шаг 4:

$$a = x_0-h = -1; b = x_0+h = 3$$

Следуя этому алгоритму мы нашли начальную длину отрезка, которая содержит точку минимума.

2. Дихотомический поиск (метод деления отрезка пополам)

Метод относится к последовательным стратегиям и позволяет исключить из дальнейшего рассмотрения на каждой итерации ровно половину текущего интервала неопределенности. Задаются начальный интервал неопределенности и требуемая точность.

Алгоритм:

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$ и требуемую точность $\varepsilon > 0$

Шаг 2. Положить $k=0$.

Шаг 3. Вычислить среднюю точку $x_k^0 = \frac{a_k + b_k}{2}$, длину интервала $|L_{2k}| = b_k - a_k$ и значение функции в средней точке $f(x_k^0)$.

Шаг 4. Вычислить точки: $y_k = a_k + \frac{|L_{2k}|}{4}$, $z_k = a_k - \frac{|L_{2k}|}{4}$, а также значения функции в этих точках: $f(y_k)$, $f(z_k)$.

Шаг 5. Сравнить значения $f(y_k)$ и $f(x_k^0)$:

а) если $f(y_k) < f(x_k^0)$, исключить интервал $(x_k^0, b_k]$, положить $b_k = x_k^0$, $a_{k+1} = a_k$. Средней точкой нового интервала становится точка y_k : $x_{k+1}^0 = y_k$.

Перейти к шагу 7.

б) если $f(y_k) \geq f(x_k^0)$, перейти к шагу 6.

Шаг 6. Сравнить значения $f(z_k)$ и $f(x_k^0)$:

а) если $f(z_k) < f(x_k^0)$, исключить интервал $[a_k, x_k^0)$, положить $a_{k+1} = x_k^0$, $b_{k+1} = b_k$. Средней точкой нового интервала становится точка z_k : $x_{k+1}^0 = z_k$. Перейти к шагу 7.

б) если $f(z_k) \geq f(x_k^0)$, исключить интервалы: $[a_k, y_k)$, $(z_k, b_k]$, положить $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = z_k$. Средней точкой нового интервала остается точка x_k^0 : $x_{k+1}^0 = x_k^0$. Перейти к шагу 7.

Шаг 7. $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ и проверить условие окончания:

а) если $|L_{2(k+1)}| \leq \varepsilon$, процесс поиска заканчивается и $x^* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$. В качестве приближения можно взять середину этого интервала $x^* = x_{k+1}^0$.

б) если $|L_{2(k+1)}| > \varepsilon$, то положить $k=k+1$ и перейти к шагу 4.

Все этапы вычисления приведены в Таблице 13.

k	ak	bk	L	$L < \xi$	x0	yk	zk	f(y)	f(z)	f(x0)	$f(y) < f(x0)$
1	- 1,000	3,0000	4,0000	-	1,00000	0,00000	2,00000	2,000000	6,000000	3,000000	-
2	- 1,000	1,0000	2,0000	-	0,00000	-0,50000	1,50000	2,250000	4,250000	2,000000	+
3	0,000	1,0000	1,0000	-	0,50000	0,25000	0,25000	2,062500	2,062500	2,250000	+
4	0,000	0,5000	0,5000	-	0,25000	0,12500	0,12500	2,015625	2,015625	2,062500	+
5	0,000	0,2500	0,2500	-	0,12500	0,06250	0,06250	2,003906	2,003906	2,015625	+
6	0,000	0,1250	0,1250	-	0,06250	0,03125	0,03125	2,000977	2,000977	2,003906	+
7	0,000	0,0625	0,0625	+	0,03125						

Таблица 13 – Вычисление интервала дихотомическим поиском.

Следовательно точка минимума функции находится в интервале $x^* \in [0, 0,0625]$.

В качестве приближения можно взять середину этого интервала $x^* = 0,03125$, $f(x^*) = 2,001$.

ВЫВОДЫ

В процессе выполнения практического задания были сформированы навыки определения наименьшего значения функции, решении методом половинного деления, условия окончания вычислений.

В методе Свенна уменьшение длины отрезка, содержащего точку минимума, достигалось путем последовательного исключения частей этого отрезка. Величина интервала, исключаемого на каждом шаге, зависит от расположения двух пробных точек внутри отрезка. Поскольку координата точки минимум заранее неизвестна, целесообразно размещать пробные точки таким образом, чтобы обеспечивать уменьшение длины отрезка в одном и том же отношении.

Алгоритм дихотомического поиска (метод деления отрезка пополам) основан на анализе значений функции в трех точках, равномерно распределенных на текущем интервале (делящих его на четыре равные части). Поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины. Ввиду медленной сходимости этот метод редко используется для нахождения значения корня, обычно его применяют для локализации корня с дальнейшим уточнением значения корня каким-либо другим методом.

ПЗ 6

Многомерная оптимизация

1. Цель

Выполнение практического задания имеет целью формирование навыков нахождения экстремума функции первого порядка градиентным методом.

2. Ход работы

Алгоритм метода:

1. Начальный этап

Задать $x^0, \varepsilon > 0$.

Найти градиент функции в произвольной точке $\nabla f(X) =$

$$\left(\frac{df(x)}{dx_1}, \dots, \frac{df(x)}{dx_n} \right)$$

Положить $k=0$.

2. Основной этап

Шаг 1. Вычислить $\nabla f(x^k)$

Шаг 2. Проверить выполнение критерия останова $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon$

а) если критерий выполнен, расчет окончен, $x^* = x^k$

б) если критерий не выполнен, то перейти к шагу 3, если $k=0$, иначе к шагу 4.

Шаг 3. Определить $d_0 = -\nabla f(x^0)$

Шаг 4. Определить $b_{k-1} = \frac{\|\nabla f(x^k)\|^2}{\|\nabla f(x^{k-1})\|^2}$

Шаг 5. Определить $d_k = -\nabla f(x^k) + b_{k-1}d_{k-1}$

Шаг 6. Вычислить величину шага t_k из условия $f(x^k + t_k d_k) \rightarrow \min_{t_k > 0}$

Шаг 7. Вычислить $x^{k+1} = x^k + t_k d_k$

Шаг 8. Положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 1.

Дана функция $f(x) = (x - 2y)^2 + (y - 3)^2$, начальные условия $x_0 = 7$, $y_0 = 6$ и задана точность $\varepsilon = 0,25$

Найдем градиенты заданной функции. Будет два градиента, т.к. переменных в уравнении две. Градиентами будут являться частные производные функции по x и по y .

$$\nabla f(x) = \begin{cases} 2x - 4y \\ 10y - 4x - 6 \end{cases}$$

Дальнейшие вычисления представлены в Таблице 14.

	x	f(x _k)	∇f(x _k)	∇f(x _k)	b(k-1)	dk	tk
0	7 6	34	-10 26	27,85678	-	10 -26	0,08584
1	7,8584 3,76816	0,693805312	0,64416 0,248	0,690251	0,000614	-0,63802 -0,26396	2,91264
2	6,000077 2,99933	0,00000246	0,0028349 -0,007011	0,007562			

Таблица 14 – Нахождение экстремума функции.

Вычисления останавливаем, когда выполняется критерий останова $\|\nabla f(X^k)\| < \varepsilon$.

Следовательно точка минимума имеет координаты $x^* = 6,00077$, $f(x^*) = 2,99933$.

ВЫВОДЫ

В данной работе была проанализированная функция двух переменных и при помощи метода многомерной оптимизации, в частности метода сопряженных градиентов, была найдена точка минимума.

Градиентом функции многих переменных $f(x)$ называется вектор, составленный из первых частных производных функции по всем переменным. Метод сопряженных градиентов формирует направления поиска, в большей мере соответствующие геометрии минимизируемой функции. Это существенно увеличивает скорость их сходимости и позволяет, например, минимизировать квадратичную функцию. Одной из наиболее существенных проблем в методах сопряженных градиентов является проблема эффективного построения направлений. Метод Флетчера-Ривса решает эту проблему путем преобразования на каждом шаге антиградиента.

ПЗ 7

Методы обработки экспериментальных данных

1. Цель

Выполнение практического задания имеет целью формирование навыков использования метода наименьших квадратов.

2. Ход работы

Пусть некоторая функция задана таблицей значений:

x	2	4	6	8	10	12
y	4.5	7.1	8.2	7.3	9.0	6.2

1. Аппроксимация табличных данных линейной функцией.

Возьмем приближающуюся функцию в виде $F = ax + b$

Т.е. будем аппроксимировать эту таблично заданную функцию линейной зависимостью.

Тогда сумма квадратов отклонений - невязка имеет вид:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (7.1)$$

В методе наименьших квадратов значение функции (7.1) должно быть минимальным, а в точке минимума функции нескольких переменных частные производные этой функции по независимым параметрам равны 0. Следовательно условия минимума запишутся таким образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(a, b)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))x_i = 0 \\ -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b)) = 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

После несложных преобразований следующую систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными, где n – количество точек (в нашем случае $n = 6$)

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (7.3)$$

Для нахождения наилучших параметров методом наименьших квадратов решим систему (7.3).

Составим таблицу исходных значений точек x и y , а также значений x^2 и $x * y$. Нижняя строка таблицы – сумма столбцов.

x	y	x^2	$x*y$
2	4,5	4	9
4	7,1	16	28,4
6	8,2	36	49,2
8	7,3	64	58,4
10	9	100	90
12	6,2	144	74,4
42	42,3	364	309,4

Таблица 15 – Исходные значения.

Решим систему уравнений (7.3) матричным методом. Для этого составим матрицу коэффициентов A и матрицу свободных членов B . Затем составим обратную матрицу матрицы A .

$$A = \begin{vmatrix} 364 & 42 \\ 42 & 6 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 309,4 \\ 42,3 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 0,014286 & -0,1 \\ -0,1 & 0,866667 \end{vmatrix}$$

Чтобы получить a и b перемножим обратную матрицу A^{-1} на матрицу свободных членов B . Получаем значение коэффициентов: $a = 0,19$, $b = 5,72$.

Составим таблицу со значениями y табличными, y линейными (т.е. теми, которые получены при подставлении коэффициентов и соответствующих значений x в функцию F), значениями d отклонений, которые являются разностями между табличным значением y и значением y , вычисленным по аппроксимирующей функции (y линейное), и квадратов отклонений. Далее вычислим сумму квадратов отклонений d - невязку.

y	y линейное	d	d^2
4,5	6,1	-1,6	2,56
7,1	6,48	0,62	0,3844
8,2	6,86	1,34	1,7956
7,3	7,24	0,06	0,0036
9	7,62	1,38	1,9044
6,2	8	-1,8	3,24
			9,888

Таблица 16 – Расчетные значения.

Изобразим графически найденную линейную функцию и функцию, построенную по табличным значениям.

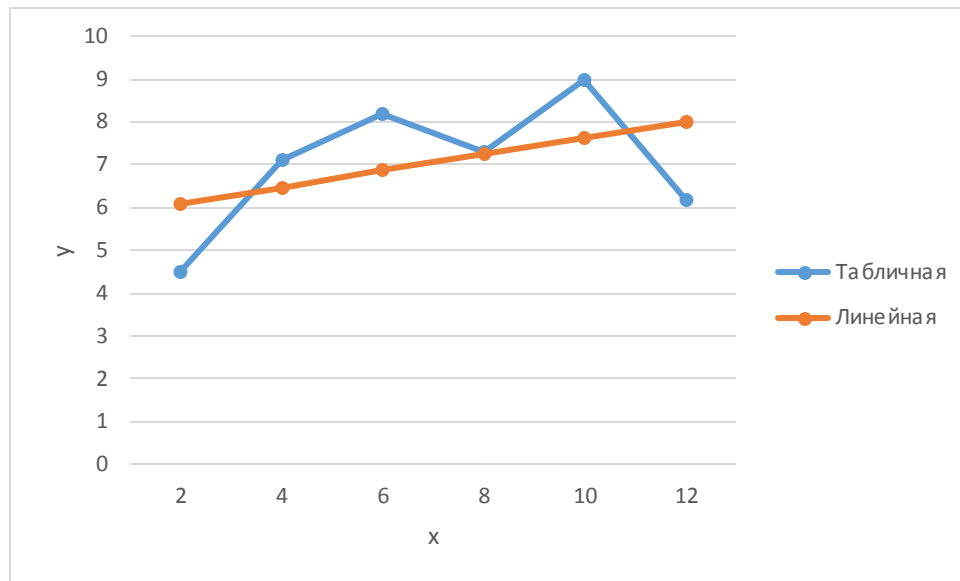


График 1 – Табличная и линейная функции.

2. Аппроксимация табличных данных квадратичной функцией

Возьмем приближающую функцию в виде $F = ax^2 + bx + c$

Тогда невязка имеет такой вид:

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \quad (7.4)$$

И система для нахождения a, b, c представляет собой систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (7.5)$$

Составим таблицу исходных значений точек x и y , а также значений x^2 , x^3 , x^4 , $x*y$ и x^2*y . Нижняя строка таблицы – сумма столбцов

x	y	x^2	x^3	x^4	$x*y$	x^2*y
2	4,5	4	8	16	9,00	18
4	7,1	16	64	256	28,40	113,6
6	8,2	36	216	1296	49,20	295,2
8	7,3	64	512	4096	58,40	467,2
10	9	100	1000	10000	90,00	900
12	6,2	144	1728	20736	74,40	892,8
42	42,3	364	3528	36400	309,4	2686,8

Таблица 17 – Исходные значения.

Решим систему уравнений (7.5) матричным методом. Для этого составим матрицу коэффициентов A и матрицу свободных членов B . Затем составим обратную матрицу матрицы A .

$$A = \begin{vmatrix} 36400 & 3528 & 364 \\ 3528 & 364 & 42 \\ 364 & 42 & 6 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 2686,8 \\ 309,4 \\ 42,3 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 0,001674 & -0,02344 & 0,0625 \\ -0,02344 & 0,342411 & -0,975 \\ 0,0625 & -0,975 & 3,2 \end{vmatrix}$$

Чтобы получить a , b , c перемножим обратную матрицу A^{-1} на матрицу свободных членов B . Получаем значение коэффициентов: $a = -0,11$, $b = 1,7275$, $c = 1,62$.

Составим таблицу со значениями y табличными, y квадратичных (т.е. теми, которые получены при подставлении коэффициентов и соответствующих значений x в функцию F), значениями d отклонений, которые являются разностями между табличным значением y и значением y , вычисленным по аппроксимирующей функции (y квадратичное), и квадратов отклонений. Далее вычислим сумму квадратов отклонений d - невязку.

y	$y_{\text{кв}}$	d	d^2
4,5	4,635714	-0,13571	0,018418367
7,1	6,772857	0,327143	0,107022449
8,2	8,031429	0,168571	0,028416327
7,3	8,411429	-1,11143	1,235273469
9	7,912857	1,087143	1,181879592
6,2	6,535714	-0,33571	0,112704082
			2,683714286

Таблица 18 – Расчетные значения.

Изобразим графически найденную квадратичную функцию, линейную функцию и функцию, построенную по табличным значениям.

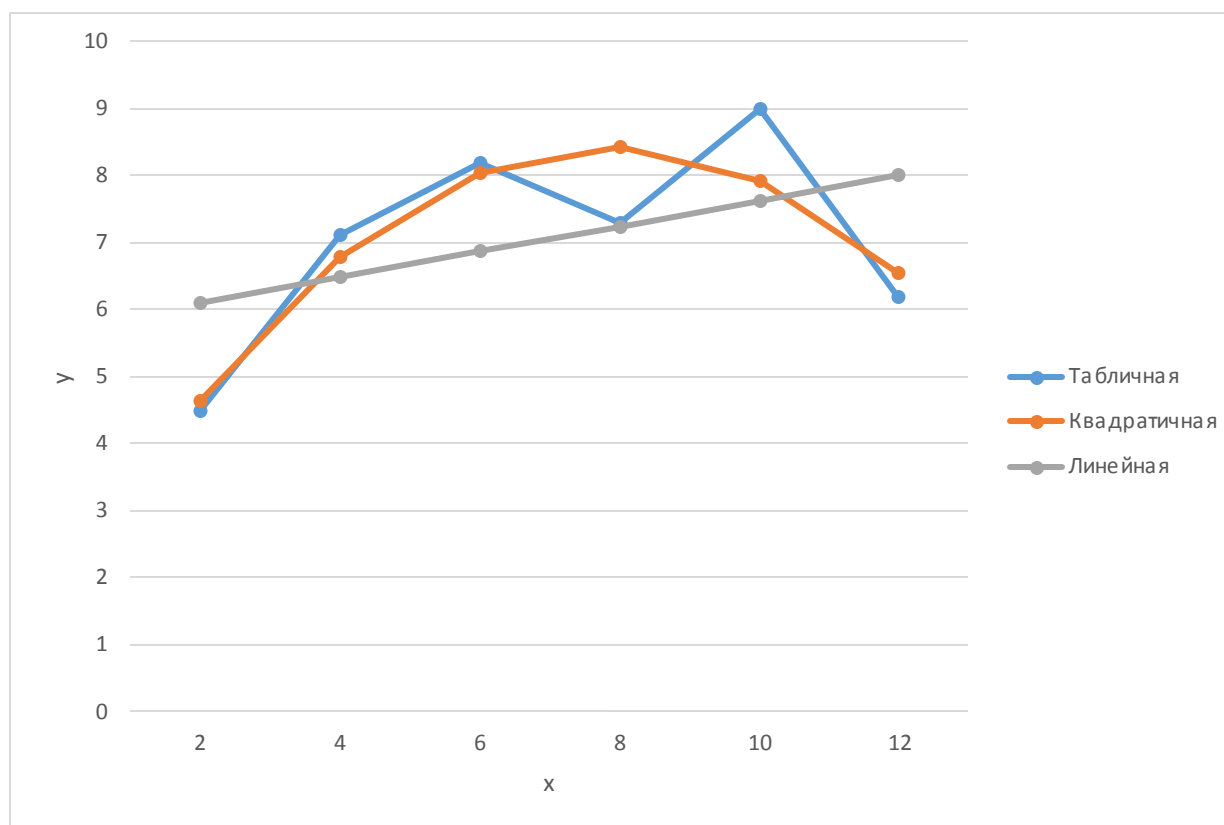


График 2 – Табличная, линейная и квадратичная функции.

Из Графика 2 и из Таблицы 18 видно, что значения найденной квадратичной функции и табличные значения совпадают с высокой точностью, а также, что найденная квадратичная функция больше подходит для описания данной по заданию зависимости точек (невязка квадратичной функции меньше невязки линейной функции).

Значит функция описания зависимости заданных точек выглядит так:

$$y = -0,11 \cdot x^2 + 1,7275 \cdot x + 1,62$$

ВЫВОДЫ

В данной работе были изучены методы обработки экспериментальных данных, в частности метод минимальных квадратов. Результаты вычислений показали, что надо выбирать тот тип кривой, который более походит на форму исходного графика множества точек.

Метод наименьших квадратов (часто называемый МНК) обычно упоминается в двух контекстах. Во-первых, широко известно его применение в регрессионном анализе, как метода построения моделей на основе зашумленных экспериментальных данных. При этом помимо собственно построения модели обычно осуществляется оценка погрешности, с которой были вычислены её параметры, иногда решаются и некоторые другие задачи.

Во-вторых, МНК часто применяется просто как метод аппроксимации, без какой-либо привязки к статистике.

Заключение

Большое количество численных методов ставит актуальной задачей не столько создание новых, сколько исследование и классификацию старых, выявление лучших. Анализ влияния ошибок показал, что между лучшими методами нет принципиальной разницы с точки зрения устойчивости к ошибкам округления.

Недостаток аналитических методов – использование целого ряда допущений и предположений в процессе построения математических моделей и невозможность, в некоторых случаях, получить решение в явном виде из-за неразрешимости уравнений в аналитической форме, отсутствия первообразных для подынтегральных функций и т.п. В этих случаях широко применяются численные методы.

Численные методы основываются на построении конечной последовательности действий над числами. Применение численных методов сводится к замене математических операций и отношений соответствующими операциями над числами, например, к замене интегралов суммами, бесконечных сумм – конечными и т.п. Результатом применения численных методов являются таблицы и графики зависимостей, раскрывающих свойства объекта. Численные методы являются продолжением аналитических методов в тех случаях, когда результат не может быть получен в явном виде. Численные методы по сравнению с аналитическими методами позволяют решать значительно более широкий круг задач.

Работа над курсовой работой предполагала изучение численного метода и его использование, кроме того, раскрыла некоторые возможности программной среды – процессор электронных таблиц Excel.

Библиографический список

1. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Оникс 21 век, 2005. – 400 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 432 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. - 512с.
4. Фильчаков П.В. Справочник по высшей математике. - Киев: Наукова думка, 1975. - 500с.
5. Пирумов У.Г. Численные методы / У.Г. Пирумов. – М.: Дрофа, 2003. – 224 с.
6. Методы безусловной многомерной оптимизации: Рек. к выполнению лаб., практ. и курсовых работ/ Сост.: С.А. Шипилов: НФИ КемГУ. – Новокузнецк. 2000.- 31 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

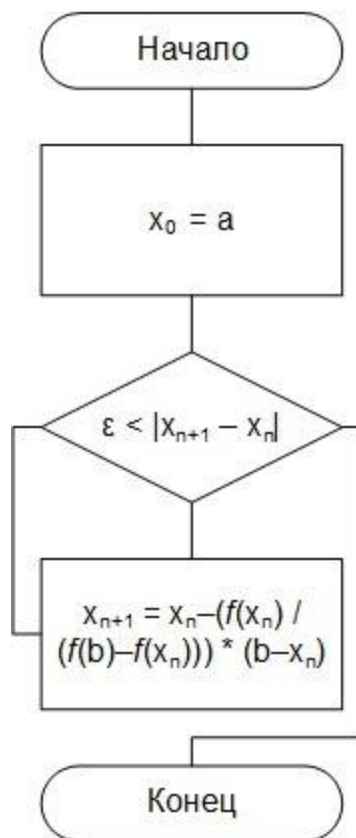


Рисунок 1 – Блок-схема алгоритма реализации алгоритма ложного положения.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

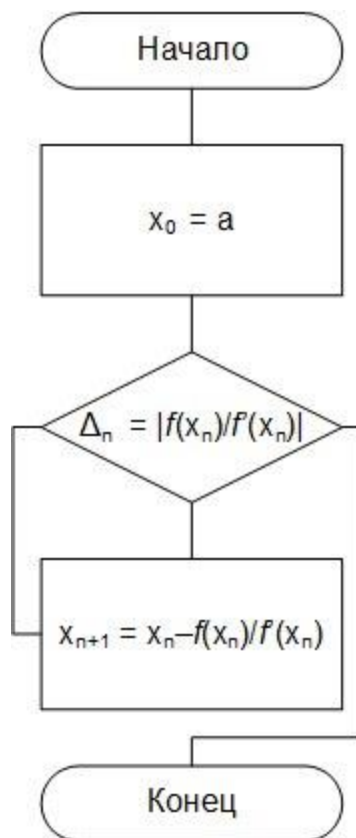


Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма Ньютона-Рафсона.