

Исследование условий спектральной устойчивости СЛАУ

Истомин Н.С., Яремус Д. К., Лукьяненко И.А.

9 ноября 2022

Устойчивость матриц большой размерности

Рассмотрим устойчивую систему линейных уравнений ($x = Ax + b$) для которой выполняется спектральный признак устойчивости. Из курсов функционального анализа и вычислительной математики хорошо известно, что если спектральный радиус меньше единицы, то итерационный процесс $x_{k+1} = Ax_k + b$, вне зависимости от точки старта x_0 , сходится к единственному решению уравнения.

Мы хотим задать для матриц большой размерности такое условие, которое могло бы гарантировать нам единственность решения соответствующей СЛАУ за счёт выполнения спектрального признака. Исследуемое условие:

$$\frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \leq 1 - \varepsilon$$

Ошибка итерационного процесса

Рассмотрим положительно определенную матрицу, для которой выполняется спектральный признак устойчивости. Будем останавливать итерационный процесс, если вектор-невязка $\delta_p = x_{p+1} - x_p$ попадает в шар радиуса α с центром в нуле. Ошибка итерационного процесса, связана с невязкой следующим образом:

$$\varepsilon_p = (I - A)^{-1} \delta_p$$

Вследствие чего мы можем определить вероятностное распределение ошибок. Наше предположение заключается в том, что наиболее вероятными ошибками являются максимальные и ошибка ограничивается следующим образом:

$$\eta \frac{\alpha \lambda_{max}}{1 - \lambda_{max}} \leq \|\varepsilon\| \leq \frac{\alpha}{1 - \lambda_{max}}$$

Цель проекта

Провести теоритические выкладки, подтверждающие данные предположения, а так же подтвердить их экспериментально.