Métodos Computacionales

Guía 8: Matrices Simétricas, Formas Cuadráticas y SVD

Primer Semestre 2024

Ejercicio 1. Mostrar que si A es una matriz simétrica de $n \times n$ entonces $(Ax) \cdot y = x \cdot (Ay)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 2. Sean A una matriz simétrica de $n \times n$ y B una matriz de $n \times m$. Mostrar que B^TAB, B^TB y BB^T son matrices simétricas.

Ejercicio 3. Sea A una matriz invertible y ortogonalmente diagonalizable. Mostrar que A^{-1} también es ortogonalmente diagonalizable.

Ejercicio 4. Sea B una matriz simétrica de $n \times n$, tal que $B^2 = B$. Las matrices que cumplen con esa propiedad se llaman proyectores. Dado $y \in \mathbb{R}^n$, sean $\hat{y} = By$ y $z = y - \hat{y}$.

a) Mostrar que z es ortogonal a $\hat{y}$

b) Sea W el espacio columna de B. Mostrar que y es la suma de un vector en W y un vector de $W^\perp$. ¿Por qué esto prueba que By es la proyección ortogonal de y sobre el espacio columna de B?

Ejercicio 5. (Python) Diagonalizar las siguientes matrices. Para ello encontrar primero los autovalores y luego para cada autovalor encontrar una base ortonormal para $Nu\,(A - \lambda I)$.

a) $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 9 & -6 \\ 2 & 6 & -6 & 9 \\ 9 & -6 & 6 & 2 \\ -6 & 9 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0.63 & -0.18 & -0.06 & -0.04 \\ -0.18 & 0.84 & -0.04 & 0.12 \\ -0.06 & -0.04 & 0.72 & -0.12 \\ -0.04 & 0.12 & -0.12 & 0.66 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0.31 & 0.58 & 0.08 & 0.44 \\ 0.58 & -0.56 & 0.44 & -0.58 \\ 0.08 & 0.44 & 0.19 & -0.08 \\ 0.44 & -0.58 & -0.08 & 0.31 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 & -6 & 9 \\ 2 & 8 & 2 & -6 & 9 \\ 2 & 2 & 8 & -6 & 9 \\ -6 & -6 & -6 & 24 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & -21 \end{bmatrix}$

Ejercicio 6. Calcular la forma cuadrática de x^TAx, para $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$:

a) $x = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 7. Calcular la forma cuadrática de x^TAx, para $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

a) $x = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

c) $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Ejercicio 8. Hallar las matrices de las formas cuadradas. Asumir que $x \in \mathbb{R}^2$.

a) $4x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

b) $5x_1^2 + 4x_1x_2$

c) $7x_1^2 + 18x_1x_2 - 7x_2^2$.

d) $8x_1x_2$.

Ejercicio 9. Hallar las matrices de las formas cuadradas. Asumir que $x \in \mathbb{R}^3$.

a) $5x_1^2 + 3x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3$.

b) $8x_1x_2 + 10x_1x_3 - 6x_2x_3$.

c) $5x_1^2 - 3x_2^2 + 7x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3$.

d) $6x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3$.

Ejercicio 10. Hallar el cambio de variables $x = Py$, que transforma la forma cuadrática

$$x_1^2 + 12x_1x_2 + x_2^2$$

a la forma cuadrática sin los términos cruzados. Mostrar quién es P y cómo queda la forma cuadrática luego del cambio de variables.

Ejercicio 11. Sea A la matriz de la forma cuadrática $7x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$.

a) Verificar que los autovalores de A son: 1, 7 y 13.

b) Hallar la matriz ortogonal P tal que el cambio de variables $x = Py$ transforma x^TAx en la forma cuadrática sin los términos cruzados.

Ejercicio 12. (Python) Clasificar las formas cuadráticas y encontrar el cambio de variables $x = Py$ para que la forma cuadrática no tenga términos cruzados. Construir P en cada caso.

a) $-3x_1^2 - 7x_2^2 - 10x_3^2 - 10x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 6x_3x_4$

b) $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + 8x_1x_2 + 8x_3x_4 - 6x_1x_4 + 6x_2x_3$

c) $11x_1^2 + 11x_2^2 + 11x_3^2 + 11x_4^2 + 16x_1x_2 + -12x_1x_4 + 12x_2x_3 + 16x_3x_4$

d) $2x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_1x_4 - 6x_2x_3 - 6x_2x_4 - 2x_3x_4$

Ejercicio 13. Para las siguientes formas cuadráticas determinar su valor más grande posible (probar con algunos valores de x) si $x = (x_1, x_2)$ y $x^Tx = 1$:

a) $3x_1^2 + 9x_2^2$

b) $7x_1^2 - 5x_2^2$

Ejercicio 14. Mostrar mediante los siguientes items cómo clasificar la forma cuadrática $Q(x) = x^TAx$ donde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ y $det\,(A) \neq 0$, sin hallar los autovalores de A.

a) Si λ_1 y λ_2 son autovalores de A entonces el polinomio característico de A puede escribirse de dos formas $det\,(A - \lambda\mathbb{I})$ y $(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)$. Usar este hecho para mostrar que $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ (la diagonal de A) y $\lambda_1\lambda_2 = det\,(A)$.

b) Verificar las siguientes afirmaciones:

   i) Q es definida positiva si $det\,(A) > 0$ y $a > 0$

   ii) Q es definida negativa si $det\,(A) > 0$ y $a < 0$

   iii) Q es indefinida si $det\,(A) < 0$

Ejercicio 15. Hallar el cambio de coordenadas $x = Py$ tal que transforma la forma cuadrática x^TAx en y^TDy.

a) $5x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 = 7y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2$

b) $5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 10x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 11y_1^2 + 2y_2^2$

Ejercicio 16. Para cada una de las siguientes formas cuadráticas hallar: `(i)` el valor máximo de $Q(x)$ sujeto a la restricción $x^Tx = 1$, `(ii)` un vector unitario u donde se alcance el máximo, `(iii)` el valor máximo de $Q(x)$ sujeto a las restricciones $x^Tx = 1$, $x^Tu = 0$:

a) $Q(x) = 5x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ (ver ej. `15.a`).

b) $Q(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 10x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ (ver ej. `15.b`).

c) $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1x_2$.

d) $Q(x) = 4x_1^2 + 7x_2^2 + 4x_1x_2$.

e) $Q(x) = 3x_1x_2 + 5x_1x_3 + 7x_1x_4 + 7x_2x_4 + 5x_2x_4 + 3x_3x_4$.

f) **(Python)** $Q(x) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 - 10x_1x_3 - 10x_1x_4 - 6x_2x_3 - 6x_2x_4 - 2x_3x_4$.

g) **(Python)** $Q(x) = -6x_1^2 - 10x_2^2 - 13x_3^2 - 13x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_1x_4 + 6x_3x_4$.

h) **(Python)** $Q(x) = x_1x_2 + 3x_1x_3 + 30x_1x_4 + 30x_2x_3 + 3x_2x_4 + x_3x_4$.

Ejercicio 17. Sea A una matriz simétrica de $n \times n$, y sean M y m el valor máximo y mínimo respectivamente de la forma cuadrática x^TAx con $x^Tx = 1$. Los autovectores correspondientes los escribimos como u_1 y u_n. Mostrar mediante los siguientes items que para cualquier número $t \in [m, M]$ (cualquier número entre el mínimo y el máximo de la forma cuadrática) existe un vector unitario x tal que $t = x^TAx$.

1. Verificar que podemos escribir $t = (1-\alpha)\,m + \alpha M$ para algún α entre 0 y 1.
2. Mostrar que si definimos el vector x como $x = \sqrt{1-\alpha}u_n + \sqrt{\alpha}u_1$ se cumple que $x^Tx = 1$ y $x^TAx = t$.

Ejercicio 18. Hallar los valores singulares de las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

Ejercicio 19. Hallar la SVD de las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 20. Sea A una matriz $m \times n$ con una descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V^T$, donde U es una matriz ortogonal $m \times m$, Σ es una matriz diagonal $m \times n$ con r entradas positivas y sin valores negativos, y V es una matriz ortogonal $n \times n$. Justificar cada respuesta:

a) Mostrar que si A es cuadrada, entonces $|det(A)|$ es el producto de los valores singulares de A.

b) Suponer que A es cuadrada e invertible. Encontrar la descomposición en valores singulares de A^{-1}.

c) Mostrar que las columnas de V son los vectores propios de A^TA, las columnas de U son los vectores propios de de AA^T , y las entradas diagonales de Σ son los valores singulares de A.

Sugerencia: usar la SVD para calcular A^TA y AA^T.

d) Mostrar que si P es una matriz ortogonal $m \times m$, entonces PA tiene los mismos valores singulares que A.

Ejercicio 21. A partir de las siguientes tablas de datos que contienen mediciones sobre ciertas magnitudes "x" e "y" (pueden pensarse por ejemplo como peso, altura, temperatura, dinero, etc), calcular: `(i)` la matriz de covarianza de los datos, `(ii)` una nueva dirección que explique la mayor parte de la variación de los datos usando PCA, `(iii)` el porcentaje de variación explicada por la dirección hallada.

a)

x	y
12	19
6	22
9	6
15	3
13	2
5	20

b)

x	y
3	1
11	5
6	2
8	6
15	7
11	3

c)

x	y
61	120
60	125
64	125
68	135
72	145
70	142