# Métodos Computacionales
## Guía 7: Ortogonalidad y Cuadrados Mínimos
### Primer Semestre 2024

---

**Ejercicio 1.** En cada caso, encontrar un vector que sea ortogonal a cada uno de los vectores dados

a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$

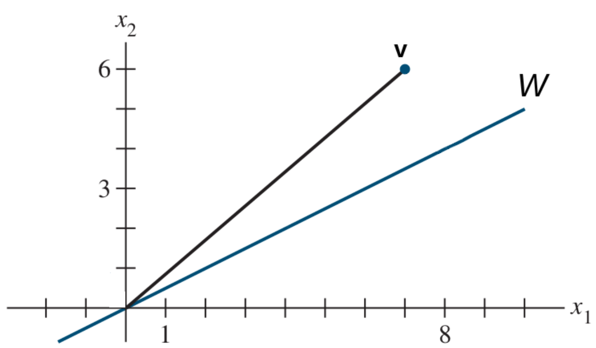
**Ejercicio 2.** Mostrar que si un vector $v$ es ortogonal a dos vectores $x$ e $y \in \mathbb{R}^n$, entonces es ortogonal a $\alpha x + \beta y$, para cualquier valor de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 3.** Teniendo en cuenta el resultado del ejercicio anterior, dado $W$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$, ¿qué podemos decir sobre un vector $v$ que es ortogonal a todos los vectores de una base de $W$?

**Ejercicio 4.** Sea $W$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$, mostrar que $W^{\perp}$[1] también es un subespacio.

**Ejercicio 5.** ¿Es cierto que si dos vectores son linealmente independientes, entonces son ortogonales?

**Ejercicio 6.** Si tenemos $v \in \mathbb{R}^n$ y $W$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$, llamamos la proyección de $v$ en $W$ al vector $\tilde{w} \in W$ que cumple que $(v - \tilde{w})$ es ortogonal a $W$. Hallar $\tilde{w}$ y $(v - \tilde{w})$ en el siguiente gráfico:




**Ejercicio 7.** La fórmula general para hallar la proyección de un vector $v$ en un subespacio $W$ es

$$\tilde{w} = \frac{v \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 + ... + \frac{v \cdot w_k}{w_k \cdot w_k} w_k$$

Donde $w_1 \dots w_k$ son base ortogonal de $W$. Mostrar que $\tilde{w}$ efectivamente es la proyección de $v$ en $W$ (es decir que pertenece a $W$ y que cumple la propiedad de proyección). ¿Funcionaría la fórmula si la base no fuese ortogonal? ¿Cómo se simplifica la fórmula si la base es ortonormal?

**Ejercicio 8.** Si tenemos una matriz $A$ cuyas columnas son ortogonales entre sí, ¿es invertible?

---

[1] El complemento ortogonal es el conjunto de todos los vectores que son ortogonales al subespacio.

**Ejercicio 9.** Dada una matriz $A$ con columnas $a_1, ..., a_n$ ortonormales, ¿cuál es la inversa de $A$?

$$A = [a_1 \mid a_2 \mid \ldots \mid a_n]$$

**Ejercicio 10.** Decimos que una matriz $A$ es ortogonal si $A^{-1} = A^t$. Deducir que si $A$ y $B$ son ortogonales, entonces $AB$ también lo es.

**Ejercicio 11.** Mostrar que si $A$ es ortogonal, su determinante puede ser únicamente 1 o -1.

**Ejercicio 12.** Mostrar que $\{u_1, u_2\}$ o $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortogonal para $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ respectivamente, y expresar a $x$ como combinación lineal de los vectores de la base.

a) $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}$

b) $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

d) $u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$

**Ejercicio 13.** Encontrar el punto mas cercano a $y$ en el subespacio $W$ generado por $\{v_1, v_2\}$

a) $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

**Ejercicio 14.** Encontrar la mejor aproximación a $z$ con vectores de la forma $c_1 v_1 + c_2 v_2$

a) $z = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $z = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

**Ejercicio 15. (Python)** Mostrar que las columnas de la matriz $A$ son ortogonales haciendo operaciones de matrices

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -6 \\ 3 & 6 & 3 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 16.** En cada caso hallar la recta que mejor ajusta a los puntos dados

a) Conjunto de datos:

| | |
|---|---|
| i. $(0,1),(1,1),(2,2),(3,2)$ | ii. $(1,0),(2,2),(3,7),(4,9)$ |
| iii. $(-1,0),(0,1),(1,2),(2,4)$ | iv. $(2,3),(3,2),(5,1),(6,0)$ |

b) Si un algoritmo de aprendizaje automático "aprende" la recta que mejor ajusta a los datos en `(a)i)` ¿qué valor estimará para y cuando $x = 4$? ¿qué valor estimará para y cuando $x = 3$? ¿Cuán cerca esta la predicción del valor en los datos?

c) Si un algoritmo de aprendizaje automático "aprende" la recta que mejor ajusta a los datos en `(a)ii)` ¿qué valor estimará para y cuando $x = 3$? ¿qué valor estimará para y cuando $x = 4$? ¿Cuán cerca esta la predicción del valor en los datos?

**Ejercicio 17.** Un experimento arroja el siguiente conjunto de datos $(x, y)$:

$$(1, 2.5),(2, 4.3),(3, 5.5),(4, 6.1)$$

Describa el modelo que produce el ajuste por cuadrados mínimos usando una función de la forma: $y = \beta_1 x + \beta_2 x^2$. Tal función podría surgir, por ejemplo, en los ingresos asociados a la venta de $x$ unidades de un producto, cuando la cantidad ofrecida por venta afecta el precio que se fija para el producto.

a) Resolver el sistema utilizando cuadrados minimos

b) **(Python)** Graficar la curva ajustada por cuadrados mínimos, junto con los datos.

c) Si una máquina aprende la misma curva que se encontró en $b$, ¿Cuál sería la predicción cuando $x = 6$?

**Ejercicio 18.** Una curva sencilla que suele ajustar bien los costos variables de una compañía en función del nivel de ventas $x$, tiene la siguiente forma $y = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$. (No hay un término constante por que los costos fijos no están incluidos).

a) Resolver el sistema utilizando cuadrados minimos (modelo lineal)

b) **(Python)** Utilizando cuadrados mínimos hallar la curva con la forma que mejor ajusta los datos:

$$(4, 1.58),(6, 2.08),(8, 2.5), 12, 3.1),(14, 3.4),(16, 3.8),(18, 4.32)$$

(en unidades de millones de pesos). Graficar los datos con la curva hallada.

c) ¿Cual seria la estimación de los costos si el nivel de ventas fuera, $x = 9$?

**Ejercicio 19.** Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal que preserva longitudes. Esto significa que $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

a) Mostrar que la matriz que representa $T$ es una matriz ortogonal.

b) Mostrar que $T$ también preserva la ortogonalidad, es decir que $T(x) \cdot T(y) = 0$ si $x \cdot y = 0$

**Ejercicio 20.** **(Python)** Implementar el método de Gram-Schmidt y calcular una base ortonormal para los siguientes subespacios:

a) $W = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

b) $W = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 12 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 41 \\ 0 \\ 12 \\ 99 \\ -15 \end{pmatrix} \right\}$

c) $W = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Agregar alguna condición para que el método no falle si el conjunto de vectores es linealmente dependiente sin que sea necesario verificarlo de antemano.

**Ejercicio 21. (Python)** Utilizando el código del ejercicio 20 implementar una función que compute la factorización $QR$. ¿Qué sucede si las columnas de la matriz no son linealmente independientes?