Métodos Computacionales

Guía 6: Autovalores y Autovectores

Primer Semestre 2024

Ejercicio 1. Verificar si v es autovector de A en cada caso. En caso de serlo, identificar cuál es el autovalor asociado.

a) $v = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

b) $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

c) $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

d) $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Ejercicio 2. Verificar si λ es autovalor de $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ en cada caso. En caso de serlo, encontrar un autovector asociado.

a) $\lambda = 2$

b) $\lambda = -7$

c) $\lambda = 9$

Ejercicio 3. Sin realizar ningún cálculo, determinar un autovalor y autovector posible para cada una de las matrices.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 8 & 8 & -8 \\ -12 & -12 & 12 \end{bmatrix}$

Ejercicio 4. Sean v_1 y v_2 autovectores de una matriz A, con λ_1 y λ_2 sus autovalores asociados. Mostrar que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces v_1 y v_2 no pueden ser paralelos.

Ejercicio 5. Mostrar que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente. Donde los vectores v_i son autovectores de una matriz A, con $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_k$ sus autovalores asociados.
Teniendo en cuenta este resultado, ¿cuántos autovalores distintos puede tener una matriz de $n \times n$?

Ejercicio 6. Sea A una matriz con un autovalor λ. Corroborar que λ^k es autovalor de A^k, donde $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 7. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$

a) ¿Para qué valor(es) de $a \in \mathbb{R}$ es A diagonalizable?

b) ¿Para qué valor(es) de $a \in \mathbb{R}$ es $\lambda = 3$ un valor propio de A?

c) ¿Para qué valor(es) de $a \in \mathbb{R}$ es $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ un autovector de A?

Ejercicio 8. Sea A tal que cada una de sus filas suman $s \in \mathbb{R}$. Mostrar que s es autovalor de A. ¿Qué sucede si cada una de sus columnas suman s?

Ejercicio 9. Diagonalizar las siguientes matrices cuando sea posible, es decir, calcular su descomposición diagonal.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 10. (Python) Usando la función `np.linalg.eig` implementar una función para computar la descomposición diagonal de matrices cuadradas.

Ejercicio 11. Sea A una matriz diagonalizable. Mostrar cómo es posible facilitar la resolución de sistemas $Ax = b$ diagonalizando la matriz del sistema.

Ejercicio 12. (Python) Construir matrices aleatorias A de valores enteros y de tamaño 4×4, y verificar que A y A^T tienen los mismos autovalores, cada uno con las mismas multiplicidades (la multiplicidad de un autovalor es la multiplicidad de la raíz correspondiente en el polinomio característico). Concluir que ambas matrices tienen el mismo polinomio característico. Repetir con matrices de tamaño 5×5.

Ejercicio 13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostrar que A y A^T tienen los mismos autovalores.

Ejercicio 14. (Python) Considerar la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 28 & 21 \\ 4 & -15 & -12 \\ -8 & a & 25 \end{bmatrix}$$

Para cada valor de a dentro del conjunto $\{32, 31{,}9, 31{,}8, 32{,}1, 32{,}2\}$ calcular el polinomio característico de A y los autovalores. Graficar en una misma figura cada polinomio $p(t) = det(A - tI)$ con $0 \leq t \leq 3$, para los distintos valores de a. ¿Cómo varían los autovalores de A según el valor que toma a?

Ejercicio 15. Sean A y B matrices semejantes. Si λ es autovalor de A. ¿Es λ autovalor de B? En caso de serlo, ¿están asociados al mismo autovector?

Ejercicio 16. Sean A y B matrices semejantes. Mostrar que $det(A) = det(B)$.

Ejercicio 17. Si A es diagonalizable, ¿es A^T diagonalizable? ¿Qué sucede con A^2?

Ejercicio 18. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si una matriz es diagonalizable entonces todas sus coordenadas son nulas menos la diagonal principal.

b) Todas las matrices cuadradas son diagonalizables.

c) La matriz identidad es diagonalizable.

d) La matriz nula es diagonalizable.

e) Una matriz de $n \times n$ es diagonalizable si sus autovectores forman una base de $\mathbb{R}^n$.

f) Si una matriz tiene dos autovalores iguales entonces no es diagonalizable.

g) Si una matriz tiene todos sus autovalores distintos entonces es diagonalizable.

Ejercicio 19. (Python) Implementar una función para calcular el autovalor dominante de una matriz y su autovector asociado mediante el método de potencias. Validar contra la función `np.linalg.eig`.