Métodos Computacionales
Guía 3 - Álgebra de matrices
Segundo Semestre 2023

Ejercicio 1. (Python) Implementar funciones en Python que reciban un número natural $n \in \mathbb{N}$ como parámetro y generen matrices aleatorias de cada uno de los siguientes conjuntos:

- $\mathbb{S}_1 = \{A \in [-100, 100]^{n\times n} / a_{ij} = a_{ji}; 1 \leq i, j \leq n\}$ (matrices simétricas)
- $\mathbb{S}_2 = \{A \in [-100, 100]^{n\times n} / a_{ij} + a_{ji} = 1; 1 \leq i < j \leq n\}$
- $\mathbb{S}_3 = \{A \in [-100, 100]^{n\times n} / a_{ij} = -a_{ji}; 1 \leq i < j \leq n\}$ (matrices anti-simétricas)
- $\mathbb{S}_4 = \{A \in [-100, 100]^{n\times n} / \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0\}$ (matrices de traza nula)
- $\mathbb{S}_5 = \{A \in [-100, 100]^{n\times n} / A \text{ tiene alguna fila nula}\}$
- $\mathbb{S}_6 = \{A \in [-100, 100]^{n\times n} / a_{ij} = 0; 1 \leq i < j \leq n\}$ (matrices triangulares superiores)

Ejercicio 2. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

a) Calcular AD y DA. Explicar como cambian las filas o columnas de A cuando es multiplicada por D a derecha o izquierda. ¿Cómo puede generalizarse este fenómeno para matrices diagonales arbitrarias?

b) Encontrar una matriz $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ distinta de la matriz identidad o nula, tal que $AB = BA$.

Ejercicio 3. Sean A y B en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que si $A + B = \mathbb{I}$, entonces $AB = BA$.

Ejercicio 4. Sean A y B en $\mathbb{R}^{n\times n}$ matrices diagonales, es decir, matrices cuyas entradas por fuera de la diagonal son ceros. Mostrar que el producto AB es también una matriz diagonal.

Ejercicio 5. Una matriz X se dice simétrica si $X = X^T$. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostrar que $A^T A$ y AA^T son ambas matrices simétricas, y especificar las dimensiones de cada una.

Ejercicio 6. Una compañía fabrica dos productos, B y C.

$$U = \begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}40 \\ 0{,}25 & 0{,}30 \\ 0{,}15 & 0{,}15 \end{bmatrix}$$

Las columnas de U representan los productos B y C, y las filas representan los costos de materiales, trabajo y gastos generales por unidad respectivamente; por ejemplo, el elemento $u_{2,2}$ representa el costo de trabajo para la fabricación de una unidad del producto C. Sean $\mathbf{q}_1 \ldots \mathbf{q}_4 \in \mathbb{R}^2$ vectores que especifican para cada trimestre del año la cantidad de unidades vendidas de B y C. Dar una descripción económica de los datos en la matriz UQ donde $Q = [\,\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2 \mid \mathbf{q}_3 \mid \mathbf{q}_4\,]$.

Ejercicio 7. Para los siguientes ejercicios responder con verdadero o falso justificando la respuesta. Para las matrices A, B y C, las sumas y productos indicados estan definidos.

a) Si A y B son matrices 2×2, con columnas $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ respectivamente, entonces

$$AB = [\,\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\,]$$

b) Si A y B son matrices 3×3, y $B = [\, \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \mathbf{b}_3 \,]$, entonces

$$AB = [\, A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid A\mathbf{b}_3 \,]$$

c) Cada columna de AB es una combinación lineal de las columnas de B usando como pesos los elementos de la columna de A correspondiente.

d) La segunda fila de AB es la segunda fila de A multiplicada a derecha por B.

e) $AB + AC = A(B + C)$

f) $(AB)C = (AC)B$

Ejercicio 8. Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ hallar sin realizar el producto completo:

a) la tercera fila de AB

b) la tercera columna de BA

c) el coeficiente $c_{3,2}$ de $C = BAB$

Ejercicio 9. Sean $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Calcular $u^T v$, $v^T u$, uv^T y vu^T.

Ejercicio 10. (Python) Implementar funciones en Python que reciban números naturales $n, m \in \mathbb{N}$ como parámetros y devuelvan las siguientes matrices (consultar la documentación de NumPy para los comandos correspondientes)

a) Una matríz $n \times m$ de ceros.

b) Una matríz $n \times m$ de unos.

c) La matríz identidad de $n \times n$.

d) Una matríz diagonal de $n \times n$ cuyos elementos sobre la diagonal sean los de un vector $v \in \mathbb{R}^n$ pasado también como parámetro.

Ejercicio 11. (Python) Construir una matriz aleatoria de 4×4 y testear si $(A + I)(A - I) = A^2 - I$. Una manera de hacerlo es calcular $(A + I)(A - I) - (A^2 - I)$ y verificar que esta diferencia sea la matriz nula [1]. Testearlo para varias matrices aleatorias diferentes. Luego, testear $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ de la misma manera para diferentes pares de matrices aleatorias de 4×4.

Ejercicio 12. (Python) Calcular S^k [2] para $k = 2, 3, ..., 6$ donde S es la siguiente matriz

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 13. (Python) Describir qué ocurre con la secuencia $\{A^k\}_{k \to \infty}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 5/12 \end{bmatrix}$$

[1] Para esto pueden utilizar la función *allclose* de NumPy.

[2] ¡Cuidado! El operador ** realiza la potencia a nivel elemento, para poder calcular la potencia de matrices utilizar la función *matrix_power* de NumPy

Ejercicio 14. (Python) La matriz M es capaz de detectar un patrón sombreado de 2×2 particular, como en los ejemplos vistos en la teórica. Crear un vector $\mathbf{x}$ no nulo de $\mathbb{R}^4$ definiendo en cada entrada el valor 0 o 1. Testear si $\mathbf{x}$ corresponde al patrón correcto calculando $\mathbf{x}^T M\mathbf{x}$. Si $\mathbf{x}^T M\mathbf{x} = 0$, entonces $\mathbf{x}$ es el patrón identificado por M. Si $\mathbf{x}^T M\mathbf{x} \neq 0$, probar con un vector $\mathbf{x}$ de ceros y unos diferente.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 15. Una rotación en la pantalla de una computadora a veces se implementa como el producto de dos transformaciones de trasquilado y escalamiento, que pueden acelerar los cálculos para determinar cómo se presenta en realidad una imágen gráfica en términos de pixeles de la pantalla. (La pantalla consiste en filas y columnas de puntos pequeños, llamados *pixeles*). La primera transformación A_1 trasquila verticalmente y después comprime cada columna de pixeles; la segunda transformación A_2 trasquila horizontalmente y después estira cada fila de pixeles.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \sec\phi & -\tan\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mostrar que la composición de las dos transformaciones es una rotación en $\mathbb{R}^2$.

Sugerencia: tener en cuenta las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\sec(\phi) = \frac{1}{\cos(\phi)}$.

b) $\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}$.

c) $1 - \sin^2(\phi) = \cos^2(\phi)$.

Ejercicio 16. Para los siguientes ejercicios responder con verdadero o falso justificando la respuesta.

a) Para que una matriz B sea la inversa de otra matriz A, deben satisfacerce ambas ecuaciones $AB = \mathbb{I}$ y $BA = \mathbb{I}$.

b) Si A y B de $n \times n$ son invertibles, entonces $A^{-1}B^{-1}$ es la inversa de AB.

c) Si A es invertible, entonces la inversa de A^{-1} es A misma.

d) Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $ab - cd \neq 0$, entonces A es invertible.

e) Si A es una matriz invertible de $n \times n$ entonces el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para cada $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

f) Si A puede reducirse a la matriz identidad mediante operaciones de fila, entonces A debe ser invertible.

g) Si A es invertible, entonces las operaciones elementales de filas que reducen a A a la identidad $\mathbb{I}_n$ también reducen a A^{-1} a $\mathbb{I}_n$.

h) Una matriz cuadrada con dos columnas idénticas no puede ser invertible.

Ejercicio 17. Encontrar las inversas de las siguientes matrices

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

Ejercicio 18. Sea $A = \begin{bmatrix} -25 & -9 & -27 \\ 546 & 180 & 537 \\ 154 & 50 & 149 \end{bmatrix}$. Encontrar la segunda y tercer columna de A^{-1} sin calcular la primera.

Ejercicio 19. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. Construir una matriz C de 2×3 usando sólo 1, -1 y 0 como posibles entradas, y tal que $CA = \mathbb{I}_2$. Calcular AC y observar que $AC \neq \mathbb{I}_3$.

Ejercicio 20. Sea A una matriz cuadrada que cumple $A^2 + A + \mathbb{I} = 0$. Hallar la inversa de A en función de A.

Ejercicio 21. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz diagonal. Hallar la inversa de A.

Ejercicio 22. (Python) El color real que ve un observador en una pantalla está influido por el tipo específico y la cantidad de material fosforescente en la pantalla. De esta manera, cada fabricante de pantallas de computadora debe hacer la conversión entre los datos (R, G, B) y un estándar internacional para color, CIE, que usa tres colores primarios llamados X, Y y Z. Una conversión típica para el material fosforescente de persistencia breve es

$$\begin{bmatrix} 0{,}61 & 0{,}29 & 0{,}150 \\ 0{,}32 & 0{,}59 & 0{,}063 \\ 0{,}04 & 0{,}12 & 0{,}787 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Un programa de computadora envía un flujo de información acerca del color a la pantalla usando datos del estándar CIE (X, Y, Z). Encontrar la ecuación que convierte esta información en los datos (R, G, B) que necesita el cañón de electrones de la pantalla.

Ejercicio 23. En los siguientes ejercicios asumir que las matrices están particionadas de manera conformada para la multiplicación por bloques. Calcular los siguientes productos:

a) $\begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ E & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ -X & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

Ejercicio 24. En los siguientes ejercicios, encontrar fórmulas para X, Y y Z en términos de A, B y C. Justificar sus cálculos. Si es necesario, suponer el tamaño de una matriz para obtener una fórmula. *Sugerencia:* Calcular el producto a la izquierda e igualarlo al lado derecho.

a) $\begin{bmatrix} A & C \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ Z & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ Y & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & Z \\ 0 & 0 \\ B & \mathbb{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}$

Ejercicio 25. Hallar la inversa de una matriz *triangular superior por bloques* de 2×2, es decir, una matriz de la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

donde A_{11} es un bloque de $p \times p$ y A_{22} es un bloque de $q \times q$, y son invertibles (no es necesario asumir que A_{12} lo es).

Ejercicio 26. Hallar la traspuesta de una matriz por bloques conformada por 4 bloques de 2×2 cada uno

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Ejercicio 27. Cuando se lanza una sonda espacial, es necesario hacer algunas correcciones para colocar la nave en una trayectoria exacta. La radio telemetría proporciona un flujo de vectores $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ que arrojan información en diferentes momentos sobre cómo se compara la posición de la sonda con la trayectoria prevista. Sea X_k la matriz $[\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k]$. La matriz $G_k = X_k X_k^T$ se calcula conforme se analizan los datos del radar. Cuando llega $\mathbf{x}_{k+1}$ se debe calcular un nuevo G_{k+1}. Como los vectores de datos llegan a alta velocidad, la carga computacional podría ser grande. Pero la multiplicación de matrices particionadas ayuda muchísimo. Calcular las expansiones columna-fila de G_k y G_{k+1} y describir lo que se debe calcular para actualizar a G_k a la forma G_{k+1}.

Ejercicio 28. (Python) Implementar una función para calcular el producto de matrices cuadradas utilizando multiplicación por bloques. La función debe tomar como parámetros dos matrices cuadradas A y B, y un entero n denominando el *tamaño de bloque*. Luego, calcular $C = AB$ subdividiendo tanto A como B en matrices por bloques del tamaño dado y efectuar las multiplicaciones por bloques. Por último, la función debe retornar la matriz C.