Métodos Computacionales

Guía 5: Determinantes

Primer Semestre 2024

Ejercicio 1. Calcular los determinantes mediante desarrollo por cofactores. En cada caso, seleccionar una fila o columna que implique la menor cantidad de operaciones

a) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \\ 5 & -8 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 2. Encontrar los determinantes por reducción de filas a una forma escalonada.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & -6 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

Ejercicio 3. Sean $u = (3,0)$, $v = (1,2) \in \mathbb{R}^2$. Calcular el área del paralelogramo determinado por $\{0, u, v, u+v\}$, y obtener el determinante de la matriz $[\, u \mid v \,]$. ¿Cómo comparan ambos resultados? Remplazar la primera entrada de v por un número arbitrario y repetir el ejercicio. Explicar lo encontrado.

Ejercicio 4. Calcular las áreas de los siguientes paralelogramos, dados por sus cuatro vértices:

a) $(0,0), (5,2), (6,4), (11,6)$

b) $(0,0), (-3,7), (8,-9), (5,-2)$

c) $(-6,0), (0,5), (4,5), (-2,0)$

d) $(0,-2), (5,-2), (-3,1), (2,1)$

Ejercicio 5. (Python) ¿Es cierto que $det(A+B) = det(A)+det(B)$? Para averiguarlo, generar matrices aleatorias A y B de 5×5, y comprobar si $det(A+B) - det(A) - det(B) = 0$.

Ejercicio 6. (Python) ¿Es cierto que $det(AB) = det(A)det(B)$? Experimentar con matrices aleatorias como en el ejercicio anterior.

Ejercicio 7. Sean A y B matrices 4×4 tales que $det(A) = a$ y $det(B) = -5$. Calcular:

a) $det(AB)$ b) $det(BA)$ c) $det(B^5)$

d) $det(2A)$ e) $det(A^T A)$ f) $det(B^{-1}AB)$

Ejercicio 8. Determinar los valores de k para los cuales se tiene que $det(A) = 0$:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} k & 3 & 0 \\ k^2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 9. Calcular $det(AB)$, $det(A+B)$, $det(A^{10})$, $det(A^5B - A^5)$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 10. Sean A y B matrices de $n \times n$ arbitrarias. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en ambos casos:

a) El determinante de la matriz identidad $\mathbb{I}$ es 1.
b) $det(A+B) = det(A) + det(B)$.
c) $det(AB) = det(A)det(B)$.
d) $det(A^{-1}) = (-1)det(A)$.
e) $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.
f) Si A es tal que $A^3 = 0$ entonces no puede ser invertible.
g) $det(A) = det(A^T)$.
h) Si A es tal que $A^TA = \mathbb{I}$ entonces $det(A) = \pm 1$.
i) Si $k \in \mathbb{R}$ entonces $det(kA) = k\,det(A)$.

Ejercicio 11. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ y B también de tamaño 3×3 e invertible, tales que $det(AB) = 2$. Calcular $det(B^{-1})$.

Ejercicio 12. Resolver los siguientes sistemas lineales usando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x_1 + 1x_2 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 3 \\ -4x_1 + 6x_2 = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = 9 \\ 3x_1 - 1x_2 = -4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ -5x_1 + 4x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$

Ejercicio 13. (Python) Implementar una función para resolver sistemas lineales a partir de la regla de Cramer. Generar matrices de $n \times n$ y vectores de $n \times 1$ aleatorios y verificar los resultados contra la solución obtenida al resolver el sistema de la manera usual.

Ejercicio 14. Calcular la matriz adjunta de las siguientes matrices A y luego calcular A^{-1} a partir de la adjunta.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Ejercicio 15. *(Ejercicio de parcial)* Los determinantes satisfacen la siguiente propiedad:

$$\begin{vmatrix} a+b & c & d \\ e+f & g & h \\ i+j & k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ i & k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix}.$$

Tenemos $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{vmatrix} x & 5 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

determinar el valor de la siguiente expresión utilizando propiedades del determinante:

$$\begin{vmatrix} y & 2y & y+2 \\ x & 2x+5 & x+2 \\ z & 2z+3 & z+2 \end{vmatrix}.$$