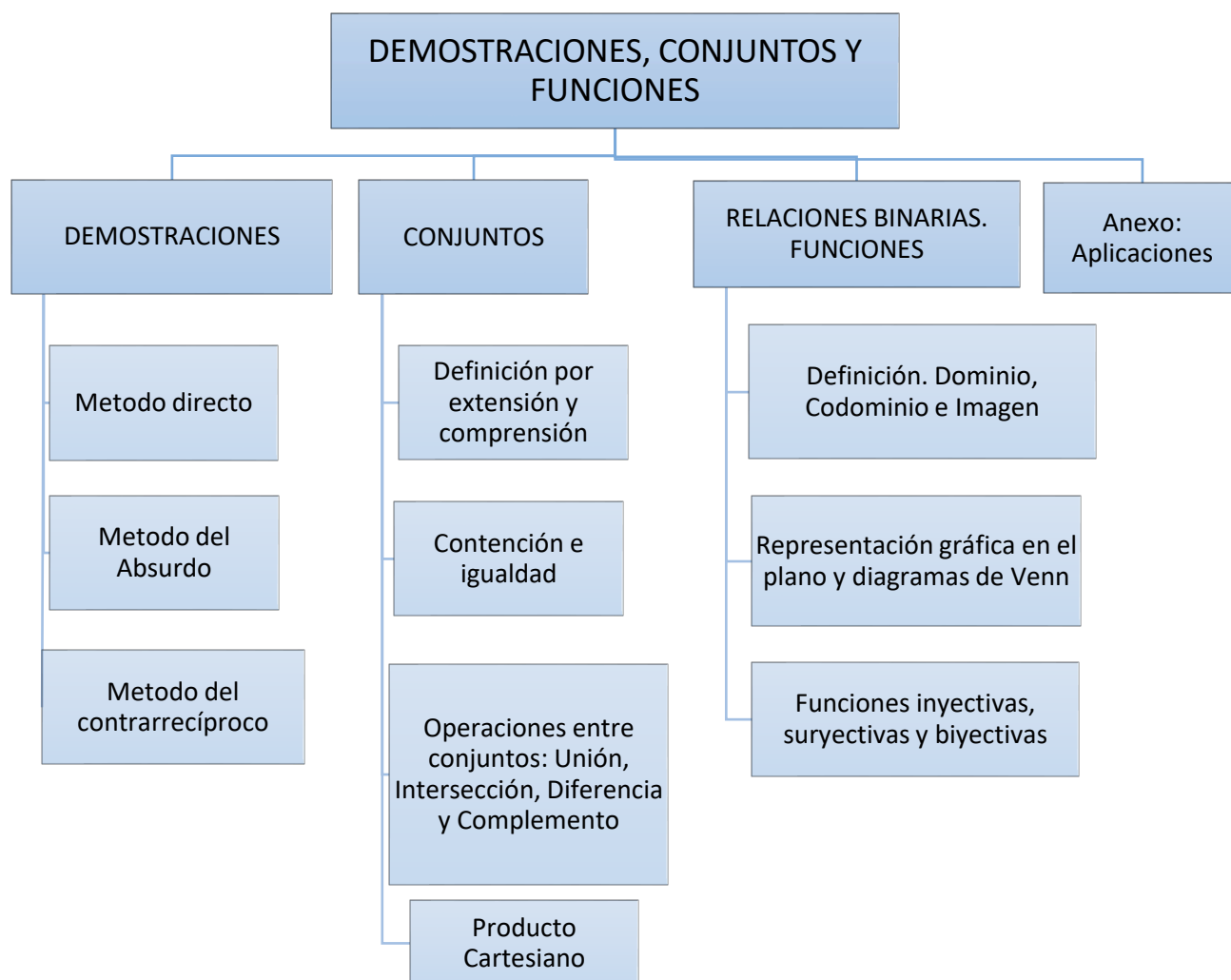


## Capítulo 2

DEMOSTRACIONES, CONJUNTOS Y FUNCIONES

---

## CONTENIDOS:

**Matemático invitado: Pierre de Fermat**

En matemática las únicas verdades son aquellas afirmaciones que se pueden demostrar, es decir, que partiendo de axiomas y otras afirmaciones ya demostradas podemos llegar, siguiendo un camino lógico a mostrar nuestro enunciado. Los axiomas son enunciados que no se demuestran, enunciados que se aceptan como válidos, por ejemplo los axiomas que usó Peano para definir a los números naturales, aceptamos que los números naturales tienen un

primer elemento (el 1 para algunos autores, el 0 para otros. En este curso tomaremos el 1), y que sumando uno a cualquier número natural obtenemos otro natural.

Cuando un enunciado no ha sido demostrado se llama **conjetura**, así permanece hasta que alguien encuentre una demostración, y entonces pasa a ser un **teorema**.

La tarea de demostrar es sumamente difícil, requiere mucha ejercitación y mucha paciencia.

Una de las conjeturas más famosas de la historia de las matemáticas fue la **Conjetura de Fermat**, que hoy conocemos como **el último Teorema de Fermat**, gracias a **Andrew Wiles** que en 1996 lo demostró.

Fermat fue un abogado del que no se sabe con certeza cuando nació, se conserva su fecha de defunción el 12 de enero de 1665 a los 57 años. Si Gauss recibió el nombre del “Príncipe de las matemáticas”, a Fermat se le asigna el del “Príncipe de los aficionados”, ya que fue un aficionado a las matemáticas, dedicaba su tiempo libre a su estudio.

En el margen de una página del libro “Aritmética” de Diofanto, enuncia su conjetura de inocente apariencia:

Si  $n$  es un número natural mayor a 2, entonces no existen números enteros  $x, y, z$  distintos de 0 tales que se cumpla la igualdad:  $x^n + y^n = z^n$

Esta anotación, contenía una frase adicional que fue el desvelo de grandes matemáticos a lo largo de 300 años: “He descubierto una demostración realmente maravillosa que este margen es demasiado pequeño para contener”. Se estima que esto fue escrito en una fecha indeterminada de la década de 1630, tuvieron que pasar casi 300 años para que se encontrara una demostración y finalmente sea un teorema.

Hay otras conjeturas aún sin demostrar de enunciados matemáticos, algunos muy complejos y otro no tanto. Los que se mantienen como conjeturas son aquellos que no han podido ser demostrados pero a los que tampoco se ha podido refutar mediante un contraejemplo, es decir, no se ha encontrado tampoco el caso donde la conjetura falle.

Nuestro homenaje a Pierre de Fermat, quien hizo grandes aportaciones a la matemática y por supuesto a Andrew Wiles, que ya a los 9 años leyó el enunciado del teorema y dedicó después casi toda su vida de matemático a demostrarlo.

---

Comenzaremos con algunos comentarios generales acerca de las demostraciones de enunciados matemáticos. Se sugiere que repasen y releen el apunte de lógica visto en el ingreso.

## 1. Las demostraciones

**Los resultados válidos en Matemática son aquellos que se pueden demostrar.**

La manera de hacer demostraciones depende de lo que se quiera demostrar y también de la "forma" del enunciado. Los enunciados son **proposiciones**, se afirma algo de todos o de algunos elementos de un conjunto o de un universo dado.

**Si el enunciado a probar es de forma existencial** alcanzará en algunos casos con exhibir un individuo con las características que dice el enunciado o una manera de construirlo. Por ejemplo: "Existen números enteros que son primos"

Este enunciado podemos simbolizarlo como:  $(\exists x)p(x)$ , siendo  $p(x)$ :  $x$  es primo y el Universo los números enteros.

En principio debemos conocer la definición de número primo, **un número "a", "a" distinto de 1 y -1, es primo si y sólo si es divisible por 1,-1, a y -a**. Alcanza entonces con mostrar que el número entero, por ejemplo "7", es primo ya que sólo es divisible por 1,-1,7 y -7. El enunciado afirma que existen primos, es decir que al menos hay uno, con lo que queda demostrado.

**Si el enunciado es de forma universal** habrá que probar que cada uno de los elementos del universo cumple con lo afirmado. Si el universo fuera de un número finito de individuos podríamos analizar que cada uno de ellos verifica lo enunciado. Si el universo es infinito, habrá que tomar un elemento arbitrario (**NO un ejemplo**) del universo del que se habla, y probar que tiene la propiedad enunciada.

Por ejemplo: "Si un número entero es par, su cuadrado es par"

Es un enunciado universal porque afirma algo acerca de todos los elementos del conjunto de los números enteros. Observemos que si bien no se menciona la palabra *todos*, al hablar de un número entero sin especificar cuál, se entiende que hablamos de cualquiera y por lo tanto de todos. En este caso el universo es infinito, por lo tanto debemos mostrar que se cumple para un elemento arbitrario del conjunto.

Podemos simbolizarlo como:  $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$ , siendo  $p(x)$ :  $x$  es par,  $q(x)$ :  $x^2$  es par y el Universo los números enteros.

Veremos distintos métodos:

### Método directo:

Este enunciado tiene la forma de un condicional, es importante identificar antecedente y consecuente o hipótesis y tesis, para saber cuándo será verdadero.

Recordemos que un condicional es falso sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, **partiremos entonces de antecedente verdadero y tratamos de ver que el consecuente tiene que ser verdadero**, es decir que no se da el caso de antecedente verdadero y consecuente falso, por lo tanto la implicación será verdadera y queda probado el enunciado.

En este caso el antecedente es “x es par” y el consecuente “ $x^2$  es par”

Tomamos entonces un entero par *cualquiera*, es decir que podemos tomar un número x tal que  **$x=2k$ , siendo k un entero**. A esto nos referimos con tomar un elemento arbitrario, un elemento que cumpla la condición planteada en la hipótesis, pero no uno en particular.

Tenemos que ver que si lo elevamos al cuadrado también es par.

**$x^2=(2k)^2$  entonces  $x^2=2k \cdot 2k$** , o equivalentemente  **$x^2=2(k \cdot 2k)$ , siendo  $k \cdot 2k$  un número entero**, por ser multiplicación de enteros, por lo tanto  **$x^2$  es par**.

De esta forma queda demostrado.

### Método del absurdo:

Esto consiste en suponer que el enunciado es falso y llegar a un absurdo. Cuando el enunciado tiene la forma de un condicional, suponer que es falso, es negar el condicional.

Recordemos que  $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$ , es decir que negar el condicional **es suponer que tanto el antecedente como la negación del consecuente pueden ser verdaderas**. Al llegar a un absurdo decimos entonces que lo que supusimos era falso y por lo tanto el condicional es verdadero.

Volviendo al ejemplo, demostrar por el método del absurdo sería suponer que:

**Existe un entero x que es par y  $x^2$  no es par**

Esto implicaría que  **$x=2k$  y  $x^2=2t+1$**  (ya que si no es par, es impar), con k y t números enteros.

Pero entonces  $x^2 = (2k)^2$  y además  $x^2 = 2t+1$ , esto implica que  $x^2 = 2(k2k)$  y  $x^2 = 2t+1$ , es decir que  $x^2$  es par e impar, **ABSURDO**, pues ningún número es par e impar a la vez.

El absurdo proviene de suponer que el enunciado era falso, por lo tanto la implicación es verdadera.

### **Método indirecto o contrarrecíproco:**

En realidad es hacer el método directo a la proposición contrarrecíproca de lo que se quiere demostrar. Pues ya se ha probado que un condicional y su contrarrecíproca son equivalentes. Es decir que:  $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

Sólo se trata de reformular el problema, escribirlo con un enunciado equivalente y demostrarlo.

**No siempre las demostraciones pueden hacerse por los 3 métodos.** Por eso para mostrar este método pondremos otro ejemplo:

“Si el cuadrado de un número entero es par, entonces el número es par”

Podemos simbolizarlo como:  $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$ , siendo  $p(x)$ :  $x^2$  es par,  $q(x)$ :  $x$  es par y el Universo los números enteros.

Vamos a demostrarlo por el método del contrarrecíproco, reformulando el enunciado en uno equivalente:  $(\forall x)(\neg q(x) \rightarrow \neg p(x))$

Trataremos de probar entonces que:

**”Si un número no es par entonces su cuadrado no es par”.**

Ahora planteamos, sea  $x=2h+1$  ( $x$  un número impar,  $h$  entero) entonces  $x^2=(2h+1)^2$

Desarrollando el cuadrado  $x^2 = (2h)^2 + 4h+1 = 4h^2 + 4h+1$

Sacando factor común  $x^2 = 2(2h^2 + 2h)+1$ , siendo  $2h^2 + 2h$  un número entero por ser suma y producto de enteros.

**Por lo tanto  $x^2$  es impar ya que puede escribirse como 2 por un entero más 1.**

Por lo tanto partimos de un número impar y llegamos a que su cuadrado también debe ser impar, con lo que queda demostrado.

A estas herramientas haremos referencia cada vez que queramos hacer una demostración.

**Observación:** no siempre hacemos la simbolización del enunciado antes de demostrarlo, pero en muchos casos ayuda para entender exactamente lo que se quiere demostrar.

### Ejercicios:

1. Demostrar que la suma de 3 números enteros consecutivos es un múltiplo de 3. (Un múltiplo de 3 es un número que puede escribirse como 3 por un número entero: si  $a$  es múltiplo de 3 entonces  $a = 3h$ ,  $h$  entero)
  2. Si el cuadrado de un número entero  $w$  es par, el cuadrado del anterior a  $w$  es impar.
  3. La suma de 3 números enteros consecutivos, si el primero es impar, es múltiplo de 6.
  4. Recordemos que un número racional o fraccionario es aquel que puede expresarse como cociente de enteros, es decir si  $x = \frac{a}{b}$  y  $b \neq 0$ , decimos que  $x$  es un número racional. Un número es irracional si no puede escribirse como cociente de enteros, por ejemplo:  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $\sqrt{5}$ . Demostrar que la suma de un número racional y un irracional es un número irracional.
- 

## 2. Conjuntos, elementos, pertenencia.

De manera intuitiva un conjunto es una colección bien definida de objetos que generalmente se representa con una letra mayúscula  $A$ ,  $B$ ,  $X$ ,  $W$ , etc. Los objetos que integran el conjunto se denominan sus elementos.

El enunciado “ $t$  pertenece a  $A$ ” o equivalentemente “ $t$  es un elemento de  $A$ ” se indica  $t \in A$ . Si un elemento  $u$  no pertenece a  $A$ , se indica  $u \notin A$ .

El conjunto que no tiene elementos se llama conjunto vacío, que se indica con el símbolo  $\emptyset$ .

Un conjunto está bien definido si se sabe exactamente qué elementos lo integran y cuáles no.

Existen esencialmente dos formas de especificar un determinado conjunto: dando de manera explícita cada uno de sus elementos (**por extensión**) o bien mediante una propiedad que caracterice a cada uno de sus elementos y únicamente a ellos, es decir que todo elemento que cumpla tal propiedad estará en el conjunto y sólo ellos (**por comprensión**).

Es posible definir el conjunto por extensión si el conjunto tiene un número finito y relativamente pequeño de elementos, sin embargo algunos conjuntos infinitos o con muchos elementos se presentan de esa manera cuando se entiende su ley de formación.

### Ejemplo 2.1:

Se define el conjunto **A por extensión como:**  $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ , se tiene que:  $1 \in A$ ,  $3 \in A$ ,  $5 \in A$  y  $7 \in A$ , por otra parte por ejemplo  $9 \notin A$ ,  $12 \notin A$ .

También se puede definir **A por comprensión como:**

$$A = \{ x: x \text{ es un número entero positivo impar menor que } 9 \} = \\ = \{ x: x = 2k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq k \leq 3 \}$$

**Este conjunto se lee: el conjunto de los números  $x$  tal que  $x$  es igual a  $2k+1$ , con  $k$  entero, entre 0 y 3.**

En ambos casos, la propiedad “ser un número entero positivo impar menor que 9”, o equivalentemente “ $x$  es un número que cumple  $x = 2k + 1$  para  $k \in \mathbb{Z}$  y  $0 \leq k \leq 3$ ” es la que caracteriza a todos los elementos de  $A$  y únicamente a ellos.

### Ejemplo 2.2:

El conjunto de los números naturales (según la definición que se adopte puede tener al 0 o al 1 como primer elemento, en este curso tomaremos los naturales a partir del 1), y el conjunto de los enteros a pesar de ser infinito es usual indicarlos respectivamente:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}, \quad \mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Con los puntos suspensivos, en estos casos se intuye cuáles son los restantes elementos por la ley de formación y el orden.

### Ejemplo 2.3:

Escribir por extensión el conjunto:  $A = \{ x: x \in \mathbb{Z} \wedge x + 8 = 10 \}$ .

Este conjunto lo forman los números enteros que sumados con 8 dan como resultado 10, por

tanto, su forma por extensión es:  $A = \{2\}$ , ya que el único entero que sumado a 8 da 10 es 2.

Cabe destacar que en un conjunto cualquiera no interesa en qué orden aparecen los elementos, así como tampoco interesa que un elemento aparezca repetido.

El conjunto  $B = \{5, b, 3, d, d, 1, w\} = \{1, 3, 5, w, w, d, b\} = \{d, 1, 3, b, 5, w\}$  es el mismo conjunto con 6 elementos en cualquiera de las tres formas en que aparece.

Así como los conjuntos  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Z}$  representan los números naturales y enteros respectivamente, los conjuntos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{I}$  y  $\mathbb{R}$  representan los números racionales o fraccionarios, los irracionales y los reales respectivamente.

### Ejercicios:

5. Escribir por extensión los siguientes conjuntos:

- a)  $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x \leq 9\}$
- b)  $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x + 3 = 7\}$
- c)  $B = \{y: y \in \mathbb{Z} \wedge -2 < y \leq 3\}$
- d)  $C = \{x: x \text{ es una vocal de la palabra "número"}\}$
- e)  $D = \{x: x \text{ es un dígito de la cifra: 453425}\}$
- f)  $E = \{z: z \text{ es un dígito primo de la cifra 729634}\}$
- g)  $A = \{w: w \in \mathbb{N} \wedge w \text{ es divisor de } 50\}$
- h)  $H = \{w: w \in \mathbb{N} \wedge w^2 \leq 9\}$
- i)  $F = \{a: a \in \mathbb{Z} \wedge -4 \leq a + 2 \leq 5\}$
- j)  $G = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 3 \leq x - 4 \leq 8\}$
- k)  $W = \{x: x = 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq k \leq 5\}$
- l)  $F = \{x: x = 6k + 3 \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq k \leq 4\}$

6. Definir por comprensión los siguientes conjuntos:

- a) El conjunto de los números enteros pares mayores que -8 y menores o iguales que 12.
- b) El conjunto de las primeras seis potencias naturales de -2.
- c) El conjunto de los números naturales pares.
- d) El conjunto de los enteros múltiplos de 3.
- e) El conjunto de los naturales múltiplos de 5.



- f) El conjunto de los enteros múltiplos de 9.
- g) El conjunto de los números reales que anulan la ecuación  $(x^3 - \frac{1}{4}x).(x^2 - 3).(x + 5)$
- h) El conjunto de los enteros que son el siguiente de los múltiplos de 3.
- i) El conjunto de los enteros que son el resultado de sumarle 2 a los múltiplos de 4.
- j) El conjunto de los enteros que son el resultado de sumarle 5 a los múltiplos de 10.

### Igualdad de conjuntos

Los conjuntos  $A$  y  $B$  son iguales si y sólo si  $A$  y  $B$  tienen los mismos elementos. Es decir que todo elemento de  $A$  es también elemento de  $B$  y recíprocamente, o sea que se verifica:

$(\forall x) (x \in A \leftrightarrow x \in B)$ . **Se indica:  $A = B$ .**

#### Ejemplo 2.4:

Los conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son iguales:

$$A = \{0, 2\}, \quad B = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 2x = 0\} \text{ y } \quad C = \{x : x = 2 \cdot k \wedge (k = 0 \vee k = 1)\}$$

Notar que todos los elementos de  $A$  son elementos de  $B$  ya que el 0 y el 2 satisfacen la ecuación  $x^2 - 2x = 0$ .

Por otro lado los únicos elementos que satisfacen la ecuación  $x^2 - 2x = 0$  son el 0 y el 2 ya que  $x^2 - 2x = 0$  si y sólo si  $x(x - 2) = 0$  entonces  $x = 0$  o  $x = 2$ . Por lo tanto todos los elementos de  $B$  son elementos de  $A$ . Por lo tanto  $A = B$

Resta verificar  $A = C$ .

### Inclusión, subconjuntos

Puede ocurrir que todo elemento de un conjunto sea elemento de otro conjunto pero no se cumpla la recíproca.

#### Ejemplo 2.5:

Sean los conjuntos  $A = \{0, 2\}$  y  $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

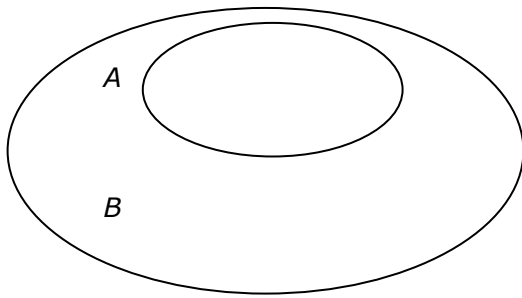
Todo elemento de  $A$  es elemento de  $B$ , pero no todo elemento de  $B$  es elemento de  $A$ .

### Ejemplo 2.6:

Todo elemento de  $\mathbb{N}$  es elemento de  $\mathbb{Z}$ , pero no todo elemento de  $\mathbb{Z}$  es elemento de  $\mathbb{N}$ .

Si dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , todo elemento de  $A$  es elemento de  $B$ , se usará alguna de las siguientes expresiones que son todas equivalentes:

- a)  $A$  es subconjunto de  $B$
- b)  $A$  es parte de  $B$
- c)  $A$  está incluido en  $B$
- d)  $A$  está contenido en  $B$
- e)  $B$  contiene a  $A$



**Decimos entonces:  $A$  contenido en  $B$  si se verifica que  $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$**

Se utiliza la notación  $A \subseteq B$  para indicar esta relación entre conjuntos. También a veces se usa indicarlo con  $B \supseteq A$ .

Si  $A$  no es subconjunto de  $B$ , se indica con  $A \not\subseteq B$ .

En forma similar a las desigualdades  $\leq, <$  entre números o expresiones algebraicas, entre los conjuntos  $\subset$  indica la inclusión estricta, mientras que  $\subseteq$  equivale a " $\subset$  o  $=$ ".

Es decir:  $A \subset B$  significa que  $A \subseteq B$  y  $A \neq B$ , se dice que  $A$  está incluido o contenido estrictamente en  $B$ , o que  $A$  es parte propia o subconjunto propio de  $B$ .

### Conjunto universal:

En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, todos los conjuntos que se consideren serán subconjuntos de un conjunto universal  $U$ , si se trata con conjuntos de personas  $U$  es el

conjunto de todos los seres humanos, en geometría plana  $U$  será  $\mathbb{R}^2$ , en problemas con conjuntos numéricos  $U$  será  $\mathbb{R}$ , o bien  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{I}$  o  $\mathbb{Q}$  de acuerdo con el contexto del problema.

### Ejemplo 2.7:

a) Probar que los múltiplos enteros de 12 son múltiplos enteros de 3.

Del enunciado de este problema se infiere que el conjunto universal es  $\mathbb{Z}$ , se hace referencia a los conjuntos  $D = \{x: x = 12k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$  y  $T = \{x: x = 3q \wedge q \in \mathbb{Z}\}$  definidos por comprensión.

Del enunciado también se infiere que **todos los múltiplos de 12 son múltiplos de 3**.

Se quiere probar que  $D$  está incluido en  $T$ , de acuerdo con la definición de inclusión hay que **probar que todo elemento de  $D$  es elemento de  $T$** .

Demostración por el método directo:

Tomaremos un elemento arbitrario  $x$  de  $D$  y trataremos de probar que es elemento de  $T$ .

Sea  $x \in D$  entonces  **$x = 12k$ , donde  $k$  es algún entero**.

Entonces  **$x = 12k = (3 \cdot 4) \cdot k = 3 \cdot (4 \cdot k) = 3 \cdot m$**

Entonces  $x \in T$ .

Por propiedad asociativa del producto de enteros

$4 \cdot k$  es un entero por ser producto de enteros, llamamos  $m$  a ese producto:  **$4k = m$**

Como  $x$  es un elemento arbitrario de  $D$ , queda probado que para todo  $x$ , si  $x \in D$  entonces  $x \in T$ , es decir que  $D \subseteq T$  y **por lo tanto todo múltiplo de 12 es múltiplo de 3**.

b) ¿Es todo múltiplo de 3 múltiplo de 12?

Con la notación usada equivale a la pregunta ¿ $T \subseteq D$ ?

Escribamos algunos de los elementos que están en los conjuntos:

$T = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \dots\}$        $D = \{\dots, -12, 0, 12, 24, 36, \dots\}$

Vemos que entre 0 y 12 no hay múltiplos de 12, por lo tanto seguro hay elementos de  $T$  que no están en  $D$ .

Recordando la definición de  $T \subseteq D$ :  **$(\forall x)(x \in T \rightarrow x \in D)$** , vemos que no se cumple, es decir que si este enunciado es falso su negación es verdadera:

$\neg((\forall x)(x \in T \rightarrow x \in D))$  es equivalente a  $(\exists x)(x \in T \wedge x \notin D)$

Para ver que se cumple la proposición existencial es suficiente mostrar un elemento de  $T$  que no esté en  $D$ , por ejemplo  $15 \in T$  porque es múltiplo de 3, pero no existe ningún entero  $k$  tal que 15 se pueda escribir como  $12 \cdot k$  para que sea múltiplo de 12, es decir que  $15 \notin D$ , luego  $T \not\subseteq D$ .

### Propiedades de la inclusión:

1) Para todo par de conjuntos  $A$  y  $B$ ,  $A=B$  si y sólo si  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$  (antisimetría)

Esta propiedad da un criterio para probar igualdad entre conjuntos. Si se prueba que  $A$  es subconjunto de  $B$  y que  $B$  es subconjunto de  $A$ , entonces  $A=B$ .

2) Para todo conjunto  $A$  se cumple que  $A \subseteq A$  (reflexividad)

3) Dados los conjuntos  $A, B, C$ , cualesquiera, si  $(A \subseteq B \text{ y } B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$  (transitividad)

4) Para todo conjunto  $A$  se cumple que  $\emptyset \subseteq A$

**Observación:** Notar que cuando hablamos de propiedades nos referimos a proposiciones verdaderas para **todo** conjunto o para todo conjunto que cumpla una determinada condición, pero no para un conjunto en particular.

Así en la propiedad 3) se dice que si  $A, B$  y  $C$  son **cualquier terna de conjuntos** que cumplan  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq C$  se cumple que  $A \subseteq C$ .

Por ejemplo:

Si  $A = \{1,2\}$ ,  $B = \{1,2,3\}$ ,  $C = \{1,2,3,4,5\}$  se cumple que  $A \subseteq C$  porque  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq C$

Pero si  $A = \{1,2\}$ ,  $B = \{1,3\}$ ,  $C = \{1,3,4,5\}$  no tiene porqué cumplirse porque  $A \not\subseteq B$ .

### Ejercicios:

7. Indicar si los siguientes pares de conjuntos son iguales, son distintos o alguno está incluido en el otro:

- a)  $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es divisor de } 6\}$ ,  $B = \{1,2,3,6\}$
- b)  $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es divisor de } 5\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N}: 2 < x < 5\}$
- c)  $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es divisor de } 12\}$ ,  $B = \{1,2,3,4\}$
- d)  $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 4x + 4 = 0\}$ ,  $B = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x^2 \leq 5\}$
- e)  $A = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 2x = x\}$ ,  $B = \{0\}$

**8.** En cada caso escribir por comprensión los conjuntos que se mencionan.

- a) Probar que los múltiplos naturales de 18 son múltiplos de 6.
- b) Probar que los múltiplos enteros de 60 son múltiplos de 15.
- c) Probar que los múltiplos enteros de 12 son pares.
- d) ¿Son todos los múltiplos naturales de 3 múltiplos de 21?
- e) ¿Son todos los múltiplos enteros de 13 múltiplos de 39?
- f) Probar que los múltiplos enteros de 39 son múltiplos de 13.
- g) Sean B el conjunto de los múltiplos enteros de -5 y C el conjunto de los múltiplos enteros de 5, probar que  $B=C$ .

**9.** Sean  $A = \{x: x = 10k + 5 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$  y  $B = \{x: x = 5h \wedge h \in \mathbb{Z}\}$  conjuntos.

- a) Probar que  $A \subseteq B$
- b) ¿El número 40 es un elemento de  $A$ ? ¿Y de  $B$ ? Justifique su respuesta.
- c) ¿Está el conjunto  $B$  incluido en  $A$ ? Justifique su respuesta.

**10.** Sean  $A = \{x: x = 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$  y  $B = \{x: x = 2h \wedge h \in \mathbb{Z}\}$  conjuntos.

- a) Probar que  $A \subseteq B$
- b)  $A$  y  $B$  son el mismo conjunto? Justifique su respuesta.

## Operaciones entre Conjuntos

**Unión:** La unión de dos conjuntos  $A$  y  $B$ , indicada por  $A \cup B$  es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a  $A$  o a  $B$ .

$$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$

### Ejemplo 2.8:

a) Sean  $A = \{1,2\}$ ,  $B = \{1,2,3,6\}$  entonces el conjunto unión es  $A \cup B = \{1,2,3,6\}$

b) Sean  $A = \{1,2,7,9,a\}$ ,  $B = \{1,2,3,6,w,x\}$  entonces el conjunto unión es

$$A \cup B = \{1,2,3,6,7,9,a,w,x\}$$

### Propiedades de la Unión:

1) Asociatividad: Sean A, B y C conjuntos cualesquiera,  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

2) Conmutatividad: Para todo par de conjuntos A y B,  $A \cup B = B \cup A$

3) Para todo par de conjuntos A y B:  $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$

**Intersección:** La intersección de dos conjuntos A y B, indicada por  $A \cap B$  es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a B.

$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$

**Si A y B son no vacíos y  $A \cap B = \emptyset$ , A y B se llaman disjuntos.**

### Ejemplo 2.9:

a) Sean  $A = \{1,2\}$ ,  $B = \{1,2,3,6\}$  entonces el conjunto intersección es  $A \cap B = \{1,2\}$

b) Sean  $A = \{1,2,7,9,a,w\}$ ,  $B = \{1,2,3,7,w,x\}$  entonces el conjunto intersección es

$$A \cap B = \{1,2,7,w\}$$

c) Sean  $A = \{1,2,7,a,w\}$ ,  $B = \{3,x\}$  entonces el conjunto intersección es  $A \cap B = \emptyset$

### Propiedades de la Intersección:

1) Asociatividad: Sean A, B y C conjuntos cualesquiera,  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

2) Conmutatividad: Para todo par de conjuntos A y B,  $A \cap B = B \cap A$

3) Para todo par de conjuntos A y B:  $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$

**Diferencia:** La diferencia de dos conjuntos  $A$  y  $B$ , indicada por  $A-B$  es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a  $A$  y no pertenecen a  $B$ .

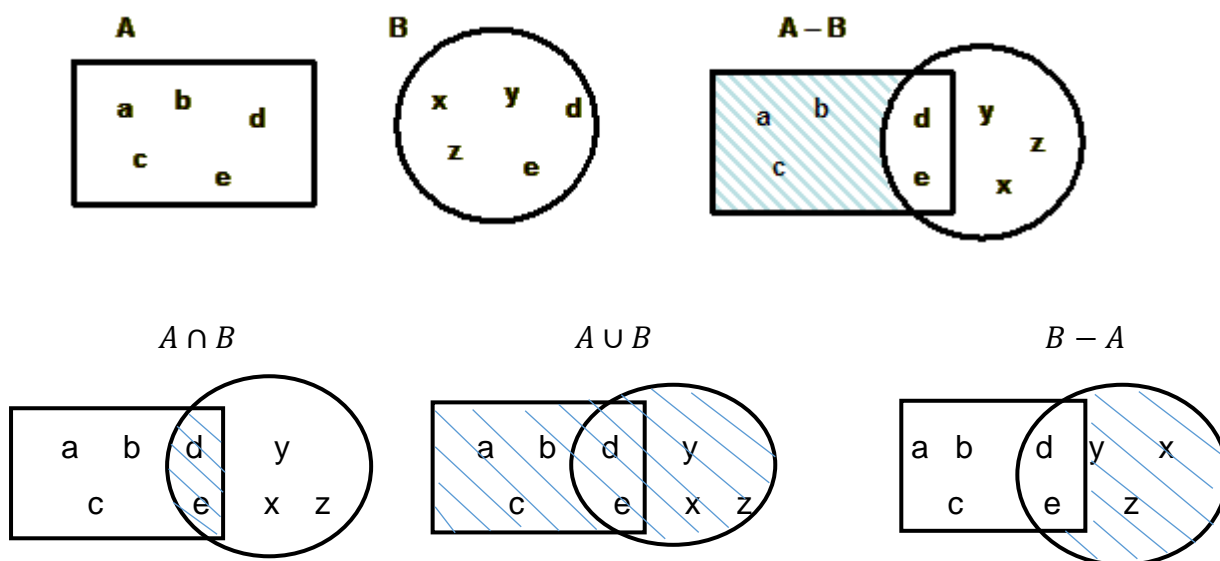
$$A - B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$$

### Ejemplo 2.10:

Sean  $A = \{a, b, c, d, e\}$  y  $B = \{x, y, e, z, d\}$

$A \cap B = \{d, e\}$ ,  $A \cup B = \{a, b, c, d, e, x, y, z\}$ ,  $A - B = \{a, b, c\}$ ,  $B - A = \{x, y, z\}$

Graficando los conjuntos en diagramas de Venn:



### Propiedades de la Diferencia:

1) Para todo  $A$ ,  $A - A = \emptyset$

2) Para todo  $A$ ,  $\emptyset - A = \emptyset$

3) Para todo  $A$ ,  $A - \emptyset = A$

4) Para todo par de conjuntos  $A$  y  $B$ , si  $A - B = B - A$  entonces  $A = B$

**Complemento:** El complemento de un conjunto  $A$  es el conjunto de todos los elementos (del universo  $U$ ) que no están en  $A$

$$A^c = \{x: x \in U \wedge x \notin A\}$$

**Ejemplo 2.10:**

a) Sean  $A = \{a, b, c, d, e\}$  y  $U = \{a, b, c, d, x, y, e, z\}$  entonces  $A^c = \{x, y, z\}$

b) Sean  $B = \{-2, -3, 1, 5, 7, 8, 9\}$  y  $U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$   
Entonces  $B^c = \{-4, -1, 0, 2, 3, 4, 6\}$

**Propiedades del Complemento:**

- 1) Para todo  $A$ ,  $(A^c)^c = A$
- 2) Si  $U$  es el universo,  $\emptyset^c = U$
- 3) Si  $U$  es el universo,  $U^c = \emptyset$
- 4) Para todo par de conjuntos  $A$  y  $B$ ,  $A \subseteq B \leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

**Propiedades combinando operaciones:**

Leyes Distributivas:

- a) Para toda terna de conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ :  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- b) Para toda terna de conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ :  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leyes de De Morgan:

- c) Para todo par de conjuntos  $A$  y  $B$ :  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- d) Para todo par de conjuntos  $A$  y  $B$ :  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$



## Ejercicios:

11. Sean  $A = \{1,2\}$ ,  $B = \{1,2,3,6\}$ ,  $C = \{x: x = 2k \wedge k \in \mathbb{N}\}$ ,  $D = \{x: x = 3m \wedge m \in \mathbb{Z}\}$  y  $U = \mathbb{Z}$
- a) Expresar por comprensión  $A \cup \mathbb{Z}$
  - b) Expresar por comprensión  $A^c$
  - c) Expresar por extensión  $A \cap C$
  - d) Expresar por extensión  $B - (D \cap A)$
  - e) Expresar por comprensión  $C^c$
  - f) Expresar por comprensión  $D^c \cup B^c$ , recuerde que por las propiedades mencionadas puede calcularlo como  $(D \cap B)^c$ .
  - g) Expresar por extensión  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ , según las propiedades enunciadas, ¿de qué otra forma podría calcularlo?
  - h) Expresar por comprensión  $A^c \cup D^c$
  - i) Expresar por comprensión  $A^c \cap C^c$
12. Sean  $A = \{x: x = 5w \wedge w \in \mathbb{Z}\}$  y  $B = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x + 2 \leq 7\}$ .
- a) Hallar por extensión los conjuntos:  $A \cap B$  y  $B - A$
  - b) Definir un conjunto  $H$ , que cumpla que  $H \subseteq B$
13. Sean los conjuntos  $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ,  $B = \{x: x = 4k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$  y  $C = \{3,4,5,6,7,8\}$
- a) Hallar y expresar por extensión i)  $A \cap (B \cup C)$  ii)  $C - (A - B)$ .
  - b) Hallar un conjunto  $D$  que esté incluido en  $B$ .
14. Sean  $P$  el conjunto de los enteros pares e  $I$  el conjunto de los enteros impares y  $U = \mathbb{Z}$
- a) Expresar por comprensión:  $P \cup I$ ,  $P - I$ ,  $I - P$ ,  $P^c$ ,  $I^c$
  - b) Probar que  $P \cap I = \emptyset$   
*Indicaciones:* probarlo por el absurdo suponiendo que fuera distinto del  $\emptyset$ , es decir que existe un número  $m$  que es a la vez elemento de  $P$  y elemento de  $I$ .
15. Si  $T$  es el conjunto de enteros múltiplos de 3 y  $C = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 3k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$  y  $U = \mathbb{Z}$ .
- a) Hallar  $T \cap C$
  - b) Hallar  $(T \cup C)^c$

## Producto cartesiano

El producto cartesiano es otra operación entre conjuntos, a diferencia de las anteriores sus elementos son pares ordenados.

Si  $A$  y  $B$  son conjuntos cualesquiera **el producto cartesiano  $A \times B$**  es el conjunto de todos los pares ordenados  $(a,b)$  donde  $a \in A$  y  $b \in B$ ,  $A \times B = \{(a,b): a \in A \wedge b \in B\}$

### Ejemplos 2.11:

a) Si  $A = \{1,3,5\}$ ,  $B = \{w,1\}$ ,  $A \times B = \{(1,w), (3,w), (5,w), (1,1), (3,1), (5,1)\}$

b) En geometría, el plano  $\mathbb{R}^2$  es el producto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , y en efecto sus elementos, los puntos del plano, son pares ordenados:  $\mathbb{R}^2 = \{(x,y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ .

### Ejercicios:

16. Hallar el producto cartesiano  $E \times F$  de los conjuntos  $E = \{-2, -1, 0, 1\}$ ,  $F = \{2, 3\}$  y representarlo en  $\mathbb{R}^2$  como puntos del plano.

17. Si  $A = \{1,2,3\}$ ,  $B = \{-2,-1,6\}$  y  $C = \{6,7\}$ , son conjuntos, hallar  $A \times (B \cap C)$  y  $(A \times B) \cap (A \times C)$  y verificar que son iguales.

---

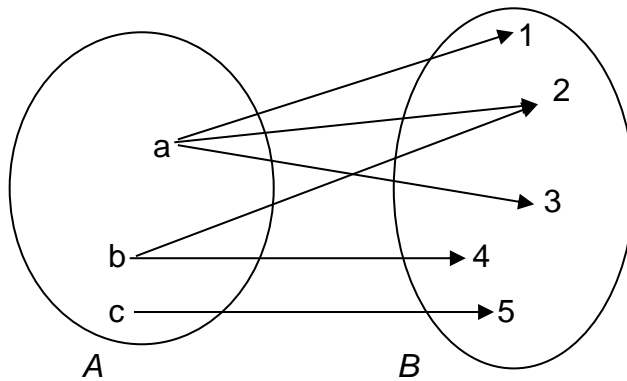
## 3. Relaciones binarias y Funciones

Una relación binaria o correspondencia de un conjunto  $A$  en un conjunto  $B$ , es un subconjunto  $R$  del producto cartesiano  $A \times B$ . Sus elementos son pares ordenados  $(a,b)$  donde  $a \in A$  y  $b \in B$ , **no necesariamente todos** tales pares ordenados.

Cuando un par  $(a,b) \in R$ , también se indica  $aRb$  o  $b \in R(a)$ , donde  $R(a) = \{x \in B; aRx\}$  es decir el conjunto de todos los elementos  $x$  de  $B$  relacionados por  $R$  con un elemento fijo  $a$  de  $A$ .

Si  $A$  y  $B$  son finitos y tienen pocos elementos es posible representar gráficamente la relación  $R$  de  $A$  en  $B$  mediante un diagrama para  $A$ , otro para  $B$  y una flecha con origen en un elemento  $a$  de  $A$  y extremo en uno  $b$  de  $B$  si y sólo si el par  $(a,b)$  pertenece a la relación  $R$ .

### Ejemplo 3.1:



En este caso  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y los pares que están en la relación son:

$$R = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 4), (c, 5)\}$$

### Ejemplos 3.2:

a) Si  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $B = \{w, 1\}$  se define la relación binaria  $T = \{(1, w), (5, w), (1, 1), (5, 1)\} \subset A \times B$ , en este

caso  $T(5) = \{x \in B : 5Tx\} = \{w, 1\}$

b) En el plano  $\mathbb{R}^2$  se define por comprensión la relación binaria:  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 3\}$ , sus elementos son todos los puntos del plano que pertenecen a la parábola  $y = x^2 - 3$

c) En el plano  $\mathbb{R}^2$  se define la relación binaria  $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x\}$ , sus elementos son todos los puntos del plano que pertenecen a  $y^2 = x$  parábola de eje focal x.

Existen distintos tipos de **Relaciones Binarias**, definiremos a continuación una clase especial de relaciones binarias: las **Funciones**.

### Funciones

Una relación binaria de A en B que cumpla que:

a **todo** elemento  $a \in A$  le asigna **un único** elemento  $b \in B$  es una función de A en B

Una función llamada  $f$ , que relaciona elementos de A con elementos de B se indica con  $f: A \rightarrow B$ . El elemento único de B asignado a cada  $a \in A$  se llama la imagen de a por f y se indica  $f(a)$ , que se lee “f de a”.

El conjunto  $A$  se llama el **dominio** de  $f$  y se indica con  $\text{Dom}(f)$ .

El conjunto  $B$  se llama **codominio**.

La **imagen de una función**  $f$  es el conjunto de todos los  $y \in B$  tales que sean imagen por  $f$  de algún elemento  $x$  de  $A$ , en términos de conjuntos:

$$\text{Im}(f) = \{y \in B : (\exists x)(x \in A \wedge y = f(x))\} \quad \text{Im}(f) \subseteq B .$$

La imagen es un subconjunto del codominio, en algunos casos pueden coincidir.

En una relación binaria cualquiera de  $A$  en  $B$ , el conjunto  $R(a)$ , para  $a \in A$ , puede ser vacío o tener cualquier número de elementos. En una función, tal conjunto nunca es vacío y tiene exactamente un elemento.

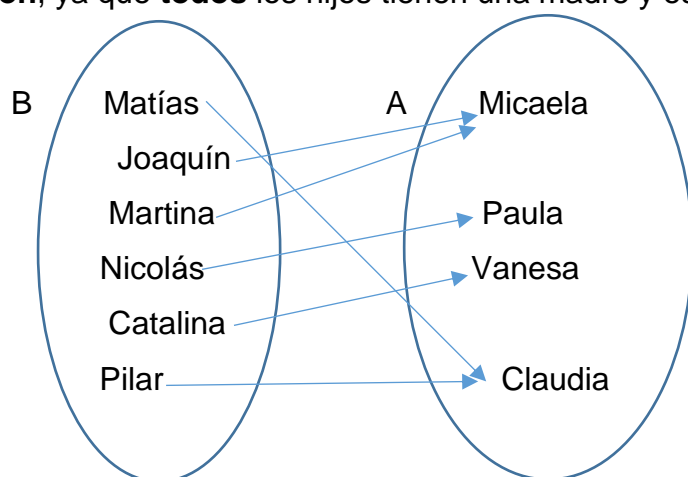
También las funciones podemos definirlas por sus pares ordenados, indicando  $(a, f(a))$ , siendo  $a$  un elemento del dominio y  $f(a)$  su imagen.

### Ejemplo 3.3:

Si  $A$  es el conjunto de las madres de 6 amigos y  $B$  es el conjunto de los amigos, definimos:

$A = \{\text{Micaela}, \text{Paula}, \text{Vanesa}, \text{Claudia}\}$ ,  $B = \{\text{Matías}, \text{Joaquín}, \text{Martina}, \text{Nicolás}, \text{Catalina}, \text{Pilar}\}$

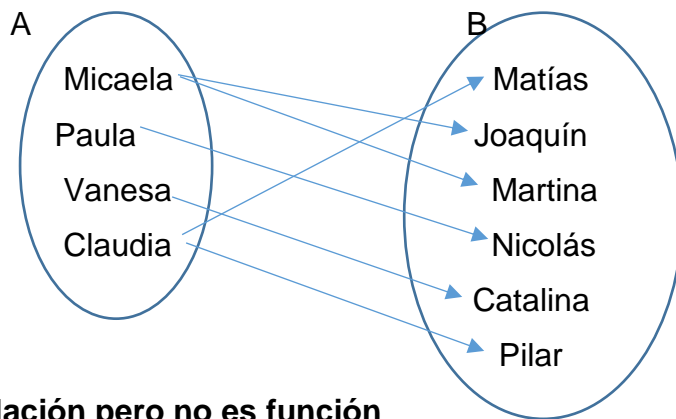
Podemos establecer la **relación** que a cada hijo le asigna su madre, esta relación **es una función**, ya que **todos** los hijos tienen una madre y esta es **única**.



Hemos definido una **función**  $f: B \rightarrow A$ , donde a cada elemento de  $B$  se le asigna un único elemento en el conjunto  $A$ . En este caso la imagen coincide con el codominio.

Sin embargo si quisiéramos relacionar las madres con sus hijos, podemos definir una relación de  $A$  en  $B$  que **no es función**, ya que hay elementos en el dominio que tienen más de una imagen, hay elementos en el dominio a quienes se les asigna más de un elemento en el conjunto

codominio.



**Es una relación pero no es función**

### Ejemplo 3.4:

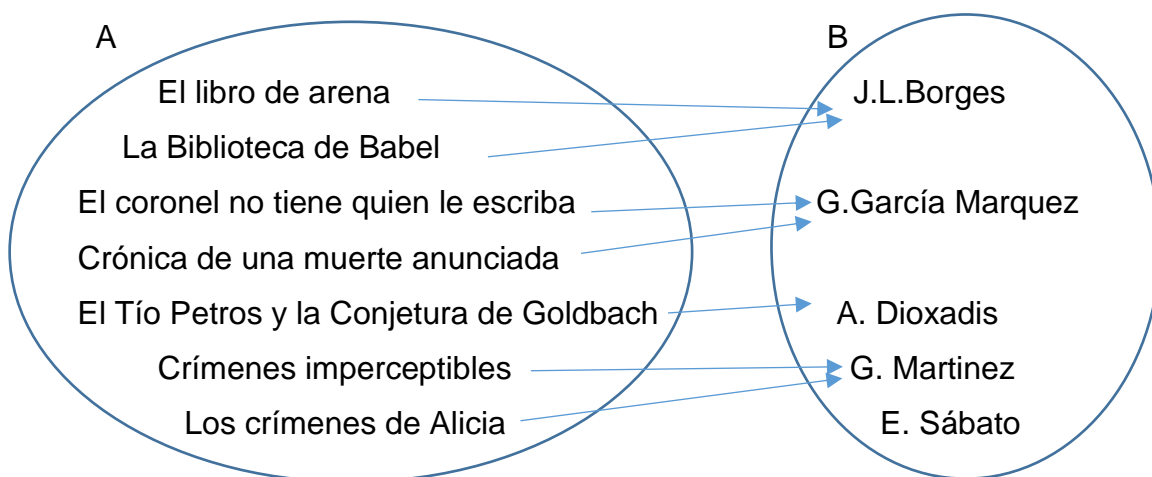
Sea A el conjunto de los libros escritos por algunos escritores latinoamericanos:

$A = \{ \text{El libro de arena, La Biblioteca de Babel, El coronel no tiene quien le escriba, Crónica de una muerte anunciada, El Tío Petros y la Conjetura de Goldbach, Crímenes imperceptibles, Los crímenes de Alicia} \}$

Sea B el conjunto de algunos escritores:

$B = \{ \text{Jorge Luis Borges, Gabriel García Marquez, Apostolos Dioxadis, Guillermo Martinez, Ernesto Sábato} \}$

Podemos establecer la **relación** que a cada libro le asigna su autor, esta relación es una función, ya que **todos** los libros tienen un autor y, en este caso, es **único**.

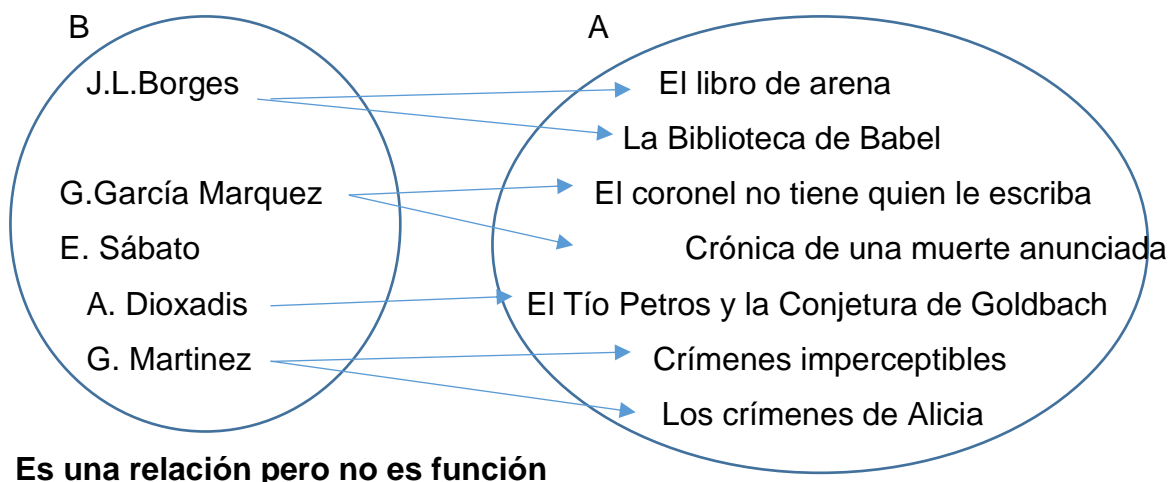


Hemos definido una **función**  $f: A \rightarrow B$ , donde a cada elemento de A se le asigna un único elemento en el conjunto B.

En este caso **la imagen es un subconjunto del codominio**, ya que ningún elemento de A tiene

por imagen a E. Sábato. Decimos que  $\text{Im}(f) = \{\text{Jorge Luis Borges, Gabriel García Márquez, Apostolos Dioxadis, Guillermo Martínez}\}$

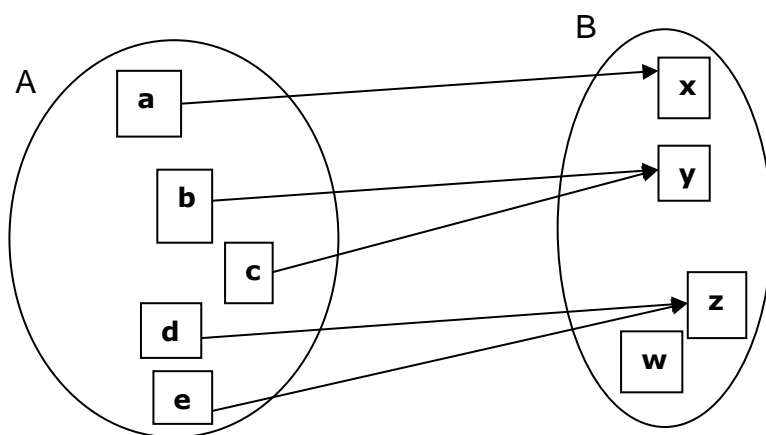
Sin embargo si quisiéramos relacionar los escritores con sus libros, podemos definir una relación de  $B$  en  $A$  que **no es función**, ya que hay elementos en el dominio que tienen más de una imagen, hay elementos en el dominio a quienes se les asigna más de un elemento en el conjunto codominio, además, en este caso hay un elemento del dominio que no tiene imagen:



### Ejemplo 3.5:

El siguiente es el diagrama de la **función**  $f$  de  $A$  en  $B$ , que asigna  $f(a)=x$ ,  $f(b)=y$ ,  $f(c)=y$ ,  $f(d)=z$ ,  $f(e)=z$ . Podemos escribir también la función a partir de sus pares ordenados, decimos entonces  $f = \{(a, x), (b, y), (c, y), (d, z), (e, z)\}$

De cada elemento del dominio  $A = \text{Dom}(f)$  debe salir una flecha única. A elementos del codominio  $B$  puede llegar más de una flecha o ninguna, como en los elementos  $y, z, w$  de  $B$ .



### Ejemplo 3.6:

Sea  $A$  el conjunto de las letras del alfabeto y  $\mathbb{R}$  el de los números reales, se define la función:

$$g : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } g(x) = \begin{cases} -3, & \text{si } x \text{ es consonante} \\ 5, & \text{si } x \text{ es vocal.} \end{cases}$$

El codominio es el conjunto  $\mathbb{R}$  de todos los reales, la imagen  $\text{Im}(g) = \{-3, 5\}$  está contenida estrictamente en  $\mathbb{R}$ .

### Ejemplo 3.7:

El área de un rectángulo se calcula como base por altura, si suponemos una base dada, por ejemplo de 10 cm, el área del rectángulo variará **en función** de la altura, decimos que el área depende de la altura, podemos escribir entonces:

**$f(x) = 10 \cdot x$** , tomando la altura como  $x$ , el área es  $f(x)$ .

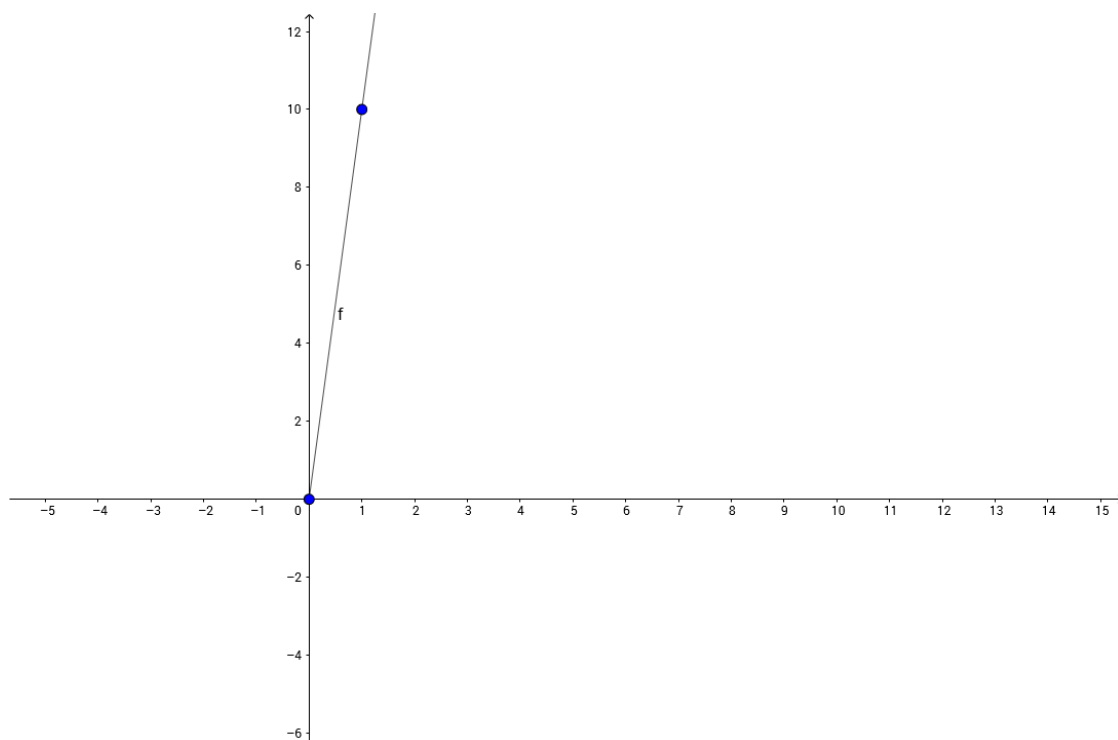
Tomando como dominio y codominio los reales positivos, decimos que a cada valor de  $x$ , es decir a cada altura le corresponde un área **distinta y única**.

Por ejemplo si la altura es 5,  $f(5) = 10 \cdot 5 = 50$ , el área es 50.

Si la altura es 20,  $f(20) = 10 \cdot 20 = 200$ , el área es 200.

Así definida,  $f$  es una función que relaciona cada altura de un rectángulo con su área.

Observemos que esta función representa la ecuación de una recta de pendiente 10 y ordenada al origen 0, con la salvedad de que como estamos modelizando un problema con longitudes y distancias tomamos sólo los reales positivos como dominio y codominio, podemos graficarla en el plano cartesiano:



## Igualdad de funciones

Dos funciones son iguales si y solo si tienen el mismo dominio y codominio y establecen la misma relación:

$$f = g \Leftrightarrow \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \wedge \text{Codom}(f) = \text{Codom}(g) \wedge (\forall x)(f(x) = g(x))$$

## Funciones numéricas

Una función numérica es una función tal que su dominio y su codominio son conjuntos de números, por ejemplo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } f(x) = 3x + \frac{5}{6};$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ dada por } g(n) = n - 25;$$

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } k(x) = x^2 + 1;$$

$$j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{ dada por } j(x) = 5x + 3;$$

Estas funciones pueden definirse también como:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } y = 3x + \frac{5}{6};$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ dada por } y = x - 25;$$

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } y = x^2 + 1;$$

$$j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{ dada por } y = 5x + 3;$$

Decimos que  $x$  es la **variable independiente** y que  $y$ , es la **variable dependiente**, ya que el valor de  $y$  depende del valor que tome la variable  $x$ .

Se representan en un sistema de ejes cartesianos, sobre el eje horizontal se representa el dominio y sobre el vertical el codominio.

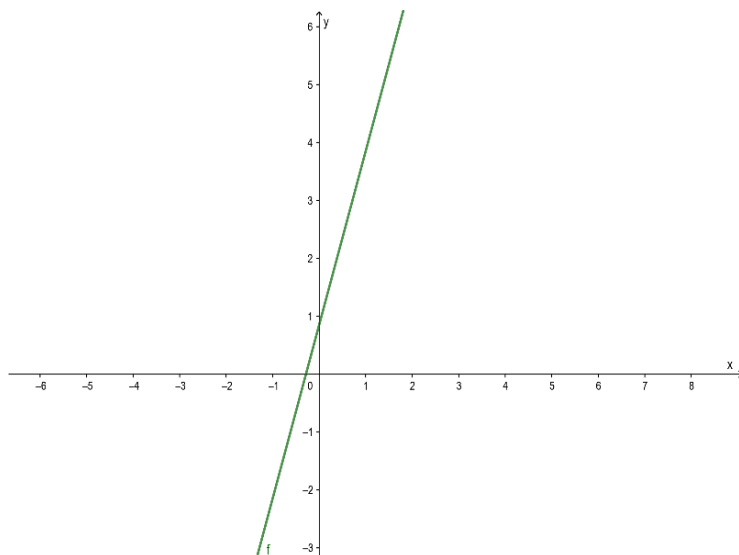
En estos ejemplos podemos hacer los gráficos ya que representan rectas y parábolas que ya hemos estudiado, o sólo algunos puntos del plano, veremos otros ejemplos donde no es fácil hacer la gráfica, esto será tema de estudio en Matemática 2.

### Ejemplo 3.8:

Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = 3x + \frac{5}{6}$ , decimos que es una función lineal que se corresponde con la ecuación de la recta, ya que como hemos mencionado el valor de  $f(x) = y$ .

Su representación en el plano es:

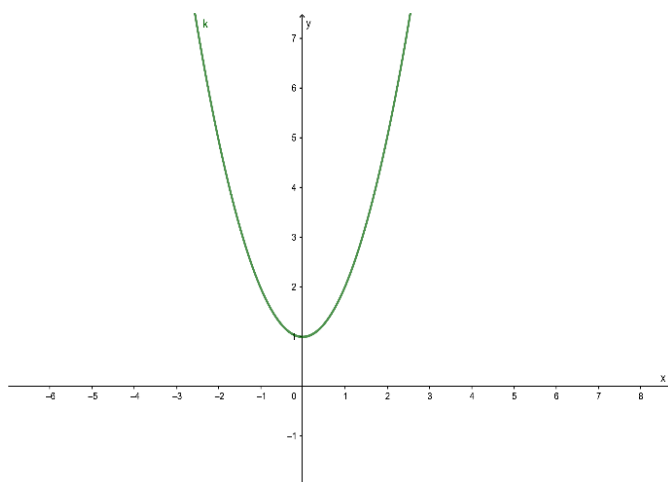




### Ejemplo 3.9:

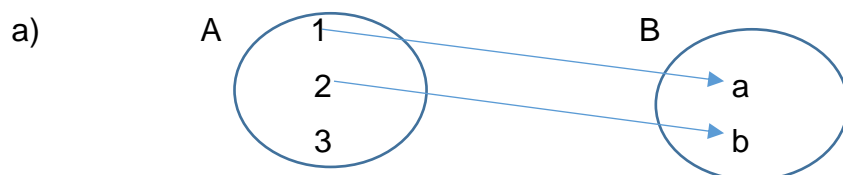
Si  $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $k(x) = x^2 + 1$ , decimos que es una función cuadrática que se corresponde con la ecuación de una parábola de eje paralelo al eje  $y$ . En términos de la ecuación canónica de la parábola es  $x^2 = y - 1$ , con vértice en  $(0,1)$  y distancia focal  $\frac{1}{4}$ .

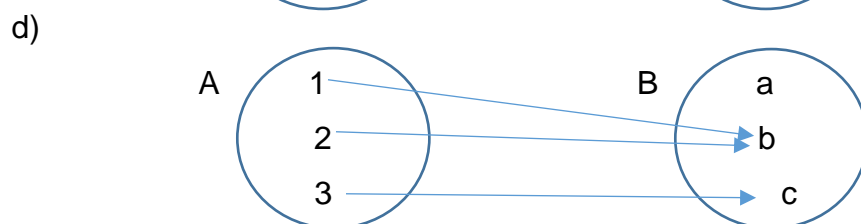
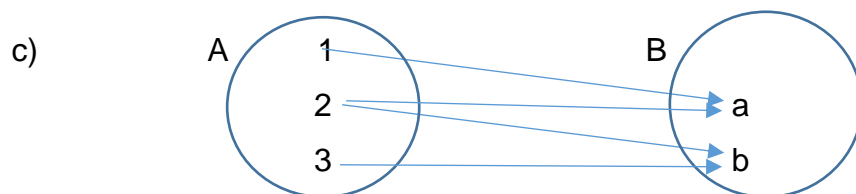
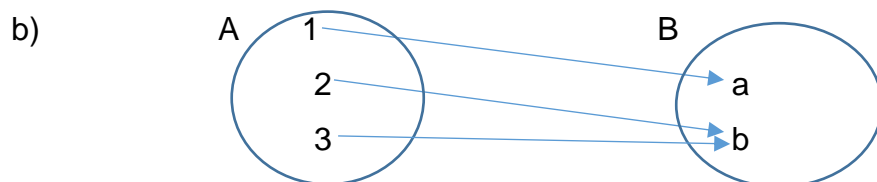
Su representación en el plano es:



### Ejercicios

**18.** Indicar si las siguientes relaciones son o no funciones, justificando lo que afirma. En caso de serlo indicar la imagen:





- e) Si  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{x, y, z\}$
- i)  $f: A \rightarrow B, f = \{(1, x), (2, z)\}$
  - ii)  $g: A \rightarrow B, g = \{(1, y), (2, x), (2, z), (3, y)\}$
  - iii)  $h: A \rightarrow B, h = \{(1, y), (2, x), (3, y)\}$

**19.** Sea  $A$  el conjunto de los alumnos de Matemática 1. Determine cuál de las siguientes asignaciones define una función sobre  $A$ :

- a) Asignarle a cada estudiante su edad.
- b) Asignarle a cada estudiante su profesor.
- c) Asignarle a cada estudiante su hermana mujer.

**20.** Dada la función  $f: \mathbb{R} - \{5\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3+x}{x-5}$ .

Determinar: a)  $f(-1)$ ; b)  $f(0)$ ; c)  $f(2)$ ; d)  $f(3/2)$

**21.** Dada la función  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \sqrt{1+t^2}$ . ( Se considera el valor positivo de la raíz)

Determinar: a)  $g(0)$ ; b)  $g(-\frac{3}{4})$ ; c)  $g(3)$

**22.** Un rectángulo tiene 100cm de perímetro. Expresar el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados. Grafique la función obtenida, utilizando el eje  $x$  para indicar la longitud del lado elegido y el eje  $y$  para indicar el área. ¿Cuál es el área máxima?

**23.** Se desea construir un depósito de base cuadrada (sin tapa) y  $10 \text{ m}^3$  de capacidad. Expresar la superficie lateral del depósito en función de la longitud del lado de la base.

**24.** Una lámina metálica rectangular mide 5 m de ancho y 8 m de largo. Se van a cortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas para doblar la pieza metálica resultante y soldarla para formar una caja sin tapa. Expresar el volumen de la caja en función de su altura.

**25.** Estudiar si las siguientes funciones son iguales. Justificar.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por: } f(x) = x + 2 \quad \text{y} \quad g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por: } g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

**26.** Use una fórmula para definir cada una de las siguientes funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  :

a)  $f$  asigna a cada número su cubo

b)  $g$  asigna a cada número el 5

c)  $h$  asigna a cada número 4 más su cuadrado

d)  $w$  asigna a cada número su cubo más el doble del número

**27.** Se define la función *floor* o *suelo*:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ , como la función que a cada número real le asigna el mayor entero menor o igual que el número.

$$\text{Así } suelo(2,5) = 2, \text{ suelo}(-3,7) = -4, \text{ suelo}(5) = 5.$$

Se nota también como  $suelo(x) = \lfloor x \rfloor$ .

Hallar el valor de: a)  $\lfloor \sqrt{5} \rfloor$ ,      b)  $\lfloor \frac{3}{4} \rfloor$ ,      c)  $\lfloor \frac{7}{3} - 9 \rfloor$

**28.** Se define la función *ceiling* o *techo*:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ , como la función que a cada número real le asigna el menor entero mayor o igual que el número.

$$\text{Así } techo(2,5) = 3, \text{ techo}(-3,7) = -3, \text{ techo}(5) = 5.$$

Se nota también como  $techo(x) = \lceil x \rceil$ .

Hallar el valor de: a)  $\lceil \sqrt{11} \rceil$ ,      b)  $\lceil \frac{3}{5} + \sqrt{2} \rceil$ ,      c)  $\lceil \frac{5}{3} - 7 \rceil$

**29.** Se define la función *factorial*:  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , como la función que a cada número natural le asigna el producto de todos los naturales desde el número hasta 1, suele escribirse en forma decreciente.

$$\text{Así } factorial(1) = 1, factorial(2) = 2.1, factorial(3) = 3.2.1, factorial(4) = 4.3.2.1$$

La notación habitual es  $factorial(n) = n!$

Por definición  $0! = 1$

Hallar el valor de: a)  $4!$ ,      b)  $5!$ ,      b)  $6!$

## Funciones inyectivas, suryectivas, biyectivas y función inversa

### Función inyectiva:

Una función  $f(x)$  es **inyectiva** si a todo par de elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas en el codominio.

Es decir: Sea  $f : A \rightarrow B$ ,  $f(x)$  es inyectiva si:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \quad (\text{Universo}=A)$$

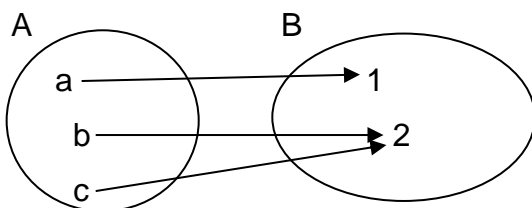
Equivalentemente:

$$f(x) \text{ es inyectiva si: } (\forall x_1)(\forall x_2)(f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2).$$

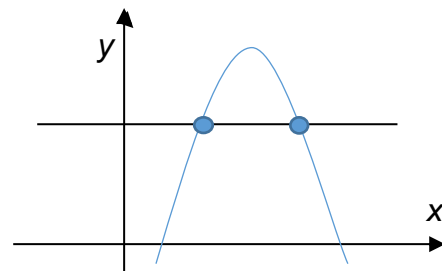
Ambas expresiones son equivalentes ya que una es la contrarrecíproca de la otra.

-Si la función admite una representación mediante diagrama de flechas, la misma será inyectiva si a cada elemento del codominio le llega a lo sumo una flecha.

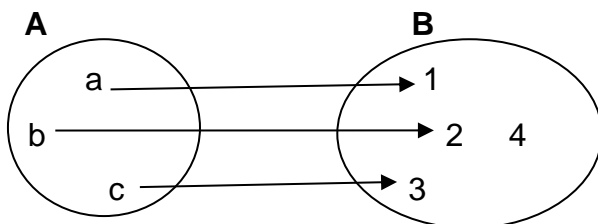
-En una representación en un sistema de coordenadas cartesianas, un criterio para decidir si la función es inyectiva es el siguiente: Toda recta horizontal que corte al eje de las ordenadas en un punto de su codominio debe cortar a su gráfica en a lo sumo un punto.



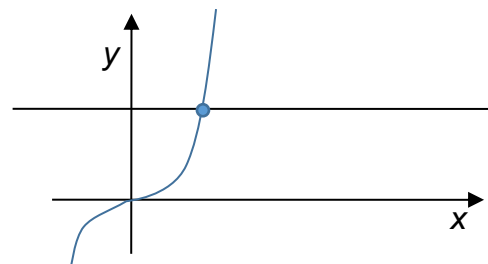
**No es inyectiva**



**No es inyectiva**



**Es inyectiva**



**Es inyectiva**

## Función suryectiva (o sobreyectiva):

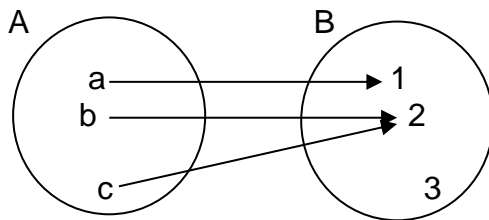
Una función  $f(x)$  es **suryectiva** o sobreyectiva si todo elemento del codominio es la imagen de uno o más elementos del dominio. Es decir:

Sea  $f: A \rightarrow B$ ,  $f(x)$  es suryectiva si:  $(\forall y)(y \in B \rightarrow (\exists x)(x \in A \wedge y = f(x)))$ .

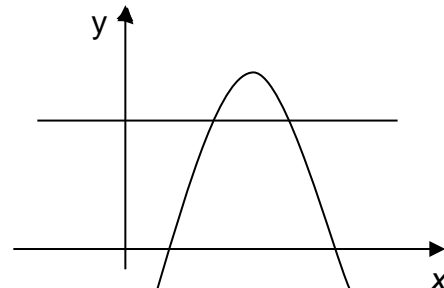
Equivalentemente  $f(x)$  es suryectiva si  $\text{Im}(f) = \text{Codominio}(f)$

-Si la función admite una representación mediante diagrama de flechas, la misma será suryectiva si a cada elemento del codominio le llega al menos una flecha.

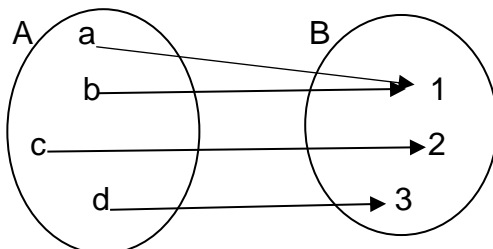
-En una representación en un sistema de coordenadas cartesianas, un criterio para decidir si la función es suryectiva es el siguiente: Toda recta horizontal que corte al eje de las ordenadas en un punto de su codominio debe cortar a su gráfica en al menos un punto.



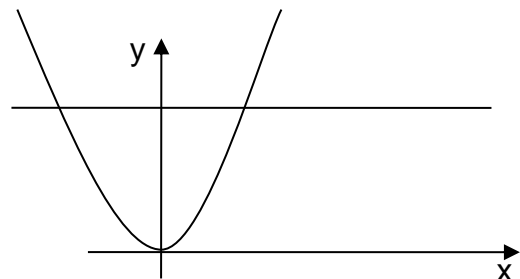
**No es suryectiva**



**Si consideramos  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , no es suryectiva**



**Es suryectiva**



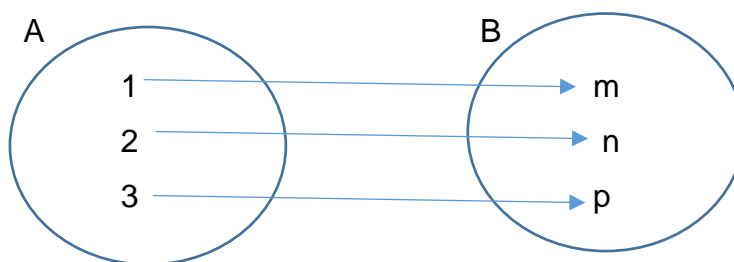
**Si consideramos  $f: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  es suryectiva**

## Función biyectiva:

**Una función  $f(x)$  es biyectiva si es inyectiva y suryectiva.** Es decir que todo elemento del codominio es la imagen de uno y sólo un elemento del dominio. Se dice también que hay una correspondencia “uno a uno”, o que la correspondencia es biunívoca.

Si una función  $f: A \rightarrow B$  es biyectiva, por la suryectividad todo elemento  $y \in B$  es la imagen ( $y = f(x)$ ) de algún  $x \in A$  y, por la inyectividad, ese elemento  $x \in A$  es único, es decir que **todo  $y \in B$  tiene una única preimagen  $x \in A$  que cumple  $y = f(x)$ .**

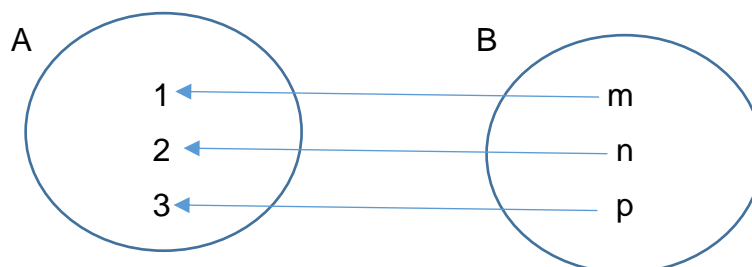
### Ejemplo 3.10:



Esta función  $f$  con dominio  $A$  y codominio  $B$  es biyectiva, ya que todo par de elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas y además todo elemento del codominio es imagen de algún elemento del dominio.

**Decimos que 1 es la preimagen de m ya que  $f(1) = m$**

Como todo elemento del codominio tiene una única preimagen, podemos de manera intuitiva mirar la correspondencia al revés y en ese caso definir una nueva función  $g: B \rightarrow A$



Esta nueva función introduce la siguiente definición.

## Función inversa

Si una función  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva, llamamos **función inversa de  $f(x)$**  a la función  $g : B \rightarrow A$  dada por  $g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$ .

A esta función  $g$ , inversa de  $f$ , se la indica con  $f^{-1}$ .

Por la observación anterior: Una función  $f$  tiene inversa sí y sólo si  $f$  es biyectiva.

### Ejemplo 3.11:

Mirando la función  $f : A \rightarrow B$  del ejemplo 3.10, definida por:

$$f(1) = m, \quad f(2) = n, \quad f(3) = p$$

Decimos que la función  $g$ , es la inversa de  $f$  y está definida por:

$$f^{-1}(m) = 1, \quad f^{-1}(n) = 2, \quad f^{-1}(p) = 3$$

### Ejercicios:

**30.** Sean  $A = \{1,2,3,4\}$  y  $B = \{a,b,c\}$  conjuntos. Definir una función con dominio  $A$  y codominio  $B$ , que sea suryectiva.

**31.** Sean  $A = \{1,2,3,4\}$  y  $B = \{a,b,c,d,e\}$  conjuntos. Definir una función con dominio  $A$  y codominio  $B$ , que sea inyectiva.

**32.** Definir conjuntos finitos  $A, B, C, D, E$  y realizar diagramas de flechas para definir una función:

a)  $f : B \rightarrow C$  que sea inyectiva y no suryectiva

b)  $g : D \rightarrow E$  que sea suryectiva y no inyectiva

c)  $f : B \rightarrow A$  que sea biyectiva. Definir la función inversa.

**33.** Indicar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos justificando lo que afirma:

a) "Una recta horizontal es la gráfica de una función inyectiva"

b) "Una recta vertical es la gráfica de una función"

- c) “Una parábola con eje paralelo al eje  $y$  es la gráfica de una función inyectiva”
- d) “Una parábola con eje paralelo al eje  $x$  es la gráfica de una función”
- e) “Una circunferencia es la gráfica de una función”
- f) “Dos conjuntos finitos entre los que se establece una función biyectiva pueden tener distinta cantidad de elementos.”

**34.** Para las **funciones** del ejercicio 16 indicar si son inyectivas, suryectivas o biyectivas.

**35.** Para las **funciones** del ejercicio 17 indicar si son inyectivas. Defina para cada una un codominio de manera que sean suryectivas y otro para que no lo sean.

**36.** Analice si las funciones *suelo*, *techo* y *factorial* son funciones inyectivas, suryectivas o biyectivas.

#### 4. ANEXO: APLICACIONES

Transcribimos un fragmento del libro “Matemáticas para la Computación” de José Murillo que resume de algún modo la importancia de este capítulo:

“La lógica matemática no es de reciente creación, no surgió con el uso de las computadoras, por el contrario se ha consolidado en nuestro tiempo porque es una herramienta fundamental para mejorar el software y hardware que conocemos. La historia de la lógica tiene sus inicios en el siglo III a. C. con la “Teoría silogista” de Aristóteles, quien introdujo los cuantificadores  $\forall$  y  $\exists$ , así como reglas de inferencia conocidas como el silogismo hipotético:

$$p \rightarrow q$$

$$\underline{q \rightarrow r}$$

$$p \rightarrow r$$

Esta regla se aplica en matemáticas y programación, algunas veces sin saber que se trata del silogismo hipotético: “Si  $(X > Y)$  y  $(Y > Z)$  entonces  $(X > Z)$ .”

También se encuentra disfrazada en algunas líneas de código de la siguiente manera:

If  $X > Y$  and  $Y > Z$  then  $X > Z$  .

**Aunque en sus inicios se usó principalmente para elaborar demostraciones matemáticas, en su aplicación a la programación el procedimiento de la demostración equivale a desarrollar un algoritmo para resolver un problema, usando para ello las instrucciones válidas (asignación, ciclos, lectura, escritura, declaración, etc.) de un lenguaje formal.**



**Tanto el procedimiento de demostración como el diseño de algoritmos, dependen exclusivamente de la lógica usada por la persona que los desarrolla.** Los caminos en ambas situaciones pueden ser más o menos eficientes, pero lo interesante en ambos casos es que permiten usar la creatividad y reflexión de la persona para lograr el objetivo, ya que no existe una forma única de demostrar un teorema o desarrollar un algoritmo.

En tiempos remotos Crisipo de Sodi (281-206 a. C.) introdujo los operadores lógicos de la conjunción ( $\wedge$ ), la disyunción ( $\vee$ ), la implicación ( $\rightarrow$ ), la disyunción exclusiva ( $\oplus$ ) y la complementación ( $'$ ), así como los valores de “falso” o “verdadero”. Con esos operadores lógicos, muchos siglos después Augustus De Morgan (1806-1871) enunció sus famosas leyes de De Morgan:

$$(p \vee q \vee \dots \vee z)' \equiv p' \wedge q' \wedge \dots \wedge z' \quad \text{y} \quad (p \wedge q \wedge \dots \wedge z)' \equiv p' \vee q' \vee \dots \vee z'$$

que tienen aplicación no sólo en lógica matemática sino también en teoría de conjuntos.

A partir de esta información George Boole (1815-1864) creó el álgebra booleana, la cual tiene amplias aplicaciones en la construcción de computadoras, robótica y automatización de sistemas eléctricos, mecánicos y electrónicos.

La lógica matemática también proporciona elementos para la creación de nuevos lenguajes de programación, al permitir estructurar sintáctica y semánticamente el lenguaje que se está desarrollando.

Otra aplicación importante de la lógica matemática y de las operaciones entre conjuntos, se encuentra en las bases de datos, en donde se consideran los archivos como **relaciones** que pueden manipularse por medio de operadores lógicos para obtener nuevos reportes de información, dando origen a lo que se conoce como “**álgebra relacional**” en la cual se basan todos los manejadores de bases de datos conocidos. Las redes de computadoras también utilizan el concepto de relación para representar la comunicación entre computadoras, de forma que es posible realizar operaciones lógicas entre matrices booleanas para obtener características necesarias en una red. Por todo lo anterior, se puede decir que la lógica matemática es esencial en la computación ya que permite sentar las bases para el entendimiento formal de prácticamente todas las áreas de ésta (bases de datos, programación, inteligencia artificial, lenguajes formales, sistemas digitales, redes, etcétera).”

Mostraremos algunos ejemplos con **ÁLGEBRA RELACIONAL**:

El álgebra relacional consiste de algunas simples, pero poderosas herramientas para construir nuevas relaciones a partir de otras. Si pensamos que las relaciones iniciales son los datos

almacenados en una base de datos entonces las nuevas relaciones se pueden ver como respuestas a algunas consultas. En adelante llamaremos tablas a las estructuras donde está almacenada la información.

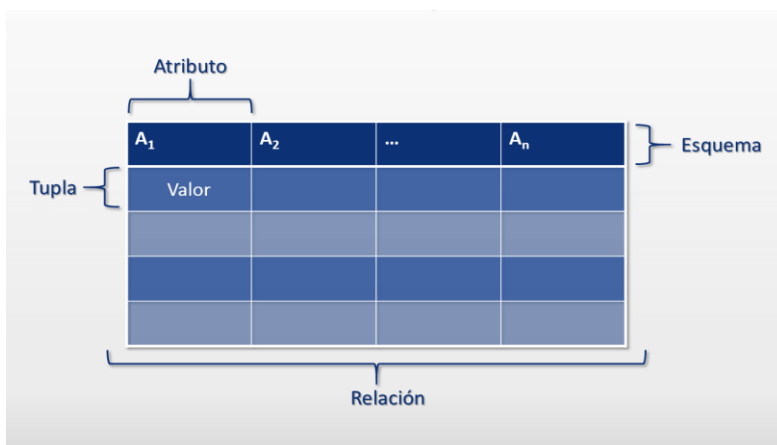
Para realizar estas consultas se utilizan operadores.

**Los operadores básicos son:** Unión, Diferencia, Producto Cartesiano, Selección, Proyección.

**Los operadores derivados son:** Intersección, Join, División, Asociación. Se forman combinando los operadores básicos.

En una Tabla identificamos tuplas y atributos.

Una tupla se define como una **función** que asocia unívocamente los nombres de los atributos de una relación con los valores de una instancia de la misma. Es una fila de una tabla relacional.



Por ejemplo, en la siguiente tabla los nombres de los atributos son **Nro alumno, Apellido, Nombre y Año de Ingreso**.

#### Alumnos de la Facultad de Informática

Nro alumno	Apellido	Nombre	Año de ingreso
57784	Lopez	Esteban	2019
57654	Pizarro	Mariana	2019
57605	Lopez	Nicolás	2018
56232	Navarro	Josefina	2018
55433	Taus	Marisa	2017

Una **tupla** es por ejemplo:

57784	Lopez	Esteban	2019
-------	-------	---------	------

**Una unión es compatible** entre dos relaciones R, S, si ellas están definidas sobre el mismo conjunto de atributos, es decir que R y S deben tener esquemas idénticos y el orden de las columnas debe ser el mismo.

La siguiente tabla es unión compatible con la tabla Alumnos de la Facultad de Informática:

#### Alumnos de la Facultad de Ciencias Exactas

Nro alumno	Apellido	Nombre	Año de ingreso
77744	Armendariz	Juan Ignacio	2019
76354	Baez	Juliana	2019
76452	Navarro	Josefina	2019
76681	Mendez	Ivan	2018

#### Las operaciones Básicas:

Cada operador del álgebra acepta una o dos relaciones y retorna una relación como resultado.

**$\sigma$  y  $\Pi$  son operadores unarios**, es decir que se aplican a una relación o tabla, el resto de los operadores son binarios, se aplican a dos relaciones o tablas.

**Selecciona ( $\sigma$ )**: Permite seleccionar un subconjunto de tuplas de una relación (R), todas aquellas que cumplan la(s) condición(es) P, esto se expresa como:  $\sigma_P(R)$

Ejemplo: si queremos seleccionar de la tabla Alumnos los que tienen ingreso posterior o igual al año 2018, la operación es:  $\sigma_{\text{Año de ingreso} \geq 2018}(\text{Alumnos de la F de I})$

Nro alumno	Apellido	Nombre	Año de ingreso
57784	Lopez	Esteban	2019
57654	Pizarro	Mariana	2019
57605	Lopez	Nicolás	2018
56232	Navarro	Josefina	2018

Una condición puede ser una combinación, donde se pueden usar operadores como:  $\wedge, \vee$ , combinándolos con operadores  $<, >, \leq, \geq, =, \neq$ .

Ejemplo:  $\sigma_{\text{Apellido=Lopez} \wedge \text{Año de ingreso}=2019}(\text{Alumnos de la F de I})$

selecciona todas las tuplas que contengan Lopez como apellido y que contengan a 2019 como año de ingreso en la relación Alumnos.

Nro alumno	Apellido	Nombre	Año de ingreso
57784	Lopez	Esteban	2019

**Proyección ( $\Pi$ ):** Permite extraer columnas (atributos) de una relación, dando como resultado un *subconjunto vertical* de atributos de la relación, esto se expresa como:

$\Pi_{A_1, A_2, \dots, A_n}(R)$  donde  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son atributos de la relación  $R$ .

Ejemplo:  $\Pi_{\text{Apellido}, \text{Año de ingreso}}(\text{Alumnos})$

Selecciona los atributos Apellido y Año de ingreso de la relación Alumnos, mostrados como un subconjunto de la relación Alumnos.

Apellido	Año de ingreso
Lopez	2019
Pizarro	2019
Lopez	2018
Navarro	2018
Taus	2017

**Unión ( $\cup$ ):** La operación  $R \cup S$  retorna el conjunto de tuplas que están en R, o en S, o en ambas. R y S deben ser *uniones compatibles*.

Ejemplo: si disponemos de las tablas mencionadas anteriormente Alumnos de la Facultad de Informática y Alumnos de la Facultad de Ciencias Exactas, esta operación nos devolverá una tabla con todos los alumnos que estén en alguna o en ambas tablas, sin elementos repetidos. Esta operación es útil ya que, si tuviéramos las tablas de todas las facultades, esta unión nos daría el número de estudiantes de toda la universidad, ya que la suma de los estudiantes de cada Facultad tiene alumnos repetidos.

La operación *Alumnos de la F. de Informática*  $\cup$  *Alumnos de la F. de Ciencias Exactas* :

Nro alumno	Apellido	Nombre	Año de ingreso
57784	Lopez	Esteban	2019
57654	Pizarro	Mariana	2019
57605	Lopez	Nicolás	2018
56232	Navarro	Josefina	2018
55433	Taus	Marisa	2017
77744	Armendariz	Juan Ignacio	2019
76354	Baez	Juliana	2019
76681	Mendez	Ivan	2018

**Diferencia (-):** La operación  $R - S$  entrega todas aquellas tuplas que están en R, pero no en S. R y S deben ser *uniones compatibles*.

Con esta operación, si hacemos

*Alumnos de la F. de Informática*  $-$  *Alumnos de la F. de Ciencias Exactas* , podemos ver los alumnos que sólo están inscriptos en la Facultad de Informática.

Veamos 2 de las operaciones no básicas:

**Intersección ( $\cap$ ):** La intersección de dos relaciones se puede especificar en función de otros operadores básicos:  $R \cap S = R - (R - S)$

La intersección corresponde al conjunto de todas las **tuplas** que están en R y en S, siendo R y S *uniones compatibles*.

En nuestro ejemplo la operación:

*Alumnos de la F. de Informática*  $\cap$  *Alumnos de la F. de Ciencias Exactas*:

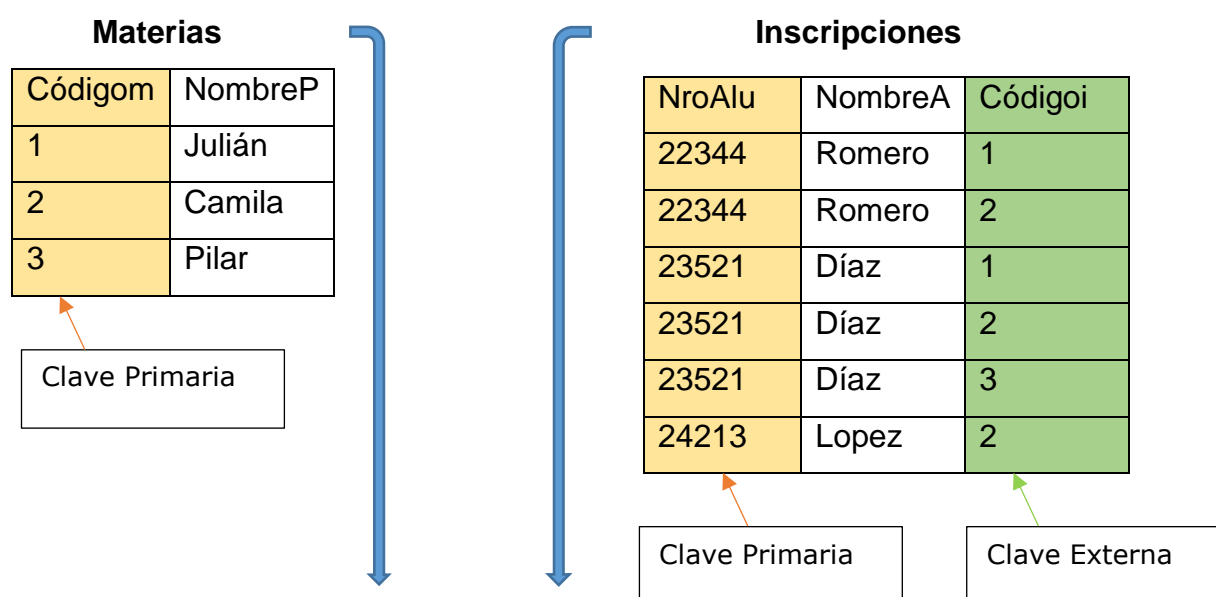
Nro alumno	Apellido	Nombre	Año de ingreso
56232	Navarro	Josefina	2018

Las siguientes operaciones relacionan tablas que no necesariamente son uniones compatibles, sino que establecemos la relación a través de claves primarias y claves externas.

**Producto cartesiano (x):** El producto cartesiano de *dos relaciones R y S* entrega una relación, cuyo *esquema* corresponde a una combinación de todas las tuplas de **R** con cada una de las tuplas de **S**, y sus atributos corresponden a los de **R** seguidos por los de **S**. Veremos en las pSe escribe como:  $R \times S$

**Join (⋈) :** El resultado es una relación con los atributos de ambas relaciones y se obtiene combinando las tuplas de ambas relaciones que tengan el mismo valor en los atributos comunes. Es una combinación de las proyección, selección y producto cartesiano en una sola operación, donde la condición es la igualdad Clave Primaria = Clave Externa, y la proyección elimina la columna duplicada (clave externa).

Ejemplo: supongamos ahora que tenemos una tabla con las materias de una carrera, con su código y su profesor asignado y otra tabla con las inscripciones, donde cada inscripto tiene su nro de alumno, nombre, y código de materia a la que se inscribió:



***Materias ⋈ Incripciones***<sub>codigom=codigoi</sub>

CódigoM	NombreP	NroAlu	NombreA
1	Julián	22344	Romero
1	Julián	23521	Díaz
2	Camila	22344	Romero
2	Camila	23521	Díaz
2	Camila	24213	Lopez
3	Pilar	23521	Díaz

## Bibliografía

- L. Oubiña, **Introducción a la Teoría de Conjuntos**, Editorial EUDEBA, Argentina, 1974.
  - S. Lipschutz, **Matemática Finita**, Serie de Compendios Schawm, Ed. Mc Graw- Hill, México.
  - S. Lipschutz y M. Lipson, **2000 problemas resueltos de Matemática discreta**, Serie de Compendios Schawm, Ed. Mc Graw- Hill, España, 2004.
  - R. Espinosa Armenta, **Matemáticas discretas**, Editorial Alfaomega, Mexico, 2010
- .....