Восстановление зависимостей.

Домашние задание №5

Задача 1

$$R_{\text{вых}}(t_1,t_2) = E\left(\left[U_{\text{вых}}(t_1) - E\left(U_{\text{вых}}(t_1)\right)\right] * \left[U_{\text{вых}}(t_2) - E\left(U_{\text{вых}}(t_2)\right)\right]\right)$$
$$= \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} K(t_1,\tau)K(t_2,s)\, E\left(\left[U_{\text{вход}}(\tau) - E\left(U_{\text{вход}}(\tau)\right)\right] * \left[U_{\text{вход}}(s) - E\left(U_{\text{вход}}(s)\right)\right]\right) d\tau ds$$
$$= \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} K(t_1,\tau)K(t_2,s)\, E\left(\left[U_{\text{вход}}(\tau)\right] * \left[U_{\text{вход}}(s)\right]\right) d\tau ds$$
$$= \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} K(t_1,\tau)K(t_2,s)\, R_{\text{вход}}(\tau,s) d\tau ds$$
$$= \left[R_{\text{вход}}(\tau,s) - \text{дельта функция}\right] = \frac{\sigma^2}{0.6} e^{-0.3(t_2-t_1)}(1 - e^{-0.6t_1})$$

Тогда получаем

$$U(t_i^*) = \sum_{j=1}^{10} a_j^i\, U_{\text{вых}}(t_j), \qquad t_i^* = i + 0.5, t_i = i, i = 1,\dots,10$$

Где коэффициенты a_j^i являются решениями систем

$$\sum_{j=1}^{10} R_{\text{вых}}(t_k,t_j) a_j^i = R_{\text{вых}}(t_k,t_i^*), \qquad k = 1,\dots,10$$

Задача 2

$$CV = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}(y_i - t_i^{-i})^2 \text{, где } t_i^{-i} \text{ ответ на } i$$
$- \text{ом примере регресии, в обучении которой не учитывался } i$
$- \text{ый пример.}$

$$t_i^{-i} = F(x_i, \alpha_\gamma{}^{-i})$$

$$A_\gamma = F^T F + \gamma I,$$

$f_i^T - \text{матрица в которой все строки, кроме } i$
$- \text{ой, равны нулю. В } i - \text{ой строке } i - \text{ая строка матрицы } F$

$$f_i^T[i] - i - \text{ая строка матрицы } F$$

Обозначим $B = (A_\gamma - f_i^T f_i)^{-1}(1)$

Тогда минимум на обучающей последовательности без x_i, y_i достигается на векторе

$$\alpha_\gamma{}^{-i} = B(F^T - f_i^T)Y$$

Перепишем (1) в виде

$$I = BA_\gamma - Bf_i^T f_i$$

$$B = A_\gamma{}^{-1} - Bf_i^T f_i A_\gamma{}^{-1} \mid * f_i^T \quad (2)$$
$$Bf_i^T = A_\gamma{}^{-1} f_i^T - Bf_i^T f_i A_\gamma{}^{-1} f_i^T (3)$$

Подставим (3) в (2)

$$B = A_\gamma{}^{-1} + A_\gamma{}^{-1} f_i^T \left(I - f_i A_\gamma{}^{-1} f_i^T\right)^{-1} f_i A_\gamma{}^{-1} (4)$$

Вычислим теперь $\alpha_\gamma{}^{-i}$, согласно (4) имеем

$$\alpha_\gamma{}^{-i} = B\left(F^T - f_i^T\right)Y$$
$$= A_\gamma{}^{-1} F^T Y + A_\gamma{}^{-1} f_i^T \left(I - f_i A_\gamma{}^{-1} f_i^T\right)^{-1} f_i A_\gamma{}^{-1} F^T Y - A_\gamma{}^{-1} f_i^T Y$$
$$- A_\gamma{}^{-1} f_i^T \left(I - f_i A_\gamma{}^{-1} f_i^T\right)^{-1} f_i A_\gamma{}^{-1} f_i^T Y$$

Вычислим квадрат уклонения, используя равенство

$$f_i^T[i] A_\gamma{}^{-1} f_i^T Y = f_i^T[i] A_\gamma{}^{-1} f_i y_i$$

$$\begin{aligned}
&\left(y_i - F\left(x_i, {\alpha_\gamma}^{-i}\right)\right)^2 \\
&= \Big(y_i - f_i^T[i]{A_\gamma}^{-1}F^TY \\
&- f_i^T[i]{A_\gamma}^{-1}f_i^T\left(I - f_i{A_\gamma}^{-1}f_i^T\right)^{-1}f_i{A_\gamma}^{-1}F^TY + f_i^T[i]{A_\gamma}^{-1}f_i^Ty_i \\
&+ f_i^T{A_\gamma}^{-1}f_i^T\left(I - f_i{A_\gamma}^{-1}f_i^T\right)^{-1}f_i{A_\gamma}^{-1}f_i^Ty_i\Big)^2 \\
&= \left(\frac{y_i}{1 - f_i^T[i]{A_\gamma}^{-1}f_i[i]} - (1 + \frac{f_i^T[i]{A_\gamma}^{-1}f_i[i]}{1 - f_i^T[i]{A_\gamma}^{-1}f_i[i]}\right)f_i^T[i]{A_\gamma}^{-1}F^TY)^2 \\
&= \frac{(y_i - f_i^T[i]{A_\gamma}^{-1}F^TY)^2}{(1 - f_i^T[i]{A_\gamma}^{-1}f_i[i])^2}
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$CV = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{\left(y_i - f_i^T[i]{A_\gamma}^{-1}F^TY\right)^2}{\left(1 - f_i^T[i]{A_\gamma}^{-1}f_i[i]\right)^2} = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{\left(y_i - f_i^T[i](F^TF + \gamma I)^{-1}F^TY\right)^2}{(1 - f_i^T[i](F^TF + \gamma I)^{-1}f_i[i])^2}$$

Формула доказана.

(В ходе доказательства был использован материал книги В.Н Вапник “Восстановление зависимостей по эмпирическим данным” 1979, стр 270-271)

Задача 3

Notebook с заданием размещен по ссылке

https://github.com/IvanMakhotin/dependency_recovery/blob/master/dz_6_zad3.ipynb

А также прикреплен на anytask.

Задача 4

$$y = Xa + \varepsilon$$

$$\varepsilon \sim N(0, I), a \sim \frac{1}{2}\exp(-\sum_{i=1}^{n} |a_i|)$$

$$P(a|y) = \frac{p(y|a)p(a)}{p(y)} = \frac{p(y|a)p(a)}{\int p(x)p(y|x)dx}$$

$$p(y|a) = N(Xa, I) = \frac{1}{C}\exp\{-\frac{1}{2}(Y - Xa)^T(Y - Xa)\}$$

$$P(a|y) = \frac{1}{D}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y - Xa)^T(y - Xa) - \sum_{i=1}^{n}|a_i|\right\} \to \max(\text{по } a)$$

$$\frac{1}{2}(y - Xa)^T(y - Xa) + \sum_{i=1}^{n}|a_i| \to \min(\text{по } a)$$

$$grad\left(\frac{1}{2}(y - Xa)^T(y - Xa) + \sum_{i=1}^{n}|a_i|\right) = 0$$

$$X^T Xa - X^T y \pm \bar{1} = 0$$

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1}(X^T y \pm \bar{1})$$

В случае когда a распределен нормально со средним 0 и единичной ковариационной матрицей имеет место следующая оценка (из лекции)

$$\hat{a} = (X^T X + I)^{-1}(X^T y + X)$$

Ответ.

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1}(X^T y \pm \bar{1})$$

Задача 5

Notebook с заданием размещен по ссылке

https://github.com/IvanMakhotin/dependency_recovery/blob/master/dz_6_zad5.ipynb

А также прикреплен на anytask.