- $\|X\|_2 \le \sqrt{m}\,\|X\|_\infty$

$$\|X\|_2 = \sqrt[2]{X_1^2 + \ldots + X_m^2} \le \sqrt{m\left(\max_i x_i\right)^2} = \sqrt{m}\,\max_i |x_i| = \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$$

В качестве примера:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix} \qquad \|x\|_2 = \sqrt{1^2 + \ldots + 1^2} = \sqrt{m}$$

$$\sqrt{m}\,\|x\|_\infty = \sqrt{m}\,\max_i |x_i| = \sqrt{m}$$

- $\|A\|_\infty \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \le \sqrt{n \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2} = \sqrt{n}\,\|A\|_2$$

сумма по строкам

сумма кв-ов элементов

В кач-ве примера:

$$\hat{A} = \begin{array}{cc} n & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & m \end{array} \qquad \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} (2, 0) = 2$$

$$\sqrt{n}\,\|A\|_2 = \sqrt{2}\,\sqrt{1+1} = 2$$

②

SVD – разложения матриц:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -6 + 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$D = 1^2 + 4 \cdot 6 = 25$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 3x \\ -2y = 3y \end{cases} \quad \begin{matrix} y = 0 \\ x = \forall \end{matrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 3x = -2x \\ -2y = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = \forall \end{matrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \hat{P}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\hat{P}^T, \quad \lambda_1 > \lambda_2 \ ; \ \hat{P} = [x_1 \mid x_2]$$

(для кв. симм. матрицы при неопределенных соб. числах)

x_1, x_2 — соб. вектора (ед. длины)

$\Downarrow$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left| AA^T - \lambda I \right| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| A^TA - \lambda I \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{matrix} \lambda_1' = 4 \\ \lambda_2' = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \bar{v}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$ — ортонорм-ые соб. вектора

$\Downarrow$

Сингулярными числами $\hat{A}$ яв-ся $\sigma_1^2 = 4$ $\sigma_1^2 = 0$

$\sigma_1 = 2$ $\sigma_2 = 0$

$$\Sigma = \begin{array}{c} n \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Big\} m$$

$$\hat{u} = [\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \vec{v}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{v}^T$$

$\Downarrow$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ← (квад., невырожд., симметр.)

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 2 \end{cases}$$

$\lambda_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$\Downarrow$

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}} & \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \text{gle } \lambda_1 & \text{gle } \lambda_2 \end{matrix} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(4)

$X\,(n \times m) \qquad \Omega\,(m \times m) \qquad \Delta\,(n \times n)$

$$f(A) = A^{-1} X \left(X^T A^{-1} X\right)^{-1}$$

$$f(X \Omega X^T + \Delta) = \left(X \Omega X^T + \Delta\right)^{-1} X \left(X^T \left(X \Omega X^T + \Delta\right)^{-1} X\right)^{-1} = \left(\Delta^{-1} - \Delta^{-1} X \left(\Omega^{-1} + X^T \Delta^{-1} X\right)^{-1} X^T \Delta^{-1}\right) X \left(X^T \left(\Delta^{-1} - \Delta^{-1} X \left(\Omega^{-1} + X^T \Delta^{-1} X\right)^{-1} X^T \Delta^{-1}\right) X\right)^{-1} =$$

$$= \left(\Delta^{-1} X - \Delta^{-1} X \left(\Omega^{-1} + X^T \Delta^{-1} X\right)^{-1} X^T \Delta^{-1} X\right) \underbrace{\left(\underbrace{X^T \Delta^{-1} X}_{K} - X^T \Delta^{-1} X \left(\Omega^{-1} + X^T \Delta^{-1} X\right)^{-1} X^T \Delta^{-1} X\right)^{-1}}_{T} \circledcirc$$

$$T = \left[K - K\left(\Omega^{-1} + K\right)^{-1} K\right]^{-1} = \left[\hat{I} - \left(\Omega^{-1} + K\right)^{-1} K\right]^{-1} K^{-1}$$

$$\circledcirc\ \Delta^{-1} X \left(I - \left(\Omega^{-1} + X^T \Delta^{-1} X\right)^{-1} X^T \Delta^{-1} X\right)\left(\hat{I} - \left(\Omega^{-1} + X^T \Delta^{-1} X\right)^{-1} X^T \Delta^{-1} X\right)^{-1} \left(X^T \Delta^{-1} X\right)^{-1} =$$

$$= \Delta^{-1} X \left(X^T \Delta^{-1} X\right)^{-1} = f(\Delta)$$