Теоретическая часть

1. Посчитайте производную сигмоиды σ(z) и выразите его через саму сигмоиду, считая, что z — скаляр.

$$\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

$$\sigma(z)' = ((1+e^{-z})^{-1})' = -(1+e^{-z})^{-2}(-e^{-z}) = \frac{1}{1+e^{-z}}\frac{e^{-z}}{1+e^{-z}}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-z}}\ \frac{1+e^{z}-1}{1+e^{-z}} = \frac{1}{1+e^{-z}}\left(1-\frac{1}{1+e^{-z}}\right) = \sigma(z)\big(1-\sigma(z)\big)$$

2. Покажите, что для сигмоиды σ(z) справедливо следующее выражение:

$$\sigma(-z) = 1-\sigma(z)$$

$$\sigma(-z) = \frac{1}{1+e^{z}} = \frac{1}{1+e^{z}}\ \frac{e^{-z}}{e^{-z}} = \frac{e^{-z}}{1+e^{-z}} = \big(1-\sigma(z)\big)$$

3. Посчитайте градиент оценочной функции $\nabla_w L(w, x_{\{1\}}, \dots, x_{\{N\}})$ для бинарной (двухклассовой) логистической регрессии. В качестве оценочной функции использовать кроссэнтропию с L2 регуляризацией:

$$L\big(w, x_{\{1\}}, \dots, x_{\{N\}}\big) = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i \log h_w(x_i) + (1-y_i)\log(1-h_w(x_i))) + \ \alpha\sum_{j=1}^{M}\big(w_j\big)^2$$

$$h_w(x_i) = \frac{1}{1+e^{-w^t x_i}}$$

$$h_w'(x_i) = h_w(x_i)\big(1-h_w(x_i)\big)x_i;\ \log' h_w(x_i) = \big(1-h_w(x_i)\big)x_i;\ \log'\big(1-h_w(x_i)\big) = -h_w(x_i)x_i$$

$$L' = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(y_i x_i\big(1-h_w(x_i)\big) + (1-y_i)(-h_w(x_i)x_i)\Big) + \ 2\alpha\sum_{j=1}^{M} w_j$$

$$= \ -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(x_i\big(y_i - y_i h_w(x_i) + y_i h_w(x_i) - h_w(x_i)\big)\Big) + \ 2\alpha\sum_{j=1}^{M} w_j$$

$$= \ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i(h_w(x_i) - y_i)) + \ 2\alpha\sum_{j=1}^{M} w_j$$

4. Запишите формулу для обновления вектора параметров w

$$w = w - \alpha\frac{\delta L(w)}{\delta w}$$

5. Докажите, что оценочная функция кросс-энтропия для бинарной логистической регрессии является выпуклой функцией.

Для этого докажем, что $-\log\sigma(z)$ и $-\log(1-\sigma(z))$ выпуклые (т.к. любая линейная комбинация выпуклых функций с положительным коэффициентами выпуклая). Вычислим вторые производные.

$$-\log''\sigma(z) = -(1-\log\sigma(z))' = \big(-\sigma(-z)\big)' = \frac{1}{1+e^{z}}\frac{1+e^{z}-1}{1+e^{z}} = \frac{e^{z}}{(1+e^{z})^2} > 0$$

Аналогично

$$-\log''\big(1-\sigma(z)\big) = \frac{e^z}{(1+e^z)^2} > 0$$

Т.к. функция выпуклая тогда и только тогда, когда ее вторая производная всегда положительная, то $-\log\sigma(z)$ и $-\log(1-\sigma(z))$ выпуклые, как и функция потерь.