

Segunda
edición

EQUACIONES DIFERENCIALES

Con aplicaciones y notas históricas

George F. Simmons



**ECUACIONES
DIFERENCIALES**
**Con aplicaciones
y notas históricas**

George F. Simmons
Profesor de Matemáticas
Boston College

Co-escritor sobre matemáticas con
John N. Robertson
Presidente de Boston College
Boston, Massachusetts

Traducción
y revisión auxiliar: R. M. S.
Centro de Matemática Aplicada de la
Universidad Chapman y Hall

Editor - Buenos Aires - Lima - Santiago - León - Mérida - Quito - Panamá - Barranquilla - Cartagena de Indias - Bogotá - Cali - Medellín - Monterrey - Guadalajara - Ciudad de México - Tijuana - San Juan - San Francisco - Los Angeles - Seattle - Denver - Portland - Chicago - New York - Toronto - Ottawa

EDICIÓN DE ALUMNO

ECUACIONES DIFERENCIALES

Con aplicaciones y notas históricas

Segunda edición

George F. Simmons

Profesor de Matemáticas
Colorado College

Con un capítulo sobre métodos numéricos de

John S. Robertson

Departamento de Matemáticas
Academia Militar de EE.UU.

Traducción

LORENZO ABELLANAS RAPUN

Catedrático de Métodos Matemáticos de la Física
Universidad Complutense de Madrid

McGraw-Hill

MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MEXICO
NUEVA YORK • PANAMA • SAN JUAN • SANTAFE DE BOGOTA • SANTIAGO • SAO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILAN • MONTREAL • NUEVA DELHI
PARIS • SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

ECUACIONES DIFERENCIALES Con aplicaciones y notas históricas

Segunda edición

ECUACIONES DIFERENCIALES. Con aplicaciones y notas históricas. (2.ª ed.)

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

DERECHOS RESERVADOS © 1993 respecto a la primera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A. U.

Edificio Valrealty, 1.ª planta
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

Traducido de la segunda edición en inglés de
Differential Equations with Applications and Historical Notes

Copyright © MCMXCI, por McGraw-Hill, Inc.

ISBN: 0-07-057540-1

ISBN: 84-481-0045-X

Depósito legal: M. 689/1998

Cubierta: F. Piñuela. Grafismo electrónico.
Compuesto e impreso en: Fernández Ciudad, S. L.

PRINTED IN SPAIN-IMPRESO EN ESPAÑA

515.35

108134

Si 47

(HAT)



SOBRE EL AUTOR

Agradecimientos
a la Universidad
de Colorado.
George Simmons

George Simmons obtuvo sus grados académicos en el Instituto Tecnológico de California y en las Universidades de Chicago y Yale. Enseñó en varios Colleges y Universidades antes de llegar a Colorado en 1962, donde es profesor de matemáticas. Es asimismo autor de *Introduction to Topology and Modern Analysis* (McGraw-Hill, 1963), *Precalculus Mathematics in a Nutshell* (Janson Publications, 1981) y *Calculus with Analytic Geometry* (McGraw-Hill, 1985).

Cuando no está ocupado trabajando, charlando, comiendo, bebiendo o cocinando, el profesor Simmons es feliz dedicándose a viajar (occidente y sur de Europa, Turquía, Israel, Egipto, Rusia, China, sudeste de Asia), practicando la pesca de la trucha (en las Montañas Rocosas), jugando al billar americano o leyendo (literatura, historia, biografías y autobiografías, ciencia y las suficientes novelas de terror para disfrutar sin culpabilidad).

251330

A HOPE Y NANCY
mi esposa y mi hija,
quienes siguen dando sentido a todo

Profundas o la segunda visión.

Profunda o la primera visión.

Sugerencias para el presente

La naturaleza de los cambios diferentes

1. propiedades
2. Comunidades de desarrollo
3. Nuevos sistemas y tipos de desarrollo
4. Desarrollo, transformación y desarrollo de la cultura
5. Desarrollo social
6. Cambios en las estrategias de desarrollo
7. La base europea de desarrollo

Sugerencias de primer orden:

1. Desarrollo, transformación
2. Nuevas estrategias
3. Desarrollo, transformación
4. Desarrollo, transformación
5. Nuevas estrategias
6. Cambios en las estrategias de desarrollo
7. Desarrollo, transformación

Sugerencias para la evaluación:

1. Profundas
2. Profundas para la gente que vive en el
3. Profundas transformaciones, con cambios
4. Cambios

CONTENIDO

Prefacio a la segunda edición	xiii
Prefacio a la primera edición	xv
Sugerencias para el profesor	xix
Capítulo 1 La naturaleza de las ecuaciones diferenciales	1
1. Introducción	1
2. Generalidades sobre las soluciones	4
3. Familias de curvas. Trayectorias ortogonales	10
4. Crecimiento, desintegración, reacciones químicas y mezclas	18
5. Caída de cuerpos y otros problemas de movimiento ...	29
6. La braquistócrona. Fermat y los Bernoulli	36
Capítulo 2 Ecuaciones de primer orden	47
7. Ecuaciones homogéneas	47
8. Ecuaciones exactas	51
9. Factores integrantes	55
10. Ecuaciones lineales	62
11. Reducción del orden	65
12. Cadena colgante. Curvas de persecución	69
13. Circuitos eléctricos simples	75
Capítulo 3 Ecuaciones lineales de segundo orden	84
14. Introducción	84
15. La solución general de la ecuación homogénea	90
16. Uso de una solución conocida para hallar otra	95
17. La ecuación homogénea con coeficientes constantes ...	98

18.	El método de los coeficientes indeterminados	103
19.	El método de variación de los parámetros	108
20.	Vibraciones en sistemas mecánicos y eléctricos	111
21.	La ley de la gravitación de Newton y el movimiento de los planetas	121
22.	Ecuaciones lineales de orden superior. Osciladores armónicos acoplados	129
23.	Métodos operacionales para hallar soluciones particulares	135
	Apéndice A. Euler	144
	Apéndice B. Newton	153
Capítulo 4	Propiedades cualitativas de las soluciones	161
24.	Oscilaciones y el teorema de separación de Sturm	161
25.	El teorema de comparación de Sturm	167
Capítulo 5	Soluciones en series de potencias y funciones especiales	171
26.	Introducción. Repaso de series de potencias	171
27.	Soluciones por series de ecuaciones de primer orden	179
28.	Ecuaciones lineales de segundo orden. Puntos ordinarios	183
29.	Puntos singulares regulares	191
30.	Puntos singulares regulares (continuación)	199
31.	Ecuación hipergeométrica de Gauss	206
32.	El punto del infinito	211
	Apéndice A. Dos demostraciones de convergencia	215
	Apéndice B. Polinomios de Hermite y mecánica cuántica	219
	Apéndice C. Gauss	229
	Apéndice D. Los polinomios de Chebyshev y la propiedad de minimax	237
	Apéndice E. Ecuación de Riemann	244
Capítulo 6	Series de Fourier y funciones ortogonales	253
33.	Los coeficientes de Fourier	253
34.	El problema de la convergencia	264
35.	Funciones pares e impares. Series de senos y de cosenos	272
36.	Extensión a intervalos arbitrarios	281
37.	Funciones ortogonales	286
38.	Convergencia en media de las series de Fourier	296
	Apéndice A. Un teorema de convergencia punto a punto	304
Capítulo 7	Ecuaciones en derivadas parciales y problemas de contorno	310
39.	Introducción. Notas históricas	310
40.	Autovalores, autofunciones y la cuerda vibrante	313
41.	La ecuación del calor	324

42. El problema de Dirichlet para un círculo. Integral de Poisson	330
43. Problemas de Sturm-Liouville	336
Apéndice A. Existencia de autovalores y autofunciones	344
Capítulo 8 Algunas funciones especiales de la física matemática	349
44. Polinomios de Legendre	349
45. Propiedades de los polinomios de Legendre	356
46. Funciones de Bessel. La función gamma	362
47. Propiedades de las funciones de Bessel	373
Apéndice A. Polinomios de Legendre y teoría del potencial.	381
Apéndice B. Funciones de Bessel y membranas vibrantes ..	388
Apéndice C. Propiedades adicionales de las funciones de Bessel	393
Capítulo 9 Transformadas de Laplace	398
48. Introducción	398
49. Algunos comentarios teóricos	402
50. Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales	408
51. Derivadas e integrales de transformadas de Laplace ..	413
52. Convolución y el problema mecánico de Abel	418
53. Convolución, función escalón y función impulso	425
Apéndice A. Laplace	432
Apéndice B. Abel	433
Capítulo 10 Sistemas de ecuaciones de primer orden	437
54. Generalidades sobre sistemas	437
55. Sistemas lineales	441
56. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes	449
57. Sistemas no lineales. Ecuaciones predador-presa de Volterra	457
Capítulo 11 Ecuaciones no lineales	463
58. Sistemas autónomos. El plano de fases y sus fenómenos ..	463
59. Tipos de puntos críticos. Estabilidad	470
60. Puntos críticos e inestabilidad para sistemas lineales ..	478
61. Estabilidad por el método directo de Liapunov	490
62. Puntos críticos simples de sistemas no lineales	496
63. Mecánica no lineal. Sistemas conservativos	505
64. Soluciones periódicas. El teorema de Poincaré-Bendixson	512
Apéndice A. Poincaré	521
Apéndice B. Demostración del teorema de Liénard	523

Capítulo 12	El cálculo de variaciones	528
65.	Introducción. Algunos problemas típicos del cálculo de variaciones	528
66.	Ecuación diferencial de Euler para una extremal	531
67.	Problemas isoperimétricos	541
	Apéndice A. Lagrange	552
	Apéndice B. El principio de Hamilton y sus consecuencias	554
Capítulo 13	Existencia y unicidad de soluciones	566
68.	El método de aproximaciones sucesivas	566
69.	El teorema de Picard	571
70.	Sistemas. La ecuación lineal de segundo orden	582
Capítulo 14	Métodos numéricos	585
71.	Introducción	585
72.	El método de Euler	588
73.	Errores	592
74.	Una mejora del método de Euler	594
75.	Métodos de orden superior	599
76.	Sistemas	602
	Tablas numéricas	606
	Soluciones	614
	Indice	647

PREFACIO A LA SEGUNDA EDICIÓN

Espero que, según reza el dicho, sea ésta «tan correcta como una segunda edición», y confío asimismo en que quien detecte algún error tenga la amabilidad de ponerlo en mi conocimiento, de manera que pueda repararse en el futuro. Como dijo Confucio: «Un hombre que comete un error y no rectifica está cometiendo dos errores».

Ahora comprendo por qué las segundas ediciones de los libros de texto son siempre más extensas que las primeras: del mismo modo que sucede con los gobiernos y sus presupuestos, siempre existen fuertes intentos de los grupos de presión para añadir cosas, rara vez para suprimirlas.

Los principales cambios en esta edición son los siguientes: en la primera parte del libro, el número de problemas ha pasado a más del doble; hay dos nuevos capítulos, sobre series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales; se han añadido al Capítulo 3 secciones que tratan las ecuaciones lineales de orden superior y los métodos operacionales; y en el capítulo de la transformación de Laplace figura material nuevo relativo a la convolución y a las aplicaciones en ingeniería.

Es posible diseñar muchos cursos diferentes de un semestre a partir de las diversas partes del libro, atendiendo al esquema de la página xix. Hay incluso material suficiente para un curso de dos semestres si se tienen en cuenta los apéndices.

Finalmente, el comandante John S. Robertson, de la Academia Militar de los EE.UU., ha escrito un capítulo completamente nuevo sobre métodos numéricos (el Capítulo 14) para esta edición. El comandante Robertson tiene mucha más experiencia que yo en esta materia y estoy seguro de que muchos usuarios de esta segunda edición apreciarán su contribución tanto como yo.

McGraw-Hill y yo mismo deseamos agradecer los abundantes comentarios y sugerencias de las siguientes personas que han revisado el texto: D. R. Arterburn, New Mexico Tech; Edward Beckenstein, St. John's University; Harold Carda, South Dakota School of Mines and Technology; Wenxiong

Chen, University of Arizona; Jerald P. Dauer, University of Tennessee; Lester B. Fuller, Rochester Institute of Technology; Juan Gatica, University of Iowa; Richard H. Herman, The Pennsylvania State University; Roger H. Marty, Cleveland State University; Jean-Pierre Meyer, The Johns Hopkins University; Krzysztof Ostaszewski, University of Louisville; James L. Rovnyak, University of Virginia; Alan Sharples, New Mexico Tech; Bernard Shiffman, The Johns Hopkins University; y Calvin H. Wilcox, University of Utah.

George F. Simmons

PREFACIO A LA PRIMERA EDICION

Si ha de ser digno de atención serio, un libro de texto nuevo sobre un tema vetusto debe incorporar una perspectiva definida y razonable no representada por otros libros ya publicados. Tal perspectiva reflejará necesariamente la experiencia, los gustos y las inclinaciones del autor y, en consecuencia, debe establecerse desde un principio con nitidez, con el fin de que los lectores potenciales que no la compartan puedan elegir otras opciones. La estructura y el contenido de este libro traducen mis opiniones personales en diversas formas, como indicaré a continuación.

El lugar de las ecuaciones diferenciales en las matemáticas. El análisis ha sido la rama dominante de las matemáticas durante 300 años, y las ecuaciones diferenciales están en el corazón del análisis. Constituyen el objetivo natural del cálculo elemental y la parcela matemática más importante para la comprensión de las ciencias físicas. Es fuente, además, en las cuestiones más profundas que suscita, de la mayoría de las ideas y teorías que conforman el análisis avanzado. Series de potencias, series de Fourier, función gamma y otras funciones especiales, ecuaciones integrales, teoremas de existencia, necesidad de justificación rigurosa de muchos procesos analíticos; todos estos temas aparecerán en nuestro camino en su contexto más natural. Y en una etapa posterior proporcionan la principal motivación que subyace al análisis complejo, a la teoría de series de Fourier y otros desarrollos ortogonales más generales, a la integración de Lebesgue, a los espacios métricos y de Hilbert, y a un sinfín de otras materias de gran belleza en la matemática moderna. Puedo alegar, a título de ejemplo, que una de las ideas principales del análisis complejo consiste en liberar a las series de potencias del ámbito restrictivo del sistema de los números reales, algo que entenderán mejor quienes hayan intentado utilizar series de potencias reales para resolver ecuaciones diferenciales. En botánica resulta obvio que nadie puede apreciar del todo los capullos de las plantas en floración sin un conocimiento razonable de las raíces, tallos y hojas que los

nutren y soportan. El mismo principio es válido en matemáticas, pero se desprecia o se ignora con frecuencia.

Las modas son tan comunes en matemáticas como en cualquier otra actividad humana, y siempre es difícil separar lo imperecedero de lo efímero en las obras que nos son coetáneas. Estamos presenciando actualmente en nuestras enseñanzas de matemáticas una fuerte corriente de abstracción que ha eliminado del paisaje muchos rasgos particulares, sustituyéndolos por las suaves y redondeadas formas de las teorías generales. En dosis moderadas, tales teorías generales son útiles y satisfactorias, pero un efecto desafortunado de su predominio es que si un estudiante no aprende en su carrera algo acerca de temas tan interesantes como la ecuación de ondas, la función hipergeométrica de Gauss, la función gamma o los problemas básicos del cálculo de variaciones, entre otros, es muy improbable que lo aprenda después. El lugar idóneo para adquirir esas nociones básicas es un curso de nivel elemental en ecuaciones diferenciales. Algunos libros de uso frecuente en esta materia me recuerdan esos autocares de visita turística cuyos conductores están tan obsesionados con el cumplimiento a rajatabla del horario programado que no dan apenas oportunidad a sus pasajeros de disfrutar del recorrido.

Aplicaciones. Es una perogrullada decir que nada es permanente salvo el cambio; y el objetivo primordial de las ecuaciones diferenciales es servir de instrumento para estudiar los cambios en el mundo físico. Un libro de carácter general sobre el tema, sin una exposición adecuada de sus aplicaciones científicas, sería, en consecuencia, tan estéril como un tratado sobre los huevos que no mencionara sus fines reproductores. Este libro está estructurado de manera tal que cada uno de los capítulos, excepto el último, ofrece una remuneración, a veces incluso varias, en forma de algún problema científico clásico al que permiten acceder los métodos expuestos en él. Estas aplicaciones incluyen:

El problema de la braquistócrona.

La fórmula de Einstein $E = mc^2$.

La ley de gravitación de Newton.

La ecuación de ondas para la cuerda vibrante.

El oscilador armónico en mecánica cuántica.

La teoría del potencial.

La ecuación de ondas para la membrana vibrante.

Las ecuaciones predador-presa.

La mecánica no lineal.

El principio de Hamilton.

El problema mecánico de Abel.

Considero que el tratamiento matemático de estos problemas figura entre los máximos esplendores de la civilización occidental, y confío que el lector esté de acuerdo conmigo.

El problema del rigor matemático. En las altas cumbres de la matemática pura, cualquier argumento que pretenda ser una demostración ha de ser capaz

de superar las severas críticas de los expertos escépticos. Es una de las reglas del juego y quien desee jugar ha de acatarlas. Mas no es éste el único juego en la ciudad...

Hay algunas partes de las matemáticas, quizá la teoría de números y el álgebra abstracta, en las que un alto grado de rigor puede ser aconsejable a todos los niveles. Ahora bien, en ecuaciones diferenciales elementales una insistencia escrupulosa en exactitudes doctrinarias tiende a exprimir el jugo del tema, quedando tan sólo el hollejo enjuto. Mi principal objetivo en este libro es ayudar al estudiante a captar la naturaleza y el interés de las ecuaciones diferenciales, y a tal fin prefiero, sin la más mínima duda, ser ocasionalmente impreciso pero inteligible que adoptar una actitud perfectamente precisa e ininteligible. No tengo interés alguno en edificar una estructura matemática lógicamente impecable en la que definiciones, teoremas y demostraciones rigurosas se amalgaman entre sí en una mole desafiante que el lector ha de penetrar.

A pesar de este repudio, de vez en cuando procedo a discutir ciertos aspectos con una buena dosis de rigor, especialmente en el Capítulo 13 y en los Apéndices A de los Capítulos 5, 6 y 7, y en el B del Capítulo 11. No estoy diciendo que el resto del libro esté exento de rigor, sino tan sólo que tiende hacia la escuela activista de las matemáticas, cuya meta principal es desarrollar métodos que resuelvan problemas científicos, en contraposición a la escuela contemplativa, que analiza y organiza las ideas y técnicas generadas por los activistas.

Habrá quien piense que un argumento matemático o es una demostración o no lo es. En el marco del análisis elemental, discrepo de esa opinión y creo más bien que el papel de una demostración es aportar una convicción razonable a la audiencia a la que va dirigida. El rigor matemático lo encuentro parecido a la vestimenta: su estilo debe acomodarse a la situación, y disminuye la comodidad y restringe la libertad en cuanto es demasiado amplio o demasiado ajustado.

Historia y biografías. Hay un dicho armenio que reza así: «Quien carece del sentido del pasado está condenado a vivir en la estrecha oscuridad de su propia generación». Una matemática sin historia es una matemática desprovista de su grandeza, porque, al igual que las otras artes (y la matemática es una de las artes supremas de la civilización), debe su grandeza al hecho de ser creación humana.

En una época cada vez más dominada por la cultura de masas y por la burocracia impersonal, me produce un enorme placer saber que las ideas vitales de las matemáticas no fueron impresas por un ordenador ni votadas por una comisión, sino creadas por la labor solitaria y el ingenio individual de algunos hombres geniales. Las abundantes reseñas históricas de este libro reflejan mi voluntad de comunicar algunos matices de los descubrimientos y personalidades de estos seres asombrosos. Las notas más extensas se recogen en los apéndices y cada una de ellas guarda relación con una contribución específica discutida en el capítulo correspondiente. Se refieren a casi todos los matemáticos más

eminentes de los últimos tres siglos: Fermat, Newton, los Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Gauss, Abel, Poisson, Dirichlet, Hamilton, Liouville, Chebyshev, Hermite, Riemann, Minkowski y Poincaré. Como escribió T. S. Elliot en uno de sus ensayos, «Alguien dijo: "Los escritores fallecidos nos parecen muy lejanos porque *sabemos* mucho más de lo que ellos *sabían*". Justamente, y ellos son nuestra fuente de sabiduría».

La historia y las biografías son muy complejas y soy desgraciadamente consciente de que apenas nada de cuanto figura en mis notas es en realidad tan simple como aparece. Debo pedir disculpas también por las frecuentes alusiones excesivamente lacónicas relativas a conceptos que los lectores, en su mayoría, encuentran aquí por vez primera. Pero con la ayuda de una buena biblioteca los lectores interesados serán capaces de descifrarlos por sí mismos. Cuando menos, sus esfuerzos les desvelarán la inmensa variedad de las matemáticas clásicas, un aspecto que suele pasar inadvertido en los currículos habituales.

George F. Simmons

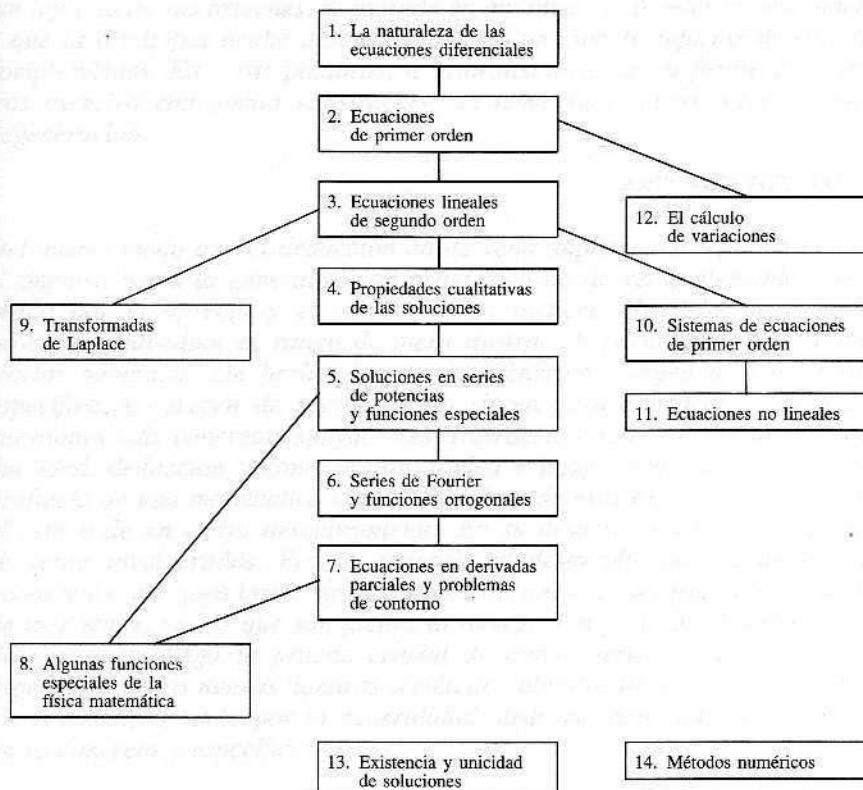
SUGERENCIAS PARA EL PROFESOR

Algunas sugerencias para el profesor. Cada sección de la biblioteca de matemáticas tiene una serie de sugerencias para el profesor que se refiere a los diferentes aspectos más profundos que tratan del tema. Estas sugerencias están dirigidas a los profesores que desean profundizar en el tema, o a los estudiantes que desean complementar su estudio.

Cuando una disciplina se impone como obligatoria, es importante que el profesor sea consciente de las necesidades y preferencias de los estudiantes. Los profesores deben tener en cuenta las siguientes sugerencias:

- 1. La naturaleza de las ecuaciones diferenciales
- 2. Ecuaciones de primer orden
- 3. Ecuaciones lineales de segundo orden
- 4. Propiedades cualitativas de las soluciones
- 5. Soluciones en series de potencias y funciones especiales
- 6. Series de Fourier y funciones ortogonales
- 7. Ecuaciones en derivadas parciales y problemas de contorno
- 8. Algunas funciones especiales de la física matemática
- 9. Transformadas de Laplace
- 10. Sistemas de ecuaciones de primer orden
- 11. Ecuaciones no lineales
- 12. El cálculo de variaciones
- 13. Existencia y unicidad de soluciones
- 14. Métodos numéricos

El diagrama adjunto muestra la dependencia lógica de los capítulos y sugiere varias formas de usar el libro, de acuerdo con los objetivos del curso, las preferencias del profesor, las necesidades de los estudiantes, y sus conocimientos previos.



Los científicos estudian la naturaleza no porque sea útil, sino porque encuentran placer en ello, y encuentran placer porque es hermosa. Si no lo fuera, no merecería la pena conocerla, y si la naturaleza no mereciera la pena, la vida tampoco. No me refiero, claro está, a la belleza que estimula los sentidos, la de las cualidades y las apariencias; no es que menoscicie tal belleza, nada más lejos de mi intención, mas ésta nada tiene que ver con la ciencia; me refiero a esa hermosura más profunda que emana del orden armonioso de las partes, susceptible de ser captada por una inteligencia pura.

HENRI POINCARÉ

Cuando una disciplina matemática se aleja de sus fuentes empíricas o, más todavía, si pertenece ya a una segunda o tercera generación inspirada sólo de manera indirecta en ideas procedentes de la «realidad», le acechan graves peligros. Irá convirtiéndose cada vez más en algo puramente esteticista, más y más l'art pour l'art. Esto no es necesariamente malo, siempre y cuando esa disciplina esté arropada por temas correlacionados que mantengan más estrechas conexiones empíricas, o esté bajo la influencia de hombres de gusto excepcionalmente bien formado. Ahora bien, entraña un grave riesgo que el tema se desarrolle siguiendo las líneas de menor resistencia, que la corriente, tan lejos ya de sus orígenes, se escinda en multitud de ramales intrascendentes, y que la disciplina acabe desembocando en un cúmulo informe de detalles y complejidades. En otras palabras, a gran distancia de su fuente empírica, o tras excesiva endogamia «abstracta», un tema matemático corre peligro de degeneración.

JOHN VON NEUMANN

Del mismo modo que la deducción ha de venir suplementada por la intuición, el impulso hacia la generalización progresiva ha de verse atenuado y equilibrado por el aprecio y el respeto a los matices. No debe degradarse el problema individual al rango de mera ilustración particular de majestuosas teorías generales. De hecho, las teorías generales surgen de considerar lo específico, y carecen de sentido si no sirven para clarificar y ordenar las cuestiones más concretas subyacentes. Interacción entre generalidad e individualidad, deducción y construcción, lógica e imaginación; esa es la esencia profunda de una matemática viva. Cualquiera de esos aspectos puede estar en el centro de un cierto descubrimiento. En su desarrollo a largo plazo, todos se verán involucrados. Por lo general, tal desarrollo partirá de una base «concreta», arrojará lastre mediante abstracción y se elevará hasta capas altas de aire tenue, en las que son fáciles la navegación y la observación. Después de este vuelo llega la prueba crucial de tomar tierra y alcanzar objetivos específicos en las nuevas llanuras recién descubiertas de «realidad» individual. En resumen, el vuelo por la generalidad abstracta debe iniciarse y terminar en lo concreto y específico.

RICHARD COURANT

LA NATURALEZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

1. INTRODUCCION

Se entiende por *ecuación diferencial* cualquier ecuación en la que interviene una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes. Muchas leyes de la naturaleza, en física, química, biología o astronomía, encuentran su expresión más natural en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. Son asimismo abundantes sus aplicaciones en la propia matemática, especialmente en geometría, y también en ingeniería, economía y en otros muchos campos de las ciencias aplicadas.

Es fácil comprender la razón que se oculta tras una tan amplia gama de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales. El lector recordará que si $y = f(x)$ es una función dada, su derivada se puede interpretar como el ritmo de cambio de y con respecto a x . En cualquier proceso natural, las variables involucradas y sus ritmos de variación están relacionadas entre sí por medio de los principios científicos básicos que gobiernan dicho proceso. Al expresar tal conexión en símbolos matemáticos, el resultado es con frecuencia una ecuación diferencial.

El siguiente ejemplo ilustra estos comentarios. De acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración a de un cuerpo de masa m es proporcional a la fuerza total F , que actúa sobre él con $1/m$ como constante de proporcionalidad, de modo que $a = F/m$, o sea,

$$ma = F. \quad (1)$$

Supongamos, por ejemplo, que un cuerpo de masa m cae bajo la sola influencia de la gravitación. En tal caso, la única fuerza que actúa sobre él es mg , donde g

denota la aceleración de la gravedad¹. Si y es la altura medida hacia abajo desde una cierta posición prefijada, entonces su velocidad $v = dy/dt$ es el ritmo de cambio de su posición y su aceleración $a = dv/dt = d^2y/dt^2$ es el ritmo de cambio de la velocidad. Con esta notación, (1) se convierte en

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg,$$

o sea,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g. \quad (2)$$

Si alteramos la situación, admitiendo que el aire ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad, la fuerza total que actúa sobre el cuerpo es $mg - k(dy/dt)$, y (1) pasa a ser

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - k \frac{dy}{dt}. \quad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) son las ecuaciones diferenciales que expresan los atributos esenciales de los dos procesos físicos bajo consideración.

Como ejemplos adicionales de ecuaciones diferenciales cabe citar:

$$\frac{dy}{dt} = -ky; \quad (4)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky; \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}; \quad (6)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0; \quad (7)$$

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + p(p + 1)y = 0; \quad (8)$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0. \quad (9)$$

En cada una de esas ecuaciones la variable dependiente es y , mientras que la variable independiente es x o t . Las letras k , m y p representan constantes. Una *ecuación diferencial ordinaria* es una en la que sólo existe una variable inde-

¹ g se puede considerar como constante sobre la superficie de la tierra en la mayoría de las aplicaciones, y es aproximadamente 980 centímetros por segundo en cada segundo.

pendiente, de manera que todas las derivadas que aparecen en ella son derivadas ordinarias. Todas las que acabamos de citar son ordinarias. El *orden* de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que contiene. Las ecuaciones (4) y (6) son de primer orden, y las demás son de segundo orden. Las ecuaciones (8) y (9) son clásicas, y se conocen como *ecuación de Legendre* y *ecuación de Bessel*, respectivamente. Ambas arrastran una extensa literatura y una larga historia que se remonta a siglos atrás. Estudiaremos todas esas ecuaciones en detalle.

Una *ecuación diferencial en derivadas parciales* es una que hace intervenir más de una variable independiente, de modo que las derivadas que aparecen en ella son derivadas parciales. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z, t)$ es una función del tiempo y de las tres coordenadas rectangulares de un punto en el espacio, las que siguen son ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0;$$

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial w}{\partial t};$$

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

También estas ecuaciones diferenciales son clásicas. Se trata, respectivamente, de las *ecuaciones de Laplace*, *del calor* y *de ondas*. Cada una de ellas posee un importante significado en física teórica, y su estudio ha estimulado el desarrollo de muchas ideas matemáticas relevantes. En general, las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales aparecen en la mecánica de los medios continuos, en problemas relacionados con campos eléctricos, dinámica de fluidos, difusión y movimientos ondulatorios. Su teoría es muy diferente de la de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y notablemente más difícil en casi todas sus facetas. Durante un tiempo vamos a restringir nuestra atención a las ecuaciones diferenciales ordinarias².

² El biólogo inglés J. B. S. Haldane (1892-1964) hizo una observación interesante acerca del caso especial unidimensional de la ecuación del calor: «En las teorías científicas adoptamos la teoría más simple que explique todos los hechos bajo investigación y nos permita predecir otros del mismo tipo. La trampa está en el término “más simple”. Es realmente un canon estético análogo al que subyace implícito en nuestras críticas de poesía o pintura. El lego juzgará mucho menos simple una ley como

$$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

que “rezuma”, de la que es precisamente la formulación matemática. El físico invierte esa opinión y su enunciado es el más útil de los dos, por lo que se refiere a poder de predicción. Es, no obstante, un enunciado sobre algo muy poco familiar para el hombre de la calle, a saber, el ritmo de cambio de un ritmo de cambio».

2. GENERALIDADES SOBRE LAS SOLUCIONES

La ecuación diferencial ordinaria general de orden n es

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \quad (1)$$

o sea, usando la notación con primas para las derivadas,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Cualquier discusión teórica adecuada de esta ecuación debe basarse en un análisis cuidadoso de propiedades explícitamente supuestas a la función F . Sin embargo, un exceso de rigor en la teoría tiende a menudo a oscurecer lo que se está realmente haciendo. Intentaremos, por esa razón, evitar ser demasiado confusos en tales aspectos, al menos por ahora.

Suele resultar sencillo comprobar que una función dada $y = y(x)$ es solución de una ecuación (1). Basta calcular las derivadas de $y(x)$ y mostrar que $y(x)$ y sus derivadas, cuando se sustituyen en la ecuación, la reducen a una identidad en x . Así vemos que

$$y = e^{2x} \quad , \quad y = e^{3x}$$

son ambas soluciones de la ecuación de segundo orden

$$y'' - 5y' + 6y = 0; \quad (2)$$

y más generalmente que

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad (3)$$

también lo es para toda elección de las constantes c_1 y c_2 . Con frecuencia aparecen soluciones de ecuaciones diferenciales definidas implícitamente, y a veces es difícil o incluso imposible expresar la variable dependiente explícitamente en términos de la variable independiente. Así, por ejemplo,

$$xy = \log y + c \quad (4)$$

es una solución de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy} \quad (5)$$

para todo valor de la constante c , como podemos comprobar sin más que deri-

var (4) y reordenar el resultado³. Estos ejemplos ilustran también el hecho de que una solución de una ecuación diferencial contiene habitualmente una o más constantes arbitrarias, tantas como indique el orden de la ecuación.

En la mayoría de los casos es fácil aplicar un procedimiento similar a una presunta solución de una ecuación diferencial dada. El problema de partir de una ecuación diferencial y hallar una solución suya es mucho más duro. A su debido tiempo presentaremos métodos sistemáticos para resolver ecuaciones tales como (2) y (5). De momento, nos limitamos a unas pocas observaciones sobre algunos aspectos generales de las soluciones.

La más simple de las ecuaciones diferenciales es

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad (6)$$

y la resolvemos escribiendo

$$y = \int f(x) dx + c. \quad (7)$$

En ciertos casos, la integral indefinida en (7) puede hallarse por los métodos del cálculo. En otras ocasiones, puede ser difícil o imposible hallar una fórmula para esa integral. Se sabe, por ejemplo, que

$$\int e^{-x^2} dx \text{ e } \int \frac{\sin x}{x} dx$$

no son expresable mediante un número finito de funciones elementales⁴. Sin embargo, si recordamos que

$$\int f(x) dx$$

no es sino un símbolo para una función cualquiera con derivada $f(x)$, podemos dar casi siempre un significado válido escribiéndola en la forma

$$y = \int_{x_0}^x f(t) dt + c. \quad (8)$$

³ En cálculo se utiliza la notación $\ln x$ para el *logaritmo natural*, es decir, para la función $\log_e x$. En cursos más avanzados, sin embargo, esta función suele denominarse por $\log x$.

⁴ El lector que sienta curiosidad por conocer las razones de este hecho puede consultar D. G. Mead, «Integration», *Am. Math. Monthly*, vol. 68, págs. 152-156 (1961). Para más detalles, véase G. H. Hardy, *The Integration of Functions of a Single Variable*, Cambridge University Press, Londres, 1961; o J. F. Ritt, *Integration in Finite Terms*, Columbia University Press, Nueva York, 1948.

El meollo de la cuestión está en que esta integral definida es función de su límite superior x (la t bajo el signo integral es tan sólo una variable muda) que existe siempre que el integrando sea continuo sobre el recorrido de la integración, y que su derivada sea $f(x)$ ⁵.

Las llamadas *ecuaciones separables*, o *ecuaciones con variables separadas*, están al mismo nivel de sencillez que (6). Son aquellas ecuaciones diferenciales que se pueden escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

donde el miembro de la derecha es producto de dos funciones, cada una dependiente de sólo una de las variables. En tales circunstancias, podemos separar las variables escribiendo

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx,$$

y resolver entonces la ecuación original por integración:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + c.$$

Estas son ecuaciones diferenciales muy sencillas en el sentido de que su resolución se reduce a un problema de integración, aunque es posible que las integrales obtenidas sean difíciles o incluso imposibles de efectuar explícitamente.

La ecuación diferencial general de primer orden es el caso especial de (1) que corresponde a tomar $n = 1$:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (9)$$

Esperaríamos normalmente que una tal ecuación tenga solución, y que esta solución, como (7) y (8), contenga una constante arbitraria. Sin embargo,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

carece de soluciones reales, y

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 0$$

⁵ Este enunciado es el teorema fundamental del cálculo.

sólo admite la solución $y = 0$ (que no contiene constante arbitraria alguna). Situaciones de este calibre plantean cuestiones difíciles de índole teórica sobre la existencia y naturaleza de las soluciones de ecuaciones diferenciales. No nos es posible entrar aquí en una discusión exhaustiva de estas cuestiones, pero una descripción intuitiva de algunos hechos básicos puede clarificar el problema.

Por simplicidad, supongamos que es posible despejar dy/dx en (9):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (10)$$

Supongamos además que $f(x, y)$ es una función continua en un rectángulo R del plano xy . El significado geométrico de una solución de (10) se comprende mejor como sigue (Fig. 1). Si $P_0 = (x_0, y_0)$ es un punto de R , el número

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_0} = f(x_0, y_0)$$

determina una dirección en P_0 . Sea ahora $P_1 = (x_1, y_1)$ un punto próximo al P_0 en esa dirección, y usemos

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_1} = f(x_1, y_1)$$

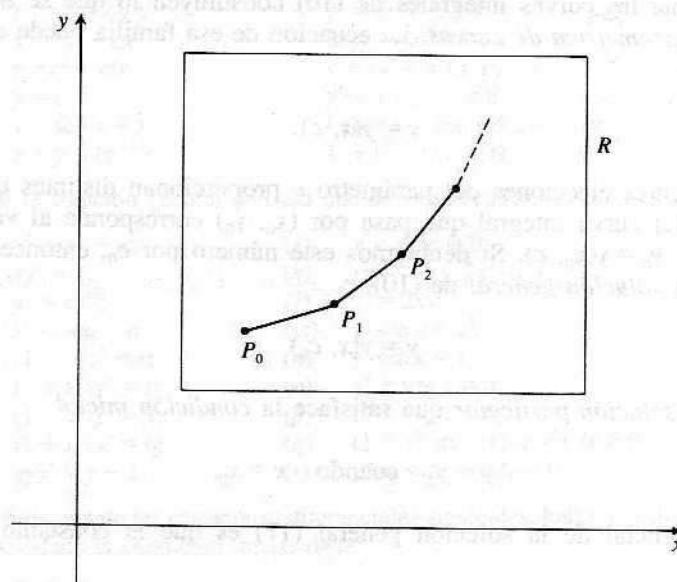


Figura 1

para determinar una nueva dirección en P_1 . A continuación, sea $P_2 = (x_2, y_2)$ un punto cercano al P_1 en esa nueva dirección, y usemos el número

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{P_2} = f(x_2, y_2)$$

para hallar otra nueva dirección en P_2 . Continuando con este proceso, hallamos una línea quebrada con puntos dispersos sobre ella, cual abalorios, y si imaginamos ahora que esos puntos sucesivos se aproximan unos a otros haciéndose más y más numerosos, la quebrada tiende a una curva suave que pasa por el punto inicial P_0 . Esta curva es una solución $y = y(x)$ de la ecuación (10); porque en cada punto (x, y) sobre ella, la pendiente viene dada por $f(x, y)$, y ésta es precisamente la condición requerida por la ecuación diferencial. Si partimos de otro punto inicial, obtendremos en general una curva (o solución) diferente. Así pues, las soluciones de (10) constituyen una familia de curvas, llamadas *curvas integrales*⁶. Además, parece razonable conjeturar que por cada punto de R pasará sólo una curva integral de (10). Esta discusión ha pretendido tan sólo hacer plausible el resultado siguiente.

Teorema A. (Teorema de Picard.) *Si $f(x, y)$ y $\partial f / \partial y$ son funciones continuas sobre un rectángulo cerrado R , por cada punto (x_0, y_0) del interior de R pasa una única curva integral de la ecuación $dy/dx = f(x, y)$.*

Si consideramos un valor fijo de x_0 en ese teorema, la curva integral que pasa por (x_0, y_0) está completamente determinada por la elección de y_0 . Vemos, por tanto, que las curvas integrales de (10) constituyen lo que se llama una *familia uniparamétrica de curvas*. La ecuación de esa familia puede escribirse en la forma

$$y = y(x, c), \quad (11)$$

donde diferentes elecciones del parámetro c proporcionan distintas curvas de la familia. La curva integral que pasa por (x_0, y_0) corresponde al valor de c para el cual $y_0 = y(x_0, c)$. Si denotamos este número por c_0 , entonces (11) se denomina la *solución general* de (10), e

$$y = y(x, c_0)$$

se llama la *solución particular* que satisface la *condición inicial*

$$y = y_0 \quad \text{cuando } x = x_0.$$

El rasgo esencial de la solución general (11) es que la constante c puede

⁶ Las soluciones de una ecuación diferencial se llaman a veces *integrales* de la ecuación porque el problema de hallarlas viene a ser una extensión del problema ordinario de integración.

elegirse en ella de manera tal que por cualquier punto dado del rectángulo bajo consideración pase una curva integral.

El teorema de Picard se demuestra en el Capítulo 13. Su demostración es complicada, y es mejor posponerla hasta que el lector haya adquirido suficiente experiencia en aspectos más prácticos del tema. El teorema admite generalizaciones en diversas direcciones, con hipótesis más débiles. Puede también generalizarse para ecuaciones de orden n en las que pueda despejarse la derivada de orden n . Descripciones detalladas de tales resultados estarían fuera de lugar aquí, así que nos contentaremos por el momento con estas breves nociones. En el resto de este capítulo exploraremos algunas de las vías por las que las ecuaciones diferenciales surgen en problemas científicos.

PROBLEMAS

1. Verificar que las siguientes funciones (explícitas o implícitas) son soluciones de las correspondientes ecuaciones diferenciales:

(a)	$y = x^2 + c$	$y' = 2x;$
(b)	$y = cx^2$	$xy' = 2y;$
(c)	$y^2 = e^{2x} + c$	$yy' = e^{2x};$
(d)	$y = ce^{kx}$	$y' = ky;$
(e)	$y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$	$y'' + 4y = 0;$
(f)	$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$	$y'' - 4y = 0;$
(g)	$y = c_1 \operatorname{sh} 2x + c_2 \operatorname{ch} 2x$	$y'' - 4y = 0;$
(h)	$y = \operatorname{sen}^{-1} xy$	$xy' + y = y' \sqrt{1 - x^2 y^2};$
(i)	$y = x \operatorname{tg} x$	$xy' = y + x^2 + y^2;$
(j)	$x^2 = 2y^2 \log y$	$y' = xy/x^2 + y^2;$
(k)	$y^2 = x^2 - cx$	$2xyy' = x^2 + y^2;$
(l)	$y = c^2 + c/x$	$y + xy' = x^4(y')^2;$
(m)	$y = ce^{yx}$	$y' = y^2/(xy - x^2);$
(n)	$y + \operatorname{sen} y = x$	$(y \operatorname{cos} y - \operatorname{sen} y + x)y' = y;$
(o)	$x + y = \operatorname{tg}^{-1} y$	$1 + y^2 + y^2y' = 0.$

2. Hallar la solución general de cada una de estas ecuaciones diferenciales:

(a)	$y' = e^{3x} - x;$	(j)	$x^5y' + y^5 = 0;$
(b)	$xy' = 1;$	(k)	$xy' = (1 - 2x^2)\operatorname{tg} y;$
(c)	$y' = xe^{x^2};$	(l)	$y' = 2xy;$
(d)	$y' = \operatorname{sen}^{-1} x;$	(m)	$y' \operatorname{sen} y = x^2;$
(e)	$(1+x)y' = x;$	(n)	$y' \operatorname{sen} x = 1;$
(f)	$(1+x^2)y' = x;$	(o)	$y' + y \operatorname{tg} x = 0;$
(g)	$(1+x^3)y' = x;$	(p)	$y' - y \operatorname{tg} x = 0;$
(h)	$(1+x^2)y' = \operatorname{tg}^{-1} x;$	(q)	$(1+x^2)dy + (1+y^2)dx = 0;$
(i)	$xyy' = y - 1;$	(r)	$y \log y dx - x dy = 0.$

3. Para cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes, hallar la solución particular que satisface la condición inicial dada:

(a) $y' = xe^x$, $y = 3$ cuando $x = 1$;
 (b) $y' = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, $y = 1$ cuando $x = 0$;

- (c) $y' = \log x$, $y = 0$ cuando $x = e$;
 (d) $(x^2 - 1)y' = 1$, $y = 0$ cuando $x = 2$;
 (e) $x(x^2 - 4)y' = 1$, $y = 0$ cuando $x = 1$;
 (f) $(x + 1)(x^2 + 1)y' = 2x^2 + x$, $y = 1$ cuando $x = 0$.
4. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, hallar la curva integral que pasa por el punto dado:
- $y' = e^{3x-2y}$, $(0, 0)$;
 - $xdy = (2x^2 + 1)dx$, $(1, 1)$;
 - $e^{-y}dx + (1 + x^2)dy = 0$, $(0, 0)$;
 - $3\cos 3x \cos 2y dx - 2\sin 3x \sin 2y dy = 0$, $(\pi/12, \pi/8)$;
 - $y' = e^x \cos x$, $(0, 0)$;
 - $xyy' = (x + 1)(y + 1)$, $(1, 0)$.
5. Probar que $y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ es una solución de $y' = 2xy + 1$.
6. Para la ecuación diferencial (2), es decir,

$$y'' - 5y' + 6y = 0,$$

efectuar en detalle los cálculos necesarios para verificar las afirmaciones del texto en el sentido de que

- $y = e^{2x}$ e $y = e^{3x}$ son ambas soluciones;
- $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ es solución para toda elección de las constantes c_1 y c_2 .

Nota: Al estudiar un libro como éste, un estudiante jamás debe pasar impertérito sobre frases del tipo «vemos que» o «como se comprueba fácilmente», sin constatar personalmente su veracidad. El simple hecho de que algo aparezca impreso no significa que sea necesariamente cierto. Es preciso cultivar el escepticismo como un saludable estado mental, del mismo modo que cada cual cuida su estado físico. No acepte nada por autoridad de este autor o de cualquier otro hasta que no lo haya comprendido por sí mismo.

7. En el espíritu del Problema 6, verificar que (4) es solución de la ecuación diferencial (5) para todo valor de la constante c .
8. ¿Para qué valores de la constante m será $y = e^{mx}$ solución de la ecuación diferencial

$$2y''' + y'' - 5y' + 2y = 0?$$

Usar las ideas del Problema 6 para hallar una solución que contenga tres constantes arbitrarias c_1 , c_2 y c_3 .

3. FAMILIAS DE CURVAS. TRAYECTORIAS ORTOGONALES

Hemos visto que la solución general de una ecuación diferencial de primer orden contiene normalmente una constante arbitraria, llamada un *parámetro*. Cuando a este parámetro se le asignan diversos valores, obtenemos una familia uniparamétrica de curvas. Cada una de estas curvas es una solución de la ecuación diferencial dada, y todas juntas constituyen la solución general.

Recíprocamente, como cabía esperar, las curvas de cualquier familia uniparamétrica de curvas son curvas integrales de alguna ecuación diferencial de primer orden. Si la familia es

$$f(x, y, c) = 0, \quad (1)$$

entonces su ecuación diferencial puede hallarse en varios pasos. En primer lugar, derivamos implícitamente (1) respecto a x , con lo que obtenemos una relación del tipo

$$g\left(x, y, \frac{dy}{dx}, c\right) = 0. \quad (2)$$

A continuación, eliminamos el parámetro c de (1) y (2) para obtener

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (3)$$

como la deseada ecuación diferencial. Por ejemplo,

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (4)$$

es la ecuación de la familia de todos los círculos con centro en el origen (Figura 2). Derivando respecto a x se deduce

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0;$$

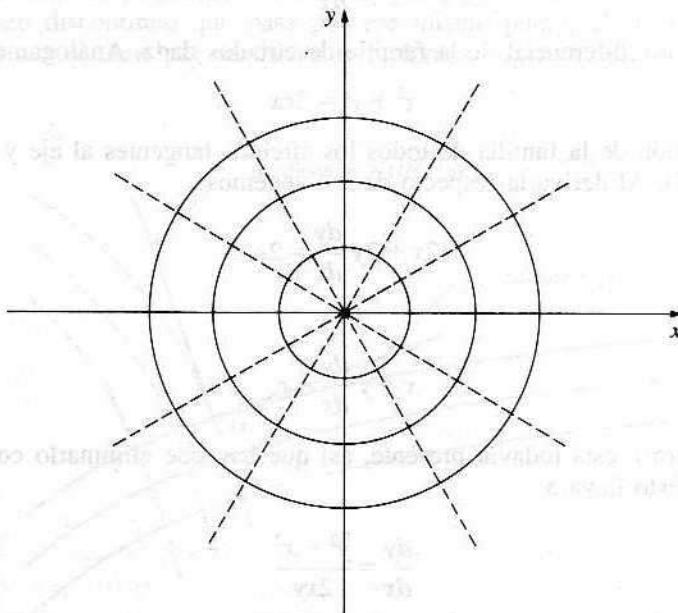


Figura 2

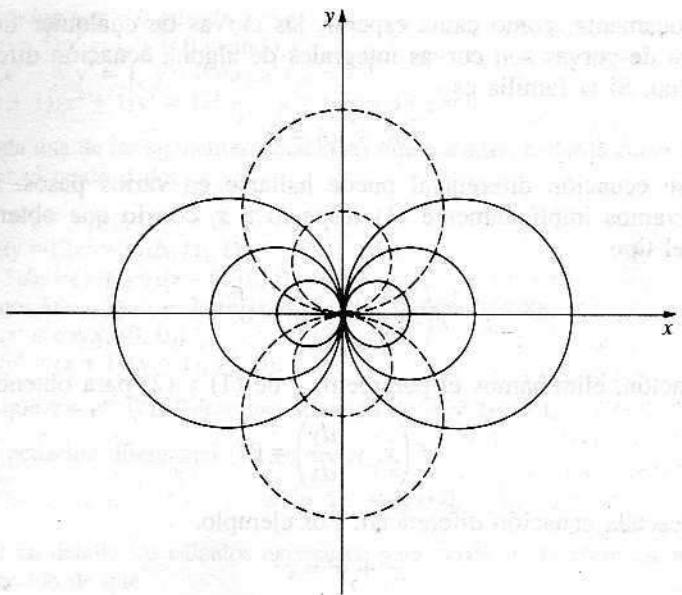


Figura 3

y como c ya está ausente, no hace falta eliminarla, de modo que

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (5)$$

es la ecuación diferencial de la familia de círculos dada. Análogamente,

$$x^2 + y^2 = 2cx \quad (6)$$

es la ecuación de la familia de todos los círculos tangentes al eje y en el origen (Fig. 3). Al derivarla respecto de x obtenemos

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 2c,$$

o sea,

$$x + y \frac{dy}{dx} = c. \quad (7)$$

El parámetro c está todavía presente, así que hay que eliminarlo combinando (6) y (7). Esto lleva a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad (8)$$

como ecuación diferencial de la familia (6).

Como aplicación interesante de este método, consideremos el problema de hallar trayectorias ortogonales. Para explicar en qué consiste, observemos que la familia de círculos representada por (4) y la familia de rectas $y = mx$ que pasan por el origen (las líneas de puntos en la Figura 2) tienen la siguiente propiedad: toda curva de una de las familias es *ortogonal* (o sea, perpendicular) a todas las de la otra familia. Siempre que dos familias uniparamétricas de curvas están relacionadas de este modo se dice que cada una de ellas es una familia de *trayectorias ortogonales* de la otra. Las trayectorias ortogonales son de interés en la geometría de curvas planas y en algunas cuestiones de matemática aplicada. Por ejemplo; si una corriente eléctrica fluye por una lámina plana de material conductor, las curvas equipotenciales son las trayectorias ortogonales de las líneas de flujo.

En el ejemplo de los círculos centrados en el origen, es geométricamente obvio que sus trayectorias ortogonales son rectas que pasan por el origen, y recíprocamente. Para cubrir situaciones más complicadas, sin embargo, necesitamos un método analítico que permita calcular las trayectorias ortogonales. Supongamos que

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (9)$$

es la ecuación diferencial de la familia de curvas de trazo continuo en la Figura 4. Estas curvas se caracterizan por el hecho de que en cada punto (x, y) de una de ellas la pendiente viene dada por $f(x, y)$. La trayectoria ortogonal de trazo discontinuo que pasa por ese mismo punto, al ser ortogonal a la primera curva, tiene por pendiente la recíproca negativa de la primera. Así

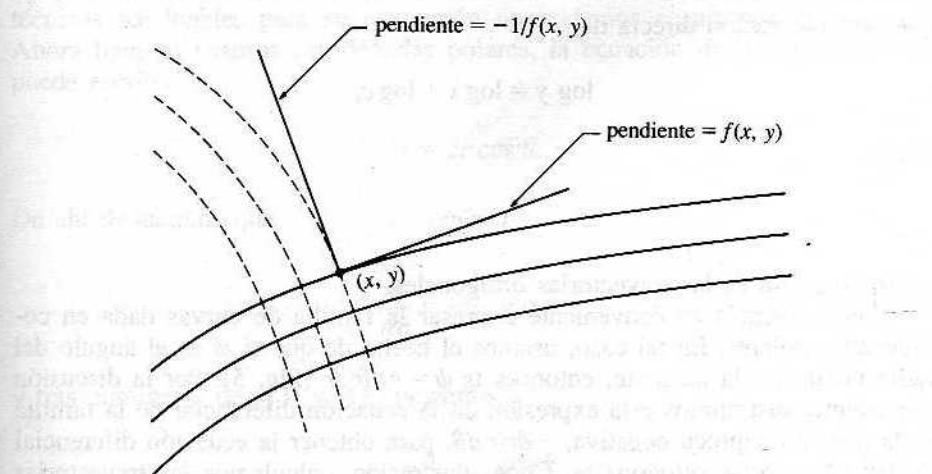


Figura 4

pues, a lo largo de cualquier trayectoria ortogonal tenemos $dy/dx = -1/f(x, y)$, o sea,

$$-\frac{dx}{dy} = f(x, y) \quad (10)$$

Nuestro método para hallar las trayectorias ortogonales de una familia uniparamétrica de curvas dada es como sigue: En primer lugar, hallamos la ecuación diferencial de la familia; después sustituimos dy/dx por $-dx/dy$ para obtener la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales; y finalmente resolvemos esta ecuación diferencial.

Si aplicamos este método a la familia de círculos (4) con ecuación diferencial (5), obtenemos

$$x + y\left(-\frac{dx}{dy}\right) = 0,$$

es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (11)$$

como ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales. Ahora podemos separar variables en (11), obteniendo

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

que por integración directa da

$$\log y = \log x + \log c,$$

o sea,

$$y = cx$$

como ecuación de las trayectorias ortogonales.

Con frecuencia es conveniente expresar la familia de curvas dada en coordenadas polares. En tal caso, usamos el hecho de que si ψ es el ángulo del radio polar con la tangente, entonces $\tan \psi = r d\theta/dr$ (Fig. 5). Por la discusión precedente, sustituimos esta expresión en la ecuación diferencial de la familia dada por su recíproca negativa, $-dr/r d\theta$, para obtener la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales. Como ilustración, calculemos las trayectorias ortogonales de la familia de círculos (6). Si usamos coordenadas rectangulares,

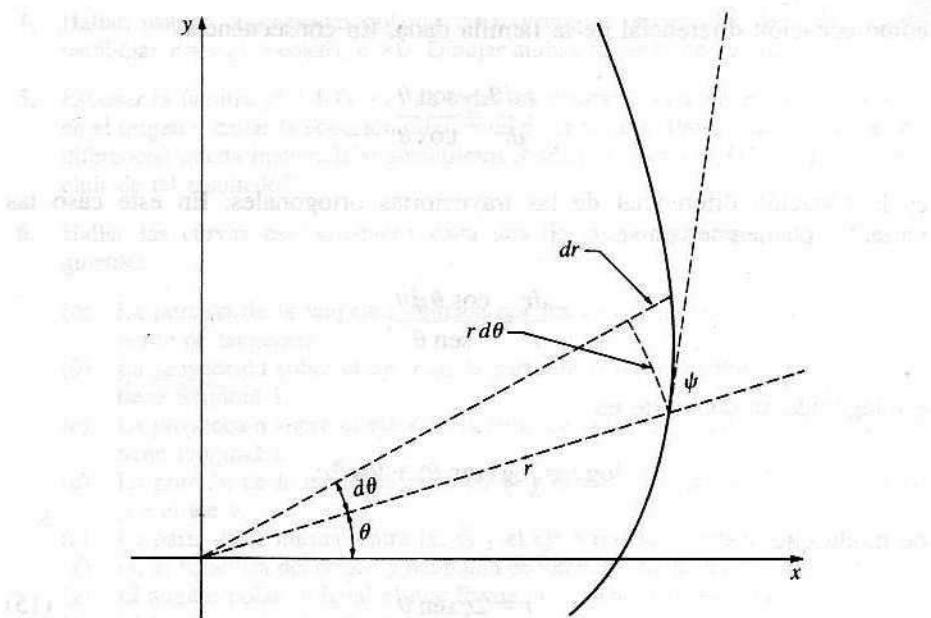


Figura 5

se sigue de (8) que la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}. \quad (12)$$

Desgraciadamente, las variables en (12) no se pueden separar, así que sin técnicas adicionales para su resolución no podemos seguir por ese camino. Ahora bien, si usamos coordenadas polares, la ecuación de la familia (6) se puede escribir

$$r = 2c \cos \theta. \quad (13)$$

De ahí deducimos que

$$\frac{dr}{d\theta} = -2c \operatorname{sen} \theta, \quad (14)$$

y tras eliminar c de (13) y (14) llegamos a

$$\frac{rd\theta}{dr} = -\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

como ecuación diferencial de la familia dada. En consecuencia,

$$\frac{r d\theta}{dr} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

es la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales. En este caso las variables pueden separarse,

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos \theta d\theta}{\operatorname{sen} \theta};$$

e integrando se convierte en

$$\operatorname{log} r = \operatorname{log} (\operatorname{sen} \theta) + \operatorname{log} 2c,$$

de modo que

$$r = 2c \operatorname{sen} \theta \quad (15)$$

es la ecuación de las trayectorias ortogonales. Nótese que (15) es la ecuación de la familia de todos los círculos tangentes al eje x en el origen (véanse las curvas punteadas en la Figura 3).

En el Capítulo 2 desarrollaremos varios métodos más elaborados para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Puesto que nuestra atención está dirigida en este momento más a las aplicaciones que a las técnicas formales, todos los problemas planteados en este capítulo son resolubles por separación de variables.

PROBLEMAS

- Dibujar un esbozo de las siguientes familias uniparamétricas de curvas, hallar sus trayectorias ortogonales y añadirlas al gráfico.
 - $xy = c;$
 - $y = cx^2;$
 - $r = c(1 + \cos \theta);$
 - $y = ce^x.$
- ¿Cuáles son las trayectorias ortogonales de la familia de curvas (a) $y = cx^4$; (b) $y = cx^n$, donde n es cualquier entero positivo? En ambos casos, dibujar las familias de curvas. ¿Qué efecto tiene sobre las trayectorias ortogonales el aumentar n ?
- Probar que el método para hallar trayectorias ortogonales en polares puede expresarse como sigue. Si $dr/d\theta = F(r, \theta)$ es la ecuación diferencial de la familia de curvas dada, entonces $dr/d\theta = -r^2/F(r, \theta)$ es la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales. Aplicar este método a la familia de círculos $r = 2c \operatorname{sen} \theta$.

4. Hallar, usando coordenadas polares, las trayectorias ortogonales de la familia de paráolas $r = c/(1 - \cos \theta)$, $c > 0$. Dibujar ambas familias de curvas.
5. Esbozar la familia $y^2 = 4c(x + c)$ de todas las paráolas con eje en el eje x y foco en el origen y hallar la ecuación diferencial de la familia. Probar que esta ecuación diferencial queda inalterada si sustituimos dy/dx por $-dx/dy$. ¿Qué se puede concluir de tal resultado?
6. Hallar las curvas que satisfacen cada una de las condiciones geométricas siguientes:
 - (a) La porción de la tangente limitada por los ejes tiene como punto central al punto de tangencia.
 - (b) La proyección sobre el eje x de la parte de la normal entre (x, y) y el eje x tiene longitud 1.
 - (c) La proyección sobre el eje x de la parte de la tangente entre (x, y) y el eje x tiene longitud 1.
 - (d) La porción de la tangente entre (x, y) y el eje x queda partida por la mitad por el eje y .
 - (e) La parte de la normal entre (x, y) y el eje y queda bisectada por el eje x .
 - (f) (x, y) equidista del origen y del punto de intersección de la normal con el eje x .
 - (g) El ángulo polar es igual al que forma la tangente con el radio polar.
 - (h) El ángulo entre el radio polar y la tangente es constante.
7. Una curva arranca desde el origen por el primer cuadrante. El área bajo la curva desde $(0, 0)$ hasta (x, y) es un tercio del área del rectángulo que tiene a esos puntos como vértices opuestos. Hallar la ecuación de esa curva.
8. Tres vértices de un rectángulo de área A están sobre el eje x , en el origen y sobre el eje y . Si el cuarto se desplaza sobre una curva $y = y(x)$ en el primer cuadrante de manera tal que el ritmo de cambio de A respecto de x es proporcional a A , hallar la ecuación de esa curva.
9. Una silla de montar que tiene la forma de la superficie $z = y^2 - x^2$ está a la intemperie, bajo la lluvia. Hallar las trayectorias que seguirán las gotas de agua que caen por ella. Esbozar un gráfico para convencerse de que la respuesta es razonable.
10. Hallar la ecuación diferencial de cada una de las siguientes familias uniparamétricas de curvas:
 - (a) $y = x \operatorname{sen}(x + c)$;
 - (b) todos los círculos que pasan por $(1, 0)$ y $(-1, 0)$;
 - (c) todos los círculos con centros en la recta $y = x$ que son tangentes a ambos ejes;
 - (d) todas las rectas tangentes a la parábola $x^2 = 4y$ [ayuda: la pendiente de la recta tangente en $(2a, a^2)$ es a];
 - (e) todas las rectas tangentes al círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$.
11. En el apartado (d) del Problema 10, probar que la propia parábola es una curva integral de la ecuación diferencial de la familia de todas sus rectas tangentes, y que, por tanto, por cada punto de la parábola pasan *dos* curvas integrales de esa ecuación diferencial. Idem para el círculo unidad del apartado (e) del Problema 10.

4. CRECIMIENTO, DESINTEGRACION, REACCIONES QUÍMICAS Y MEZCLAS

Recordemos al lector que el número e se define como el límite

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

o más generalmente (poner $h = 1/n$) por

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h}. \quad (1)$$

En palabras, eso significa que e es el límite de 1 más un número pequeño, elevado a la potencia recíproca de ese número pequeño, cuando éste tiende a cero.

Recordemos también del cálculo que la importancia del número e se debe principalmente a que la función exponencial $y = e^x$ queda invariante bajo derivación:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

Una afirmación equivalente consiste en decir que $y = e^x$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Más en general, si k es cualquier constante no nula, todas las funciones $y = ce^{kx}$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = ky. \quad (2)$$

Es fácil verificarlo por derivación y se puede descubrir separando variables e integrando:

$$\frac{dy}{y} = k dx, \quad \log y = kx + c_0, \quad y = e^{kx+c_0} = e^{c_0}e^{kx} = ce^{kx}.$$

Además, no es difícil demostrar que esas funciones son las *únicas* soluciones de la ecuación (2) [véase Problema 1]. En esta sección discutimos una gama sorprendentemente amplia de aplicaciones de estos hechos en varias disciplinas científicas.

Ejemplo 1. Interés compuesto continuo. Si se depositan P dólares en un banco que paga una tasa anual de interés del 6 por 100, compuesto semestralmente, entonces tras t años el capital acumulado será

$$A = P(1 + 0,03)^{2t}.$$

En general, si la tasa de interés es $100k$ ($k = 0,06$ para el 6 por 100), y si ese interés se compone n veces al año, tras t años el capital acumulado será

$$A = P\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nt}.$$

Si se hace crecer n de modo que el interés se compone con frecuencia cada vez mayor, tendremos al caso límite en que el interés se compone continuamente⁷. Para hallar la fórmula correspondiente a esta situación, observemos que (1) da

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nt} = \left[\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nk}\right]^{kt} \rightarrow e^{kt},$$

luego

$$A = Pe^{kt}. \quad (3)$$

Describimos esta situación diciendo que la cantidad A crece exponencialmente, o que es un ejemplo de *crecimiento exponencial*. Para comprender el significado de la constante k desde otro punto de vista, derivemos (3) para obtener

$$\frac{dA}{dt} = Pke^{kt} = kA.$$

Si escribimos esta ecuación diferencial para A en la forma

$$\frac{dA/A}{dt} = k,$$

vemos que k viene a ser el *cambio relativo de A por unidad de tiempo*, y $100k$ es el *porcentaje de cambio de A por unidad de tiempo*.

Ejemplo 2. Crecimiento de población. Supongamos que se colocan x_0 bacterias en una solución nutritiva en el instante $t = 0$ y que $x = x(t)$ es la población del cultivo en el instante t . Si el alimento y el espacio son ilimitados, y si como consecuencia la población está creciendo en todo momento a un ritmo proporcional a la población presente en ese momento, hallar x como función de t ⁸.

⁷ Algunos bancos abonan intereses diariamente, con lo que $n = 365$. Este número es lo bastante grande como para que el interés continuo sea un modelo muy correcto de lo que en realidad ocurre.

⁸ Brevemente, esta afirmación significa que esperamos doble número de «nacimientos» en un corto intervalo de tiempo cuando hay presente un número doble de bacterias en el cultivo.

Dado que el ritmo de crecimiento de x es proporcional a la propia x , podemos escribir la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Separando variables e integrando deducimos

$$\frac{dx}{x} = k dt, \quad \log x = kt + c.$$

Como $x = x_0$ cuando $t = 0$, tenemos $c = \log x_0$, así que $\log x = kt + \log x_0$ y

$$x = x_0 e^{kt}. \quad (4)$$

Tenemos un nuevo ejemplo de crecimiento exponencial.

Con el fin de concretar más estas ideas, supongamos que la población humana crece de este modo. Según los expertos en demografía de los EE.UU., esta población está creciendo a una tasa media de aproximadamente el 2 por 100 anual, luego $k = 0,02 = 1/50$ y (4) se convierte en

$$x = x_0 e^{t/50}. \quad (5)$$

Para hallar el tiempo T necesario para que se duplique la población mundial, sustituimos (5) por

$$2x_0 = x_0 e^{T/50}.$$

De ahí que $T/50 = \log 2$, luego

$$T = 50 \log 2 \approx 34,65 \text{ años}$$

ya que $\log 2 \approx 0,693^9$.

Ejemplo 3. Desintegración radiactiva. Si las moléculas de cierto tipo tienen tendencia a desintegrarse en moléculas más pequeñas a un ritmo que no se ve afectado por la presencia de otras sustancias, es natural esperar que el número de moléculas que se descomponen en una unidad de tiempo sea proporcional al número total presente. Una reacción química de esta clase se llama una *reacción de primer orden*.

Supongamos, por ejemplo, que x_0 gramos de materia iniciales se descomponen por una reacción de primer orden. Si x denota el número de gramos presentes

⁹ Hay que hacer notar que la población de los países industrializados está creciendo con una tasa no superior al 2 por 100, mientras que los del tercer mundo crecen a un ritmo superior. Desde el punto de vista del desarrollo de la raza humana y sus instituciones políticas y sociales en los próximos siglos, éste es tal vez el hecho aislado más importante en nuestro mundo contemporáneo.

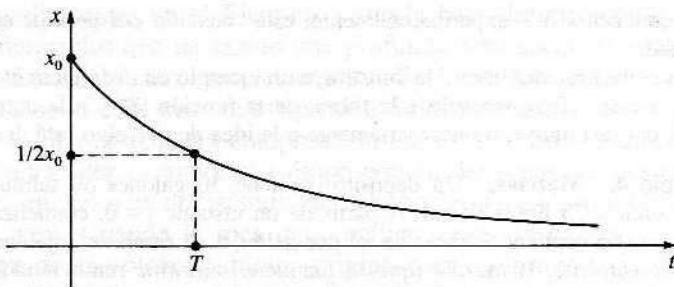


Figura 6

en un instante t posterior, el principio enunciado antes conduce a la ecuación diferencial

$$-\frac{dx}{dt} = kx, \quad k > 0, \quad (6)$$

[Como dx/dt es el ritmo de crecimiento de x , $-dx/dt$ es el de decrecimiento, y (6) dice que el ritmo de decrecimiento es proporcional a x .] Separando variables en (6) e integrando se obtiene

$$\frac{dx}{x} = -k dt, \quad \log x = -kt + c.$$

La condición inicial

$$x = x_0 \quad \text{cuando} \quad t = 0 \quad (7)$$

da $c = \log x_0$, luego $\log x = -kt + \log x_0$ y

$$x = x_0 e^{-kt}. \quad (8)$$

Esta función es, por tanto, la solución de la ecuación diferencial (6) que satisface la condición inicial (7). Su gráfico puede verse en la Figura 6. La constante positiva k se llama la *constante de ritmo*, porque su valor mide el ritmo al que se produce la reacción. Como sabemos por el Ejemplo 1, k puede interpretarse como la pérdida relativa de x por unidad de tiempo.

Se conocen muy pocas reacciones químicas de primer orden, y la más importante con mucho es la *desintegración radiactiva*. Conviene expresar el ritmo de desintegración de un elemento radiactivo en términos de su *semivida*, que es el tiempo requerido para que la cantidad de la sustancia se reduzca a la mitad. Sustituyendo x por $x_0/2$ en (8) llegamos a la expresión

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kT}$$

para la semivida T , de manera que

$$kT = \log 2.$$

Si se conocen k o T experimentalmente, esta ecuación nos permite calcular la otra cantidad.

La situación aquí discutida constituye un ejemplo de *decrecimiento exponencial*. Esta frase se refiere tan sólo a la forma de la función (8) y a la manera en que la cantidad x disminuye, no necesariamente a la idea de que algo esté desintegrándose.

Ejemplo 4. Mezclas. Un depósito contiene 50 galones de salmuera en el que hay disueltas 75 libras de sal. A partir de un instante $t = 0$, comienza a fluir en él salmuera que contiene 3 libras de sal por galón, a un ritmo de 2 galones por minuto. Simultáneamente, la mezcla (que se mantiene uniforme removiéndola) escapa del depósito al mismo ritmo. ¿Cuándo habrá 125 libras de sal disuelta en el depósito? ¿Cuánta sal se habrá disuelto transcurrido un largo tiempo?

Si $x = x(t)$ es el número de libras de sal disuelta en el depósito en el instante $t \geq 0$, la concentración en ese momento es $x/50$ libras por galón. El ritmo de cambio de x es

$$\frac{dx}{dt} = \text{ritmo de entrada de la sal} - \text{ritmo de salida de la sal}.$$

Como

$$\text{ritmo de entrada} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ lb/min}$$

y

$$\text{ritmo de salida} = (x/50) \cdot 2 = \frac{x}{25} \text{ lb/min},$$

resulta

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{x}{25} = \frac{150 - x}{25}.$$

Separando variables e integrando vemos que

$$\frac{dx}{150 - x} = \frac{1}{25} dt, \quad \text{luego} \quad \log(150 - x) = -\frac{1}{25} t + c.$$

Dado que $x = 75$ en $t = 0$, vemos que $c = \log 75$, así que

$$\log(150 - x) = -\frac{1}{25} t + \log 75,$$

y, por tanto,

$$150 - x = 75e^{-t/25} \quad \text{o sea} \quad x = 75(2 - e^{-t/25}).$$

Esto nos dice que $x = 125$ implica $e^{t/25} = 3$, o sea, $t/25 = \log 3$. Concluimos que $x = 125$ libras tras

$$t = 25 \log 3 \cong 27,45 \text{ minutos},$$

ya que $\log 3 \cong 1,0986$. Además, cuando t es muy grande se ve que x es aproximadamente $75 \cdot 2 = 150$ libras, tal como el sentido común dicta sin cálculo alguno.

Las ideas discutidas en el Ejemplo 3 son la base de un método científico de reciente desarrollo que ha tenido una profunda relevancia en geología y en arqueología. Esencialmente, los elementos radiactivos que se encuentran en la naturaleza (de semividas conocidas) pueden utilizarse para fechar sucesos que ocurrieron con una antigüedad comprendida entre unos miles y unos miles de millones de años. Por ejemplo, el isótopo común del uranio se desintegra tras varios pasos en helio y un isótopo del plomo, con una semivida de 4.500 millones de años. Cuando la roca que contiene uranio está fundida, como la lava que fluye de un volcán, el plomo originado en ese proceso se dispersa por las corrientes de la lava; pero después de que la roca solidifica, el plomo queda acumulándose junto al uranio que lo produce. Un trozo de granito puede analizarse para determinar la relación entre plomo y uranio, y este cociente permite estimar el tiempo transcurrido desde el instante en que el granito cristalizó. Existen en la actualidad varios métodos de fechado que utilizan la desintegración del torio y de los isótopos del uranio en isótopos del plomo. Otro método usa la desintegración del potasio en argón, con una semivida de 1.300 millones de años; y todavía uno más, preferido para datar las rocas más antiguas, se basa en la desintegración del rubidio en estroncio, con una semivida de 50.000 millones de años. Estos estudios son complejos y están sujetos a errores de varias clases, pero pueden contrastarse entre sí y son capaces de proporcionar fechas razonables para muchos acontecimientos de la historia geológica ligados a la formación de las rocas ígneas. Rocas de millones de años son muy jóvenes, las de edades de cientos de millones de años son comunes, y las más antiguas descubiertas datan de hace unos 3.000 millones de años. Ello da, claro está, una cota inferior a la edad de la tierra misma. Otras investigaciones, que utilizan diversos tipos de datos astronómicos, determinación de la edad de minerales de meteoritos, etc., han sugerido una edad probable para la tierra de unos 4.500 millones de años¹⁰.

Los elementos radiactivos mencionados antes se desintegran tan lentamente que no sirven para datar sucesos relativamente recientes. Este vacío lo llenó el descubrimiento, debido a Willard Libby, al final de los años 1940, del *radiocarbono*, un isótopo radiactivo del carbono con una semivida de unos 5.600 años. Hacia 1950, Libby y sus colaboradores habían puesto a punto la técnica de la *datación por carbono*, que añadió una segunda manecilla al lento devenir del reloj geológico e hizo posible fechar sucesos de la última Edad del hielo y algunos desplazamientos y actividades del hombre prehistórico. Las contribuciones de esta técnica a la geología del Pleistoceno tardío y a la arqueología han sido espectaculares.

En resumen, los hechos y principios involucrados son éstos. El radiocarbono se produce en la alta atmósfera por la acción de los rayos cósmicos sobre el nitrógeno. Este radiocarbono pasa por oxidación a dióxido de carbono, que se mezcla por el viento con el dióxido de carbono no radiactivo ya presente. Como

¹⁰ Para una discusión de todo esto, así como de muchos otros métodos y resultados de la geocronología, véase F. E. Zeuner, *Dating the Past*, 4.^a ed., Methuen, Londres, 1958.

se está formando radiocarbono continuamente y volviéndose a transformar en nitrógeno, su proporción en el carbono ordinario de la atmósfera ha alcanzado hace tiempo un estado de equilibrio. Todas las plantas incorporan esa proporción de radiocarbono en sus tejidos, así como los animales que comen plantas. Mientras el animal o la planta vive, esa proporción permanece constante, pero al morir cesa la absorción de radiocarbono, a la vez que el que había en el momento de su muerte sigue desintegrándose. Así pues, si un fragmento de madera antigua tiene la mitad de radiactividad que un árbol vivo, vivió hace unos 5.600 años, y si sólo tiene la cuarta parte, vivió hace unos 11.200 años. Esto proporciona un método para datar cualquier objeto antiguo de origen orgánico, como madera, carbón, fibra vegetal, huesos, cuernos o piel. La fiabilidad del método ha sido comprobada aplicándolo a la madera del centro de los troncos de secuoyas gigantes, cuyos círculos de crecimiento recogen de 3.000 a 4.000 años de vida, y a piezas de tumbas egipcias cuya edad era ya conocida de antemano. Pese a algunas dificultades técnicas, el método está considerado hoy capaz de dar una precisión razonable en períodos de tiempo no demasiado grandes (inferiores a 50.000 años).

La datación por carbono se ha aplicado a miles de muestras, y existen docenas de laboratorios especializados en tal menester. Entre las estimaciones más interesantes cabe citar: retazos de lino de los rollos del Libro de Isaías del Mar Muerto, hallados recientemente en una caverna de Palestina, que se piensa son del primer o segundo siglo antes de Cristo, 1917 ± 200 años; carbón de la cueva de Lascaux en el sur de Francia, famosa por sus pinturas prehistóricas, 15516 ± 900 años; carbón del monumento prehistórico de Stonehenge, en el sur de Inglaterra, 3798 ± 275 años; carbón de un árbol quemado en la explosión volcánica que formó el lago Cráter en Oregón, 6453 ± 250 años. Asentamientos de hombres antiguos en el hemisferio norte han sido datados mediante trozos de carbón, fibras de sandalias, fragmentos de huesos de bisonte quemados, y cosas por el estilo. Los resultados sugieren que los seres humanos no llegaron al Nuevo Mundo hasta la última Edad del hielo, hace unos 25.000 años, cuando el nivel del agua de los océanos era sensiblemente inferior al actual y pudieron cruzar a pie por el Estrecho de Bering, desde Siberia hasta Alaska¹¹.

PROBLEMAS

- Si k es una constante no nula, probar que las funciones $y = ce^{kx}$ son las únicas soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = ky.$$

¹¹ Libby ganó el Premio Nobel de Química a consecuencia del trabajo aquí descrito. Su propia presentación del método, con sus dificultades y sus logros, puede encontrarse en su libro *Radiocarbon Dating*, 2.^a ed., University of Chicago Press, 1955.

Ayuda: Suponer que $f(x)$ es solución de esa ecuación y probar que $f(x)/e^{kx}$ es una constante.

2. Se depositan P dólares en un banco que paga una tasa de interés de r por 100 compuesto continuamente.
 - (a) Hallar el tiempo T requerido para doblar el capital, en función de la tasa r .
 - (b) Hallar la tasa de interés necesaria para que el capital se duplique en diez años.
3. Un brillante ejecutivo, con intuición pero sin capital inicial, hace depósitos de D dólares al año a una tasa de interés de $100k$ por 100. Supóngase que tanto los depósitos como el abono de intereses son continuos.
 - (a) Hallar el capital A acumulado en cualquier tiempo t .
 - (b) Si la tasa es de 6 por 100, ¿cuánto ha de ser D para disponer de un millón de dólares al cabo de 40 años?
 - (c) Si nuestro ejecutivo es lo bastante listo como para encontrar una inversión que le paga el 10 por 100 de interés, ¿cuánto debe ser D para lograr el millón de dólares al cabo de 40 años? (Conviene hacer notar que si esa cantidad de dinero se guarda simplemente sin ningún tipo de interés, la suma total al final de los 40 años sería de 80.000 dólares.)
4. Un jubilado invierte sus ahorros de P dólares al $100k$ por 100 de interés anual compuesto continuamente. Para sus gastos va sacando cada año W dólares.
 - (a) Hallar el capital A acumulado en el tiempo t .
 - (b) Hallar para qué retirada anual W_0 permanecería A constante.
 - (c) Si W es mayor que ese valor W_0 , A decrecerá y finalmente desaparecerá. ¿Cuánto tardará en ocurrir esto?
 - (d) Calcular el tiempo del apartado (c) para una tasa del 5 por 100 de interés y $W = 2W_0$.
5. Un magnate posee una fortuna que crece a un ritmo proporcional al cuadrado de su valor en cada momento. Si tenía 10 millones de dólares hace un año y hoy tiene 20 millones, ¿cuál será su fortuna dentro de 6 meses? ¿Y dentro de un año?
6. Un cultivo de bacterias de población x crece a un ritmo proporcional a x . Entre las 6 P.M. y las 7 P.M. la población se triplica. ¿A qué hora será cien veces mayor que la que había a las 6 P.M.?
7. La población de una ciudad minera crece a un ritmo proporcional a dicha población. En dos años la población se ha doblado, y un año más tarde había 10.000 habitantes. ¿Cuál era la población inicial?
8. Los expertos en agricultura estiman que se necesita un tercio de acre de tierra para alimentar a una persona continuamente, y se estima que hay 10.000 millones de acres de tierra laborable en la tierra, con lo que se puede alimentar a una población de 30.000 millones como máximo, si no existen otras fuentes de alimentación. Al comienzo de 1970 la población mundial era de 3.600 millones. Supuesto que crezca a una tasa del 2 por 100 anual, ¿cuándo estará la tierra al completo? ¿Cuál será su población el año 2000?
9. Un moho crece a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Inicialmente había 2 gramos. En dos días ha pasado a haber 3 gramos.

- (a) Si $x = x(t)$ es la masa de moho en el instante t , probar que $x = 2(3/2)^{t/2}$.
 (b) Calcular la cantidad al cabo de diez días.
10. En el Ejemplo 2, supongamos que el espacio disponible para el cultivo de bacterias es limitado y que el alimento se le suministra a ritmo constante, de manera que la competición por ambos elementos actúa de modo tal que la población se estabilizará a un cierto nivel constante x_1 (se puede interpretar x_1 como la máxima población admisible en esas circunstancias). Supongamos además que, bajo estas condiciones, la población crece a un ritmo proporcional al producto de x y de la diferencia $x_1 - x$. Hallar x en función de t . Esbozar un gráfico de esa función. ¿En qué momento está creciendo más rápidamente la población?
11. La fisión nuclear produce neutrones en una pila atómica a un ritmo proporcional al número de neutrones presentes en cada momento. Si hay n_0 neutrones inicialmente y hay n_1 y n_2 , respectivamente, en los instantes t_1 y t_2 , demostrar que
- $$\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{t_2} = \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^{t_1}.$$
12. Si la mitad de cierta cantidad de radio se desintegra en 1.600 años, ¿qué porcentaje de la cantidad original quedará al cabo de 2.400 años? ¿Y de 8.000 años?
13. Si la semivida de una sustancia radiactiva es de veinte días, ¿cuánto tardará en desintegrarse el 90 por 100 de ella?
14. Un campo de trigo rebosante de saltamontes se fumiga con un insecticida que tiene una efectividad de 200 por 100 por hora. ¿Qué porcentaje de saltamontes seguirá con vida una hora más tarde?
15. El uranio 238 se desintegra a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Si hay x_1 y x_2 gramos en los instantes t_1 y t_2 , probar que la semivida es
- $$\frac{(t_2 - t_1) \log 2}{\log(x_1/x_2)}.$$
16. Supongamos que dos sustancias químicas en solución reaccionan para formar un compuesto. Si la reacción se produce por colisión e interacción de las moléculas, es de esperar que el ritmo de formación de dicho compuesto sea proporcional al número de colisiones por unidad de tiempo, que es a su vez proporcional a las cantidades de cada sustancia que todavía no se han transformado. Una tal reacción química se dice de *segundo orden*, y tal ley de reacción se llama con frecuencia *ley de acción de masas*. Considérese una reacción de segundo orden en la que x gramos del compuesto contienen ax gramos de la primera sustancia y bx gramos de la segunda, siendo $a + b = 1$. Si inicialmente hay presentes aA gramos de la primera y bB gramos de la segunda, y si $x = 0$ cuando $t = 0$, hállese x en función del tiempo t ¹².

¹² Los estudiantes especialmente interesados en reacciones químicas de primer y segundo orden encontrarán una discusión mucho más pormenorizada debida a Linus Pauling, probablemente el más grande de los químicos del siglo XX, en su libro *General Chemistry*, 3.^a ed., W. H. Freeman y Co., San Francisco, 1970. Véase en particular el capítulo «The Rate of Chemical Reactions», que es el Capítulo 16 en la tercera edición.

17. Muchas sustancias se disuelven en agua a un ritmo conjuntamente proporcional a la cantidad no disuelta y a la diferencia entre la concentración de una solución saturada y la concentración en ese momento. Para una tal sustancia, colocada en un depósito que contiene G galones de agua, hallar la cantidad x no disuelta en el instante t si $x = x_0$ cuando $t = 0$ y $x = x_1$ cuando $t = t_1$, y si es S la cantidad disuelta en el depósito cuando la solución está saturada.
18. Supongamos que una población dada puede dividirse en dos grupos: los que padecen cierta infección y los que todavía no la padecen pero pueden adquirirla por contagio de los anteriores. Si x e y son las proporciones de población afectada y no afectada, entonces $x + y = 1$. Supongamos que (1) la enfermedad se propaga por los contactos ya mencionados entre personas enfermas y sanas, (2) que el ritmo dx/dt de propagación es proporcional al número de tales contactos, y (3) que los dos grupos se relacionan libremente, de modo que el número de contactos es conjuntamente proporcional a x e y . Si $x = x_0$ cuando $t = t_0$, hallar x como función de t , dibujar su gráfica y usar esa función para demostrar que finalmente la enfermedad se extenderá por toda la población.
19. Un depósito contiene 100 galones de salmuera en la que hay disueltas 40 libras de sal. Se desea reducir la concentración de sal hasta 0,1 libras por galón, y ello vertiendo en el depósito agua pura a razón de 5 galones por minuto y permitiendo que salga la misma cantidad, mientras se mantiene uniforme la mezcla removiéndola. ¿Cuánto tiempo tardará en conseguirse el propósito?
20. Un acuario contiene 10 galones de agua contaminada. Se procede a cambiar 5 galones de agua contaminada por agua limpia. ¿Cuánto tiempo tardará en reducirse la polución a la mitad?
21. Se está celebrando una fiesta en una habitación que contiene 1.800 pies cúbicos de aire libre de monóxido de carbono. En el instante $t = 0$ varias personas comienzan a fumar. El humo, que contiene 6 por 100 de monóxido de carbono, se introduce en la habitación a razón de 0,15 pies cúbicos por minuto, y la mezcla, removida por ventilación, sale a ese mismo ritmo por una ventana entreabierta. ¿Cuándo deberá abandonar una persona prudente esa fiesta, si el nivel de monóxido de carbono comienza a ser peligroso a partir de una concentración de 0,00018?
22. Según la *ley de absorción de Lambert*, el porcentaje de luz incidente que es absorbida por una fina lámina de material translúcido es proporcional al grosor de la lámina¹³. Si la luz solar que incide verticalmente sobre el mar se reduce en intensidad a la mitad a los 10 pies de profundidad, ¿a qué profundidad se habrá reducido a un dieciseisavo? Resolver el problema pensando simplemente sobre él, y también estableciendo una ecuación diferencial y resolviéndola.
23. Si luz solar incidente verticalmente sobre un lago reduce su intensidad inicial I_0 a tres quintos a una profundidad de 15 pies, calcular su intensidad a profundidades de 30 y 60 pies. Idem a 50 pies.

¹³ Johann Heinrich Lambert (1728-1777) fue un astrónomo germano-suizo, matemático, físico y hombre de gran cultura. Esencialmente autodidacta, publicó trabajos acerca de las órbitas de los cometas, la teoría de la luz y la cartografía. La proyección isoareal de Lambert es bien conocida en este último campo. Entre los matemáticos se le recuerda por haber demostrado la irracionalidad de π .

24. Consideremos una columna de aire de una pulgada cuadrada de sección, extendiéndose desde el nivel del mar hasta «el infinito». La presión atmosférica a una altura h sobre el nivel del mar es el peso de esta columna de altura h . Suponiendo que la densidad del aire es proporcional a la presión, probar que p satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dh} = -cp, \quad c > 0,$$

y obtener la fórmula $p = p_0 e^{-ch}$, donde p_0 es la presión atmosférica al nivel del mar.

25. Supongamos que un cuerpo caliente se enfriá a un ritmo proporcional a la diferencia de temperatura respecto del ambiente (*ley del enfriamiento de Newton*¹⁴). Un cuerpo se calienta a 110 °C y se coloca en aire a 10 °C. Tras una hora su temperatura es de 60 °C. ¿Cuánto tiempo tarda todavía en alcanzar los 30 °C?
26. Un cuerpo de temperatura desconocida se coloca en un frigorífico que se mantiene a temperatura constante de 0 °F. Tras 15 minutos, el cuerpo está a 30 °F, y después de 30 minutos está ya a 15 °F. ¿Cuál era su temperatura inicial? Resolver este problema primero por simple reflexión y después mediante una adecuada ecuación diferencial.
27. Una olla de sopa, inicialmente hirviendo, se enfriá en aire a 0 °C, y a los 30 minutos está a una temperatura de 20 °C. ¿Cuánto se enfriará en los siguientes 30 minutos?
28. Por razones obvias, la sala de disección de un forense se mantiene fría a una temperatura constante de 5 °C (= 41 °F). Mientras se encontraba realizando la autopsia de la víctima de un asesinato, el propio forense es asesinado, y el cuerpo de la víctima robado. A las 10 A.M. el ayudante del forense descubre su cadáver a una temperatura de 23 °C. A mediodía, su temperatura es de 18,5 °C. Supuesto que el forense tenía en vida la temperatura normal de 37 °C (= 98,6 °F), ¿a qué hora fue asesinado?¹⁵
29. El radiocarbono de la madera viva se desintegra a un ritmo de 15,30 desintegraciones por minuto (dpm) por gramo de carbono. Tomando 5.600 años como semivida del radiocarbono, estimar la edad de cada uno de los siguientes objetos descubiertos por los arqueólogos y analizados por radiactividad en 1950:
- (a) un fragmento de pata de silla de la tumba de Tutankhamón, 10,14 dpm;
 - (b) un trozo de viga de una casa construida en Babilonia durante el reinado de Hamurabi, 9,52 dpm;
 - (c) estiércol de un perezoso gigante hallado 6 pies y 4 pulgadas por debajo del nivel del suelo dentro de la Cueva Gypsum, en Nevada, 4,17 dpm;
 - (d) una flecha encontrada en Leonard Rock Shelter, en Nevada, 6,42 dpm.

¹⁴ Newton aplicó esta ley para estimar la temperatura de una bola de hierro al rojo vivo. Se conocía tan poco sobre las leyes de trasmisión del calor en ese tiempo que este resultado, no siendo sino una aproximación grosera, mejoraba cuanto se sabía hasta entonces.

¹⁵ La idea de este problema se debe a James F. Hurley, «An Application of Newton's Law of Cooling», *The Mathematics Teacher*, vol. 67 (1974), págs. 141-142.

5. CAIDA DE CUERPOS Y OTROS PROBLEMAS DE MOVIMIENTO

En esta sección estudiamos el problema dinámico de determinar el movimiento de una partícula, bajo la acción de una fuerza dada, a lo largo de cierta trayectoria. Consideraremos sólo dos casos sencillos: un camino vertical por el que la partícula está en caída libre bajo la acción de la gravedad o bien teniendo en cuenta la resistencia del aire; y un camino circular, tipificado por el péndulo.

Caída libre. El problema de un cuerpo en caída libre fue tratado en la Sección 1, y llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g \quad (1)$$

para este movimiento, donde y es la distancia medida hacia abajo a partir de cierta altura prefijada. Una integración nos da la velocidad,

$$v = \frac{dy}{dt} = gt + c_1. \quad (2)$$

Como la constante c_1 es claramente el valor de v cuando $t = 0$, no es sino la velocidad inicial v_0 , con lo que (2) se convierte en

$$v = \frac{dy}{dt} = gt + v_0. \quad (3)$$

Una nueva integración conduce a

$$y = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + c_2.$$

La constante c_2 es el valor de y cuando $t = 0$, o sea, la posición inicial y_0 , de manera que se obtiene finalmente

$$y = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + y_0 \quad (4)$$

como solución general de (1). Si el cuerpo cae partiendo del reposo en $y = 0$, de modo que $v_0 = y_0 = 0$, entonces (3) y (4) se reducen a

$$v = gt, \quad y = \frac{1}{2} gt^2.$$

Eliminando t llegamos a la ecuación

$$v = \sqrt{2gy} \quad (5)$$

para la velocidad alcanzada en términos de la distancia caída. Este útil resultado puede deducirse también del *principio de conservación de la energía*, que afirma que

$$\text{energía cinética} + \text{energía potencial} = \text{constante}$$

Como nuestro cuerpo cae partiendo del reposo en $y = 0$, el hecho de que lo que gana en energía cinética coincide con lo que pierde en energía potencial nos permite escribir

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgy,$$

de donde se sigue (5).

Caída retardada. Si suponemos que el aire ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad del cuerpo que cae, la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - c \frac{dy}{dt}, \quad (6)$$

donde $c = k/m$ [véase la ecuación 1-(3)]. Si sustituimos dy/dt por v , esto pasa a ser

$$\frac{dv}{dt} = g - cv. \quad (7)$$

Separando variables e integrando obtenemos

$$\frac{dv}{g - cv} = dt$$

y

$$-\frac{1}{c} \log(g - cv) = t + c_1,$$

luego

$$g - cv = c_2 e^{-ct}.$$

La condición inicial $v = 0$ para $t = 0$ nos da $c_2 = g$, así que

$$v = \frac{g}{c} (1 - e^{-ct}). \quad (8)$$

Puesto que c es positivo, $v \rightarrow g/c$ cuando $t \rightarrow \infty$. Este valor límite de v se llama

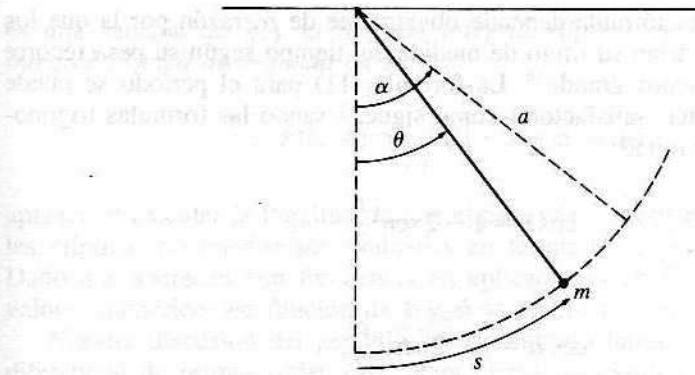


Figura 7

la *velocidad terminal*. Si se desea, se puede sustituir dy/dt por v y efectuar una integración para hallar y como función de t .

Movimiento de un péndulo. Consideremos un péndulo que consta de una pesa de masa m al extremo de una barra de masa despreciable y longitud a . Si se separa la pesa de su posición un ángulo α y se suelta (Fig. 7), por el principio de conservación de la energía tenemos

$$\frac{1}{2} mv^2 = mg(a \cos \theta - a \cos \alpha). \quad (9)$$

Como $s = a\theta$ y $v = ds/dt = a(d\theta/dt)$, esta ecuación da

$$\frac{1}{2} a^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = ga(\cos \theta - \cos \alpha); \quad (10)$$

despejando dt y teniendo en cuenta que θ decrece al crecer t (para t pequeños) concluimos que

$$dt = - \sqrt{\frac{a}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}.$$

Si denotamos por T el *período*, es decir, el tiempo requerido para efectuar una oscilación completa, entonces

$$\frac{T}{4} = - \sqrt{\frac{a}{2g}} \int_{\alpha}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}},$$

es decir,

$$T = 4 \sqrt{\frac{a}{2g}} \int_{0}^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}. \quad (11)$$

El valor de T en esta fórmula depende obviamente de α , razón por la que los relojes de péndulo varían su ritmo de medida del tiempo según su pesa recorre un ángulo más o menos grande¹⁶. La fórmula (11) para el período se puede expresar de forma más satisfactoria como sigue. Usando las fórmulas trigonométricas del ángulo mitad

$$\cos \theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}$$

y

$$\cos \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2},$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} T &= 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(\alpha/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2)}} = \\ &= 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \operatorname{sen}^2(\theta/2)}}, \quad k = \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Ahora cambiamos la variable de θ a ϕ poniendo $\operatorname{sen}(\theta/2) = k \operatorname{sen} \phi$, de modo que ϕ crece de 0 a $\pi/2$ cuando θ crece de 0 a α , y

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = k \cos \phi d\phi,$$

o sea,

$$d\theta = \frac{2k \cos \phi d\phi}{\cos(\theta/2)} = \frac{2\sqrt{k^2 - \operatorname{sen}^2(\theta/2)} d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}.$$

Esto nos permite escribir (12) en la forma

$$T = 4 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} = 4 \sqrt{\frac{a}{g}} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \quad (13)$$

donde

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}$$

¹⁶ Esta dependencia del período respecto de la amplitud es lo que se entiende por «error circular» de los relojes de péndulo.

es una función de k y ϕ llamada *integral elíptica de primera clase*¹⁷. La *integral elíptica de segunda clase*,

$$E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi} d\phi,$$

aparece al calcular la longitud de una elipse (véase Problema 9). Estas integrales elípticas no pueden ser evaluadas en términos de funciones elementales. Dado que aparecen con frecuencia en aplicaciones en física e ingeniería, sus valores numéricos en función de k y ϕ se recogen en las tablas matemáticas.

Nuestra discusión del péndulo se ha centrado hasta ahora en la ecuación diferencial de primer orden (10). Para ciertos propósitos es más conveniente manejar la ecuación diferencial de segundo orden que se deduce de (10) al derivar respecto de t :

$$a \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \operatorname{sen} \theta. \quad (14)$$

Si recordamos ahora que $\operatorname{sen} \theta$ es aproximadamente igual a θ para pequeños valores de θ , la (14) se puede aproximar por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{a} \theta = 0. \quad (15)$$

Veremos más adelante (Sección 11) que la solución general de la importante ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

es

$$y = c_1 \operatorname{sen} kx + c_2 \cos kx,$$

de manera que (15) permite concluir

$$\theta = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{a}} t + c_2 \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t. \quad (16)$$

Exigir que $\theta = \alpha$ y $d\theta/dt = 0$ cuando $t = 0$ implica que $c_1 = 0$ y $c_2 = \alpha$, así que (16) se reduce a

$$\theta = \alpha \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t. \quad (17)$$

¹⁷ En el caso de las integrales elípticas suele violarse la regla habitual permitiendo que figure la misma letra como variable muda y como límite de la integral.

El período de esta solución aproximada de (14) es $2\pi\sqrt{a/g}$. Es interesante hacer notar que ése es precisamente el valor de T que se obtiene de (13) cuando $k = 0$, que es aproximadamente correcto cuando el péndulo efectúa oscilaciones de ángulo muy pequeño.

PROBLEMAS

- Si la resistencia del aire sobre un cuerpo de masa m ejerce en su caída una fuerza retardadora proporcional al cuadrado de la velocidad, la ecuación diferencial (7) se convierte en

$$\frac{dv}{dt} = g - cv^2,$$

donde $c = k/m$. Si $v = 0$ para $t = 0$, hallar v como función de t . ¿Cuál es en este caso la velocidad terminal?

- Un torpedo se mueve a una velocidad de 60 millas/hora en el momento en que se queda sin combustible. Si el agua se opone a su movimiento con una fuerza proporcional a su velocidad y si una milla de recorrido reduce su velocidad a 30 millas/hora, ¿qué distancia recorrerá?¹⁸
- Desde la superficie terrestre se lanza hacia arriba una piedra con velocidad inicial de 128 pies/segundo. Despreciando la resistencia del aire y suponiendo que la única fuerza que actúa sobre la piedra es una fuerza gravitacional constante, hallar la máxima altura alcanzada, el tiempo que tarda en alcanzarla y el tiempo de llegada al suelo. Responder idénticas cuestiones para una velocidad inicial v_0 .
- Se lanza hacia arriba, desde la superficie terrestre, una masa m con velocidad inicial v_0 . Si la resistencia del aire se supone proporcional a la velocidad, con constante de proporcionalidad k , y la única fuerza que actúa además es una fuerza gravitacional constante, probar que la máxima altura alcanzada es

$$\frac{mv_0}{k} - \frac{m^2g}{k^2} \log \left(1 + \frac{kv_0}{mg} \right).$$

Usar la regla de L'Hospital para demostrar que esa cantidad tiende a $v_0^2/2g$, de acuerdo con el resultado del Problema 3.

- La fuerza que la gravedad ejerce sobre un cuerpo de masa m sobre la superficie terrestre es mg . En el espacio, sin embargo, la ley de Newton de la gravitación afirma que esa fuerza varía en proporción inversa al cuadrado de la distancia al centro de la tierra. Si un proyectil disparado desde la tierra hacia arriba ha de continuar su viaje indefinidamente, y si se desprecia la resistencia del aire, probar

¹⁸ En el tratamiento vectorial de problemas dinámicos, suele distinguirse en algunos textos entre las palabras *velocidad* y *rapidez* (=módulo de la velocidad), pero aquí no será necesario, y las utilizaremos indistintamente, como ocurre en nuestro lenguaje cotidiano.

que su velocidad inicial ha de ser al menos $\sqrt{2gR}$, donde R es el radio de la tierra (unas 4.000 millas). Esta *velocidad de escape* es de unas 7 millas/segundo, o sea, 25.000 millas/hora. *Ayuda:* Si x denota la distancia del proyectil al centro de la tierra y $v = dx/dt$ es su velocidad, entonces

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

6. En el Problema 5, si v_e denota la velocidad de escape y $v_0 < v_e$, de modo que el proyectil sube pero no escapa, demostrar que

$$h = \frac{(v_0/v_e)^2}{1 - (v_0/v_e)^2} R$$

es la máxima altura que alcanza antes de regresar a la tierra.

7. Aplicar las ideas del Problema 5 al cálculo de la velocidad alcanzada por un cuerpo que cae libremente partiendo del reposo desde una altura inicial $3R$ sobre la superficie de la tierra. ¿Cuál sería la velocidad al llegar al suelo si el cuerpo cayese desde una altura infinita?
8. En el interior de la tierra la fuerza de la gravedad es proporcional a la distancia al centro. Si se perfora un agujero a través de la tierra, desde un polo al otro, y se deja caer una piedra en el agujero, ¿con qué velocidad llegaría al centro?
9. (a) Probar que la longitud de la porción de elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 (a > b)$ que está en el primer cuadrante es

$$\int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx,$$

siendo e la excentricidad.

- (b) Transformar la integral de (a), mediante el cambio de variable $x = a \operatorname{sen} \phi$, en

$$a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi} d\phi = aE(e, \pi/2),$$

de manera que la longitud total de la elipse es $4aE(e, \pi/2)$.

10. Demostrar que la longitud de un arco de $y = \operatorname{sen} x$ es $2\sqrt{2}E(\sqrt{1/2}, \pi/2)$.
11. Probar que la longitud total de la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ es $4aF(\sqrt{2}, \pi/4)$.
12. Dados el cilindro y la esfera cuyas ecuaciones en coordenadas cilíndricas son $r = a \operatorname{sen} \theta$ y $r^2 + z^2 = b^2$, con $a \leq b$, demostrar que:
- (a) El área de la parte del cilindro que está dentro de la esfera es $4abE(a/b, \pi/2)$.
- (b) El área de la porción de esfera que está dentro del cilindro es $2b^2[\pi - 2E(a/b, \pi/2)]$.

13. Demostrar las siguientes evaluaciones de integrales definidas en términos de integrales elípticas:

$$(a) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{2}F(\sqrt{1/2}, \pi/2) \quad [\text{ayuda: hacer } x = \pi/2 - y, \text{ entonces } \cos y = \cos^2 \phi];$$

$$(b) \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} dx = 2\sqrt{2}E(\sqrt{1/2}, \pi/2) - \sqrt{2} F(\sqrt{1/2}, \pi/2) \quad [\text{ayuda: hacer } \cos x = \cos^2 \phi];$$

$$(c) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 4 \sin^2 x} dx = \sqrt{5}E(\sqrt{4/5}, \pi/2) \quad [\text{ayuda: hacer } x = \pi/2 - \phi].$$

6. LA BRAQUISTOCRONA. FERMAT Y LOS BERNOULLI

Imaginemos un punto A unido por un hilo recto a un punto B más bajo situado en el mismo plano vertical (Fig. 8), y un abalorio que puede deslizar sin rozamiento por él desde A hasta B . Podemos considerar también el caso de un hilo en forma de arco circular, de modo que el movimiento de descenso del abalorio es como el de la pesa de un péndulo. ¿Qué descenso requiere menos tiempo? Puesto que el camino recto es el más corto de los que unen A con B , cabe conjeturar que sea él el que proporciona menor tiempo. No obstante, un momento de reflexión nos vuelve escépticos frente a tal conjectura. Puede lograrse ventaja poniendo el hilo más vertical al comienzo, logrando así que su velocidad aumente de prisa, y con un inicio más rápido es de esperar que alcance antes el punto B , pese a viajar por un camino más largo. Por tales razones, Galileo pensó que descendería más de prisa por el camino circular, y probablemente la mayoría de la gente coincidiría con él.

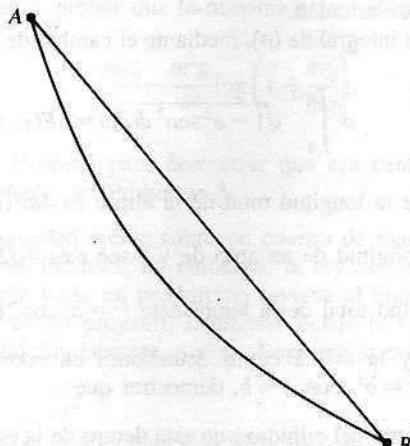


Figura 8

Muchos años después, en 1696, Jean Bernoulli planteó un problema más general. Imaginó un hilo en forma de curva arbitraria y se preguntó qué curva de entre todas las posibles lograría un descenso más rápido del abalorio. Esta curva se conoce como la *braquistócrona* (del griego *bráhistos*, el más corto, y *chronos*, tiempo). En esta sección intentamos comprender la maravillosa solución de Bernoulli a este precioso problema.

Comenzamos considerando un problema de óptica sin relación aparente. La Figura 9 a) ilustra una situación en la que un rayo de luz viaja desde A hasta P con velocidad v_1 y después entra en un medio más denso para ir desde P hasta B a una velocidad menor v_2 . En términos de la notación de la figura, el tiempo total T requerido para el trayecto completo viene dado por

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}.$$

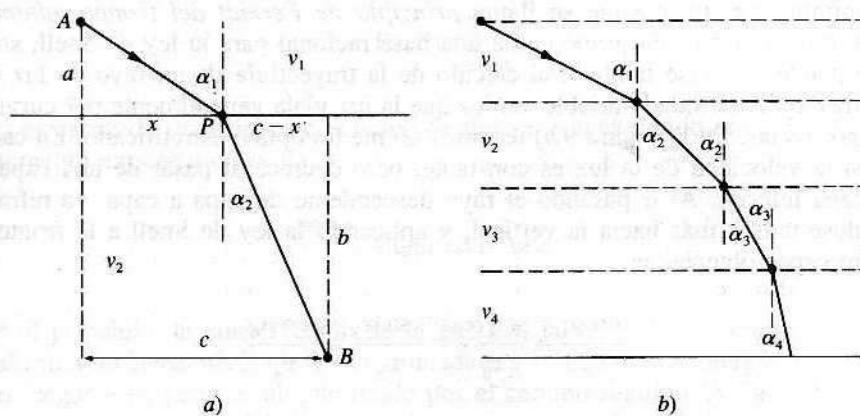


Figura 9

Supuesto que ese rayo de luz sea capaz de seleccionar, de entre todos los caminos posibles entre A y B pasando por P , el que minimice el tiempo T del trayecto, entonces $dT/dx = 0$ y por los métodos del cálculo elemental obtenemos

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

o sea,

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{v_2}.$$

Esta es la *ley de Snell de la refracción*, que originalmente se descubrió experimentalmente en la forma menos sugestiva $\operatorname{sen} \alpha_1/\operatorname{sen} \alpha_2 = \text{constante}$ ¹⁹. La hipótesis de que la luz viaja de un punto a otro a lo largo del camino que exija el mínimo tiempo posible se llama *principio de Fermat del tiempo mínimo*. Este principio no sólo proporciona una base racional para la ley de Snell, sino que puede aplicarse también al cálculo de la trayectoria de un rayo de luz en un medio de densidad variable, en los que la luz viaja generalmente por curvas, no por rectas. En la Figura 9 b) tenemos un medio óptico estratificado. En cada capa la velocidad de la luz es constante, pero decrece al pasar de una capa a la capa inferior. Al ir pasando el rayo descendente de capa a capa, va refractándose más y más hacia la vertical, y aplicando la ley de Snell a la frontera entre capas obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{v_2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_3}{v_3} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_4}{v_4}.$$

Si ahora permitimos a las capas que se hagan más delgadas y numerosas, en el límite la velocidad de la luz decrece de modo continuo conforme el rayo desciende, y concluiremos que

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{v} = \text{una constante}$$

La situación se ilustra en la Figura 9 c), y es lo que ocurre aproximadamente a un rayo de luz solar en caída hacia la tierra e ir atravesando capas de la atmósfera de densidad creciente.

Volviendo al problema de Bernoulli, introducimos un sistema de coordenadas, tal como el de la Figura 10, e imaginamos que el abalorio (como el rayo de

¹⁹ Willebrord Snell (1591-1626) fue un astrónomo y matemático holandés. A los 22 años sucedió a su padre como profesor de matemáticas en Leiden. Su fama se debe sobre todo a su descubrimiento en 1621 de la ley de refracción, que jugó un papel relevante en el desarrollo tanto del cálculo como de la teoría de la luz.

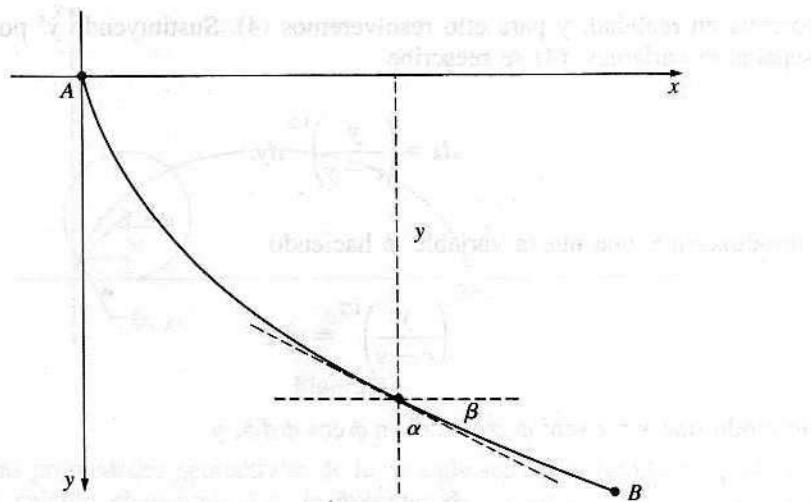


Figura 10

luz) es capaz de seleccionar el camino de descenso más rápido entre A y B . El argumento expuesto antes da

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \text{una constante.} \quad (1)$$

Por el principio de conservación de la energía, la velocidad alcanzada por el abalorio a un cierto nivel viene determinada por su pérdida de energía potencial para llegar a él, pero en ningún modo por el camino seguido. Al igual que en la sección precedente, ello hace que

$$v = \sqrt{2gy}. \quad (2)$$

De la geometría del problema se deduce que

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{\sec \beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}. \quad (3)$$

Combinando las ecuaciones (1), (2) y (3), provenientes de la óptica, la mecánica y el cálculo, obtenemos

$$y[1 + (y')^2] = c \quad (4)$$

como ecuación diferencial de la braquistócrona.

Completamos ahora nuestra discusión investigando qué curva es la braquis-

tócrona en realidad, y para ello resolveremos (4). Sustituyendo y' por dy/dx y separando variables, (4) se reescribe

$$dx = \left(\frac{y}{c-y} \right)^{1/2} dy. \quad (5)$$

Introduzcamos una nueva variable ϕ haciendo

$$\left(\frac{y}{c-y} \right)^{1/2} = \operatorname{tg} \phi \quad (6)$$

de modo que $y = c \operatorname{sen}^2 \phi$, $dy = 2c \operatorname{sen} \phi \cos \phi d\phi$, y

$$\begin{aligned} dx &= \operatorname{tg} \phi dy = \\ &= 2c \operatorname{sen}^2 \phi d\phi = \\ &= c(1 - \cos 2\phi) d\phi. \end{aligned}$$

Integrando queda

$$x = \frac{c}{2}(2\phi - \operatorname{sen} 2\phi) + c_1.$$

Nuestra curva debe pasar por el origen, luego por (6) tenemos $x = y = 0$ cuando $\phi = 0$, y, en consecuencia, $c_1 = 0$. Así pues,

$$x = \frac{c}{2}(2\phi - \operatorname{sen} 2\phi) \quad (7)$$

$$y = c \operatorname{sen}^2 \phi = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\phi). \quad (8)$$

Si ahora hacemos $a = c/2$ y $\theta = 2\phi$, entonces (7) y (8) se convierten en

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta) \quad \text{e} \quad y = a(1 - \cos \theta). \quad (9)$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de la cicloide, que se muestra en la Figura 11, generada por un punto sobre una circunferencia de radio a que rueda por el eje x . Nótese que hay un solo valor de a para el cual el primer arco de la cicloide pasa por B en la Figura 10.

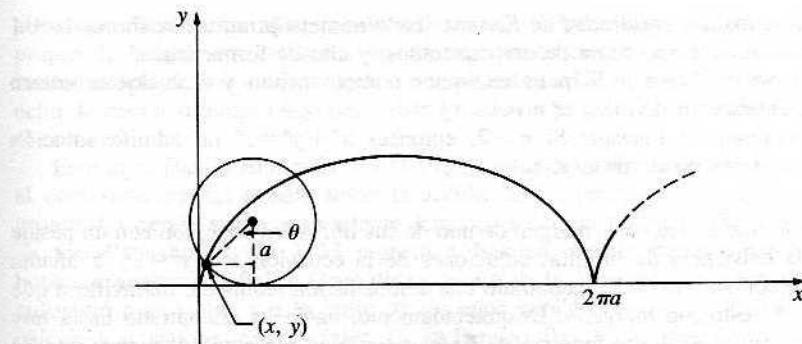


Figura 11

Algunas propiedades geométricas de la cicloide son quizá familiares al lector gracias al cálculo elemental. Así, la longitud de un arco es cuatro veces el diámetro del círculo generador, y el área bajo uno de sus arcos es tres veces el área del círculo. Esta notable curva posee muchas otras propiedades interesantes, geométricas y físicas, algunas de las cuales se describen en los problemas.

Esperamos que los necesarios detalles no hayan enmascarado la belleza de la imaginación del problema de la braquistócrona de Bernoulli y su solución, pues la estructura completa constituye una obra de arte intelectual de alto nivel. Aparte de su interés intrínseco, el problema de la braquistócrona tiene un significado más profundo: fue la fuente histórica del *cálculo de variaciones*, una potente rama del análisis que en tiempos recientes ha penetrado en los rasgos simples ocultos en el corazón del mundo físico. Trataremos este tema en el Capítulo 12, y desarrollaremos un método general para hallar la ecuación (4) que es aplicable a una gran variedad de problemas similares.

NOTA SOBRE FERMAT. Pierre de Fermat (1601-1665) fue tal vez el matemático más grande del siglo XVII, pero su influencia se vio limitada por su desinterés en publicar sus resultados, que son conocidos principalmente por sus cartas a amigos y por anotaciones marginales en los libros que leía. Era jurista de profesión y consejero real en la provincia de Toulouse. Sin embargo, su pasión privada eran las matemáticas. En 1629 inventó la Geometría Analítica, pero el crédito se lo llevó en buena parte Descartes, quien publicó sus ideas, análogas a las de Fermat, en 1637. En ese tiempo, trece años antes de que naciera Newton, Fermat descubrió además un método para hallar las tangentes a curvas y hallar sus máximos y mínimos, que equivalían a los rudimentos del cálculo diferencial. Newton reconoce, en una carta que sólo se conoció en 1934, que algunas de sus ideas sobre ese tema provenían directamente de Fermat. En una serie de cartas escritas en 1654, Fermat y Pascal desarrollaron conjuntamente los conceptos fundamentales de la teoría de las probabilidades. Su descubrimiento en 1657 del principio de tiempo mínimo, y su relación con la refracción de la luz, fue el primer paso hacia una teoría coherente de la óptica. Fue, sin embargo, en la teoría de números donde el genio de Fermat brilló en especial, siendo dudoso que su perspicacia al analizar las propiedades de los familiares pero misteriosos números enteros positivos haya tenido parangón. Mencionemos varios de sus abundantes hallazgos en ese terreno.

- Teorema de los dos cuadrados de Fermat:* Todo número primo de la forma $4n + 1$ se puede escribir como suma de dos cuadrados, y ello de forma única.
- Congruencia de Fermat:* Si p es cualquier número primo y n cualquier entero positivo, entonces p divide a $n^p - n$.
- Último teorema de Fermat:* Si $n > 2$, entonces $x^n + y^n = z^n$ no admite solución mediante enteros positivos x, y, z .

Escribió este último aserto en el margen de uno de sus libros, en conexión con un pasaje que trataba la existencia de infinitas soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. Y añadía este intrigante comentario: «He encontrado una demostración realmente maravillosa que no cabe en este estrecho margen». Desgraciadamente, nadie ha encontrado hasta hoy una demostración, y el último teorema de Fermat sigue en pie como el mayor reto de las matemáticas. Hallar una demostración inmortalizaría de inmediato a su autor, pero el lector ambicioso debe saber que muchos matemáticos de prestigio (y algunos de los más grandes) lo han intentado en vano durante siglos.

NOTA SOBRE LA FAMILIA BERNOULLI. Casi todo el mundo sabe que Johann Sebastian Bach fue uno de los más grandes compositores de todos los tiempos. No obstante, es menos conocido que su prolífica familia estaba tan dotada para tal menester que varias docenas de Bach fueron eminentes músicos desde el siglo XVI hasta el XIX. De hecho, había partes de Alemania donde la simple palabra *bach* significaba músico. Lo que el clan Bach fue en la música lo fue el de los Bernoulli en las matemáticas y en la ciencia. En tres generaciones, esta excepcional familia suiza produjo ocho matemáticos, tres de ellos de primera fila, que a su vez tuvieron una amplia descendencia que se distinguió en muy diversos campos.

Jacques Bernoulli (1654-1705) estudió teología presionado de su padre, pero la abandonó en cuanto pudo en favor de su vocación científica. Aprendió por sí mismo el cálculo de Newton y Leibniz, y fue profesor de matemáticas en Basilea desde 1687 hasta su muerte. Escribió acerca de series infinitas, estudió muchas curvas especiales, inventó las coordenadas polares e introdujo los números de Bernoulli que aparecen en el desarrollo de Taylor de la función tangente. En su libro *Ars Conjectandi* formuló el principio básico de la teoría de probabilidades conocido como *teorema de Bernoulli o ley de los grandes números*: si la probabilidad de cierto suceso es p y se realizan n ensayos independientes con k éxitos, entonces k/n tiende a p cuando n se hace tender hacia infinito. Esta afirmación puede parecer a primera vista una trivialidad, pero bajo su epidermis subyace una maraña de problemas matemáticos y filosóficos que han sido fuente de controversias desde la época de Bernoulli hasta nuestros días.

Jean Bernoulli (1667-1748), hermano menor de Jacques, también inició en falso su carrera, estudiando medicina y doctorándose en Basilea en 1694 con una tesis sobre la contracción muscular. Pero se sintió fascinado, también él, por el cálculo, lo dominó enseñada y lo aplicó a muchos problemas geométricos, mecánicos y de ecuaciones diferenciales. En 1695 fue nombrado profesor de matemáticas y física en Groningen, Holanda, y a la muerte de Jean le sucedió en Basilea. En ocasiones, los hermanos Bernoulli investigaron los mismos problemas, lo cual no resultó afortunado, dadas sus disposiciones celosas y quisquillosas. A veces, la fricción entre ambos desembocó en agrias disputas públicas, como sucedió a propósito del problema de la braquistócrona. En 1696 Jean propuso el problema como un reto para los matemáticos de Europa. Atrajo enorme interés y fue resuelto por Newton y Leibniz, así como por los dos Bernoulli. La solución de Jean (que hemos presentado) era la más elegante, mientras que la de Jacques, si bien más lenta y laboriosa, era más general. Esta situación originó una reyerta

atroz que duró varios años y más de una vez se tradujo en un lenguaje burdo, más propio de holgazanes callejeros que de un debate científico. Jean parece ser el más malhumorado de los dos; de hecho, mucho más tarde, en un ataque de rabia y celos, echó de casa a su propio hijo por haber ganado un premio de la Academia francesa que él codició.

Este hijo, Daniel Bernoulli (1700-1782), estudió medicina como su padre y obtuvo el doctorado con un trabajo sobre la acción de los pulmones. Al igual que su padre, pronto dio rienda suelta a su talento innato y se convirtió en profesor de matemáticas en San Petersburgo. En 1733 regresó a Basilea, siendo sucesivamente profesor de botánica, anatomía y física. Ganó diez premios de la Academia francesa, incluido el que enfureció a su padre, y a lo largo de los años publicó trabajos de física, probabilidad, cálculo y ecuaciones diferenciales. En su famoso libro *Hidrodinamica* trató la mecánica de fluidos y dio la primera formulación de la teoría cinética de los gases. Está considerado como el primer físico matemático propiamente dicho.

PROBLEMAS

1. Se ha dicho en el texto que la longitud de un arco de la cicloide (9) es cuatro veces el diámetro del círculo generador (teorema de Wren²⁰). Probarlo.
2. Se ha dicho también en el texto que el área bajo un arco de la cicloide (9) es tres veces el área del círculo generador (teorema de Torricelli²¹). Demostrarlo.
3. Obtener las ecuaciones (9) de la cicloide integrando directamente la forma integral de la ecuación (5),

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy,$$

empezando con la sustitución algebraica $u^2 = y/(c-y)$ y siguiendo con un cambio de variable trigonométrico natural.

4. Consideremos un alambre curvado en forma de la cicloide (9) e invertámoslo como en la Figura 10. Si se suelta un abalorio desde el origen y desliza por el alambre sin rozamiento, probar que el tiempo que tarda en llegar al punto $(\pi a, 2a)$ es $\pi\sqrt{a/g}$.
5. Probar que el número $\pi\sqrt{a/g}$ del Problema 4 es también el tiempo que tarda el

²⁰ Christopher Wren (1632-1723), el más importante arquitecto inglés, fue astrónomo y matemático (profesor de astronomía en Oxford) antes de que el gran incendio de Londres en 1666 le diera la oportunidad de construir la catedral de San Pablo, así como docenas de pequeñas iglesias por toda la ciudad.

²¹ Evangelista Torricelli (1608-1647) fue un físico y matemático italiano, discípulo de Galileo, a quien sirvió como secretario. Además de descubrir y demostrar el citado teorema, avanzó las primeras ideas correctas, que Galileo dejó escapar, sobre la presión atmosférica y la naturaleza de los vacíos, e inventó el barómetro como aplicación de sus teorías. Véase James B. Conant, *Science and Common Sense*, Yale University Press, New Haven, 1951, págs. 63-71. Los teoremas geométricos de Wren y Torricelli enunciados en los Problemas 1 y 2 son para nosotros ejercicios sencillos de cálculo. Es interesante reflexionar acerca de cómo pudieron ser descubiertos y demostrados en un tiempo en que las herramientas del cálculo no existían.

abitorio en llegar deslizando hasta el punto inferior a partir de cualquier punto intermedio, de manera que alcanza el punto final en el mismo tiempo sea cual sea el punto desde el que se suelta. Esta se conoce como la propiedad *tautócrona* de la cicloide, del griego *tauto* (el mismo) y *chronos* (tiempo)²².

6. A la puesta del sol un hombre está al pie de una colina en forma de cúpula, desde donde mira al sol poniente. Lanza una piedra hacia arriba de manera tal que el punto más alto que alcanza está en línea con la cumbre de la colina. Mientras asciende la piedra, su sombra se mueve por la ladera a velocidad constante. Demostrar que el perfil de la colina es una cicloide.

PROBLEMAS DIVERSOS PARA EL CAPITULO 1

1. Un día comenzó a nevar por la mañana y siguió cayendo nieve de forma constante todo el día. A mediodía un quitanieves comenzó a limpiar una carretera a un ritmo constante, en términos de la cantidad de nieve retirada cada hora. El quitanieves limpió 2 millas hasta las 2 P.M. y una milla más hasta las 4 P.M. ¿Cuándo comenzó a nevar?
2. Una bola de naftalina que inicialmente tenía un radio de $1/4$ de pulgada, al cabo de un mes tiene sólo $1/8$ de pulgada de radio. Supuesto que se evapora a un ritmo proporcional a su superficie, hallar el radio en función del tiempo. ¿Cuántos meses tardará en desaparecer?
3. Un depósito contiene 100 galones de agua pura. A partir del instante $t = 0$ se introduce en él salmuera que contiene una libra de sal por galón, a razón de un galón por minuto. La mezcla, entretanto, se mantiene uniforme revolviéndola adecuadamente. ¿Cuánto tiempo tardará en haber 50 libras de sal disueltas en el depósito?
4. Un gran depósito contiene 100 galones de salmuera en la que hay disueltas 200 libras de sal. Desde el instante $t = 0$ se le añade agua pura a razón de 3 galones/minuto. La mezcla, que se mantiene uniforme revolviéndola, sale del depósito al ritmo de 2 galones/minuto. ¿Cuánto tiempo tardará en reducirse a 100 libras la cantidad de sal disuelta en él?
5. Una pelota de fútbol americano tiene la forma de un elipsoide de 12 pulgadas de largo y 6 de ancho. Si se deja al aire libre un día de lluvia, hallar las trayectorias que seguirán las gotas de agua al deslizar por él.

²² La propiedad tautócrona de la cicloide fue descubierta por el insigne científico holandés Christiaan Huygens (1629-1695). La publicó en 1673 en su tratado sobre la teoría de los relojes de péndulo, y era ya bien conocida por todos los matemáticos europeos al final del siglo XVII. Cuando John Bernoulli publicó su hallazgo de la braquistócrona en 1696, se expresó en este exuberante lenguaje (en latín, claro está): «Admiramos con justicia a Huygens por haber sido el primero en descubrir que una partícula pesada cae a lo largo de una cicloide común en el mismo tiempo independientemente del punto en que inicia su movimiento. Mas quedarán ustedes petrificados y estupefactos cuando les diga que precisamente esta cicloide, la tautócrona de Huygens, es nuestra querida braquistócrona».

6. Si c es una constante positiva y a un parámetro positivo, entonces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

es la ecuación de la familia de elipses ($a > c$) e hipérbolas ($a < c$) con focos en los puntos $(\pm c, 0)$. Probar que esta familia de *cónicas cofocales* es autoortogonal (véase Problema 3-2).

7. De acuerdo con la *ley de Torricelli*, el agua escapará de un depósito abierto por un pequeño orificio a una velocidad igual a la que adquiriría al caer libremente desde el nivel del agua hasta el del orificio. Un cuenco hemisférico de radio R está inicialmente lleno de agua, y en el instante $t = 0$ se le perfora un orificio circular de radio r en el fondo. ¿Cuánto tardará en vaciarse?
8. La clepsidra, reloj antiguo de agua, era un cuenco del que salía el agua por un pequeño agujero del fondo. Se usaba en las cortes griegas y romanas para medir el tiempo de discurso de los oradores, para evitar que se prolongaran en demasía. Hallar la forma que debía tener para que el agua fluyese a ritmo constante.
9. Dos depósitos con orificios idénticos en sus fondos se vacían en el mismo tiempo. Uno es cilíndrico con el eje vertical y el otro es un cono con su vértice abajo. Si tienen bases iguales y la altura del cilindro es h , ¿cuál es la altura del cono?
10. Una lata cilíndrica, parcialmente llena de agua, gira en torno a su eje con velocidad angular constante ω . Probar que la superficie del agua adopta la forma de un paraboloide de revolución. (Ayuda: La fuerza centrífuga que actúa sobre una partícula de la superficie libre del agua es $mx\omega^2$, donde x es su distancia al eje, y ésta es la resultante de la fuerza gravitacional vertical mg y la de reacción normal R debida a otras partículas próximas del agua.)
11. Consideremos un abalorio en el punto más alto de un círculo en un plano vertical, y unamos ese punto con otro inferior del propio círculo con un segmento recto de hilo. Si el abalorio desliza por el hilo sin rozamiento, demostrar que alcanzará el círculo en el mismo tiempo, independientemente de la posición del punto inferior escogido.
12. Una cadena de 4 pies de longitud tiene un pie de longitud colgando por el borde de una mesa. Despreciando el rozamiento, hallar el tiempo que tarda la cadena en deslizar fuera de la mesa.
13. Por experiencia sabemos que un hombre que agarre un extremo de una soga enrollada a un poste puede, realizando una fuerza mucho más pequeña en ese cabo, contener una fuerza grande en el otro. Cuantitativamente, no es difícil ver que si T y $T + \Delta T$ son las tensiones en la soga a ángulos θ y $\theta + \Delta\theta$ (Fig. 12), entonces la soga ejerce sobre el poste en la región entre θ y $\theta + \Delta\theta$ una fuerza aproximada de $T\Delta\theta$. Se sigue que si μ es el coeficiente de rozamiento entre la soga y el poste, entonces Δt es aproximadamente $\mu T\Delta\theta$. Usar este hecho para formular la ecuación diferencial que relaciona T y θ , y resolverla para hallar T en función de θ , μ y la fuerza T_0 ejercida por el hombre.

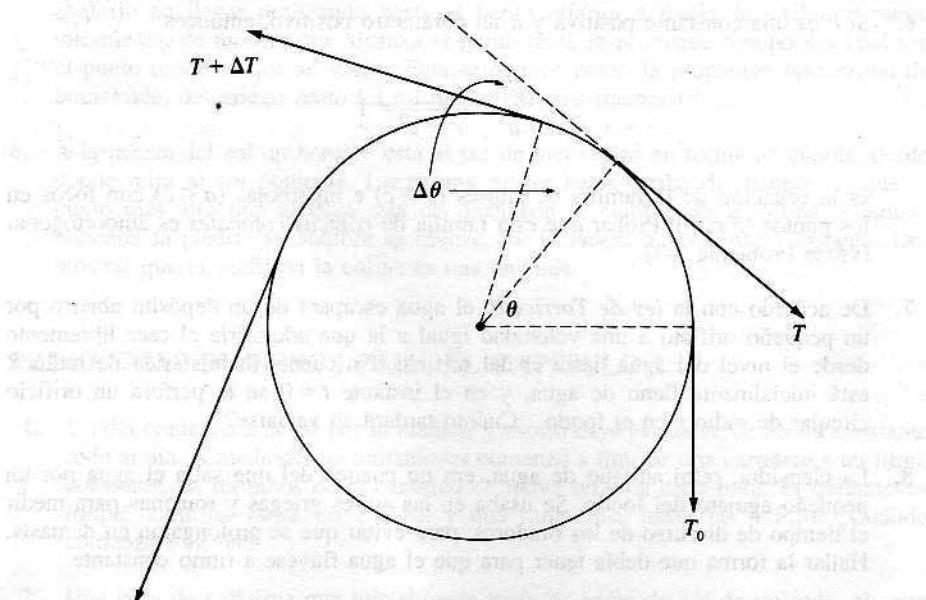


Figura 12

14. Una columna troncocónica, cuyo material tiene densidad a , sostiene un carga L . Si el radio de la parte superior de la columna es r_0 , hallar el radio r a una distancia x bajo ella si el área de las secciones horizontales son proporcionales a las cargas totales que soportan.
15. Al Presidente y al Primer Ministro se les sirven tazas de café a la misma temperatura y al mismo tiempo. El Presidente añade inmediatamente una pequeña cantidad de crema fría, pero no bebe su café hasta pasados diez minutos. El Primer Ministro espera diez minutos, añade entonces la misma cantidad de crema fría y bebe su café. ¿Quién bebe el café más caliente?
16. Un destructor intenta cazar a un submarino entre la densa niebla. La niebla levanta unos momentos y deja ver que el submarino está en superficie a 3 millas de distancia, y de nuevo la niebla se hace espesa. La velocidad del destructor es doble que la del submarino, y se sabe que este último iniciará la huida a la máxima velocidad con dirección constante. ¿Qué camino debe seguir el destructor para estar seguro de pasar exactamente sobre el submarino? Ayuda: Tomar un sistema de coordenadas polares con origen en la posición en que fue avistado el submarino.
17. Cuatro insectos situados en las esquinas de una mesa cuadrada de lado a comienzan a andar simultáneamente con la misma velocidad, cada cual moviéndose hacia su compañero de la derecha. Tomando coordenadas polares con origen en el centro de la mesa y el eje polar a lo largo de una diagonal, hallar la trayectoria del insecto que parte del eje polar y la distancia total que camina antes de llegar al centro.

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

7. ECUACIONES HOMOGENEAS

En términos generales, es muy difícil resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Incluso la sencilla ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

no puede resolverse, en general, en el sentido de que no existen fórmulas para obtener su solución en todos los casos. Por otra parte, hay ciertos tipos canónicos de ecuaciones de primer orden para las cuales sí se dispone de métodos rutinarios de resolución. En este capítulo discutimos brevemente algunos de los tipos frecuentes en las aplicaciones. Dado que nuestro propósito consiste en adquirir facilidad de manejo, dejaremos de lado cuestiones de continuidad, diferenciabilidad, posible anulación de divisores, etc. Los problemas relevantes de índole puramente matemática se tratarán más tarde, una vez desarrolladas en parte las técnicas precisas.

El más simple de los tipos canónicos es aquel en que las variables son separables:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

Como sabemos, para resolver esta ecuación basta escribirla en forma separada,

o sea, $dy/h(y) = g(x) dx$, e integrar:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + c.$$

En el capítulo anterior vimos abundantes ejemplos de este procedimiento.

Como siguiente nivel de complejidad cabe citar las ecuaciones homogéneas. Una función $f(x, y)$ se dice *homogénea de grado n* si

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

para todos los x, y, t convenientemente restringidos. Eso significa que si x e y se sustituyen por tx y ty , de la función resultante sale factor común t^n , y el factor que queda es la función original. Así pues, $x^2 + xy$, $\sqrt{x^2 + y^2}$ y $\sin(x/y)$ son homogéneas de grados 2, 1 y 0. La ecuación diferencial

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

se llama *homogénea* si M y N son funciones homogéneas del mismo grado. Tal ecuación se puede poner en la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

donde $f(x, y) = -M(x, y)/N(x, y)$ es claramente homogénea de grado 0. El método para resolver (1) reposa en el hecho de que *siempre* se puede transformar en una ecuación separable, por medio del cambio $z = y/x$, sea cual sea la función $f(x, y)$ en cuestión. Para comprobarlo, notemos que la relación

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$$

nos permite hacer $t = 1/x$ y obtener así

$$f(x, y) = f(1, y/x) = f(1, z).$$

Entonces, puesto que $y = zx$ y

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}, \quad (2)$$

la ecuación (1) se convierte en

$$z + x \frac{dz}{dx} = f(1, z),$$

y podemos separar las variables:

$$\frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Completamos ahora la solución integrando y reemplazando z por y/x .

Ejemplo 1. Resolver $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$.

Escribamos antes de nada esa ecuación en la forma sugerida por la discusión precedente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Como la función de la derecha es evidentemente homogénea de grado 0, sabemos que se puede expresar como función de $z = y/x$. Esto se logra fácilmente dividiendo numerador y denominador por x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y/x}{1-y/x} = \frac{1+z}{1-z}.$$

A continuación introducimos la ecuación (2) y sepáramos las variables, con lo que llegamos a

$$\frac{(1-z)dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando se obtiene

$$\operatorname{tg}^{-1} z - \frac{1}{2} \log(1+z^2) = \log x + c;$$

y al sustituir z por y/x concluimos que

$$\operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} = \log \sqrt{x^2 + y^2} + c$$

es la deseada solución.

PROBLEMAS

1. Comprobar que las siguientes ecuaciones son homogéneas y resolvérlas:

$$(a) (x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0; \quad (c) x^2y' = 3(x^2 + y^2)\operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} + xy;$$

$$(b) x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0; \quad (d) x \operatorname{sen} \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \operatorname{sen} \frac{y}{x} + x;$$

$$(e) \quad xy' = y + 2xe^{-y/x}; \quad (h) \quad xy' = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$(f) \quad (x - y)dx - (x + y)dy = 0; \quad (i) \quad x^2y' = y^2 + 2xy;$$

$$(g) \quad xy' = 2x + 3y; \quad (j) \quad (x^3 + y^3)dx - xy^2dy = 0$$

2. Usar coordenadas rectangulares para hallar las trayectorias ortogonales a la familia de todos los círculos tangentes al eje y en el origen.
3. Probar que el cambio $z = ax + by + c$ transforma

$$y' = f(ax + by + c)$$

en una ecuación de variables separadas, y aplicar este método para resolver las ecuaciones que se indican:

$$(a) \quad y' = (x + y)^2; \quad (b) \quad y' = \sin^2(x - y + 1).$$

4. (a) Si $ae \neq bd$, mostrar que se pueden elegir las constantes h y k de modo tal que las sustituciones $x = z - h$, $y = w - k$ reducen

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right)$$

- (a) a una ecuación homogénea.
 (b) Si $ae = bd$, hallar una sustitución que reduzca la ecuación en (a) a una ecuación de variables separadas.

5. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$(a) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}; \quad (d) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 1}{x + 4y + 2};$$

$$(b) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 4}{x + y - 6}; \quad (e) \quad (2x + 3y - 1)dx - 4(x + 1)dy = 0.$$

$$(c) \quad (2x - 2y)dx + (y - 1)dy = 0;$$

6. Haciendo el cambio $z = y/x^n$, o sea, $y = zx^n$, y escogiendo un valor adecuado de n , demostrar que las ecuaciones diferenciales siguientes pueden transformarse en ecuaciones de variables separadas, y resolverlas:

$$(a) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 - xy^2}{2x^2y}; \quad (c) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2y}.$$

$$(b) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2 + 3xy^2}{4x^2y};$$

7. Probar que una recta que pase por el origen intersecta a todas las curvas integrales de una ecuación homogénea con el mismo ángulo.
8. Sea $y' = f(x, y)$ una ecuación diferencial homogénea. Probar el siguiente hecho geométrico acerca de su familia de curvas integrales: Si se dilata (o se contrae) el plano xy respecto del origen de modo tal que cada punto (x, y) se desplaza a un

nuevo punto (x_1, y_1) que está a una distancia del origen igual a k veces la distancia original, con su dirección radial intacta, entonces toda curva integral C se transforma en una curva integral C_1 . Ayuda: $x_1 = kx$ e $y_1 = ky$.

9. Sea $y' = f(x, y)$ una ecuación diferencial cuya familia de condiciones iniciales tiene la propiedad de invariancia bajo dilataciones enunciada en el problema anterior. Probar que la ecuación es necesariamente homogénea.
10. Sea dada una familia de condiciones iniciales de una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. Consideremos una segunda familia con la propiedad de que en cada punto $P = (x, y)$ se cortan las curvas de cada familia que pasan por él en un mismo ángulo α . Demostrar que las curvas de la segunda familia son soluciones de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{f(x, y) + \operatorname{tg} \alpha}{1 - f(x, y) \operatorname{tg} \alpha}.$$

11. Usar el resultado del Problema 10 para hallar las curvas que forman un ángulo $\pi/4$ con
 - (a) todas las rectas que pasan por el origen;
 - (b) todos los círculos $x^2 + y^2 = c^2$;
 - (c) todas las hipérbolas $x^2 - 2xy - y^2 = c$.

8. ECUACIONES EXACTAS

Si partimos de una familia de curvas $f(x, y) = c$, su ecuación diferencial se puede escribir en la forma $df = 0$, o sea,

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

Por ejemplo, la familia $x^2y^3 = c$ tiene $2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy = 0$ como ecuación diferencial asociada. Supongamos que volvemos del revés la situación y comenzamos con una ecuación diferencial

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0. \quad (1)$$

Si existe alguna función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad (2)$$

entonces (1) se puede poner como

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad \text{o sea} \quad df = 0$$

y su solución general es

$$f(x, y) = c.$$

En este caso la expresión $M dx + N dy$ se dice que es una *diferencial exacta*, y (1) se llama una *ecuación diferencial exacta*.

A veces es posible determinar el carácter exacto y calcular la función $f(x, y)$ por simple inspección. Así, los miembros de la izquierda de

$$y dx + x dy = 0 \quad , \quad \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

son reconocibles como las diferenciales de xy y x/y , respectivamente, de manera que las soluciones generales de esas ecuaciones son $xy = c$ y $x/y = c$. Salvo en casos muy sencillos, sin embargo, esta técnica de «golpe de vista» resulta impracticable. Es preciso un *criterio* de exactitud y un método para hallar la función f , que pasamos a presentar.

Supuesto que (1) sea exacta, existirá una función f que satisface (2). Del cálculo elemental sabemos que las derivadas parciales cruzadas de f son iguales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.^1 \quad (3)$$

Por tanto,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (4)$$

luego (4) es condición necesaria para la exactitud de (1). Probaremos que es asimismo suficiente, mostrando que (4) nos capacita para construir una función f que cumple las ecuaciones (2). Empezaremos integrando la primera de las ecuaciones (2) con respecto a x :

$$f = \int M dx + g(y). \quad (5)$$

La «constante de integración» que aparece aquí es una función arbitraria de y , ya que ha de desaparecer bajo derivación en x . Esto reduce nuestro problema a hallar una función $g(y)$ con la propiedad de que la f dada por (5) satisfaga

¹ El lector debe recordar que la ecuación (3) es cierta siempre que existen ambos miembros y son continuos, lo que se cumple para casi todas las funciones de interés en la práctica. Nuestra hipótesis protectora en todo este capítulo (véase el párrafo final en la Sección 7) es que todas las funciones que manejamos son suficientemente continuas y diferenciables para garantizar la validez de cuantas operaciones efectuamos sobre ellas.

la segunda de las ecuaciones (2). Derivando (5) respecto a y e igualando el resultado a N se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M dx + g'(y) = N,$$

así que

$$g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx.$$

De donde

$$g(y) = \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy, \quad (6)$$

supuesto que el integrando es sólo función de y . Esto será cierto si la derivada en x del integrando es 0, y dado que la derivada en cuestión es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int M dx = \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int M dx = \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \end{aligned}$$

una mirada a nuestra hipótesis (4) completa el argumento.

En resumen, hemos demostrado la siguiente proposición: *la ecuación (1) es exacta si y sólo si $\partial M / \partial y = \partial N / \partial x$; y en este caso, su solución general es $f(x, y) = c$, donde f viene dada por (5) y (6).* Dos aspectos merecen comentario: es la ecuación $f(x, y) = c$, y no simplemente la función f , quien constituye la solución general de (1); y es el *método* contenido en (5) y (6), no las fórmulas por sí mismas, lo que hay que aprender.

Ejemplo 1. Decidir si es exacta o no la ecuación $e^y dx + (xe^y + 2y) dy = 0$, y resolverla si lo es.

Tenemos

$$M = e^y \quad y \quad N = xe^y + 2y,$$

luego

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y.$$

Luego (4) se satisface y, por tanto, la ecuación es exacta. Eso quiere decir que existe una función $f(x, y)$ para la que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + 2y.$$

Integrando la primera de estas ecuaciones respecto de x vemos que

$$f = \int e^y dx + g(y) = xe^y + g(y),$$

de manera que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + g'(y).$$

Como esta derivada parcial ha de ser igual a $xe^y + 2y$, deducimos $g'(y) = 2y$, de modo que $g(y) = y^2$ y $f = xe^y + y^2$. Ya sólo falta observar que

$$xe^y + y^2 = c$$

es la solución buscada de la ecuación diferencial dada.

PROBLEMAS

Determinar cuáles de estas ecuaciones son exactas y resolver aquellas que lo sean.

- ~~1.~~ $\left(x + \frac{2}{y}\right)dy + ydx = 0.$
- ~~2.~~ $(\operatorname{sen} x \operatorname{tg} y + 1)dx + \cos x \sec^2 y dy = 0.$
- ~~3.~~ $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0.$
- ~~4.~~ $(2y^2 - 4x + 5)dx = (4 - 2y + 4xy)dy.$
- ~~5.~~ $(y + y \cos xy)dx + (x + x \cos xy)dy = 0.$
- ~~6.~~ $\cos x \cos^2 y dx + 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos y dy = 0.$
- ~~7.~~ $(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - xe^y)dy = (e^y + \cos x \cos y)dx.$
- ~~8.~~ $-\frac{1}{y} \operatorname{sen} \frac{x}{y} dx + \frac{x}{y^2} \operatorname{sen} \frac{x}{y} dy = 0.$
- ~~9.~~ $(1 + y)dx + (1 - x)dy = 0.$
- ~~10.~~ $(2xy^3 + y \cos x)dx + (3x^2y^2 + \operatorname{sen} x)dy = 0.$
- ~~11.~~ $dx = \frac{y}{1 - x^2y^2}dx + \frac{x}{1 - x^2y^2}dy.$
- ~~12.~~ $(2xy^4 + \operatorname{sen} y)dx + (4x^2y^3 + x \cos y)dy = 0.$
- ~~13.~~ $\frac{ydx + xdy}{1 - x^2y^2} + xdx = 0.$
- ~~14.~~ $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx = \sqrt{x^2 - y}dy.$

15. $(x \log y + xy) dx + (y \log x + xy) dy = 0.$
 16. $(e^{y^2} - \operatorname{cosec} y \operatorname{cosec}^2 x) dx + (2xye^{y^2} - \operatorname{cosec} y \operatorname{cotg} y \operatorname{cotg} x) dy = 0.$
 17. $(1 + y^2 \operatorname{sen} 2x) dx - 2y \cos^2 x dy = 0.$
 18. $\frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0.$
 19. $3x^2(1 + \log y) dx + \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right) dy = 0.$
20. Resolver

$$\frac{y dx - x dy}{(x+y)^2} + dy = dx$$

como ecuación exacta de dos maneras y reconciliar ambos resultados.

21. Resolver

$$\frac{4y^2 - 2x^2}{4xy^2 - x^3} dx + \frac{8y^2 - x^2}{4y^3 - x^2y} dy = 0$$

- (a) como ecuación exacta;
 (b) como ecuación homogénea.

22. Hallar el valor de n para el cual cada una de las ecuaciones siguientes es exacta y resolverlas para ese valor de n :
- (a) $(xy^2 + nx^2y) dx + (x^3 + x^2y) dy = 0;$
 (b) $(x + ye^{2xy}) dx + nxe^{2xy} dy = 0.$

9. FACTORES INTEGRANTES

El lector se habrá apercibido tal vez de que las ecuaciones diferenciales exactas son relativamente raras, ya que la exactitud exige un preciso balance en la forma de la ecuación, balance que se destruye bajo pequeñas modificaciones. En tales circunstancias, es razonable preguntarse si merece la pena discutir las ecuaciones exactas o no. En la presente sección intentamos convencer al lector de que sí.

La ecuación

$$y dx + (x^2y - x) dy = 0 \quad (1)$$

no es exacta, porque $\partial M/\partial y = 1$ y $\partial N/\partial x = 2xy - 1$. No obstante, si la multiplicamos por el factor $1/x^2$, la ecuación se convierte en

$$\frac{y}{x^2} dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0,$$

que ya es exacta. ¿Hasta qué punto se pueden convertir en exactas otras ecuaciones que no lo son? En otras palabras, si

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (2)$$

no es exacta, ¿bajo qué condiciones se puede encontrar una función $\mu(x, y)$ con la propiedad de que

$$\mu(M dx + N dy) = 0$$

sea exacta? Cualquier función μ que actúe de ese modo se llama un *factor integrante* para (2). Así, $1/x^2$ es un factor integrante para (1). Probaremos que (2) admite siempre un factor integrante si tiene solución general.

Supongamos pues que (2) tiene solución general

$$f(x, y) = c,$$

y eliminemos c por derivación:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0. \quad (3)$$

De (2) y (3) se desprende que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y},$$

es decir,

$$\frac{\partial f / \partial x}{M} = \frac{\partial f / \partial y}{N}. \quad (4)$$

Si denotamos la razón común en (4) por $\mu(x, y)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu M \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu N.$$

Multiplicando (2) por μ obtenemos

$$\mu M dx + \mu N dy = 0,$$

o sea,

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

que es exacta. Este argumento muestra que si (2) tiene una solución general, entonces admite al menos un factor integrante μ . Realmente admite infinitos factores integrantes, porque si $F(f)$ es cualquier función de f , entonces

$$\mu F(f)(M dx + N dy) = F(f) df = d \left[\int F(f) df \right],$$

de modo que $\mu F(f)$ es también un factor integrante para (2).

Nuestra discusión hasta aquí no ha considerado el problema de cómo hallar factores integrantes en la práctica. En general es muy difícil. En algunos casos, sin embargo, se dispone de métodos directos. Para ver cómo surgen éstos, consideremos la condición de que μ sea un factor integrante para (2):

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Desarrollando esa igualdad resulta

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

o sea,

$$\frac{1}{\mu} \left(N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (5)$$

Con ello hemos «reducido» el problema de resolver la ecuación diferencial ordinaria (2) al mucho más duro de resolver la ecuación diferencial en derivadas parciales (5). Ahora bien, no necesitamos la solución general de (5) sino que cualquier solución particular servirá a nuestros propósitos. Y desde este punto de vista, (5) es más útil de lo que parece. Supongamos, por ejemplo, que (2) tiene un factor integrante μ que es sólo función de x . Entonces $\partial \mu / \partial x = d\mu / dx$ y $\partial \mu / \partial y = 0$, luego (5) se puede poner en la forma

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N}. \quad (6)$$

Como el lado izquierdo es función sólo de x , el derecho ha de serlo también. Poniendo

$$\frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} = g(x),$$

la (6) se convierte en

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = g(x)$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d(\log \mu)}{dx} = g(x),$$

así que

$$\begin{aligned}\log \mu &= \int g(x) dx \\ \mu &= e^{\int g(x) dx}.\end{aligned}\quad (7)$$

Este razonamiento es obviamente reversible: si la expresión de la derecha en (6) es sólo función de x , digamos $g(x)$, entonces (7) da una función μ que depende sólo de x y satisface (5), de manera que se trata de un factor integrante para (2).

Ejemplo 1. En el caso de la ecuación (1) tenemos

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2y - x} = \frac{-2(xy - 1)}{x(xy - 1)} = -\frac{2}{x},$$

que es función de x sólo. Por consiguiente,

$$\mu = e^{\int -(2/x) dx} = e^{-2 \log x} = x^{-2}$$

es un factor integrante de (1), como ya habíamos visto.

Razonamientos análogos proporcionan el siguiente procedimiento paralelo, aplicable cuando (2) tiene un factor integrante que sólo depende de y : si la expresión

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{-M} \quad (8)$$

es sólo función de y , digamos $h(y)$, entonces

$$\mu = e^{\int h(y) dy} \quad (9)$$

es asimismo una función sólo de y que satisface (5), siendo, por tanto, un factor integrante para (2).

Existe otra técnica eficaz para convertir ecuaciones sencillas no exactas en exactas. Para ilustrarlo, consideremos de nuevo la ecuación (1), reformulada así:

$$x^2y dy - (xdy - ydx) = 0. \quad (10)$$

La expresión entre paréntesis quizá traiga a la memoria del lector la diferencial

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2}, \quad (11)$$

lo cual sugiere dividir (10) por x^2 . Esto transforma la ecuación en

$$y dy - d(y/x) = 0,$$

así que su solución general es evidente:

$$\frac{1}{2} y^2 - \frac{y}{x} = c.$$

De hecho, hemos encontrado un factor integrante para (1) fijándonos en la expresión $x dy - y dx$ y usando (11) para sacar partido de tal observación. He aquí otras fórmulas diferenciales que se utilizan con frecuencia en circunstancias semejantes:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2}; \quad (12)$$

$$d(xy) = x dy + y dx; \quad (13)$$

$$d(x^2 + y^2) = 2(x dx + y dy); \quad (14)$$

$$d\left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}; \quad (15)$$

$$d\left(\log \frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{xy}. \quad (16)$$

Vemos de estas fórmulas que la sencillísima ecuación diferencial $y dx - x dy = 0$ admite $1/x^2$, $1/y^2$, $1/(x^2 + y^2)$ y $1/xy$ como factores integrantes, y puede resolverse por tanto de varias maneras.

Ejemplo 2. Hallar la forma de un espejo curvado tal que la luz de una fuente situada en el origen se refleje en él como un haz de rayos paralelos al eje x .

Por simetría, el espejo tendrá la forma de una superficie de revolución generada al girar una curva APB (Fig. 13) en torno al eje x .

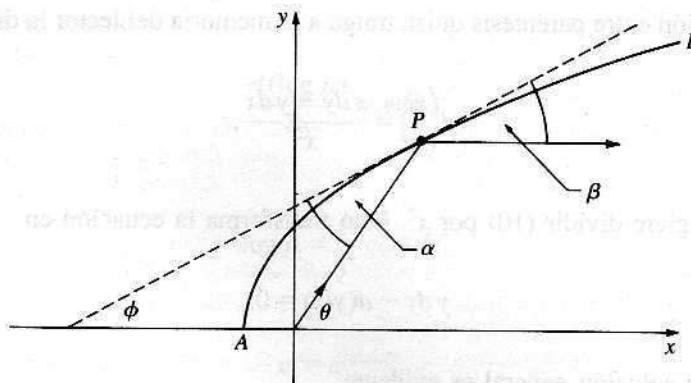


Figura 13

Se sigue de la ley de la reflexión que $\alpha = \beta$. Por la geometría del problema, $\phi = \beta$ y $\theta = \alpha + \phi = 2\beta$. Puesto que $\operatorname{tg} \theta = y/x$ y

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta},$$

deducimos que

$$\frac{y}{x} = \frac{2 dy/dx}{1 - (dy/dx)^2}.$$

Despejando dy/dx en esa ecuación cuadrática se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y},$$

o sea,

$$x dx + y dy = \pm \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

Usando (14) obtenemos

$$\pm \frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = dx,$$

de modo que

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = x + c.$$

Simplificando queda

$$y^2 = 2cx + c^2,$$

que es la ecuación de la familia de todas las paráolas con foco en el origen y eje en el eje x . Se demuestra a menudo en los cursos elementales de cálculo que todas esas paráolas tienen tal *propiedad focal*. La conclusión de este ejemplo es la recíproca: las paráolas son las únicas curvas que poseen dicha propiedad.

PROBLEMAS

- Probar que si $(\partial M / \partial y - \partial N / \partial x) / (Ny - Mx)$ es una función $g(z)$ del producto $z = xy$, entonces

$$\mu = e^{\int g(z) dz}$$
 es un factor integrante para la ecuación (2).
- Resolver cada una de estas ecuaciones hallando un factor integrante:
 - $(3x^2 - y^2) dy - 2xy dx = 0;$
 - $(xy - 1) dx + (x^2 - xy) dy = 0;$
 - $x dy + y dx + 3x^3y^4 dy = 0;$
 - $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \operatorname{cosec} y) dy = 0;$
 - $(x + 2) \operatorname{sen} y dx + x \cos y dy = 0;$
 - $y dx + (x - 2x^2y^3) dy = 0;$
 - $(x + 3y^2) dx + 2xy dy = 0;$
 - $y dx + (2x - ye^y) dy = 0;$
 - $(y \log y - 2xy) dx + (x + y) dy = 0;$
 - $(y^2 + xy + 1) dx + (x^2 + xy + 1) dy = 0;$
 - $(x^3 + xy^3) dx + 3y^2 dy = 0.$
- ¿Bajo qué circunstancias tendrá la ecuación (2) un factor integrante que sea función de la suma $z = x + y$?
- Resolver las siguientes ecuaciones usando las fórmulas diferenciales (12)-(16):
 - $x dy - y dx = (1 + y^2) dy;$
 - $y dx - x dy = xy^3 dy;$
 - $x dy = (x^5 + x^3y^2 + y) dx;$
 - $(y + x) dy = (y - x) dx;$
 - $x dy = (y + x^2 + 9y^2) dx;$
 - $(y^2 - y) dx + x dy = 0;$
 - $x dy - y dx = (2x^2 - 3) dx;$
 - $x dy + y dx = \sqrt{xy} dy;$
 - $(y - xy^2) dx + (x + x^2y^2) dy = 0;$
 - $x dy - y dx = x^2y^4(x dy + y dx);$
 - $x dy + y dx + x^2y^5 dy = 0;$
 - $(2xy^2 - y) dx + x dy = 0;$
 - $dy + \frac{y}{x} dx = \operatorname{sen} x dx.$

5. Resolver la siguiente ecuación haciendo el cambio $z = y/x^n$, o sea, $y = xz^n$, y eligiendo un valor conveniente de n :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + \frac{x^3}{y} + x \operatorname{tg} \frac{y}{x^2}.$$

6. Hallar la curva APB en el Ejemplo 2 utilizando coordenadas polares en lugar de rectangulares. Ayuda: $\psi = \alpha = \pi$.

10. ECUACIONES LINEALES

El tipo más importante de ecuaciones diferenciales es el de las *ecuaciones lineales*, en las que la derivada de orden más alto es una función lineal de las derivadas de órdenes inferiores. Así pues, la ecuación diferencial lineal general de primer orden es

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x),$$

la de segundo orden es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y + r(x),$$

y así sucesivamente. Se sobrentiende que los coeficientes de la derecha en esas expresiones, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, etc., son sólo funciones de x .

Nuestro interés se centra ahora en la ecuación diferencial lineal general de primer orden, que escribimos en la forma canónica

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \quad (1)$$

El método más simple de resolución reposa en la observación de que

$$\frac{d}{dx}(e^{\int P dx} y) = e^{\int P dx} \frac{dy}{dx} + yP e^{\int P dx} = e^{\int P dx} \left(\frac{dy}{dx} + Py \right). \quad (2)$$

Según esto, si multiplicamos (1) por $e^{\int P dx}$, pasa a ser

$$\frac{d}{dx}(e^{\int P dx} y) = Q e^{\int P dx}. \quad (3)$$

Por integración se obtiene ahora

$$e^{\int P dx} y = \int Q e^{\int P dx} dx + c,$$

luego

$$y = e^{-\int P dx} \left(\int Q e^{\int P dx} dx + c \right) \quad (4)$$

es la solución general de (1).

Ejemplo 1. Resolver $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = 3x$.

Esta ecuación es obviamente lineal con $P = 1/x$, de modo que

$$\int P dx = \int \frac{1}{x} dx = \log x \quad y \quad e^{\int P dx} = e^{\log x} = x.$$

Multiplicando ambos lados por x y recordando (3) obtenemos

$$\frac{d}{dx} (xy) = 3x^2,$$

así que

$$xy = x^3 + c \quad \text{o bien} \quad y = x^2 + cx^{-1}.$$

Tal como indica el método de este ejemplo, uno no tiene por qué aprender la complicada fórmula (4) y aplicarla mecánicamente para resolver ecuaciones lineales. En vez de eso, es mucho mejor recordar y usar el procedimiento por el que se dedujo (4): *multiplicar por $e^{\int P dx}$ e integrar*. Un inconveniente de la precedente discusión es que todo se basa en darse cuenta del hecho enunciado en (2). En otras palabras, el factor integrante $e^{\int P dx}$ parece haberse sacado de debajo de la manga. En el Problema 1 se pide al lector que lo descubra por sí mismo mediante los métodos de la Sección 9.

PROBLEMAS

1. Escribir la ecuación (1) en la forma $M dx + N dy = 0$ y usar las ideas de la Sección 9 para mostrar que esa ecuación tiene un factor integrante μ que es función sólo de x . Hallar μ y obtener (4) resolviendo $\mu M dx + \mu N dy = 0$ como ecuación exacta.

2. Resolver las ecuaciones lineales:

(a) $x \frac{dy}{dx} - 3y = x^4;$

(f) $(2y - x^3) dx = x dy;$

(b) $y' + y = \frac{1}{1 + e^{2x}};$

(g) $y - x + xy \operatorname{cotg} x + xy' = 0;$

(c) $(1 + x^2) dy + 2xy dx = \operatorname{cotg} x dx;$

(h) $\frac{dy}{dx} - 2xy = 6xe^{x^2};$

(d) $y' + y = 2xe^{-x} + x^2;$

(i) $(x \log x)y' + y = 3x^3;$

(e) $y' + y \operatorname{cotg} x = 2x \operatorname{cosec} x;$

(j) $(y - 2xy - x^2) dx + x^2 dy = 0.$

3. La ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n,$$

que se conoce como *ecuación de Bernoulli*, es lineal cuando $n = 0$ ó 1 . Probar que se puede reducir a una ecuación lineal para cualquier valor de n por el cambio de variable $z = y^{1-n}$, y aplicar este método para resolver las siguientes ecuaciones:

$$(a) xy' + y = x^4y^3; \quad (c) x dy + y dx = xy^2 dx,$$

$$(b) xy^2y' + y^3 = x \cos x;$$

4. La notación usual dy/dx implica que x es la variable independiente e y la dependiente. Al intentar resolver una ecuación diferencial resulta útil a veces reemplazar x por y e y por x y trabajar sobre la ecuación resultante. Aplicar este método a las ecuaciones que se indican:

$$(a) (e^y - 2xy)y' = y^2; \quad (c) xy' + 2 = x^3(y - 1)y';$$

$$(b) y - xy' = y'y^2e^y; \quad (d) f(y)^2 \frac{dx}{dy} + 3f(y)f'(y)x = f'(y).$$

5. Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$(a) y = x + ce^{-x};$$

$$(b) y^2 = ce^x + x + 1.$$

6. Sabemos por (4) que la solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden es una familia de curvas de la forma

$$y = cf(x) + g(x).$$

Demostrar que, recíprocamente, la ecuación diferencial de una tal familia de curvas es lineal.

7. Probar que $y' + Py = Qy \log y$ puede resolverse mediante el cambio de variable $z = \log y$ y aplicar este método para resolver $xy' = 2x^2y + y \log y$.
8. Una solución de $y' \operatorname{sen} 2x = 2y + 2 \cos x$ permanece acotada cuando $x \rightarrow \pi/2$. Hallarla.

9. Un depósito contiene 10 galones de salmuera con 2 libras de sal disueltas en ella. Se introduce en el depósito salmuera que contiene disuelta una libra de sal por cada galón a razón de 3 galones/minuto, y la mezcla, bien revuelta, se deja salir a razón de 4 galones/minuto. Hallar la cantidad de sal $x = x(t)$ en el depósito en un instante t arbitrario.
10. Un depósito contiene 40 galones de agua pura. Salmuera con 3 libras de sal por galón fluye en él a razón de 2 galones/minuto, y la mezcla escapa a razón de 3 galones/minuto.
- Calcular la cantidad de sal en el depósito cuando ya sólo quedan en él 20 galones/minuto.
 - ¿Cuándo es máxima la cantidad de sal en el depósito?
11. (a) Un cierto elemento radiactivo A se descompone en un segundo elemento radiactivo B y éste a su vez en un tercero C . Si la cantidad inicialmente presente de A era x_0 , las cantidades de A y B presentes en un instante t posterior son x e y , respectivamente, y si k_1 , k_2 son las constantes de ritmo de esas dos reacciones, hallar y en función de t .
- (b) El radón (semivida de 3,8 días) es un gas fuertemente radiactivo que se produce como producto inmediato de la desintegración del radio (semivida de 1.600 años). La atmósfera contiene trazas de radón en sus capas más bajas proveniente de la tierra y las rocas, que contienen diminutas cantidades de radio. Se teme en algunos lugares del oeste americano que se produzcan concentraciones peligrosas de radón en los basamentos cerrados de casas cuyos cimientos se asientan en terrenos con mucha más cantidad de radio de lo normal, a causa de las minas de uranio próximas. Si las constantes de ritmo (pérdidas relativas por unidad de tiempo, en años) para la desintegración del radio y del radón son $k_1 = 0,00043$ y $k_2 = 66$, usar el resultado de la parte (a) para determinar cuánto tiempo después de ser terminado uno de esos edificios será máxima la cantidad de radón.

11. REDUCCION DEL ORDEN

Como hemos visto, la ecuación diferencial general de primer orden tiene la forma

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

En esta sección consideraremos dos tipos especiales de ecuaciones diferenciales de segundo orden que se pueden resolver por métodos de primer orden.

Ausencia de la variable dependiente. Si y no aparece explícitamente, nuestra ecuación se puede escribir

$$f(x, y', y'') = 0. \quad (1)$$

En tal caso, introducimos una nueva variable dependiente p haciendo

$$y' = p \quad \text{e} \quad y'' = \frac{dp}{dx}. \quad (2)$$

Esta sustitución transforma (1) en una ecuación diferencial de primer orden

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0. \quad (3)$$

Si somos capaces de encontrar una solución para (3), podemos sustituir p en ella por dy/dx e intentar resolver la ecuación resultante. Este procedimiento reduce la resolución de la ecuación diferencial de segundo orden (1) a la de dos ecuaciones diferenciales de primer orden sucesivas.

Ejemplo 1. Resolver $xy'' - y' = 3x^2$.

La variable y está ausente de esta ecuación, así que (2) la reduce a

$$x \frac{dp}{dx} - p = 3x^2,$$

es decir,

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = 3x,$$

que ya es lineal. Resolviendo ésta por el método de la Sección 10 obtenemos

$$p = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + c_1 x,$$

luego

$$y = x^3 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2$$

es la solución deseada.

Ausencia de la variable independiente. Si x no está presente explícitamente, nuestra ecuación diferencial de segundo orden se puede escribir

$$g(y, y', y'') = 0. \quad (4)$$

Volvemos a introducir la nueva variable dependiente p del mismo modo, pero ahora expresamos y'' en términos de una derivada respecto de y :

$$y' = p \quad \text{e} \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}. \quad (5)$$

Eso nos permite escribir (4) en la forma

$$g\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0; \quad (6)$$

y ya desde este punto proceder como antes, resolviendo dos ecuaciones diferenciales de primer orden sucesivamente.

Ejemplo 2. Resolver $y'' + k^2y = 0$.

Con ayuda de (5) la podemos expresar como

$$p \frac{dp}{dy} + k^2y = 0 \quad \text{o como} \quad p dp + k^2y dy = 0.$$

Integrando se obtiene

$$p^2 + k^2y^2 = k^2a^2,$$

de modo que

$$p = \frac{dy}{dx} = \pm k\sqrt{a^2 - y^2},$$

o sea,

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm k dx.$$

Una segunda integración da

$$\operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{a} = \pm kx + b,$$

y, por tanto,

$$y = a \operatorname{sen}(\pm kx + b) \quad \text{o sea} \quad y = A \operatorname{sen}(kx + B).$$

Esta solución general se puede escribir también como

$$y = c_1 \operatorname{sen} kx + c_2 \cos kx, \quad (7)$$

desarrollando $\operatorname{sen}(kx + B)$ y cambiando la forma de las constantes.

La ecuación resuelta en el Ejemplo 2 se presenta a menudo en las aplicaciones (véase Sección 5). Es lineal, y su solución (7) quedará incluida en la teoría general de las ecuaciones lineales de primer orden en el próximo capítulo.

PROBLEMAS

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} (a) \quad yy'' + (y')^2 = 0; & (e) \quad 2yy'' = 1 + (y')^2; \\ (b) \quad xy'' = y' + (y')^3; & (f) \quad yy'' - (y')^2 = 0; \\ (c) \quad y'' - k^2y = 0; & (g) \quad xy'' + y' = 4x. \\ (d) \quad x^2y'' = 2xy' + (y')^2; & \end{array}$$

2. Hallar la solución particular especificada en cada caso:

$$\begin{array}{ll} (a) \quad (x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0, \quad y = 1 \text{ e } y' = 0 \text{ para } x = 0; \\ (b) \quad yy'' = y^2y' + (y')^2, \quad y = -\frac{1}{2} \text{ e } y' = 1 \text{ para } x = 0; \\ (c) \quad y'' = y'e^y, \quad y = 0 \text{ e } y' = 2 \text{ para } x = 0. \end{array}$$

3. Resolver cada una de las ecuaciones siguientes por los dos métodos de esta sección y reconciliar los resultados:

$$(a) \quad y'' = 1 + (y')^2; \quad (b) \quad y'' + (y')^2 = 1.$$

4. En el Problema 5-8 considerábamos un orificio practicado en la tierra de polo a polo en el que se dejaba caer una piedra. La piedra caerá por él, se detendrá al otro extremo y regresará al punto de partida. ¿Cuánto tiempo invierte en ese recorrido de ida y vuelta?
5. Sea un alambre en forma de cicloide con ecuaciones paramétricas $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$ e $y = a(1 - \cos \theta)$, y considerémoslo invertido como en la Figura 10. Si se deja un abalorio en el alambre y desliza sin rozamiento bajo la sola acción de la gravedad, mostrar que su velocidad v satisface la ecuación

$$4av^2 = g(s_0^2 - s^2),$$

donde s_0 y s son las longitudes de arco desde el punto más bajo del alambre a la posición inicial del abalorio y a su posición en un instante posterior, respectivamente. Obtener la ecuación

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4a} s = 0,$$

por derivación y hallar a partir de ella s como función de t , determinando además el período del movimiento. Nótese que estos resultados establecen una vez más la propiedad tautócrona de la cicloide discutida en el Problema 6-5.

12. CADENA COLGANTE. CURVAS DE PERSECUCION

Ahora estudiaremos varias aplicaciones que conducen a ecuaciones diferenciales resolubles por los métodos de este capítulo.

Ejemplo 1. Hallar la forma que adopta una cadena flexible suspendida entre dos puntos y que cuelga por la acción de su propio peso.

Pongamos el eje y pasando por el punto más bajo de la cadena (Fig. 14), denotemos por s la longitud de arco desde ese punto a uno variable (x, y) y por $w(s)$ la densidad lineal de la cadena. Obtenemos la ecuación de la curva del hecho de que la porción de la cadena entre el punto más bajo y (x, y) está en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas: la tensión horizontal T_0 en el punto más bajo; la tensión variable T en (x, y) , que actúa a lo largo de la tangente debido a la flexibilidad de la cadena; y una fuerza hacia abajo igual al peso de la porción de cadena entre esos dos puntos. Igualando la componente horizontal de T y T_0 y la vertical de T al peso resulta

$$T \cos \theta = T_0 \quad \text{y} \quad T \sin \theta = \int_0^s w(s) ds.$$

Se deduce de la primera de estas ecuaciones que

$$T \sin \theta = T_0 \operatorname{tg} \theta = T_0 \frac{dy}{dx},$$

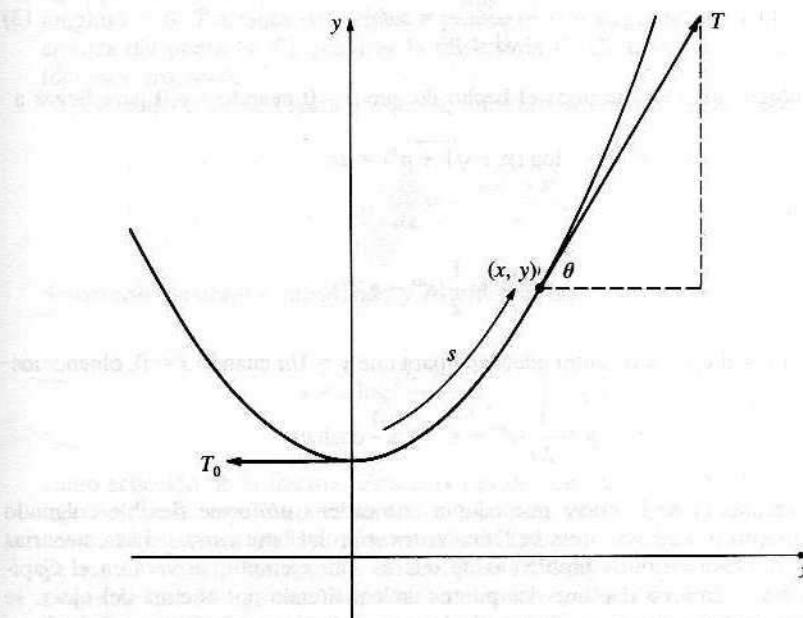


Figura 14

así que

$$T_0 y' = \int_0^s w(s) ds.$$

Eliminamos la integral derivando en x :

$$\begin{aligned} T_0 y'' &= \frac{d}{dx} \int_0^s w(s) ds = \frac{d}{ds} \int_0^s w(s) ds \frac{ds}{dx} = \\ &= w(s) \sqrt{1 + (y')^2}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$T_0 y'' = w(s) \sqrt{1 + (y')^2} \quad (1)$$

es la ecuación diferencial de la curva pedida, y ésta se halla resolviendo la ecuación. Para continuar se necesita información adicional sobre la función $w(s)$. Resolveremos (1) para el caso en que $w(s)$ es una constante w_0 , de modo que

$$y'' = a \sqrt{1 + (y')^2}, \quad a = \frac{w_0}{T_0}. \quad (2)$$

Sustituyendo $y' = p$ e $y'' = dp/dx$, como en la Sección 11, la ecuación (2) se reduce a

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = a dx. \quad (3)$$

Ahora integramos (3) y usamos el hecho de que $p = 0$ cuando $x = 0$ para llegar a

$$\log(p + \sqrt{1 + p^2}) = ax.$$

Despejando p ,

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (e^{ax} - e^{-ax}).$$

Si colocamos el eje x a la altura adecuada para que $y = 1/a$ cuando $x = 0$, obtenemos

$$y = \frac{1}{2a} (e^{ax} + e^{-ax}) = \frac{1}{a} \cosh ax$$

como la ecuación de la curva que adopta una cadena uniforme flexible colgando bajo su propio peso. Esta curva se llama *catenaria*, del latín *catena*. Las catenarias aparecen también en otros problemas de interés. Por ejemplo, se verá en el Capítulo 12 que si un arco que une dos puntos dados, situado por encima del eje x , se hace girar en torno al eje x , el área de la superficie de revolución engendrada es mínima cuando el arco es parte de una catenaria.

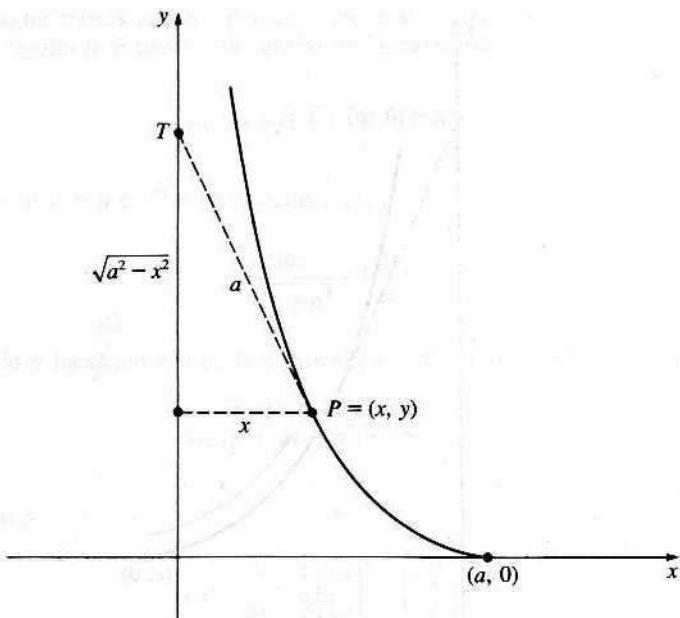


Figura 15

Ejemplo 2. Un punto P es arrastrado por el plano xy mediante una cuerda PT de longitud a . Si T arranca del origen y se mueve a lo largo del eje y positivo, y si P arranca del punto $(a, 0)$, ¿cuál es la trayectoria de P ? Esta curva se llama *tractriz* (del latín *tractum*).

Es fácil ver de la Figura 15 que la ecuación diferencial de la trayectoria es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Separando variables e integrando y recordando que $y = 0$ cuando $x = a$ hallamos

$$y = a \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

como ecuación de la tractriz. Esta curva es de considerable importancia en geometría, porque la superficie en forma de trompeta que se genera al hacerla girar en torno al eje y es un modelo de la versión de Lobachevsky de geometría no euclídea, ya que la suma de los ángulos de cualquier triángulo dibujado sobre esa superficie es menor que 360 grados. Además, en el contexto de la geometría diferencial esta superficie se llama *pseudoesfera*, a causa de su curvatura negativa constante, por contraposición a la curvatura positiva constante de una esfera.

En tal caso, introducimos una nueva variable dependiente p haciendo
 $y' = p$ e $y'' = \frac{dp}{dx}$. (2)

Esta sustitución transforma (1) en una ecuación diferencial de primer orden

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0. \quad (3)$$

Si somos capaces de encontrar una solución para (3), podemos sustituir p en ella por dy/dx e intentar resolver la ecuación resultante. Este procedimiento reduce la resolución de la ecuación diferencial de segundo orden (1) a la de dos ecuaciones diferenciales de primer orden sucesivas.

Ejemplo 1. Resolver $xy'' - y' = 3x^2$.

La variable y está ausente de esta ecuación, así que (2) la reduce a

$$x \frac{dp}{dx} - p = 3x^2,$$

es decir,

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = 3x,$$

que ya es lineal. Resolviendo ésta por el método de la Sección 10 obtenemos

$$p = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + c_1 x,$$

luego

$$y = x^3 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2$$

es la solución deseada.

Ausencia de la variable independiente. Si x no está presente explícitamente, nuestra ecuación diferencial de segundo orden se puede escribir

$$g(y, y', y'') = 0. \quad (4)$$

Volvemos a introducir la nueva variable dependiente p del mismo modo, pero ahora expresamos y'' en términos de una derivada respecto de y :

$$y' = p \quad \text{e} \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}. \quad (5)$$

Eso nos permite escribir (4) en la forma

$$g\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0; \quad (6)$$

y ya desde este punto proceder como antes, resolviendo dos ecuaciones diferenciales de primer orden sucesivamente.

Ejemplo 2. Resolver $y'' + k^2y = 0$.

Con ayuda de (5) la podemos expresar como

$$p \frac{dp}{dy} + k^2y = 0 \quad \text{o como} \quad p dp + k^2y dy = 0.$$

Integrando se obtiene

$$p^2 + k^2y^2 = k^2a^2,$$

de modo que

$$p = \frac{dy}{dx} = \pm k\sqrt{a^2 - y^2},$$

o sea,

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm k dx.$$

Una segunda integración da

$$\operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{a} = \pm kx + b,$$

y, por tanto,

$$y = a \operatorname{sen}(\pm kx + b) \quad \text{o sea} \quad y = A \operatorname{sen}(kx + B).$$

Esta solución general se puede escribir también como

$$y = c_1 \operatorname{sen} kx + c_2 \cos kx, \quad (7)$$

desarrollando $\operatorname{sen}(kx + B)$ y cambiando la forma de las constantes.

La ecuación resuelta en el Ejemplo 2 se presenta a menudo en las aplicaciones (véase Sección 5). Es lineal, y su solución (7) quedará incluida en la teoría general de las ecuaciones lineales de primer orden en el próximo capítulo.

PROBLEMAS

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} (a) \quad yy'' + (y')^2 = 0; & (e) \quad 2yy'' = 1 + (y')^2; \\ (b) \quad xy'' = y' + (y')^3; & (f) \quad yy'' - (y')^2 = 0; \\ (c) \quad y'' - k^2y = 0; & (g) \quad xy'' + y' = 4x. \\ (d) \quad x^2y'' = 2xy' + (y')^2; & \end{array}$$

2. Hallar la solución particular especificada en cada caso:

$$\begin{array}{ll} (a) \quad (x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0, \quad y = 1 \text{ e } y' = 0 \text{ para } x = 0; \\ (b) \quad yy'' = y^2y' + (y')^2, \quad y = -\frac{1}{2} \text{ e } y' = 1 \text{ para } x = 0; \\ (c) \quad y'' = y'e^y, \quad y = 0 \text{ e } y' = 2 \text{ para } x = 0. \end{array}$$

3. Resolver cada una de las ecuaciones siguientes por los dos métodos de esta sección y reconciliar los resultados:

$$(a) \quad y'' = 1 + (y')^2; \quad (b) \quad y'' + (y')^2 = 1.$$

4. En el Problema 5-8 considerábamos un orificio practicado en la tierra de polo a polo en el que se dejaba caer una piedra. La piedra caerá por él, se detendrá al otro extremo y regresará al punto de partida. ¿Cuánto tiempo invierte en ese recorrido de ida y vuelta?
5. Sea un alambre en forma de cicloide con ecuaciones paramétricas $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$ e $y = a(1 - \cos \theta)$, y considerémoslo invertido como en la Figura 10. Si se deja un abalorio en el alambre y desliza sin rozamiento bajo la sola acción de la gravedad, mostrar que su velocidad v satisface la ecuación

$$4av^2 = g(s_0^2 - s^2),$$

donde s_0 y s son las longitudes de arco desde el punto más bajo del alambre a la posición inicial del abalorio y a su posición en un instante posterior, respectivamente. Obtener la ecuación

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4a}s = 0,$$

por derivación y hallar a partir de ella s como función de t , determinando además el período del movimiento. Nótese que estos resultados establecen una vez más la propiedad tautócrona de la cicloide discutida en el Problema 6-5.

12. CADENA COLGANTE. CURVAS DE PERSECUCIÓN

Ahora estudiaremos varias aplicaciones que conducen a ecuaciones diferenciales resolubles por los métodos de este capítulo.

Ejemplo 1. Hallar la forma que adopta una cadena flexible suspendida entre dos puntos y que cuelga por la acción de su propio peso.

Pongamos el eje y pasando por el punto más bajo de la cadena (Fig. 14), denotemos por s la longitud de arco desde ese punto a uno variable (x, y) y por $w(s)$ la densidad lineal de la cadena. Obtenemos la ecuación de la curva del hecho de que la porción de la cadena entre el punto más bajo y (x, y) está en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas: la tensión horizontal T_0 en el punto más bajo; la tensión variable T en (x, y) , que actúa a lo largo de la tangente debido a la flexibilidad de la cadena; y una fuerza hacia abajo igual al peso de la porción de cadena entre esos dos puntos. Igualando la componente horizontal de T y T_0 y la vertical de T al peso resulta

$$T \cos \theta = T_0 \quad \text{y} \quad T \sin \theta = \int_0^s w(s) ds.$$

Se deduce de la primera de estas ecuaciones que

$$T \sin \theta = T_0 \operatorname{tg} \theta = T_0 \frac{dy}{dx},$$

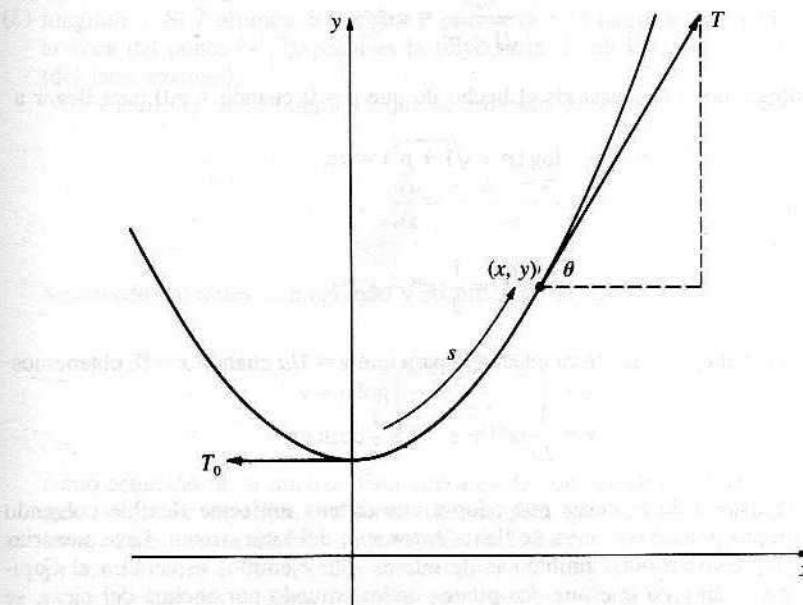


Figura 14

así que

$$T_0 y' = \int_0^s w(s) ds.$$

Eliminamos la integral derivando en x :

$$\begin{aligned} T_0 y'' &= \frac{d}{dx} \int_0^s w(s) ds = \frac{d}{ds} \int_0^s w(s) ds \frac{ds}{dx} = \\ &= w(s) \sqrt{1 + (y')^2}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$T_0 y'' = w(s) \sqrt{1 + (y')^2} \quad (1)$$

es la ecuación diferencial de la curva pedida, y ésta se halla resolviendo la ecuación. Para continuar se necesita información adicional sobre la función $w(s)$. Resolveremos (1) para el caso en que $w(s)$ es una constante w_0 , de modo que

$$y'' = a \sqrt{1 + (y')^2}, \quad a = \frac{w_0}{T_0}. \quad (2)$$

Sustituyendo $y' = p$ e $y'' = dp/dx$, como en la Sección 11, la ecuación (2) se reduce a

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = a dx. \quad (3)$$

Ahora integramos (3) y usamos el hecho de que $p = 0$ cuando $x = 0$ para llegar a

$$\log(p + \sqrt{1 + p^2}) = ax.$$

Despejando p ,

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}).$$

Si colocamos el eje x a la altura adecuada para que $y = 1/a$ cuando $x = 0$, obtenemos

$$y = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax}) = \frac{1}{a} \cosh ax$$

como la ecuación de la curva que adopta una cadena uniforme flexible colgando bajo su propio peso. Esta curva se llama *catenaria*, del latín *catena*. Las catenarias aparecen también en otros problemas de interés. Por ejemplo, se verá en el Capítulo 12 que si un arco que une dos puntos dados, situado por encima del eje x , se hace girar en torno al eje x , el área de la superficie de revolución engendrada es mínima cuando el arco es parte de una catenaria.

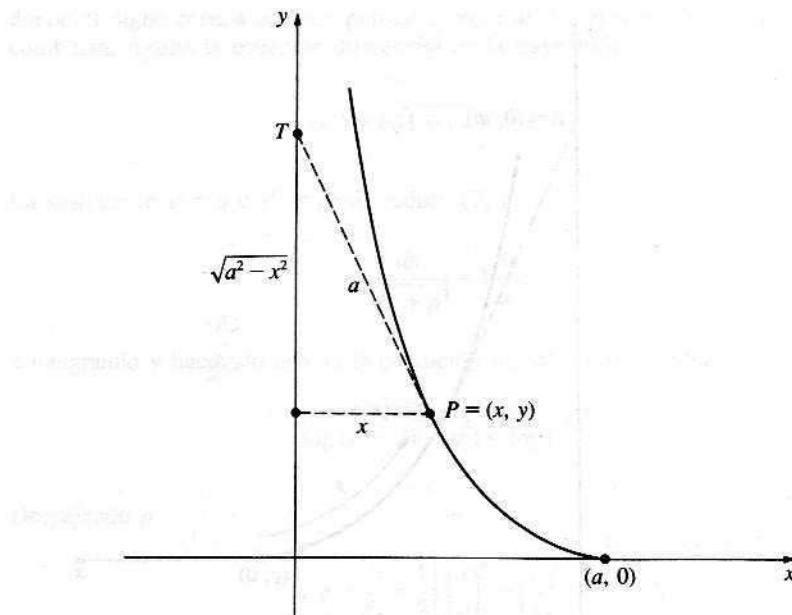


Figura 15

Ejemplo 2. Un punto P es arrastrado por el plano xy mediante una cuerda PT de longitud a . Si T arranca del origen y se mueve a lo largo del eje y positivo, y si P arranca del punto $(a, 0)$, ¿cuál es la trayectoria de P ? Esta curva se llama *tractriz* (del latín *tractum*).

Es fácil ver de la Figura 15 que la ecuación diferencial de la trayectoria es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Separando variables e integrando y recordando que $y = 0$ cuando $x = a$ hallamos

$$y = a \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

como ecuación de la tractriz. Esta curva es de considerable importancia en geometría, porque la superficie en forma de trompeta que se genera al hacerla girar en torno al eje y es un modelo de la versión de Lobachevsky de geometría no euclídea, ya que la suma de los ángulos de cualquier triángulo dibujado sobre esa superficie es menor que 360 grados. Además, en el contexto de la geometría diferencial esta superficie se llama *pseudoesfera*, a causa de su curvatura negativa constante, por contraposición a la curvatura positiva constante de una esfera.

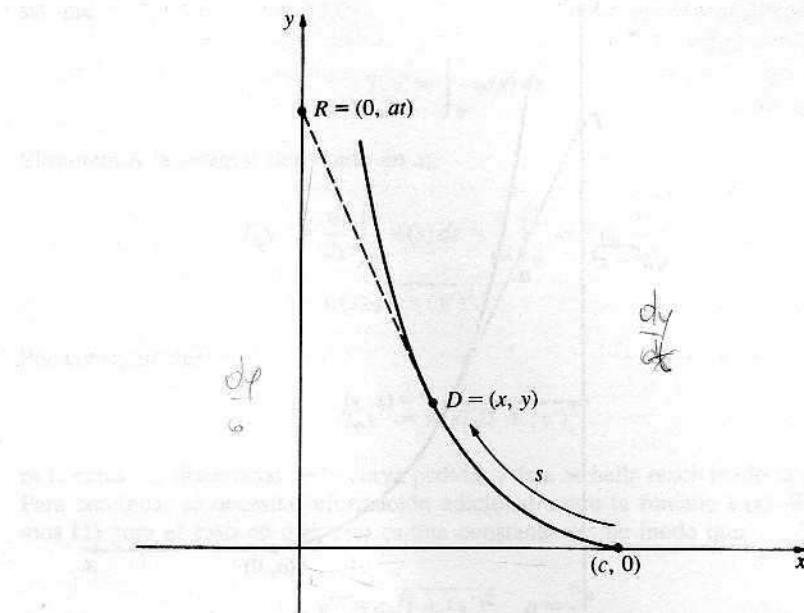


Figura 16

Ejemplo 3. Un conejo parte del origen y corre por el eje y positivo con velocidad a . Al mismo tiempo, un perro que corre con velocidad b sale del punto $(c, 0)$ y persigue al conejo. ¿Qué trayectoria sigue el perro?

En el instante t , medido desde el instante en que ambos echan a correr, el conejo estará en el punto $R = (0, at)$ y el perro en $D = (x, y)$ (Fig. 16). Como la línea DR es tangente a la trayectoria, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - at}{x} \quad \text{o sea} \quad xy' - y = -at. \quad (4)$$

Para eliminar t empezamos por derivar (4) respecto a x , con lo que se obtiene

$$xy'' = -a \frac{dt}{dx}. \quad (5)$$

Como $ds/dt = b$, tenemos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = -\frac{1}{b} \sqrt{1 + (y')^2}, \quad (6)$$

donde el signo menos aparece porque s crece al decrecer x . Cuando (5) y (6) se combinan, resulta la ecuación diferencial de la trayectoria:

$$xy'' = k\sqrt{1 + (y')^2}, \quad k = \frac{a}{b}. \quad (7)$$

La sustitución $y' = p$ e $y'' = dp/dx$ reduce (7) a

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = k \frac{dx}{x};$$

e integrando y haciendo uso de la condición inicial $p = 0$ cuando $x = c$ se llega a

$$\log(p + \sqrt{1 + p^2}) = \log\left(\frac{x}{c}\right)^k.$$

Despejando p ,

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{c}\right)^k - \left(\frac{c}{x}\right)^k \right].$$

Para poder continuar y hallar y en función de x debemos disponer de información adicional sobre k . En el Problema 8 invitamos al lector a que explore algunas de las posibilidades.

Ejemplo 4. El eje y y la recta $x = c$ son las orillas de un río cuya corriente fluye a una velocidad uniforme a en la dirección y negativa. Una barca entra en el río por el punto $(c, 0)$ y se dirige hacia el origen con velocidad b relativa al agua. ¿Qué trayectoria seguirá la barca?

Las componentes de la velocidad de la barca (Fig. 17) son

$$\frac{dx}{dt} = -b \cos \theta \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = -a + b \sin \theta,$$

así que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a + b \sin \theta}{-b \cos \theta} = \frac{-a + b(-y/\sqrt{x^2 + y^2})}{-b(x/\sqrt{x^2 + y^2})} = \frac{a\sqrt{x^2 + y^2} + by}{bx}.$$

Esta ecuación es homogénea y su solución, calculable por el método de la Sección 7, es

$$c^k(y + \sqrt{x^2 + y^2}) = x^{k+1},$$

donde $k = a/b$. Es claro que el destino de la barca depende de la relación entre a y b . En el Problema 9 se pedirá al lector que descubra bajo qué circunstancias podrá llegar a la orilla opuesta la barca y a qué punto concreto llega.

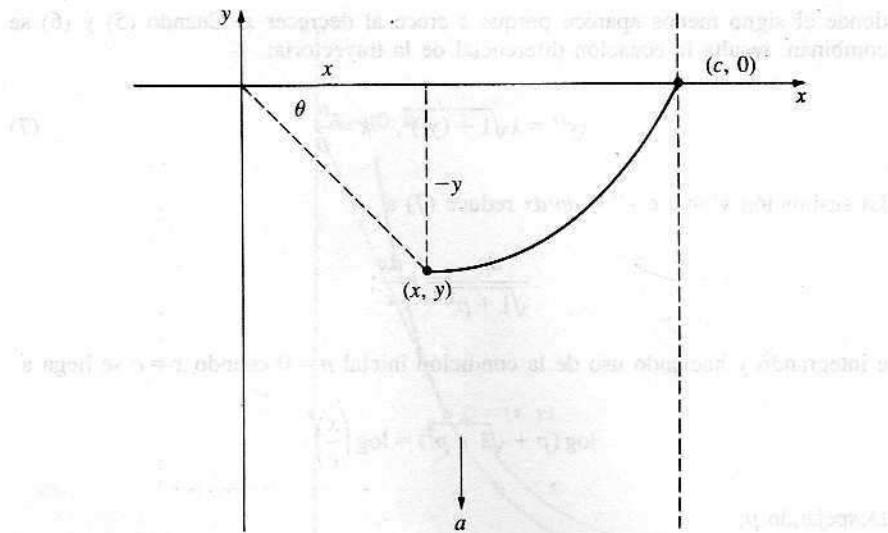


Figura 17

PROBLEMAS

- En el Ejemplo 1, mostrar que la tensión T en un punto arbitrario (x, y) de la cadena viene dada por w_0y .
- Si la cadena del Ejemplo 1 soporta una carga de densidad horizontal $L(x)$, ¿qué ecuación diferencial debe usarse en lugar de (1)?
- ¿Cuál es la forma de un cable de densidad despreciable [de manera que $w(s) = 0$] que soporta un puente de densidad horizontal constante $L(x) = L_0$?
- Si la longitud de una pequeña porción de un cable elástico, de densidad uniforme, es proporcional a la tensión en ella, demostrar que toma la forma de una parábola cuando se suspende bajo la acción de su propio peso.
- Una cortina está formada por varillas muy delgadas colgando de una cuerda de densidad despreciable. Si las varillas están unas junto a otras e igualmente espaciadas horizontalmente, ¿cuál es la forma de la cuerda?
- ¿Qué curva situada por encima del eje x tiene la propiedad de que la longitud del arco que une cualesquiera dos puntos sobre ella es proporcional al área bajo dicho arco?
- Demostrar que la tractriz del Ejemplo 2 es ortogonal a la mitad inferior de cada círculo de radio a y son centro en el eje y positivo.
- (a) En el Ejemplo 3, supongamos $a < b$ (luego $k < 1$). Hallar y como función de x . ¿Qué distancia recorre el conejo antes de que el perro lo alcance?
 (b) Supongamos $a = b$. Hallar y como función de x . ¿A qué distancia del conejo consigue acercarse el perro?

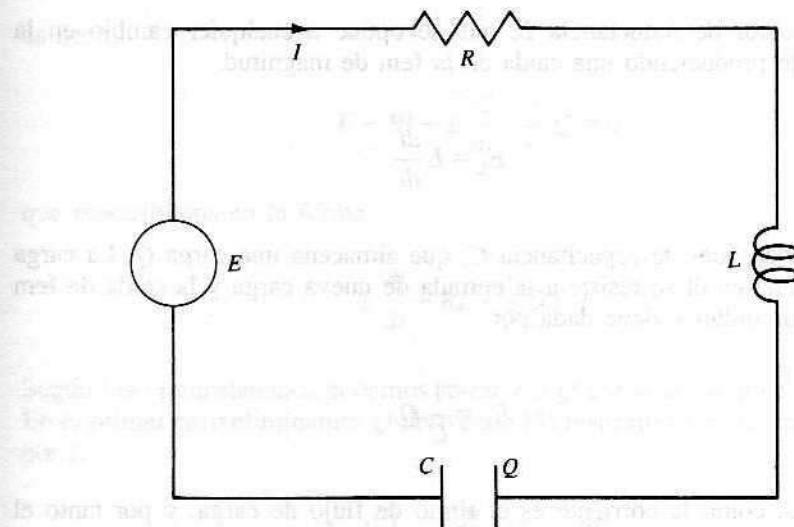


Figura 18

9. En el Ejemplo 4, resolver la ecuación de la trayectoria para y y determinar condiciones sobre a y b que permitan a la barca alcanzar la orilla opuesta. ¿Dónde tocará la orilla?

13. CIRCUITOS ELECTRICOS SIMPLES

En la presente sección consideramos las ecuaciones diferenciales lineales que gobiernan el flujo eléctrico en el circuito simple de la Figura 18. Este circuito consta de cuatro elementos cuya acción se puede entender con facilidad sin conocimientos especiales de electricidad.

- A. Una fuente de fuerza electromotriz (fem) E , digamos una batería o un generador, que impulsa a las cargas eléctricas y produce una corriente I . Según la naturaleza de la fuente, E puede ser constante o función del tiempo.
- B. Una resistencia R , que se opone al paso de la corriente produciendo una caída en la fem de magnitud

$$E_R = RI.$$

Esta ecuación se llama *ley de Ohm*².

² Georg Simon Ohm (1787-1854) fue un físico alemán cuya única contribución relevante fue la ley aquí citada. Cuando la anunció en 1827 parecía demasiado maravillosa para ser cierta, y nadie la creyó. Ohm sufrió con ello tal descrédito y fue tan maltratado que renunció a su plaza de profesor en Colonia, y vivió varios años en la oscuridad y en la pobreza antes de que se reconociera que estaba en lo cierto. Alumno suyo en Colonia fue Peter Dirichlet, que habría de llegar a ser uno de los más eminentes matemáticos del siglo XIX.

- C. Un inductor de inductancia L , que se opone a cualquier cambio en la corriente produciendo una caída en la fem de magnitud

$$E_L = L \frac{dI}{dt}.$$

- D. Un condensador de capacitancia C , que almacena una carga Q . La carga acumulada en él se resiste a la entrada de nueva carga y la caída de fem que ello conlleva viene dada por

$$E_C = \frac{1}{C} Q.$$

Además, como la corriente es el ritmo de flujo de carga, y por tanto el ritmo al que la carga se acumula en el condensador, tenemos

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Los estudiantes que no estén familiarizados con los circuitos eléctricos encontrarán útil pensar en la corriente I como el análogo del ritmo al que fluye el agua en una tubería. La fem E juega el papel de una bomba de presión (voltaje) que hace que el agua fluya. La resistencia R es el análogo del rozamiento en la tubería, que se opone al flujo produciendo una caída de la presión. La inductancia L es una especie de inercia que se opone a cualquier cambio en el flujo produciendo una caída de la presión si el flujo crece y un aumento de presión si el flujo decrece. La mejor manera de pensar en el condensador es visualizarlo como un tanque cilíndrico de almacenamiento en el que el agua entra por un agujero en su fondo: cuanto más profunda está el agua en el depósito (Q) más cuesta bombear agua adicional en él; y cuanto mayor es la base del depósito (C) para una cantidad dada de agua almacenada, menos profunda es el agua y cuesta menos bombear agua en él.

Estos elementos de circuitos actúan conjuntamente de acuerdo con la *ley de Kirchhoff* según la cual la suma algebraica de las fuerzas electromotrices en torno a un circuito cerrado es cero³. Este principio lleva a que

$$E - E_R - E_L - E_C = 0,$$

³ Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) fue otro científico alemán cuyas investigaciones sobre circuitos eléctricos son familiares a todo estudiante de física elemental. Estableció además los principios del análisis espectral y allanó el camino a las aplicaciones de la espectroscopía en la determinación de la constitución química de las estrellas.

es decir,

$$E - RI - L \frac{dI}{dt} - \frac{1}{C} Q = 0,$$

que reescribimos en la forma

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} Q = E. \quad (1)$$

Según las circunstancias, podemos mirar I o Q como la variable dependiente. En el primer caso eliminamos Q derivando (1) respecto a t y sustituyendo dQ/dt por I :

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dE}{dt}. \quad (2)$$

En el segundo caso, reemplazamos simplemente I por dQ/dt :

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E. \quad (3)$$

Consideraremos estas ecuaciones lineales de segundo orden con más detalle posteriormente. Nuestro interés en esta sección se centra sobre todo en la ecuación lineal de primer orden

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E \quad (4)$$

obtenida de (1) cuando no hay condensador.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación (4) con una corriente inicial I_0 , si se conecta en el circuito una fem E_0 en el instante $t = 0$.

Para $t \geq 0$, nuestra ecuación es

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E_0.$$

Separando variables,

$$\frac{dI}{E_0 - RI} = \frac{1}{L} dt.$$

Integrando y usando la condición inicial $I = I_0$ cuando $t = 0$ obtenemos

$$\log(E_0 - RI) = -\frac{R}{L}t + \log(E_0 - RI_0),$$

luego

$$I = \frac{E_0}{R} + \left(I_0 - \frac{E_0}{R} \right) e^{-Rt/L}.$$

Nótese que la corriente I consta de una parte *estacionaria* E_0/R y otra *transitoria* $(I_0 - E_0/R)e^{-Rt/L}$ que tiende a cero al crecer t . En consecuencia, la ley de Ohm $E_0 = RI$ es aproximadamente válida para grandes t . Observemos también que si $I_0 = 0$, entonces

$$I = \frac{E_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}),$$

y si $E_0 = 0$, entonces $I = I_0 e^{-Rt/L}$.

PROBLEMAS

- En el Ejemplo 1, con $I_0 = 0$ y $E_0 \neq 0$, probar que la corriente en el circuito alcanza la mitad de su máximo teórico en $(L \log 2)/R$ segundos.
- Resolver (4) cuando el circuito tiene una corriente inicial I_0 y la fem conectada en $t = 0$ viene dada por
 - $E = E_0 e^{-kt}$;
 - $E = E_0 \sin \omega t$.
- Consideremos un circuito descrito por la ecuación (4). Demostrar que:
 - La ley de Ohm se satisface siempre que la corriente está en un máximo o en un mínimo.
 - La fem es creciente cuando la corriente está en un mínimo y decreciente cuando está en un máximo.
- Si $L = 0$ en la ecuación (3) y $Q = 0$ en $t = 0$, hallar la carga $Q = Q(t)$ del condensador en cada uno de estos casos:
 - E es una constante E_0 ;
 - $E = E_0 e^{-t}$;
 - $E = E_0 \cos \omega t$.
- Usar la ecuación (1) con $R = 0$ y $E = 0$ para calcular $Q = Q(t)$ e $I = I(t)$ para la descarga de un condensador a través de una inductancia L , con condiciones iniciales $Q = Q_0$ e $I = 0$ en $t = 0$.

PROBLEMAS DIVERSOS PARA EL CAPÍTULO 2

Entre las cincuenta ecuaciones diferenciales que siguen se encuentran representantes de todos los tipos discutidos en este capítulo, en orden aleatorio. Muchas de ellas se pueden resolver por varios métodos. Se presentan para que se ejercite el estudiante en identificar el método o métodos aplicables a una ecuación dada, sin disponer de la ayuda que supone el título de la sección en que la ecuación encaja.

1. $yy'' = (y')^2$.
2. $(1 - xy)y' = y^2$.
3. $\underline{(2x + 3y + 1)dx + (2y - 3x + 5)dy = 0}$.
4. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$.
5. $y^2 dx = (x^3 - xy) dy$.
6. $(x^2y^3 + y) dx = (x^3y^2 - x) dy$.
7. $yy'' + (y')^2 - 2yy' = 0$.
8. $x dy + y dx = x \cos x dx$.
9. $xy dy = x^2 dy + y^2 dx$.
10. $(e^x - 3x^2y^2)y' + ye^x = 2xy^3$.
11. $y'' + 2x(y')^2 = 0$.
12. $(x^2 + y) dx = x dy$.
13. $xy' + y = x^2 \cos x$.
14. $(6x + 4y + 3) dx + (3x + 2y + 2) dy = 0$.
15. $\cos(x + y) dx = x \operatorname{sen}(x + y) dx + x \operatorname{sen}(x + y) dy$.
16. $x^2y'' + xy' = 1$.
17. $(y^2 e^{xy} + \cos x) dx + (e^{xy} + xye^{xy}) dy = 0$.
18. $y' \log(x - y) = 1 + \log(x - y)$.
19. $y' + 2xy = e^{-x^2}$.
20. $(y^2 - 3xy - 2x^2) dx = (x^2 - xy) dy$.
21. $(1 + x^2)y' + 2xy = 4x^3$.
22. $e^x \operatorname{sen} y dx + e^x \cos y dy = y \operatorname{sen} xy dx + x \operatorname{sen} xy dy$.
23. $(1 + x^2)y'' + xy' = 0$.
24. $(xe^y + y - x^2) dy = (2xy - e^y - x) dx$.
25. $e^x(1 + x) dx = (xe^x - ye^y) dy$.
26. $(x^2y^4 + x^6) dx - x^3y^3 dy = 0$.
27. $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$.
28. $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$.
29. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xye^{(xy)^2}}{x^2 + y^2 e^{(xy)^2} + 2x^2 e^{(xy)^2}}$.
30. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 2}{-2x + y}$.
31. $3x^2 \log y dx + \frac{x^3}{y} dy = 0$.
32. $\frac{3y^2}{x^2 + 3x} dx + \left(2y \log \frac{5x}{x+3} + 3 \operatorname{sen} y\right) dy = 0$.
33. $\frac{y - x}{(x+y)^3} dx - \frac{2x}{(x+y)^3} dy = 0$.

34. $(xy^2 + y) dx + x dy = 0.$
35. $x^2 y'' = y'(3x - 2y').$
36. $(3x^2 y - y^3) dx - (3xy^2 - x^3) dy = 0.$
37. $x(x^2 + 1)y' + 2y = (x^2 + 1)^3.$
38. $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x - 2y - 1}{2x + 3y - 1}.$
39. $e^{2y}(1 + 2x^2 y) dx + x^3 e^{2y} dy = 0.$
40. $(3x^2 e^y - 2x) dx + (x^3 e^y - \operatorname{sen} y) dy = 0.$
41. $y^2 y'' + (y')^3 = 0.$
42. $(3xy + y^3) dx + (3xy + x^2) dy = 0.$
43. $x^2 y' = x^2 + xy + y^2.$
44. $xy' + y = y^2 \log x.$
45. $\frac{\cos y}{x+3} dx - \left(\operatorname{sen} y \log(5x + 15) - \frac{1}{y} \right) dy = 0.$
46. $x^2 y'' + (y')^2 = 0.$
47. $(xy + y - 1) dx + x dy = 0.$
48. $x^2 y' - y^2 = 2xy.$
49. $y'' = 2y(y')^3.$
50. $\frac{dx}{dy} + x \cot y = \sec y.$
51. Un depósito contiene 50 galones de salmuera con 25 libras de sal disueltas en ella. A partir del instante $t = 0$ entra agua en él a un ritmo de 2 galones/minuto, y la mezcla escapa al mismo ritmo por un orificio de salida hacia un segundo depósito que contenía inicialmente 50 galones de agua pura. ¿Cuándo alcanzará el segundo depósito la máxima cantidad de sal?
52. Una extensión natural de la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y' = p(x) + q(x)y$$

es la *ecuación de Riccati*⁴

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2.$$

⁴ El conde Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) fue un sabio italiano que escribió sobre matemáticas, física y filosofía. Fue el principal responsable de la introducción de las ideas de Newton en Italia. En un momento dado se le ofreció la presidencia de la Academia de Ciencias de San Petersburgo pero lógicamente prefirió la comodidad y tranquilidad de su aristocrática vida en Italia a las responsabilidades administrativas en Rusia. Aunque ampliamente conocido en los círculos científicos de su tiempo, se le recuerda ahora tan sólo por la ecuación diferencial que lleva su nombre. Incluso esto fue un accidente histórico, ya que Riccati simplemente estudió casos particulares de esta ecuación sin hallar solución alguna, y la mayoría de esos casos fueron tratados con éxito por miembros de la familia Bernoulli. Los detalles de esta complicada historia pueden consultarse en G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2.^a ed., págs. 1-3, Cambridge University Press, Londres, 1944. La *ecuación especial de Riccati* $y' + by^2 = cx^n$ se sabe que es resoluble en términos finitos si y sólo si el exponente m es -2 o de la forma $-4k/(2k + 1)$ para algún entero k (véase Problema 47-8).

En general, esta ecuación no se puede resolver por métodos elementales. No obstante, si se conoce una solución particular $y_1(x)$, la solución general tiene la forma

$$y(x) = y_1(x) + z(x)$$

donde $z(x)$ es la solución general de la ecuación de Bernoulli

$$z' - (q + 2ry_1)z = rz^2.$$

Demostrar esto y calcular la solución general de la ecuación

$$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5,$$

que tiene a $y_1(x) = x$ como solución particular evidente.

53. La propagación de una acción en una población grande (por ejemplo, comprar un automóvil llamativo) a veces depende sólo parcialmente de circunstancias externas (precio, calidad y coste de mantenimiento) y parcialmente de la tendencia humana a imitar lo que otros hacen. En este caso, el incremento de la proporción $y(t)$ de población que ha realizado tal acción puede expresarse por la fórmula

$$\frac{dy}{dt} = (1 - y)[s(t) + Iy], \quad (*)$$

donde $s(t)$ mide el estímulo externo e I es una constante llamada *coeficiente de imitación*⁵.

- (a) Nótese que (*) es una ecuación de Riccati y que $y = 1$ es una solución obvia. Usar el resultado del Problema 52 para hallar la ecuación de Bernoulli que satisface $z(t)$.
 (b) Hallar $y(t)$ cuando el estímulo externo crece uniformemente con el tiempo, de modo que $s(t) = at$ para una constante positiva a . Deje la respuesta en forma integral.
54. (a) Si la ecuación de Riccati del Problema 52 tiene una solución $y_1(x)$ conocida, mostrar que la solución general tiene la forma de una familia uniparamétrica de curvas

$$y = \frac{cf(x) + g(x)}{cF(x) + G(x)}.$$

- (b) Probar que, recíprocamente, la ecuación diferencial de cualquier familia uniparamétrica de esa forma es una ecuación de Riccati.

⁵ Véase Anatol Rapoport, «Contribution to the Mathematical Theory of Mass Behavior: I. The Propagation of Single Acts», *Bulletin of Mathematical Biophysics*, vol. 14, págs. 159-169 (1952).

Problemas dinámicos con masa variable. En las páginas precedentes hemos considerado muchas aplicaciones de la segunda ley de Newton del movimiento vista en la Sección 1:

$$F = ma,$$

donde F es la fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa m cuya aceleración es a . Hemos de hacer notar que tal formulación se aplica sólo a situaciones en que la masa es constante. La ley de Newton es, en realidad, más general, y afirma que cuando una fuerza F actúa sobre un cuerpo de masa m , le transmite momento (mv , siendo v la velocidad) a un ritmo igual a la fuerza:

$$F = \frac{d}{dt}(mv).$$

Esta ecuación se reduce a $F = ma$ cuando m es constante. Al aplicar esta forma de la ley a un cuerpo móvil de masa variable, es necesario distinguir el momento producido por F del producido por la masa que se añade al cuerpo proveniente del exterior. Así pues, si se está añadiendo a m masa con velocidad $v + w$ (de modo que w es la velocidad relativa a m) a un ritmo dm/dt , el efecto de F en aumentar el momento debe ser sumado a $(v + w) dm/dt$, con lo que se obtiene

$$(v + w) \frac{dm}{dt} + F = \frac{d}{dt}(mv),$$

que se simplifica a

$$w \frac{dm}{dt} + F = m \frac{dv}{dt}.$$

Nótese que dm/dt es positivo o negativo según el cuerpo gane o pierda masa, y que w es positiva o negativa dependiendo del movimiento de la masa ganada o perdida respecto a m . Los problemas que siguen ilustran estas ideas.

55. Un cohete de masa estructural m_1 contiene fuel de masa inicial m_2 . Se lanza en vertical desde la superficie terrestre y va quemando fuel a un ritmo constante a (de modo que $dm/dt = -a$, siendo m la masa total variable del cohete) expulsando los productos de la combustión hacia atrás con velocidad b constante relativa al cohete. Despreciando todas las fuerzas externas salvo la gravedad y suponiendo g constante, hallar la velocidad y la altura alcanzada en el instante en que el fuel se agota⁶.

⁶ La experiencia de los ingenieros expertos en este asunto sugiere fuertemente que ninguna combinación previsible de fuel y diseño del cohete permitirá a éste, partiendo del reposo, adquirir la velocidad de escape $\sqrt{2gR}$. Esto significa que cohetes de un solo cuerpo de esta clase no pueden usarse para viajes por el espacio desde la superficie terrestre, y seguirá siendo preciso recurrir a los ya familiares cohetes multicuerpo de las últimas décadas.

56. Una gota de lluvia esférica, partiendo del reposo, cae por influjo de la gravedad. Si recoge vapor de agua (supuesto en reposo) a un ritmo proporcional a su superficie y su radio inicial era 0, probar que cae con aceleración constante $g/4$.
57. Si el radio inicial de la gota del problema anterior es r_0 y r es el radio en el instante t , demostrar que la aceleración en el instante t es

$$\frac{g}{4} \left(1 + \frac{3r_0^4}{r^4} \right).$$

Así pues, la aceleración es constante, con valor $g/4$, si y sólo si la gota tiene radio inicial 0.

58. Una gota de lluvia esférica, partiendo del reposo, cae a través de una niebla uniforme. Si recoge gotitas de agua en su camino (supuestas en reposo) conforme desciende y si su radio inicial era 0, probar que cae con aceleración constante $g/7$.
59. La teoría de la relatividad especial de Einstein asegura que la masa m de una partícula que se mueve con velocidad v viene dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (*)$$

siendo c la velocidad de la luz y m_0 su masa en reposo.

- (a) Si la partícula parte del reposo en el espacio vacío y se mueve durante largo tiempo bajo la influencia de un campo gravitatorio constante, hallar v en función del tiempo tomando $w = -v$ y mostrar que $v \rightarrow c$ cuando $t \rightarrow \infty$ ⁷.
- (b) Sea $M = m - m_0$ el incremento de masa de la partícula. Si el correspondiente incremento E en la energía se toma como el trabajo realizado sobre ella por la fuerza F , de modo que

$$E = \int_0^v F dx = \int_0^v \frac{d}{dt} (mv) dx = \int_0^v v d(mv),$$

verificar que

$$E = Mc^2. \quad (**)$$

- (c) Deducir (*) de (**).

7 Enrico Fermi sugirió que el fenómeno aquí descrito, transferido al caso de las partículas cargadas del polvo interestelar, aceleradas por los campos magnéticos de las estrellas, puede ser la causa de los rayos cósmicos primarios.

ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

14. INTRODUCCION

En los capítulos precedentes hemos estudiado unos cuantos tipos especiales de ecuaciones diferenciales resolubles en términos de funciones elementales. Los métodos desarrollados requieren considerable manejo de las técnicas de integración, y sus muchas aplicaciones interesantes tienen el marchamo de las cosas útiles. Desgraciadamente, sin embargo, debemos reconocer que esta parte del tema es más bien un sombrero de prestidigitador, y no proporciona perspectiva alguna acerca de la naturaleza general de las ecuaciones diferenciales y de sus soluciones. En el presente capítulo discutiremos una clase importante de ecuaciones cuya teoría es rica y de gran alcance. Veremos que esta teoría admite una estructura simple basada en unos pocos principios elementales.

La ecuación diferencial lineal de segundo orden general es

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x),$$

o más brevemente

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x). \quad (1)$$

Como la notación indica, se sobrentiende que $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son funciones de x solamente (quizá constantes). Es claro que no se pierde generalidad si se toma el coeficiente de y'' como 1, ya que eso siempre se puede lograr por división. Las ecuaciones de esta clase son vitales en física, sobre todo en relación con vibraciones en mecánica y con la teoría de circuitos eléctricos.

Además, como veremos en capítulos posteriores, muchas ideas bellas y profundas de las matemáticas han nacido del estudio de estas ecuaciones.

No debe engañarnos el que las ecuaciones lineales de primer orden son fáciles de resolver mediante ciertas fórmulas. En general, (1) no se puede resolver explícitamente en términos de funciones elementales, ni tan siquiera en términos de integraciones indicadas. Para encontrar soluciones suele ser necesario recurrir a procesos infinitos de uno u otro tipo, con frecuencia series infinitas. Muchas ecuaciones especiales de particular importancia en las aplicaciones, como las de Legendre y Bessel citadas en la Sección 1, han sido objeto de exhaustivo análisis, y la teoría de una sola de tales ecuaciones ha constituido un apartado completo del análisis. Estudiaremos estas cuestiones en los Capítulos 5 y 8.

En este capítulo nuestras consideraciones sobre los métodos de resolución de (1) se restringirán, casi por completo, al caso especial en que los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ son constantes. Hay que decir que la mayoría de las ideas y procedimientos que discutiremos son generalizables a las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, sin cambio en los principios básicos, aunque con una notable complicación en los detalles. Al restringir nuestra atención a las de segundo orden conseguiremos tanta sencillez como sea posible sin distorsionar las nociones implicadas, y todavía tendremos la suficiente generalidad como para tratar todas las ecuaciones lineales del máximo interés en matemáticas y física.

Dado que por lo general no es posible producir una solución explícita de (1) por simple inspección, lo primero que hemos de hacer es asegurarnos de que esa ecuación tiene realmente alguna solución. El siguiente teorema de existencia y unicidad se demuestra en el Capítulo 13.

Teorema A. *Sean $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ ¹. Si x_0 es cualquier punto en $[a, b]$ y si y_0 , y'_0 son números arbitrarios, la ecuación (1) tiene una y sólo una solución $y(x)$ sobre el intervalo completo tal que $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$.*

Así pues, bajo estas hipótesis, en cualquier punto x_0 de $[a, b]$ podemos prescribir los valores de $y(x)$ e $y'(x)$, y existirá una solución que tome esos valores en el punto dado; o sea, más geométricamente, (1) tiene una única solución en $[a, b]$ que pasa por un punto especificado (x_0, y_0) con pendiente prefijada y'_0 . En nuestra discusión general a lo largo del resto de este capítulo daremos por supuesto, sin decirlo ya explícitamente, que se cumplen las hipótesis del Teorema A.

Ejemplo 1. Hallar la solución del problema de valores iniciales

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1.$$

¹ Si a y b son números reales tales que $a < b$, el símbolo $[a, b]$ denota el intervalo que consta de todos los números reales x que satisfacen las desigualdades $a \leq x \leq b$. Este intervalo se llama cerrado porque contiene sus puntos extremos. El intervalo abierto resultante al excluir esos dos puntos se denota por (a, b) y se define mediante las desigualdades $a < x < b$.

Sabemos que $y = \sin x$, $y = \cos x$, y más en general $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ para cualesquiera constantes c_1 y c_2 , son soluciones de esa ecuación diferencial. Además, $y = \sin x$ satisface claramente las condiciones iniciales, ya que $\sin 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$. Por el Teorema A, $y = \sin x$ es la *única* solución del problema de valores iniciales dado, y queda, por tanto, completamente caracterizada como función por dicho problema. De la misma manera, $y = \cos x$ es solución, y, por consiguiente, la *única* solución, del correspondiente problema de valores iniciales

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0.$$

Como toda la trigonometría puede verse como el desarrollo de las propiedades de estas dos funciones, se sigue que toda la trigonometría está contenida por implicación (como lo está el roble en la bellota) en los dos problemas de valores iniciales antes citados. Examinaremos esta interesante idea con mayor detalle en el Capítulo 4.

Queremos insistir en que las condiciones iniciales que determinan en el Teorema A una única solución de (1) son condiciones sobre el valor de la solución y el de su derivada en un solo punto fijado x_0 del intervalo $[a, b]$. En contraste con ello, el problema de hallar una solución de (1) que satisfaga condiciones de la forma $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, donde x_0, x_1 son puntos distintos del intervalo, no queda cubierto por el Teorema A. Problemas de ese tipo se llaman *problemas de contorno*, y se tratan en el Capítulo 7.

El término $R(x)$ en la ecuación (1) está aislado de los otros y escrito a la derecha porque no contiene a la variable dependiente y ni a sus derivadas. Si $R(x)$ es idénticamente cero, la (1) se reduce a la *ecuación homogénea*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (2)$$

(Este uso tradicional de la palabra *homogénea* no debe confundirse con otro igualmente tradicional pero totalmente diferente ya usado en la Sección 7.) Si $R(x)$ no es idénticamente cero, se dice que (1) es *no homogénea*.

Al estudiar la ecuación no homogénea (1) es necesario considerar a la par la ecuación homogénea (2) que se obtiene de ella sustituyendo $R(x)$ por 0. Bajo estas circunstancias, se habla de (1) como *ecuación completa* y de (2) como *ecuación reducida* asociada a ella. La razón de esa relación entre ambas será patente en un momento.

Supongamos que por algún medio sabemos que $y_g(x, c_1, c_2)$ es la solución general de (2) (esperamos que contenga dos constantes arbitrarias por ser de segundo orden la ecuación) y que $y_p(x)$ es una solución particular fijada de (1). Si $y(x)$ es una solución cualquiera de (1), un sencillo cálculo muestra que $y(x) - y_p(x)$ es solución de (2):

$$\begin{aligned} (y - y_p)'' + P(x)(y - y_p)' + Q(x)(y - y_p) &= \\ &= [y'' + P(x)y' + Q(x)y] - [y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p] = \\ &= R(x) - R(x) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Como $y_g(x, c_1, c_2)$ es la solución general de (2), se deduce que $y(x) - y_p(x) = y_g(x, c_1, c_2)$, o sea,

$$y(x) = y_g(x, c_1, c_2) + y_p(x)$$

con una adecuada elección de las constantes c_1 y c_2 . Este argumento demuestra el teorema siguiente.

Teorema B. *Si y_g es la solución general de la ecuación reducida (2) y si y_p es una solución particular de la ecuación completa (1), entonces $y_g + y_p$ es la solución general de (1).*

En la Sección 19 veremos que, si se conoce y_g , existe un procedimiento formal para hallar y_p . Así pues, el problema central en la teoría de las ecuaciones lineales consiste en resolver la ecuación homogénea. De acuerdo con esto, nuestra atención va a estar dirigida esencialmente al estudio de la estructura de y_g y a investigar diversos métodos de determinar su forma explícita, ninguno de los cuales será efectivo con carácter universal.

La primera cosa que hemos de hacer notar acerca de la ecuación homogénea (2) es que la función $y(x) = 0$ para todo x , o sea, idénticamente nula, siempre es una solución. Se le llama la *solución trivial*, y no suele tener interés alguno. El hecho fundamental sobre la estructura de las soluciones de (2) viene enunciado en el siguiente teorema.

Teorema C. *Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones cualesquiera de (2), entonces*

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (4)$$

también es solución para todo par de constantes c_1 y c_2 .

Demostración. La afirmación se desprende inmediatamente de

$$\begin{aligned} (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + P(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + Q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) &= \\ &= (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + P(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + Q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

donde los factores que acompañan a c_1 y c_2 son cero porque, por hipótesis, y_1 e y_2 son soluciones de (2).

Por analogía con el álgebra vectorial elemental, la solución (4) se dice que es una *combinación lineal* de las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Si usamos esta terminología, el Teorema C se puede reformular así: *cualquier combinación lineal de dos soluciones de la ecuación homogénea (2) es también solución.*

Supongamos que por un medio u otro nos las hemos arreglado para conocer dos soluciones de (2). Entonces, este teorema nos da otra solución que contiene

dos constantes arbitrarias, y que puede ser, por tanto, la solución general de (2). Existe una dificultad: si y_1 o y_2 son múltiplos una de la otra, digamos $y_1 = ky_2$, entonces

$$c_1y_1 + c_2y_2 = c_1ky_2 + c_2y_2 = (c_1k + c_2)y_2 = cy_2,$$

y sólo hay una constante presente. Sobre esta base tenemos suficiente motivo para esperar que si ninguna de las soluciones y_1 e y_2 es múltiplo de la otra, entonces

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

será la solución general de (2). Demostraremos esto en la próxima sección.

En ocasiones, la forma especial de una ecuación lineal nos permite hallar soluciones particulares sencillas a simple vista o experimentando con potencias, exponenciales o funciones trigonométricas.

Ejemplo 2. Resolver

$$y'' + y' = 0.$$

A simple vista se observa que $y_1 = 1$ e $y_2 = e^{-x}$ son soluciones. Es obvio que no son múltiplo una de otra, así que (dando por hecho el resultado anunciado y todavía no demostrado) concluimos que

$$\begin{aligned} y &= c_1 + c_2e^{-x} & y &= x^m \\ \dot{y} &= -c_2e^{-x} & \dot{y} &= m x^{m-1} \\ \ddot{y} &= 0 & \ddot{y} &= m(m-1)x^{m-2} \end{aligned}$$

es la solución general.

Ejemplo 3. Resolver

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Como al derivar una potencia su exponente disminuye en una unidad, la forma de esta ecuación diferencial sugiere buscar posibles soluciones del tipo $y = x^n$. Sustituyendo esto en la ecuación y dividiendo por el factor común x^n llegamos a la ecuación cuadrática $n(n-1) + 2n - 2 = 0$, o sea, $n^2 + n - 2 = 0$. Sus raíces son $n = 1, -2$, luego $y_1 = x$, $y_2 = x^{-2}$ son soluciones e

$$y = c_1x + c_2x^{-2}$$

es la solución general sobre cualquier intervalo que no contenga al origen.

Interesa hacer notar que una buena parte de la teoría de las ecuaciones lineales reposa en las fundamentales propiedades recogidas en los Teoremas B y C. Una mirada a los cálculos (3) y (5) convence inmediatamente de

que estas propiedades dependen a su vez de la *linealidad de la derivación*, esto es, del hecho de que

$$[\alpha f(x) + \beta g(x)]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

para todas las constantes α, β y todo par de funciones derivables $f(x), g(x)$.

PROBLEMAS

En los problemas que siguen damos por sabido el hecho anunciado antes, y que no ha sido probado aún, de que si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones de (2), entonces $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ es la solución general.

1. (a) Verificar que $y_1 = 1$ e $y_2 = x^2$ son soluciones de la ecuación reducida $xy'' - y' = 0$, y escribir la solución general.
 (b) Determinar el valor de a para el cual $y_p = ax^3$ es solución particular de la ecuación completa $xy'' - y' = 3x^2$. Usar esa solución y el resultado de la parte (a) para escribir la solución general de esta ecuación. (Comparar con el Ejemplo 1 de la Sección 11.)
 (c) ¿Puede encontrar y_1, y_2 e y_p por simple inspección?
2. Verificar que $y_1 = 1$ e $y_2 = \log x$ son soluciones de la ecuación $xy'' + y' = 0$ y escribir la solución general. ¿Puede adivinar y_1 e y_2 por simple inspección?
3. (a) Comprobar que $y_1 = e^{-x}$ e $y_2 = e^{2x}$ son soluciones de la ecuación reducida $y'' - y' - 2y = 0$. ¿Cuál es su solución general?
 (b) Hallar a y b tales que $y_p = ax + b$ sea una solución particular de la ecuación completa $y'' - y' - 2y = 4x$. Usar esta solución junto con el resultado del apartado (a) para escribir la solución general de esta ecuación.
4. A simple vista, o a base de ensayos, hallar una solución particular para cada una de estas ecuaciones diferenciales:
 (a) $x^3y'' + x^2y' + xy = 1$; (c) $y'' - 2y = \operatorname{sen} x$.
 (b) $y'' - 2y' = 6$;
5. En cada uno de los casos siguientes hallar, por inspección o ensayando, soluciones particulares de la ecuación reducida y de la ecuación completa, y escribir la solución general:
 (a) $y'' = e^x$; (d) $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$;
 (b) $y'' - 2y' = 4$; (e) $y'' + 2y' = 6e^x$.
 (c) $y'' - y = \operatorname{sen} x$;
6. Eliminando las constantes c_1 y c_2 , hallar la ecuación diferencial de cada una de estas familias de curvas:
 (a) $y = c_1x + c_2x^2$; (e) $y = c_1x + c_2 \operatorname{sen} x$;
 (b) $y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}$; (f) $y = c_1e^x + c_2xe^x$;
 (c) $y = c_1 \operatorname{sen} kx + c_2 \cos kx$; (g) $y = c_1e^x + c_2e^{-3x}$;
 (d) $y = c_1 + c_2e^{-2x}$; (h) $y = c_1x + c_2x^{-1}$.

7. Comprobar que $y = c_1x^{-1} + c_2x^5$ es solución de

$$x^2y'' - 3xy - 5y = 0$$

sobre cualquier intervalo $[a, b]$ que no contenga al origen. Si $x_0 \neq 0$ y si y_0 e y'_0 son arbitrarios, probar directamente que c_1 y c_2 pueden elegirse de una y sólo de una manera tal que $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$.

8. Demostrar que $y = x^2 \operatorname{sen} x$ e $y = 0$ son soluciones de

$$x^2y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0,$$

y cumplen ambas las condiciones $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. ¿Por qué no contradice esto al Teorema A?

9. Si una solución de la ecuación (2) sobre el intervalo $[a, b]$ es tangente al eje x en todo punto de ese intervalo, entonces es necesariamente nula. ¿Por qué?
10. Si y_1 e y_2 son dos soluciones de (2) sobre un intervalo $[a, b]$ que tienen un cero común en ese intervalo, probar que una es múltiplo constante de la otra. [Recordar que un punto x_0 se llama un *cero* de la función $f(x)$ si $f(x_0) = 0$.]

15. LA SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION HOMOGENEA

Si dos funciones f y g están definidas sobre un intervalo $[a, b]$ y una de ellas es un múltiplo constante de la otra, se dice que son *linealmente dependientes* sobre $[a, b]$. En caso contrario, es decir, si ninguna de ellas es múltiplo constante de la otra, se dice que son *linealmente independientes*. Nótese que si $f(x)$ es idénticamente cero, entonces f y g son linealmente dependientes, sea cual fuere la función g , ya que $f(x) = 0 \cdot g(x)$.

En esta sección nos proponemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema A. *Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

en un intervalo $[a, b]$. Entonces

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \quad (2)$$

es la solución general de la ecuación (1) en $[a, b]$, en el sentido de que toda solución de (1) sobre ese intervalo se puede obtener de (2) por una elección apropiada de las constantes arbitrarias c_1 y c_2 .

La demostración se hará en varias etapas.

Sea $y(x)$ cualquier solución de (1) sobre $[a, b]$. Hay que probar que es posible hallar constantes c_1 y c_2 tales que

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

para todo x en $[a, b]$. Por el Teorema 14-A, una solución de (1) sobre todo el intervalo $[a, b]$ queda completamente determinada por su valor y el valor de su derivada en un único punto. En consecuencia, como $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ e $y(x)$ son ambas soluciones de (1), bastará probar que en algún punto x_0 de $[a, b]$ se pueden encontrar c_1 y c_2 tales que

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0)$$

y

$$c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) = y'(x_0).$$

Para que este sistema tenga solución en c_1 y c_2 , es suficiente que el determinante

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y'_2(x_0) - y_2(x_0)y'_1(x_0)$$

sea distinto de cero. Lo cual nos conduce a investigar la función de x definida por

$$W(y_1, y_2) = y_1 y'_2 - y_2 y'_1,$$

conocida como el *wronskiano*² de y_1 e y_2 , con referencia especial a si se anula o no en el punto x_0 . Nuestro primer lema simplifica la cuestión poniendo de manifiesto que la localización del punto x_0 no es relevante.

Lema 1. Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones cualesquiera de la ecuación (1) sobre $[a, b]$, su wronskiano o es idénticamente nulo o no se anula en ningún punto de $[a, b]$.

Demostración. Comenzamos observando que

$$\begin{aligned} W' &= y_1 y''_2 + y_1 y'_2 - y_2 y''_1 - y'_2 y'_1 = \\ &= y_1 y''_2 - y_2 y''_1. \end{aligned}$$

² Hoënné Wronski (1778-1853) fue un polaco sin medios económicos y de personalidad errática que pasó la mayor parte de su vida en Francia. El determinante wronskiano citado aquí fue su única contribución a las matemáticas. Es el único matemático polaco del siglo XIX cuyo nombre se recuerda hoy, lo que no deja de ser sorprendente a la vista de las muchas figuras eminentes que Polonia ha producido en este campo en el siglo XX.

Ahora bien, como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son ambas soluciones de (1), tenemos

$$y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$$

e

$$y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0.$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por y_2 , la segunda por y_1 y restando se obtiene

$$(y_1y_2'' - y_2y_1'') + P(y_1y_2' - y_2y_1') = +0,$$

o sea,

$$\frac{dW}{dx} + PW = 0.$$

La solución general de esta ecuación diferencial de primer orden es

$$W = ce^{-\int P dx},$$

y puesto que el factor exponencial nunca es cero, vemos que W es idénticamente cero si la constante $c = 0$, y nunca si $c \neq 0$, lo que termina la demostración³.

Este resultado reduce la demostración del teorema a probar que el wronskiano de cualquier par de soluciones linealmente independientes de (1) no es idénticamente cero. Logramos tal objetivo en el próximo lema, que de hecho nos enseña más de lo estrictamente necesario.

Lema 2. *Dos soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de la ecuación (1) en $[a, b]$ son linealmente dependientes sobre ese intervalo si y sólo si su wronskiano $W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1'$ es idénticamente cero.*

Demostración. Empezaremos suponiendo que y_1 e y_2 son linealmente dependientes, y demostrarímos como consecuencia que $y_1y_2' - y_2y_1' = 0$. En primer lugar, si una de las dos funciones es idénticamente cero, la conclusión es obvia. Podemos suponer, por tanto, sin pérdida de generalidad que ninguna de ellas es idénticamente nula. De ello se deduce que, al ser linealmente dependientes, una ha de ser múltiplo constante de la otra. De acuerdo con eso, $y_2 = cy_1$ para alguna constante c , de modo que $y_2' = cy_1'$. Así pues,

$$\begin{aligned} y_1y_2' - y_2y_1' &= y_1(cy_1') - (cy_1)y_1' = \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo que demuestra esta mitad del lema.

³ La fórmula (3) se debe al gran matemático noruego Niels Henrik Abel (véase Apéndice B del Capítulo 9), y se conoce como *fórmula de Abel*.

Supongamos ahora que el wronskiano es idénticamente nulo y probemos la dependencia lineal. Si y_1 es idénticamente cero en $[a, b]$, entonces (como ya se advirtió al comienzo de esta sección) las funciones son linealmente dependientes. Por tanto, podemos suponer que y_1 no se anula idénticamente sobre $[a, b]$, de donde se sigue por continuidad que no se anula en algún subintervalo $[c, d]$ de $[a, b]$. Como el wronskiano es idénticamente cero sobre $[a, b]$, podemos dividirlo por y_1^2 para obtener

$$\frac{y_1 y'_2 - y_2 y'_1}{y_1^2} = 0$$

sobre $[c, d]$. Eso puede expresarse como $(y_2/y_1)' = 0$, e integrando se obtiene $(y_2/y_1) = k$, o sea, $y_2(x) = ky_1(x)$ para alguna constante k y para todo x en $[c, d]$. Finalmente, ya que $y_2(x)$ y $ky_1(x)$ toman los mismos valores en $[c, d]$, tienen asimismo derivadas iguales, y el Teorema 14-A lleva a la conclusión

$$y_2(x) = ky_1(x)$$

para todo x en $[a, b]$, lo que finaliza el argumento.

Con este lema, la demostración del Teorema A queda completa.

De ordinario, el camino más simple para demostrar que dos soluciones de (1) son linealmente independientes sobre un intervalo es mostrar que su cociente no es constante allí, lo que en muchos casos se ve a simple vista. En ocasiones, sin embargo, conviene emplear el criterio del Lema 2: calcular el wronskiano y probar que no se anula. Ambos procedimientos se ilustran en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Probar que $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ es la solución general de $y'' + y = 0$ sobre cualquier intervalo y hallar la solución particular para la cual $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$.

Que $y_1 = \operatorname{sen} x$ e $y_2 = \cos x$ son soluciones se comprueba sin dificultad. Que son linealmente independientes sobre cualquier intervalo $[a, b]$ se sigue de que $y_1/y_2 = \operatorname{tg} x$ no es constante, o del hecho de que el wronskiano nunca se hace cero:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1.$$

Como $P(x) = 0$ y $Q(x) = 1$ son continuas en $[a, b]$, se deduce del Teorema A que $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ es la solución general de la ecuación diferencial dada sobre $[a, b]$. Además, puesto que el intervalo $[a, b]$ puede extenderse cuanto se quiera sin llegar a puntos de discontinuidad de $P(x)$ y $Q(x)$, tal solución general es válida en todo x . Para hallar la requerida solución particular, resolvamos el sistema

$$\begin{aligned} c_1 \operatorname{sen} 0 + c_2 \cos 0 &= 2, \\ c_1 \cos 0 - c_2 \operatorname{sen} 0 &= 3. \end{aligned}$$

Esto da $c_2 = 2$ y $c_1 = 3$, luego $y = 3 \operatorname{sen} x + 2 \cos x$ es la solución particular que satisface las condiciones dadas.

Los componentes de dependencia e independencia lineal son importantes en un marco mucho más amplio que el aquí expuesto. Como el lector sabrá ya probablemente, la rama de las matemáticas llamada *álgebra lineal* es en esencia un estudio abstracto de estos conceptos, con diversas aplicaciones en álgebra, geometría y análisis.

PROBLEMAS

En los Problemas 1 a 7, usar el wronskiano para discutir la independencia lineal.

- Probar que e^x y e^{-x} son soluciones linealmente independientes de $y'' - y = 0$ sobre cualquier intervalo.
- Demostrar que $y = c_1x + c_2x^2$ es la solución general de

$$x^2y'' - 2xy'' + 2y = 0$$

sobre todo intervalo que no contenga al 0 y hallar la solución particular para la cual $y(1) = 3$, $y'(1) = 5$.

- Verificar que $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ es la solución general de

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

en todo intervalo y hallar la solución particular con $y(0) = -1$ e $y'(0) = 1$.

- Probar que $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$ es la solución general de

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

sobre cualquier intervalo.

- Por inspección o por ensayo, hallar dos soluciones linealmente independientes de $x^2y'' - 2y = 0$ sobre el intervalo $[1, 2]$ y determinar la solución particular que satisface las condiciones iniciales $y(1) = 1$, $y'(1) = 8$.
- En los siguientes casos, comprobar que las funciones y_1 , y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial dada sobre el intervalo $[0, 2]$ y hallar la solución particular que cumple las condiciones iniciales especificadas:

- $y'' + y' - 2y = 0$, $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-2x}$, $y(0) = 8$ e $y'(0) = 2$;
- $y'' + y' - 2y = 0$, $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-2x}$, $y(1) = 0$ e $y'(1) = 0$;
- $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y_1 = e^{-2x}$ e $y_2 = e^{-3x}$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$;
- $y'' + y' = 0$, $y_1 = 1$ e $y_2 = e^{-x}$, $y(2) = 0$ e $y'(2) = e^{-2}$.

- (a) Usar alguno (o los dos) de los métodos descritos en la Sección 11 para calcular todas las soluciones de $y'' + (y')^2 = 0$.
(b) Verificar que $y_1 = 1$ e $y_2 = \log x$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación en (a) sobre todo intervalo a la derecha del origen. ¿Es $y = c_1 + c_2 \log x$ la solución general? Razonar la respuesta.

8. Probar, usando el wronskiano, que dos soluciones de la ecuación homogénea (1) sobre el intervalo $[a, b]$ son linealmente independientes si
- tienen un cero común x_0 en ese intervalo (Problema 14-10);
 - tienen máximos o mínimos en un mismo punto x_0 del intervalo.
9. Consideremos las dos funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2|x|$ sobre el intervalo $[-1, 1]$.
- Probar que su wronskiano $W(f, g)$ se anula idénticamente.
 - Probar que f y g no son linealmente dependientes.
 - ¿Contradicen (a) y (b) al Lema 2? Razonar el porqué.
10. Es claro que $\sin x$, $\cos x$ y $\sin x - \cos x$ son dos pares diferentes de soluciones linealmente independientes de $y'' + y = 0$. Así pues, si y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

vemos que *no* vienen unívocamente determinadas por la ecuación.

- (a) Demostrar que

$$P(x) = -\frac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{W(y_1, y_2)}$$

y

$$Q(x) = \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{W(y_1, y_2)},$$

de manera que la ecuación *sí* está unívocamente determinada por cualquier par de soluciones linealmente independientes.

- Usar (a) para reconstruir la ecuación $y'' + y = 0$ de cada uno de los pares de soluciones antes citados.
 - Usar (a) para reconstruir la ecuación diferencial del Problema 4 a partir de las soluciones linealmente independientes e^{2x} , xe^{2x} .
11. (a) Probar que aplicando la sustitución $y = uv$ a la ecuación homogénea (1) es posible obtener una ecuación homogénea lineal de segundo orden para v en la que no aparece v' . Hallar u y la ecuación para v en términos de los coeficientes originales $P(x)$ y $Q(x)$.
- Usar el método de la parte (a) para hallar la solución general de $y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0$.

16. USO DE UNA SOLUCION CONOCIDA PARA HALLAR OTRA

Como hemos visto, es fácil escribir la solución general de la ecuación homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

siempre que conozcamos dos soluciones linealmente independientes y_1 e y_2 . Pero ¿cómo hallar y_1 e y_2 ? Desgraciadamente no hay método general para tal fin. No obstante, existe un procedimiento para hallar y_2 si ya se conoce y_1 . Ello es de considerable importancia, porque con frecuencia es sencillo dar, por simple inspección o por otras vías, con una solución de (1).

Para desarrollar este procedimiento, supongamos que $y_1(x)$ es una solución no nula de (1) conocida, con lo que $cy_1(x)$ también es solución para toda constante c . La idea básica es sustituir c por una función desconocida $v(x)$ e intentar entonces hallar $v(x)$ de modo tal que $y_2 = vy_1$ sea solución de (1). No está nada claro, en principio, que este truco vaya a dar frutos, pero de hecho funciona. Para intuir la razón, recordemos que dos soluciones son linealmente independientes si su cociente y_2/y_1 es una función no constante de x , digamos v ; y si podemos hallar v , como conocemos y_1 , deduciremos y_2 , quedando resuelto nuestro problema.

Supongamos pues que $y_2 = vy_1$ es una solución de (1), así que

$$y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0, \quad (2)$$

e intentemos descubrir la función desconocida $v(x)$. Sustituyendo $y_2 = vy_1$ y las expresiones

$$y_2' = vy_1' + v'y_1 \quad \text{e} \quad y_2'' = vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1$$

en (2) y reordenando queda

$$v(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + v''y_1 + v'(2y_1' + Py_1) = 0.$$

Puesto que y_1 es solución de (1), eso se reduce a

$$v''y_1 + v'(2y_1' + Py_1) = 0,$$

o sea,

$$\frac{v''}{v'} = -2 \frac{y_1'}{y_1} - P.$$

Integrando obtenemos

$$\log v' = -2 \log y_1 - \int P dx,$$

luego

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx}$$

y

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx. \quad (3)$$

Sólo resta mostrar que y_1 e $y_2 = vy_1$, donde v viene dada por (3), son linealmente independientes, y eso se deja al cuidado del lector en el Problema 1⁴.

Ejemplo 1. $y_1 = x$ es solución de $x^2y'' + xy' - y = 0$, como es evidente a simple vista. Hallar la solución general.

Para empezar, escribamos la ecuación diferencial dada en la forma (1):

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0.$$

Como $P(x) = 1/x$, una segunda solución linealmente independiente viene dada por $y_2 = vy_1$, donde

$$v = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int (1/x) dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{-\log x} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2}.$$

Esto da $y_2 = (-1/2)x^{-1}$, luego la solución general es $y = c_1x + c_2x^{-1}$.

PROBLEMAS

- Si y_1 es una solución no nula de (1) y si $y_2 = vy_1$, donde v viene dada por la fórmula (3), es la segunda solución hallada en el texto, demostrar que y_1 e y_2 son linealmente independientes calculando su wronskiano.
- Usar el método de esta sección para hallar y_2 y la solución general de las siguientes ecuaciones, a partir de la solución y_1 dada:
 - $y'' + y = 0$, $y_1 = \sin x$; (b) $y'' - y = 0$, $y_1 = e^x$.
- La ecuación $xy'' + 3y' = 0$ admite la solución evidente $y_1 = 1$. Hallar y_2 y la solución general.
- Comprobar que $y_1 = x^2$ es solución de $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ y hallar y_2 , así como la solución general.
- La ecuación $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ es el caso especial de la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0$$

con $p = 1$. Tiene a $y_1 = x$ como solución evidente. Hallar la solución general.

⁴ La fórmula 4 se debe al eminente matemático francés Joseph Liouville (véase nota al final de la Sección 43).

6. La ecuación diferencial $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$ es el caso especial de la de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

que corresponde a $p = 1/2$. Verificar que $y_1 = x^{-1/2}$ es solución sobre todo intervalo que contenga sólo valores positivos de x y hallar la solución general.

7. Aprovechando que $y_1 = x$ es obviamente solución de cada una de las ecuaciones que se indican a continuación, hallar su solución general:

$$(a) \quad y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0;$$

$$(b) \quad x^2y'' + 2xy' - 2y = 0;$$

$$(c) \quad x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0.$$

8. Hallar la solución general de $y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$.

9. Comprobar que $y_1 = e^x$ es solución de $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$ y hallar la solución general.

10. (a) Si n es un entero positivo, hallar dos soluciones linealmente independientes de

$$xy'' - (x+n)y' + ny = 0.$$

- (b) Hallar la solución general de la ecuación diferencial de la parte (a) cuando $n = 1, 2, 3$.

11. Hallar la solución general de $y'' - f(x)y' + [f(x) - 1]y = 0$.

12. Para llegar a la fórmula (3) por otro camino, más rápido, probar que $v' = (y_2/y_1)' = W(y_1, y_2)/y_1^2$ y usar la fórmula de Abel de la Sección 15 para hallar v .

17. LA ECUACION HOMOGENEA CON COEFICIENTES CONSTANTES

Ya estamos en disposición de discutir exhaustivamente la ecuación homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, en el caso especial en que P y Q sean constantes, digamos p y q :

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (1)$$

Nuestro punto de partida es la propiedad de la función exponencial e^{mx} de que sus derivadas son todos múltiplos de la propia función, lo que nos induce a considerar

$$y = e^{mx} \quad (2)$$

como una posible solución de (1) si la constante m se escoge adecuadamente. Como $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2e^{mx}$, sustituyendo en (1) vemos que

$$(m^2 + pm + q)e^{mx} = 0; \quad (3)$$

y puesto que e^{mx} nunca se anula, (3) se cumple si y sólo si m satisface la ecuación auxiliar

$$m^2 + pm + q = 0. \quad (4)$$

Las dos raíces m_1 y m_2 de esta ecuación, o sea, los valores de m para los que (2) es solución de (1), vienen dadas por la fórmula cuadrática

$$m_1, m_2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \quad (5)$$

Para profundizar más, hemos de separar varias situaciones diferentes subyacentes en (5).

Raíces reales distintas. Es claro que las raíces m_1 y m_2 son reales y distintas si y sólo si $p^2 - 4q > 0$. En este caso obtenemos las soluciones

$$e^{m_1 x} \quad \text{y} \quad e^{m_2 x}.$$

Como el cociente

$$\frac{e^{m_1 x}}{e^{m_2 x}} = e^{(m_1 - m_2)x}$$

no es constante, esas soluciones son linealmente independientes e

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \quad (6)$$

es la solución general de (1).

Raíces complejas distintas⁵. Las raíces m_1 y m_2 son distintas y complejas si y sólo si $p^2 - 4q < 0$. En tal caso, m_1 y m_2 se pueden escribir en la forma $a \pm ib$; y por la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (7)$$

⁵ Damos por supuesto que el lector conoce el álgebra elemental de los números complejos. La fórmula de Euler (7) es, o al menos debe ser, parte de cualquier curso de cálculo.

las dos soluciones de (1) son

$$e^{m_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \quad (8)$$

y

$$e^{m_2 x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax} (\cos bx - i \sin bx). \quad (9)$$

Ya que estamos interesados sólo en soluciones que sean funciones con valores reales, podemos sumar (8) y (9) y dividir por 2, o restar y dividir por 2i, obteniendo así

$$e^{ax} \cos bx \quad y \quad e^{ax} \sin bx. \quad (10)$$

Estas soluciones son linealmente independientes, de modo que la solución general de (1) es en este caso

$$y = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx). \quad (11)$$

Cabe mirar esto desde otro punto de vista. Una función compleja $w(x) = u(x) + iv(x)$ satisface (1), donde p y q son números reales si y sólo si $u(x)$ y $v(x)$ satisfacen (1) por separado. De este modo, una solución compleja siempre contiene dos soluciones reales, y (8) proporciona las dos soluciones (10) de un golpe.

Raíces reales iguales. Es evidente que las raíces m_1 y m_2 son reales e iguales si y sólo si $p^2 - 4q = 0$. Ahora sólo obtenemos una solución $y = e^{mx}$ con $m = -p/2$. Sin embargo, es fácil dar con otra solución linealmente independiente por el método de la sección anterior: si tomamos $y_1 = e^{(-p/2)x}$, entonces

$$(1) \quad v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} dx = \int \frac{1}{e^{-px}} e^{-px} dx = x$$

es $y_2 = vy_1 = xe^{mx}$. En este caso (1) tiene a

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} \quad (12)$$

como su solución general.

En resumen, tenemos tres formas diferentes, dadas por (6), (11) y (12), para la solución general de la ecuación homogénea (1) con coeficientes constantes, según sean las raíces m_1 y m_2 de la ecuación auxiliar (4). Es claro que la naturaleza cualitativa de esta solución general viene completamente caracterizada por los signos y magnitudes de los coeficientes p y q , y que puede variar

drásticamente si se modifican esos valores numéricos. Esto es muy importante para los físicos que analizan sistemas mecánicos o circuitos eléctricos descritos por ecuaciones diferenciales de la forma (1). Por ejemplo, si $p^2 - 4q < 0$, la gráfica de la solución es una onda cuya amplitud crece o decrece exponencialmente según que p sea negativo o positivo. Esta afirmación, y otras del mismo calibre, son consecuencias inmediatas de la discusión precedente y reciben un tratamiento exhaustivo en los libros que presentan las aplicaciones físicas de las ecuaciones diferenciales.

Las ideas de esta sección se deben fundamentalmente a Euler. En el Apéndice A se resumen unos pocos de los impresionantes logros de este científico genial.

PROBLEMAS

1. Hallar la solución general de cada una de estas ecuaciones:

(a) $y'' + y' - 6y = 0;$	(j) $y'' - 6y' + 25y = 0;$
(b) $y'' + 2y' + y = 0;$	(k) $4y'' + 20y' + 25y = 0;$
(c) $y'' + 8y = 0;$	(l) $y'' + 2y' + 3y = 0;$
(d) $2y'' - 4y' + 8y = 0;$	(m) $y'' = 4y;$
(e) $y'' - 4y' + 4y = 0;$	(n) $4y'' - 8y' + 7y = 0;$
(f) $y'' - 9y' + 20y = 0;$	(o) $2y'' + y' - y = 0;$
(g) $2y'' + 2y' + 3y = 0;$	(p) $16y'' - 8y' + y = 0;$
(h) $4y'' - 12y' + 9y = 0;$	(q) $v'' + 4y' + 5y = 0;$
(i) $y'' + y' = 0;$	(r) $y'' + 4y' - 5y = 0.$

2. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0,$	$y(1) = e^2$ e $y'(1) = 3e^2;$
(b) $y'' - 6y' + 5y = 0,$	$y(0) = 3$ e $y'(0) = 11;$
(c) $y'' - 6y' + 9y = 0,$	$y(0) = 0$ e $y'(0) = 5;$
(d) $y'' + 4y' + 5y = 0,$	$y(0) = 1$ e $y'(0) = 0;$
(e) $y'' + 4y' + 2y = 0,$	$y(0) = -1$ e $y'(0) = 2 + 3\sqrt{2};$
(f) $y'' + 8y' - 9y = 0,$	$y(1) = 2$ e $y'(1) = 0.$

3. Probar que la solución general de (1) tiende a 0 cuando $x \rightarrow \infty$ si y sólo si p y q son ambos positivos.
4. Demostrar, sin hacer uso de las fórmulas de esta sección, que la derivada de toda solución de la ecuación (1) también es solución.
5. La ecuación

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0,$$

donde p y q son constantes, se llama *ecuación equidimensional de Euler*⁶. Probar que el cambio $x = e^z$ la transforma en una ecuación con coeficientes constantes y aplicar esta técnica para hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

- (a) $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$; (f) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$;
- (b) $2x^2y'' + 10xy' + 8y = 0$; (g) $x^2y'' + 2xy' + 3y = 0$;
- (c) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$; (h) $x^2y'' + xy' - 2y = 0$;
- (d) $4x^2y'' - 3y = 0$; (i) $x^2y'' + xy' - 16y = 0$.
- (e) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$;

6. En el problema anterior se han transformado ciertas ecuaciones homogéneas con coeficientes variables en ecuaciones con coeficientes constantes cambiando la variable independiente. Consideremos la ecuación homogénea general

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)$$

y hagamos el cambio de variable independiente de x a $z = z(x)$, donde $z(x)$ es una función no especificada de x . Probar que la ecuación (*) puede ser transformada de este modo en una ecuación con coeficientes constantes si y sólo si $(Q' + 2PQ)/Q^{3/2}$ es constante, en cuyo caso $z = \int \sqrt{Q(x)} dx$ logrará el efecto buscado.

7. Usar el resultado del Problema 6 para saber si cada una de estas ecuaciones se puede transformar en una que tenga coeficientes constantes mediante cambio de variable independiente, y resolverla cuando ello sea posible:
- (a) $xy'' + (x^2 - 1)y' + x^3y = 0$;
 - (b) $y'' + 3xy' + x^2y = 0$.
8. En este problema presentamos otra manera de llegar a la segunda solución linealmente independiente de (1) cuando las raíces de la ecuación auxiliar son reales e iguales.

- (a) Si $m_1 \neq m_2$, verificar que la ecuación diferencial

$$y'' - (m_1 + m_2)y' + m_1m_2y = 0$$

tiene a

$$y = \frac{e^{m_1 x} - e^{m_2 x}}{m_1 - m_2}$$

como solución.

- (b) Pensando en m_2 como fija y usando la regla de L'Hospital, hallar el límite de la solución de la parte (a) cuando $m_1 \rightarrow m_2$.
- (c) Comprobar que el límite del apartado (b) satisface la ecuación diferencial obtenida en la parte (a) al sustituir m_1 por m_2 .

⁶ Se llama también *ecuación equidimensional de Cauchy*. Los descubrimientos de Euler fueron tan numerosos que muchos matemáticos intentan evitar confusiones bautizando ecuaciones, fórmulas, teoremas, etc., con el nombre de la primera persona que los estudió después de Euler.

18. EL METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

En las dos secciones anteriores hemos considerado varios métodos para hallar la solución general de la ecuación homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (1)$$

Como vimos, sólo son eficientes en ciertos casos especiales: cuando los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ son constantes o cuando, sin ser constantes, son lo bastante simples como para permitir encontrar una solución no nula a simple vista. Afortunadamente estas categorías son lo suficientemente amplias para cubrir un buen número de aplicaciones de relieve. Sin embargo, muchas ecuaciones homogéneas de importancia primordial en matemáticas y en física caen fuera del alcance de tales métodos y sólo pueden resolverse por el método de las series de potencias del Capítulo 5.

En esta sección y en la que seguirá volvemos la atención a la resolución de la ecuación no homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (2)$$

para aquellos casos en los cuales se conoce ya la solución general $y_g(x)$ de la correspondiente ecuación homogénea (1). Por el Teorema 14-B, si $y_p(x)$ es cualquier solución particular de (2), entonces

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

es la solución general de (2). Ahora bien, ¿cómo hallar la $y_p(x)$? Esta es la cuestión que ahora abordaremos.

El método de los coeficientes indeterminados es un procedimiento que permite hallar y_p cuando (2) tiene la forma

$$y'' + py' + qy = R(x), \quad (3)$$

con p y q constantes y $R(x)$ una exponencial, un seno, un coseno, un polinomio o una combinación de tales funciones. A título de ejemplo estudiemos la ecuación

$$y'' + py' + qy = e^{ax}. \quad (4)$$

Como la derivación y la integración de una exponencial la reproducen con tan sólo un posible cambio en el coeficiente numérico, es natural conjeturar que

$$y_p = Ae^{ax} \quad (5)$$

puede ser una solución particular de (4). Aquí A es el *coeficiente indeterminado* que deseamos calcular de manera que (5) satisfaga (4). Sustituyendo (5) en (4) se obtiene

$$A(a^2 + pa + q)e^{ax} = e^{ax},$$

así que

$$A = \frac{1}{a^2 + pa + q}. \quad (6)$$

Este valor de A hará que (5) sea solución de (4) *excepto cuando el denominador de la derecha de (6) sea cero*. La causa de esta dificultad es fácil de entender, ya que la excepción ocurre cuando a es una raíz de la ecuación auxiliar

$$m^2 + pm + q = 0, \quad (7)$$

y en ese caso sabemos que (5) reduce el lado izquierdo de (4) a cero, y no es posible satisfacer (4) tal cual, con el lado derecho distinto de cero.

¿Qué hacer para poder proseguir el procedimiento en este caso excepcional? Vimos en la sección anterior que cuando la ecuación auxiliar tiene una raíz doble, la segunda solución de la ecuación homogénea se obtiene multiplicando la primera por x . Con esta sugerencia, tomamos

$$y_p = Axe^{ax} \quad (8)$$

como presunta solución para ensayar. Insertando (8) en (4) queda

$$A(a^2 + pa + q)xe^{ax} + A(2a + p)e^{ax} = e^{ax}.$$

La primera expresión entre paréntesis es cero a causa de nuestra hipótesis de que a es raíz de (7), así que

$$A = \frac{1}{2a + p}. \quad (9)$$

Esto da un coeficiente válido para (8) salvo cuando $a = -p/2$, esto es, salvo cuando a es raíz doble de (7). En este caso continuamos el proceso indicado antes ensayando

$$y_p = Ax^2e^{ax}. \quad (10)$$

Sustituyendo (10) en (4) se obtiene

$$A(a^2 + pa + q)x^2e^{ax} + 2A(2a + p)xe^{ax} + 2Ae^{ax} = e^{ax}.$$

Como a se supone ahora que es raíz doble de (7), ambas expresiones entre paréntesis son nulas y

$$A = \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Resumiendo: si a no es raíz de la ecuación auxiliar (7), entonces (4) tiene una solución particular de la forma Ae^{ax} ; si a es raíz simple de (7), entonces (4) no tiene solución de la forma Ae^{ax} , pero admite una de la forma Axe^{ax} ; y si a es raíz doble de (7), entonces (4) no tiene solución de la forma Axe^{ax} , pero sí una de la forma Ax^2e^{ax} . En todos los casos hemos dado una fórmula para A , pero sólo con el objeto de clarificar lo que había detrás de lo que estaba sucediendo. En la práctica es más cómodo calcular A sustituyendo directamente en la ecuación en cuestión.

Otro caso importante en que el método de los coeficientes indeterminados es aplicable es aquel en que el miembro de la derecha en (4) se reemplaza por $\sin bx$:

$$y'' + py' + qy = \sin bx. \quad (12)$$

Como las derivadas de $\sin bx$ son múltiplos constantes de $\sin bx$ y $\cos bx$, tomamos como posible solución para ensayar

$$y_p = A \sin bx + B \cos bx. \quad (13)$$

Los coeficientes indeterminados A y B se pueden calcular sustituyendo (13) en (12) e igualando los coeficientes resultantes de $\sin bx$ y $\cos bx$ a derecha e izquierda. Estos pasos funcionan también si el lado derecho de la ecuación (12) se cambia por $\cos bx$ o por cualquier combinación lineal de $\sin bx$ y $\cos bx$, es decir, por cualquier función del tipo $\alpha \sin bx + \beta \cos bx$. Al igual que antes, el método falla si (13) satisface la ecuación homogénea correspondiente a (12). Cuando tal ocurre, el procedimiento continúa usando

$$y_p = x(A \sin bx + B \cos bx) \quad (14)$$

como solución de ensayo en lugar de (13).

Ejemplo 1. Hallar una solución particular de

$$y'' + y = \sin x. \quad (15)$$

La ecuación homogénea reducida $y'' + y = 0$ admite como solución general $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$, de modo que no tiene sentido tomar $y_p = A \sin x + B \cos x$ como solución de ensayo para la ecuación completa (15). Por tanto, ensayaremos con $y_p = x(A \sin x + B \cos x)$. Es fácil ver que

$$y'_p = A \sin x + B \cos x + x(A \cos x - B \sin x)$$

e

$$y_p'' = 2A \cos x - 2B \sin x + x(-A \sin x - B \cos x),$$

y sustituyendo en (15) obtenemos

$$2A \cos x - 2B \sin x = \sin x.$$

Eso nos dice que la elección $A = 0$ y $B = 1/2$ satisface nuestro requisito, luego $y_p = -1/2x \cos x$ es la deseada solución particular.

Finalmente, examinemos el caso en que el lado derecho de (4) se sustituye por un polinomio:

$$y'' + py' + qy = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n. \quad (16)$$

Dado que la derivada de un polinomio es de nuevo un polinomio, nos vemos conducidos a buscar una solución particular de la forma

$$y_p = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n. \quad (17)$$

Cuando se sustituye (17) en (16), basta igualar los coeficientes de potencias idénticas de x para hallar los valores de los coeficientes indeterminados A_0, A_1, \dots, A_n . Si la constante q es cero, este procedimiento da x^{n-1} como la potencia más alta de x en la izquierda de (16), de manera que en tal situación tomamos para ensayar

$$\begin{aligned} y_p &= x(A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n) = \\ &= A_0x + A_1x^2 + \dots + A_nx^{n+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Si tanto p como q son nulos, (16) puede resolverse por integración directa.

Ejemplo 2. Hallar la solución general de

$$y'' - y' - 2y = 4x^2. \quad (19)$$

La ecuación reducida homogénea $y'' - y' - 2y = 0$ tiene como ecuación auxiliar $m^2 - m - 2 = 0$, o sea, $(m - 2)(m + 1) = 0$, luego la solución general de la ecuación reducida es $y_g = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$.

Como el lado derecho de la ecuación completa (19) es un polinomio de segundo grado, ensayamos una solución $y_p = A + Bx + Cx^2$ y la sustituimos en (19):

$$2C - (B + 2Cx) - 2(A + Bx + Cx^2) = 4x^2.$$

Igualando coeficientes de potencias idénticas de x se llega al sistema de ecuaciones lineales

$$2C - B - 2A = 0,$$

$$-2C - 2B = 0,$$

$$-2C = 4.$$

Vemos sin dificultad que $C = -2$, $B = 2$ y $A = -3$, de modo que la solución particular es $y_p = -3 + 2x - 2x^2$ e

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - 3 + 2x - 2x^2$$

es la solución general de la ecuación completa (19).

Las discusiones precedentes muestran que la forma de una solución particular de la ecuación (3) puede inferirse a menudo de la forma de su término de la derecha $R(x)$. En general, esto es así siempre que $R(x)$ sea una función con sólo un número finito de derivadas esencialmente diferentes. Hemos comprobado cómo funciona esto para exponenciales, senos, cosenos y polinomios. En el Problema 3 indicamos cómo actuar cuando $R(x)$ es una suma de tales funciones. Es posible asimismo desarrollar técnicas algo más elaboradas para enfrentarse a productos de esas funciones elementales, pero para la mayoría de los casos de interés en la práctica resulta superfluo. En esencia, toda esta cuestión es sencillamente una intuición inteligente que toma un número suficiente de parámetros para permitir encajarlos en las circunstancias del problema.

PROBLEMAS

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

- (a) $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$;
- (b) $y + 4y = 3 \operatorname{sen} x$;
- (c) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$;
- (d) $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$;
- (e) $y'' - y' - 6y = 20e^{-2x}$;
- (f) $y'' - 3y' + 2y = 14 \operatorname{sen} 2x - 18 \cos 2x$;
- (g) $y'' + y = 2 \cos x$;
- (h) $y'' - 2y' = 12x - 10$;
- (i) $y'' - 2y' + y = 6e^x$;
- (j) $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$;
- (k) $y'' + y' = 10x^4 + 2$.

2. Si k y b son constantes positivas, hallar la solución general de

$$y'' + k^2 y = \operatorname{sen} bx.$$

3. Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x)$$

e

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_2(x),$$

probar qué $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ es una solución de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x).$$

Esto se conoce como *principio de superposición*. Usar este principio para hallar la solución general de

- (a) $y'' + 4y = 4 \cos 2x + 6 \cos x + 8x^2 - 4x;$
- (b) $y'' + 9y = 2 \sin 3x + 4 \sin x - 26e^{-2x} + 27x^3.$

19. EL METODO DE VARIACION DE LOS PARAMETROS

La técnica descrita en la Sección 18 para determinar una solución particular de la ecuación inhomogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (1)$$

tiene dos serias limitaciones: puede usarse sólo cuando los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ son constantes, e incluso entonces sólo funciona si el término de la derecha $R(x)$ tiene una forma particularmente sencilla. Dentro de estas limitaciones, ese método suele ser el más simple de aplicar.

Ahora desarrollaremos otro método más potente que funciona siempre, sean cuales sean $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, supuesto sólo que la solución general de la correspondiente ecuación homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (2)$$

se conoce de antemano. Supongamos, pues, que se ha encontrado de algún modo la solución general

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \quad (3)$$

de (2). El método es análogo al de la Sección 16, es decir, sustituimos las constantes c_1 , c_2 por funciones desconocidas $v_1(x)$, $v_2(x)$ e intentamos hallar v_1 y v_2 de manera tal que

$$y = v_1y_1 + v_2y_2 \quad (4)$$

sea solución de (1)⁷. Si hemos de encontrar dos funciones desconocidas, nece-

⁷ Este es el motivo de la denominación de método de *variación de los parámetros*: variamos los parámetros c_1 y c_2 .

sitaremos dos ecuaciones que las relacionen. Una la obtenemos exigiendo que (4) sea solución de (1). Pronto quedará patente cuál debe ser la segunda. Empecemos calculando la derivada de (4), agrupada como sigue:

$$y' = (v_1 y'_1 + v_2 y'_2) + (v'_1 y_1 + v'_2 y_2). \quad (5)$$

Otra derivación introduciría segundas derivadas de las incógnitas v_1 y v_2 . Evitamos esa complicación exigiendo que se anule la segunda expresión entre paréntesis:

$$v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0. \quad (6)$$

Esto da

$$y' = v_1 y'_1 + v_2 y'_2, \quad (7)$$

así que

$$y'' = v_1 y''_1 + v'_1 y'_1 + v_2 y''_2 + v'_2 y'_2. \quad (8)$$

Sustituyendo (4), (7) y (8) en (1) y reordenando se llega a

$$v_1(y''_1 + Py'_1 + Qy_1) + v_2(y''_2 + Py'_2 + Qy_2) + v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = R(x). \quad (9)$$

Como y_1 e y_2 son soluciones de (2), las dos expresiones entre paréntesis son 0, y (9) colapsa a

$$v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = R(x). \quad (10)$$

Teniendo en cuenta (6) y (10) conjuntamente tenemos dos ecuaciones en las dos incógnitas v'_1 y v'_2 :

$$v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0,$$

$$v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = R(x).$$

Se resuelven inmediatamente, dando

$$v'_1 = \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} \quad y \quad v'_2 = \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)}. \quad (11)$$

Hay que hacer notar que estas fórmulas son legítimas, ya que el wronskiano en los denominadores es no nulo por la independencia lineal de y_1 e y_2 . Cuanto queda por hacer es integrar (11) para hallar v_1 y v_2 :

$$v_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad y \quad v_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx. \quad (12)$$

Reuniendo toda la información podemos afirmar que

$$y = y_1 \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad (13)$$

es la solución particular de (1) que buscábamos.

El lector advertirá que este método tiene ciertas desventajas. En particular, las integrales en (12) pueden ser difíciles o imposibles de efectuar. Además, claro está, es preciso conocer la solución general de (2) antes de proceder; pero esta objeción es realmente intrascendente porque nos preocupará hallar una solución particular de (1) precisamente cuando ya conozcamos, de hecho, la solución general de (2).

El método de variación de los parámetros lo inventó el matemático francés Lagrange en conexión con su trabajo sobre la mecánica analítica, que marcó época en ese tema (véase Apéndice A al Capítulo 12).

Ejemplo 1. Hallar una solución particular de $y'' + y = \operatorname{cosec} x$.

La correspondiente ecuación homogénea $y'' + y = 0$ tiene a $y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ como solución general así que $y_1 = \operatorname{sen} x$, $y'_1 = \cos x$, $y_2 = \cos x$ e $y'_2 = -\operatorname{sen} x$. El wronskiano de y_1 e y_2 es

$$W(y_1, y_2) = y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1,$$

luego por (12) se obtiene

$$v_1 = \int \frac{-\cos x \operatorname{cosec} x}{-1} dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \log(\operatorname{sen} x)$$

y

$$v_2 = \int \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x}{-1} dx = -x.$$

Por tanto,

$$y = \operatorname{sen} x \log(\operatorname{sen} x) - x \cos x$$

es la solución anhelada.

PROBLEMAS

1. Hallar una solución particular de

$$y'' - 2y' + y = 2x,$$

primero por simple inspección y después por el método de variación de los parámetros.

2. Hallar una solución particular de

$$y'' - y' - 6y = e^{-x},$$

primero por coeficientes indeterminados y a continuación por el método de variación de los parámetros.

3. Hallar una solución particular de cada una de estas ecuaciones:

(a) $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x;$	(d) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sec 2x;$
(b) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \log x;$	(e) $2y'' + 3y' + y = e^{-3x};$
(c) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x};$	(f) $y'' - 3y' + 2y = (1 + e^{-x})^{-1}.$

4. Hallar una solución particular de cada una de estas ecuaciones:

(a) $y'' + y = \sec x;$	(e) $y'' + y = \operatorname{tg} x;$
(b) $y'' + y = \cot^2 x;$	(f) $y'' + y = \sec x \operatorname{tg} x;$
(c) $y'' + y = \cot g 2x;$	(g) $y'' + y = \sec x \operatorname{cosec} x.$
(d) $y'' + y = x \cos x;$	

5. (a) Probar que el método de variación de los parámetros aplicado a la ecuación $y'' + y = f(x)$ conduce a la solución particular

$$y_p(x) = \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt.$$

- (b) Hallar una fórmula similar para una solución particular de la ecuación $y'' + k^2y = f(x)$, donde k es una constante positiva.

6. Hallar la solución general de cada una de estas ecuaciones:

(a) $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2;$
(b) $(x^2 + x)y'' + (2 - x^2)y' - (2 + x)y = x(x+1)^2;$
(c) $(1 - x)y'' + xy' - y = (1 - x)^2;$
(d) $xy'' - (1 + x)y' + y = x^2e^{2x};$
(e) $x^2y'' - 2xy' + 2y = xe^{-x}.$

20. VIBRACIONES EN SISTEMAS MECANICOS Y ELECTRICOS

Hablando en general, las vibraciones aparecen siempre que se perturba un sistema físico en equilibrio estable, ya que queda sujeto a fuerzas que tienden a restaurar el equilibrio. En esta sección veremos cómo situaciones de esta clase pueden conducir a ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = R(t),$$

y cómo su estudio arroja luz sobre el comportamiento físico.

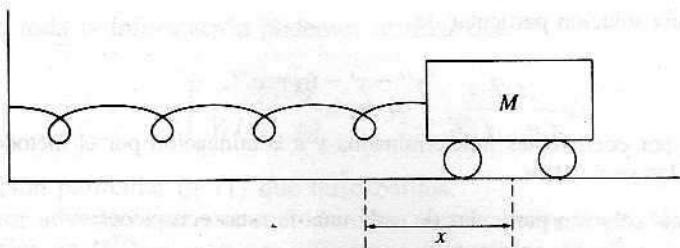


Figura 19

Vibraciones armónicas simples no amortiguadas. Consideremos una carreta de masa M sujetada por un muelle a un muro cercano (Fig. 19). El muelle no ejerce fuerza cuando la carreta se encuentra en su posición de equilibrio $x = 0$, pero si se le desplaza una distancia x , el muelle ejerce una fuerza restauradora $F_s = -kx$, siendo k una constante positiva cuya magnitud mide la rigidez del resorte. Por la segunda ley de Newton, la fuerza total es igual a la masa de la carreta por su aceleración, luego

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F_s, \quad (1)$$

o sea,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M} x = 0. \quad (2)$$

Será conveniente escribir esta ecuación de movimiento en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2 x = 0, \quad (3)$$

donde $a = \sqrt{k/M}$, y su solución general es obviamente

$$x = c_1 \operatorname{sen} at + c_2 \cos at. \quad (4)$$

Si la carreta se lleva a la posición $x = x_0$ y allí se suelta sin velocidad inicial en el instante $t = 0$, de manera que nuestras condiciones iniciales son

$$x = x_0 \quad \text{y} \quad v = \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{cuando } t = 0, \quad (5)$$

entonces se ve fácilmente que $c_1 = 0$ y $c_2 = x_0$, luego (4) se convierte en

$$x = x_0 \cos at. \quad (6)$$

La gráfica de (6) se muestra en la Figura 20. La *amplitud* de esta vibración

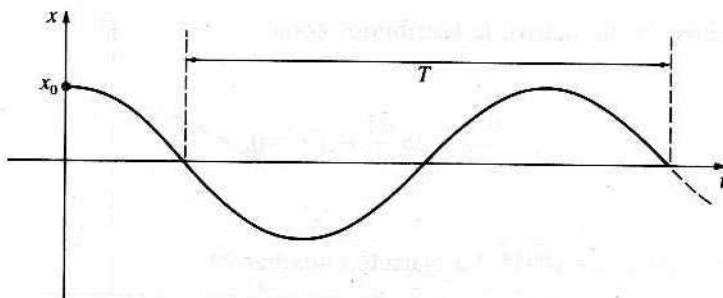


Figura 20

armónica simple es x_0 ; y dado que su *período* T es el tiempo requerido para completar un ciclo, tenemos $aT = 2\pi$ y

$$T = \frac{2\pi}{a} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}. \quad (7)$$

Su *frecuencia* f es el número de ciclos por unidad de tiempo, así que $fT = 1$ y

$$f = \frac{1}{T} = \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}. \quad (8)$$

De (8) resulta claro que la frecuencia de esta vibración crece al crecer la rigidez del muelle y al decrecer la masa de la carreta, tal y como el sentido común nos dicta.

Vibraciones amortiguadas. El próximo paso en el desarrollo de este problema consiste en añadir el efecto de una *fuerza de amortiguamiento* F_d debida a la viscosidad del medio en el que la carreta se mueve (aire, agua, aceite, etc.). Hacemos la hipótesis específica de que esta fuerza se opone al movimiento y es de magnitud proporcional a la velocidad, o sea, $F_d = -c(dx/dt)$, donde c es una constante positiva que mide la resistencia del medio. La ecuación (1) pasa a ser ahora

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_d, \quad (9)$$

es decir,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{M} x = 0. \quad (10)$$

Por conveniencia, de nuevo, la escribimos como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + a^2x = 0, \quad (11)$$

donde $b = c/2M$ y $a = \sqrt{k/M}$. La ecuación auxiliar es

$$m^2 + 2bm + a^2 = 0, \quad (12)$$

y sus raíces m_1 y m_2 vienen dadas por

$$m_1, m_2 = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}. \quad (13)$$

La solución general de (11) viene caracterizada, claro está, por la naturaleza de los números m_1 y m_2 . Como sabemos, hay tres casos. Los trataremos por separado.

CASO A. $b^2 - a^2 > 0$, o sea, $b > a$. En términos poco precisos esto viene a expresar la hipótesis de que la fuerza de fricción debida a la viscosidad es grande comparada con la rigidez del resorte. Se sigue que m_1 y m_2 son números negativos distintos, y la solución general de (11) es

$$x = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}. \quad (14)$$

Si usamos las condiciones iniciales (5) para calcular c_1 y c_2 , (14) se convierte en

$$x = \frac{x_0}{m_1 - m_2} (m_1 e^{m_2 t} - m_2 e^{m_1 t}). \quad (15)$$

La gráfica de esta función se muestra en la Figura 21. No hay vibración alguna y la carreta se limita a regresar a su posición de equilibrio. Este tipo de movimiento se llama *sobreamortiguado*. Ahora imaginemos que va decreciendo la viscosidad hasta alcanzar la situación descrita en el próximo caso.

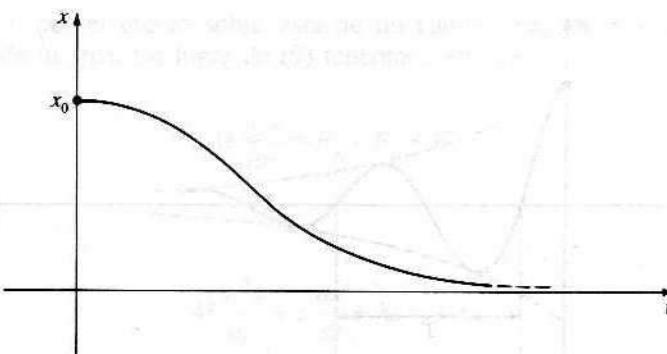


Figura 21

CASO B. $b^2 - a^2 = 0$, o sea, $b = a$. Aquí es $m_1 = m_2 = -b = -a$, y la solución general de (11) es

$$x = c_1 e^{-at} + c_2 t e^{-at}. \quad (16)$$

Al imponer las condiciones iniciales (5) se obtiene

$$x = x_0 e^{-at}(1 + at). \quad (17)$$

Esta función tiene un gráfico similar al de (15), y tampoco esta vez hay vibración. Un movimiento de esta clase se llama *críticamente amortiguado*. Si se hace decrecer ahora la viscosidad, siquiera sea un poco, el movimiento pasa a ser ya vibratorio y se llama *subamortiguado*. Esta es realmente la situación interesante, que cae en el marco del siguiente caso.

CASO C. $b^2 - a^2 < 0$, o sea, $b < a$. Ahora m_1 y m_2 son números complejos conjugados $-b \pm i\alpha$, donde

$$\alpha = \sqrt{a^2 - b^2},$$

y la solución general de (11) es

$$x = e^{-bt}(c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t). \quad (18)$$

Cuando c_1 y c_2 se calculan a la vista de las condiciones iniciales (5), eso se convierte en

$$x = \frac{x_0}{\alpha} e^{-bt}(\alpha \cos \alpha t + b \sin \alpha t). \quad (19)$$

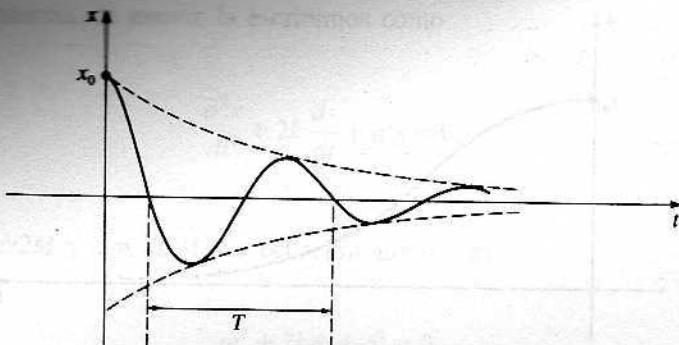


Figura 22

Introduciendo $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(b/\alpha)$ se puede expresar (19) de forma más reveladora:

$$(20) \quad x = \frac{x_0 \sqrt{\alpha^2 + b^2}}{\alpha} e^{-bt} \cos(\alpha t - \theta).$$

Esta función oscila con una amplitud que decrece exponencialmente, tal como indica la Figura 22. No es periódica en sentido estricto, pero su gráfica cruza la posición de equilibrio $x = 0$ a intervalos regulares. Si consideramos como «período» el tiempo requerido para cerrar un «ciclo» completo, entonces $\alpha T = 2\pi$ y

$$(21) \quad T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/M - c^2/4M^2}}.$$

Además, su «frecuencia» f viene dada por

$$(22) \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}.$$

Este número se suele llamar la *frecuencia natural* del sistema. Cuando la viscosidad desaparece, de modo que $c = 0$, es evidente que (21) y (22) se reducen a (7) y (8). Más aún, comparando (8) con (22) vemos que la frecuencia de la vibración decrece a causa del amortiguamiento, como cabía esperar.

Vibraciones forzadas. Las vibraciones discutidas antes se llaman vibraciones *libres* porque todas las fuerzas que actúan sobre el sistema son internas al propio sistema. Ahora extenderemos nuestro análisis al caso en que una fuerza externa $F_e = f(t)$ actúa sobre la carreta. Una tal fuerza puede aparecer de varias maneras: por ejemplo, procedente de vibraciones del muro al que se halla sujetado

la carreta, o por el efecto sobre ésta de un campo magnético externo (si la carreta es de hierro). En lugar de (9) tenemos, por tanto,

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_d + F_e, \quad (23)$$

luego

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t). \quad (24)$$

El caso más importante se da cuando la fuerza externa es periódica de la forma $f(t) = F_0 \cos \omega t$, de modo que (24) se convierte en

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t. \quad (25)$$

Ya hemos resuelto la correspondiente ecuación homogénea (10), así que lo único que falta por hacer para llegar a la solución general de (25) es construir una solución particular. Y esto se consigue sin dificultad mediante el método de los coeficientes indeterminados. En efecto, tomamos $x = A \sen \omega t + B \cos \omega t$ como posible solución para ensayar, y una vez sustituida en (25) obtenemos el siguiente par de ecuaciones para A y B :

$$\omega cA + (k - \omega^2 M)B = F_0,$$

$$(k - \omega^2 M)A - \omega cB = 0.$$

La solución de este sistema es

$$A = \frac{\omega c F_0}{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2} \quad \text{y} \quad B = \frac{(k - \omega^2 M)F_0}{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}.$$

La deseada solución particular es, en consecuencia,

$$x = \frac{F_0}{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2} [\omega c \sen \omega t + (k - \omega^2 M) \cos \omega t]. \quad (26)$$

Introduciendo $\phi = \operatorname{tg}^{-1}[\omega c / (k - \omega^2 M)]$ podemos escribir (26) en la forma más habitual

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}} \cos(\omega t - \phi). \quad (27)$$

Si ahora suponemos que estamos en el caso de movimiento subamortiguado citado antes, la solución general de (25) es

$$x = e^{-bt}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t) + \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}} \cos(\omega t - \phi). \quad (28)$$

El primer término es claramente *transitorio* en el sentido de que tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. De hecho, eso es cierto sea o no subamortiguado el movimiento, en la medida en que haya algún nivel de amortiguamiento presente (Problema 17-2). Por tanto, con el paso del tiempo el movimiento va adquiriendo la forma del segundo término, la parte *estacionaria*. Habida cuenta de ello, podemos despreciar la parte transitoria de (28) y afirmar que para grandes t la solución general de (25) es esencialmente igual a la solución particular (27). La frecuencia de esta vibración forzada coincide con la frecuencia impresa $\omega/2\pi$, y su amplitud es el coeficiente

$$\frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}}. \quad (29)$$

Esta expresión para la amplitud encubre varios secretos interesantes, porque depende no sólo de ω y F_0 , sino también de k , c y M . Por ejemplo, nótese que si c es muy pequeño y ω próximo a $\sqrt{k/M}$ (de modo que $k - \omega^2 M$ es muy pequeño), lo que significa que el movimiento es ligeramente amortiguado y la frecuencia impresa $\omega/2\pi$ es cercana a la frecuencia natural

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{c^2}{4M^2}},$$

entonces la amplitud es muy grande. Este fenómeno se conoce como *resonancia*. Un ejemplo clásico es la vibración forzada de un puente bajo el impacto de los pies de columnas de soldados cuyo ritmo de paso corresponda muy aproximadamente a la frecuencia natural del puente.

Finalmente, mencionemos brevemente ciertas relaciones entre el problema mecánico discutido antes y el eléctrico visto en la Sección 13. Se probó en esa sección que si una fuerza electromotriz periódica $E = E_0 \cos \omega t$ actúa en un circuito simple que contiene una resistencia, una inductancia y un condensador, la carga Q de este último viene dada por la ecuación diferencial

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E_0 \cos \omega t. \quad (30)$$

Esta ecuación es sorprendentemente similar a (25). En particular, la siguiente correspondencia salta a la vista:

masa $M \leftrightarrow$ inductancia L ;

viscosidad $c \leftrightarrow$ resistencia R ;

constante del muelle $k \leftrightarrow$ inversa de la capacitancia $\frac{1}{C}$;

desplazamiento $x \leftrightarrow$ carga Q del condensador.

La analogía entre los sistemas mecánicos y eléctricos convierte en idénticas las matemáticas de ambos sistemas y permite trasladar las conclusiones del primero al segundo sin dificultad. En el circuito eléctrico citado tenemos, por tanto, una resistencia crítica por debajo de la cual el comportamiento libre del circuito será vibratorio con cierta frecuencia natural, una vibración forzada estacionaria de la carga Q y fenómenos de resonancia que aparecen en circunstancias favorables para ello.

PROBLEMAS

1. Considerando la vibración forzada (27) en el caso subamortiguado, hallar la frecuencia impresa para la que la amplitud (29) alcanza un máximo. ¿Existe necesariamente dicha frecuencia? Este valor de la frecuencia impresa (cuando exista) se llama *frecuencia de resonancia*. Probar que siempre es menor que la frecuencia natural.
2. Consideremos la vibración libre subamortiguada descrita por la fórmula (20). Demostrar que x toma valores máximos para $t = 0, T, 2T, \dots$, siendo T el «período» dado por (21). Si x_1 y x_2 son dos máximos sucesivos de x , probar que $x_1/x_2 = e^{bT}$. El logaritmo de esta cantidad, bT , se llama *decremento logarítmico* de la vibración.
3. Una boyá esférica de radio r flota parcialmente sumergida en agua. Si se le quita presión, una fuerza igual al peso del agua desalojada le empuja hacia arriba; y si se suelta entonces, oscilará arriba y abajo. Hallar el período de su oscilación si el rozamiento del agua es despreciable.
4. Una boyá cilíndrica de 2 pies de diámetro flota con su eje vertical en agua de densidad 62,4 libras/pie cúbico. Al quitarle algo de presión y soltarla, su período de oscilación es de 1,9 segundos. ¿Cuánto pesa la boyá?
5. Supongamos que se perfora un túnel recto entre dos puntos cualesquiera de la superficie terrestre. Si se coloca una pista sin rozamiento entre ellos, un vagón situado en un extremo del túnel comenzará a deslizar por su propio peso, se detendrá al llegar al otro extremo y regresará. Probar que el tiempo invertido es el mismo para todo túnel de ese tipo, y estimar su valor. Si el túnel mide $2L$ millas de longitud, ¿cuál es la velocidad máxima que alcanza el vagón?
6. La carreta de la Figura 19 pesa 128 libras y está sujetada al muro con un resorte de constante $k = 64$ libras/pie. Se aparta la carreta 6 pulgadas del muro y se suelta sin velocidad inicial. Simultáneamente, se le aplica una fuerza periódica externa $F_e = f(t) = 32 \operatorname{sen} 4t$. Suponiendo que no hay resistencia del aire, hallar la posición $x = x(t)$ de la carreta en el instante t . Nótese que $|x(t)|$ toma valores arbitrariamente grandes para $t \rightarrow \infty$, un fenómeno conocido como *resonancia pura* y provocado por

tener la fuerza externa la misma frecuencia que las vibraciones libres del sistema no forzado.

7. (Este problema va dirigido sólo a los estudiantes a quienes no intimiden los cálculos con números complejos.) La correspondencia entre las ecuaciones (25) y (30) hace sencillo escribir la solución estacionaria de (30) por un simple cambio de notación en (27):

$$Q = \frac{E_0}{\sqrt{(1/C - \omega^2 L)^2 + \omega^2 R^2}} \cos(\omega t - \phi), \quad (*)$$

donde $\operatorname{tg} \phi = \omega R / (1/C - \omega^2 L)$. En ingeniería eléctrica es costumbre interpretar $E_0 \cos \omega t$ en (30) como la parte real de $E_0 e^{i\omega t}$, y en lugar de (30) considerar la ecuación diferencial

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E_0 e^{i\omega t}.$$

Hallar una solución particular de esta ecuación diferencial por el método de los coeficientes indeterminados y, al final del cálculo, tomar la parte real de esta solución para obtener la solución (*) de la ecuación diferencial (30)⁸.

⁸ El uso de números complejos en teoría de circuitos tiene como pionero al matemático, inventor e ingeniero Charles Proteus Steinmetz (1865-1923). En su juventud, sus actividades como estudiante socialista en Alemania le crearon problemas con la policía de Bismarck, y emigró apresuradamente a América en 1889. Trabajó al principio para la General Electric Company, convirtiéndose pronto en su cerebro científico y probablemente el más grande de los ingenieros eléctricos. Cuando llegó a la GE no había modo de producir en masa motores eléctricos o generadores, ni forma económicamente viable de trasmitir energía eléctrica a más de 3 millas. Steinmetz resolvió esos problemas mediante las matemáticas y su potencia mental, mejorando con ello la calidad de vida humana en innumerables aspectos.

Era muy bajo de estatura, lisiado por una enfermedad congénita y vivió con dolores, pero fue universalmente admirado por su genialidad y muy querido por su cálida humanidad y su punzante sentido del humor. La siguiente anécdota, poco conocida pero inolvidable, fue publicada en la sección de Cartas de la revista *Life* (14 de mayo de 1965):

Señores: En su artículo sobre Steinmetz (23 de abril) mencionaban una entrevista con Henry Ford. Mi padre, Burt Scott, empleado de Henry Ford desde hacía años, me relató la historia de ese encuentro. Se habían planteado dificultades técnicas en un generador nuevo diseñado en la planta Ford de River Rouge y sus ingenieros eléctricos no eran capaces de resolverla, de manera que Ford solicitó la ayuda de Steinmetz. Cuando «el pequeño gigante» llegó a la planta, rechazó toda asistencia, pidiendo solamente un cuaderno, un lápiz y un camastro. Durante dos días y dos noches vigiló el generador e hizo gran cantidad de cálculos. Entonces pidió una escalera, una cinta de medir y un trozo de tiza. Trepó laboriosamente por la escalera, realizó mediciones cuidadosas e hizo una marca con la tiza en un lateral del generador. Descendió y ordenó a su escéptica audiencia que quitaran una placa del generador y eliminaran 16 espiras de la bobina a esa altura. Se hicieron las correcciones y el generador funcionó perfectamente. Más tarde, Ford recibió una factura de la GE por un monto de 10.000 dólares firmada por Steinmetz. Ford la devolvió agradeciendo el buen trabajo realizado y pidiéndole respetuosamente una factura detallada. Steinmetz replicó como sigue: Hacer la marca de tiza, un dólar. Saber dónde hacerla, 9.999 dólares. Total a pagar, 10.000 dólares.

21. LA LEY DE LA GRAVITACION DE NEWTON Y EL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS

La ley del inverso del cuadrado subyace a tantos problemas físicos, órbitas de los planetas en torno al sol, movimiento de la luna y de los satélites artificiales en torno a la tierra, trayectorias de partículas cargadas en los átomos, etc., que toda persona con una cierta educación científica debe saber algo sobre sus consecuencias. Nuestro propósito en esta sección es deducir las leyes de Kepler del movimiento de los planetas a partir de la ley de la gravitación universal de Newton, y discutir a tal fin el movimiento de una pequeña partícula de masa m (un planeta) bajo la atracción de una partícula fija de masa M mucho mayor (el sol).

En problemas de movimiento de una partícula bajo una fuerza que está dirigida según la recta que une la partícula con un punto fijo, conviene en general descomponer velocidad, aceleración y fuerza en componentes según esa línea y su perpendicular. Así pues, colocamos la partícula fija M en el origen de un sistema de coordenadas polares (Fig. 23) y expresamos el radio vector desde el origen a la partícula móvil m en la forma

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r, \quad (1)$$

donde \mathbf{u}_r es el vector unitario en la dirección de \mathbf{r} ⁹. Es claro que

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta, \quad (2)$$

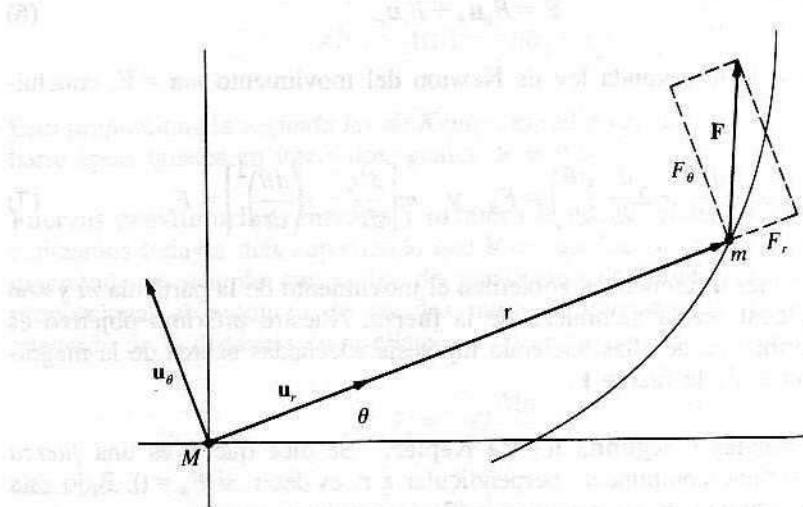


Figura 23

⁹ Adoptamos el convenio usual de denotar los vectores en negrita.

y que el vector unitario \mathbf{u}_θ , perpendicular a \mathbf{u}_r en la dirección de θ creciente, viene dado por

$$\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta. \quad (3)$$

Las relaciones

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{u}_r,$$

obtenidas derivando (2) y (3), son esenciales para calcular los vectores velocidad y aceleración \mathbf{v} y \mathbf{a} . Por cálculo directo a partir de (1) se deduce

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \mathbf{u}_r \frac{dr}{dt} = r \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \mathbf{u}_r \frac{dr}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r \quad (4)$$

y

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{u}_\theta + \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r. \quad (5)$$

Si la fuerza \mathbf{F} que actúa sobre m se escribe como

$$\mathbf{F} = F_\theta \mathbf{u}_\theta + F_r \mathbf{u}_r, \quad (6)$$

de (5), (6) y de la segunda ley de Newton del movimiento $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, concluimos que

$$m \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) = F_\theta \quad \text{y} \quad m \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = F_r. \quad (7)$$

Estas ecuaciones diferenciales gobiernan el movimiento de la partícula m y son válidas sea cual sea la naturaleza de la fuerza. Nuestro próximo objetivo es extraer información de ellas haciendo hipótesis adecuadas acerca de la magnitud y dirección de la fuerza \mathbf{F} .

Fuerzas centrales y segunda ley de Kepler. Se dice que \mathbf{F} es una *fuerza central* si no tiene componente perpendicular a \mathbf{r} , es decir, si $F_\theta = 0$. Bajo esta hipótesis, la primera de las ecuaciones (7) se convierte en

$$r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Multiplicando por r se obtiene

$$r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

o sea,

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0,$$

de donde

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad (8)$$

para alguna constante h . Vamos a suponer que h es positiva, lo cual significa evidentemente que m se mueve en sentido contrario a las agujas de un reloj. Si $A = A(t)$ es el área barrida por \mathbf{r} desde cierta posición prefijada de referencia, de modo que $dA = r^2 d\theta/2$, entonces (8) implica que

$$dA = \frac{1}{2} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} h dt. \quad (9)$$

Integrando (9) desde t_1 hasta t_2 resulta

$$A(t_2) - A(t_1) = \frac{1}{2} h(t_2 - t_1). \quad (10)$$

Esto proporciona la *segunda ley de Kepler*: el radio vector \mathbf{r} del sol a un planeta barre áreas iguales en intervalos iguales de tiempo¹⁰.

Fuerzas gravitatorias centrales y primera ley de Kepler. Ahora nos especializamos todavía más suponiendo que \mathbf{F} es una fuerza central atractiva cuya magnitud, de acuerdo con la ley de gravitación de Newton, es directamente proporcional al producto de las dos masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas:

$$F_r = -G \frac{Mm}{r^2}. \quad (11)$$

¹⁰ Cuando el astrónomo danés Tycho Brahe murió en 1601, su ayudante Johannes Kepler (1571-1630) heredó grandes cantidades de datos sobre posiciones de los planetas en distintos momentos. Kepler trabajó incansablemente con ese material durante veinte años, logrando por fin destilar de él sus tres hermosas leyes del movimiento de los planetas, auténtico clímax de miles de años de astronomía puramente observacional.

La letra G representa la *constante de la gravedad*, una de las constantes universales de la naturaleza. Si escribimos (11) de manera algo distinta,

$$F_r = -\frac{km}{r^2},$$

donde $k = GM$, la segunda de las ecuaciones (7) pasa a ser

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{k}{r^2}. \quad (12)$$

El próximo paso en esta línea de pensamiento es difícil de motivar, ya que requiere considerable ingenio técnico, pero vamos a intentarlo. Nos proponemos utilizar (12) para obtener la ecuación de la órbita en forma polar $r = f(\theta)$, así que queremos eliminar t de (12) y considerar θ como la variable independiente. Queremos asimismo que r sea la variable dependiente, pero si usamos (8) para poner (12) en la forma

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2}, \quad (13)$$

la presencia de potencias de $1/r$ sugiere que tomemos de momento como variable dependiente $z = 1/r$.

Con el fin de cumplir esos requisitos, hemos de expresar antes de nada d^2r/dt^2 en términos de $d^2z/d\theta^2$, calculando

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{z} \right) = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{d\theta} \frac{h}{r^2} = -h \frac{dz}{d\theta}$$

y

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{d\theta} \right) = -h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dz}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = -h \frac{d^2z}{d\theta^2} \frac{h}{r^2} = -h^2 z^2 \frac{d^2z}{d\theta^2}.$$

Al insertar la última expresión en (13) y sustituir $1/r$ en lugar de z , queda

$$-h^2 z^2 \frac{d^2z}{d\theta^2} - h^2 z^3 = -kz^2$$

de donde

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}.$$

La solución general de esta ecuación es inmediata:

$$z = A \operatorname{sen} \theta + B \cos \theta + \frac{k}{h^2}. \quad (14)$$

Por simplificar, desplazamos la dirección del eje polar de modo tal que r sea mínimo (o sea, que m está lo más cerca posible del origen) cuando $\theta = 0$. Eso significa que z ha de ser máximo en esa dirección, luego

$$\frac{dz}{d\theta} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2z}{d\theta^2} < 0$$

cuando $\theta = 0$. Estas condiciones implican que $A = 0$ y $B > 0$. Si sustituimos z por $1/r$, (14) se escribe

$$r = \frac{1}{k/h^2 + B \cos \theta} = \frac{h^2/k}{1 + (Bh^2/k) \cos \theta};$$

y si ponemos $e = Bh^2/k$, nuestra ecuación para la órbita se convierte en

$$r = \frac{h^2/k}{1 + e \cos \theta}, \quad (15)$$

donde e es una constante positiva.

En este punto recordamos (Fig. 24) que el lugar geométrico definido

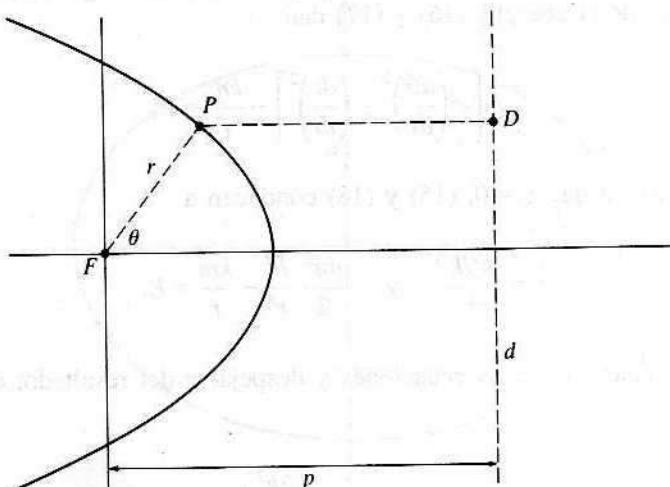


Figura 24

por $PF/PD = e$ es la sección cónica con foco F , directriz d y excentricidad e . Cuando se expresa esta condición en términos de r y θ , es fácil ver que

$$r = \frac{pe}{1 + e \cos \theta}$$

es la ecuación polar de dicha sección cónica, que es una elipse, una parábola o una hipérbola según que $e < 1$, $e = 1$, o $e > 1$. Estas observaciones muestran que la órbita (15) es una sección cónica de excentricidad $e = Bh^2/k$; y puesto que el planeta permanece en el sistema solar, sin alejarse infinitamente del sol, la elipse es la única posibilidad. Eso constituye la *primera ley de Kepler*: la órbita de cualquier planeta es una elipse con uno de sus focos en el sol.

Significado físico de la excentricidad. De (4) se desprende que la energía cinética de m es

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]. \quad (16)$$

La energía potencial del sistema es, salvo signo, el trabajo requerido para mover m hasta el infinito (donde la energía potencial es cero), y es, por tanto,

$$-\int_r^\infty \frac{km}{r^2} dr = \frac{km}{r} \Big|_r^\infty = -\frac{km}{r}. \quad (17)$$

Si E denota la energía total del sistema, que es constante por el principio de conservación de la energía, (16) y (17) dan

$$\frac{1}{2}m\left[r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] - \frac{km}{r} = E. \quad (18)$$

En el instante en que $\theta = 0$, (15) y (18) conducen a

$$r = \frac{h^2/k}{1 + e} \quad \text{y} \quad \frac{mr^2}{2} \frac{h^2}{r^4} - \frac{km}{r} = E.$$

Es fácil eliminar r de estas ecuaciones y despejar e del resultado, con lo que se obtiene

$$e = \sqrt{1 + E\left(\frac{2h^2}{mk^2}\right)}.$$

Eso nos permite escribir la ecuación (15) para la órbita como

$$r = \frac{h^2/k}{1 + \sqrt{1 + E(2h^2/mk^2)} \cos \theta}. \quad (19)$$

Es evidente de (19) que la órbita es una elipse, una parábola o una hipérbola, según que $E < 0$, $E = 0$, o $E > 0$. Resulta claro, como consecuencia, que la naturaleza de la órbita de m queda completamente caracterizada por su energía total E . Así pues, los planetas del sistema solar tienen energía negativa y se mueven sobre elipses, y los cuerpos que pasan por el sistema solar a velocidades altas tienen energía positiva y trayectorias hiperbólicas. Es interesante darse cuenta de que si un planeta como la tierra recibiese un impulso suficiente como para aumentar su velocidad y llevar su energía a valor positivo, entraría en una órbita hiperbólica y abandonaría el sistema solar para siempre.

Los períodos de revolución de los planetas y la tercera ley de Kepler. Ahora restringimos nuestra atención al caso en que m describe una órbita elíptica (Fig. 25) cuyas ecuaciones polar y rectangular son (15) y

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Es bien sabido por geometría analítica elemental que $e = c/a$ y $c^2 = a^2 - b^2$, así que $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ y

$$b^2 = a^2(1 - e^2). \quad (20)$$

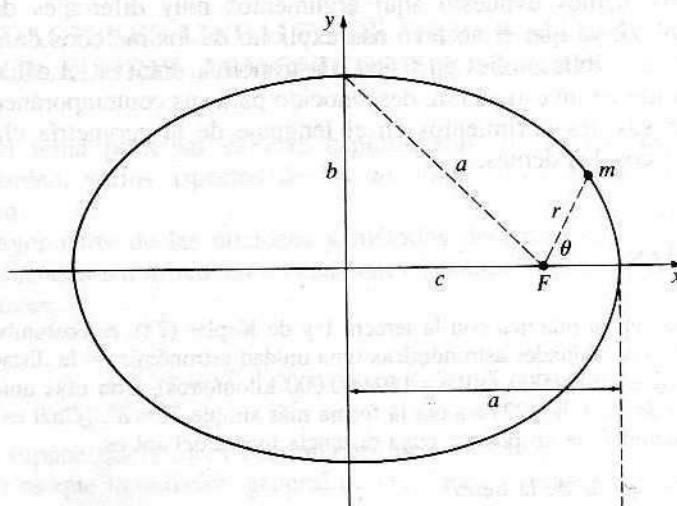


Figura 25

En astronomía, el semieje mayor de la órbita recibe el nombre de *distancia media*, por ser la semisuma de los valores máximo y mínimo de r , de modo que (15) y (20) dan

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2/k}{1+e} - \frac{h^2/k}{1-e} \right) = \frac{h^2}{k(1-e^2)} = \frac{h^2 a^2}{kb^2},$$

por lo que

$$b^2 = \frac{h^2 a}{k}. \quad (21)$$

Si T es el período de m (o sea, el tiempo requerido para dar una vuelta completa en la órbita), como el área de la elipse es πab , se sigue de (10) que $\pi ab = hT/2$, que a la vista de (21) lleva a

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2} = \left(\frac{4\pi^2}{k} \right) a^3. \quad (22)$$

En el idealizado tratamiento presente, la constante $k = GM$ depende de la masa central M pero no de m , así que (22) es válida para todos los planetas de nuestro sistema solar, y obtenemos la *tercera ley de Kepler*: los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias.

Las ideas de esta sección se deben esencialmente a Newton (Apéndice B). Sin embargo, hemos expuesto aquí argumentos muy diferentes de los que Newton publicó, ya que él no hizo uso explícito de los métodos de cálculo en ninguna de sus publicaciones en física o astronomía. Para él, el cálculo era un método privado de investigación, desconocido para sus contemporáneos, y tenía que traducir sus descubrimientos en el lenguaje de la geometría clásica para comunicarse con los demás.

PROBLEMAS

- Al trabajar en la práctica con la tercera ley de Kepler (22), es costumbre medir T en años y a en unidades astronómicas (una unidad astronómica = la distancia media de la tierra $\cong 93.000.000$ millas $\cong 150.000.000$ kilómetros). Con esas unidades convenientes de medida, (22) adopta la forma más simple $T^2 = a^3$. ¿Cuál es el período de revolución T de un planeta cuya distancia media del sol es
 - doble que la de la tierra?
 - triple que la de la tierra?
 - veinticinco veces mayor que la de la tierra?

2. (a) El «año» de Mercurio es de 88 días. ¿Cuál es su distancia media al sol?
 (b) La distancia media de Saturno es 9,54 unidades astronómicas. ¿Cuál es su período de revolución en torno al sol?
3. Las dos primeras leyes de Kepler, en su forma (8) y (15), implican que m es atraída hacia el origen con una fuerza de magnitud inversamente proporcional al cuadrado de r . Este fue el hallazgo fundamental de Newton, porque le condujo a proponer su ley de la gravitación e investigar sus consecuencias. Probar esto suponiendo (8) y (15) y verificando las afirmaciones siguientes:
 - (a) $F_\theta = 0$;
 - (c) $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{ke \cos \theta}{r^2}$;
 - (b) $\frac{dr}{dt} = \frac{ke}{h} \operatorname{sen} \theta$;
 - (d) $F_r = -\frac{mk}{r^2} = -G \frac{Mm}{r^2}$.
4. Mostrar que la velocidad v de un planeta en cualquier punto de su órbita viene dada por

$$v^2 = k \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

5. Supongamos que la tierra explotara en fragmentos que se alejan en todas direcciones con la misma velocidad. Usar la tercera ley de Kepler y el resultado del Problema 4 para probar que todos los fragmentos que no caen al sol o escapan del sistema solar se reunirán más tarde en algún punto común en el que comienzan a seguir caminos divergentes.

22. ECUACIONES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR. OSCILADORES ARMONICOS ACOPLADOS

Aunque el tema principal de este capítulo son las ecuaciones lineales de segundo orden, varios aspectos de las de orden superior merecen un breve comentario.

La mayor parte de las nociones y métodos descritos en las Secciones 14 a 19 se extienden sin dificultad a ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (1)$$

donde se supone que $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$. El hecho central a recordar es que la solución general de (1) tiene la forma esperada,

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x),$$

donde $y_p(x)$ es cualquier solución particular de (1) e $y_g(x)$ la solución general de la ecuación homogénea reducida

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \quad (2)$$

La demostración es igual que en el caso $n = 2$, así que no la repetimos.

Consideremos el problema de hallar la solución general de la ecuación homogénea (2). Nuestra experiencia con el caso $n = 2$ nos dice que probablemente admite soluciones de la forma $y = e^{rx}$ para valores apropiados de la constante r . Sustituyendo $y = e^{rx}$ y sus derivadas en (2) y dividiendo después por el factor e^{rx} obtenemos la *ecuación auxiliar*

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0. \quad (3)$$

El polinomio de la izquierda en (3) se llama *polinomio auxiliar*; en principio puede factorizarse por completo en producto de n factores lineales, y la ecuación (3) se puede entonces escribir en la forma factorizada

$$(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n) = 0.$$

Las constantes r_1, r_2, \dots, r_n son las raíces de la ecuación auxiliar (3). Si son distintas dos a dos, tenemos n soluciones diferentes

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x} \quad (4)$$

de la ecuación homogénea (2). Igual que en el caso $n = 2$, la combinación lineal

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x} \quad (5)$$

es también solución para toda elección de los coeficientes c_1, c_2, \dots, c_n .

Como (5) contiene n constantes arbitrarias, cabe sospechar que es la solución general de (2). Para confirmarlo, necesitamos un poco de teoría adicional que pasamos a esbozar.

Al extender los teoremas de las Secciones 14 y 15 de manera natural, se puede demostrar que (5) es la solución general de (2) si las soluciones (4) son linealmente independientes¹¹. Hay varias formas de establecer la independencia

¹¹ Esto exige establecer las mismas conexiones que antes entre: (1) satisfacer n condiciones iniciales, (2) la no anulación del wronskiano, (3) la fórmula de Abel, y (4) la independencia lineal. Un conjunto de n funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ se dice *linealmente dependiente* si una de ellas se puede expresar como combinación lineal de las demás, y *linealmente independiente* en caso contrario. En ejemplos concretos suele ser fácil decidirlo a simple vista. La dependencia lineal significa que existe una relación del tipo $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$ en la que al menos un coeficiente es no nulo, mientras que la independencia lineal quiere decir que tal relación sólo es posible si se toman todos los coeficientes iguales a cero.

lineal de las soluciones (14) siempre que las raíces r_1, r_2, \dots, r_n sean distintas, pero omitimos los detalles. Por tanto, se sigue que (5) es realmente la solución general de (2) en ese caso.

Raíces reales repetidas. Si las raíces reales de (3) no son todas distintas, las soluciones (4) son linealmente dependientes, y (5) no es la solución general. Por ejemplo, si $r_1 = r_2$, la parte de (5) que consta de $c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ se convierte en $(c_1 + c_2) e^{r_1 x}$, con lo que las dos constantes se reducen a una sola, a saber, $c_1 + c_2$. Para ver qué podemos hacer cuando tal cosa ocurre, recordemos que en el caso $n = 2$, donde sólo teníamos dos raíces r_1 y r_2 , probamos que cuando $r_1 = r_2$ la solución $c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ debía ser reemplazada por $c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} = (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x}$. Se puede comprobar por sustitución que si $r_1 = r_2$ para la ecuación de n -ésimo orden (2), entonces los dos primeros términos de (5) deben sustituirse por idéntica expresión.

Más en general, si $r_1 = r_2 = \dots = r_k$ es una raíz de multiplicidad k (o sea, una raíz que se repite k veces) de la ecuación auxiliar (3), los k primeros términos en la solución (5) han de cambiarse por

$$(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_k x^{k-1}) e^{r_1 x}.$$

Una familia similar de soluciones se necesita para cada raíz múltiple, produciendo una forma correspondientemente modificada de (5). En la próxima sección mostraremos cómo obtener esas expresiones por métodos operacionales.

Raíces complejas. Algunas de las raíces de la ecuación auxiliar (3) pueden ser números complejos. Como los coeficientes de (3) son reales, las raíces complejas aparecen en pares de números complejos conjugados $a + ib, a - ib$. Igual que en el caso $n = 2$, la parte de la solución (5) correspondiente a un par de tales raíces conjugadas se puede escribir en la forma real alternativa

$$e^{ax}(A \cos bx + B \operatorname{sen} bx).$$

Si $a + ib$ y $a - ib$ son raíces de multiplicidad k , debemos tomar

$$e^{ax}[(A_1 + A_2 x + \dots + A_k x^{k-1}) \cos bx + (B_1 + B_2 x + \dots + B_k x^{k-1}) \operatorname{sen} bx]$$

como parte de la solución general.

Ejemplo 1. La ecuación diferencial

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$$

tiene ecuación auxiliar

$$r^4 - 5r^2 + 4 = (r^2 - 1)(r^2 - 4) = (r - 1)(r + 1)(r - 2)(r + 2) = 0.$$

Por tanto, su solución general es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}.$$

Ejemplo 2. La ecuación diferencial

$$y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$$

tiene ecuación auxiliar

$$r^4 - 8r^2 + 16 = (r^2 - 4)^2 = (r - 2)^2(r + 2)^2 = 0,$$

así que su solución general es

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + (c_3 + c_4 x)e^{-2x}.$$

Ejemplo 3. La ecuación

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0,$$

tiene ecuación auxiliar

$$r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 = 0,$$

o sea, después de factorizar¹²,

$$(r - 1)^2(r^2 + 1) = 0.$$

La solución general es, en consecuencia,

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

Ejemplo 4. Osciladores armónicos acoplados. Ecuaciones lineales de orden $n > 2$ aparecen muy frecuentemente en física al eliminar variables en sistemas simultáneos de ecuaciones de segundo orden. Podemos ver un ejemplo acoplando dos osciladores armónicos simples del tipo discutido al comienzo de la Sección 20. Así pues, sean dos carretas de masas m_1 y m_2 sujetas a dos muros, como indica la Figura 26, mediante resortes de constantes k_1 y k_2 . Si no hay amortiguamiento y las carretas se dejan separadas, al perturbarlas se moverá cada una con su propio movimiento armónico simple, es decir, tendremos dos osciladores armónicos independientes. Obtendremos osciladores armónicos acoplados si conectamos ahora las dos carretas por medio de un muelle de constante k_3 , como se ve en la figura. Aplicando la segunda ley de Newton se puede probar (Problema 16) que los desplazamientos x_1 y x_2 de las carretas satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales de segundo orden:

¹² Para factorizar la ecuación auxiliar nótese que $r = 1$ es una raíz evidente, luego $r - 1$ es un factor del polinomio auxiliar. Los demás factores se encuentran por división.

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -k_1 x_1 + k_3(x_2 - x_1) = \\
 &= -(k_1 + k_3)x_1 + k_3 x_2, \\
 m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_3(x_2 - x_1) - k_2 x_2 = \\
 &= k_3 x_1 - (k_2 + k_3)x_2.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Ahora podemos obtener una sola ecuación de cuarto orden para x_1 , despejando x_2 en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda (Problema 17).

Aún no nos hemos enfrentado a la cuestión de cómo hallar una solución particular de la ecuación completa (1). Basta hacer notar que el método de los coeficientes indeterminados de la Sección 18 continúa siendo válido, con cambios inesenciales, para funciones $f(x)$ de los tipos allí considerados. En la próxima sección examinaremos un enfoque totalmente distinto al problema de calcular soluciones particulares.

Ejemplo 5. Hallar una solución particular de la ecuación diferencial $y''' + 2y'' - y' = 3x^2 - 2x + 1$.

La Sección 18 nos sugiere ensayar

$$\begin{aligned}
 y &= x(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \\
 &= a_0x + a_1x^2 + a_2x^3.
 \end{aligned}$$

Como $y' = a_0 + 2a_1x + 3a_2x^2$, $y'' = 2a_1 + 6a_2x$ e $y''' = 6a_2$, sustituyendo en la ecuación dada queda

$$6a_2 + 2(2a_1 + 6a_2x) - (a_0 + 2a_1x + 3a_2x^2) = 3x^2 - 2x + 1,$$

es decir, tras reunir términos de potencias idénticas de x ,

$$-3a_2x^2 + (-2a_1 + 12a_2)x + (-a_0 + 4a_1 + 6a_2) = 3x^2 - 2x + 1.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 -3a_2 &= 3, \\
 -2a_1 + 12a_2 &= -2, \\
 -a_0 + 4a_1 + 6a_2 &= 1,
 \end{aligned}$$

luego $a_2 = -1$, $a_1 = -5$ y $a_0 = -27$. Hemos llegado a la solución particular $y = -27x - 5x^2 - x^3$.

PROBLEMAS

Hallar la solución general de cada una de estas ecuaciones diferenciales.

1. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

2. $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0.$
3. $y''' - y = 0.$
4. $y''' + y = 0.$
5. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$
6. $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0.$
7. $y^{(4)} - y = 0.$
8. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0.$
9. $y^{(4)} - 2a^2y'' + a^4y = 0.$
10. $y^{(4)} + 2a^2y'' + a^4y = 0.$
11. $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0.$
12. $y^{(4)} + 2y''' - 2y'' - 6y' + 5y = 0.$
13. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$
14. $y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0.$
15. $y^{(5)} - 6y^{(4)} - 8y''' + 48y'' + 16y' - 96y = 0.$
16. Deducir las ecuaciones (6) para los osciladores armónicos acoplados, usando la configuración que muestra la Figura 26, donde ambas carretas están desplazadas a la derecha de sus posiciones de equilibrio y $x_2 > x_1$, de modo que el muelle de la derecha está comprimido y los otros dos estirados.
17. En el Ejemplo 4, hallar la ecuación diferencial de cuarto orden para x_1 eliminando x_2 , tal como se indicaba en el texto.
18. En el problema anterior, resolver la ecuación diferencial de cuarto orden obtenida, supuesto que las masas son iguales y las constantes de los resortes también, de manera que $m_1 = m_2 = m$ y $k_1 = k_2 = k_3 = k$. En este caso especial, probar directamente (o sea, sin hacer uso de la simetría de la situación) que x_2 satisface la misma ecuación diferencial que x_1 . Las dos frecuencias asociadas con estos osciladores armónicos acoplados se llaman *frecuencias normales* del sistema. Calcúlense.
19. Hallar la solución general de $y^{(4)} = 0$ y la de $y^{(4)} = \operatorname{sen} x + 24$.
20. Hallar la solución general de $y''' - 3y'' + 2y' = 10 + 42e^{3x}$.
21. Hallar la solución de $y''' - y' = 1$ que satisface las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = y''(0) = 4$.
22. Probar que el cambio $x = e^z$ transforma la ecuación equidimensional de Euler de tercer orden

$$x^3y''' + a_1x^2y'' + a_2xy' + a_3y = 0$$

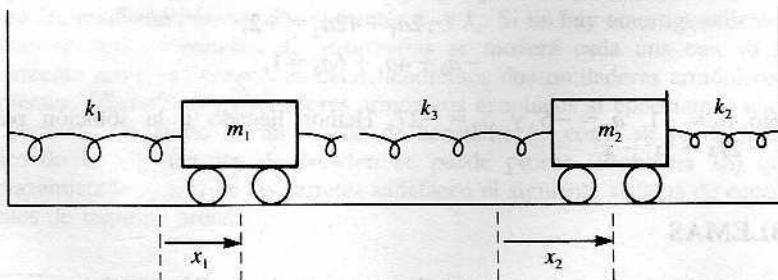


Figura 26

en una ecuación lineal de tercer orden con coeficientes constantes. (Esta transformación también funciona para la ecuación de Euler de orden n .) Resolver por ese método las ecuaciones:

$$(a) \quad x^3y''' + 3x^2y'' = 0; \quad (c) \quad x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = 0.$$

$$(b) \quad x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0;$$

23. Para determinar la resistencia de una pequeña esfera que se mueve a velocidad constante en un fluido viscoso, es necesario resolver la ecuación diferencial

$$x^3y^{(4)} + 8x^2y''' + 8xy'' - 8y' = 0.$$

Se trata de una ecuación de Euler para y' . Usar el método del Problema 22 para demostrar que su solución general es

$$y = c_1x^2 + c_2x^{-1} + c_3x^{-3} + c_4.$$

Estas ideas forman parte del bagaje matemático utilizado por Robert A. Millikan en su famoso experimento de la gota de aceite en 1909 para medir la carga del electrón, que le valió la concesión del Premio Nobel en 1923¹³.

23. METODOS OPERACIONALES PARA HALLAR SOLUCIONES PARTICULARES

Al final de la Sección 22 nos referimos al problema de hallar soluciones particulares de ecuaciones no homogéneas de la forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x). \quad (1)$$

En esta sección damos cuenta brevemente del uso de operadores diferenciales para resolverlo de modo más eficiente que los vistos hasta ahora. Estos «métodos operacionales» se deben principalmente al matemático aplicado británico Oliver Heaviside (1850-1925). Sus métodos parecieron tan extraños a los científicos de la época que fue considerado como un excéntrico, cosa frecuente con los pensadores de originalidad excepcional.

Representemos las derivadas por potencias de D , de modo que

$$Dy = \frac{dy}{dx}, \quad D^2y = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad D^n y = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Entonces (1) se escribe

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_{n-1} Dy + a_n y = f(x), \quad (2)$$

¹³ Para una clara exposición de este ingeniosísimo experimento, con un buen esquema del aparato, véanse las páginas 50-51 del libro de Linus Pauling mencionado en la Sección 4 [Nota 12].

o también

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n)y = f(x),$$

o finalmente

$$p(D)y = f(x), \quad (3)$$

donde el operador diferencial $P(D)$ es simplemente el polinomio auxiliar $p(r)$ con r sustituido por D . La aplicación sucesiva de dos o más de tales operadores se puede llevar a cabo multiplicando primero los operadores entre sí, por las reglas habituales del álgebra, y aplicando luego el operador producto. Por ejemplo, sabemos que $P(D)$ se puede factorizar formalmente en

$$p(D) = (D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n), \quad (4)$$

donde r_1, r_2, \dots, r_n son las raíces de la ecuación auxiliar; y estos factores se pueden aplicar entonces en cualquier orden sucesivamente para reproducir el resultado de aplicar $P(D)$. Como ilustración, digamos que si la ecuación auxiliar es de segundo grado y tiene raíces r_1 y r_2 , entonces formalmente se tiene

$$(D - r_1)(D - r_2) = D^2 - (r_1 + r_2)D + r_1 r_2; \quad (5)$$

y puesto que

$$(D - r_2)y = \left(\frac{d}{dx} - r_2 \right)y = \frac{dy}{dx} - r_2 y,$$

podemos comprobar (5) escribiendo

$$\begin{aligned} (D - r_1)(D - r_2)y &= \left(\frac{d}{dx} - r_1 \right) \left(\frac{dy}{dx} - r_2 y \right) = \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} - r_2 y \right) - r_1 \left(\frac{dy}{dx} - r_2 y \right) = \\ &= \frac{d^2y}{dx^2} - (r_1 + r_2) \frac{dy}{dx} + r_1 r_2 y = \\ &= D^2y - (r_1 + r_2)Dy + r_1 r_2 y = \\ &= [D^2 - (r_1 + r_2)D + r_1 r_2]y, \end{aligned}$$

porque este es el significado de (5).

No se plantea dificultad alguna con el significado de la expresión $p(D)y$ a

la izquierda de (3); tiene el mismo significado que el miembro de la izquierda en (2) o (1). Ahora deseamos aprender a tratar $p(D)$ como un ente en sí mismo y, al hacerlo, desarrollar métodos de resolución de (3), que es el objetivo de esta sección. Sin irnos por las ramas, queremos «despejar formalmente» y en (3), obteniendo

$$y = \frac{1}{p(D)} f(x). \quad (6)$$

Aquí $1/p(D)$ representa una operación realizada sobre $f(x)$ para dar y . La cuestión es de qué naturaleza es tal operación y cómo se realiza. Para empezar a comprender tales cuestiones, consideremos la sencilla ecuación $Dy = f(x)$, que da

$$y = \frac{1}{D} f(x).$$

Ahora bien, $Dy = f(x)$, o sea, $dy/dx = f(x)$, se resuelve fácilmente escribiendo

$$y = \int f(x) dx,$$

así que es natural definir

$$\frac{1}{D} f(x) = \int f(x) dx, \quad (7)$$

Esto nos dice que el operador $1/D$ aplicado a una función significa integración. Análogamente, el operador $1/D^2$ aplicado a una función significa integrar la función dos veces sucesivamente, etc. Operadores tales como $1/D$ o $1/D^2$ se llaman *operadores inversos*. Proseguimos esta línea de investigación examinando otros operadores inversos. Consideremos

$$(D - r)y = f(x), \quad (8)$$

con r constante. Formalmente tenemos

$$y = \frac{1}{D - r} f(x).$$

Pero (8) no es sino la sencilla ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} - ry = f(x),$$

cuya solución, de acuerdo con la Sección 10, es

$$y = e^{rx} \int e^{-rx} f(x) dx.$$

(Suprimimos las constantes de integración porque nos interesa sólo una solución particular.) Es natural, por consiguiente, hacer la definición

$$\frac{1}{D - r} f(x) = e^{rx} \int e^{-rx} f(x) dx. \quad (9)$$

Nótese que esto se reduce a (7) cuando $r = 0$. Ya estamos preparados para comenzar a discutir los procedimientos de resolución que emergen de (6).

METODO 1: INTEGRACIONES SUCESIVAS. Usando la factorización (4) podemos escribir la fórmula (6) como

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{p(D)} f(x) &= \frac{1}{(D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n)} f(x) = \\ &= \frac{1}{D - r_1} \frac{1}{D - r_2} \cdots \frac{1}{D - r_n} f(x). \end{aligned}$$

Aquí podemos aplicar los n operadores inversos en cualquier orden, y sabemos por (9) que el proceso completo requiere n integraciones sucesivas. Que la función resultante $y = y(x)$ es una solución particular de (3) se ve fácilmente: aplicando los n factores de $p(D)$ a y en orden adecuado, deshacemos las n integraciones sucesivas y volvemos a $f(x)$.

Ejemplo 1. Hallar una solución particular de $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

Solución. Tenemos $(D^2 - 3D + 2)y = xe^x$, de modo que

$$(D - 1)(D - 2)y = xe^x \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{D - 1} \frac{1}{D - 2} xe^x.$$

Teniendo en cuenta (9) e integrando por partes se obtiene

$$\frac{1}{D - 2} xe^x = e^{2x} \int e^{-2x} xe^x dx = -(1 + x)e^x,$$

luego

$$y = \frac{1}{D - 1} [-(1 + x)e^x] = -e^x \int e^{-x}(1 + x)e^x dx = -\frac{1}{2}(1 + x)^2 e^x.$$

Ejemplo 2. Hallar una solución particular de $y'' - y = e^{-x}$.

Solución. Tenemos $(D^2 - 1)y = e^{-x}$, así que

$$(D - 1)(D + 1)y = e^{-x}, \quad y = \frac{1}{D - 1} \frac{1}{D + 1} e^{-x},$$

$$\frac{1}{D + 1} e^{-x} = e^{-x} \int e^x e^{-x} dx = xe^{-x},$$

$$y = \frac{1}{D - 1} xe^{-x} = e^x \int e^{-x} xe^{-x} dx = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) e^{-x}.$$

METODO 2: DESCOMPOSICION DE OPERADORES EN FRACCIONES SIMPLES. Las sucesivas integraciones del método 1 se tornarán complicadas y tediosas con frecuencia. La fórmula

$$y = \frac{1}{p(D)} f(x) = \frac{1}{(D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n)} f(x)$$

sugiere un camino para evitar esa tarea, al brindar la posibilidad de descomponer el operador de la derecha en fracciones simples. Si los factores de $p(D)$ son distintos, podemos escribir

$$y = \frac{1}{p(D)} f(x) = \left[\frac{A_1}{D - r_1} + \frac{A_2}{D - r_2} + \cdots + \frac{A_n}{D - r_n} \right] f(x)$$

con constantes apropiadas A_1, A_2, \dots, A_n , y cada término de la derecha se puede hallar usando (9). El operador entre corchetes se suele llamar el *desarrollo de Heaviside* del operador inverso $1/p(D)$.

Ejemplo 3. Resolver el problema del Ejemplo 1 por este método.

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(D - 1)(D - 2)} xe^x = \left[\frac{1}{D - 2} - \frac{1}{D - 1} \right] xe^x = \\ &= \frac{1}{D - 2} xe^x - \frac{1}{D - 1} xe^x = \\ &= e^{2x} \int e^{-2x} xe^x dx - e^x \int e^{-x} xe^x dx = \\ &= -1(1 + x)e^x - \frac{1}{2}x^2e^x = -\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)e^x. \end{aligned}$$

El estudiante quizá se haya dado cuenta de que esta solución no es exactamente la misma que la dada en el Ejemplo 1. Sin embargo, es muy fácil convencerte de que difieren sólo en una solución de la ecuación homogénea reducida, de manera que todo es correcto.

Ejemplo 4. Resolver el problema del Ejemplo 2 por este método.

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{(D-1)(D+1)} e^{-x} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{D-1} - \frac{1}{D+1} \right] e^{-x} = \\&= \frac{1}{2} e^x \int e^{-x} e^{-x} dx - \frac{1}{2} e^{-x} \int e^x e^{-x} dx = \\&= -\frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x}.\end{aligned}$$

Si algunos de los factores de $p(D)$ se repiten, sabemos que la forma de la descomposición en fracciones simples es diferente. Así, si $D - r_1$ es un factor que se repite k veces, la descomposición contiene los términos

$$\frac{A_1}{D - r_1} + \frac{A_2}{(D - r_1)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(D - r_1)^k}.$$

Estos operadores se pueden aplicar a $f(x)$ de izquierda a derecha, y cada uno requiere una integración basada en el resultado del paso anterior, como en el método 1.

METODO 3: DESARROLLOS EN SERIE DE OPERADORES. Cuando $f(x)$ es un polinomio, suele ser útil desarrollar el operador inverso $1/p(D)$ en serie de potencias de D , de modo que

$$y = \frac{1}{p(D)} f(x) = (1 + b_1 D + b_2 D^2 + \cdots) f(x).$$

La razón es que las derivadas altas del polinomio se anulan, debido a que $D^k x^n = 0$ si $k > n$.

Ejemplo 5. Hallar una solución particular de $y''' - 2y'' + y = x^4 + 2x + 5$.

Solución. Ahora es $(D^3 - 2D^2 + 1)y = x^4 + 2x + 5$, de manera que

$$y = \frac{1}{1 - 2D^2 + D^3} (x^4 + 2x + 5).$$

Por división de polinomios se ve que

$$\frac{1}{1 - 2D^2 + D^3} = 1 + 2D^2 - D^3 + 4D^4 - 4D^5 + \dots,$$

luego

$$\begin{aligned} y &= (1 + 2D^2 - D^3 + 4D^4 - 4D^5 + \dots)(x^4 + 2x + 5) = \\ &= (x^4 + 2x + 5) + 2(12x^2) - (24x) + 4(24) = \\ &= x^4 + 24x^2 - 22x + 101. \end{aligned}$$

Con el fin de aprovechar al máximo este método, es deseable retener en la memoria las siguientes series, familiares del álgebra elemental:

$$\frac{1}{1 - r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots \quad \text{y} \quad \frac{1}{1 + r} = 1 - r + r^2 - r^3 + \dots.$$

En el actual contexto, sólo nos interesan estas series como series «formales», sin preocuparnos por su comportamiento de convergencia.

Ejemplo 6. Hallar una solución particular de $y''' + y'' + y' + y = x^5 - 2x^2 + x$.

Solución. Tenemos $(D^3 + D^2 + D + 1)y = x^5 - 2x^2 + x$, luego

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{1 + D + D^2 + D^3}(x^5 - 2x^2 + x) = \\ &= \frac{1}{1 - D^4}(1 - D)(x^5 - 2x^2 + x) = \\ &= \frac{1}{1 - D^4}[(x^5 - 2x^2 + x) - (5x^4 - 4x + 1)] = \\ &= (1 + D^4 + D^8 + \dots)[x^5 - 5x^4 - 2x^2 + 5x - 1] = \\ &= (x^5 - 5x^4 - 2x^2 + 5x - 1) + (120x - 120) = \\ &= x^5 - 5x^4 - 2x^2 + 125x - 121. \end{aligned}$$

Lo más notable acerca de los métodos ilustrados en estos ejemplos es que ¡funcionan!

METODO 4: LA REGLA DEL DESPLAZAMIENTO EXPONENCIAL. Como ya sabemos, las funciones exponenciales se comportan de modo muy especial bajo derivación. Este hecho permite simplificar nuestra tarea siempre que $f(x)$ contiene un factor de la forma e^{kx} . Así pues, si $f(x) = e^{kx}g(x)$, empezamos observando que

$$\begin{aligned}(D - r)f(x) &= (D - r)e^{kx}g(x) = \\&= e^{kx}Dg(x) + ke^{kx}g(x) - re^{kx}g(x) = \\&= e^{kx}(D + k - r)g(x).\end{aligned}$$

Aplicando esta fórmula a los sucesivos factores $D - r_1$, $D - r_2$, ..., $D - r_n$, vemos que para el operador polinómico $p(D)$,

$$p(D)e^{kx}g(x) = e^{kx}p(D + k)g(x). \quad (10)$$

Es decir, podemos pasar el factor e^{kx} a la izquierda del operador $p(D)$ si sustituimos en el operador D por $D + k$.

La misma propiedad es válida para el operador inverso $1/p(D)$, o sea,

$$\frac{1}{p(D)}e^{kx}g(x) = e^{kx}\frac{1}{p(D+k)}g(x). \quad (11)$$

En efecto, basta aplicar $p(D)$ a la derecha y usar (10):

$$p(D)e^{kx}\frac{1}{p(D+k)}g(x) = e^{kx}p(D+k)\frac{1}{p(D+k)}g(x) = e^{kx}g(x).$$

Las propiedades (10) y (11) se llaman *reglas de desplazamiento exponencial*. Resultan muy útiles para sacar funciones exponenciales fuera de la acción de los operadores.

Ejemplo 7. Resolver el problema del Ejemplo 1 por este método.

Solución. Tenemos $(D^2 - 3D + 2)y = xe^x$, de donde

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{D^2 - 3D + 2}xe^x = e^x\frac{1}{(D+1)^2 - 3(D+1) + 2}x = \\&= e^x\frac{1}{D^2 - D}x = -e^x\frac{1}{D}\frac{1}{1-D}x = \\&= -e^x\left(\frac{1}{D} + 1 + D + D^2 + \dots\right)x = \\&= -e^x\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right),\end{aligned}$$

como ya habíamos visto en los Ejemplos 1 y 3.

Los lectores interesados encontrarán detalles adicionales sobre los métodos de esta sección en la «Historical Introduction» al libro de H. S. Carslaw

y J. C. Jaeger, *Operational Methods In Applied Mathematics*, Dover, Nueva York, 1963; y en E. Stephens, *The Elementary Theory of Operational Mathematics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1937.

PROBLEMAS

- Hallar una solución particular de $y'' - 4y = e^{2x}$, usando los métodos 1 y 2.
- Hallar una solución particular de $y'' - y = x^2e^{2x}$, usando los métodos 1, 2 y 4.

En los Problemas 3 a 6, hallar una solución particular por el método 1.

- $y'' + 4y' + 4y = 10x^3e^{-2x}$.
- $y'' - 2y' + y = e^x$.
- $y'' - y = e^{-x}$.
- $y'' - 2y' - 3y = 6e^{5x}$.

En los Problemas 7 a 15, hallar una solución particular por el método 3.

- $y'' - y' + y = x^3 - 3x^2 + 1$.
- $y''' - 2y' + y = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$.
- $4y'' + y = x^4$.
- $y^{(5)} - y''' = x^2$.
- $y^{(6)} - y = x^{10}$.
- $y'' + y' - y = 3x - x^4$.
- $y'' + y = x^4$.
- $y''' - y'' = 12x - 2$.
- $y''' + y'' = 9x^2 - 2x + 1$.

En los Problemas 16 a 18, hallar una solución particular por el método 4.

- $y'' - 4y' + 3y = x^3e^{2x}$.
- $y'' - 7y' + 12y = e^{2x}(x^3 - 5x^2)$.
- $y'' + 2y' + y = 2x^2e^{-2x} + 3e^{2x}$.

En los Problemas 19 a 24, hallar una solución particular por cualquier método.

- $y''' - 8y = 16x^2$.
- $y^{(4)} - y = 1 - x^3$.
- $y''' - \frac{1}{4}y' = x$.

- $y^{(4)} = x^{-3}$.
- $y''' - y'' + y' = x + 1$.
- $y''' + 2y'' = x$.

- Usar la regla de desplazamiento exponencial para encontrar la solución general de cada una de estas ecuaciones:

- $(D - 2)^3y = e^{2x}$ [ayuda: multiplique por e^{-2x} y use (10)];
- $(D + 1)^3y = 12e^{-x}$;
- $(D - 2)^2y = e^{2x}\sin x$.

26. Consideremos la ecuación homogénea $p(D)y = 0$, de orden n .

- (a) Si un polinomio $q(r)$ es un factor del polinomio auxiliar $p(r)$, probar que cualquier solución de la ecuación diferencial $q(D)y = 0$ es también solución de $p(D)y = 0$.
- (b) Si r_1 es una raíz de multiplicidad k de la ecuación auxiliar $p(r) = 0$, demostrar que toda solución de $(D - r_1)^k y = 0$ es también solución de $p(D)y = 0$.
- (c) Usar la regla de desplazamiento exponencial para probar que $(D - r_1)^k y = 0$ tiene

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_kx^{k-1})e^{r_1x}$$

como su solución general. Ayuda: $(D - r_1)^k y = 0$ es equivalente a $e^{r_1x}D^k(e^{-r_1x}y) = 0$.

APENDICE A. EULER

Leonhard Euler (1707-1783), el principal científico suizo, es uno de los tres matemáticos más grandes de los tiempos modernos, junto con Gauss y Riemann.

Ha sido quizá el autor más prolífico de todos los tiempos en cualquier campo del saber. Entre 1727 y 1783 sus escritos surgían en un flujo incesante, ampliando los conocimientos de todas las ramas de la matemática pura y aplicada, y dando origen a muchas inexistentes con anterioridad. Publicó un promedio de 800 páginas por año en su larga vida, pese a lo cual siempre tenía algo interesante que decir sin jamás aparecer como repetitivo. La publicación de sus obras completas se inició en 1911 y todavía no se ve el final. Se planeó que incluyera 887 títulos en 72 volúmenes, pero desde entonces se han desempolvado extensos depósitos de documentos previamente desconocidos, estimándose ahora que harán falta más de 100 gruesos volúmenes para completar el proyecto. Parece evidente que Euler escribía matemáticas con la facilidad y fluidez de un experimentado conferenciante al hablar sobre asuntos con los que mantiene una íntima familiaridad. Sus escritos son modelo de apacible claridad. Nunca condensó y por tal razón nos revela en ellos la rica abundancia de sus ideas y la amplitud de sus campos de interés. El físico francés Arago, comentando la incomparable facilidad de Euler para las matemáticas, afirmaba que «calculaba sin esfuerzo aparente, como los demás respiran, como las águilas se mantienen en el aire». Durante los diecisiete últimos años de su vida sufrió ceguera total, pero gracias a su poderosa memoria y su fértil imaginación, y con ayudantes que escribían sus libros y artículos al dictado, incluso aumentó su ya prodigioso caudal de trabajo.

Euler nació en Basilea y fue estudiante con Jean Bernoulli, pero pronto desbordó a su maestro. Su vida activa transcurrió como miembro de las Academias de Ciencias de Berlín y de San Petersburgo, y en las revistas de estas instituciones vieron la luz casi todas sus obras. Su oficio era la investigación matemática, y a fe que conocía bien su oficio. Fue asimismo hombre de amplia cultura, versado en lenguas y literatura clásicas (sabía de memoria la *Eneida*),

muchas lenguas modernas, fisiología, medicina, botánica, geografía y todo el cuerpo de doctrina de la física conocida en sus días. Sin embargo, carecía de talento para la metafísica y para la dialéctica, perdiendo muchos encuentros verbales con Voltaire en la corte de Federico el Grande. Su vida personal fue plácida y todo lo tranquila que cabe en alguien que tuvo trece hijos.

Aunque no fue profesor, Euler tuvo una influencia más profunda sobre la enseñanza de las matemáticas que cualquier otro. Y ello sobre todo a través de sus tres grandes tratados: *Introductio in Analysis Infinitorum* (1748); *Institutiones Calculi Differentialis* (1755); e *Institutiones Calculi Integralis* (1768-1794). Existe mucho de cierto en el antiguo dicho de que todos los libros de texto de cálculo, elemental o avanzado, desde 1748 son esencialmente copias de Euler o copias de copias de Euler¹⁴. Estas obras resumen y codifican los descubrimientos de sus predecesores, y están repletos de las propias ideas de Euler. Extendió y perfeccionó la geometría analítica del plano y del espacio, introdujo el enfoque analítico de la trigonometría y es responsable del moderno tratamiento de las funciones $\log x$ y e^x . Creó una teoría consistente de logaritmos de números negativos e imaginarios, y descubrió que $\log x$ tiene infinitos valores. Fue a través de esos trabajos cuando los símbolos e , π e i ($=\sqrt{-1}$) se hicieron de uso común entre los matemáticos, siendo él quien los unió en la sorprendente relación $e^{i\pi} = -1$. Esto no es sino un caso especial (con $\theta = \pi$) de su famosa fórmula $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, que conecta las funciones exponencial y trigonométricas, absolutamente indispensable en análisis avanzado¹⁵. Entre sus otras contribuciones a la notación matemática habitual hoy figuran $\sin x$, $\cos x$, el uso de $f(x)$ para denotar una función sin especificar, y el uso de Σ para la suma¹⁶. Si bien las buenas notaciones son importantes, lo que cuenta son las ideas que hay detrás de ellas, y a este respecto la fertilidad de Euler roza lo increíble. Prefería los problemas concretos a las teorías generales, tan en boga hoy en día, y su intuición incomparable para ver relaciones entre fórmulas sin aparente conexión abrió nuevas vías en áreas de las matemáticas que sus sucesores cultivaron.

Fue el más experto manipulador de series infinitas, productos infinitos y fracciones continuas, y sus trabajos están plagados de hallazgos impresionantes en esos campos. Jacques Bernoulli, el hijo mayor de Jean, encontró las sumas de varias series infinitas, pero no fue capaz de sumar la de los recíprocos de los cuadrados $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$. Escribió: «Si alguien lograra sumar esta

¹⁴ Véase C. B. Boyer, «The Foremost Textbook of Modern Times», *Am. Math. Monthly*, volumen 58, págs. 223-226, 1951.

¹⁵ Una consecuencia todavía más sorprendente de su fórmula es que una potencia imaginaria de un número imaginario puede ser real. En particular, $i^i = e^{-\pi/2}$; porque si hacemos $\theta = \pi/2$, obtenemos $e^{\pi i/2} = i$, de modo que

$$i^i = (e^{\pi i/2})^i = e^{\pi i^2/2} = e^{-\pi/2}.$$

Euler probó además que i^i tiene infinitos valores, de los que el cálculo sólo reproduce uno.

¹⁶ Véase F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Open Court, Chicago, 1929.

serie y me lo mostrara, le estaría muy agradecido». En 1736, mucho después de la muerte de Jacques, Euler hizo el maravilloso descubrimiento de que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Halló asimismo la suma de los recíprocos de las cuartas y sextas potencias,

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

y

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots = 1 + \frac{1}{64} + \frac{1}{729} + \dots = \frac{\pi^6}{945}.$$

Cuando John se enteró de tales descubrimientos, escribió: «Ojalá mi hermano viviese todavía»¹⁷. Pocos creerían que esas fórmulas guarden alguna relación, como de hecho ocurre, con el producto infinito de Wallis (1656),

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots.$$

Euler fue el primero en explicar eso de modo satisfactorio, en términos de su desarrollo del seno en producto infinito,

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots.$$

El producto de Wallis está relacionado también con la notable fracción continua de Brouncker,

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}},$$

¹⁷ El mundo espera todavía, más de 200 años después, que alguien descubra la suma de los recíprocos de los cubos.

que sólo se logró comprender a la luz de las extensas investigaciones de Euler en ese terreno.

Su labor en todos los aspectos del análisis influyó decisivamente en su posterior desarrollo a lo largo de dos siglos. A él se deben muchas ideas fundamentales en ecuaciones diferenciales, incluyendo partes sustanciales de la teoría de ecuaciones lineales de segundo orden y el método de resolución por series de potencias. Dio la primera discusión sistemática del cálculo de variaciones, que basó sobre su ecuación diferencial para curvas minimizantes. Introdujo el número hoy conocido como *constante de Euler*,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) = 0,5772\dots,$$

que es el número más importante de las matemáticas tras π y e . Descubrió la integral que define la función gamma,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

que suele ser la primera función trascendente que los estudiantes encuentran más allá del nivel del cálculo elemental, y desarrolló muchas de sus propiedades y aplicaciones. Trabajó también con series de Fourier, encontró las funciones de Bessel en su estudio de las vibraciones de membranas circulares, y aplicó la transformación de Laplace a la resolución de ecuaciones diferenciales, todo ello antes de que Fourier, Bessel y Laplace hubiesen nacido. A pesar de haber fallecido hace unos 200 años, Euler vive hoy en el análisis.

E. T. Bell, el conocido historiador de las matemáticas, hizo notar que: «Uno de los rasgos más admirables del genio de Euler es que tenía idéntica potencia en las dos grandes corrientes de las matemáticas, la discreta y la continua». En el ámbito de lo discreto, fue uno de los fundadores de la moderna teoría de números e hizo abundantes contribuciones a ella durante su vida. Además, los orígenes de la topología, una de las fuerzas dominantes de la matemática actual, se hallan en su solución al problema de los puentes de Königsberg y en su fórmula $V - E + F = 2$ que conecta el número de vértices, aristas y caras de un poliedro simple. En los párrafos que siguen describiremos escuetamente algunas de sus actividades en estos campos.

En teoría de números, Euler adquirió buena parte de su inspiración de las notas marginales que Fermat dejó escritas en su copia de las obras de Diófano. Publicó las primeras demostraciones del teorema de Fermat y del teorema de los dos cuadrados de Fermat. Más tarde generalizó el primero de estos resultados clásicos introduciendo la función ϕ de Euler; su demostración del segundo le llevó siete años de esfuerzos intermitentes. Asimismo, demostró que todo entero positivo es suma de cuatro cuadrados e investigó la ley de reciprocidad cuadrática.

Parte de su más interesante labor estuvo ligada a la sucesión de los números

primos, es decir, aquellos enteros $p > 1$ cuyos únicos divisores positivos son 1 y p . Su uso de la divergencia de la serie armónica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ para probar el teorema de Euclides de existencia de infinitos primos es tan sencilla e ingeniosa que nos atrevemos a presentarla. Supongamos que existiesen sólo N primos p_1, p_2, \dots, p_N . En tal caso, todo entero $n > 1$ sería expresable de forma única como $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_N^{a_N}$. Si a es el mayor de estos exponentes, es fácil ver que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} &\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^a}\right) \times \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^a}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_N} + \frac{1}{p_N^2} + \dots + \frac{1}{p_N^a}\right), \end{aligned}$$

multiplicando los factores de la derecha. Pero la simple fórmula $1 + x + x^2 + \dots = 1/(1-x)$, válida para $|x| < 1$, muestra que los factores en el producto anterior son menores que los números

$$\frac{1}{1 - 1/p_1}, \frac{1}{1 - 1/p_2}, \dots, \frac{1}{1 - 1/p_N},$$

y por tanto

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \frac{p_1}{p_1 - 1} \frac{p_2}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_N}{p_N - 1}$$

para todo n . Esto contradice la divergencia de la serie armónica y demuestra que no puede haber sólo un número finito de primos. Probó también que la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \dots$$

de los recíprocos de los primos es divergente, así como la preciosa identidad siguiente: si $s > 1$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - 1/p^s},$$

donde la expresión de la derecha denota el producto de los números $(1 - p^{-s})^{-1}$ para todos los primos p . Volveremos más adelante a esta identidad en nuestra nota sobre Riemann en el Apéndice E del Capítulo 5.

Inició también la teoría de particiones, una rama poco conocida de la teoría de números que encontró mucho más tarde aplicaciones en mecánica estadística

y en la teoría cinética de los gases. Un problema típico de esta materia consiste en determinar el número $p(n)$ de maneras en que un entero positivo dado n se puede descomponer en suma de enteros positivos, y analizar las propiedades de esa función. Por ejemplo, 4 admite las particiones $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$, de modo que $p(4) = 5$, y análogamente $p(5) = 7$ y $p(6) = 11$. Está claro que $p(n)$ crece muy rápidamente con n , tanto que de hecho¹⁸

$$p(200) = 3.972.999.029.388.$$

Euler inició su investigación observando (sólo los genios observan cosas así) que $p(n)$ es el coeficiente de x^n cuando la función $[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots]^{-1}$ se desarrolla en serie de potencias:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots} = 1 + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + \dots$$

De ahí dedujo muchas otras identidades notables relacionadas con diversos problemas de particiones¹⁹.

El problema de los puentes de Königsberg nació como pasatiempo de paseantes en la ciudad de ese nombre (hoy Kaliningrado) en lo que era la Prusia del este. Había siete puentes sobre el río que atraviesa la ciudad (véase Figura 27). Los paseantes solían caminar entre una isla y otra, y se tenía la convicción de que era imposible pasar en el paseo por los siete puentes sin cruzar alguno de ellos al menos dos veces. Euler analizó el problema examinando el gráfico esquemático de la derecha de la figura, en el que las zonas de tierra firme se representan por puntos y los puentes por segmentos que conectan los puntos. Los puntos se llaman vértices, y se dice que un vértice es par o impar según que el número de líneas que conducen a él sea par o impar. En terminología moderna, la configuración de ese diagrama se llama un *grafo*, y un camino que pase por todas sus líneas una y sólo una vez se llama un *camino de Euler*. Un camino de Euler no tiene por qué finalizar en el mismo

¹⁸ Este cálculo requirió un mes de trabajo de un buen experto en cálculo en 1918. Su motivación era encontrar una fórmula aproximada para $p(n)$, a saber

$$p(n) \equiv \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}$$

(el error era extremadamente pequeño).

¹⁹ Véase el Capítulo XIX de G. H. Hardy y E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 1938; o los Capítulos 12-14 de G. E. Andrews, *Number Theory*, W. B. Saunders, San Francisco, 1971. Estos tratamientos son «elementales» en el sentido técnico de que no echan mano de la potente artillería del análisis avanzado, pese a lo cual distan mucho de ser sencillos. A quienes deseen experimentar lo más interesante de la obra de Euler en teoría de números, de primera mano y en un contexto que no requiere demasiados conocimientos previos, les recomendamos el Capítulo VI del bello libro de G. Polya, *Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton University Press, 1954.

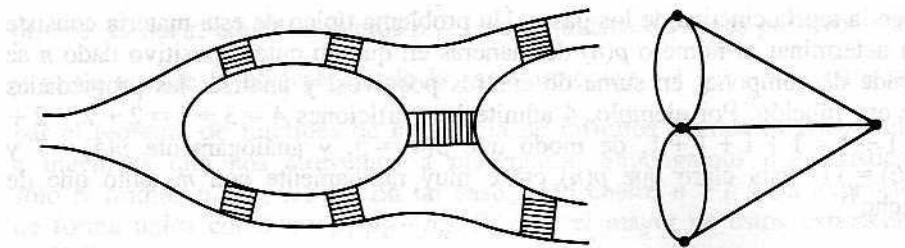


Figura 27. Los puentes de Königsberg.

vértice donde comienza, pero si lo hace se llama un *circuito de Euler*. Por argumentos combinatorios, Euler llegó a los siguientes teoremas sobre los grafos: (1) el número de vértices impares es par; (2) si no hay vértices impares, partiendo de cualquier punto, existe un circuito de Euler; (3) si hay dos vértices impares, no hay circuitos de Euler pero sí un camino de Euler que comienza en uno de los vértices impares y termina en el otro; (4) si hay más de dos vértices impares, no hay caminos de Euler²⁰. El grafo de los puentes de Königsberg tiene cuatro vértices impares y, por tanto, no existen en él caminos de Euler²¹. La rama de las matemáticas que se ha desarrollado a partir de estas ideas germinales se conoce como *teoría de grafos*; tiene aplicaciones en enlaces químicos, propiedades de redes viarias y otros temas.

Un poliedro es un sólido cuya superficie consta de caras poligonales, y un poliedro regular tiene por caras polígonos regulares. Como sabemos, existe un polígono regular de n lados para todo entero positivo $n = 3, 4, 5, \dots$, y reciben nombres especiales: triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, etc. Sin embargo, es curioso, y conocido desde la antigua Grecia, que sólo existen cinco poliedros regulares, cuyas formas y nombres se muestran en la Figura 28.

Los griegos estudiaron estas figuras con asiduidad, pero habría de llegar Euler para que se descubriera la más simple de sus propiedades comunes: Si V , E y F denotan el número de vértices, aristas y caras de cualquiera de ellos, siempre es cierto que

$$V - E + F = 2.$$

²⁰ El artículo original de Euler de 1736 es interesante como lectura y fácil de entender. Puede encontrarse en las páginas 573-580 de J. R. Newman (ed.), *The World of Mathematics*, Simon y Schuster, Nueva York, 1956.

²¹ Es sencillo ver, sin recurrir a teorema alguno, que este grafo no contiene circuitos de Euler, porque si lo tuviera tendría que entrar en cada vértice tantas veces como sale, de modo que forzosamente todo vértice sería par. Razonamientos similares demuestran que si hubiera un camino de Euler que no fuese cerrado, habría dos vértices impares.

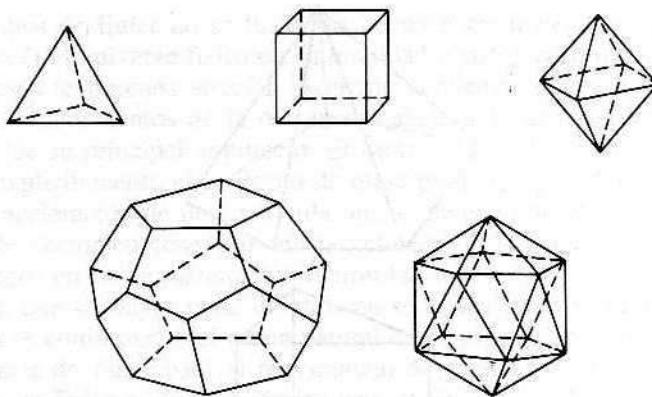


Figura 28. Poliedros regulares.

Este hecho se conoce como *fórmula de Euler para los poliedros*, y es fácil de verificar a partir de los datos recogidos en esta tabla:

	<i>V</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
Tetraedro	4	6	4
Cubo	8	12	6
Octaedro	6	12	8
Dodecaedro	20	30	12
Icosaedro	12	30	20

Esta fórmula es válida también para todo poliedro irregular, siempre que sea *simple*, lo que quiere decir que no tiene «huecos», de manera que su superficie puede ser deformada de modo continuo en la de una esfera. La Figura 29 muestra dos poliedros irregulares simples para los cuales $V - E + F = 6 - 10 + 6 = 2$ y $V - E + F = 6 - 9 + 5 = 2$. La fórmula de Euler se extiende en la forma

$$V - E + F = 2 - 2p$$

para poliedros con p huecos (un poliedro simple es aquel para el cual $p = 0$). La Figura 30 ilustra los casos $p = 1$ y $p = 2$; tenemos $V - E + F = 16 - 32 + 16 = 0$ cuando $p = 1$, y $V - E + F = 24 - 44 + 18 = -2$ cuando $p = 2$. El significado de estas ideas se comprende mejor imaginando el poliedro como una figura hueca con la superficie flexible, que se hincha hasta que sea suave. Ya no

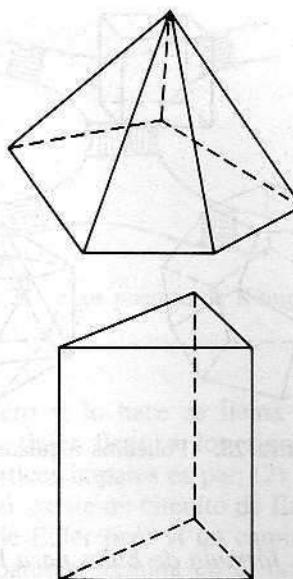


Figura 29

tendremos caras planas ni aristas rectas, sino una especie de mapa sobre la superficie con caras curvadas, sus curvas frontera y puntos en los que éstas se encuentran. El número $V - E + F$ tiene el mismo valor para todos los mapas de nuestra superficie y se llama *característica de Euler* de esa superficie. El número p se llama *género* de la superficie. Esos dos números y la relación entre ellos que proporciona la ecuación $V - E + F = 2 - 2p$ permanecen evidentemente invariantes cuando la superficie se deforma continuamente. Propiedades geométricas intrínsecas de este tipo, que tienen poca relación con el tipo de geometría dedicada a longitudes, áreas y volúmenes, se llaman *topológicas*. El estudio de tales propiedades se ha incrementado enormemente durante el último siglo y ha ofrecido perspectivas muy valiosas a muchos campos de las matemáticas y de la ciencia en general²².

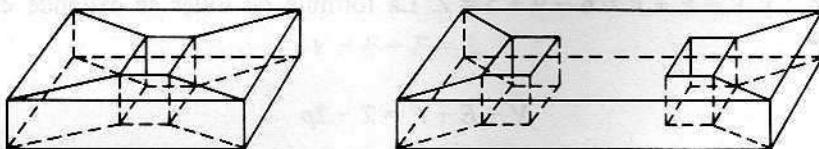


Figura 30

²² Demostraciones de la fórmula de Euler y de sus extensiones se exponen en las páginas 236-240 y 256-259 de R. Courant y H. Robbins, *What Is Mathematics?*, Oxford University Press, 1941. Véase también G. Polya, *op. cit.*, págs. 35-43.

En tiempos de Euler no se hacía distinción entre matemática pura y aplicada, y para él el universo físico en su totalidad constituía un objeto de estudio cuyos diversos fenómenos ofrecían escenario conveniente para sus métodos de análisis. Los fundamentos de la mecánica habían sido diseñados por Newton, pero Euler fue su principal arquitecto. En su tratado de 1736 fue el primero en introducir explícitamente el concepto de masa puntual o partícula, así como en estudiar la aceleración de una partícula que se mueve por una curva y en usar la noción de vector en conexión con la velocidad y la aceleración. Sus continuos hallazgos en física matemática fueron tan numerosos, y su influencia tan permanente, que la mayor parte de ellos no se le atribuyen y son considerados por los físicos como parte del orden natural de las cosas. No obstante, tenemos las ecuaciones de Euler para el movimiento de rotación de un cuerpo rígido, la ecuación de Euler en hidrodinámica para el flujo de un fluido ideal incompresible, la ley de Euler para el pandeo de vigas y la carga crítica de Euler en la teoría del pandeo de columnas. En ocasiones, la madeja de sus razonamientos científicos le condujo a ideas que sus contemporáneos no estaban capacitados para asimilar. A título de ejemplo, previó el fenómeno de la presión de radiación, crucial en la moderna teoría de la estabilidad de las estrellas, un siglo antes de que Maxwell la redescubriera en sus investigaciones sobre el electromagnetismo.

Euler fue el Shakespeare de las matemáticas: universal, rico en detalles e inagotable²³.

APENDICE B. NEWTON

Casi todo el mundo conoce en mayor o menor grado el nombre y la reputación de Isaac Newton (1642-1727), ya que su fama universal como descubridor de la ley de la gravitación se ha mantenido incólume a lo largo de los dos siglos y medio transcurridos desde su muerte. Es menos conocido, sin embargo, que en la inmensidad de sus amplísimos logros creó virtualmente la física moderna y, en consecuencia, ha ejercido en esa faceta de la civilización más influencia que el auge o el declive de las naciones. Quienes han estado en posición de juzgarle han sido unánimes al considerarle uno de los pocos intelectos supremos que la raza humana ha producido.

Newton nació en el seno de una familia campesina, en la aldea de Woolsthorpe, al norte de Inglaterra. Se sabe poco de sus primeros años, y su vida de estudiante en Cambridge no parece haber sido especialmente destacable. En 1665 una epidemia obligó a las universidades a cerrar sus puertas y Newton regresó a su casa, donde permaneció hasta 1667. Allí, en dos años de bucólica soledad, entre los 22 y los 24 años de edad, su genio creador se desbordó en

²³ Para más información, puede consultarse C. Truesdell, «Leonhard Euler, Supreme Geometer (1707-1783)», en *Studies in Eighteenth-Century Culture*, Case Western Reserve University Press, 1972. Asimismo, el número de noviembre de 1983 del *Mathematics Magazine* está dedicado por completo a Euler y su obra.

un caudaloso flujo de descubrimientos sin comparación en la historia del pensamiento humano: la serie del binomio para exponentes negativos y fraccionarios, el cálculo diferencial e integral; la gravitación universal como clave del sistema solar; la resolución de la luz solar en el espectro visual por medio de un prisma, con sus implicaciones en la comprensión de los colores del arco iris y de la naturaleza de la luz en general. En su vejez recordaba así ese período milagroso de su juventud: «En aquellos días yo estaba en la flor de la edad para la invención y pensaba en las matemáticas y en la filosofía [o sea, en la ciencia] más que en cualquier época posterior»²⁴.

Newton fue muy reservado e introvertido y, en su mayor parte, guardó para sí sus hallazgos. No tenía interés en publicar, y la mayoría de sus obras más importantes hubieron de serle arrancadas por sus amigos a base de halagos y tenacidad. No obstante, su capacidad inigualable era tan evidente a los ojos de su maestro, Isaac Barrow, que en 1669 este último dejó su plaza a su alumno (algo inaudito en la vida académica), y Newton se estableció en Cambridge durante los veintisiete años siguientes. A decir verdad, sus descubrimientos matemáticos jamás fueron publicados de forma conexa; se fueron conociendo de modo parcial casi por accidente, a través de conversaciones o réplicas a cuestiones que se le planteaban por correspondencia. Parece haber considerado sus matemáticas más que nada como un instrumento eficaz para el estudio de problemas científicos pero, comparativamente, de escaso interés en sí mismas. Simultáneamente Leibniz, en Alemania, había inventado también el cálculo independientemente, y por su activa correspondencia con los Bernoulli y la obra posterior de Euler, el liderazgo en el nuevo análisis pasó al continente, donde permanecería 200 años²⁵.

Se sabe poco de la vida de Newton en Cambridge en los primeros años como profesor, pero ciertamente la óptica y la construcción de telescopios figuraban entre sus principales intereses. Experimentó muchas técnicas de esmerilado de lentes (usando herramientas que él mismo hacía), y hacia 1670 construyó el primer telescopio de reflexión, el ancestro primitivo de los grandes instrumentos utilizados hoy en Monte Palomar y en todo el mundo. La pertinencia y sencillez de su análisis con prismas de la luz solar ha marcado para siempre esta obra temprana como uno de los clásicos intemporales de la ciencia experimental. Mas eso fue sólo el comienzo, ya que volvió una y otra vez a penetrar en los misterios de la luz y todos sus esfuerzos en esta dirección continuaron poniendo de manifiesto un genio experimental de primera magnitud.

²⁴ El texto completo de carácter biográfico (escrito probablemente entre 1714 y 1720) se recoge en las páginas 291-292 de I. Bernard Cohen, *Introduction to Newton's 'Principia'*, Harvard University Press, 1971. El autor del presente libro posee una fotocopia del documento original.

²⁵ Es interesante leer la correspondencia de Newton con Leibniz (vía Oldenburg) en 1676 y 1677 (véase *The Correspondence of Isaac Newton*, Cambridge University Press, 1959-1976, 6 volúmenes hasta el momento). En los Items 165, 172, 188 y 209, Newton discute su serie binomial pero oculta en anagramas sus ideas sobre el cálculo y las ecuaciones diferenciales, mientras Leibniz revela libremente su versión del cálculo. El Item 190 es también de considerable interés, pues en él Newton enuncia lo que es probablemente la primera formulación del teorema fundamental del cálculo.

tud. Publicó algunos de sus descubrimientos, pero fueron acogidos con tal estupidez por los científicos de relieve de ese momento que se retiró a su torre de marfil con renovada decisión de trabajar desde entonces para su exclusiva satisfacción. Veinte años más tarde se confesaba a Leibniz con estas palabras: «En cuanto al fenómeno del color... creo haber descubierto la explicación más segura, pero me resisto a publicar libros por temor a las controversias y disputas que los ignorantes lanzarían contra mí»²⁶.

A finales de los 1670, Newton entró en uno de sus períodos de hastío respecto de las ciencias y encauzó sus energías hacia otros campos. Hasta entonces no había publicado nada todavía sobre dinámica o gravitación y los muchos hallazgos que ya había realizado permanecían relegados al olvido en su escritorio. Finalmente, sin embargo, a instancias del astrónomo Edmund Halley (descubridor del cometa Halley), dedicó su atención de nuevo a esas materias y comenzó a escribir su máxima obra, los *Principia*²⁷.

Todo parece haber comenzado en 1684 con tres hombres enfrascados en una profunda conversación en una taberna de Londres: Halley y sus amigos Christopher Wren y Robert Hooke. Reflexionando acerca de la tercera ley de Kepler del movimiento de los planetas, Halley había llegado a la conclusión de que la fuerza gravitacional que mantenía a los planetas en sus órbitas era inversamente proporcional quizás al cuadrado de la distancia al sol²⁸. Sin embargo, era incapaz de hacer nada más con esa idea que formularla como conjetura. Como el propio Halley escribió más tarde (en 1686):

Me encontré con Sir Christopher Wren y Mr. Hooke, y conversando sobre ello, Mr. Hooke afirmó que todas las leyes de los movimientos celestes debían fundarse sobre ese principio, y que él mismo lo había hecho. Yo confesé el fracaso de mis intentos; y Sir Christopher, para animar la investigación, dijo que nos daría dos meses de plazo para que Mr. Hooke o yo le expusiéramos una demostración convincente de ese hecho y, aparte del honor, aquel de nosotros que lo lograra recibiría un obsequio de 40 chelines. Mr. Hooke dijo que ya la tenía, pero que la ocultaría durante algún tiempo, con el fin de que los demás, tras probar y fracasar, la apreciaran en su justo valor cuando la hiciera pública²⁹.

²⁶ Correspondence, Item 427.

²⁷ El título completo es *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (*Principios matemáticos de filosofía natural*).

²⁸ En ese tiempo esto era fácil de probar bajo la hipótesis simplista, que contradice las otras dos leyes de Kepler, de que cada planeta se mueve con velocidad constante v en una órbita circular de radio r . [Demostración: En 1673 Huygens había probado, en efecto, que la aceleración de un planeta viene dada por $a = v^2/r$. Si T es el período, entonces

$$a = \frac{(2\pi r/T)^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{r^2}{r}.$$

Por la tercera ley de Kepler, T^2 es proporcional a r^3 , luego r^3/T^2 es constante, y a es, por tanto, inversamente proporcional a r^2 . Si ahora suponemos que la fuerza atractiva F es proporcional a la aceleración, se sigue que F es también inversamente proporcional a r^2 .]

²⁹ Correspondence, Item 289.

Parece claro que Halley y Wren consideraron las afirmaciones de Hooke como simples baladronadas. Unos meses después, Hooke tuvo ocasión de visitar a Newton en Cambridge y le planteó la cuestión: «¿Cuál sería la curva descrita por los planetas en el supuesto de que la gravedad disminuya como el cuadrado de la distancia?». A lo que Newton respondió inmediatamente: «Una elipse». Estupefacto de alegría y de asombro, Halley le preguntó por qué lo sabía. «¿Por qué?», dijo Newton, «lo he calculado». No intuido o adivinado o conjecturado, sino *calculado*. Halley quiso ver los cálculos pero Newton no encontró los papeles. Es interesante especular sobre las emociones de Halley al ser consciente de que el antiguo problema de cómo funciona el sistema solar había sido resuelto por fin, pero que la persona que lo había resuelto no se había molestado en comunicarlo a nadie y había perdido sus apuntes. Newton prometió escribir los teoremas y sus demostraciones de nuevo y enviárselos a Halley, y así lo hizo. En el transcurso del cumplimiento de su promesa, renació su interés por el tema, se dedicó a él y amplió enormemente el alcance de sus investigaciones³⁰.

En sus esfuerzos científicos, Newton parecía un volcán en activo, con largos períodos de quietud salpicados por erupciones masivas de actividad casi sobrehumana. Los *Principia* fueron escritos en dieciocho increíbles meses de total concentración, y cuando se publicaron en 1687 fueron inmediatamente reconocidos como una de las realizaciones supremas de la mente humana. Está universalmente considerada aún hoy como la mayor contribución individual a la ciencia. En esa obra estableció los principios fundamentales de la mecánica teórica y de la dinámica de fluidos; dio el primer tratamiento matemático del movimiento ondulatorio; dedujo las leyes de Kepler de la ley gravitacional del cuadrado inverso, y explicó las órbitas de los cometas; calculó las masas de la tierra, el sol y los planetas con satélites; explicó la forma achatada de la tierra y la utilizó para dar cuenta de la precesión de los equinoccios, y fundó la teoría de las mareas. Estos no son sino algunos de los esplendores de esa prodigiosa obra³¹. Los *Principia* ha sido siempre una obra de lectura ardua, porque el estilo posee una calidad inhumana de gélido distanciamiento, que quizá realza la grandeza del tema. Además, las matemáticas, densamente presentadas, consisten casi por completo en geometría clásica, poco cultivada entonces y mucho menos ahora³². En su dinámica y mecánica celeste, Newton alcanzó la meta hacia la que Copérnico, Kepler y Galileo habían pavimentado el camino. Su

³⁰ Detalles adicionales y las fuentes de nuestra información sobre estos acontecimientos se encontrarán en Cohen, *op. cit.*, págs. 47-54.

³¹ Un resumen valioso de los contenidos de los *Principia* se da en el Capítulo VI de *An Essay on Newton's Principia*, de W. W. Rouse Ball (publicado por primera vez en 1893; reimpresso en 1972 por Johnson Reprint Corp., Nueva York).

³² El filósofo inglés del siglo XIX Whewell aporta una observación vívida al respecto: «Nadie desde Newton ha sido capaz de usar métodos geométricos con tal extensión y propósitos similares; y leyendo los *Principia* tenemos la misma sensación que cuando nos hallamos en un arsenal antiguo, donde las armas son de tamaño gigantesco, y al mirarlas nos maravilla pensar qué clase de hombre pudo ser capaz de manejar como arma lo que nosotros apenas podemos levantar como carga».

victoria fue tan completa que el trabajo de los científicos más destacados en esos campos fueron, durante los siguientes dos siglos, poco más que notas a pie de página a su síntesis colosal. Conviene recordar también que la ciencia de la espectroscopia, responsable más que ninguna otra de la ampliación del conocimiento astronómico más allá de los confines del sistema solar, tuvo su origen en el análisispectral que Newton efectuó de la luz solar.

Tras el poderoso resurgir de su genio en la creación de los *Principia*, Newton se volvió a alejar de la ciencia. No obstante, en una famosa carta a Bentley en 1692, comenta la primera especulación sólida de cómo puede haberse desarrollado el universo de estrellas a partir de una nube de polvo cósmico:

Creo que si la materia de nuestro sol y nuestros planetas y la materia toda del universo fue uniformemente dispersada por todo el cielo, y toda partícula tiene una gravedad innata hacia todo el resto...algo de ella pudo reunirse en una masa y otra porción en otra, y así hasta formar un número infinito de grandes masas dispersas a grandes distancias unas de las otras por el espacio infinito. Y así pudieron quizás formarse el sol y las estrellas fijas, supuesto que la materia fuera de naturaleza lúcida³³.

Ese fue el comienzo de la cosmología científica, conducida después, a través de las ideas de Thomas Wright, Kant, Herschel, y sus sucesores, a la elaborada y convincente teoría de la naturaleza y origen del universo ofrecida por la astronomía del siglo XX.

En 1693 Newton sufrió una seria enfermedad mental acompañada de delirios, profunda melancolía y manía persecutoria. Se quejaba de no poder conciliar el sueño y decía que le faltaba su «anterior consistencia mental». Injurio con salvajes acusaciones en impactantes escritos a sus amigos Samuel Pepys y John Locke. Pepys fue informado de que su amistad había terminado y de que Newton no le vería nunca más; Locke fue acusado de querer enmarañarle con mujeres y de ser un «Hobbista» (seguidor de Hobbes, es decir, ateo y materialista)³⁴. Ambos temieron por la salud de Newton. Le respondieron con tacto exquisito y generosa humanidad, y la crisis pasó.

En 1696 Newton dejó Cambridge y marchó a Londres como Director de la Casa de la Moneda, y durante el resto de su vida hizo algo de vida de sociedad e incluso comenzó a saborear su posición única en el pináculo de la fama científica. Estos cambios en sus intereses y entorno no disminuyeron en nada su poder intelectual sin rival. Por ejemplo, un atardecer, al final de una dura jornada de trabajo en la Casa de la Moneda, se enteró de un problema, hoy célebre, planteado por el científico suizo John Bernoulli como reto «a los más agudos matemáticos del mundo». El problema era el siguiente: Supongamos que se clavan al azar dos clavos en una pared y se conectan con un hilo en forma de curva. ¿Cuál es la forma del hilo que hará mínimo el tiempo empleado

³³ Correspondence, Item 398.

³⁴ Correspondence, Items 420, 421 y 426.

por un abalorio que desliza desde el punto superior hasta el inferior sin rozamiento a lo largo de él? Es el *problema de la braquistócrona* («tiempo mínimo») de Bernoulli. Newton lo reconoció inmediatamente como un reto de los matemáticos continentales dirigido a él y, a pesar de estar alejado del hábito del pensamiento científico, hizo acopio de todos sus recursos y lo resolvió ese mismo día antes de acostarse. Su solución se publicó anónima, pero en cuanto Bernoulli la vio, comentó con ironía: «Reconozco al león por sus garras».

De mucha mayor trascendencia para la ciencia fue la publicación de su *Opticks* en 1704. En este libro recopiló y extendió sus investigaciones anteriores sobre la luz y el color. Como apéndice añadió sus famosas «Querries» (cuestiones), especulaciones más allá de su comprensión cara al futuro. En parte están relacionadas con su imperecedera preocupación por la química (o alquimia, como se llamaba entonces). Formuló muchas conclusiones tentativas pero extremadamente cuidadosas, siempre basadas en la experimentación, acerca de la posible naturaleza de la materia; y aunque la verificación de sus especulaciones sobre los átomos (e incluso sobre los núcleos) habría de esperar al refinado trabajo experimental de finales del siglo XIX y comienzos del XX, las líneas principales de sus ideas resultaron ser correctas³⁵. Así, en este terreno como en tantos otros, sobrepasó ampliamente, por el alcance prodigioso y la precisión de su imaginación científica, no ya sólo a sus contemporáneos, sino a muchas generaciones de sus sucesores. Añadiremos dos observaciones sorprendentes de las Cuestiones 1 y 30, respectivamente: «¿No actúan los cuerpos a distancia sobre la luz y curvan sus rayos por esa acción?» y «¿No son los cuerpos masivos y la luz convertibles entre sí?». Parece claro, todo lo claro que las palabras pueden ser, que Newton estaba conjeturando ahí la curvatura gravitacional de la luz y la equivalencia entre masa y energía, consecuencias de la teoría de la relatividad. El primer fenómeno fue observado durante el eclipse total de sol de mayo de 1919, mientras se sabe hoy que el segundo subyace a la energía generada por el sol y las estrellas. En otras ocasiones da la impresión de saber, por alguna misteriosa intuición, mucho más de cuanto quería o podía justificar, como en esta críptica afirmación en carta dirigida a un amigo: «Es evidente para mí por la fuente de donde lo infiero pero no pretendo demostrarlo para los demás»³⁶. Cualquiera que haya podido ser la naturaleza de esa «fuente», él se basaba en su extraordinario poder de concentración. Preguntado sobre cómo realizaba sus descubrimientos, respondió: «Mantengo el asunto continuamente ante mí y espero a que los primeros rayos del amanecer se abran poco a poco hacia una completa claridad». Esto parece muy sencillo, pero todo el que tenga experiencia científica o matemática sabe lo difícil que resulta mantener un problema de forma continua en la mente durante más de unos segundos o a lo sumo minutos. La atención flaquea, el problema se desvanece una y otra vez, y ha de ser vuelto a escena mediante un esfuerzo de voluntad. A juzgar por lo que afirman los testigos, Newton

³⁵ Véase S. I. Vavilov, «Newton and the Atomic Theory», en *Newton Tercentenary Celebrations*, Cambridge University Press, 1947.

³⁶ *Correspondence*, Item 193.

parece haber sido capaz de sostener su concentración, casi sin esfuerzo, sobre sus problemas durante horas, días y semanas, en un estado permanente de presión mental apenas interrumpido por la necesidad ocasional de alimentarse o dormir.

En 1695 Newton recibió una carta de su amigo John Wallis, matemático de Oxford, que contenía noticias que habrían de cubrir de espesos nubarrones el resto de su vida. Escribiendo con respecto a los primeros hallazgos matemáticos de Newton, Wallis le daba cuenta de que en Holanda «tus conceptos» son conocidos como «*Calculus Differentialis* de Leibniz», y urgía a Newton a emprender los pasos pertinentes para defender su reputación³⁷. En ese tiempo, la relación entre Newton y Leibniz era aún cordial y de respeto mutuo. Sin embargo, la carta de Wallis pronto enturbió la atmósfera e inició la más prolongada, agria y dañina de las disputas científicas: la famosa (o infame) controversia Newton-Leibniz sobre la prioridad en la invención del cálculo.

Hoy se sabe a ciencia cierta que cada uno de ellos desarrolló su propia versión del cálculo independientemente del otro, que Newton se adelantó en unos ocho o diez años pero no publicó sus ideas, y que los artículos de Leibniz de 1684 y 1686 fueron las primeras publicaciones al respecto. Ahora bien, lo que en la actualidad se percibe como meros hechos no estaba tan claro en aquel entonces. Retumbaron durante años los ecos ominosos de aquella carta de Wallis:

Lo que comenzó con ligeras insinuaciones escaló con rapidez hacia graves acusaciones de plagio por ambos lados. Encorajinado por seguidores ansiosos de labrarse una reputación bajo sus auspicios, Newton permitió verse colocado en el centro de la refriega; y una vez que su temperamento se caldeó por las acusaciones de falta de honestidad, su rabia no conoció límites. La conducta de Leibniz en la controversia no fue loable, ciertamente, pero queda empalidecida por la de Newton. Aunque nunca apareció en público, fue él quien redactó la mayor parte de las notas que salían en su defensa, publicándolas bajo los nombres de sus jóvenes discípulos, quienes en ningún momento objetaron. Como Presidente de la Royal Society, nombró un comité «imparcial» para investigar el asunto, escribió en secreto el informe que luego publicó oficialmente esa entidad [en 1712] y lo censó anónimamente para las *Philosophical Transactions*. Ni tan siquiera la muerte de Leibniz aplacó su ira, y continuó persiguiendo a su enemigo más allá de la tumba. La batalla con Leibniz, la irrefrenable necesidad de borrar la acusación de deshonestidad, dominaron los últimos veinticinco años de su existencia. Casi cualquier escrito sobre cualquier tema en esa época era susceptible de interrupción mediante un furioso párrafo contra el filósofo alemán, pues blandía los instrumentos de su furia con mayor acritud si cabe³⁸.

Todo esto ya era de por sí bastante nefasto, pero el efecto desastroso que tuvo sobre la ciencia y las matemáticas británicas fue todavía más serio. Utilizar los métodos geométricos de Newton y sus farragosas notaciones de cálculo, así como no mirar más allá de las narices en cuanto tuviese relación con el trabajo creador que se hacía en el continente, se convirtió en una cuestión de lealtad patriótica. Sin embargo, los métodos analíticos de Leibniz demostraron ser más

³⁷ Correspondence, Items 498 y 503.

³⁸ Richard S. Westfall, en la *Encyclopaedia Britannica*.

útiles y efectivos, y fueron sus seguidores quienes culminaron el período más enriquecedor de la historia de las matemáticas. Para los británicos, la obra de los Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, Gauss y Riemann fue como un libro cerrado, y los matemáticos ingleses se sumieron en un coma de impotencia e irrelevancia que se prolongó a lo largo de los siglos XVIII y XIX casi por completo.

Se ha descrito y juzgado a Newton frecuentemente como el último racionalista, como la encarnación de la Era de la Razón. Su imagen convencional es la de un profesor absorto, ilustre pero deslucido. Pero nada más lejos de la realidad. No es este el lugar para intentar analizar sus llamadas de furia psicótica, o sus monstruosos deseos de venganza, que ni la desaparición de sus enemigos logró extinguir, continuando en plena efervescencia hasta el final de su propia vida; o los cincuenta y ocho pecados que recogía en su confesión escrita de 1662; o su encogida y reservada inseguridad; o sus peculiares relaciones con las mujeres, en especial con su madre, de quien pensaba que le había abandonado a los tres años de edad. ¿Y qué decir de los montones de manuscritos sin publicar (¡millones de palabras y miles de horas de reflexión!) que son fiel reflejo de estudios secretos, a lo largo de toda su vida, de cronología antigua, de la primitiva doctrina cristiana, y de las profecías de Daniel y de San Juan? El ansia de saber de Newton tenía poco que ver con el atildado racionalismo del siglo XVIII. Bien al contrario, era una forma de autodefensa desesperada contra las fuerzas del obscurantismo, cuya presión sentía en derredor. Como científico y matemático, fue un genio colosal cuyo impacto sobre el mundo cualquiera puede percibir. Como hombre, empero, fue tan extraño en todas sus facetas que difícilmente puede ser comprendido por la gente normal³⁹. Es tal vez más acertado pensar en él en términos medievales, como un místico intuitivo, solitario, consagrado, para quien la ciencia y las matemáticas fueron instrumentos para escudriñar el enigma del universo.

³⁹ El mejor esfuerzo lo constituye el excelente libro de Frank E. Manuel, *A Portrait of Isaac Newton*, Harvard University Press, 1968.

CUATRO**PROPIEDADES CUALITATIVAS
DE LAS SOLUCIONES****24. OSCILACIONES Y EL TEOREMA DE SEPARACION
DE STURM**

Es natural pensar que una ecuación diferencial debe poder resolverse y uno de los objetivos principales del Capítulo 3 ha sido el desarrollo de métodos que hagan posible hallar soluciones explícitas de la ecuación lineal de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (1)$$

Desgraciadamente, sin embargo, es muy raro, tal como hemos intentado poner de manifiesto, poder resolver esta ecuación en términos de funciones elementales. Esto nos lleva a indagar perspectivas más amplias formulando el problema a un nivel superior y a reconocer que nuestro propósito real es entender la naturaleza y propiedades de las soluciones de (1). Si tal meta es alcanzable por medio de fórmulas elementales para las soluciones, tanto mejor. En caso contrario, ensayaremos nuevos caminos que desemboquen en ese mismo objetivo. En este breve capítulo centramos nuestra atención en el problema de aprender cuanto sea posible sobre las características esenciales de las soluciones de (1) por análisis directo de la propia ecuación, en ausencia de expresiones formales para dichas soluciones. Es sorprendente la cantidad de información accesible por este conducto.

Como ilustración de la idea de que muchas propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial se pueden descubrir estudiando la ecuación misma, sin resolverla, discutiremos la ecuación familiar

$$y'' + y = 0. \quad (2)$$

Sabemos que $y_1(x) = \sin x$ e $y_2(x) = \cos x$ son dos soluciones linealmente independientes de (2); que están completamente determinadas por las condiciones iniciales $y_1(0) = 0$, $y'_1(0) = 1$ e $y_2(0) = 1$, $y'_2(0) = 0$; y que la solución general es $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Normalmente damos (2) como perfectamente resuelta por tales observaciones, pues $\sin x$ y $\cos x$ son viejas conocidas de las que sabemos muchos detalles. No obstante, nuestro conocimiento de $\sin x$ y $\cos x$ cabe verlo como un accidente histórico, y a efectos de insistir en nuestro punto de vista supondremos una ignorancia total acerca de ambas. Nos proponemos mostrar cómo sus propiedades pueden deducirse de (2) y de las condiciones iniciales que satisfacen. Los únicos instrumentos que usaremos serán argumentos cualitativos y los principios generales descritos en las Secciones 14 y 15.

De acuerdo con eso, sea $y = s(x)$ la solución de (2) determinada por las condiciones iniciales $s(0) = 0$ y $s'(0) = 1$. Si intentamos esbozar el gráfico de $s(x)$ haciendo crecer x desde 0, las condiciones iniciales nos dicen que la curva comienza en el origen con pendiente 1 (Fig. 31). De la ecuación misma vemos que $s''(x) = -s(x)$, de modo que cuando la curva está por encima del eje x , $s''(x)$ es un número negativo que crece en magnitud cuando la curva asciende. Puesto que $s''(x)$ es el ritmo de cambio de la pendiente $s'(x)$, ésta decrece a ritmo creciente cuando la curva asciende, y debe alcanzar valor 0 en algún punto $x = m$. Al seguir creciendo x , la curva cae hacia el eje x , $s'(x)$ decrece a ritmo decreciente y la curva cruza el eje x en un punto que podemos definir como π . Como $s''(x)$ depende sólo de $s(x)$, vemos que el gráfico entre $x = 0$ y $x = \pi$ es simétrico respecto de la línea $x = m$, luego $m = \pi/2$ y $s'(\pi) = -1$. Un argumento similar enseña que la próxima porción de curva es una réplica invertida del primer arco, y así indefinidamente.

Para progresar más es conveniente introducir en este punto $y = c(x)$ como la solución de (2) determinada por las condiciones iniciales $c(0) = 1$ y $c'(0) = 0$. Estas condiciones nos dicen que la gráfica de $c(x)$ arranca del punto $(0, 1)$ y se mueve hacia la derecha con pendiente inicial nula. Como sabemos por (2) que $c''(x) = -c(x)$, un razonamiento análogo al de antes muestra que la curva se tuerce hacia abajo y cruza el eje x . Es natural conjeturar que la altura del primer arco de $s(x)$ es 1, que el primer cero de $c(x)$ es $\pi/2$, etc.; pero para establecer estas propiedades, comenzaremos por demostrar que

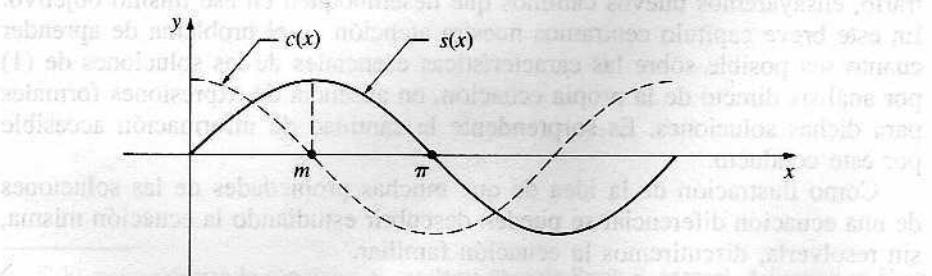


Figura 31

$$s'(x) = c(x) \quad \text{y} \quad c'(x) = -s(x). \quad (3)$$

Para probar la primera afirmación, observemos que según (2) es $y''' + y' = 0$, es decir, $(y'')' + y' = 0$, así que la derivada de cualquier solución de (2) es de nuevo solución de (2) (véase Problema 17-4). Por tanto, $s'(x)$ y $c(x)$ son ambas soluciones de (2), y por el Teorema 14-A basta probar que tienen los mismos valores y las mismas derivadas en $x = 0$. Esto es consecuencia inmediata de que $s'(0) = 1$, $c(0) = 1$ y $s''(0) = -s(0) = 0$, $c'(0) = 0$. La segunda fórmula en (3) se desprende de la primera, porque $c'(x) = s''(x) = -s(x)$. Ahora usamos (3) para probar

$$s(x)^2 + c(x)^2 = 1. \quad (4)$$

Como la derivada del miembro izquierdo de (4) es

$$2s(x)c(x) - 2c(x)s(x),$$

que es 0, vemos que $s(x)^2 + c(x)^2$ es igual a una constante, y esta constante ha de ser 1, ya que $s(0)^2 + c(0)^2 = 1$. Se sigue de (4) que la altura del primer arco de $s(x)$ es 1 y que el primer cero de $c(x)$ es $\pi/2$. Este resultado nos capacita además para demostrar que $s(x)$ y $c(x)$ son linealmente independientes, porque su wronskiano es

$$\begin{aligned} W[s(x), c(x)] &= s(x)c'(x) - c(x)s'(x) = \\ &= -s(x)^2 - c(x)^2 = -1. \end{aligned}$$

De manera muy similar, podemos continuar y establecer las siguientes propiedades adicionales:

$$s(x+a) = s(x)c(a) + c(x)s(a); \quad (5)$$

$$c(x+a) = c(x)c(a) - s(x)s(a); \quad (6)$$

$$s(2x) = 2s(x)c(x); \quad (7)$$

$$c(2x) = c(x)^2 - s(x)^2; \quad (8)$$

$$s(x+2\pi) = s(x); \quad (9)$$

$$c(x+2\pi) = c(x). \quad (10)$$

Las demostraciones no son difíciles y se dejan al lector (véase Problema 1). Entre otras cosas, es fácil ver de los resultados precedentes que los ceros positivos de $s(x)$ y $c(x)$ son, respectivamente, $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ y $\pi/2, \pi/2 + \pi, \pi/2 + 2\pi, \dots$

Merece la pena destacar dos puntos de la discusión anterior. En primer lugar, hemos extraído casi todas las propiedades relevantes de las funciones seno y coseno de la ecuación (2) *por métodos de ecuaciones diferenciales exclusivamente*, sin hacer uso de ningún conocimiento previo de trigonometría. En segundo lugar, hemos empleado esencialmente argumentos de convexidad (que involucran el signo y la magnitud de la segunda derivada) y las propiedades básicas de las ecuaciones lineales obtenidas en la Secciones 14 y 15.

Es evidente que la mayoría de las propiedades de $\sin x$ y $\cos x$ son peculiares de estas dos funciones. No obstante, el aspecto central de su comportamiento, el hecho de que oscilan de modo tal que sus ceros son distintos y se alternan, puede ser formulado mucho más en general. El siguiente resultado en esta dirección se conoce como *teorema de separación de Sturm*¹.

Teorema A. *Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones linealmente independientes de*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

entonces los ceros de estas funciones son distintos y ocurren alternadamente, en el sentido de que $y_1(x)$ se anula exactamente una vez entre dos cualesquiera ceros sucesivos de $y_2(x)$, y reciprocamente.

Demostración. El argumento reposa en el hecho de que (véanse los lemas de la Sección 15) como y_1 e y_2 son linealmente independientes, su wronskiano

$$W(y_1, y_2) = y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x)$$

no se anula y, por tanto, al ser continuo, debe tener signo constante. Es fácil ver que y_1 e y_2 no pueden tener un cero común; si lo tuvieran, el wronskiano se anularía en ese punto, lo que es imposible. Sean ahora x_1 y x_2 dos ceros sucesivos de y_2 y vamos a probar que y_1 se anula entre esos dos puntos. El wronskiano se reduce a $y_1(x)y'_2(x)$ en x_1 y x_2 , luego ambos factores $y_1(x)$ e $y'_2(x)$ son distintos de cero en esos puntos. Además, $y'_2(x_1)$ e $y'_2(x_2)$ son no nulos en esos puntos. Además, $y'_2(x_1)$ e $y'_2(x_2)$ han de tener signos opuestos, porque si y_2 es creciente en x_1 , ha de ser decreciente en x_2 , y viceversa. Como el wronskiano tiene signo constante, $y_1(x_1)$ e $y_1(x_2)$ también habrán de tener signos opuestos, y en consecuencia, por continuidad, $y_1(x)$ debe anularse en algún punto entre x_1 y x_2 . Nótese que y_1 no puede anularse más de una vez entre x_1 y x_2 ; en efecto, en tal caso, el mismo argumento mostraría que y_2 debe anularse entre esos dos ceros de y_1 , lo cual es contradictorio con la hipótesis inicial de que x_1 y x_2 eran ceros sucesivos de y_2 .

Los argumentos de convexidad dados antes para la ecuación $y'' + y = 0$ ponen de manifiesto que al discutir la oscilación de las soluciones conviene

¹ Jacques Charles François Sturm (1803-1855) fue un matemático suizo que vivió mucho tiempo en París. Durante un tiempo fue tutor de la familia de Broglie, y tras ocupar otros varios cargos, sucedió finalmente a Poisson en la Cátedra de Mecánica de la Sorbona. Su principal contribución consistió en lo que hoy se conoce como la teoría de Sturm-Liouville de las ecuaciones diferenciales, de importancia creciente desde entonces tanto en matemática pura como en física matemática.

tratar con ecuaciones en las que el término en la primera derivada está ausente. Ahora demostraremos que cualquier ecuación de la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (11)$$

puede escribirse como

$$u'' + q(x)u = 0 \quad (12)$$

por un simple cambio de la variable dependiente. Es habitual referirse a (11) como la *forma canónica*, y a (12) como la *forma normal* de una ecuación lineal homogénea de segundo orden. Para escribir (11) en forma normal, hacemos $y(x) = u(x)v(x)$, de modo que $y' = uv' + u'v$ e $y'' = uv'' + 2u'v' + u''v$. Al sustituir estas expresiones en (11) se obtiene

$$vu'' + (2v' + Pv)u' + (v'' + Pv' + Qv)u = 0. \quad (13)$$

Igualando a cero el coeficiente de u' se llega a la conclusión de que

$$v = e^{-1/2 \int P dx} \quad (14)$$

reduce (13) a la forma normal (12) con

$$q(x) = Q(x) - \frac{1}{4}P(x)^2 - \frac{1}{2}P'(x). \quad (15)$$

Ya que $v(x)$, dada por (14), nunca se anula, la transformación anterior de (11) en (12) no afecta a los ceros de las soluciones, y por tanto deja inalterados los fenómenos de oscilación que son nuestro actual objeto de interés.

Probaremos a continuación que si $q(x)$ en (12) es una función negativa, las soluciones de esa ecuación no oscilan.

Teorema B. Si $q(x) < 0$ y si $u(x)$ es una solución no trivial de $u'' + q(x)u = 0$, entonces $u(x)$ tiene a lo sumo un cero.

Demarcación. Sea x_0 un cero de $u(x)$, de manera que $u(x_0) = 0$. Como $u(x)$ no es trivial (o sea, no es idénticamente nula), el Teorema 14-A implica que $u'(x_0) \neq 0$. Por fijar ideas, supongamos que $u'(x_0) > 0$, así que $u(x)$ es positiva sobre algún intervalo a la derecha de x_0 . Puesto que $q(x) < 0$, $u''(x) = -q(x)u(x)$ es una función positiva sobre ese mismo intervalo. Esto implica que la pendiente $u'(x)$ es una función creciente, luego $u(x)$ no puede tener un cero a la derecha de x_0 , y por idéntica razón tampoco a su izquierda. Un argumento análogo es válido cuando $u'(x_0) < 0$, y por tanto $u(x)$ o bien carece de ceros o tiene uno tan sólo, con lo que la demostración está completa.

Ya que estamos interesados en las oscilaciones de las soluciones, este resultado nos obliga a limitar nuestro estudio de (12) al caso en que $q(x)$ es una función positiva.

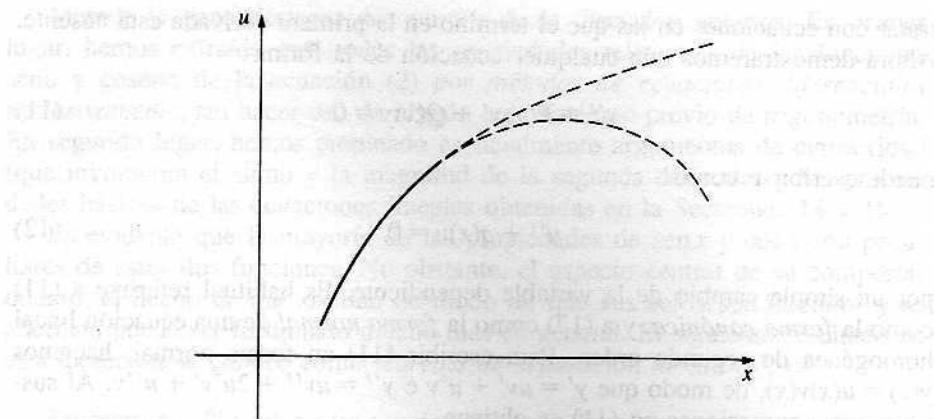


Figura 32

Aun en este caso, sin embargo, no es necesariamente cierto que las soluciones oscilen. Para darnos una idea de lo que ocurre, sea $u(x)$ una solución no trivial de (12) con $q(x) > 0$. Si consideramos una porción del gráfico por encima del eje x (Fig. 32), entonces $u''(x) = -q(x)u(x)$ es negativa, luego el gráfico es cóncavo hacia abajo y la pendiente $u'(x)$ es decreciente. Si esta pendiente llega a ser negativa, la curva cruzará el eje x por algún lugar a la derecha y obtenemos un cero de $u(x)$. Sabemos que esto sucede cuando $q(x)$ es constante. La alternativa es que aunque $u'(x)$ decrezca no se haga nunca cero y la curva siga creciendo, como en la parte superior de la Figura 32. Es claro a partir de estos comentarios que $u(x)$ tendrá ceros al crecer x siempre que $q(x)$ no decrezca demasiado rápidamente. Esto queda confirmado en el siguiente teorema.

Teorema C. *Sea $u(x)$ cualquier solución no trivial de $u'' + q(x)u = 0$, donde $q(x) > 0$ para todo $x > 0$. Si*

$$\int_1^\infty q(x) dx = \infty, \quad (16)$$

entonces $u(x)$ tiene infinitos ceros en el semieje x positivo.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que $u(x)$ se anula a lo sumo un número finito de veces para $0 < x < \infty$, de manera que existe un punto $x_0 > 1$ tal que $u(x) \neq 0$ para todo $x \geq x_0$. Podemos suponer, claro está, sin pérdida de generalidad, que $u(x) > 0$ para todo $x \geq x_0$, ya que $u(x)$ puede ser sustituida por su negativa, si es preciso. Nos proponemos contradecir la suposición mostrando que $u'(x)$ es negativa en algún lugar a la derecha de x_0 , lo que por las observaciones anteriores implicaría que $u(x)$ tiene un cero a la derecha de x_0 . Si ponemos

$$v(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}$$

para $x \geq x_0$, entonces un sencillo cálculo muestra que

$$v'(x) = q(x) + v(x)^2,$$

e integrando desde x_0 hasta x , con $x > x_0$, obtenemos

$$v(x) - v(x_0) = \int_{x_0}^x q(x) dx + \int_{x_0}^x v(x)^2 dx.$$

Ahora usamos (16) para concluir que $v(x)$ es positiva si x se toma suficientemente grande. Esto demuestra que $u(x)$ y $u'(x)$ tienen signos opuestos si x es suficientemente grande, de modo que $u'(x)$ es negativa y la demostración queda completa.

PROBLEMAS

1. Demostrar las fórmulas (5) a (10) por argumentos consistentes con el espíritu de la precedente discusión.
2. Probar que los ceros de las funciones $a \sin x + b \cos x$ y $c \sin x + d \cos x$ son distintos y alternados siempre que $ad - bc \neq 0$.
3. Hallar la forma normal de la ecuación de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0,$$

y usarla para mostrar que toda solución no trivial tiene infinitos ceros positivos.

4. La hipótesis del Teorema C es falsa para la ecuación de Euler $y'' + (k/x^2)y = 0$, pero la conclusión es a veces cierta y a veces falsa, dependiendo de la magnitud de la constante positiva k . Verificar que toda solución no trivial tiene un número infinito de ceros positivos si $k > 1/4$, y sólo un número finito si $k \leq 1/4$.

25. EL TEOREMA DE COMPARACION DE STURM

En esta sección continuamos analizando el comportamiento oscilatorio de las soluciones no triviales de la ecuación diferencial

$$y'' + q(x)y = 0, \quad (1)$$

donde $q(x)$ es una función positiva. Comenzamos con un teorema que elimina la posibilidad de infinitas oscilaciones sobre intervalos cerrados.

Teorema A. *Sea $y(x)$ una solución no trivial de la ecuación (1) sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces $y(x)$ tiene a lo sumo un número finito de ceros en ese intervalo.*

Demostración. Supongamos lo contrario, o sea, que $y(x)$ tuviese infinitos ceros en $[a, b]$. En tal caso existiría en $[a, b]$ un punto x_0 y una sucesión de ceros $x_n \neq x_0$ tales que $x_n \rightarrow x_0$ ². Como $y(x)$ es continua y diferenciable en x_0 , tenemos

$$y(x_0) = \lim_{x_n \rightarrow x_0} y(x_n) = 0$$

e

$$y'(x_0) = \lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{y(x_n) - y(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

Por el Teorema 14-A, esto significa que $y(x)$ es necesariamente la solución trivial de (1), y esta contradicción demuestra el teorema.

Recordemos ahora que el teorema de separación de Sturm nos dice que los ceros de cualesquiera dos soluciones (no triviales) de (1) o coinciden o bien ocurren alternadamente, según que esas soluciones sean linealmente dependientes o linealmente independiente. Así pues, todas las soluciones de (1) oscilan esencialmente con la misma rapidez, en el sentido de que sobre un intervalo dado el número de ceros de cualquier solución diferirá a lo sumo en una unidad del de otra solución cualquiera. Por otra parte, es claro que las soluciones de

$$y'' + 4y = 0 \quad (2)$$

oscilan más rápidamente, o sea, tienen más ceros que las de

$$y'' + y = 0; \quad (3)$$

porque los ceros de una solución de (2) tal como $y = \sin 2x$ están separados por la mitad de distancia que los de la solución $y = \sin x$ de (1). El próximo resultado, conocido como *teorema de comparación de Sturm*, afirma que las soluciones de (1) oscilan más rápidamente al ir creciendo $q(x)$.

Teorema B. Sean $y(x)$, $z(x)$ soluciones no triviales de

$$y'' + q(x)y = 0$$

y

$$z'' + r(x)z = 0,$$

donde $q(x)$ y $r(x)$ son funciones positivas tales que $q(x) > r(x)$. Entonces $y(x)$ se anula al menos una vez entre cada dos ceros sucesivos de $z(x)$.

Demostración. Sean x_1 y x_2 dos ceros sucesivos de $z(x)$, de modo que $z(x_1) = z(x_2) = 0$ y $z(x)$ no se anula en el intervalo abierto (x_1, x_2) . Supongamos que $y(x)$ no se anula en (x_1, x_2) , y la demostración del teorema se deducirá de la contradicción a la que vamos a llegar. Es evidente que no perdemos generalidad si admitimos que

² En esta inferencia usamos el *teorema de Bolzano-Weierstrass*, que expresa una de las propiedades topológicas fundamentales del sistema de los números reales.

tanto $y(x)$ como $z(x)$ son positivas sobre (x_1, x_2) , porque cualquiera de ellas puede sustituirse por su negativa, si es necesario. Si ponemos énfasis en que el wronskiano

$$W(y, z) = y(x)z'(x) - z(x)y'(x)$$

es una función de x denotándolo $W(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{dW(x)}{dx} &= yz'' - zy'' = \\ &= y(-rz) - z(-qy) = \\ &= (q - r)yz > 0 \end{aligned}$$

sobre (x_1, x_2) . Ahora integramos ambos lados de esa desigualdad entre x_1 y x_2 , con lo que obtenemos

$$W(x_2) - W(x_1) > 0 \quad \text{o sea} \quad W(x_2) > W(x_1).$$

Sin embargo, el wronskiano se reduce a $y(x)z'(x)$ en x_1 y en x_2 , luego

$$W(x_1) \geq 0 \quad \text{y} \quad W(x_2) \leq 0,$$

que es la deseada contradicción.

Se desprende de este teorema que si es $q(x) > k^2 > 0$ en la ecuación (1), toda solución debe anularse entre cualesquiera dos ceros sucesivos de una solución $y(x) = \operatorname{sen} k(x - x_0)$ de la ecuación $y'' + k^2 y = 0$, y por consiguiente debe anularse en todo intervalo de longitud π/k . Por ejemplo, si consideramos la ecuación de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

en forma normal

$$u'' + \left(1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2}\right)u = 0,$$

y la comparamos con $u'' + u = 0$, deducimos el siguiente teorema.

Teorema C. *Sea $y_p(x)$ una solución no trivial de la ecuación de Bessel sobre el semieje x positivo. Si $0 \leq p < 1/2$, entonces todo intervalo de longitud π contiene al menos un cero de $y_p(x)$; si $p = 1/2$, la distancia entre ceros sucesivos de $y_p(x)$ es exactamente π , y si $p > 1/2$, entonces todo intervalo de longitud π contiene a lo sumo un cero de $y_p(x)$.*

La ecuación de Bessel es de considerable importancia en física matemática. Las propiedades de oscilación de sus soluciones, expresadas en el Teorema C y también en el Problema 24-3 y en el Problema 1 de la página siguiente, son sin duda fundamentales para entender la naturaleza de dichas soluciones. En el Capítulo 8 nos esforzaremos en hallar soluciones explícitas de la ecuación

de Bessel en términos de series de potencias. No obstante, estas soluciones en forma de series son instrumentos poco eficaces para estudiar propiedades de oscilación, y resulta muy conveniente ser capaces de recurrir a argumentos cualitativos del tipo expuesto en este capítulo.

PROBLEMAS

- Sean x_1, x_2 ceros positivos sucesivos de una solución no trivial $y_p(x)$ de la ecuación de Bessel.
 - Si $0 \leq p < 1/2$, mostrar que $x_2 - x_1$ es menor que π y tiende hacia π cuando $x_1 \rightarrow \infty$.
 - Si $p > 1/2$, probar que $x_2 - x_1$ es mayor que π y tiende a π cuando $x_1 \rightarrow \infty$.
- Si $y(x)$ es una solución no trivial de $y'' + q(x)y = 0$, demostrar que $y(x)$ tiene un número infinito de ceros positivos si $q(x) > k/x^2$ para algún $k > 1/4$, y sólo un número finito si $q(x) < 1/4x^2$.
- Toda solución no trivial de $y'' + (\operatorname{sen}^2 x + 1)y = 0$ tiene un número infinito de ceros positivos. Formular y demostrar un teorema que incluya como caso especial esa afirmación.

SOLUCIONES EN SERIES DE POTENCIAS Y FUNCIONES ESPECIALES

26. INTRODUCCION. REPASO DE SERIES DE POTENCIAS

La mayor parte de las funciones encontradas en el análisis elemental pertenecen a una clase conocida como *funciones elementales*. Para describir esta clase, comenzaremos recordando que una *función algebraica* es un polinomio, una función racional o más en general cualquier función $y = f(x)$ que satisfaga una ecuación de la forma

$$P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + P_1(x)y + P_0(x) = 0,$$

donde cada $P_i(x)$ es un polinomio. Las funciones elementales constan de las funciones algebraicas, las funciones *trascendentes*, o sea, no algebraicas, que aparecen en el cálculo (es decir, las trigonométricas, sus inversas, las logarítmicas y las exponenciales) y cuantas otras que puedan construirse a partir de todas ellas mediante suma, resta, producto, cociente y composición. Así pues,

$$y = \operatorname{tg} \left[\frac{x e^{1/x} + \operatorname{tg}^{-1}(1+x^2)}{\operatorname{sen} x \cos 2x - \sqrt{\log x}} \right]^{1/3}$$

es una función elemental.

Aparte de las funciones elementales están las *funciones trascendentes superiores* o, como se les llama con frecuencia, las *funciones especiales*. Desde el comienzo del siglo XVIII cientos de funciones especiales han sido merecedoras de estudio más o menos detallado. La mayoría ya han quedado en el olvido, pero algunas de ellas, como la función gamma, la función zeta de

Riemann, las funciones elípticas y las que siguen siendo útiles en física matemática, han generado extensas teorías. Y entre ellas, unas pocas son tan ricas en significado y en influencia que la simple historia de una de ellas llenaría un libro de buen tamaño¹.

El campo de las funciones especiales fue cultivado con devoción entusiasta por muchos de los más grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX, como Euler, Gauss, Abel, Jacobi, Weierstrass, Riemann, Hermite y Poincaré, entre otros. Pero el gusto cambia con los tiempos y hoy en día la mayoría de los matemáticos prefieren estudiar grandes clases de funciones (funciones continuas, integrables, etc.) en lugar de funciones individuales relevantes. No obstante, hay todavía muchos que prefieren la biografía a la sociología, y un tratamiento equilibrado del análisis no puede despreciar ninguna de las dos perspectivas.

Las funciones especiales son muy diversas en su origen, naturaleza y aplicaciones. Ahora bien, hay un grupo con cierta uniformidad constituido por las que aparecen como soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Muchas de éstas encuentran aplicación en relación con las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de la física matemática. Son también importantes, a través de la teoría de desarrollos ortogonales, como la principal fuente histórica del análisis lineal, que ha desempeñado un papel crucial en el desarrollo de buena parte de la matemática pura moderna.

Intentemos comprender de forma general cómo aparecen esas funciones. Recordemos que si deseamos resolver la sencilla ecuación

$$y'' + y = 0, \quad (1)$$

las familiares funciones $y = \sin x$, $y = \cos x$ están ya a nuestra disposición. La situación para la ecuación

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (2)$$

es muy distinta, pues ésta no puede ser resuelta en términos de funciones elementales. De hecho, no se conoce ningún tipo de ecuación diferencial lineal de segundo orden, salvo las que tienen coeficientes constantes y las reducibles a ellas por cambio de variable independiente, que pueda ser resuelto mediante funciones elementales. En el Capítulo 4 hemos visto que ciertas propiedades generales de las soluciones de una tal ecuación pueden deducirse sin resolver la ecuación. Pero si una ecuación particular de ese tipo resulta ser lo bastante interesante como para exigir alguna clase de solución explícita, ¿qué cabe hacer? El método que exponemos en este capítulo consiste en resolverla mediante series de potencias y usar estas series para definir nuevas funciones especiales. A continuación se investigan las propiedades de estas funciones

¹ El lector que desee profundizar en este aspecto hará bien en consultar los tres volúmenes de *Higher Transcendental Functions*, A. Erdélyi (ed.), McGraw-Hill, Nueva York, 1953-1955.

especiales por medio de sus desarrollos en serie. Si somos capaces de conocer suficientes propiedades sobre ellas, pasan a alcanzar la consideración de «funciones familiares» y pueden ser utilizadas para estudiar el problema que dio origen a la ecuación diferencial inicial. Ni que decir tiene que el programa es más fácil de describir que de llevar a feliz término, y es rentable sólo en el caso de funciones con un amplio espectro de aplicaciones relevantes.

Es claro de las observaciones anteriores que habremos de manejar con frecuencia series de potencias en este capítulo. Damos por supuesto que la mayoría de los lectores posee un conocimiento razonable de este asunto, pero para hacer el texto más autocontenido presentaremos un breve resumen de sus principales características.

A. Una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (3)$$

se llama una *serie de potencias* en x . La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots \quad (4)$$

es una serie de potencias en $x - x_0$, y es algo más general que (3). Sin embargo, (4) puede siempre reducirse a (3) sin más que sustituir $x - x_0$ por x , lo que no es sino una traslación del sistema de coordenadas, de modo que generalmente nos limitaremos a series de potencias del tipo (3).

B. Se dice que la serie (3) es *convergente* en un punto x si existe el límite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n x^n$$

y en tal caso la *suma* de la serie es el valor de dicho límite. Es obvio que (3) siempre es convergente en el punto $x = 0$. En relación a la disposición de sus puntos de convergencia, todas las series de potencias caen en alguna de las tres categorías que vamos a describir, y que quedan tipificadas por los siguientes ejemplos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2! x^2 + 3! x^3 + \dots; \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots. \quad (7)$$

La primera de esas series diverge (o sea, no es convergente) en todo $x \neq 0$; la segunda converge en todo x ; la tercera converge para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$. Algunas series de potencias en x se comportan como (5) y convergen sólo en $x = 0$. No son de interés para nosotros. Otras, al igual que (6), convergen para todo x . Son las más sencillas de manejar. Todas las demás son esencialmente como la (7). Queremos decir que a cada serie de esa clase le corresponde un número real positivo R , llamado su *radio de convergencia*, con la propiedad de que la serie converge si $|x| < R$ y diverge si $|x| > R$ [$R = 1$ en el caso de (7)].

Es costumbre hacer $R = 0$ cuando la serie converge sólo en $x = 0$, e igual a ∞ cuando converge para todo x . Este convenio nos permite cubrir todas las posibilidades en un solo enunciado: toda serie de potencias en x tiene un radio de convergencia R , donde $0 \leq R \leq \infty$, con la propiedad de que la serie es convergente si $|x| < R$ y divergente si $|x| > R$. Debemos hacer notar que si $R = 0$, ningún x satisface $|x| < R$, mientras que si $R = \infty$, entonces ningún x satisface $|x| > R$.

En muchos casos importantes, el valor de R puede hallarse como sigue. Sea

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

una serie de constantes no nulas. Recordemos del cálculo elemental que si el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L$$

existe, entonces el *criterio del cociente* asegura que la serie es convergente si $L < 1$ y divergente si $L > 1$. En el caso de nuestra serie de potencias (3), eso nos dice que si cada $a_n \neq 0$, y si para un punto fijado $x \neq 0$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L,$$

entonces (3) converge si $L < 1$ y diverge si $L > 1$. Estas consideraciones conducen a la fórmula

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

si este límite existe (ponemos $R = \infty$ si $|a_n/a_{n+1}| \rightarrow \infty$). Independientemente de que esa fórmula pueda ser usada o no, se sabe que R existe siempre; y si R es finito y no nulo, determina un *intervalo de convergencia* $-R < x < R$ tal que la serie converge en su interior y diverge en el exterior. Una serie de potencias

puede o no ser convergente en los puntos terminales de su intervalo de convergencia.

C. Supongamos que (3) converge para $|x| < R$ con $R > 0$, y denotemos su suma por $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (8)$$

Entonces $f(x)$ es automáticamente continua y tiene derivadas de todos los órdenes en $|x| < R$. Además, la serie puede ser derivada término a término en el sentido de que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots,$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \dots,$$

y así sucesivamente, y cada una de las series resultantes converge en $|x| < R$. Estas series derivadas sucesivas proporcionan la siguiente fórmula básica que relaciona los a_n con $f(x)$ y sus derivadas:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \quad (9)$$

Más aún, a menudo es de utilidad saber que la serie (8) puede ser integrada término a término supuesto que los límites de integración caen dentro del intervalo de convergencia.

Si se tiene una segunda serie de potencias en x que converge a otra función $g(x)$ para $|x| < R$, de manera que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots, \quad (10)$$

entonces (8) y (10) pueden sumarse o restarse término a término:

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) x + \dots.$$

Pueden ser también multiplicadas como si fueran polinomios, en el sentido de que

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

donde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ ². Si ambas series convergen a la misma función, de modo que $f(x) = g(x)$ para $|x| < R$, la fórmula (9) implica que deben tener los mismos coeficientes: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ... En particular, si $f(x) = 0$ para $|x| < R$, entonces $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, ...

D. Sea $f(x)$ una función continua que admite derivadas de todo orden en $|x| < R$, con $R > 0$. ¿Puede representarse $f(x)$ mediante una serie de potencias? Si usamos (9) para definir los a_n , es natural esperar que el desarrollo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots \quad (11)$$

sea válido sobre ese intervalo. Esto es a menudo correcto, pero desgraciadamente no siempre. Una forma de investigar la validez de ese desarrollo para un punto específico x en el intervalo consiste en utilizar la *fórmula de Taylor*:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x),$$

donde el resto $R_n(x)$ viene dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} x^{n+1}$$

para algún punto \bar{x} entre 0 y x . Para comprobar (11) es suficiente mostrar que $R_n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por este procedimiento resulta fácil obtener los siguientes desarrollos familiares, válidos para todo x :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad (12)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots; \quad (13)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots. \quad (14)$$

Si se nos da una serie de potencias convergente particular, ¿cómo podemos

² Más tarde será útil observar que los c_n pueden expresarse de dos formas equivalentes:

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad \text{y} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k.$$

reconocer qué función tiene como suma? En general es imposible reconocerla, puesto que pocas series de potencias tienen como suma una función elemental.

E. Una función que admite un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (15)$$

en algún entorno del punto x_0 se dice que es *analítica* en x_0 . En tal caso, los a_n vienen dados necesariamente por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

y (15) se llama la *serie de Taylor* de $f(x)$ en x_0 . Así pues, (12), (13) y (14) nos dicen que e^x , $\sin x$ y $\cos x$ son analíticas en $x_0 = 0$, y las series dadas son sus serie de Taylor en ese punto. La mayoría de las cuestiones relativas a la analiticidad pueden ser contestadas mediante los siguientes hechos:

1. Los polinomios y las funciones e^x , $\sin x$ y $\cos x$ son analíticas en todos los puntos.
2. Si $f(x)$ y $g(x)$ son analíticas en x_0 , también $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ y $f(x)/g(x)$ [si $g(x_0) \neq 0$] son analíticas en x_0 .
3. Si $f(x)$ es analítica en x_0 y $f^{-1}(x)$ es una inversa continua de f , entonces $f^{-1}(x)$ es analítica en $f(x_0)$ si $f'(x_0) \neq 0$.
4. Si $g(x)$ es analítica en x_0 y $f(x)$ es analítica en $g(x_0)$, entonces $f(g(x))$ es analítica en x_0 .
5. La suma de una serie de potencias es analítica en todos los puntos del interior de su intervalo de convergencia.

Algunas de estas afirmaciones son muy fáciles de demostrar por métodos elementales, pero otras no. Hablando en términos generales, el comportamiento de las funciones analíticas sólo puede ser entendido por completo en el marco más amplio de la teoría de funciones de una variable compleja.

PROBLEMAS

1. Usar el criterio del cociente para comprobar que $R = 0$, $R = \infty$ y $R = 1$ para las series (5), (6) y (7).
2. Si p no es un entero positivo ni cero, probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!} x^n$$

converge para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$.

3. Demostrar que $R = \infty$ para las series de los miembros de la derecha en los desarrollos (13) y (14).
4. Usando la fórmula de Taylor, establecer la validez de los desarrollos (12), (13) y (14) para todo x . Ayuda: $a^n/n! \rightarrow 0$ para toda constante a (¿por qué?).
5. Del álgebra elemental es bien sabido que

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{si } x \neq 1.$$

Usar esto para verificar que los desarrollos

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

y

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

son válidos para $|x| < 1$. Aplicar el último para probar que

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

y

$$\operatorname{tg}^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

para $|x| < 1$.

6. Utilizar el primer desarrollo del Problema 5 para hallar la serie de potencias de $1/(1 - x)^2$
 - (a) elevado al cuadrado;
 - (b) derivando.
7. (a) Demostrar que la serie de $\cos x$,

$$y = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots,$$

tiene la propiedad de que $y'' = -y$, por lo que es solución de la ecuación (1).
 (b) Probar que la serie

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

es convergente para todo x , y verificar que es solución de la ecuación (2).

[Nótese que esta serie puede obtenerse de la de (a) remplazando cada factor impar en los denominadores por el número par siguiente. La suma de esta serie es una función especial importante, denotada por $J_0(x)$ y llamada la *función de Bessel de orden 0*. Será estudiada en el Capítulo 8.]

27. SOLUCIONES POR SERIES DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

Hemos insistido repetidamente en que muchas de las ecuaciones diferenciales interesantes no admiten resolución por los métodos discutidos en los capítulos precedentes, así como en la posibilidad de obtener soluciones de esas ecuaciones por medio de series de potencias. En esta sección explicaremos el procedimiento, mostrando cómo funciona en el caso de ecuaciones de primer orden, que son fáciles de resolver por métodos elementales.

Como primer ejemplo, consideremos la ecuación

$$y' = y. \quad (1)$$

Suponemos que esta ecuación tiene una solución en forma de serie de potencias

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (2)$$

que converge para $|x| < R$ con $R > 0$; esto es, suponemos que (1) tiene una solución analítica en el origen. Una serie de potencias puede ser derivada término a término en su intervalo de convergencia, luego

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (n+1)a_{n+1}x^n + \dots. \quad (3)$$

Como $y' = y$, las series (2) y (3) han de tener los mismos coeficientes:

$$a_1 = a_0, \quad 2a_2 = a_1, \quad 3a_3 = a_2, \dots, (n+1)a_{n+1} = a_n, \dots$$

De ahí se pueden deducir expresiones para los a_n en términos de a_0 :

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, \dots, a_n = \frac{a_0}{n!}, \dots$$

Sustituyendo esos coeficientes en (2) obtenemos nuestra solución en serie de potencias

$$y = a_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right), \quad (4)$$

donde no se ha impuesto condición alguna sobre a_0 . Es esencial comprender

que hasta el momento la solución es sólo tentativa, porque no está garantizado que (1) posea alguna solución en serie de potencias de la forma (2). El argumento anterior muestra sólo que si (1) tiene una tal solución, entonces esa solución ha de ser (4). Sin embargo, se sigue del criterio del cociente que la serie (4) converge para todo x , luego es válida la derivación término a término y (4) es realmente una solución de (1). En este caso podemos reconocer fácilmente la serie de (4) como la de e^x , así que (4) se puede escribir como

$$y = a_0 e^x.$$

Claro está que podíamos haber llegado a esa solución directamente de (1) separando variables e integrando. Pero lo importante es darse cuenta de que (4) sería todavía una solución totalmente correcta incluso si (1) fuese irresoluble por métodos elementales y la serie (4) no fuese reconocible como el desarrollo de una función familiar.

Este ejemplo sugiere un método eficaz para obtener la serie de potencias de una función dada: hallar la ecuación diferencial que satisface la función y resolverla por serie de potencias.

Para ilustrar esa idea, consideremos la función

$$y = (1 + x)^p, \quad (5)$$

donde p es una constante arbitraria. Es fácil ver que (5) es la solución particular indicada de la siguiente ecuación diferencial:

$$(1 + x)y' = py, \quad y(0) = 1. \quad (6)$$

Al igual que antes, supongamos que (6) tiene una solución en serie de potencias

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (7)$$

con radio de convergencia positivo. De ello se sigue que

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots,$$

$$xy' = a_1 x + 2a_2 x^2 + \cdots + na_n x^n + \cdots,$$

$$py = pa_0 + pa_1 x + pa_2 x^2 + \cdots + pa_n x^n + \cdots.$$

Por (6), la suma de las dos primeras series ha de ser igual a la tercera, luego igualando los coeficientes de las sucesivas potencias de x vemos que

$$a_1 = pa_0, \quad 2a_2 + a_1 = pa_1, \quad 3a_3 + 2a_2 = pa_2, \dots, \quad (n+1)a_{n+1} + na_n = pa_n, \dots$$

La condición inicial en (6) implica que $a_0 = 1$, así que

$$a_1 = p, \quad a_2 = \frac{a_1(p-1)}{2} = \frac{p(p-1)}{2},$$

$$a_3 = \frac{a_2(p-2)}{3} = \frac{p(p-1)(p-2)}{2 \cdot 3}, \dots$$

$$a_n = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}, \dots$$

Con esos coeficientes, (7) se convierte en

$$\begin{aligned} y = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots + \\ + \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Para concluir que (8) es verdaderamente la deseada solución, basta observar que esa serie es convergente en $|x| < 1$ (véase Problema 26-2). Comparando las dos soluciones (5) y (8) y usando el hecho de que (6) tiene sólo una solución concluimos que

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (9)$$

para $|x| < 1$. Este desarrollo se llama *serie del binomio*, y generaliza el teorema del binomio al caso de un exponente arbitrario³.

³ Como el lector recordará del álgebra elemental, el teorema del binomio establece que si n es un entero positivo, entonces

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots + x^n.$$

De un modo más conciso,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k,$$

donde el *coeficiente del binomio* $\binom{n}{k}$ viene definido por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

PROBLEMAS

1. Consideremos las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) \quad y' = 2xy; \\ (b) \quad y' + y = 1.$$

En cada caso, hallar una solución en serie de potencias de la forma $\sum a_n x^n$, intentar reconocer la serie resultante como el desarrollo de una función familiar y verificar la conclusión resolviendo la ecuación directamente.

2. Consideremos las ecuaciones diferenciales:

$$(a) \quad xy' = y; \\ (b) \quad x^2y' = y.$$

Para cada una de ellas, hallar una solución por serie de potencias del tipo $\sum a_n x^n$, resolver la ecuación directamente y explicar cualquier discrepancia que aparezca.

3. Expressar $\sin^{-1} x$ como serie de potencias $\sum a_n x^n$ resolviendo $y' = (1 - x^2)^{-1/2}$ de dos maneras. (Ayuda: Recordar la serie del binomio.) Usando este resultado, obtener la fórmula

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

4. Las ecuaciones diferenciales consideradas en el texto y en los problemas anteriores son todas lineales. La ecuación

$$y' = 1 + y^2 \quad (*)$$

es no lineal, y es fácil ver directamente que $y = \operatorname{tg} x$ es la solución particular para la que $y(0) = 0$. Probar que

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

suponiendo que la ecuación (*) tiene una solución en forma de serie de potencias $\sum a_n x^n$ y hallando los a_n de dos maneras:

- (a) como en los ejemplos del texto (nótese en particular cómo la no linealidad de la ecuación complica las fórmulas);
 (b) derivando la ecuación (*) repetidamente para obtener

$$y'' = 2yy', \quad y''' = 2yy'' + 2(y')^2, \dots,$$

y usando la fórmula $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

5. Resolver la ecuación

$$y' = x - y, \quad y(0) = 0$$

por cada uno de los métodos sugeridos en el Problema 4. ¿Qué función familiar representa la serie resultante? Comprobar la conclusión resolviendo la ecuación directamente como ecuación lineal de primer orden.

28. ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. PUNTOS ORDINARIOS

Ahora volvemos nuestra mirada hacia la ecuación lineal general homogénea de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (1)$$

Como sabemos, es ocasionalmente posible resolver tal ecuación en términos de funciones elementales familiares. Tal ocurre, por ejemplo, cuando $P(x)$ y $Q(x)$ son constantes, y en unos pocos casos más. Por lo general, sin embargo, las ecuaciones de este tipo de mayor interés en matemática pura y aplicada caen fuera del alcance de los métodos elementales, y sólo pueden resolverse mediante series de potencias.

El hecho central relativo a la ecuación (1) es que el comportamiento de sus soluciones cerca de un punto x_0 depende del comportamiento de sus funciones coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ en las proximidades de ese punto. En esta sección nos restringiremos al caso en que P y Q tienen «buen comportamiento» en el sentido de ser analíticas en x_0 , lo que significa que ambas tienen un desarrollo en serie de potencias válido en algún entorno del punto. En tal caso, se dirá que x_0 es un *punto ordinario* de la ecuación (1), y resulta que toda solución de la ecuación es también analítica en ese punto. En otras palabras, la analiticidad de los coeficientes de (1) en un cierto punto implica la de sus soluciones en ese mismo punto. Cualquier punto que no sea ordinario se llamará *punto singular*.

Demostraremos las afirmaciones del párrafo anterior, pero antes consideremos varios ejemplos ilustrativos.

En el caso de la ecuación familiar

$$y'' + y = 0, \quad (2)$$

las funciones coeficientes son $P(x) = 0$ y $Q(x) = 1$. Ambas son analíticas en todo punto, de modo que buscaremos una solución de la forma

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots. \quad (3)$$

Derivando (3) se obtiene

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \quad (4)$$

e

$$y'' = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \cdots. \quad (5)$$

Si sustituimos (5) y (3) en (2) y sumamos las dos series término a término, deducimos que

$$(2a_2 + a_0) + (2 \cdot 3a_3 + a_1)x + (3 \cdot 4a_4 + a_2)x^2 + (4 \cdot 5a_5 + a_3)x^3 + \dots + \\ + [(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n]x^n + \dots = 0;$$

e igualando a cero los coeficientes de las sucesivas potencias de x se llega a que

$$2a_2 + a_0 = 0, \quad 2 \cdot 3a_3 + a_1 = 0, \quad 3 \cdot 4a_4 + a_2 = 0,$$

$$4 \cdot 5a_5 + a_3 = 0, \dots, (n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n = 0, \dots$$

Por medio de esas relaciones podemos expresar a_n en términos de a_0 o a_1 , según que n sea par o impar:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{3 \cdot 4} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{4 \cdot 5} = \frac{a_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \dots$$

Con esos coeficientes, (3) se convierte en

$$y = a_0 + a_1x - \frac{a_0}{2}x^2 - \frac{a_1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \frac{a_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 - \dots \\ = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right). \quad (6)$$

Denotemos por $y_1(x)$ e $y_2(x)$ las dos series entre paréntesis. Hemos probado formalmente que (6) satisface (2) para todo par de constantes a_0 y a_1 . En particular, tomando $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$ vemos que y_1 satisface esa ecuación, y escogiendo $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ concluimos que y_2 también la satisface. Exactamente como sucedía en los ejemplos de la sección precedente, sólo queda por estudiar la convergencia de las dos series que definen a y_1 e y_2 . Pero el criterio del cociente asegura que ambas series, y en consecuencia la (6), convergen para todo x (véase Problema 26-3). Se sigue que todas las operaciones efectuadas sobre (3) son legítimas, de manera que (6) es una solución válida de (2) y no ya sólo una solución formal. Además, y_1 e y_2 son linealmente independientes, pues es obvio que ninguna de ellas es múltiplo de la otra. Vemos, por tanto, que (6) es la solución general de (2) y que cualquier solución particular se obtiene especificando valores de $y(0) = a_0$ y de $y'(0) = a_1$.

En el ejemplo anterior, las dos series entre paréntesis eran reconocibles como los desarrollos de $\cos x$ y $\sin x$, así que (6) se puede escribir como

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x.$$

Naturalmente, esta conclusión podía haber sido enunciada desde el comienzo, porque (2) es una ecuación muy simple cuyas soluciones son perfectamente familiares para nosotros. No obstante, esto puede interpretarse como un afortunado accidente sin más, por cuanto la mayoría de las soluciones por series que se encuentran por ese método son imposibles de identificar y representan funciones previamente desconocidas.

Como ilustración de ese comentario, vamos a aplicar el mismo procedimiento para resolver la *ecuación de Legendre*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0, \quad (7)$$

donde p es una constante. Es claro que las funciones coeficientes

$$P(x) = \frac{-2x}{1 - x^2} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{p(p + 1)}{1 - x^2} \quad (8)$$

son analíticas en el origen. El origen es, por tanto, un punto ordinario, y cabe esperar una solución de la forma $y = \sum a_n x^n$. Como $y' = \sum (n + 1)a_{n+1}x^n$, obtenemos los siguientes desarrollos para los términos individuales del lado izquierdo de la ecuación (7):

$$\begin{aligned} y'' &= \sum (n + 1)(n + 2)a_{n+2}x^n, \\ -x^2y'' &= \sum -(n - 1)na_nx^n, \\ -2xy' &= \sum -2na_nx^n, \end{aligned}$$

y

$$p(p + 1)y = \sum p(p + 1)a_nx^n.$$

Por (7), la suma de estas series ha de ser cero, luego el coeficiente de x^n ha de ser cero para todo n :

$$(n + 1)(n + 2)a_{n+2} - (n - 1)na_n - 2na_n + p(p + 1)a_n = 0.$$

Tras algunas manipulaciones, eso se convierte en

$$a_{n+2} = -\frac{(p - n)(p + n + 1)}{(n + 1)(n + 2)}a_n. \quad (9)$$

Tal como ocurría en el ejemplo anterior, esta *fórmula de recurrencia* nos permite expresar a_n en términos de a_0 o a_1 , según que n sea par o impar:

$$a_2 = -\frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} a_0, \quad a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{2 \cdot 3} a_1,$$

$$a_4 = -\frac{(p-2)(p+3)}{3 \cdot 4} a_2 = \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!} a_0,$$

$$a_5 = -\frac{(p-3)(p+4)}{4 \cdot 5} a_3 = \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!} a_1,$$

$$a_6 = -\frac{(p-4)(p+5)}{5 \cdot 6} a_4 = -\frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!} a_0,$$

$$a_7 = -\frac{(p-5)(p+6)}{6 \cdot 7} a_5 = -\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!} a_1,$$

y así sucesivamente. Insertando estos coeficientes en la presunta solución $y = \sum a_n x^n$ obtenemos

$$\begin{aligned} y &= a_0 \left[1 - \frac{p(p+1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!} x^4 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!} x^6 + \dots \right] + \\ &+ a_1 \left[x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!} x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!} x^5 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!} x^7 \dots \right] \end{aligned} \quad (10)$$

como nuestra solución formal de (7).

Cuando p no es entero, cada serie entre paréntesis tiene radio de convergencia $R = 1$. Esto se comprueba sin dificultad usando la fórmula de recurrencia (9): para la primera serie (con n sustituida por $2n$) esa fórmula da

$$\left| \frac{a_{2n+2} x^{2n+2}}{a_{2n} x^{2n}} \right| = \left| -\frac{(p-2n)(p+2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \right| |x|^2 \rightarrow |x|^2$$

cuando $n \rightarrow \infty$, y análogamente para la segunda. Como antes, el que cada una de las series tenga radio de convergencia positivo justifica las operaciones realizadas y demuestra que (10) es una solución válida de (7) para toda elección

de las constantes a_0 y a_1 . Cada serie entre paréntesis es una solución particular, y como es claro que las funciones definidas por ellas son linealmente independientes, (10) es la solución general de (7) sobre el intervalo $|x| < 1$.

Las funciones definidas por (10) se llaman *funciones de Legendre*, y en general no son elementales. No obstante, cuando p es un entero no negativo, una de las series termina y es por tanto un polinomio (la primera serie si p es par, la segunda si es impar) mientras la otra sigue siendo una serie infinita. Esta observación conduce a las soluciones particulares de (7) conocidas como *polinomios de Legendre*, cuyas propiedades y aplicaciones discutiremos en el Capítulo 8.

Aplicaremos ahora el método de esos ejemplos para establecer el siguiente teorema general acerca de la naturaleza de las soluciones cerca de un punto ordinario.

Teorema A. *Sea x_0 un punto ordinario de la ecuación diferencial*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad (11)$$

y sean a_0 y a_1 constantes arbitrarias. Existe una única función $y(x)$ analítica en x_0 que es solución de la ecuación (11) en un cierto entorno de ese punto y satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = a_0$, $y'(x_0) = a_1$. Además, si los desarrollos en serie de potencias de $P(x)$ y $Q(x)$ son válidos en un intervalo $|x - x_0| < R$, $R > 0$, entonces el desarrollo en serie de potencias de esta solución es válido también en ese mismo intervalo.

Demostración. Por conveniencia restringimos nuestra atención al caso en que $x_0 = 0$. Eso nos permite trabajar con series de potencias en x en lugar de $x - x_0$, y no significa pérdida alguna de generalidad. Con esta simplificación, la hipótesis del teorema garantiza que P y Q son analíticas en el origen y, en consecuencia, tienen desarrollos en serie de potencias

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots \quad (12)$$

y

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots \quad (13)$$

que convergen sobre un intervalo $|x| < R$ para cierto $R > 0$. Teniendo en cuenta las condiciones iniciales especificadas, intentemos hallar una solución de (11) en forma de una serie de potencias

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (14)$$

con radio de convergencia no menor que R . Derivando (14) obtenemos

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots \quad (15)$$

e

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \dots. \quad (16)$$

Se deduce ahora de la regla de producto de series de potencias que

$$P(x)y' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n p_{n-k}(k+1)a_{k+1} \right] x^n \quad (17)$$

y

$$Q(x)y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n q_{n-k}a_k \right) x^n. \quad (18)$$

Sustituyendo (16), (17) y (18) en (11) y sumando las series término a término vemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n p_{n-k}(k+1)a_{k+1} + \sum_{k=0}^n q_{n-k}a_k \right] x^n = 0,$$

así que tenemos la siguiente fórmula de recurrencia para los a_n :

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = - \sum_{k=0}^n [(k+1)p_{n-k}a_{k+1} + q_{n-k}a_k]. \quad (19)$$

Para $n = 0, 1, 2, \dots$ esta fórmula se convierte en

$$\begin{aligned} 2a_2 &= -(p_0a_1 + q_0a_0), \\ 2 \cdot 3a_3 &= -(p_1a_1 + 2p_0a_2 + q_1a_0 + q_0a_1), \\ 3 \cdot 4a_4 &= -(p_2a_1 + 2p_1a_2 + 3p_0a_3 + q_2a_0 + q_1a_1 + q_0a_2), \\ &\dots \end{aligned}$$

Estas expresiones determinan a_2, a_3, \dots en términos de a_0 y a_1 , así que la serie resultante (14), que satisface formalmente (11) y las condiciones iniciales dadas, queda únicamente determinada por esos requerimientos.

Supongamos ahora que podemos probar que la serie (14), con sus coeficientes definidos por (19), converge realmente para $|x| < R$. Entonces por la teoría general de series de potencias se deduce que las operaciones formales por las que (14) llegó a satisfacer (11)—a saber, derivación término a término, producto y suma término a término—son justificadas, y la demostración estará terminada. Este argumento no es sencillo. Damos sus detalles en el Apéndice A, que el lector podrá omitir si así lo desea.

Conviene hacer varios comentarios. En nuestros ejemplos nos hemos topado

tan sólo con las que se conocen como *fórmulas de recurrencia de dos términos* para los coeficientes de las soluciones en forma de serie. La sencillez de esas fórmulas hace fácil la determinación de los términos generales de las series resultantes y obtener información precisa sobre sus radios de convergencias. Sin embargo, es evidente, a la vista de (19), que esa simplicidad no es de esperar en general. En la mayoría de los casos, lo mejor que cabe hacer es hallar el radio de convergencia de los desarrollos en serie de $P(x)$ y $Q(x)$, y concluir del teorema que el radio de convergencia para la solución en serie debe ser al menos tan grande como el menor de esos dos números. Así pues, para la ecuación de Legendre es claro de (8) y de la expresión bien conocida

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots, \quad R = 1,$$

que $R = 1$ tanto para $P(x)$ como para $Q(x)$. Por consiguiente, sabemos sin más cálculos que cualquier solución de la forma $y = \sum a_n x^n$ ha de ser válida al menos sobre el intervalo $|x| < 1$.

PROBLEMAS

- Hallar la solución general de $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ en términos de series de potencias en x . ¿Puede expresar esta solución mediante funciones elementales?
- Consideremos la ecuación $y'' + xy' + y = 0$.
 - Hallar su solución general $y = \sum a_n x^n$ en la forma $y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$, donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son series de potencias.
 - Verificar, usando el criterio del cociente, que las dos series $y_1(x)$, $y_2(x)$ convergen para todo x , tal como afirma el Teorema A.
 - Probar que $y_1(x)$ es el desarrollo en serie de $e^{-x^2/2}$, usar este hecho para hallar una segunda solución linealmente independiente por el método de la Sección 16 y comprobar que esta segunda solución no es sino la función $y_2(x)$ hallada en (a).
- Verificar que la ecuación $y'' + y' - xy = 0$ tiene una fórmula de recurrencia de tres términos y hallar sus soluciones por series $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tales que
 - $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$;
 - $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$.

El Teorema A garantiza que ambas series convergen para todo x . Nótese lo difícil que resultaría demostrar eso mismo trabajando con las propias series.

- La ecuación $y'' + (p + 1/2 - 1/4x^2)y = 0$, donde p es una constante, tiene ciertamente una solución en serie de la forma $y = \sum a_n x^n$.
 - Demostrar que los coeficientes a_n están relacionados por la fórmula de recurrencia de tres términos

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \left(p + \frac{1}{2}\right)a_n - \frac{1}{4}a_{n-2} = 0.$$

- (b) Si hacemos el cambio de variable dependiente $y = we^{-x^2/4}$, probar que la ecuación se transforma en $w'' - xw' + pw = 0$.
 (c) Comprobar que la ecuación en (b) tiene una fórmula de recurrencia de dos términos y hallar su solución general.
5. Las soluciones de la *ecuación de Airy* $y'' + xy = 0$ se llaman *funciones de Airy*, y tienen aplicaciones en la teoría de la difracción⁴.
- (a) Verificar, usando los teoremas de la Sección 24, que toda función de Airy no trivial tiene infinitos ceros positivos y a lo sumo uno negativo.
 (b) Hallar las funciones de Airy en forma de serie de potencias y comprobar directamente que las series obtenidas convergen para todo x .
 (c) Utilizando los resultados de (b), escribir la solución general de $y'' - xy = 0$ sin hacer cálculos.
6. La *ecuación de Chebyshev* es
- $$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2y = 0,$$
- con p constante.
- (a) Hallar dos series linealmente independientes que sean soluciones válidas en $|x| < 1$.
 (b) Probar que si $p = n$, donde n es un entero ≥ 0 , existe un polinomio de grado n que es solución. Cuando éstos se multiplican por constantes adecuadas, se llaman *polinomios de Chebyshev*. Volveremos a este asunto en los problemas de la Sección 31 y en el Apéndice D.
7. La *ecuación de Hermite* es

$$y'' - 2xy' + 2py = 0,$$

donde p es una constante.

- (a) Demostrar que su solución general es $y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x)$, donde

$$y_1(x) = 1 - \frac{2p}{2!}x^2 + \frac{2^2p(p-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3p(p-2)(p-4)}{6!}x^6 + \dots$$

e

$$y_2(x) = x - \frac{2(p-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5 - \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}x^7 + \dots.$$

⁴ Sir George Biddell Airy (1801-1892), Astrónomo Real de Inglaterra durante muchos años, fue un infatigable y tenaz trabajador cuyo sentido del decoro estuvo a punto de privar a John Couch Adams del crédito del descubrimiento del planeta Neptuno. De niño, Airy destacó por su habilidad en el diseño de canutos; pero a pesar de este prometedor inicio y de algunos trabajos en teoría de la luz (fue el primero en llamar la atención sobre el defecto de visión hoy conocido como astigmatismo), desembocó hacia el tipo excesivamente práctico de científico obsesionado por elaborados cálculos numéricos y con poca dedicación a las ideas científicas de carácter general.

Por el Teorema A, ambas series convergen para todo x . Comprobar esto directamente.

- (b) Si p es un entero no negativo, una de esas series termina y se reduce, por tanto, a un polinomio (la y_1 si p es par, la y_2 si p es impar), mientras la otra sigue siendo una serie infinita. Verificar que para $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, esos polinomios son $1, x, 1 - 2x^2, x - 2/3x^3, 1 - 4x^2 + 4/3x^4, x - 4/3x^3 + 4/15x^5$.
- (c) Es claro que las únicas soluciones polinómicas de la ecuación de Hermite son múltiplos constantes de los polinomios descritos en (b). Aquellos múltiplos constantes cuyos términos dominantes son de la forma $2^n x^n$ se denominan por $H_n(x)$ y se llaman *polinomios de Hermite*. Comprobar que $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ y $H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$.
- (d) Verificar que los polinomios citados en la lista de (c) vienen dados por la fórmula general

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

En el Apéndice B mostraremos cómo se puede deducir la fórmula de (d) a partir de las series de (a), demostraremos varias de las más importantes propiedades de los polinomios de Hermite y explicaremos cómo aparecen tales polinomios en un problema fundamental de la mecánica cuántica.

29. PUNTOS SINGULARES REGULARES

Recordemos que un punto x_0 es un *punto singular* de la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

si una de las funciones coeficientes $P(x)$, $Q(x)$, o ambas a la vez, son no analíticas en x_0 . En ese caso, el teorema y los métodos de la sección anterior no son aplicables, de modo que son necesarias ideas nuevas para estudiar las soluciones de (1) cerca de x_0 . Esta es una cuestión de indudable interés práctico, ya que muchas de las ecuaciones diferenciales que aparecen en problemas físicos tienen puntos singulares, y la elección de soluciones físicamente apropiadas viene determinada con frecuencia por su comportamiento cerca de esos puntos. Así pues, aunque podría uno sentirse tentado de evitar los puntos singulares de una ecuación diferencial, son precisamente esos puntos los que demandan una atención más especial. A título de ejemplo sencillo, el origen es claramente singular para la ecuación

$$y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{2}{x^2} y = 0.$$

Es fácil comprobar que $y_1 = x$ e $y_2 = x^{-2}$ son soluciones independientes para $x > 0$, de modo que $y = c_1 x + c_2 x^{-2}$ es la solución general en ese intervalo. Si

sólo estamos interesados en soluciones que sean acotadas cerca del origen, es evidente que se obtendrán de esa solución general haciendo $c_2 = 0$.

En general hay poco que podamos decir acerca de las soluciones de (1) en las proximidades de un punto singular x_0 . Afortunadamente, sin embargo, en la mayor parte de las aplicaciones los puntos singulares son más bien «débiles», en el sentido de que las funciones coeficientes son suavemente no analíticas, y ligeras modificaciones de nuestros resultados previos proporcionan soluciones satisfactorias. Se trata de los llamados puntos singulares regulares, que pasamos a definir. Un punto singular x_0 de la ecuación (1) se dice *regular* si las funciones $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2Q(x)$ son analíticas, e *irregular* en caso contrario⁵. *Grosso modo*, eso significa que la singularidad de $P(x)$ no es peor que $1/(x - x_0)$, y la de $Q(x)$ no es peor que $1/(x - x_0)^2$.

Si consideramos la ecuación de Legendre 28-(7) en la forma

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2} y = 0,$$

es claro que $x = 1$ y $x = -1$ son puntos singulares. El primero es regular, ya que

$$(x-1)P(x) = \frac{2x}{x+1} \quad \text{y} \quad (x-1)^2Q(x) = -\frac{(x-1)p(p+1)}{x+1}$$

son analíticas en $x = 1$, y el segundo es también regular por razones similares. Como otro ejemplo, mencionemos la ecuación de Bessel de orden p , donde p es una constante no negativa:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0. \quad (2)$$

Si se escribe como

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2} y = 0,$$

salta a la vista que el origen es un punto singular regular, porque

$$xP(x) = 1 \quad \text{y} \quad x^2Q(x) = x^2 - p^2$$

son analíticas en $x = 0$. En el resto de este capítulo usaremos a menudo la ecuación de Bessel como ejemplo ilustrativo, y en el Capítulo 8 examinaremos sus soluciones y sus aplicaciones con detalle.

Intentemos ahora comprender las razones que subyacen a esta definición de

⁵ Esta terminología sigue una venerable tradición en matemáticas, de acuerdo con la cual situaciones que eluden un análisis sencillo se catalogan con términos peyorativos tales como «impropio», «inadmisible», «degenerado», «irregular», etc.

punto singular regular. Para simplificar la cuestión podemos suponer que el punto singular x_0 está en el origen; de hecho, si no lo está, una traslación de la variable independiente de x a $x - x_0$ lo localizará ya en el origen. Nuestro punto de partida es el hecho de que la forma general de una función analítica en $x = 0$ es $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$. Como consecuencia, el origen será ciertamente un punto singular de (1) si

$$P(x) = \dots + \frac{b_{-2}}{x^2} + \frac{b_{-1}}{x} + b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

y

$$Q(x) = \dots + \frac{c_{-2}}{x^2} + \frac{c_{-1}}{x} + c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots,$$

y al menos uno de los coeficientes con subíndice negativo es no nulo. El tipo de soluciones que buscamos para (1), por razones que pronto serán patentes, tiene la forma de una «casi serie de potencias»

$$y = x^m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = a_0x^m + a_1x^{m+1} + a_2x^{m+2} + \dots, \quad (3)$$

donde el exponente m puede ser un entero negativo, una fracción, o incluso un número real irracional. Veremos en los Problemas 6 y 7 que dos soluciones independientes de esa clase son posibles sólo si las anteriores expresiones para $P(x)$ y $Q(x)$ no contienen, respectivamente, más que el primer término o los dos primeros a la izquierda de los términos constantes b_0 y c_0 . Una afirmación equivalente es que $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ han de ser analíticas en el origen; y eso, de acuerdo con la definición, es precisamente lo que significa decir que el punto singular $x = 0$ es regular.

La siguiente cuestión que deseamos responder es: ¿de dónde surge la idea de que las series de la forma (3) puedan ser soluciones adecuadas para la ecuación (1) cerca del punto singular regular $x = 0$? Por el momento, la única ecuación diferencial lineal de segundo orden que podemos resolver por completo en las proximidades de un punto singular es la ecuación de Euler discutida en el Problema 17-5:

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0. \quad (4)$$

Si la escribimos en la forma

$$y'' + \frac{p}{x}y' + \frac{q}{x^2}y = 0, \quad (5)$$

así que $P(x) = p/x$ y $Q(x) = q/x^2$, resulta evidente que el origen es un punto singular regular siempre que las constantes p y q no sean ambas cero. Las soluciones de esta ecuación proporcionan un puente muy sugestivo hacia el

caso general, así que recordaremos brevemente los detalles. La clave para hallar estas soluciones reside en que cambiando la variable independiente x a $z = \log x$, la (4) se transforma en otra ecuación cuyos coeficientes son constantes. Para realizar este proceso, supongamos que $x > 0$ (de modo que z sea una variable real) y escribamos

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{1}{x}$$

e

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{dz} \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dz} \right) = \\ &= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{x} \frac{d}{dz} \left(\frac{dy}{dz} \right) \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz}. \end{aligned}$$

Cuando estas expresiones se insertan en (4), la ecuación transformada es

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (p - 1) \frac{dy}{dz} + qy = 0, \quad (6)$$

cuya ecuación auxiliar es

$$m^2 + (p - 1)m + q = 0. \quad (7)$$

Si las raíces de (7) son m_1 y m_2 , sabemos que (6) admite las siguientes soluciones independientes:

$$e^{m_1 z} \quad \text{y} \quad e^{m_2 z} \quad \text{si } m_2 \neq m_1;$$

$$e^{m_1 z} \quad \text{y} \quad ze^{m_1 z} \quad \text{si } m_2 = m_1.$$

Puesto que $e^z = x$, los correspondientes pares de soluciones de (4) son

$$\begin{aligned} x^{m_1} \quad \text{y} \quad x^{m_2} &\quad \text{si } m_2 \neq m_1; \\ x^{m_1} \quad \text{y} \quad x^{m_1} \log x &\quad \text{si } m_2 = m_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Si buscamos soluciones válidas sobre el intervalo $x < 0$, sólo tenemos que cambiar la variable a $t = -x$ y resolver la ecuación resultante para $t > 0$.

Hemos presentado esta discusión de la ecuación de Euler y sus soluciones por dos razones. En primer lugar señalemos que la ecuación diferencial más general con un punto singular regular en el origen es sencillamente la ecuación (5) con los numeradores constantes sustituidos por series de potencias:

$$y'' + \left(\frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots}{x} \right) y' + \left(\frac{q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots}{x^2} \right) y = 0. \quad (9)$$

En segundo lugar, si la transición de (5) a (9) se realiza cambiando constantes por series de potencias, es natural conjeturar que la correspondiente transición de (8) a las soluciones de (9) podría lograrse sustituyendo funciones potencia x^m por series del tipo (3). Esperamos por tanto que (9) tenga dos soluciones independientes de la forma (3), o quizás una de esa forma y otra de la forma

$$y = x^m \log x (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots), \quad (10)$$

donde suponemos $x > 0$. La próxima sección demostrará que ambas conjeturas son correctas.

Antes de abandonar estas generalidades se impone una observación final. Nótese que si $a_0 = 0$ en expresiones tales como (3) y (10), entonces alguna potencia entera de x puede ser factorizada fuera de la serie de potencias y ser combinada con x^m . Supondremos siempre, por tanto, que $a_0 \neq 0$ en tales expresiones, y esta hipótesis quiere decir tan sólo que se ha sacado factor común la máxima potencia posible de x antes ya de realizar cualquier cálculo. Las series de la forma (3) se llaman *series de Frobenius*, y el procedimiento descrito más abajo para hallar soluciones de ese tipo se conoce como *método de Frobenius*⁶. Las series de Frobenius incluyen evidentemente a las series de potencias como casos especiales, siempre que m es cero o un entero positivo.

Para ilustrar las ideas expuestas, consideremos la ecuación

$$2x^2 y'' + x(2x + 1)y' - y = 0. \quad (11)$$

Al escribirla en esta otra forma más reveladora

$$y'' + \frac{1/2 + x}{x} y' + \frac{-1/2}{x^2} y = 0, \quad (12)$$

nos damos cuenta de que $xP(x) = 1/2 + x$ y $x^2Q(x) = -1/2$, así que $x = 0$ es un punto singular regular. Ahora introducimos nuestra presunta solución en serie de Frobenius

$$y = x^m(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \dots, \quad (13)$$

y sus derivadas

$$y' = a_0 m x^{m-1} + a_1 (m+1) x^m + a_2 (m+2) x^{m+1} + \dots$$

e

$$y'' = a_0 m(m-1) x^{m-2} + a_1 (m+1) m x^{m-1} + a_2 (m+2)(m+1) x^m + \dots.$$

⁶ Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) enseñó en Berlín y Zurich. Se le deben varias contribuciones valiosas a la teoría de funciones elípticas y de ecuaciones diferenciales. No obstante, su obra más destacada la produjo en el campo del álgebra, donde inventó y aplicó el importante concepto de los caracteres de un grupo y demostró el famoso teorema sobre las posibles extensiones del sistema de números complejos.

Con el fin de hallar los coeficientes en (13), procederemos esencialmente de la misma manera que en el caso de un punto ordinario, con la diferencia significativa de que ahora debemos hallar también el valor (o valores) apropiado del exponente m . Cuando se introducen en (12) las tres series de arriba y se cancela el factor común x^{m-2} , resulta

$$a_0m(m-1) + a_1(m+1)mx + a_2(m+2)(m+1)x^2 + \dots + \\ + \left(\frac{1}{2} + x\right)[a_0m + a_1(m+1)x + a_2(m+2)x^2 + \dots] - \frac{1}{2}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = 0.$$

Por simple inspección, combinamos las potencias correspondientes de x e igualamos los coeficientes de las diversas potencias a cero, lo cual nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_0 \left[m(m-1) + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} \right] = 0,$$

$$a_1 \left[(m+1)m + \frac{1}{2}(m+1) - \frac{1}{2} \right] + a_0m = 0, \quad (14)$$

$$a_2 \left[(m+2)(m+1) + \frac{1}{2}(m+2) - \frac{1}{2} \right] + a_1(m+1) = 0,$$

...

Tal como se ha explicado antes, se sobrentiende que $a_0 \neq 0$. Se deduce por tanto de la primera de esas ecuaciones que

$$m(m-1) + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} = 0. \quad (15)$$

Esta se llama *ecuación indicial* de la ecuación diferencial (11). Sus raíces son

$$m_1 = 1 \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{1}{2},$$

y esos son los únicos valores posibles para el exponente m en (13). Para cada uno de esos valores, usamos ahora las restantes ecuaciones (14) para calcular a_1, a_2, \dots en términos de a_0 . Para $m_1 = 1$ obtenemos

$$a_1 = -\frac{a_0}{2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2}} = -\frac{2}{5}a_0, \quad a_2 = -\frac{2a_1}{3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2}} = -\frac{2}{7}a_1 = \frac{4}{35}a_0,$$

...

Y para $m_2 = -\frac{1}{2}$ obtenemos

$$a_1 = \frac{1}{2} a_0, \quad a_2 = -\frac{\frac{1}{2} a_1}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} a_0,$$

$$\dots$$

En consecuencia tenemos las dos soluciones en serie de Frobenius siguientes, en cada una de las cuales hemos hecho $a_0 = 1$:

$$y_1 = x \left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{35}x^2 + \dots \right), \quad (16)$$

$$y_2 = x^{-1/2} \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \dots \right). \quad (17)$$

Estas soluciones son obviamente independientes para $x > 0$, de modo que la solución general de (11) en ese intervalo es

$$y = c_1 x \left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{35}x^2 + \dots \right) + c_2 x^{-1/2} \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \dots \right).$$

El problema de determinar el intervalo de convergencia para las dos series de potencias entre paréntesis será abordado en la próxima sección.

Si examinamos con cuidado cómo (15) sale de (12), es fácil ver que la ecuación indicial de la ecuación diferencial más general (9) es

$$m(m-1) + mp_0 + q_0 = 0. \quad (18)$$

En nuestro ejemplo, la ecuación indicial tenía dos raíces reales distintas que conducían a las dos soluciones en serie independientes (16) y (17). Es natural esperar ese resultado siempre que la ecuación indicial tenga dos raíces reales distintas m_1 y m_2 . Tal cosa es cierta si la diferencia entre m_1 y m_2 no es entera. Pero si esa diferencia es entera, a menudo (no siempre) sucede que una o las dos soluciones esperadas en forma de serie no existen. En ese caso es necesario, al igual que en el caso $m_1 = m_2$, hallar una segunda solución independiente por otros métodos. En la próxima sección investigaremos estas dificultades con más detenimiento.

PROBLEMAS

- Para cada una de las ecuaciones diferenciales indicadas, localizar y clasificar sus puntos singulares sobre el eje x :

- (a) $x^3(x-1)y'' - 2(x-1)y' + 3xy = 0;$
 (b) $x^2(x^2-1)^2y'' - x(1-x)y' + 2y = 0;$
 (c) $x^2y'' + (2-x)y' = 0;$
 (d) $(3x+1)xy'' - (x+1)y' + 2y = 0.$

2. Determinar la naturaleza del punto $x = 0$ para cada una de las siguientes ecuaciones:

- (a) $y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0;$ (d) $x^3y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0;$
 (b) $xy'' + (\operatorname{sen} x)y = 0;$ (e) $x^4y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0.$
 (c) $x^2y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0;$

3. Hallar la ecuación indicial y sus raíces para las siguientes ecuaciones diferenciales:

- (a) $x^3y'' + (\cos 2x - 1)y' + 2xy = 0;$
 (b) $4x^2y'' + (2x^4 - 5x)y' + (3x^2 + 2)y = 0.$

4. Verificar, para las ecuaciones dadas, que el origen es un punto singular regular y calcular dos soluciones independientes en forma de series de Frobenius:

- (a) $4xy'' + 2y' + y = 0;$ (c) $2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0;$
 (b) $2xy'' + (3-x)y' - y = 0;$ (d) $2x^2y'' + xy' - (x+1)y = 0.$

5. Cuando $p = 0$, la ecuación de Bessel (2) se convierte en

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

Probar que su ecuación indicial sólo tiene una raíz. Usar el método de esta sección para deducir que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

es la correspondiente solución en serie de Frobenius [véase Problema 26-7(b)].

6. Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{1}{x^2} y' - \frac{1}{x^3} y = 0.$$

- (a) Demostrar que $x = 0$ es un punto singular irregular.
 (b) Usar el hecho de que $y_1 = x$ es solución para hallar una segunda solución independiente y_2 por el método de la Sección 16.
 (c) Probar que la segunda solución y_2 hallada en (b) no puede expresarse como una serie de Frobenius.

7. Sea la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{p}{x^b} y' + \frac{q}{x^c} y = 0,$$

donde p, q son números reales no nulos y b, c son enteros positivos. Es claro que $x = 0$ es un punto singular irregular si $b > 1$ o $c > 2$.

- (a) Si $b = 2$ y $c = 3$, mostrar que hay un único valor posible de m para el cual pueda existir solución en serie de Frobenius.
- (b) Probar análogamente que m satisface una ecuación cuadrática y por tanto cabe esperar un par de soluciones en serie de Frobenius correspondientes a las raíces de esa ecuación si y sólo si $b = 1$ y $c \leq 2$. Obsérvese que esas son exactamente las condiciones que caracterizan a $x = 0$ como un punto singular regular, o «débil», por contraposición con un punto singular irregular o «fuerte».

8. La ecuación diferencial

$$x^2y'' + (3x - 1)y' + y = 0$$

tiene $x = 0$ como punto singular irregular. Si (3) se inserta en esta ecuación, probar que $m = 0$ y que la correspondiente «solución» en serie de Frobenius es la serie de potencias

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n,$$

que converge sólo en $x = 0$. Esto demuestra que aun cuando una serie de Frobenius satisfaga formalmente una tal ecuación, no tiene por qué ser necesariamente una solución válida.

30. PUNTOS SINGULARES REGULARES (CONTINUACION)

En la última sección hemos dedicado nuestro esfuerzo al método y a su motivación. Ahora nos vamos a enfrentar al aspecto teórico del problema de resolver la ecuación general lineal de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

cerca del punto singular regular $x = 0$. Las ideas desarrolladas antes sugieren ensayar un cálculo formal de cualesquiera soluciones de (1) que tengan la forma de Frobenius

$$y = x^m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots), \quad (2)$$

donde $a_0 \neq 0$ y m es un número todavía sin determinar. Confiamos en que cualquier solución formal que encontremos así pueda ser legitimada por una demostración y convertirse en solución válida. La generalidad de este procedimiento servirá también para iluminar las circunstancias bajo las que la ecuación (1) tiene sólo una solución de la forma (2)⁷. Por razones ya explicadas, nos limitaremos al intervalo $x > 0$. El comportamiento de las soluciones sobre

⁷ Cuando decimos que (1) tiene «sólo una» solución de la forma (2), queremos decir que no existe una segunda solución independiente de esa misma forma.

el intervalo $x < 0$ puede estudiarse cambiando de variable, $t = -x$, y resolviendo la ecuación resultante en $t > 0$.

Nuestra hipótesis es que $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ son analíticas en $x = 0$, y, por tanto, poseen desarrollos en serie de potencias

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (3)$$

válidos en el intervalo $|x| < R$ para algún $R > 0$. Al igual que en el ejemplo de la sección anterior, hemos de hallar los posibles valores de m en (2), y a continuación, para cada m admisible, calcular los correspondientes coeficientes a_0, a_1, a_2, \dots . Si escribimos (2) como

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n},$$

al derivar obtenemos

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^{m+n-1}$$

en

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n)(m-n-1) x^{m+n-2} = x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n)(m+n-1) x^n.$$

Los términos $P(x)y'$ y $Q(x)y$ en (1) se pueden escribir ahora en la forma

$$\begin{aligned} P(x)y' &= \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^{m+n-1} \right] = \\ &= x^{m-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^n \right] = \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n p_{n-k} a_k (m+k) \right] x^n = \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n p_{n-k} a_k (m+k) + p_0 a_n (m+n) \right] x^n \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Q(x)y &= \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} \right) = \\ &= x^{m-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \end{aligned}$$

$$= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n q_{n-k} a_k \right) x^n = \\ = x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} a_k + q_0 a_n \right) x^n.$$

Al introducir en (1) estas expresiones de y'' , $P(x)y'$ y $Q(x)y$, y tras cancelar el factor común x^{m-2} , la ecuación diferencial pasa a ser

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n [(m+n)(m+n-1) + (m+n)p_0 + q_0] + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)p_{n-k} + q_{n-k}] \right\} x^n = 0;$$

e igualando a cero el coeficiente de x^n se llega a la siguiente fórmula de recurrencia para los a_n :

$$a_n [(m+n)(m+n-1) + (m+n)p_0 + q_0] + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0. \quad (4)$$

Escribiendo esto en detalle para los diversos valores de n resulta

$$a_0 [m(m-1) + mp_0 + q_0] = 0,$$

$$a_1 [(m+1)m + (m+1)p_0 + q_0] + a_0 (mp_1 + q_1) = 0,$$

$$a_2 [(m+2)(m+1) + (m+2)p_0 + q_0] + a_0 (mp_2 + q_2) + a_1 [(m+1)p_1 + q_1] = 0,$$

...

$$a_n [(m+n)(m+n-1) + (m+n)p_0 + q_0] +$$

$$+ a_0 (mp_n + q_n) + \dots + a_{n-1} [(m+n-1)p_1 + q_1] = 0,$$

...

Si hacemos $f(m) = m(m-1) + mp_0 + q_0$, esas ecuaciones se convierten en

$$a_0 f(m) = 0,$$

$$a_1 f(m+1) + a_0 (mp_1 + q_1) = 0,$$

$$a_2 f(m+2) + a_0 (mp_2 + q_2) + a_1 [(m+1)p_1 + q_1] = 0,$$

...

$$a_n f(m+n) + a_0 (mp_n + q_n) + \dots + a_{n-1} [(m+n-1)p_1 + q_1] = 0,$$

...

Como $a_0 \neq 0$, concluimos de la primera de esas relaciones que $f(m) = 0$, o lo que es equivalente, que

$$m(m-1) + mp_0 + q_0 = 0. \quad (5)$$

Esta es la ecuación *indicial*, y sus raíces m_1 y m_2 , que son los valores admisibles de m en nuestra presunta solución (2), se llaman *exponentes* de la ecuación diferencial (1) en el punto singular regular $x = 0$. Las siguientes ecuaciones dan a_1 en términos de a_0 , a_2 en términos de a_0 y a_1 , y así sucesivamente. Los a_n vienen por tanto determinados en función de a_0 para cada elección de m , a menos que $f(m+n) = 0$ para algún entero positivo n , en cuyo caso el proceso falla. Así pues, si $m_1 = m_2 + n$ para algún entero $n \geq 1$, la elección $m = m_1$ da una solución formal pero en general $m = m_2$ no, ya que $f(m_2 + n) = f(m_1) = 0$. Si $m_1 = m_2$, también obtenemos una sola solución formal. En todos los demás casos en que m_1 y m_2 son números reales, este procedimiento proporciona dos soluciones formales independientes. Es posible, claro está, que m_1 y m_2 sean números complejos conjugados, pero no discutiremos esta situación porque nos llevaría demasiado lejos por los vericuetos del análisis complejo. La dificultad especial aquí es que si permitimos que los m sean complejos, entonces los a_n serán complejos también, y no damos por supuesto que el lector esté familiarizado con las series de potencias de coeficientes complejos.

Estas ideas se concretan en el próximo teorema.

Teorema A. *Supongamos que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial (1) y que los desarrollos en serie de potencias (3) de $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ son válidos sobre un intervalo $|x| < R$ con $R > 0$. Sean m_1, m_2 las raíces de la ecuación indicial (5), con $m_2 \leq m_1$. Entonces la ecuación (1) tiene al menos una solución*

$$y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0) \quad (6)$$

sobre el intervalo $0 < x < R$, donde los a_n quedan determinados en términos de a_0 por la fórmula de recurrencia (4) con m sustituido por m_1 , y la serie $\sum a_n x^n$ converge para $|x| < R$. Además, si $m_1 - m_2$ no es un entero positivo o cero, la ecuación (1) tiene una segunda solución independiente

$$y_2 = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0) \quad (7)$$

sobre ese mismo intervalo, y en este caso los a_n quedan determinados en términos de a_0 por la fórmula (4) con m sustituido por m_2 , y de nuevo la serie $\sum a_n x^n$ es convergente para $|x| < R$.

En vista de lo ya hecho, la demostración de este teorema puede completarse probando que en cada caso la serie $\sum a_n x^n$ converge sobre el intervalo $|x| < R$. Los lectores interesados hallarán los detalles de este argumento en el Apéndice A. Insistimos en que en un problema específico es mucho más sencillo sustituir la serie de Frobenius general (2) en la ecuación diferencial directamente que usar la fórmula de recurrencia (4) para calcular los coeficientes. La fórmula de recurrencia encuentra su principal aplicación en la delicada demostración de convergencia relegada al Apéndice A.

Por desgracia, el Teorema A no responde la pregunta de cómo encontrar una segunda solución cuando la diferencia $m_1 - m_2$ es cero o un entero positivo. Cabe distinguir tres situaciones.

CASO A. Si $m_1 = m_2$, no puede existir una segunda solución en serie de Frobenius.

Los otros dos casos, en los cuales $m_1 - m_2$ es un entero positivo, serán más fáciles de analizar si insertamos $m = m_2$ en la fórmula de recurrencia (4) y la escribimos como

$$a_n f(m_2 + n) = -a_0(m_2 p_n + q_n) - \dots - a_{n-1}[(m_2 + n - 1)p_1 + q_1]. \quad (8)$$

Como sabemos, la dificultad en el cálculo de los a_n proviene de que $f(m_2 + n) = 0$ para un cierto entero positivo n . Los dos casos que siguen se refieren a esa situación.

CASO B. Si el miembro de la derecha de (8) no es cero cuando $f(m_2 + n) = 0$, entonces no hay manera de continuar el cálculo de los coeficientes y no puede existir una segunda solución en serie de Frobenius.

CASO C. Si el miembro de la derecha de (8) resulta ser cero cuando $f(m_2 + n) = 0$, entonces a_n está libre de restricciones y se le puede asignar cualquier valor. En particular, podemos poner $a_n = 0$ y continuar calculando los demás coeficientes sin obstrucciones posteriores. Por tanto, en este caso sí existe una segunda solución en serie de Frobenius.

Los problemas dejarán claro que las tres posibilidades se presentan en la práctica.

Los cálculos que siguen permiten descubrir la forma que tiene la segunda solución cuando $m_1 - m_2$ es un entero positivo o cero. Empezaremos definiendo un entero positivo $k = m_1 - m_2 + 1$. La ecuación indicial (5) se puede escribir como

$$(m - m_1)(m - m_2) = m^2 - (m_1 + m_2)m + m_1 m_2 = 0,$$

así que igualando los coeficientes de m se ve que $p_0 - 1 = -(m_1 + m_2)$, o sea, $m_2 = 1 - p_0 - m_1$, y se tiene $k = 2m_1 + p_0$. Mediante el método de la Sección 16 podemos hallar una segunda solución y_2 a partir de la solución ya conocida $y_1 = x^{m_1}(a_0 + a_1x + \dots)$ escribiendo $y_2 = vy_1$, donde

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x) dx} = \\ &= \frac{1}{x^{2m_1}(a_0 + a_1x + \dots)^2} e^{-\int ((p_0x) + p_1 + \dots) dx} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{x^{2m_1}(a_0 + a_1x + \dots)^2} e^{(-p_0 \log x - p_1 x - \dots)} = \\
 &= \frac{1}{x^k(a_0 + a_1x + \dots)^2} e^{(-p_1 x - \dots)} = \frac{1}{x^k} g(x).
 \end{aligned}$$

La función $g(x)$ definida por la última igualdad es obviamente analítica en $x = 0$, con $g(0) = 1/a_0^2$, luego en algún intervalo en torno al origen tenemos

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots, \quad b_0 \neq 0. \quad (9)$$

Se deduce que

$$v' = b_0 x^{-k} + b_1 x^{-k+1} + \dots + b_{k-1} x^{-1} + b_k + \dots,$$

de donde

$$v = \frac{b_0 x^{-k+1}}{-k+1} + \frac{b_1 x^{-k+2}}{-k+2} + \dots + b_{k-1} \log x + b_k x + \dots$$

e

$$\begin{aligned}
 y_2 = y_1 v &= y_1 \left(\frac{b_0 x^{-k+1}}{-k+1} + \dots + b_{k-1} \log x + b_k x + \dots \right) = \\
 &= b_{k-1} y_1 \log x + x^{m_1} (a_0 + a_1 x + \dots) \left(\frac{b_0 x^{-k+1}}{-k+1} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Si sacamos el factor x^{-k+1} fuera de esta serie, usamos que $m_1 - k + 1 = m_1^2$ y multiplicamos las dos series que quedan, obtenemos

$$y_2 = b_{k-1} y_1 \log x + x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (10)$$

como nuestra segunda solución.

La fórmula (10) tiene escaso valor práctico, pero ofrece varias informaciones de interés. En primer lugar, si los exponentes m_1 y m_2 son iguales, entonces $k = 1$ y $b_{k-1} = b_0 \neq 0$; así que, en tal caso, que es el Caso A de antes, el término que contiene a $\log x$ está presente en la segunda solución (10). Sin embargo, si $m_1 - m_2 = k - 1$ es un entero positivo, entonces a veces $b_{k-1} \neq 0$ y los logaritmos estarán presentes (Caso B), y a veces $b_{k-1} = 0$ y no habrá término logarítmico (Caso C). Aquí la dificultad práctica reside en que no podemos calcular de modo directo los coeficientes de (9). De todos modos, sabemos al menos que en los Casos A y B, cuando $b_{k-1} \neq 0$ y el método de Frobenius es sólo parcialmente eficaz, la forma general de una segunda solución es

$$y_2 = y_1 \log x + x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (11)$$

donde los c_n son ciertas constantes desconocidas que pueden ser determinadas sustituyendo (11) directamente a la ecuación diferencial. Nótese que esta expresión es análoga a la fórmula 29-(10) aunque algo más complicada.

PROBLEMAS

1. La ecuación

$$x^2y'' - 3xy' + (4x + 4)y = 0$$

sólo tiene una solución en forma de serie de Frobenius. Hallarla.

2. La ecuación

$$4x^2y'' - 8x^2y' + (4x^2 + 1)y = 0$$

tiene una sola solución en serie de Frobenius. Hallar la solución general.

3. Hallar dos soluciones en serie de Frobenius independientes de cada una de estas ecuaciones:

$$(a) \quad xy'' + 2y' + xy = 0; \quad (c) \quad xy'' - y' + 4x^3y = 0.$$

$$(b) \quad x^2y'' - x^2y' + (x^2 - 2)y = 0;$$

4. La ecuación de Bessel de orden $p = 1$ es

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

Probar que $m_1 - m_2 = 2$ y que la ecuación sólo tiene una solución en forma de serie de Frobenius. A continuación, hállese dicha solución.

5. La ecuación de Bessel de orden $p = \frac{1}{2}$ es

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0.$$

Probar que $m_1 - m_2 = 1$, pero que, no obstante, la ecuación posee dos soluciones independientes dadas por series de Frobenius. Hallarlas.

6. La única solución en serie de Frobenius de la ecuación de Bessel de orden $p = 0$ viene dada en el Problema 29-5. Tomándola como y_1 y sustituyendo (11) en la ecuación diferencial, obtener la segunda solución independiente

$$y_2 = y_1 \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^{2n}.$$

31. ECUACION HIPERGEOMETRICA DE GAUSS

Esta famosa ecuación diferencial es

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0, \quad (1)$$

con a , b y c constantes. Los coeficientes de (1) pueden parecer extraños, pero veremos que están perfectamente adaptados para su uso en la resolución de una amplia gama de situaciones. La mejor manera de entender esto consiste en resolver la ecuación por nosotros mismos y ver qué ocurre.

Tenemos

$$P(x) = \frac{c - (a+b+1)x}{x(1-x)} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{-ab}{x(1-x)},$$

de modo que $x=0$ y $x=1$ son los únicos puntos singulares sobre el eje x . Además,

$$\begin{aligned} xP(x) &= \frac{c - (a+b+1)x}{1-x} = [c - (a+b+1)x](1+x+x^2+\dots) = \\ &= c + [c - (a+b+1)]x + \dots \end{aligned}$$

y

$$x^2Q(x) = \frac{-abx}{1-x} = -abx(1+x+x^2+\dots) = -abx - abx^2 - \dots,$$

luego $x=0$ (y análogamente $x=1$) es un punto singular regular. Estas expresiones muestran que $p_0 = c$ y $q_0 = 0$, de manera que la ecuación indicial es

$$m(m-1) + mc = 0 \quad \text{o sea} \quad m[m - (1-c)] = 0$$

y los exponentes son $m_1 = 0$ y $m_2 = 1-c$. Si $1-c$ no es un entero positivo, o sea, si c no es un entero negativo o cero, el Teorema 30-A garantiza que (1) tiene una solución de la forma

$$y = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \quad (2)$$

donde a_0 es una constante no nula. Sustituyendo esto en (1) e igualando a cero el coeficiente de x^n obtenemos la siguiente fórmula de recurrencia para los a_n :

$$a_{n+1} = \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} a_n. \quad (3)$$

Ahora hacemos $a_0 = 1$ y calculamos los demás a_n sucesivamente:

$$a_1 = \frac{ab}{1 \cdot c}, \quad a_2 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2c(c+1)}, \quad a_3 = \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3c(c+1)(c+2)}, \dots$$

Con estos coeficientes, (2) se convierte en

$$\begin{aligned} y &= 1 + \frac{ab}{1 \cdot c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2c(c+1)}x^2 + \\ &\quad + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}x^n. \end{aligned} \quad (4)$$

Esta se conoce como la *serie hipergeométrica* y se denota por el símbolo $F(a, b, c, x)$. Debe su nombre a que generaliza la familiar serie geométrica como sigue: cuando $a = 1$ y $b = c$, obtenemos

$$F(1, b, b, x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Si a o b son un entero negativo o cero, la serie (4) termina y pasa a ser un polinomio; de lo contrario, el criterio del cociente demuestra que converge para $|x| < 1$, ya que (3) da

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \left| \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} \right| |x| \rightarrow |x| \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Este comportamiento convergente podía haberse deducido de antemano del hecho de que el punto singular más próximo al origen es $x = 1$. En consecuencia, cuando c no es un entero negativo o cero, $F(a, b, c, x)$ es una función analítica, que se denomina *función hipergeométrica*, sobre el intervalo $|x| < 1$. Es la solución particular más sencilla de la ecuación hipergeométrica. La función hipergeométrica tiene muchas propiedades, de entre las cuales la más evidente es que queda inalterada si se intercambian a y b : $F(a, b, c, x) = F(b, a, c, x)$ ⁸.

Si $1 - c$ no es entero negativo o cero, lo que significa que c no es entero positivo, el Teorema 30-A nos dice que existe una segunda solución independiente de (1) cerca de $x = 0$ con exponente $m_2 = 1 - c$. Esta solución puede hallarse directamente sin más que sustituir

$$y = x^{1-c}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$$

⁸ Un resumen de sus propiedades puede verse en A. Erdélyi (ed.), *Higher Transcendental Functions*, vol. I, págs. 56-119, McGraw-Hill, Nueva York, 1953.

en (1) y calcular los coeficientes. Ahora bien, es más instructivo cambiar la variable dependiente en (1) escribiendo

$$y = x^{1-c} z.$$

Una vez efectuadas las manipulaciones pertinentes, que el estudiante hará sin dificultad, la ecuación (1) pasa a escribirse así:

$$\begin{aligned} x(1-x)z'' + [(2-c) - ([a-c+1] + [b-c+1] + 1)x]z' - \\ - (a-c+1)(b-c+1)z = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

que es la ecuación hipergeométrica con las constantes a , b y c sustituidas por $a-c+1$, $b-c+1$ y $2-c$. Ya sabemos que (5) admite la solución en serie de potencias

$$z = F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

en las proximidades del origen, de modo que la segunda solución requerida es

$$y = x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x).$$

De acuerdo con ello, cuando c no es entero tenemos

$$y = c_1 F(a, b, c, x) + c_2 x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x) \quad (6)$$

como solución general de la ecuación hipergeométrica cerca del punto singular $x = 0$.

En general, la solución anterior es válida sólo en torno al origen. Ahora resolveremos (1) cerca del punto singular $x = 1$. El procedimiento más simple consiste en obtener esta solución a partir de la ya conocida, introduciendo una nueva variable independiente $t = 1 - x$. Eso hace que $x = 1$ corresponda a $t = 0$ y transforma (1) en

$$t(1-t)y'' + [(a+b-c+1) - (a+b+1)t]y' - aby = 0,$$

donde las primas significan derivadas respecto a t . Como esta es una ecuación hipergeométrica, su solución general cerca de $t = 0$ se desprende de (6) sin más que sustituir x por t y c por $a+b-c+1$; y cuando t es sustituido por $1-x$, vemos que la solución general de (1) en las proximidades de $x = 1$ es

$$\begin{aligned} y = c_1 F(a, b, a+b-c+1, 1-x) + \\ + c_2 (1-x)^{c-a-b} F(c-b, c-a, c-a-b+1, 1-x). \end{aligned} \quad (7)$$

En este caso es necesario suponer que $c-a-b$ no es entero.

Las fórmulas (6) y (7) muestran que es posible expresar, adaptando las

constantes, la solución general de esta ecuación cerca de cada uno de sus puntos singulares en términos de una única función F . Algo mucho más importante es cierto, puesto que estas ideas son aplicables a una amplia clase de ecuaciones diferenciales. La clave radica en la siguiente propiedad general de la ecuación hipergeométrica: los coeficientes de y'' , y' e y son polinomios de grados 2, 1 y 0, y el primero de esos polinomios tiene ceros reales distintos. Toda ecuación diferencial con estas características puede transformarse en una ecuación hipergeométrica por un cambio lineal de la variable independiente, y por tanto puede ser resuelta cerca de sus puntos singulares en términos de la función hipergeométrica.

Para precisar más este comentario, consideremos brevemente la ecuación general de este tipo,

$$(x - A)(x - B)y'' + (C + Dx)y' + Ey = 0, \quad (8)$$

donde $A \neq B$. Si hacemos el cambio de variable independiente

$$t = \frac{x - A}{B - A},$$

entonces $x = A$ corresponde a $t = 0$ y $x = B$ a $t = 1$. Tras un sencillo cálculo se ve que la ecuación (8) adopta la forma

$$t(1 - t)y'' + (F + Gt)y' + Hy = 0,$$

donde F , G y H son ciertas combinaciones de las constantes de (8) y las primas indican derivación respecto a t . Esta es una ecuación hipergeométrica con a , b y c definidas por

$$F = c, \quad G = -(a + b + 1), \quad H = -ab,$$

y puede ser resuelta, en consecuencia, cerca de $t = 0$ y de $t = 1$ en términos de la función hipergeométrica. Lo cual significa que (8) puede ser resuelta en términos de esa misma función cerca de $x = A$ y $x = B$.

Las ideas recién expuestas permiten comprender la gran versatilidad de la función hipergeométrica $F(a, b, c, x)$ en el terreno de las ecuaciones diferenciales. Veremos también (en el Problema 1) que la flexibilidad remanente en las tres constantes a , b y c permite a las funciones hipergeométricas incluir como casos especiales a la mayoría de las funciones familiares del análisis elemental. Esta función fue conocida por Euler, quien descubrió algunas de sus propiedades; pero quien la estudió sistemáticamente en el contexto de la ecuación hipergeométrica fue Gauss, quien con tal motivo dio el primer tratamiento satisfactorio de la convergencia de una serie infinita. El trabajo de Gauss ejerció gran influencia histórica, ya que inició desarrollos de largo alcance en muchas ramas del análisis, no ya sólo en teoría de series, sino en la teoría general de

ecuaciones diferenciales y de funciones de una variable compleja. La función hipergeométrica sigue siendo importante en la matemática moderna a causa de su poder unificador, dado que muchas de las principales funciones especiales del análisis avanzado están relacionadas con ella⁹.

PROBLEMAS

1. Comprobar estas igualdades examinando los desarrollos en serie de las funciones de la izquierda:

$$\begin{aligned}(a) \quad & (1+x)^p = F(-p, b, b, -x); \\(b) \quad & \log(1+x) = xF(1, 1, 2, -x); \\(c) \quad & \operatorname{sen}^{-1} x = xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right); \\(d) \quad & \operatorname{tg}^{-1} x = xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x^2\right).\end{aligned}$$

Es también cierto que

$$\begin{aligned}(e) \quad e^x &= \lim_{b \rightarrow \infty} F\left(a, b, a, \frac{x}{b}\right); \\(f) \quad \operatorname{sen} x &= x \left[\lim_{a \rightarrow \infty} F\left(a, a, \frac{3}{2}, \frac{-x^2}{4a^2}\right) \right]; \\(g) \quad \cos x &= \lim_{a \rightarrow \infty} F\left(a, a, \frac{1}{2}, \frac{-x^2}{4a^2}\right).\end{aligned}$$

2. Hallar la solución general de cada una de estas ecuaciones diferenciales en las proximidades del punto singular indicado:

$$\begin{aligned}(a) \quad & x(1-x)y'' + \left(\frac{3}{2} - 2x\right)y' + 2y = 0, \quad x = 0; \\(b) \quad & (2x^2 + 2x)y'' + (1 + 5x)y' + y = 0, \quad x = 0; \\(c) \quad & (x^2 - 1)y'' + (5x + 4)y' + 4y = 0, \quad x = -1; \\(d) \quad & (x^2 - x - 6)y'' + (5 + 3x)y' + y = 0, \quad x = 3.\end{aligned}$$

3. En el Problema 28-6 se discutió la ecuación de Chebyshev

$$(1-x^2)y'' - xy' + p^2y = 0,$$

donde p es una constante no negativa. Transformarla en una ecuación hipergeométrica haciendo el cambio $t = 1/2(1-x)$, y probar que su solución general cerca de $x = 1$ es

$$y = c_1 F\left(p, -p, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-x}{2}\right)^{1/2} F\left(p + \frac{1}{2}, -p + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1-x}{2}\right).$$

⁹ El Apéndice C contiene un resumen de la vida y obra de Gauss.

4. Consideremos la ecuación diferencial

$$x(1-x)y'' + [p - (p+2)x]y' - py = 0,$$

donde p es constante.

- (a) Si p no es entero, hallar la solución general cerca de $x = 0$ en términos de funciones hipergeométricas.
- (b) Escribir en términos de funciones elementales la solución encontrada en (a).
- (c) Cuando $p = 1$, la ecuación diferencial se convierte en

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0,$$

y la solución de (b) ya no es la solución general. Hallar la solución general en este caso por el método de la Sección 16.

5. Algunas ecuaciones diferenciales son de tipo hipergeométrico aunque no lo parecen. Hallar la solución general de

$$(1-e^x)y'' + \frac{1}{2}y' + e^xy = 0$$

cerca del punto singular $x = 0$ mediante el cambio de variable $t = e^x$.

- 6. (a) Probar que $F'(a, b, c, x) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1, x)$.
- (b) Aplicando la fórmula de derivación en (a) al resultado del Problema 3, demostrar que las únicas soluciones de la ecuación de Chebyshev cuyas derivadas son acotadas en torno a $x = 1$ son $y = c_1 F\left(p, -p, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$. Concluir que las únicas soluciones polinómicas de la ecuación de Chebyshev son los múltiplos constantes de $F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$, donde n es un entero no negativo.

El *polinomio de Chebyshev* de grado n se denota por $T_n(x)$ y se define como $T_n(x) = F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)^{10}$. Una interesante aplicación de estos polinomios en teoría de aproximaciones se discute en el Apéndice D.

32. EL PUNTO DEL INFINITO

Tanto en física como en matemática pura es deseable con frecuencia estudiar las soluciones de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

¹⁰ Se utiliza esta notación porque inicialmente el nombre de Chebyshev se transcribía como Tchebychev, Tchebycheff, o Tschebycheff.

para valores grandes de la variable independiente. Por ejemplo, si la variable es el tiempo, podemos estar interesados en saber cómo se comporta en tiempos futuros muy lejanos el sistema físico descrito por (1), cuando ya las perturbaciones transitorias han desaparecido.

Podemos adaptar nuestras ideas previas a este propósito más amplio sin más que estudiar las soluciones cerca del *punto del infinito*. El procedimiento es muy simple, ya que si hacemos el cambio de variable

$$t = \frac{1}{x}, \quad (2)$$

entonces los x grandes corresponden a t pequeños. Por consiguiente, si aplicamos (2) a (1), resolvemos la ecuación transformada cerca de $t = 0$, y entonces sustituimos t por $1/x$ en estas soluciones, tendremos soluciones de (1) que son válidas para grandes valores de x . Con el fin de llevar a cabo este programa, necesitaremos las fórmulas

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -t^2 \frac{dy}{dt} \quad (3)$$

e

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \left(-t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt} \right) (-t^2). \quad (4)$$

Insertando estas expresiones en (1) y usando primas para denotar derivadas respecto a t , la (1) pasa a convertirse en

$$y'' + \left[\frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2} \right] y' + \frac{Q(1/t)}{t^4} y = 0. \quad (5)$$

Decimos que la ecuación (1) tiene $x = \infty$ como punto ordinario, punto singular regular con exponentes m_1 y m_2 , o punto singular irregular, si el punto $t = 0$ tiene ese carácter para la ecuación transformada (5).

A título de ilustración sencilla, consideremos la ecuación de Euler

$$y'' + \frac{4}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0. \quad (6)$$

Comparando (6) y (5) deducimos que la ecuación transformada es

$$y'' - \frac{2}{t} y' + \frac{2}{t^2} y = 0. \quad (7)$$

Es claro que $t = 0$ es un punto singular regular de (7), con ecuación indicial

$$m(m-1) - 2m + 2 = 0$$

y exponentes $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$. Ello significa que (6) tiene a $x = \infty$ como punto singular regular con exponentes 2 y 1.

Nuestro ejemplo principal es la ecuación hipergeométrica

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0. \quad (8)$$

Ya sabemos que (8) tiene dos puntos singulares regulares: $x = 0$, con exponentes 0 y $1 - c$, y $x = 1$ con exponentes 0 y $c - a - b$. Para determinar la naturaleza del punto $x = \infty$ sustituimos (3) y (4) directamente en (8). Tras reordenar, encontramos que la ecuación transformada es

$$y'' + \left[\frac{(1-a-b) - (2-c)t}{t(1-t)} \right] y' + \frac{ab}{t^2(1-t)} y = 0. \quad (9)$$

Esta ecuación tiene en $t = 0$ un punto singular regular con ecuación indicial

$$m(m-1) + (1-a-b)m + ab = 0,$$

es decir,

$$(m-a)(m-b) = 0.$$

Eso demuestra que los exponentes de la ecuación (9) en $t = 0$ son a y b , de modo que la ecuación (8) tiene en $x = \infty$ un punto singular regular con exponentes a y b . En conclusión, la ecuación hipergeométrica (8) tiene exactamente tres puntos singulares regulares: 0, 1 y ∞ , con exponentes respectivos 0 y $1 - c$, 0 y $c - a - b$, y a y b . En el Apéndice E demostraremos que la forma de la ecuación hipergeométrica queda completamente caracterizada al especificar estos tres puntos singulares regulares junto con el requisito adicional de que al menos uno de los exponentes debe ser 0 en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

Otra ecuación diferencial clásica de considerable importancia es la *ecuación hipergeométrica confluyente*

$$xy'' + (c-x)y' - ay = 0. \quad (10)$$

Para entender de dónde surge y el porqué de su denominación, consideremos la ecuación hipergeométrica ordinaria (8) en la forma

$$s(1-s) \frac{d^2y}{ds^2} + [c - (a+b+1)s] \frac{dy}{ds} - aby = 0. \quad (11)$$

Si cambiamos la variable independiente de s a $x = bs$, obtenemos

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds} = b \frac{dy}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{ds^2} = b^2 \frac{d^2y}{dx^2},$$

y (11) se convierte en

$$x\left(1 - \frac{x}{b}\right)y'' + \left[(c-x) - \frac{(a+1)x}{b}\right]y' - ay = 0, \quad (12)$$

donde las primas indican derivación respecto a x . La ecuación (12) tiene puntos singulares regulares en $x = 0$, $x = b$ y $x = \infty$; difiere de (11) en que el punto singular $x = b$ ahora es móvil. Si hacemos $b \rightarrow \infty$, entonces (12) se convierte en (10). El punto singular en b ha colapsado evidentemente con el del infinito, y esta confluencia de dos puntos singulares regulares en ∞ se ve fácilmente que produce allí un punto singular irregular (Problema 3).

PROBLEMAS

1. Usar (3) y (4) para determinar la naturaleza del punto $x = \infty$ para
 - la ecuación de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0$;
 - la ecuación de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$.
2. Probar que el cambio $y = t^a w$ transforma la ecuación (9) en la ecuación hipergeométrica

$$t(1-t)w'' + \{(1+a-b) - [a + (1+a-c) + 1]t\}w' - a(1+a-c)w = 0.$$

Si a y b no son iguales ni difieren en un entero, concluir que la ecuación hipergeométrica (8) tiene las siguientes soluciones independientes para valores grandes de x :

$$y_1 = \frac{1}{x^a} F\left(a, 1+a-c, 1+a-b, \frac{1}{x}\right)$$

e

$$y_2 = \frac{1}{x^b} F\left(b, 1+b-c, 1+b-a, \frac{1}{x}\right).$$

3. Comprobar que la ecuación hipergeométrica confluente (10) tiene $x = \infty$ como punto singular irregular.
4. Verificar que la ecuación hipergeométrica confluente (10) tiene en $x = 0$ un punto singular regular con exponentes 0 y $1 - c$. Si c no es un entero negativo o cero, demostrar que la solución en serie de Frobenius correspondiente al exponente 0 es

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)} x^n.$$

La función definida por esta serie se conoce como *función hipergeométrica confluente*, y se suele denotar por $F(a, c, x)$.

5. La *ecuación de Laguerre* es

$$xy'' + (1 - x)y' + py = 0,$$

con p constante¹¹. Usar el Problema 4 para probar que las únicas soluciones cerca del origen son múltiplos constantes de $F(-p, 1, x)$ y que estas soluciones son polinómicas si p es un entero no negativo. Las funciones $L_n(x) = F(-n, 1, x)$, donde $n = 0, 1, 2, \dots$, se llaman *polinomios de Laguerre*. Tienen importantes aplicaciones en mecánica cuántica al estudiar el átomo de hidrógeno.

APENDICE A. DOS DEMOSTRACIONES DE CONVERGENCIA

Demostración del Teorema 28-A (conclusión). Nuestra hipótesis es que las series

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad y \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (1)$$

convergen para $|x| < R$, $R > 0$. Hemos de probar que la serie

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2)$$

converge al menos sobre ese mismo intervalo si a_0 y a_1 son arbitrarios y a_{n+2} se define recurrentemente para $n \geq 0$ por

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = - \sum_{k=0}^n [(k+1)p_{n-k}a_{k+1} + q_{n-k}a_k]. \quad (3)$$

Sea r un número positivo tal que $r < R$. Puesto que la serie (1) es convergente para $x = r$ y los términos de una serie convergente tienden a cero y son, por tanto, acotados, existe una constante $M > 0$ tal que

$$|p_n|r^n \leq M \quad y \quad |q_n|r^n \leq M$$

para todo n . Utilizando estas desigualdades en (3) vemos que

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)|a_{n+2}| &\leq \frac{M}{r^n} \sum_{k=0}^n [(k+1)|a_{k+1}| + |a_k|]r^k \leq \\ &\leq \frac{M}{r^n} \sum_{k=0}^n [(k+1)|a_{k+1}| + |a_k|]r^k + M|a_{n+1}|r, \end{aligned}$$

¹¹ Edmond Laguerre (1834-1886) fue profesor en el Collège de France en París, y trabajó sobre todo en geometría y en teoría de ecuaciones. Fue uno de los primeros en hacer notar que una «razonable» función distancia (métrica) puede definirse sobre el plano coordenado de la geometría analítica de más de una manera.

donde el término $M|a_{n+1}|r$ se ha insertado porque nos será necesario más tarde. Ahora definimos $b_0 = |a_0|$, $b_1 = |a_1|$ y b_{b+2} (para $n \geq 0$) por

$$(n+1)(n+2)b_{n+2} = \frac{M}{r^n} \sum_{k=0}^n [(k+1)b_{k+1} + b_k]r^k + Mb_{n+1}r. \quad (4)$$

Es claro que $0 \leq |a_n| \leq b_n$ para todo n . Intentemos aprender algo sobre los valores de x en los que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (5)$$

converge. A tal fin, necesitamos información acerca del comportamiento del cociente b_{n+1}/b_n cuando $n \rightarrow \infty$. Adquirimos dicha información del siguiente modo. Sustituyendo n en (4) primero por $n-1$ y luego por $n-2$ resulta

$$n(n+1)b_{n+1} = \frac{M}{r^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)n_{k+1} + b_k]r^k + Mb_nr$$

y

$$(n-1)nb_n = \frac{M}{r^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} [(k+1)b_{k+1} + b_k]r^k + Mb_{n-1}r.$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por r y haciendo uso de la segunda obtenemos

$$\begin{aligned} rn(n+1)b_{n+1} &= \frac{M}{r^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} [(k+1)b_{k+1} + b_k]r^k + rM(nb_n + b_{n-1}) + Mb_nr^2 = \\ &= (n-1)nb_n - Mb_{n-1}r + rM(nb_n + b_{n-1}) + Mb_nr^2 = \\ &= [(n-1)n + rMn + Mr^2]b_n, \end{aligned}$$

luego

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n-1)n + rMn + Mr^2}{rn(n+1)}.$$

Eso nos permite concluir que

$$\left| \frac{b_{n+1}x^{n+1}}{b_n x^n} \right| = \frac{b_{n+1}}{b_n} |x| \rightarrow \frac{|x|}{r}.$$

La serie (5) converge, por tanto, para $|x| < r$, luego por la desigualdad $|a_n| \leq b_n$ y el criterio de comparación, la serie (2) también converge para $|x| < r$. Al

ser r un número positivo arbitrario menor que R , podemos concluir que (2) converge para $|x| < R$, lo que termina la demostración.

Demostración del Teorema 30-A (conclusión). El argumento es similar al empleado para el Teorema 28-A, pero sus detalles difieren lo suficiente como para merecer consideración aparte. Suponemos que las series

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (6)$$

convergen para $|x| < R$, con $R > 0$. La ecuación indicial es

$$f(m) = m(m - 1) + mp_0 + q_0 = 0, \quad (7)$$

y consideramos sólo el caso en que (7) posee dos raíces reales m_1 y m_2 con $m_2 \leq m_1$. La serie cuya convergencia debemos examinar es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (8)$$

donde a_0 es una constante arbitraria no nula, y los demás a_n se definen de forma recurrente en términos de a_0 mediante

$$f(m+n)a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)p_{n-k} + q_{n-k}]. \quad (9)$$

Queremos demostrar que la serie (8) es convergente para $|x| < R$ si $m = m_1$, y también si $m = m_2$ y $m_1 - m_2$ no es un entero positivo.

Comenzamos por hacer notar que $f(m)$ puede escribirse como

$$f(m) = (m - m_1)(m - m_2) = m^2 - (m_1 + m_2)m + m_1 m_2.$$

Con un poco de cálculo eso nos permite escribir

$$f(m_1 + n) = n(n + m_1 - m_2)$$

y

$$f(m_2 + n) = n(n + m_2 - m_1);$$

y en consecuencia

$$|f(m_1 + n)| \geq n(n - |m_1 - m_2|) \quad (10)$$

y

$$|f(m_2 + n)| \geq n(n - |m_2 - m_1|). \quad (11)$$

Sea r un número positivo tal que $r < R$. Como la serie (6) converge para $x = r$, existe una constante $M > 0$ para la que

$$|p_n|r^n \leq M \quad \text{y} \quad |q_n|r^n \leq M \quad (12)$$

para todo n . Si ponemos $m = m_1$ en (9) y usamos (10) y (12), obtenemos

$$n(n - |m_1 - m_2|)|a_n| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1).$$

A continuación definimos una sucesión $\{b_n\}$ escribiendo

$$b_n = |a_n| \quad \text{para} \quad 0 \leq n \leq |m_1 - m_2|$$

y

$$n(n - |m_1 - m_2|)b_n = M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1) \quad (13)$$

para $n > |m_1 - m_2|$. Es claro que $0 \leq |a_n| \leq b_n$ para todo n . Probaremos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (14)$$

es convergente para $|x| < r$, y para completar esto buscaremos una expresión conveniente para el cociente b_{n+1}/b_n . Sustituyendo n por $n + 1$ en (13), multiplicando por r y usando (13) para simplificar el resultado se llega a

$$r(n+1)(n+1 - |m_1 - m_2|)b_{n+1} = n(n - |m_1 - m_2|)b_n + Mb_n(|m_1| + n + 1),$$

de manera que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n(n - |m_1 - m_2|) + M(|m_1| + n + 1)}{r(n+1)(n+1 - |m_1 - m_2|)}.$$

Por tanto,

$$\left| \frac{b_{n+1}x^{n+1}}{b_n x^n} \right| = \frac{b_{n+1}}{b_n} |x| \rightarrow \frac{|x|}{r},$$

luego (14) converge para $|x| < r$. Se sigue ahora de $0 \leq |a_n| \leq b_n$ que también (8) converge para $|x| < r$; y puesto que r era un número positivo arbitrario menor que R , se deduce que (8) converge para $|x| < R$. Si m_1 se cambia en todas partes por m_2 y se usa (11) en vez de (10), los mismos pasos prueban

que en este caso la serie (8) es convergente también para $|x| < R$, supuesto naturalmente que $m_1 - m_2$ no es un entero positivo para que la serie (8) esté bien definida.

APENDICE B. POLINOMIOS DE HERMITE Y MECANICA CUANTICA

La aplicación aislada más relevante de los polinomios de Hermite se encuentra en la teoría del oscilador armónico lineal en mecánica cuántica. Una ecuación diferencial que aparece en esa teoría y está íntimamente relacionada con la ecuación de Hermite (Problema 28-7) es

$$\frac{d^2w}{dx^2} + (2p + 1 - x^2)w = 0, \quad (1)$$

con p constante. Por razones que discutiremos al final de este apéndice, los físicos se interesan sólo en soluciones de (1) que tiendan a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$. Si intentamos resolver (1) directamente por series de potencias, llegamos a una recurrencia de tres términos para los coeficientes, lo que resulta demasiado inconveniente como para seguir ese camino. Con el fin de simplificar el problema, introducimos una nueva variable dependiente y por medio de

$$w = ye^{-x^2/2}. \quad (2)$$

Esto transforma (1) en

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2py = 0, \quad (3)$$

que es la ecuación de Hermite. Las soluciones deseadas de (1) corresponden por tanto a las soluciones de (3) que crecen en magnitud (cuando $|x| \rightarrow \infty$) más despacio que $e^{x^2/2}$, y veremos que éstas son esencialmente los polinomios de Hermite.

Los físicos motivan la transformación (2) por el ingenioso argumento siguiente. Para x grande, la constante $2p + 1$ en la ecuación (1) es despreciable frente a x^2 , de modo que (1) es aproximadamente

$$\frac{d^2w}{dx^2} = x^2w.$$

No cuesta mucho trabajo sospechar que las funciones $w = e^{\pm x^2/2}$ pueden ser soluciones de esta ecuación. Ahora observamos que

$$w' = \pm xe^{\pm x^2/2} \quad y \quad w'' = x^2e^{\pm x^2/2} \pm e^{\pm x^2/2},$$

y como para grandes x el segundo término de w'' puede despreciarse frente al primero, parece que $w = e^{x^2/2}$ y $w = e^{-x^2/2}$ son realmente «soluciones aproximadas» de (1). La primera de ellas se descarta porque no tiende a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$. Es por tanto razonable esperar que la solución exacta de (1) tenga la forma (2), donde confiamos que la función $y(x)$ tenga estructura más sencilla que $w(x)$.

Se opine lo que se opine de este argumento, lo cierto es que funciona. Porque hemos visto en el Problema 28-7 que la ecuación de Hermite (3) tiene una fórmula de recurrencia de dos términos

$$a_{n+2} = -\frac{2(p-n)}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad (4)$$

y que esta fórmula genera dos soluciones independientes

$$y_1(x) = 1 - \frac{2p}{2!} x^2 + \frac{2^2 p(p-2)}{4!} x^4 - \frac{2^3 p(p-2)(p-4)}{6!} x^6 + \dots \quad (5)$$

e

$$\begin{aligned} y_2(x) = & x - \frac{2(p-1)}{3!} x^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!} x^5 - \\ & - \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!} x^7 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

cuyas series convergen para todo x .

Comparemos ahora los ritmos de crecimiento de las funciones $y_1(x)$ y $e^{x^2/2}$. Deseamos demostrar que

$$\frac{y_1(x)}{e^{x^2/2}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty$$

si y sólo si la serie de $y_1(x)$ termina y se convierte en un polinomio, es decir, si y sólo si el parámetro p toma uno de los valores 0, 2, 4, ... La parte «si» es evidente por la regla de L'Hospital. Para demostrar la parte «sólo si», suponemos que $p \neq 0, 2, 4, \dots$, y vamos a ver que en tal caso el cociente anterior no tiende a cero. Para ello usaremos el hecho de que $y_1(x)$ tiene la forma $y_1(x) = \sum a_{2n} x^{2n}$ con sus coeficientes determinados por (4) y la condición $a_0 = 1$, así como la expresión de $e^{x^2/2}$ como serie de potencias $e^{x^2/2} = \sum b_{2n} x^{2n}$, donde $b_{2n} = 1/(2^n n!)$, así que

$$\frac{y_1(x)}{e^{x^2/2}} = \frac{a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_{2n} x^{2n} + \dots}{b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \dots + b_{2n} x^{2n} + \dots}.$$

La fórmula (4) nos dice que todos los coeficientes en el numerador que tengan subíndices suficientemente altos tienen el mismo signo, así que sin pérdida de generalidad pueden suponerse positivos. Para probar que nuestro cociente no tiende a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$, bastará, por tanto, ver que $a_{2n} > b_{2n}$ si n es suficientemente grande. Para establecer ese hecho, comenzamos observando que

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = -\frac{2(p-2n)}{(2n+1)(2n+2)} \quad \text{y} \quad \frac{b_{2n+2}}{b_{2n}} = \frac{1}{2(n+1)},$$

de donde

$$\frac{a_{2n+2}/a_{2n}}{b_{2n+2}/b_{2n}} = -\frac{2(p-2n)2(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow 2.$$

Esto implica que

$$\frac{a_{2n+2}}{b_{2n+2}} > \frac{3}{2} \cdot \frac{a_{2n}}{b_{2n}}$$

para todo n suficientemente grande. Si N es cualquiera de esos n , una aplicación reiterada de esta desigualdad hace ver que

$$\frac{a_{2N+2k}}{b_{2N+2k}} > \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{a_{2N}}{b_{2N}} > 1$$

para todo k suficientemente grande, luego $a_{2n}/b_{2n} > 1$, o sea, $a_{2n} > b_{2n}$ si n es lo bastante grande. El argumento anterior muestra que $y_1(x)e^{-x^2/2} \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$ si y sólo si el parámetro p tiene uno de los valores 0, 2, 4, ... Un razonamiento similar proporciona la misma conclusión para $y_2(x)e^{-x^2/2}$ (con $p = 1, 3, 5, \dots$), de modo que las deseadas soluciones de la ecuación de Hermite son múltiplos constantes de los polinomios de Hermite $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, ... definidos en el Problema 28-7.

La función generatriz y la fórmula de Rodrigues. Tras ver cómo aparecen los polinomios de Hermite, volvamos a considerar sus propiedades más útiles. La relevancia de tales propiedades quedará patente al final de este apéndice.

Estos polinomios se definen con frecuencia por medio del siguiente desarrollo en serie de potencias:

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = H_0(x) + H_1(x)t + \frac{H_2(x)}{2!} t^2 + \dots \quad (7)$$

La función e^{2xt-t^2} se llama la *función generatriz* de los polinomios de Hermite. Esta definición tiene la ventaja de su eficiencia para deducir propiedades de

los $H_n(x)$ y la debilidad de carecer de motivación por completo. Por tanto, deduciremos (7) de las series solución (5) y (6).

Todas las soluciones polinómicas de (3) se obtienen de estas series sustituyendo p por un entero $n \geq 0$ y multiplicando por una constante arbitraria. Todas ellas tienen la forma

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \dots + a_{n-6}x^{n-6} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-2}x^{n-2} + a_nx^n = \\ &= a_nx^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-6}x^{n-6} + \dots, \end{aligned}$$

donde la suma final termina con a_0 o con a_1 según que n sea par o impar, y sus coeficientes están relacionados por

$$a_{k+2} = -\frac{2(n-k)}{(k+1)(k+2)} a_k. \quad (8)$$

Encontraremos a_{n-2} , a_{n-4} , ... en términos de a_n , y a tal fin cambiamos en (8) k por $k-2$ con lo que obtenemos

$$a_k = -\frac{2(n-k+2)}{(k-1)k} a_{k-2}$$

$$a_{k-2} = -\frac{k(k-1)}{2(n-k+2)} a_k.$$

Haciendo k igual a n , $n-2$, $n-4$, etc., obtenemos

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2 \cdot 2} a_n,$$

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4} a_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2 \cdot 2 \cdot 4} a_n,$$

$$a_{n-6} = -\frac{(n-4)(n-5)}{2 \cdot 6} a_{n-4} = -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} a_n,$$

y así sucesivamente, luego

$$\begin{aligned} h_n(x) &= a_n \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2 \cdot 2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2 \cdot 2 \cdot 4} x^{n-4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} x^{n-6} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-2k+1)}{2^k \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2k)} x^{n-2k} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Esta expresión se puede escribir

$$h_n(x) = a_n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{2^{2k} k! (n-2k)!} x^{n-2k},$$

donde $\lfloor n/2 \rfloor$ es la notación usual para el mayor entero $\leq n/2$. Para obtener el n -ésimo polinomio de Hermite $H_n(x)$ ponemos $a_n = 2^n$ obteniendo

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}. \quad (9)$$

Esta elección del valor de a_n es puramente cuestión de conveniencia; logra simplificar las fórmulas que traducen las diversas propiedades de los polinomios de Hermite.

Para hacer la transición de (9) a (7) vamos a exponer una pequeña discrepancia. La fórmula que define el producto de dos series de potencias,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} \right) t^n,$$

no es conveniente cuando la primera serie contiene sólo potencias pares de t :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = ?.$$

Lo que queremos hacer aquí es recolectar todas las n -ésimas potencias de t de todos los posibles productos $a_k t^{2k} b_j t^j$, así que $2k + j = n$ y los términos que consideramos son $a_k t^{2k} b_{n-2k} t^{n-2k}$. Las restricciones son $k \geq 0$ y $n - 2k \geq 0$, luego $0 \leq k \leq n/2$; y para cada $n \geq 0$ vemos que k varía desde 0 hasta el mayor entero $\leq n/2$. Eso da la fórmula para el producto

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_k b_{n-2k} \right) t^n. \quad (10)$$

Si ahora insertamos (9) en el lado derecho de (7) y usamos (10), obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} \right] t^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} t^n \right] = \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2xt)^n}{n!} \right] = e^{-t^2} e^{2xt} = e^{2xt-t^2}, \end{aligned}$$

que establece (7).

Como aplicación de (7) vamos a probar la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (11)$$

A la vista de la fórmula 26-(9) para los coeficientes de una serie de potencias, (7) da

$$H_n(x) = \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2xt-t^2} \right)_{t=0} = e^{x^2} \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right)_{t=0}.$$

Introduciendo una nueva variable $z = x - t$ y usando $\partial/\partial t = -(\partial/\partial z)$, como $t = 0$ corresponde a $z = x$, la expresión última se convierte en

$$(-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \right)_{z=x} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

y la demostración está terminada.

Ortogonalidad. Sabemos que para cada entero n no negativo, la función

$$w_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x), \quad (12)$$

llamada *función de Hermite de orden n*, tiende a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$ y es una solución de la ecuación diferencial

$$w_n'' + (2n + 1 - x^2)w_n = 0. \quad (13)$$

Una importante propiedad de estas funciones es

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_m w_n dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad \text{si } m \neq n. \quad (14)$$

Esta relación se suele expresar diciendo que las funciones de Hermite son *ortogonales* sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Para demostrar (14) comenzaremos escribiendo la ecuación que satisface $w_m(x)$,

$$w_m'' + (2m + 1 - x^2)w_m = 0. \quad (15)$$

Multiplicando (13) por w_m y (15) por w_n , y restando, llegamos a

$$\frac{d}{dx} (w_n' w_m - w_m' w_n) + 2(n - m)w_m w_n = 0.$$

Integrando esa ecuación desde $-\infty$ hasta ∞ y recordando que $w'_n w_m - w'_m w_n$ se anula en ambos límites de integración vemos que

$$2(n-m) \int_{-\infty}^{\infty} w_m w_n dx = 0,$$

que implica (14).

Necesitaremos asimismo saber que el valor de la integral en (14) cuando $n = m$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad (16)$$

Para verlo, usamos la fórmula de Rodrigues (11) e integramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx$$

por partes, con

$$\begin{aligned} u &= H_n(x), & du &= H'_n(x) dx, \\ dv &= \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx, & v &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Como uv es el producto de e^{-x^2} y de un polinomio, se anula en ambos límites y

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} H'_n(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx = \\ &= (-1)^{n+2} \int_{-\infty}^{\infty} H''_n(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} e^{-x^2} dx = \\ &= \dots = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(x) e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, el término que contiene la mayor potencia de x en $H_n(x)$ es $2^n x^n$, de manera que $H_n^{(n)}(x) = 2^n n!$ y la última integral es

$$2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = (2^n n!) 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi},$$

que es el resultado deseado¹².

¹² El hecho de que la integral de e^{-x^2} desde 0 hasta ∞ es $\sqrt{\pi}/2$ suele demostrarse en los libros de cálculo elementales. Véase Problema 46-3.

Estas propiedades de ortogonalidad se pueden aprovechar para desarrollar una función «arbitraria» $f(x)$ en serie de Hermite:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x). \quad (17)$$

Si procedemos formalmente, los coeficientes a_n pueden calcularse multiplicando (17) por $e^{-x^2} H_m(x)$ e integrando término a término desde $-\infty$ hasta ∞ . Por (14) y (16), eso da

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = a_m 2^m m! \sqrt{\pi},$$

así que (sustituyendo m por n)

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) f(x) dx. \quad (18)$$

Este procedimiento formal sugiere el problema matemático de determinar condiciones sobre $f(x)$ que garanticen que (17) es válida cuando los a_n se definen por (18). Cuestiones de este tipo forman parte de la teoría general de funciones ortogonales. Algunas aplicaciones directas físicas de los desarrollos ortogonales como (17) se discuten en los Apéndices A y B del Capítulo 8.

El oscilador armónico. Como ya hemos dicho, las ideas matemáticas desarrolladas antes hallan su principal aplicación en la mecánica cuántica. Una discusión adecuada de los conceptos físicos subyacentes cae fuera, claro está, del alcance de este apéndice. No obstante, es muy fácil comprender el papel que juegan los polinomios de Hermite $H_n(x)$ y las correspondientes funciones de Hermite $e^{-x^2/2} H_n(x)$.

En la Sección 20 hemos analizado el oscilador armónico clásico, que se puede interpretar como una partícula de masa m obligada a moverse por el eje x y atraída hacia la posición de equilibrio $x = 0$ mediante una fuerza $-kx$. La ecuación del movimiento es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx;$$

y con condiciones iniciales adecuadas vimos que su solución es la oscilación armónica

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t,$$

donde x_0 es la amplitud. Recordemos además que el período T viene dado por

$T = 2\pi\sqrt{m/k}$; y como la frecuencia de vibración ν es el recíproco del período, se tiene $k = 4\pi^2 m \nu^2$. Más aún, puesto que la energía cinética es $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ y la energía potencial es $\frac{1}{2}kx^2$, un sencillo cálculo muestra que la energía total del sistema es $E = \frac{1}{2}kx_0^2$, una constante. Esta energía total puede tomar cualquier valor positivo.

En mecánica cuántica, la *ecuación de ondas de Schrödinger* para el oscilador armónico descrito arriba es

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E - \frac{1}{2} kx^2 \right) \psi = 0, \quad (19)$$

donde de nuevo E es la energía total, h es la constante de Planck, y las soluciones satisfactorias $\psi(x)$ se conocen como *funciones de onda de Schrödinger*¹³. Si usamos la ecuación $k = 4\pi^2 m \nu^2$ para eliminar la constante de fuerza k , entonces (19) se reformula así:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - 2\pi^2 m \nu^2 x^2) \psi = 0. \quad (20)$$

Las soluciones físicamente admisibles de esta ecuación son aquellas que satisfacen las condiciones

$$\psi \rightarrow 0 \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1. \quad (21)$$

Estas soluciones, las funciones de onda de Schrödinger, se llaman también *autofunciones* del problema y veremos que existen solamente cuando E toma ciertos valores especiales, llamados *autovalores*.

Si hacemos el cambio de variable independiente

$$u = 2\pi\sqrt{\frac{vm}{h}} x, \quad (22)$$

la (20) pasa a ser

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + \left(\frac{2E}{hv} - u^2 \right) \psi = 0 \quad (23)$$

¹³ Erwin Schrödinger (1887-1961) fue un físico teórico austriaco que compartió en 1933 el Premio Nobel con Dirac. Su obra científica sólo puede ser apreciada por los expertos, si bien él fue un hombre de amplios intereses culturales, y un brillante y lúcido escritor en la tradición de Poincaré. Disfrutaba escribiendo pequeños libros de denso contenido sobre los grandes temas: *What Is Life?*, *Science and Humanism*, *Nature and the Greeks*, Cambridge University Press, Nueva York, 1944, 1952, 1954, respectivamente.

y las condiciones (21) se convierten en

$$\psi \rightarrow 0 \text{ cuando } |u| \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 du = 2\pi \sqrt{\frac{vm}{h}}. \quad (24)$$

Salvo la notación, la ecuación (23) tiene la misma forma que (1), de modo que tiene soluciones, como sabemos, que verifican la primera condición de (24) si y sólo si $2E/\hbar v = 2n + 1$, o sea,

$$E = \hbar v \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (25)$$

para algún entero n no negativo. Sabemos además que en tal caso esas soluciones de (23) tienen la forma

$$\psi = ce^{-u^2/2} H_n(u)$$

donde c es una constante. Si ahora imponemos la segunda de las condiciones (24) y usamos (16), se sigue que

$$c = \left[\frac{4\pi vm}{2^{2n}(n!)^2 h} \right]^{1/4}.$$

La autofunción correspondiente al autovalor (25) es por tanto

$$\psi = \left[\frac{4\pi vm}{2^{2n}(n!)^2 h} \right]^{1/4} e^{-u^2/2} H_n(u), \quad (26)$$

donde (22) da u en términos de x .

Los físicos están profundamente interesados en las propiedades detalladas de estas autofunciones. Para nosotros, sin embargo, el problema es tan sólo una ilustración de la aparición de los polinomios de Hermite, de manera que no continuaremos con este asunto. Observemos simplemente que (25) proporciona los llamados niveles de energía cuantificados del oscilador armónico. Eso significa que la energía E puede tomar sólo esos valores discretos, lo cual es obviamente muy diferente de la correspondiente situación clásica. La aplicación concreta más simple de estas ideas ocurre en el movimiento vibratorio de los átomos de una molécula diatómica. Cuando se estudia este fenómeno experimentalmente, las energías observadas están justamente de acuerdo con (25).

NOTA SOBRE HERMITE. Charles Hermite (1822-1901), uno de los más eminentes matemáticos franceses del siglo XIX, se distinguió particularmente por la elegancia y alta calidad estética de su obra. Como estudiante estuvo al borde del desastre por dejar

de lado el trabajo rutinario asignado, que cambiaba por el estudio de las obras magistrales de los matemáticos clásicos, y aunque casi fracasó en sus exámenes, llegó a ser un matemático creativo de primera fila cuando tenía poco más de veinte años. En 1870 fue nombrado profesor en la Sorbona, donde enseñó a toda una generación de matemáticos franceses bien conocidos, entre ellos Picard, Borel y Poincaré.

La inusual capacidad de su mente queda reflejada en la siguiente observación de Poincaré: «Hable con el Sr. Hermite. El nunca evoca una imagen concreta, a pesar de lo cual uno percibe enseguida que las más abstractas nociones son para él como criaturas vivientes». Le disgustaba la geometría y se sintió fuertemente atraído por la teoría de números y el análisis, siendo su tema preferido las funciones elípticas, donde esos dos campos solapan de modo notable y diverso. Quizá sepa el lector que Abel había probado muchos años atrás que la ecuación polinómica general de quinto orden no puede resolverse utilizando sólo radicales y operaciones racionales. Uno de los logros más sorprendentes de Hermite (en 1858) fue demostrar que esa ecuación es resoluble mediante funciones elípticas. Su demostración, en 1873, del carácter trascendente de e constituye otra cumbre de su obra.

Varias de sus aportaciones puramente matemáticas hallaron aplicaciones inesperadas en física matemática años después. Por ejemplo, las formas y matrices hermíticas que inventó en conexión con ciertos problemas de teoría de números resultaron cruciales para la formulación de la mecánica cuántica por Heisenberg en 1925, y ya hemos visto que los polinomios y las funciones de Hermite son útiles al resolver la ecuación de ondas de Schrödinger. No está clara la razón, pero parece cierto que los matemáticos logran buena parte de sus contribuciones más prácticas cuando reflexionan acerca de problemas que en apariencia nada tienen que ver con la realidad física.

APENDICE C. GAUSS

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ha sido el más grande de los matemáticos y tal vez el genio más dotado de cuantos se tiene noticia. Esta figura gigantesca, álgida al comienzo del siglo XIX, separa la era moderna de las matemáticas de lo que había sido hasta él. Intuición y originalidad, la extraordinaria diversidad y profundidad de sus descubrimientos, las sucesivas demostraciones de potencia casi sobrehumana y la tenacidad; todas estas cualidades se dieron cita en un solo individuo y plantean un enigma tan abrumador para nosotros como lo fue para sus contemporáneos.

Gauss nació en Brunswick, al norte de Alemania. Su excepcional capacidad para los números quedó patente desde muy temprana edad, y de hecho bromearía en su madurez diciendo que había aprendido antes a contar que a hablar. Se dice que Goethe escribió y dirigió pequeñas obras para un teatro de marionetas a los seis años, y que Mozart compuso su primer minueto infantil a los cinco, pero Gauss corrigió un error en las cuentas salariales de su padre a la edad de tres¹⁴. Su padre era jardinero y albañil, sin medios ni inclinación para ayudar a desarrollar el talento de su hijo. Afortunadamente, sin embargo, las

¹⁴ Véase W. Sartorius von Waltershausen, «Gauss zum Gedächtniss». Estas colecciones personales aparecieron en 1856, y una traducción de Helen W. Gauss (la bisnieta del matemático) se imprimió privadamente en Colorado Springs en 1966.

notables habilidades de Gauss en cálculo mental atrajeron el interés de diversas personas influyentes de su comunidad, y eventualmente del Duque de Brunswick. El Duque quedó impresionado con el muchacho y decidió pagar su posterior educación, primero en el Colegio Carolina en Brunswick (1792-1795) y más tarde en la Universidad de Göttingen (1795-1798).

En el Colegio Carolina, Gauss completó su dominio de las lenguas clásicas y exploró las obras de Newton, Euler y Lagrange. En este período, quizá a los catorce o quince años, descubrió el teorema de los números primos, que sería demostrado finalmente en 1896 tras impropios esfuerzos de muchos matemáticos (véanse nuestras notas sobre Chebyshev y Riemann). Inventó también el método de mínimos cuadrados para minimizar los errores inherentes a los datos experimentales o de observación, y concibió la ley gaussiana (o normal) de distribución de probabilidades.

En la universidad, Gauss se sintió atraído por la filología, y muy desilusionado por los cursos de matemáticas, por lo que durante un tiempo la dirección de su futuro fue incierta. No obstante, a los dieciocho años hizo un bello descubrimiento geométrico que le decidió en favor de las matemáticas y le causó placer para el resto de su vida. Los griegos habían logrado en la antigüedad construcciones con regla y compás de los polígonos regulares de 3, 4, 5 y 15 lados y para otros deducidos de éstos por bissección de ángulos. Pero eso era todo, y la cuestión permaneció así durante 2.000 años, hasta que Gauss resolvió el problema completamente. Demostró que un polígono regular de n lados es construible con regla y compás si y sólo si n es el producto de una potencia de 2 y de distintos números primos de la forma $p_k = 2^{2k} + 1$. En particular, cuando $k = 0, 1, 2, 3$, vemos que cada uno de los correspondientes números $p_k = 3, 5, 17, 257$ son primos, así que los polígonos regulares con ese número de lados son construibles¹⁵.

Durante esos años Gauss se vio abrumado por el torrente de ideas que fluían a su mente. Inició las breves anotaciones de su diario científico en un esfuerzo por registrar sus descubrimientos, ya que eran demasiado numerosos para descender a los detalles en esa época. Su primera anotación, fechada el 30 de marzo de 1796, establece la posibilidad de construir el polígono regular de 17 lados, pero incluso antes de eso ya había penetrado profundamente en varios continentes inexplorados de la teoría de números. En 1795 descubrió la ley de reciprocidad cuadrática, y como escribió más tarde: «A lo largo de todo un año este teorema me atormentó y absorbió mis mayores esfuerzos, hasta que encontré una demostración»¹⁶. En ese tiempo, Gauss desconocía que el teorema ya había sido enunciado imperfectamente por Euler, y enunciado correctamente con una demostración incorrecta por Legendre. Constituye el núcleo de su famoso tratado *Disquisitiones Arithmeticae*, publicado en 1801, aunque estaba

¹⁵ Detalles de algunas de esas construcciones se dan en H. Tietze, *Famous Problems of Mathematics*, Capítulo IX, Graylock Press, Nueva York, 1965.

¹⁶ Véase D. W. Smith, *A Source Book in Mathematics*, págs. 112-118, McGraw-Hill, Nueva York, 1929. Esta selección incluye un enunciado del teorema y la quinta de las ocho demostraciones que Gauss encontró a lo largo de los años. Hoy se conocen más de 50.

terminado en 1798¹⁷. Aparte de algunos resultados fragmentarios de matemática anterior, esta magna obra es completamente original. Se considera que marca el comienzo de la moderna teoría de números, con la que está relacionada de modo muy similar a como lo estuvieron los *Principia* de Newton a la física y a la astronomía. En las páginas de introducción, Gauss desarrolla su método de congruencias para analizar problemas de divisibilidad y da la primera demostración del teorema fundamental de la aritmética (llamado también teorema de factorización única), que afirma que todo entero $n > 1$ puede ser expresado de forma única como producto de primos. La parte central está dedicada a congruencias cuadráticas, formas y residuos. La última sección presenta su teoría completa de la ecuación ciclotómica (división del círculo), con sus aplicaciones a la construcción de polígonos regulares. La obra entera es un formidable conglomerado de matemática pura, que sus sucesores fueron capaces de digerir lentamente y no sin dificultad.

En sus *Disquisitiones*, Gauss creó asimismo el enfoque riguroso de la matemática moderna. Se sentía muy impaciente con el estilo relajado y las demostraciones vagas de sus predecesores y decidió que sus propios trabajos habían de estar exentos de tal objeción. Como escribió a un amigo: «Empleo la palabra prueba no en el sentido de los abogados, para quienes dos medias pruebas es una prueba completa, sino en el sentido matemático, donde $1/2$ de prueba = 0 y se exige de una demostración que haga imposible cualquier género de duda». Las *Disquisitiones* fueron escritas en el espíritu y en el estilo maduro de Gauss, terso, riguroso, desprovisto de motivación, y en muchas ocasiones tan cuidadosamente pulido que resulta casi ininteligible. En otra carta afirmaba: «Sabe que escribo lentamente. Esto se debe sobre todo a que no quedo satisfecho hasta que no consigo decir todo cuanto me sea posible en unas pocas palabras, y escribir de modo conciso lleva mucho más tiempo que hacerlo en extensión». Uno de los efectos de esta costumbre es que sus publicaciones ocultaban casi tanto como revelaban, pues se esforzaba por hacer desaparecer toda traza de las reflexiones que le habían conducido a sus descubrimientos. Abel señaló: «Es como el zorro, que borra con el rabo sus huellas sobre la arena». Gauss replicó a tales críticas alegando que un arquitecto que se precie recoge los andamios una vez terminada su obra. No obstante, la dificultad que la lectura de sus escritos conlleva restó difusión a sus ideas.

La tesis doctoral de Gauss (1799) es otro hito en la historia de las matemáticas. Tras varios intentos abortados de autores anteriores —d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace—, el teorema fundamental del álgebra veía en ella su primera demostración. Este teorema afirma la existencia de una raíz real o compleja para cualquier polinomio de coeficientes reales o complejos. El éxito de Gauss inauguró la era de las demostraciones de existencia, crucial desde entonces en matemática pura. Además, en esta primera demostración (dijo cuatro en total) Gauss aparece como el primer matemático en utilizar los

¹⁷ Existe una traducción de Arthur A. Clarke (Yale University Press, New Haven, Conn., 1966).

números complejos y la geometría del plano complejo con total confianza¹⁸.

El siguiente período en su vida estuvo dedicado en buena medida a la matemática aplicada, y con unas pocas excepciones el gran flujo de ideas en su diario y en sus notas permanece en suspenso.

En las últimas décadas del siglo XVIII, muchos astrónomos buscaron un nuevo planeta entre las órbitas de Marte y Júpiter, donde la ley de Bode (1772) sugería que debía estar localizado. El primero y más grande de los numerosos planetas menores conocidos como asteroides fue descubierto en esa región en 1801 y bautizado como Ceres. Este descubrimiento coincidió irónicamente con una sorprendente publicación del filósofo Hegel, en la que reprochaba a los astrónomos su desconocimiento de la filosofía: esta ciencia (decía) podría haberles evitado malgastar sus esfuerzos demostrándoles que ningún nuevo planeta puede existir¹⁹. Hegel continuó su carrera en ese mismo estilo, alcanzando más tarde cotas más altas todavía de cerrada ofuscación. Por desgracia, el pequeño planeta era difícil de observar bajo las mejores circunstancias, y pronto se perdió su pista en el luminoso cielo, cerca del sol. Los escasos datos observacionales obtenidos plantearon el problema de calcular su órbita con suficiente precisión como para poder recuperar su posición una vez se hubiese alejado del sol. Los astrónomos europeos intentaron sin éxito tal localización durante meses. Finalmente, Gauss se sintió atraído por el reto, y con ayuda de su método de mínimos cuadrados y su incomparable facilidad para el cálculo numérico determinó la órbita, indicó a los astrónomos dónde debían apuntar sus telescopios y, en efecto, allí estaba Ceres.

Este descubrimiento le aportó fama, aumento de pensión por parte del Duque y, en 1807, el nombramiento como profesor y primer director del nuevo observatorio de Göttingen. Cumplió sus responsabilidades con su habitual seriedad, aunque le desagradaban las tareas administrativas, las reuniones de comité y todas las tediosas obligaciones que comporta el ser profesor. No tenía ningún entusiasmo por la docencia, que contemplaba como una pérdida de su tiempo y algo esencialmente inútil (por diferentes razones) tanto para los estudiantes dotados como para los que carecían de talento. No obstante, cuando el impartir clases era inevitable, lo hacía de forma excelente. Uno de sus estudiantes fue el eminentе algebrista Richard Dedekind, para quien 50 años después las clases de Gauss permanecían «inolvidables en la memoria como las más maravillosas que yo haya podido escuchar»²⁰. Gauss tuvo muchas oportunidades de salir de Göttingen, pero rehusó todas las ofertas y siguió allí el resto de su vida, viviendo tranquila y sencillamente, viajando muy rara vez

¹⁸ La idea de su demostración está explicada muy claramente por F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, págs. 101-104, Dover, Nueva York, 1945.

¹⁹ Véanse las últimas páginas de «De Orbitalis Planetarum», vol. I del libro de Georg Wilhelm Hegel *Sämtliche Werke*, Frommann Verlag, Stuttgart, 1965.

²⁰ Las notas detalladas de Dedekind sobre ese curso están recogidas en G. Waldo Dunnington, *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*, págs. 259-261, Hafner, Nueva York, 1955. Este libro es especialmente útil por sus numerosas anotaciones, su bibliografía de las publicaciones de Gauss y su lista de los cursos que ofertó (pero a menudo no impartió) desde 1808 hasta 1854.

y trabajando con inmensa energía en una amplísima gama de problemas en matemáticas y en sus aplicaciones. Aparte de la ciencia y la familia (tuvo dos esposas y seis hijos, dos de los cuales emigraron a América), sus principales temas de interés eran la historia, la literatura de todo el mundo, la política internacional y las finanzas públicas. Acumuló una biblioteca de unos 6.000 volúmenes en diversas lenguas, incluyendo griego, latín, inglés, francés, ruso, danés y, por supuesto, alemán. Su habilidad en el manejo de las finanzas propias lo demuestra el hecho de que, aunque comenzó de la nada, dejó al morir un capital equivalente a cien veces sus ingresos anuales medios de los últimos años de su vida.

En las dos primeras décadas del siglo XIX, Gauss produjo un flujo permanente de trabajos sobre temas astronómicos, de los que destaca el tratado *Theoria Motus Corporum Coelestium* (1809). Fue la biblia de los astrónomos planetarios durante un siglo. Sus métodos para tratar las perturbaciones condujeron más tarde al descubrimiento de Neptuno. Gauss tomaba la astronomía como su profesión y la matemática como su diversión, y de vez en cuando publicaba unos pocos frutos de sus investigaciones privadas. Su gran contribución a las series hipergeométricas (1812) pertenece a esta época. Es un típico logro del autor, elaborado con nuevas ideas de análisis, que había mantenido ocupados a los matemáticos desde tiempo atrás.

Alrededor de 1820 el gobierno de Hannover le pidió un estudio geodésico del reino, y varios aspectos de su labor, incluyendo extensivo trabajo de campo y muchas triangulaciones tediosas, le ocuparon durante algunos años. Es natural suponer que una mente como la suya se hubiera sentido asfixiada por tal cometido, pero las grandes ideas científicas surgen por extraños caminos. Esta labor aparentemente carente de interés desembocó en una de las aportaciones más profundas y de mayor alcance a la matemática pura, sin la cual la teoría de la relatividad general de Einstein hubiese sido imposible.

La tarea encomendada a Gauss se refería a la medición precisa de grandes triángulos sobre la superficie terrestre. Esto proporcionó el estímulo que le condujo a las ideas de su artículo *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827), en el que encontró la geometría diferencial intrínseca de superficies curvadas arbitrarias²¹. En ese trabajo introdujo coordenadas curvilíneas u y v sobre una superficie; obtuvo la forma diferencial cuadrática fundamental $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ para el elemento de longitud de arco ds , que hace posible determinar las curvas geodésicas; y formuló los conceptos de curvatura gaussiana y curvatura integral²². Sus principales resultados fueron el famoso *theorem egregium*, según el cual la curvatura gaussiana depende sólo de E , F y G , siendo por tanto invariante bajo pandeo, y el teorema de Gauss-Bonnet sobre curvatura integral para el caso de un triángulo geodésico, que en su versión general constituye el hecho central de la moderna geometría dife-

²¹ Una traducción de A. Hiltebeitel y J. Morehead fue publicada bajo el título *General Investigations of Curved Surfaces* por Raven Press, Hewlett, Nueva York, en 1965.

²² Estas ideas se exponen en lenguaje no técnico en C. Lanczos, *Albert Einstein and the Cosmic World Order*, Capítulo 4, Interscience-Wiley, Nueva York, 1965.

rencial global. Además de sus descubrimientos específicos, la línea modular de la intuición de Gauss radica en la palabra *intrínseca*, ya que mostró cómo estudiar la geometría de una superficie operando sólo sobre la propia superficie, sin prestar atención al espacio en el que se halla inmersa. Para precisar más este aspecto, imaginemos una criatura bidimensional inteligente que habita en una superficie pero no es consciente de la tercera dimensión o de cualquier otro concepto exterior a su superficie. Si esta criatura es capaz de moverse por la superficie midiendo distancias y de determinar los caminos más cortos (geodésicos) entre dos puntos, entonces será capaz de medir también la curvatura gaussiana en cualquier punto y de crear una rica geometría sobre la superficie. Y esa geometría será euclídea (plana) si y sólo si la curvatura gaussiana es cero en todas partes. Cuando estas nociones se generalizan a más de dos dimensiones, abren la puerta a la geometría riemanniana, al análisis tensorial y a las ideas de Einstein.

Otro bloque importante de su labor en este período fue su trabajo de 1831 sobre residuos biquadráticos. En él extiende algunos de sus descubrimientos previos en teoría de números con ayuda de un método nuevo, su enfoque puramente algebraico de los números complejos. Definió a éstos como pares ordenados de números reales con adecuadas operaciones algebraicas, haciendo desaparecer así la confusión todavía imperante acerca del tema y preparando con ello el camino para el posterior desarrollo del álgebra y la geometría de los espacios de n dimensiones. Todo lo cual era sólo accidental en su propósito, que no era otro que plasmar las ideas de teoría de números en el dominio complejo. Definió los hoy llamados enteros gaussianos como los nuevos complejos $a + ib$ con a, b enteros ordinarios; introdujo una nueva noción de números primos, según la cual 3 es primo pero $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$ no lo es; y demostró el teorema de factorización única para esos enteros y primos. Su trabajo inaugura la teoría de números algebraica, que se ha desarrollado de forma impresionante hasta nuestros días²³.

A partir de la década 1830-40 Gauss se dedicó de modo creciente a la física, enriqueciendo toda rama donde tomó parte. En la teoría de la tensión superficial, desarrolló la idea fundamental de conservación de la energía y resolvió el primer problema de cálculo de variaciones que involucra una integral doble con límites variables. En óptica introdujo el concepto de longitud focal de un sistema de lentes e inventó una lente de gran angular, relativamente libre de aberración cromática, para telescopios y objetivos de cámara. Creó virtualmente la ciencia del geomagnetismo, y en colaboración con su amigo y colega Wilhelm Weber construyó y manejó un observatorio magnético, fundó la Unión Magnética para recolectar y publicar observaciones de diversos lugares de la tierra e inventó el telégrafo magnético y el magnetómetro bifilar. Hay numerosas referencias a su trabajo en el famoso *Tratado de Electricidad y Magnetismo* (1873) de James Clerk Maxwell. En su prefacio, Maxwell afirma

²³ Véase E. T. Bell, «Gauss and the Early Development of Algebraic Numbers», *National Math Mag.*, vol. 18, págs. 188-204, 219-233 (1944).

que Gauss «dedicó su poderosa inteligencia a la teoría del electromagnetismo y a los métodos observacionales, y no sólo hizo avanzar notablemente la teoría, sino que reconstruyó toda la ciencia del magnetismo en cuanto se refiere a los instrumentos utilizados y al cálculo de resultados, de modo que sus memorias sobre magnetismo terrestre han de tomarse como modelos de investigación en física por todos aquellos que se encuentren ocupados en la medida de cualesquiera fuerzas de la naturaleza». En 1839 Gauss publicó su trabajo fundamental sobre la teoría general de las fuerzas que se comportan como el inverso del cuadrado, en el que se establece la teoría del potencial como una rama coherente de la matemática²⁴. Como de costumbre, había pensado acerca de tales materias durante años. Entre sus descubrimientos figuran el teorema de la divergencia (llamado también de Gauss) del moderno análisis vectorial, y el potente enunciado que más tarde pasó a llamarse «principio de Dirichlet», probado finalmente por Hilbert en 1899.

Hemos discutido la porción publicada de la obra de Gauss, pero la parte no publicada es igualmente impresionante. Buena parte de ella sólo salió a la luz tras su fallecimiento, cuando gran cantidad de material proveniente de sus cuadernos de anotaciones y de su correspondencia científica fue analizada con detalle e incluida en sus obras completas. Ya hemos mencionado su diario científico. Este cuaderno de 19 páginas, uno de los más preciados documentos en la historia de la matemática, quedó sin descubrir hasta 1898, año en que fue hallado entre papeles de la familia en poder de uno de sus nietos. Cubre desde 1796 hasta 1814 y contiene 146 enunciados muy concisos que resumen sus investigaciones, algunas de las cuales le habían ocupado semanas o meses²⁵. Todo este material pone de manifiesto de modo inapelable que las ideas que Gauss concibió y desarrolló con gran minuciosidad, pero guardó para sí mismo, le hubieran convertido por sí solas en el más grande de los matemáticos de todos los tiempos.

Por ejemplo, la teoría de funciones de una variable compleja constituyó uno de los principales logros del siglo XIX, y sus resultados centrales son el teorema integral de Cauchy (1827) y los desarrollos de Taylor y Laurent para funciones analíticas (1831, 1843). En una carta escrita a su amigo Bessel en 1811, Gauss enuncia explícitamente el teorema de Cauchy y hace notar que: «Es éste un bello teorema cuya demostración, muy sencilla, daré en alguna ocasión apropiada. Está en relación con propiedades de las series de potencias de notable belleza»²⁶. Así pues, muchos años antes de quienes obtuvieron el crédito oficial por tan importantes hallazgos, él conocía ya el teorema de Cauchy y probablemente ambos desarrollos en serie. Sin embargo, por alguna razón, la «ocasión apropiada» para su publicación no llegó. Una posible explicación es sugerida por sus comentarios en una carta a Wolfgang Bolyai, un íntimo amigo de sus

²⁴ George Green «Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism» (1828), despreciado y casi por completo ignorado hasta su reimpresión en 1846.

²⁵ Véase Gauss *Werke*, vol. X, págs. 483-574, 1917.

²⁶ *Werke*, vol. VIII, pág. 91, 1900.

años de universidad con el que mantuvo contacto por correspondencia a lo largo de su vida: «No es el conocimiento sino el acto de aprender, no la posesión sino el acto de alcanzarlo lo que produce la mayor satisfacción. Cuando consigo clarificar un asunto de forma exhaustiva, lo dejo para sumergirme de nuevo en la oscuridad». Tenía el temperamento de un explorador a quien no ofrece interés malgastar tiempo escribiendo un relato de su expedición última, cuando en vez de eso puede emprender otra nueva. De todas formas, Gauss escribió mucho, pero para publicar cuantos resultados fundamentales descubrió en forma satisfactoria para su criterio hubieran sido necesarias varias vidas.

Otro ejemplo claro es la geometría no euclídea, que ha sido comparada con la revolución copernicana en astronomía, por su impacto en el pensamiento humano. Desde los tiempos de Euclides hasta la niñez de Gauss, los postulados de la geometría euclídea fueron considerados como verdades necesarias. No obstante, había un aspecto que había atraído mucho la atención: el llamado postulado de las paralelas, que afirma que por un punto no situado sobre una cierta recta pasa una sola paralela a tal recta. Se pensaba que este postulado no era independiente de los demás, y muchos intentaron sin éxito demostrar tal aserto. Sabemos que el propio Gauss se unió a tales esfuerzos a los quince años, fallando también. Pero fracasó con una diferencia: pronto llegó a la conclusión, que escapó a todos sus antecesores, de que la geometría euclídea no es la única posible. Trabajó intermitentemente en estas ideas durante muchos años, y hacia 1820 estaba en posesión de los principales teoremas de la geometría no euclídea (el nombre se debe a él)²⁷. Pero no reveló sus conclusiones, y en 1829 y 1832 Lobachevsky y Johann Bolyai (hijo de Wolfgang) publicaron sus trabajos independientes sobre el tema. La razón del silencio de Gauss en esta ocasión es muy simple. El clima intelectual en ese tiempo en Alemania estaba completamente dominado por la filosofía de Kant, y uno de los supuestos básicos de su sistema era que en la geometría de Euclides se encontraba la única forma de pensar en el espacio. Gauss supo que esa idea era totalmente falsa y que el sistema de Kant tenía los pies de barro. Sin embargo, apreciaba su intimidad y su vida tranquila, y calló para evitar dedicar su tiempo a discusiones con filósofos. En 1829 escribió a Bessel: «Probablemente no llegaré a publicar mis extensas investigaciones acerca de esta materia [los fundamentos de la geometría] durante mucho tiempo, quizás nunca, porque me horroriza imaginar las imprecaciones que iban a lanzar los beocios si yo expresara por completo lo que pienso»²⁸.

Lo mismo ocurrió con la teoría de las funciones elípticas, un campo muy rico del análisis, promovido inicialmente por Abel en 1827 y por Jacobi en 1828-1829. Gauss no había publicado ni comentado nada al respecto, así que el universo matemático quedó sorprendido cuando se fue sabiendo que él había obtenido muchos de los resultados de Abel y Jacobi antes de que éstos nacieran.

²⁷ Todo cuanto se sabe que escribió sobre los fundamentos de la geometría se publicó en sus *Werke*, vol. VIII, págs. 159-268, 1900.

²⁸ *Werke*, vol. VIII, pág. 200. Los beocios fueron una tribu poco dotada de inteligencia en la antigua Grecia.

Abel no llegó a tener conocimiento de estas investigaciones devastadoras por su temprana muerte en 1829, a los 26 años, pero Jacobi se vio en la tesitura de saborear su decepción. Los hechos nos son conocidos en parte gracias a Jacobi. Su atención quedó atraída por un pasaje críptico en las *Disquisitiones* (art. 335), cuyo significado sólo puede ser entendido si uno sabe ciertas cosas acerca de las funciones elípticas. Visitó a Gauss varias veces para verificar sus sospechas. Le contó sus más recientes descubrimientos y, en cada ocasión, Gauss sacaba manuscritos de treinta años antes en los que ya se hallaba lo que Jacobi acababa de mostrarle. No resulta difícil imaginar la profunda tristeza de Jacobi. A esas alturas de su vida, Gauss era indiferente a la fama, de modo que incluso agradeció librarse de la preparación de un tratado sobre tales materias, que tenía planeado desde hacía tiempo. Tras una visita de una semana a Gauss, Jacobi escribió a su hermano: «Las matemáticas estarían en una posición bien diferente si la astronomía aplicada no hubiese desviado a este genio colosal de su carrera».

Así fue Gauss, el supremo matemático. Superó los niveles accesibles a los demás hombres de talento de modo tal que uno tiene a veces la impresión de que pertenecía a una especie superior.

APENDICE D. LOS POLINOMIOS DE CHEBYSHEV Y LA PROPIEDAD DE MINIMAX

En el Problema 31-6 definimos los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ en términos de la función hipergeométrica como $T_n(x) = F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$, donde $n = 0, 1, 2, \dots$. Ni que decir tiene que esta definición por sí sola no es muy sugerente, ya que la cuestión interesante es: ¿para qué sirven tales polinomios? Ahora intentaremos contestar esta pregunta.

Conviene comenzar adoptando una definición diferente para el polinomio $T_n(x)$. Despues veremos que ambas coinciden. Nuestro punto de partida es el hecho de que si n es un entero no negativo, la fórmula de Moivre del análisis complejo afirma que

$$\begin{aligned} \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos^n \theta + n \cos^{n-1} \theta (i \operatorname{sen} \theta) + \\ &+ \frac{n(n-1)}{2} \cos^{n-2} \theta (i \operatorname{sen} \theta)^2 + \dots + (i \operatorname{sen} \theta)^n, \end{aligned} \quad (1)$$

de modo que $\cos n\theta$ es la parte real de la suma de la derecha. Pero los términos reales de esa suma son precisamente los que contienen potencias pares de $i \operatorname{sen} \theta$; y como $\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, es obvio que $\cos n\theta$ es una función polinómica de $\cos \theta$. Usaremos esto como definición del n -ésimo polinomio de Chebyshev: $T_n(x)$ es el polinomio para el cual

$$\cos n\theta = T_n(\cos \theta). \quad (2)$$

Puesto que $T_n(x)$ es un polinomio, está definido para todo valor de x . No obstante, si se restringe x al intervalo $-1 \leq x \leq 1$ y escribimos $x = \cos \theta$ donde $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces (2) conduce a

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x). \quad (3)$$

Con las mismas restricciones, podemos obtener otra curiosa expresión de $T_n(x)$. En efecto, sumando las dos fórmulas

$$\cos n\theta \pm i \sin n\theta = (\cos \theta \pm i \sin \theta)^n,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \frac{1}{2} [(\cos \theta + i \sin \theta)^n + (\cos \theta - i \sin \theta)^n] = \\ &= \frac{1}{2} [(\cos \theta + i\sqrt{1 - \cos^2 \theta})^n + (\cos \theta - i\sqrt{1 - \cos^2 \theta})^n] = \\ &= \frac{1}{2} [(\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - 1})^n + (\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - 1})^n], \end{aligned}$$

de manera que

$$T_n(x) = \frac{1}{2} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n]. \quad (4)$$

Otra expresión para los $T_n(x)$ se puede hallar utilizando la fórmula del binomio para escribir (1) como

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \cos^{n-m} \theta (i \sin \theta)^m.$$

Ya hemos hecho notar que los términos reales en esa suma corresponden a los valores pares de m , es decir, a $m = 2k$, donde $k = 0, 1, 2, \dots, [n/2]$ ²⁹. Como

$$(i \sin \theta)^m = (i \sin \theta)^{2k} = (-1)^k (1 - \cos^2 \theta)^k = (\cos^2 \theta - 1)^k,$$

tenemos

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} \theta (\cos^2 \theta - 1)^k,$$

²⁹ El símbolo $[n/2]$ es la notación usual para el mayor entero $\leq n/2$.

y por tanto

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} x^{n-2k}(x^2-1)^k. \quad (5)$$

Es claro de (4) que $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$; pero para valores más grandes de n , $T_n(x)$ se calcula más fácilmente mediante una fórmula de recurrencia. Si escribimos

$$\cos n\theta = \cos [\theta + (n-1)\theta] = \cos \theta \cos (n-1)\theta - \sin \theta \sin (n-1)\theta$$

y

$$\cos (n-2)\theta = \cos [-\theta + (n-1)\theta] = \cos \theta \cos (n-1)\theta + \sin \theta \sin (n-1)\theta,$$

se sigue que

$$\cos n\theta + \cos (n-2)\theta = 2 \cos \theta \cos (n-1)\theta.$$

Usando (2) y sustituyendo $\cos \theta$ por x , esa identidad trigonométrica proporciona la deseada ley de recurrencia:

$$T_n(x) + T_{n-2}(x) = 2xT_{n-1}(x). \quad (6)$$

Partiendo de $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$ deducimos de (6) que $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, y así sucesivamente.

La forma hipergeométrica. Para establecer una conexión entre la ecuación diferencial de Chebyshev y los polinomios de Chebyshev tal como los hemos definido, utilizaremos que el polinomio $y = T_n(x)$ se convierte en la función $y = \cos n\theta$ cuando la variable se cambia mediante $x = \cos \theta$. Ahora bien, la función $y = \cos n\theta$ es claramente una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + n^2y = 0, \quad (7)$$

y un sencillo cálculo muestra que al cambiar de nuevo de la variable θ a la x , (7) se transforma en la ecuación de Chebyshev

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2y = 0. \quad (8)$$

Sabemos por tanto que $y = T_n(x)$ es una solución polinómica de (8). Pero el Problema 31-6 nos dice que las únicas soluciones polinómicas de (8) tienen la

forma $cF\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$; y como (4) implica que $T_n(1) = 1$ para todo n y $cF\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = c$, concluimos que

$$T_n(x) = F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right). \quad (9)$$

Ortogonalidad. Una de las propiedades más importantes de las funciones $y_n(\theta) = \cos n\theta$ para diferentes valores de n es su ortogonalidad en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, esto es, el hecho de que

$$\int_0^\pi y_m y_n d\theta = \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0 \quad \text{si } m \neq n. \quad (10)$$

Para demostrar esto, escribamos las ecuaciones diferenciales satisfechas por $y_m = \cos m\theta$ e $y_n = \cos n\theta$:

$$y_m'' + m^2 y_m = 0 \quad \text{e} \quad y_n'' + n^2 y_n = 0.$$

Multiplicando la primera de ellas por y_n y la segunda por y_m , y restando, se obtiene

$$\frac{d}{d\theta}(y'_m y_n - y'_n y_m) + (m^2 - n^2)y_m y_n = 0;$$

y (10) se deduce sin más que integrar cada término de esa ecuación entre 0 y π , puesto que y'_m e y'_n se anulan ambas en los puntos extremos y además $m^2 - n^2 \neq 0$.

Cuando se cambia la variable en (10) de θ a $x = \cos \theta$, (10) pasa a ser

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad \text{si } m \neq n. \quad (11)$$

Esto se suele expresar diciendo que los polinomios de Chebyshev son *ortogonales* sobre el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ con respecto a la función peso $(1-x^2)^{-1/2}$. Cuando $n = m$ en (11) se tiene

$$\int_{-1}^1 \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{para } n \neq 0, \\ \pi & \text{para } n = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Esto se sigue de

$$\int_0^\pi \cos^2 n\theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{para } n \neq 0, \\ \pi & \text{para } n = 0, \end{cases}$$

fácil de probar por integración directa.

Igual que en el caso de los polinomios de Hermite, discutido en el Apéndice B, las propiedades de ortogonalidad (1) y (12) se pueden usar para desarrollar una función «arbitraria» en *serie de Chebyshev*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x). \quad (13)$$

El mismo proceso formal da como coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (14)$$

y

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (15)$$

para $n > 0$. Y de nuevo el reto matemático consiste en hallar condiciones bajo las cuales la serie (13), con los a_n definidos por (14) y (15), converja a $f(x)$ verdaderamente.

La propiedad minimax. El problema de Chebyshev que consideramos ahora es el de ver con qué precisión se puede aproximar la función x^n sobre el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ por polinomios $a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ de grado $n - 1$; es decir, cuán pequeño se puede hacer el número

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1x - a_0|$$

mediante elección adecuada de los coeficientes. Esto es a su vez equivalente a plantearse el siguiente problema: entre todos los polinomios $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ de grado n con coeficiente dominante 1, minimizar el número

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|,$$

y, si es posible, hallar el polinomio que alcanza tal mínimo.

Es claro, a la vista de que $T_1(x) = x$ y de la ley de recurrencia (6), que cuando $n > 0$ el coeficiente de x^n en $T_n(x)$ es 2^{n-1} , luego $2^{1-n}T_n(x)$ tiene coeficiente dominante 1. Estos polinomios resuelven por completo el problema de Chebyshev, en el sentido de que tienen la notable propiedad siguiente.

Propiedad minimax. *Entre todos los polinomios $P(x)$ de grado $n > 0$ con coeficiente dominante 1, $2^{1-n}T_n(x)$ tiene desviación mínima del cero sobre el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.*

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| \geq \max_{-1 \leq x \leq 1} |2^{1-n}T_n(x)| = 2^{1-n}. \quad (16)$$

Demostración. En primer lugar, la igualdad (16) se deduce directamente de

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = \max_{0 \leq \theta \leq \pi} |\cos n\theta| = 1.$$

Para completar el argumento, supongamos que $P(x)$ es un polinomio del tipo especificado para el cual

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| < 2^{1-n}, \quad (17)$$

y vamos a deducir una contradicción de esa hipótesis. Empezamos haciendo notar que el polinomio $2^{1-n}T_n(x) = 2^{1-n}\cos n\theta$ toma alternativamente valores positivos y negativos $2^{1-n}, -2^{1-n}, 2^{1-n}, \dots, \pm 2^{1-n}$ en los $n+1$ puntos x que corresponden a $\theta = 0, \pi/n, 2\pi/n, \dots, n\pi/n = \pi$. Por (17), $Q(x) = 2^{1-n}T_n(x) - P(x)$ tiene el mismo signo que $2^{1-n}T_n(x)$ en esos puntos, y por tanto ha de tener al menos n ceros en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Ahora bien, eso es imposible por ser $Q(x)$ un polinomio de grado $n-1$ a lo sumo, y no idénticamente nulo.

En esta breve presentación, desgraciadamente, la propiedad minimax parece salir de la manga, sin motivación y sin dar pista alguna sobre el porqué de tan curioso comportamiento de los polinomios de Chebyshev. Confiamos en que el lector acepte nuestra palabra de que en el contexto más amplio de las ideas de Chebyshev esta sorprendente propiedad es realmente natural³⁰. Para quienes deseen ver aplicaciones concretas de las matemáticas que van estudiando, podemos añadir que la propiedad minimax está estrechamente ligada al lugar privilegiado que ocupan los polinomios de Chebyshev en el análisis numérico contemporáneo.

NOTA SOBRE CHEBYSHEV. Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894) fue el matemático ruso más eminente del siglo XIX. Aunque contemporáneo del famoso geómetra

³⁰ Los lectores afectados de indomable escepticismo que se nieguen a dar crédito a afirmaciones de este tipo sin investigarlas personalmente quedan invitados a consultar N. I. Achieser, *Theory of Approximation*, Ungar, Nueva York, 1956; E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, Nueva York, 1966; o G. G. Lorentz, *Approximation of Functions*, Holt, Nueva York, 1966.

Lobachevski, su obra tuvo una influencia mucho más profunda en la Europa occidental y es considerado el fundador de la gran escuela matemática que ha florecido en su país.

De niño le fascinaban los juguetes mecánicos, y parece ser que se sintió atraído por primera vez por las matemáticas cuando se dio cuenta de la importancia de la geometría para comprender las máquinas. Tras sus años de estudiante en Moscú pasó a ser profesor de matemáticas en la Universidad de San Petersburgo, cargo que conservó hasta su jubilación. Su padre pertenecía a la nobleza rusa, pero después de la miseria de 1840 la fortuna familiar sufrió tal deterioro que Chebyshev se vio obligado, durante el resto de su vida, a vivir muy frugalmente. No estuvo casado. Invirtió buena parte de sus escasos ingresos en modelos mecánicos y en viajes ocasionales a Europa occidental, donde disfrutaba sobre todo viendo molinos de viento, máquinas de vapor, y cosas de ese tipo.

Chebyshev fue un matemático particularmente versátil, con un raro talento para resolver problemas arduos mediante métodos elementales. La mayor parte de su esfuerzo la dedicó a la matemática pura, pero también valoraba sus aplicaciones prácticas, como confirma la siguiente observación: «Aislar las matemáticas de las demandas de otras ciencias es como conseguir la esterilidad de una vaca evitando su contacto con los toros». Trabajó en muchos campos, pero sus aportaciones más relevantes fueron a la teoría de probabilidades, la teoría de números y la aproximación de funciones (a la que le condujo su interés por las máquinas).

En teoría de probabilidades introdujo los conceptos de esperanza matemática y varianza para sumas y medias aritméticas de variables aleatorias, dio una bella demostración, muy simple, de la ley de los grandes números, basada en lo que hoy se conoce como desigualdad de Chebyshev, y trabajó denodadamente sobre el teorema central del límite. Está considerado como el padre intelectual de una larga serie de conocidos científicos rusos que contribuyeron a la teoría matemática de las probabilidades, incluidos A. A. Markov, S. N. Bernstein, A. N. Kolmogorov, A. Y. Khinchin, y otros.

En la década de 1840 ayudó a preparar una edición de algunos trabajos de Euler. Parece que esta tarea le hizo centrar su atención en la teoría de números, en especial en el difícil problema de la distribución de los números primos. Como el lector sabrá, un número primo es un entero $p > 1$ que carece de divisores positivos distintos de p y de 1. Los primeros son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ... Es claro que los primos están distribuidos entre los enteros de modo irregular, pues al avanzar aparecen cada vez con menor frecuencia, pese a lo cual hay muchas parejas sucesivas separadas tan sólo por un número par. El problema de descubrir la ley que gobierna su distribución, y entender su porqué, ha retado la curiosidad de los especialistas durante siglos. En 1751 Euler expresaba su propio abatimiento con estas palabras: «Los matemáticos han intentado en vano hasta hoy descubrir algún orden en la secuencia de los números primos, y tenemos buenas razones para pensar que es un misterio en el que jamás penetrará la mente humana».

Se han hecho muchos esfuerzos dirigidos a averiguar fórmulas sencillas para el n -ésimo primo y para el número exacto de primos entre los primeros n enteros positivos. Todos se han visto abocados al fracaso. Sólo se han logrado avances verdaderos cuando se ha buscado información sobre la distribución promedio de los primos entre los enteros. Es usual denotar por $\pi(x)$ el número de primos menores o iguales que un número x positivo. Así pues, $\pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(\pi) = 2$, $\pi(4) = 2$, etc. En su juventud, Gauss estudió $\pi(x)$ empíricamente con el fin de hallar una función simple que la aproximara con poco error para grandes x . Sobre la base de sus observaciones conjeturó (quizá a los catorce o quince años) que $x/\log x$ es una buena función aproximante, en el sentido de que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1. \quad (18)$$

Esta afirmación es el famoso *teorema de los números primos*, y por lo que sabemos, Gauss nunca llegó a poder fundamentar su intuición siquiera con una demostración parcial.

Chebyshev, desconocedor de la conjetura de Gauss, fue el primer matemático en establecer alguna conclusión firme acerca de esta cuestión. En 1848 y 1850 probó que

$$0,9213\dots < \frac{\pi(x)}{x/\log x} < 1,1055\dots \quad (19)$$

para todo x suficientemente grande, y también que si el límite en (18) existe, su valor debe ser 1^{31} . Como corolario de su trabajo demostró el postulado de Bertrand: para todo entero $n \geq 1$ existe un primo p tal que $n < p \leq 2n$. Los esfuerzos de Chebyshev no le permitieron dar con la demostración final del teorema de los números primos (que se logró en 1896), pero estimularon a muchos matemáticos a continuar trabajando sobre el problema. Volveremos a él en el Apéndice E, en nuestra nota sobre Riemann.

APENDICE E. ECUACION DE RIEMANN

Nuestro objetivo en este apéndice es entender la estructura de la ecuación hipergeométrica de Gauss

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0. \quad (1)$$

Vimos en las Secciones 31 y 32 que esta ecuación tiene exactamente tres puntos singulares regulares $x = 0$, $x = 1$ y $x = \infty$ y que al menos un exponente tiene valor 0 en cada uno de los puntos $x = 0$ y $x = 1$. Probaremos que (1) está totalmente determinada por esas propiedades, en el sentido de que si hacemos esas suposiciones sobre la ecuación general

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad (2)$$

entonces (2) tiene necesariamente la forma (1).

Comenzamos recordando de la Sección 32 que si cambiamos en (2) la variable independiente de x a $t = 1/x$, se convierte en

$$y'' + \left[\frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2} \right] y' + \frac{Q(1/t)}{t^4} y = 0, \quad (3)$$

³¹ El número en el lado izquierdo de (19) es $A = \log 2^{1/2} 3^{1/3} 5^{1/5} 30^{-1/30}$, y el de la derecha es $6A/5$.

donde la prima denota derivación respecto a t . Es evidente de (3) que el punto $x = \infty$ es un punto regular de (2) si no es punto ordinario, y las funciones

$$\frac{1}{t} P\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{y} \quad \frac{1}{t^2} Q\left(\frac{1}{t}\right)$$

son ambas analíticas en $t = 0$.

Supongamos ahora explícitamente que (2) tiene $x = 0$, $x = 1$ y $x = \infty$ como puntos singulares regulares y que todos los demás puntos son ordinarios. Se sigue que $xP(x)$ es analítica en $x = 0$, que $(x - 1)P(x)$ lo es en $x = 1$ y que $x(x - 1)P(x)$ es analítica en todos los valores finitos de x :

$$x(x - 1)P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (4)$$

Si sustituimos $x = 1/t$, la (4) pasa a ser

$$\frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} - 1 \right) P\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{t}\right)^n,$$

luego

$$\frac{1}{t} P\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{t}\right)^n = \frac{1}{1-t} \left(a_0 t + a_1 + \frac{a_2}{t} + \dots \right).$$

Como $x = \infty$ es un punto singular regular de (2), esta función ha de ser analítica en $t = 0$. Concluimos que $a_2 = a_3 = \dots = 0$, así que (4) da

$$P(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{x(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} \quad (5)$$

para ciertas constantes A y B . Análogamente, $x^2(x - 1)^2Q(x)$ es analítica para todo valor finito de x , así que

$$x^2(x - 1)^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

$$\frac{1}{t^2} \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^2 Q\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{t}\right)^n,$$

y

$$\frac{1}{t^2} Q\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t^2}{(1-t)^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{t}\right)^n = \frac{1}{(1-t)^2} \left(b_0 t^2 + b_1 t + b_2 + \frac{b_3}{t} + \dots \right). \quad (6)$$

Como antes, la hipótesis de que $x = \infty$ es un punto singular regular de (2) implica que (6) ha de ser analítica en $t = 0$, luego $b_3 = b_4 = \dots = 0$ y

$$Q(x) = \frac{b_0 + b_1x + b_2x^2}{x^2(x-1)^2} = \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2} + \frac{E}{x-1} + \frac{F}{(x-1)^2}. \quad (7)$$

Ahora bien, el ser (6) acotada cerca de $t = 0$ significa que $x^2 Q(x)$ es acotada para grandes x , de modo que

$$x^2 \left(\frac{C}{x} + \frac{E}{x-1} \right) = x^2 \left[\frac{(C+E)x - C}{x(x-1)} \right]$$

es también acotada y $C + E = 0$. Eso nos permite escribir (7) como

$$Q(x) = \frac{D}{x^2} + \frac{F}{(x-1)^2} - \frac{C}{x(x-1)}; \quad (8)$$

y en vista de (5) y (8) la ecuación (2) adopta la forma

$$y'' + \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \right) y' + \left[\frac{D}{x^2} + \frac{F}{(x-1)^2} - \frac{C}{x(x-1)} \right] y = 0. \quad (9)$$

Denotemos los exponentes de los puntos singulares regulares 0, 1 e ∞ por α_1 y α_2 , β_1 y β_2 , γ_1 y γ_2 , respectivamente. Esos números son las raíces de las ecuaciones indiciales en dichos puntos:

$$m(m-1) + Am + D = 0,$$

$$m(m-1) + Bm + F = 0,$$

$$m(m-1) + (2-A-B)m + (D+F-C) = 0.$$

Las dos primeras pueden escribirse directamente sin más que observar (9), mientras que la tercera requiere un pequeño cálculo basado en (3). Si expresamos esas ecuaciones como

$$m^2 + (A-1)m + D = 0,$$

$$m^2 + (B-1)m + F = 0,$$

$$m^2 + (1-A-B)m + (D+F-C) = 0,$$

entonces, por las bien conocidas relaciones que ligan las raíces de una ecuación cuadrática con sus coeficientes, obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= 1 - A, & \alpha_1\alpha_2 &= D, \\ \beta_1 + \beta_2 &= 1 - B, & \beta_1\beta_2 &= F, \\ \gamma_1 + \gamma_2 &= A + B - 1, & \gamma_1\gamma_2 &= D + F - C.\end{aligned}\quad (10)$$

De la primera columna es claro que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1; \quad (11)$$

y usando (10) podemos escribir (9) en la forma

$$\begin{aligned}y'' + \left(\frac{1 - \alpha_1 - \alpha_2}{x} + \frac{1 - \beta_1 - \beta_2}{x-1} \right) y' + \\ + \left[\frac{\alpha_1\alpha_2}{x^2} + \frac{\beta_1\beta_2}{(x-1)^2} + \frac{\gamma_1\gamma_2 - \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}{x(x-1)} \right] y = 0.\end{aligned}\quad (12)$$

Esta se llama *ecuación de Riemann*, y (11) *identidad de Riemann*.

El contenido cualitativo de esta notable conclusión puede expresarse así: la forma precisa de (2) está completamente determinada exigiendo que tenga sólo tres puntos singulares regulares $x = 0$, $x = 1$ y $x = \infty$, y especificando los valores de sus exponentes en cada uno de ellos.

Impongamos ahora la condición adicional de que al menos un exponente tome valor cero en cada uno de los puntos $x = 0$ y $x = 1$, digamos $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. En tal caso, con una sencilla simplificación y la ayuda de (11), la ecuación de Riemann se reduce a

$$x(1-x)y'' + [(1-\alpha_2) - (\gamma_1 + \gamma_2 + 1)x]y' - \gamma_1\gamma_2y = 0,$$

que se convierte en la ecuación de Gauss (1) si introducimos la notación habitual $a = \gamma_1$, $b = \gamma_2$, $c = 1 - \alpha_2$. Por esta razón, la ecuación (12) se llama a veces *ecuación hipergeométrica generalizada*.

Estos resultados son tan sólo los primeros pasos de una teoría de gran alcance de ecuaciones diferenciales iniciada por Riemann. Uno de sus objetivos es la caracterización, del modo más sencillo posible, de todas las ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son expresables en términos de la función hipergeométrica de Gauss. Otro consiste en lograr una clasificación sistemática de todas las ecuaciones diferenciales con coeficientes racionales de acuerdo con el número y naturaleza de sus puntos singulares. Un hecho sorprendente que emerge de esa clasificación es que virtualmente todas esas ecuaciones que aparecen en la física matemática pueden ser generadas por confluencia a partir de una sola ecuación con cinco puntos singulares regulares, siendo la diferencia entre exponentes igual a $1/2$ en cada uno de ellos³².

³² La comprensión total de estos desarrollos requiere el dominio del análisis complejo. No obstante, un lector sin ese bagaje puede aprender cosas útiles en el libro de E. T. Whittaker y G. N. Watson, *Modern Analysis*, págs. 203-208, Cambridge University Press, Londres, 1935; o E. D. Rainville, *Intermediate Differential Equations*, Capítulo 6, Macmillan, Nueva York, 1964.

NOTA SOBRE RIEMANN. Ninguna mente del pasado ha ejercido influencia más profunda sobre los matemáticos del siglo XX que Bernhard Riemann (1826-1866), hijo de un pobre pastor de una parroquia rural en el norte de Alemania. Estudió las obras de Euler y Legendre cuando estaba aún en la escuela secundaria, y se dice que dominó el tratado de Legendre sobre teoría de números en menos de una semana. A pesar de ello, era tímido y muy modesto, con poco aprecio de su extraordinaria capacidad, de modo que a los diecinueve años llegó a la Universidad de Göttingen, siguiendo los deseos paternos, para estudiar teología y hacerse él mismo pastor. Afortunadamente, este respetable propósito se le atragantó pronto, y con el beneplácito de su padre se dedicó a las matemáticas.

La presencia del legendario Gauss hacía automáticamente de Göttingen el centro de la matemática mundial. Pero Gauss resultaba lejano e inaccesible, en particular para los estudiantes recién llegados, y Riemann abandonó tras un año esa universidad para trasladarse a la de Berlín. Allí atrajo la amable atención de Dirichlet y Jacobi, de quienes aprendió mucho. Dos años más tarde regresó a Göttingen, donde obtuvo su grado de Doctor en 1851. Durante los ocho años siguientes soportó una pobreza debilitante y produjo sus mejores obras. En 1854 fue nombrado Privatdozent (sin salario), que en ese tiempo era paso necesario en la carrera académica. Gauss murió en 1855, y Dirichlet fue llamado a Göttingen para sucederle. Dirichlet ayudó a Riemann cuanto estuvo en su mano, primero con un pequeño salario (una décima parte del de un profesor permanente) y después promocionándole a profesor ayudante. A su muerte, en 1859, Riemann le sucedió en su puesto. Los años de penuria habían quedado atrás, pero para entonces su salud estaba destrozada. A los 39 años murió de tuberculosis en Italia, en el último de los viajes que emprendió huyendo del frío y húmedo clima del norte de Alemania. Riemann tuvo una vida breve y publicó relativamente poco, pero sus trabajos alteraron de modo sustancial el desarrollo de la matemática tanto en análisis como en geometría y teoría de números³³.

Su primera publicación fue su célebre disertación de 1851 sobre la teoría general de funciones de una variable compleja³⁴. En ella, la principal preocupación de Riemann consistía en liberar el concepto de función analítica de toda dependencia respecto de expresiones explícitas, tales como series de potencias, y concentrarse en su lugar en principios generales e ideas geométricas. Basó su teoría sobre lo que hoy llamamos ecuaciones de Cauchy-Riemann, inventó el ingenioso instrumento de las superficies de Riemann para clarificar la naturaleza de las funciones multivaluadas y probó el teorema de la aplicación de Riemann. Gauss rara vez se sentía entusiasmado por los hallazgos de sus contemporáneos, pero en el informe oficial a la Facultad alababa calurosamente el trabajo de Riemann: «La disertación sometida por el señor Riemann ofrece evidencia convincente de las investigaciones extensas y profundas de su autor en aquellas partes del tema tratadas en la disertación, así como de una mente creativa, activa, auténticamente matemática, y de una originalidad gloriosamente fértil».

Riemann aplicó más tarde estas ideas al estudio de las funciones hipergeométricas y de Abel. En su trabajo sobre estas últimas manejaba una notable combinación de argumentos geométricos y de intuiciones físicas relacionadas con el principio de Dirichlet de la teoría del potencial. Con las superficies de Riemann construyó un puente entre

³³ Su *Gesammelte Mathematische Werke* (reimpresa por Dover en 1953) ocupa sólo un volumen, del que los dos tercios contiene material póstumo, no publicado en vida. De los nueve artículos que publicó, tan sólo cinco versan sobre matemáticas puras.

³⁴ *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, en *Werke*, págs. 3-43.

análisis y geometría que hizo posible dar expresión geométrica a las más importantes propiedades analíticas de las funciones. Su poderosa intuición le permitió con frecuencia descubrir tales propiedades, por ejemplo su versión del teorema de Riemann-Roch, simplemente pensando acerca de posibles configuraciones de superficies cerradas y realizando mentalmente experimentos físicos imaginarios sobre esas superficies. Los métodos geométricos de Riemann en análisis complejo constituyeron el origen real de la topología, un vasto campo de la geometría que trata aquellas propiedades de las figuras que son invariantes bajo deformaciones continuas.

En 1854 se le pidió un artículo con objeto de ser admitido como Privatdozent, y su respuesta fue otro trabajo seminal cuya influencia ha quedado grabada de forma imborrable en la matemática de nuestro tiempo³⁵. El problema que se planteó fue el de analizar las condiciones de Dirichlet (1829) para la representabilidad de una función por su serie de Fourier. Una de esas condiciones era que la función debía ser integrable. Pero ¿qué significa tal cosa? Dirichlet había utilizado la definición de Cauchy de integrabilidad, que se aplica sólo a funciones continuas o que posean a lo sumo un número finito de puntos de discontinuidad. Algunas funciones que aparecen en teoría de números sugirieron a Riemann que esa definición podía extenderse. Desarrolló el concepto de integral de Riemann tal como hoy figura en los libros de texto de cálculo, estableció condiciones necesarias y suficientes para la existencia de tal integral, y generalizó los criterios de Dirichlet para la validez de los desarrollos en series de Fourier. La famosa teoría de conjuntos de Cantor se inspiró directamente en un problema que aparecía en este trabajo, y estas ideas condujeron a su vez a la integral de Lebesgue y a tipos aún más generales de integración. Por tanto, las investigaciones pioneras de Riemann fueron los primeros pasos en una nueva rama de las matemáticas, la teoría de funciones de una variable real.

El teorema de reordenación de Riemann en teoría de series infinitas era un resultado incidental en ese artículo. Conocía el ejemplo de Dirichlet que mostraba cómo la suma de una serie condicionalmente convergente podía modificarse alterando el orden de sus términos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \log 2, \quad (13)$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2} \log 2. \quad (14)$$

Es claro que ambas series tienen los mismos términos pero diferentes sumas; porque en (14) los dos primeros términos positivos de (13) van seguidos por el primer término negativo, después los dos positivos próximos van seguidos del segundo negativo, etc. Riemann demostró que es posible reordenar los términos de una serie condicionalmente convergente de manera tal que la nueva serie sea convergente y tenga por suma cualquier número asignado previamente, o que sea divergente a ∞ o a $-\infty$.

Además de este ensayo, Riemann tuvo que presentar ante la Facultad una lección magistral, antes de ser nombrado en su puesto sin remuneración. Era costumbre que el candidato ofertara tres títulos, aceptando el Director del Departamento el primero de ellos. Sin embargo, Riemann situó imprudentemente en tercer lugar los fundamentos de

³⁵ Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, en *Werke*, páginas 227-264.

la geometría, un tema profundo que no tenía preparado, pero en el que Gauss había pensado a lo largo de 60 años. Naturalmente, Gauss sintió curiosidad por ver cómo se enfrentaría su «originalidad gloriosamente fértil» a tamaño reto, y para desesperación de Riemann escogió ese tema. Riemann dejó rápidamente todos sus restantes intereses del momento —«mis investigaciones sobre la conexión entre electricidad, magnetismo, luz y gravitación»— y redactó su lección en los dos meses siguientes. El resultado fue una de las cumbres de la matemática y probablemente la lección científica más importante jamás impartida³⁶. Se sabe que el propio Gauss se mostró sorprendido y entusiasmado.

La lección de Riemann presentaba en un lenguaje no técnico una amplia generalización de todas las geometrías conocidas, tanto euclídeas como no euclídeas. El campo se conoce hoy como geometría riemanniana, y aparte de su importancia en las matemáticas puras, resultó ser sesenta años más tarde el marco apropiado para la teoría de la relatividad general de Einstein. Como la mayoría de las grandes ideas de la ciencia, la geometría de Riemann es fácil de entender si se prescinde de detalles técnicos y se concentra uno en los aspectos fundamentales. Recordemos la geometría intrínseca de superficies curvadas que Gauss había descubierto veinticinco años antes. Si una superficie inmersa en el espacio tridimensional se define paramétricamente por tres funciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, entonces u y v se pueden interpretar como coordenadas de los puntos de la superficie. La distancia ds entre dos puntos próximos (u, v) y $(u + du, v + dv)$, a lo largo de la superficie, viene dada por la forma diferencial cuadrática de Gauss

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

donde E , F y G son ciertas funciones de u y v . Esta forma diferencial permite calcular longitud de curvas sobre la superficie, hallar las curvas geodésicas (las más cortas) y calcular la curvatura gaussiana de la superficie en cualquier punto, todo ello sin referencia alguna al espacio ambiente. Riemann generalizó esto descartando la noción de espacio ambiente e introduciendo la noción de variedad continua n -dimensional de puntos (x_1, x_2, \dots, x_n) . Impuso entonces una distancia arbitrariamente dada (o métrica) ds entre puntos próximos

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad y \quad (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n)$$

mediante una forma diferencial cuadrática

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j, \quad (15)$$

donde las g_{ij} son funciones apropiadas de x_1, x_2, \dots, x_n , y diferentes sistemas de g_{ij} definen geometrías riemannianas distintas sobre la variedad en cuestión. A continuación examinó la idea de curvatura para esas variedades riemannianas e investigó el caso especial de curvatura constante. Todo ello depende de una fuerte maquinaria computacional, de la

³⁶ Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, en *Werke*, págs. 272-286. Está traducido en D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1929.

que Riemann dispensó a su auditorio en su exposición, pero que incluyó luego en un artículo póstumo sobre la conducción del calor. En este trabajo introducía explícitamente el tensor de curvatura de Riemann, que se reduce al de Gauss para $n = 2$, y cuya anulación demostró ser necesaria y suficiente para que la métrica cuadrática dada fuera equivalente a la euclídea. Desde este punto de vista, el tensor de curvatura mide la desviación de la geometría riemanniana definida por (15) respecto de la geometría euclídea. Einstein resumió estas consideraciones en una única afirmación: «La geometría de Riemann de un espacio n -dimensional guarda la misma relación con la geometría euclídea de un espacio n -dimensional que la geometría general de superficies curvadas con la del plano».

El interés físico de las geodésicas se ve en su forma más simple en la siguiente consecuencia del principio de Hamilton en el cálculo de variaciones: si una partícula está obligada a moverse sobre una superficie curvada, y si ninguna fuerza actúa sobre ella, la partícula se moverá a lo largo de una geodésica³⁷. Una extensión directa de esta idea constituye el núcleo de la teoría general de la relatividad, que es esencialmente una teoría de la gravitación. Einstein concibió la geometría del espacio como una geometría de Riemann en la que la curvatura y las geodésicas están determinadas por la distribución de la materia; en este espacio curvado los planetas se mueven en sus órbitas en torno al sol siguiendo simplemente las geodésicas, en vez de describir trayectorias curvadas por una misteriosa fuerza gravitacional cuya naturaleza nadie había entendido jamás realmente.

En 1859 Riemann publicó su único trabajo relativo a la teoría de números, breve pero extraordinariamente profundo, cuyas apenas diez páginas están dedicadas al teorema de los números primos³⁸. Este poderoso esfuerzo produjo un oleaje que afectó a varias ramas de la matemática, y su influencia permanecerá probablemente durante miles de años más. Su punto de partida fue un notable descubrimiento de Euler un siglo antes: si s es un número real mayor que 1, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - (1/p^s)}, \quad (16)$$

donde la expresión de la derecha denota el producto de los números $(1 - p^{-s})^{-1}$ para todos los primos p . Para entender cómo surge esa identidad, notemos que $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots$ para $|x| < 1$, de manera que para cada p se tiene

$$\frac{1}{1 - (1/p^s)} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots.$$

Multiplicando esas series para todos los primos p y recordando que todo entero $n > 1$ es expresable de modo único como un producto de potencias de primos distintos, vemos que

³⁷ Esto se demuestra en el Apéndice B del Capítulo 12.

³⁸ Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, en *Werke*, págs. 145-153. Véase el enunciado del teorema de los números primos en nuestra nota sobre Chebyshev en el Apéndice D.

$$\begin{aligned} \prod_p \frac{1}{1 - (1/p^s)} &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \end{aligned}$$

que es la identidad (16). La suma de la serie de la izquierda en (16) es obviamente una función de la variable real $s > 1$, y la identidad establece una conexión entre el comportamiento de esta función y las propiedades de los primos. El propio Euler explotó esa conexión de varias maneras, pero Riemann adivinó que el acceso a los hechos más relevantes de la distribución de los números primos sólo puede lograrse permitiendo que s tome valores complejos. Denotó la función resultante por $\zeta(s)$, que desde entonces se llama la *función zeta de Riemann*:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots, \quad s = \sigma + it.$$

En este trabajo probó diversas propiedades importantes de esta función y se limitó a formular otras varias sin demostración. Durante el siglo que siguió a su muerte, muchos de los más insignes matemáticos le dedicaron grandes esfuerzos creando, de hecho, nuevas ramas del análisis gracias a sus intentos por demostrar sus aseveraciones. El primer éxito se debe a J. Hadamard en 1893 y, salvo una excepción, todas las afirmaciones de Riemann se han confirmado³⁹. Esta excepción es la famosa hipótesis de Riemann de que todos los ceros de $\zeta(s)$ en la banda $0 \leq \sigma \leq 1$ están sobre la línea central $\sigma = 1/2$. Este sigue siendo hoy el problema abierto más importante de las matemáticas, y es quizás el más difícil que la mente humana haya concebido jamás. En una nota fragmentaria hallada entre sus papeles póstumos, Riemann escribió que estos teoremas «se deducen de una expresión para la función $\zeta(s)$ que no he sido capaz de simplificar lo bastante como para publicarla»⁴⁰. Comentando este fragmento en 1944, Hadamard decía con justificada exasperación: «Todavía no tenemos la menor idea de a qué expresión pudo referirse»⁴¹. Y añade este otro comentario: «En general, la intuición de Riemann es fuertemente geométrica, pero no es este el caso en su trabajo sobre los números primos, aquél en el que esa intuición es más potente y misteriosa».

³⁹ Hadamard llegó a su demostración del teorema de los números primos en 1896. Véase E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Capítulo 3, Oxford University Press, Londres, 1951. Este tratado contiene 326 referencias bibliográficas.

⁴⁰ *Werke*, pág. 154.

⁴¹ *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, pág. 118, Dover, Nueva York, 1954.

SERIES DE FOURIER Y FUNCIONES ORTOGONALES

33. LOS COEFICIENTES DE FOURIER

En el estudio de muchos problemas físicos que conducen a ecuaciones en derivadas parciales se necesitan series trigonométricas de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad (1)$$

Tal ocurre, por ejemplo, en las teorías del sonido, de la conducción del calor, de las ondas electromagnéticas y de las vibraciones mecánicas¹. En el próximo capítulo examinaremos algunas de estas aplicaciones. Esta representación de funciones por series de potencias nos resulta familiar tanto por los cursos de cálculo como por el capítulo precedente. Una importante ventaja de las series (1) es que son capaces de representar funciones muy generales, con muchas discontinuidades, del tipo de las funciones discontinuas de «impulso» en ingeniería electrónica, mientras que las series de potencias sólo pueden representar funciones continuas con derivadas de todo orden.

A parte del gran valor práctico de las series trigonométricas a la hora de resolver problemas de física e ingeniería, su faceta puramente teórica ha influido profundamente en el desarrollo general del análisis matemático durante los últimos 250 años. En concreto, proporcionó la principal fuerza impulsora en la evolución del concepto de función, que en sus diversas ramificaciones es, sin duda, central en matemáticas; condujo a Riemann y Lebesgue a crear sus cada

¹ El término constante en (1) se escribe como $1/2a_0$ en lugar de a_0 tan sólo por razones de conveniencia. Ya veremos el porqué más adelante.

vez más potentes teorías de integración, y a Cantor su teoría de conjuntos; empujó a Weierstrass hacia su estudio crítico del sistema de los números reales y de las propiedades de continuidad y diferenciabilidad de funciones; y sugirió el contexto en el que la idea geométrica de ortogonalidad (perpendicularidad) logró desarrollarse como una de las nociones con mayor poder unificador del análisis moderno. A lo largo del capítulo tendremos ocasión de volver a estos comentarios.

Comenzamos nuestro estudio con algunos cálculos clásicos realizados por primera vez por Euler. Nuestro punto de vista es que la función $f(x)$ en (1) está definida sobre el intervalo cerrado $-\pi \leq x \leq \pi$, y deseamos hallar los coeficientes a_n y b_n de ese desarrollo en serie. Conviene suponer de momento que la serie es uniformemente convergente, ya que ello permite que la serie puede ser integrada término a término desde $-\pi$ hasta π^2 .

Como

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \, dx = 0 \quad (2)$$

para $n = 1, 2, \dots$, la integración término a término da

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = a_0 \pi,$$

es decir,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx. \quad (3)$$

Es interesante hacer notar que la fórmula (3) demuestra que el término constante $1/2a_0$ en (1) no es sino el valor medio de $f(x)$ sobre el intervalo. De forma análoga se calcula el coeficiente a_n . Así pues, si multiplicamos (1) por $\cos nx$ resulta

$$f(x) \cos nx = \frac{1}{2} a_0 \cos nx + \dots + a_n \cos^2 nx + \dots, \quad (4)$$

donde los términos no escritos contienen productos del tipo $\operatorname{sen} mx \cos nx$ o del tipo $\cos mx \cos nx$ con $m \neq n$. En este instante es necesario recordar las identidades trigonométricas

² Los lectores que no conocan la noción de convergencia uniforme pueden simplemente integrar la serie término a término, tal como Euler y sus contemporáneos hacían sin rubor, aunque deben recordar que esa operación no es siempre legítima y precisa en último término de justificación teórica.

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

que se deducen directamente de las fórmulas de suma y diferencia para el seno y el coseno. Ahora es fácil verificar que para valores enteros de m y $n \geq 1$ es

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0. \quad (5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, \quad m \neq n. \quad (6)$$

Ya estamos en disposición de integrar (4) término a término y obtener así

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi,$$

y por tanto

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx. \quad (7)$$

Por (3), la fórmula (7) es válida también para $n = 0$. Esa es la razón de que escribamos el término constante en (1) como $1/2a_0$ en lugar de a_0 . Se llega a la fórmula correspondiente a b_n por un procedimiento similar, es decir, multiplicando (1) por $\sin nx$, integrando término a término y utilizando el hecho conocido de que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0, \quad m \neq n. \quad (8)$$

De ahí que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = b_n \pi,$$

o sea,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx. \quad (9)$$

Estos cálculos muestran que si la serie (1) es uniformemente convergente los coeficientes a_n y b_n se pueden obtener a partir de $f(x)$ mediante las fórmulas anteriores. Sin embargo, esta situación es demasiado restrictiva para que nos sea de utilidad, porque ¿cómo saber si una función dada admite desarrollo mediante una serie trigonométrica uniformemente convergente? No lo sabemos, y por eso es mejor dejar de lado la idea de *hallar* los coeficientes a_n y b_n en el desarrollo (1), que puede existir o no y, en vez de eso, *definir* ciertos números a_n y b_n que se usarán entonces para construir la serie trigonométrica (1). Cuando se procede así, se llama a tales a_n y b_n los *coeficientes de Fourier* de la función $f(x)$, y a la serie (1) se le denomina *serie de Fourier* de $f(x)$. Así pues, una serie de Fourier es un tipo especial de serie trigonométrica, cuyos coeficientes se calculan aplicando (7) y (9) a cierta función $f(x)$. Para formar esa serie no es preciso suponer que $f(x)$ sea continua; basta que las integrales (7) y (9) existan, y para ello es suficiente que $f(x)$ sea integrable sobre el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ ³.

Naturalmente, confiamos en que la serie de Fourier de $f(x)$ sea convergente y tenga como suma $f(x)$, y que por tanto (1) constituya una representación válida de esa función. Pero desgraciadamente no siempre ocurre de tal guisa, pues existen muchas funciones integrables, e incluso continuas, cuya serie de Fourier diverge en uno o más puntos. Los tratados avanzados sobre series de Fourier sustituyen el signo de igualdad en (1) por el símbolo \sim , para recalcar que la serie de la derecha es la serie de Fourier de la función de la izquierda, sin que esta serie sea necesariamente convergente. Nosotros continuaremos utilizando el signo de igualdad porque las series obtenidas en este libro convergen para todo valor de x .

Del mismo modo que ser una serie de Fourier no implica ser convergente, la convergencia de una serie trigonométrica no quiere decir que ésta sea una serie de Fourier. Por ejemplo, es sabido que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{\log(1+n)} \quad (10)$$

converge para todo valor de x , pero también se sabe que no es una serie de Fourier⁴. Esto significa que los coeficientes en (10) no se pueden obtener apli-

³ En este contexto, «integrable» significa «integrable Riemann», que se define en términos de sumas inferiores y superiores, tal como se explica en la mayoría de los cursos de cálculo.

⁴ Respecto de la convergencia, véase el Problema 2(a) en el Apéndice C.12 de George F. Simmons, *Calculus With Analytic Geometry*, McGraw-Hill, Nueva York, 1985. El hecho de que no es una serie de Fourier se sigue como consecuencia del notable teorema de que la integral término a término de cualquier serie de Fourier (sea o no convergente) ha de ser convergente para todo x , lo cual no es cierto para (10).

cando las fórmulas (7) y (9) a *ninguna* función integrable $f(x)$, ni siquiera con la elección obvia de tomar como $f(x)$ la función dada por la suma de dicha serie.

Estos sorprendentes fenómenos advierten que la teoría de las series de Fourier dista mucho de ser trivial, pero suponen para el matemático una especial fascinación. El problema fundamental en esta cuestión es el de descubrir propiedades de una función integrable que garanticen que su serie de Fourier no sólo es convergente sino que tiene a $f(x)$ como suma. Enunciaremos propiedades de esa clase en la próxima sección, pero antes es deseable adquirir un poco de experiencia en el manejo de series de Fourier de funciones particulares.

Ejemplo 1. Hallar la serie de Fourier de la función $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

Por (3) se tiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = \left[\frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Si $n \geq 1$, entonces calculamos a_n usando (7) e integrando por partes con $u = x$, $dv = \cos nx \, dx$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

y usando (9) con $u = x$, $dv = \operatorname{sen} nx \, dx$ se obtiene

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi \cos n\pi}{n} - \frac{\pi \cos (-n\pi)}{n} \right] = \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

ya que $\cos n\pi = (-1)^n$. La sustitución de estos resultados en (1) nos sugiere que

$$x = 2 \left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \dots \right). \quad (11)$$

Debe quedar bien claro que el uso de signo de igualdad aquí es un deseo más que un conocimiento cierto.

En el Apéndice A demostramos que la serie (11) converge a x para $-\pi < x < \pi$. Para discutir la convergencia de la serie fuera de ese intervalo, introducimos el concepto de periodicidad. Una función $f(x)$ es *periódica* si $f(x+p) = f(x)$ para todo valor de x , donde p es una constante positiva⁵. Cualquier número positivo p con tal

⁵ Se cumple también que $f(x-p) = f(x)$, como se deduce sin más que sustituir x por $x-p$ en la ecuación anterior.

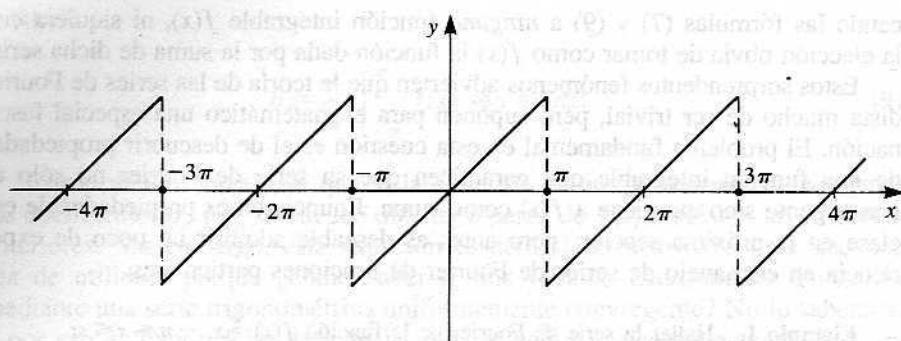


Figura 33

propiedad se llama un *período* de $f(x)$; por ejemplo, $\sin x$ en (11) tiene períodos 2π , 4π , ..., y $\sin 2x$ tiene períodos π , 2π , ...

Es fácil ver que cada término de la serie (11) tiene período 2π (de hecho, 2π es el menor período común a todos los términos) de manera que la suma también tiene período 2π . Eso quiere decir que el gráfico de la suma entre $-\pi$ y π se repite sobre cada intervalo sucesivo de longitud 2π a derecha e izquierda. En consecuencia, el gráfico de la suma presenta la apariencia dentada de la Figura 33. Es claro de ahí que la suma de la serie es igual a x sólo sobre el intervalo $-\pi < x < \pi$, pero no sobre toda la recta real $-\infty < x < \infty$.

Queda por ver lo que sucede en los puntos $x = \pm\pi$, $\pm 3\pi$, ..., donde la suma de la serie, como muestra la figura, tiene un salto brusco de $-\pi$ a $+\pi$. Poniendo $x = \pm\pi$, $\pm 3\pi$, ... en (11) vemos que todos los términos de la serie son cero. La figura refleja este hecho mediante la línea de puntos.

Los cuatro primeros términos de la serie (11) son

$$2 \sin x, \quad -\sin 2x, \quad \frac{2}{3} \sin 3x, \quad -\frac{1}{2} \sin 4x.$$

Estos y los dos siguientes se muestran como curvas numeradas en la Figura 34. La suma de los cuatro términos antes citados es

$$y = 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin 4x. \quad (12)$$

Puesto que esto es una suma parcial de una serie de Fourier, y esta serie converge a x en $-\pi < x < \pi$, esperamos que la suma parcial (12) aproxime a la función $y = x$ sobre ese intervalo. La precisión de la aproximación queda indicada por las líneas superiores en la Figura 34, que muestran esta suma parcial de cuatro términos y también las de seis y diez términos. Al crecer el número de términos, las curvas aproximantes tienden hacia $y = x$ para cada x fijo del intervalo $-\pi < x < \pi$, pero no para $x = \pm\pi$.

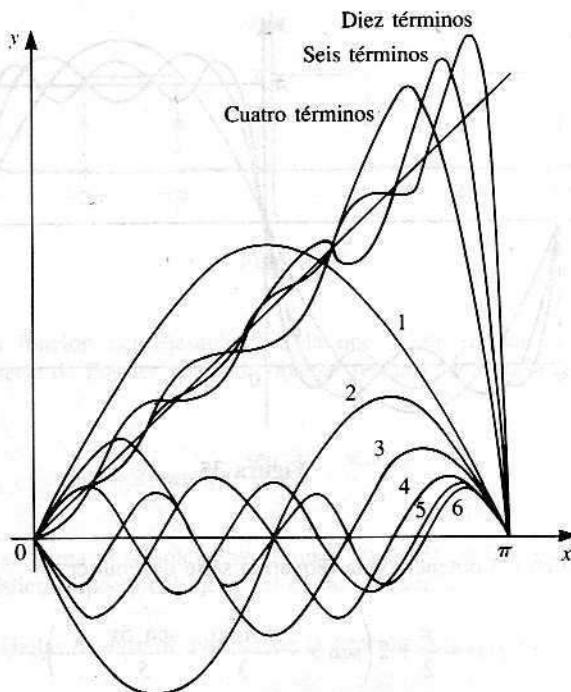


Figura 34

Ejemplo 2. Hallar la serie de Fourier de la función definida por

$$f(x) = 0, \quad -\pi \leq x < 0;$$

$$f(x) = \pi, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Por (3), (7) y (9) tenemos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 \, dx + \int_0^\pi \pi \, dx \right] = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \pi \cos nx \, dx = 0, \quad n \geq 1;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \pi \sin nx \, dx = \frac{1}{n} (1 - \cos n\pi) = \frac{1}{n} [1 - (-1)^n].$$

Como el n -ésimo número par es $2n$ y el n -ésimo número impar es $2n - 1$, la última de esas fórmulas nos dice que

$$b_{2n} = 0, \quad b_{2n-1} = \frac{2}{2n-1}.$$

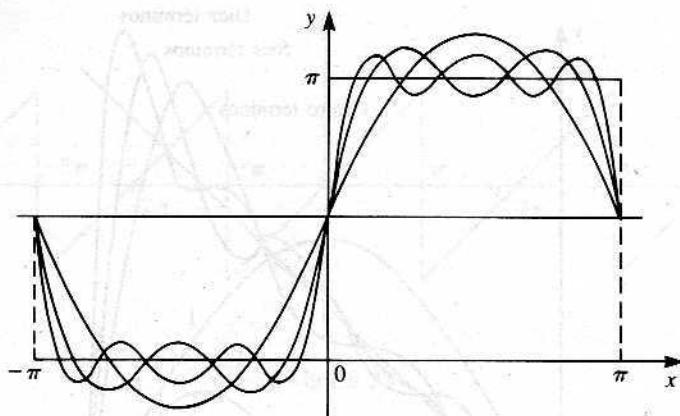


Figura 35

Sustituyendo en (1) obtenemos la requerida serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right). \quad (13)$$

Las sucesivas sumas parciales son

$$y = \frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{2} + 2 \sin x, \quad y = \frac{\pi}{2} + 2 \sin x + \frac{2}{3} \sin 3x, \dots$$

Las cuatro primeras están representadas, junto con la gráfica de $y = f(x)$, en la Figura 35.

En la próxima sección veremos que la serie (13) converge a la función $f(x)$ sobre los subintervalos $-\pi < x < 0$ y $0 < x < \pi$, pero no en los puntos 0 , π , $-\pi$. La suma de la serie (13) es claramente periódica, con período 2π , y por tanto el gráfico de esta suma tiene el aspecto de onda cuadrada que muestra la Figura 36, con un salto de 0 a π en cada punto $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. Además, esta suma tiene valor $\pi/2$ en cada uno de esos puntos de discontinuidad, hecho que indica la Figura 36 como antes, colocando un circulito en cada uno de ellos. Y al igual que antes, cada circulito está situado a mitad de camino entre el límite de la función en el punto de discontinuidad cuando nos acercamos a él por la derecha o por la izquierda.

Ejemplo 3. Hallar la serie de Fourier de la función definida por

$$f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad -\pi \leq x < 0;$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

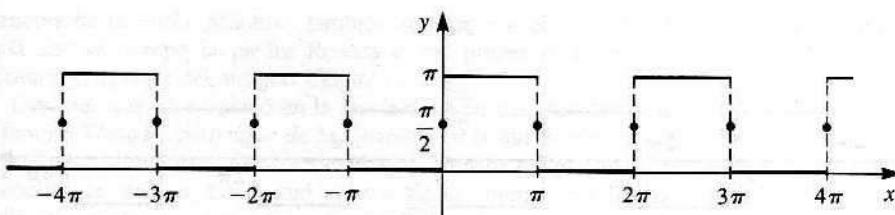


Figura 36

Esta es la función del Ejemplo 2 a la que se ha restado la constante $\pi/2$. Por tanto, su serie de Fourier se puede obtener restando $\pi/2$ de la serie (13), lo que lleva a

$$f(x) = 2 \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots \right). \quad (14)$$

El gráfico de su suma es simplemente la onda cuadrada de la Figura 36 descendida hasta ser simétrica respecto del eje x , tal como muestra la Figura 37.

Ejemplo 4. Hallar la serie de Fourier de la función definida por

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} x, \quad -\pi \leq x < 0;$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Esta es la función del Ejemplo 3 menos un medio de la función del Ejemplo 1. De modo que la serie de Fourier se puede deducir restando término a término un medio de la serie (11) a la serie (14):

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots \right) - \\ &\quad - \left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \dots \right) = \\ &= \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}. \end{aligned} \quad (15)$$

El gráfico de la suma de esta serie es la onda dentada de la Figura 38.

La validez de los procedimientos utilizados en los Ejemplos 3 y 4 se basa en el hecho, fácil de comprobar, de que la operación de formar los coeficientes de Fourier es lineal; es decir, los coeficientes de la suma $f(x) + g(x)$ son las sumas de los coeficientes respectivos para $f(x)$ y $g(x)$, y si c es una constante, los coeficientes para $cf(x)$ son c veces los de $f(x)$. Asimismo, la serie de Fourier de una función constante es sencillamente la propia constante.

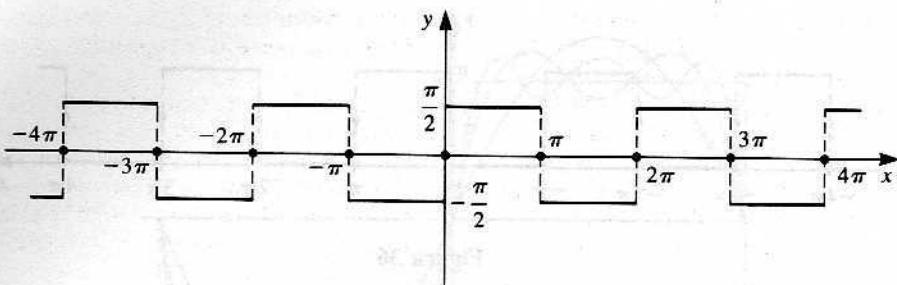


Figura 37

Nota 1. En la Sección 36 mostramos cómo el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ de longitud 2π puede ser reemplazado por un intervalo de longitud arbitraria, al único precio de perder una parte de la simplicidad de nuestras fórmulas. Esta extensión del método es necesaria en muchas aplicaciones prácticas.

Nota 2. Nuestra tarea en esta sección y en el resto del capítulo reposa sobre la propiedad de *ortogonalidad* del sistema de funciones

$$1, \cos nx, \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

sobre el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. Eso quiere decir que la integral del producto de cualquier par de esas funciones sobre el intervalo es cero, lo cual constituye precisamente el punto crucial en las ecuaciones (2), (5), (6) y (8). Volveremos a este concepto en las Secciones 37 y 38, y lo usaremos para dar una estructura geométrica satisfactoria a la teoría de series de Fourier.

NOTA SOBRE FOURIER. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), un excelente físico matemático, fue amigo de Napoleón (si se puede afirmar que tales personajes tienen amigos), a quien acompañó a Egipto en 1798. A su regreso pasó a ser Prefecto del distrito de Isère en el sudeste de Francia, y en ese cargo construyó la primera carretera desde

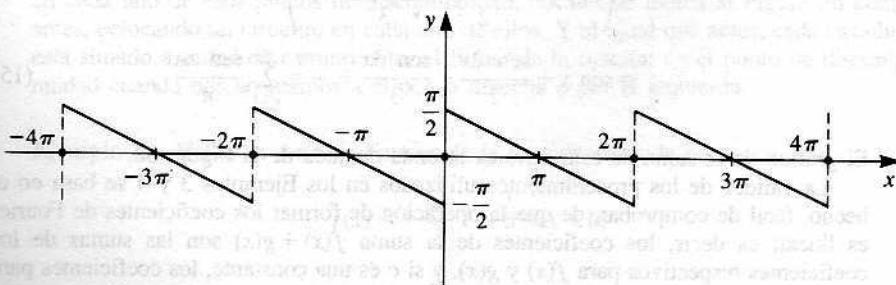


Figura 38

Grenoble hasta Turín. Mantuvo también amistad con el joven Champollion, quien descifraría con el tiempo la piedra Rosetta como primer paso hacia la comprensión de la escritura jeroglífica del antiguo Egipto.

Durante esos años trabajó en la teoría de la conducción del calor, publicando en 1822 su famosa *Théorie Analytique de la Chaleur*, en la que hacía amplio uso de las series que ahora llevan su nombre. Estas series fueron fundamentales para el posterior desarrollo de la noción de función. La actitud general en ese tiempo era llamar a $f(x)$ función si se podía representar mediante una sola expresión tal como un polinomio, una combinación finita de funciones elementales, una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, o una serie trigonométrica de la forma

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Si la gráfica de $f(x)$ era «arbitraria», por ejemplo una línea poligonal con algunos puntos angulosos o saltos, entonces no se aceptaba como función genuina. Fourier sostenía que gráficos «arbitrarios» eran representables por series trigonométricas y debían considerarse, en consecuencia, como funciones legítimas. Para muchos fue una auténtica sorpresa el comprobar que tenía razón. Faltaba todavía mucho tiempo para que estas nociones estuviesen claras, y no es accidental que la definición de función aceptada hoy universalmente fuera enunciada en 1837 por Dirichlet en un trabajo relativo a las series de Fourier. Incluso la definición clásica de la integral definida debida a Riemann fue dada por vez primera en su trabajo fundamental de 1854 sobre las series de Fourier. En realidad, muchos de los descubrimientos matemáticos más importantes del siglo XIX están íntimamente ligados a la teoría de series de Fourier, y las aplicaciones a la física matemática no van a la zaga en profundidad.

Fourier es uno de los pocos afortunados cuyo nombre ha echado raíces en todas las lenguas civilizadas como un adjetivo familiar a los físicos y matemáticos del mundo entero.

PROBLEMAS

1. Hallar la serie de Fourier de la función definida por

$$f(x) = \pi, \quad -\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$f(x) = 0, \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi.$$

2. Hallar la serie de Fourier de la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

3. Hallar la serie de Fourier de la función definida por

$$f(x) = 0, \quad -\pi \leq x < 0;$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

4. Resolver el Problema 3 sustituyendo $\operatorname{sen} x$ por $\cos x$.
5. Hallar la serie de Fourier de la función definida por

$$(a) \quad f(x) = \pi, \quad -\pi \leq x \leq \pi;$$

$$(b) \quad f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\pi \leq x \leq \pi;$$

$$(c) \quad f(x) = \cos x, \quad -\pi \leq x \leq \pi;$$

$$(d) \quad f(x) = \pi + \operatorname{sen} x + \cos x, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Préstese especial atención al razonamiento usado para establecer las conclusiones, incluyendo líneas alternativas de argumentación.

Resolver los Problemas 6 y 7 usando los métodos de los Ejemplos 3 y 4, sin calcular los coeficientes de Fourier.

6. Hallar la serie de Fourier de la función definida por

$$(a) \quad f(x) = -a, \quad -\pi \leq x < 0 \text{ y } f(x) = a, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (a \text{ es un número positivo});$$

$$(b) \quad f(x) = -1, \quad -\pi \leq x < 0 \text{ y } f(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$(c) \quad f(x) = -\frac{\pi}{4}, \quad -\pi \leq x < 0 \text{ y } f(x) = \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$(d) \quad f(x) = -1, \quad -\pi \leq x < 0 \text{ y } f(x) = 2, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$(e) \quad f(x) = 1, \quad -\pi \leq x < 0 \text{ y } f(x) = 2, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

7. Obtener la serie de Fourier de la función del Problema 2 a partir del resultado del Problema 1. *Ayuda:* Comenzar formando $\pi -$ (la función del Ejemplo 2).
8. Sin utilizar para nada series de Fourier, probar gráficamente que la onda dentada de la Figura 33 puede representarse como la suma de una onda dentada de período π y una onda cuadrada de período 2π .

34. EL PROBLEMA DE LA CONVERGENCIA

Los ejemplos y problemas de la Sección 33 ilustran varios hechos característicos de las series de Fourier que ahora pasamos a tratar desde una perspectiva general. Pretendemos entender adecuadamente un conjunto de condiciones que garanticen no sólo la convergencia de la serie de Fourier de una función, sino que dicha serie converja a la función dada.

Empezaremos observando que cada término de la serie

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad (1)$$

tiene período 2π y, por tanto, si la función $f(x)$ ha de ser representada por ella, $f(x)$ ha de tener período 2π . Siempre que consideremos una serie como (1) supondremos que $f(x)$ viene dada inicialmente sobre el intervalo básico $-\pi \leq x < \pi$ o $-\pi < x \leq \pi$, y que para cualquier otro valor de x , $f(x)$ está definida por la condición de periodicidad

$$f(x + 2\pi) = f(x). \quad (2)$$

En particular, (2) requiere que debamos tener siempre $f(\pi) = f(-\pi)$. Así pues, la función completa que consideramos es la llamada «extensión periódica» de la porción originalmente dada a los sucesivos intervalos de longitud 2π a derecha e izquierda del intervalo básico.

La expresión *discontinuidades simples* (o *discontinuidades con salto*) se utiliza para describir la situación en que una función tiene un salto finito en un punto $x = x_0$.

Ello significa que $f(x)$ tiende hacia límites finitos pero diferentes cuando nos acercamos a x_0 por la derecha y por la izquierda, tal como indica la Figura 39. Podemos formular este comportamiento escribiendo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0 - \varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0 + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

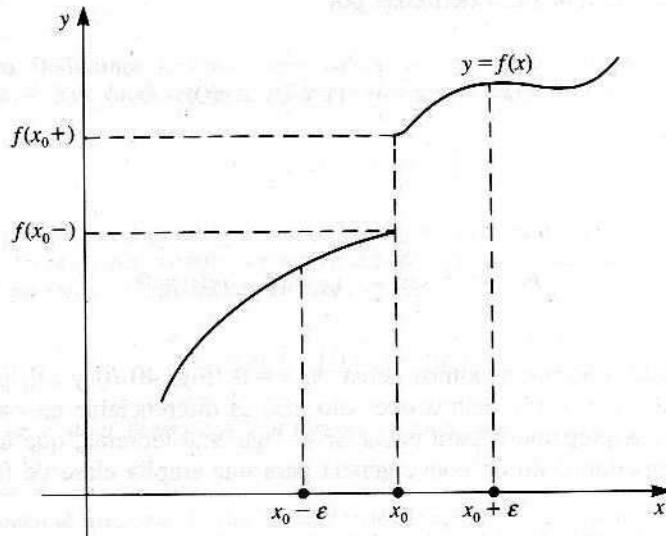


Figura 39

donde se sobrentiende que ambos límites existen y son finitos. Será conveniente denotar esos límites por los símbolos abreviados $f(x_0^-)$ y $f(x_0^+)$, de modo que la desigualdad anterior pasa a ser

$$f(x_0^-) \neq f(x_0^+).$$

Una función $f(x)$ se dice que es *acotada* si es válida una desigualdad del tipo

$$|f(x)| \leq M$$

para cierta constante M y para todo x bajo consideración. Por ejemplo, las funciones x^2 , e^x y $\operatorname{sen} x$ son acotadas sobre $-\pi \leq x < \pi$, pero $f(x) = 1/(\pi - x)$ no lo es. Puede demostrarse (Problema 7) que si una función acotada $f(x)$ tiene sólo un número finito de discontinuidades y sólo un número finito de máximos y mínimos, entonces todas sus discontinuidades son simples. Quiere ello decir que $f(x^-)$ y $f(x^+)$ existen en todo punto x , y que los puntos de continuidad son aquellos en que $f(x^-) = f(x^+)$.

Cada una de las funciones que muestran las Figuras 33, 36, 37 y 38 satisfacen esas condiciones en todo intervalo finito. Sin embargo, la función definida por

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

tiene infinitos máximos cerca de $x = 0$, y la discontinuidad en $x = 0$ no es simple [Fig. 40 a)]. Las funciones definidas por

$$g(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad g(0) = 0$$

y

$$h(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad h(0) = 0$$

tienen también infinitos máximos cerca de $x = 0$ [Fig. 40 b) y c)], pero ambas son continuas en $x = 0$, mientras que sólo $h(x)$ es diferenciable en ese punto.

Ya estamos preparados para enunciar el siguiente teorema, que establece el deseado comportamiento de convergencia para una amplia clase de funciones.

Teorema de Dirichlet. *Sea $f(x)$ definida y acotada en $-\pi \leq x < \pi$ con sólo un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos y mínimos en ese*

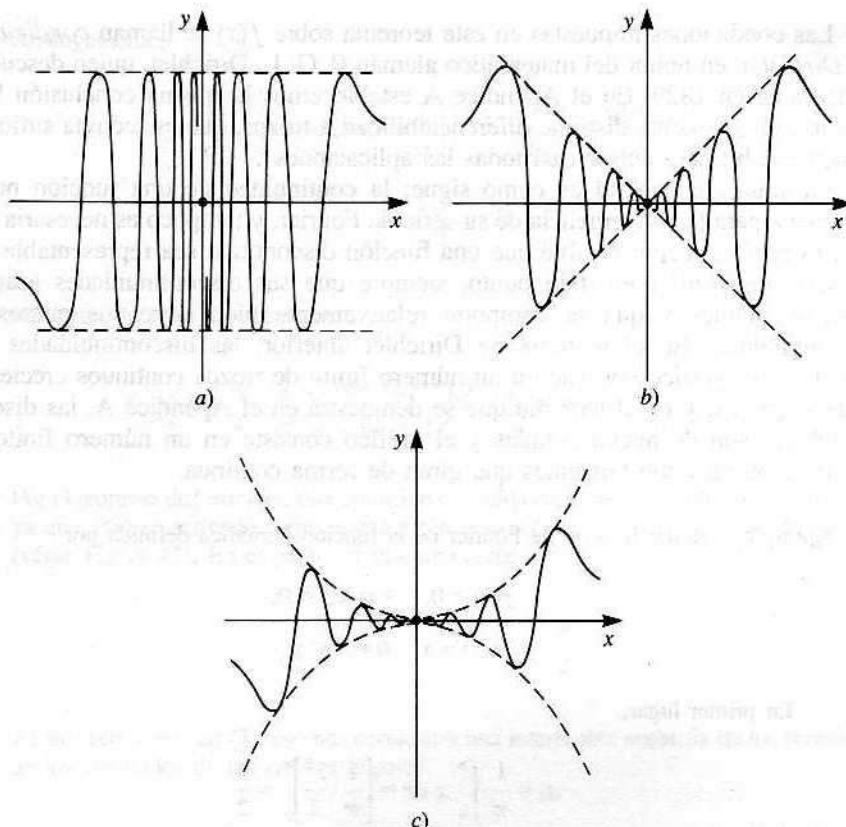


Figura 40

intervalo. Definamos $f(x)$ para otros valores de x por la condición de periodicidad $f(x + 2\pi) = f(x)$. Entonces la serie de Fourier de $f(x)$ converge a

$$\frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)]$$

en todo punto x , y por tanto converge a $f(x)$ en todo punto de continuidad de la función. Así pues, si se redefine en todo punto de discontinuidad el valor de la función como el promedio de sus límites laterales en él,

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)],$$

la serie de Fourier representa a la función en todo punto⁶.

⁶ Recordemos al lector que el valor de una función integrable puede redefinirse en un número finito de puntos sin modificar el valor de su integral y, por consiguiente, sin cambiar su serie de Fourier.

Las condiciones impuestas en este teorema sobre $f(x)$ se llaman *condiciones de Dirichlet*, en honor del matemático alemán P. G. L. Dirichlet, quien descubrió el teorema en 1829. En el Apéndice A establecemos la misma conclusión bajo hipótesis ligeramente distinta, diferenciabilidad a trozos, que es todavía suficientemente débil para cubrir casi todas las aplicaciones⁷.

La situación general es como sigue: la continuidad de una función no es suficiente para la convergencia de su serie de Fourier, y tampoco es necesaria⁸. O sea, es perfectamente posible que una función discontinua sea representable por su serie de Fourier en todo punto, siempre que sus discontinuidades sean lo bastante débiles y que se comporte relativamente bien entre sus puntos de discontinuidad. En el teorema de Dirichlet anterior, las discontinuidades son simples y el gráfico consiste en un número finito de trozos continuos crecientes o decrecientes; y en el teorema que se demuestra en el Apéndice A, las discontinuidades son de nuevo simples y el gráfico consiste en un número finito de trozos continuos con tangentes que giran de forma continua.

Ejemplo. Hallar la serie de Fourier de la función periódica definida por

$$f(x) = 0, \quad -\pi \leq x < 0;$$

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x < \pi.$$

En primer lugar,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \left[\frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Para $n \geq 1$, integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[x \frac{\operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{1}{\pi n^2} [(-1)^n - 1], \end{aligned}$$

luego

$$a_{2n} = 0 \quad \text{y} \quad a_{2n-1} = -\frac{2}{\pi(2n-1)}.$$

⁷ Demostraciones algo más generales del teorema de Dirichlet pueden verse en E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 2.^a ed., Oxford University Press, 1950, págs. 406-407; en W. Rogosinski, *Fourier Series*, Chelsea, Nueva York, 1950, págs. 72-74; y en Béla Sz.-Nagy, *Introduction to Real Functions and Orthogonal Expansions*, Oxford University Press, 1965, páginas 399-402.

⁸ Hallar condiciones necesarias y suficientes a la vez constituye uno de los problemas más importantes sin resolver en las matemáticas hasta hoy.

Análogamente,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi \cos n\pi}{n} \right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier es

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}. \quad (3)$$

Por el teorema de Dirichlet, esta ecuación es válida en todos los puntos de continuidad, ya que $f(x)$ se entiende como la extensión periódica de la porción dada inicialmente (véase Figura 41). En el punto de discontinuidad $x = \pi$, la serie converge a

$$\frac{1}{2} [f(\pi^-) + f(\pi^+)] = \frac{\pi}{2}.$$

Al sustituir $x = \pi$ en (3), eso nos conduce a una interesante suma, la de los recíprocos de los cuadrados de los enteros impares,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}. \quad (4)$$

La misma suma se obtiene sustituyendo el punto de continuidad $x = 0$ en (3). Además, podemos usar (4) para hallar la suma de los recíprocos de los cuadrados de *todos* los enteros positivos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (5)$$

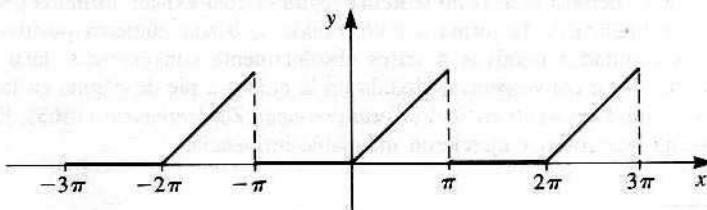


Figura 41

Basta a tal fin escribir

$$\sum \frac{1}{n^2} = \sum \frac{1}{(2n)^2} + \sum \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8},$$

$$\frac{3}{4} \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \text{y} \quad \sum \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La suma (5) fue descubierta por Euler en 1736, y es uno de los hallazgos más impresionantes de los comienzos de la teoría de series infinitas⁹.

NOTA SOBRE DIRICHLET. Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático alemán, hizo abundantes contribuciones de gran valor al análisis y a la teoría de números. Marchó joven a París, atraído por el renombre de Cauchy, Fourier y Legendre, pero le influyó todavía más su encuentro y contacto permanente con las *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) de Gauss. Esta obra prodigiosa, pero crítica, contenía muchos de los más profundos resultados obtenidos por el maestro en teoría de números, y era comprendido por muy escasos matemáticos en ese tiempo. Como diría Kummer más tarde, «para Dirichlet no fue suficiente estudiar las *Disquisitiones* de Gauss una o varias veces, sino que mantuvo contacto con el torrente de pensamientos matemáticos que contenía, escudriñándolo una y otra vez. Por eso el libro jamás fue a parar a sus estanterías, ya que siempre se encontraba sobre su mesa de trabajo. Dirichlet fue el primero que no sólo comprendió esa obra sino que la hizo accesible a los demás». Al final de su vida, Dirichlet se convirtió en amigo y discípulo de Gauss, a la par que amigo y consejero de Riemann, a quien ayudó en su disertación doctoral. En 1855, tras dar clases en Berlín durante muchos años, sucedió a Gauss en su cátedra de Göttingen.

Uno de los primeros logros de Dirichlet constituye una piedra angular del análisis: en 1829 dio la primera demostración satisfactoria de que ciertas clases de funciones son realmente iguales a las sumas de sus series de Fourier. Hasta entonces, todo el trabajo realizado había consistido en manipulaciones poco críticas de las fórmulas; Dirichlet transformó el tema en matemáticas genuinas, en el sentido moderno del término. Como subproducto de tal investigación, contribuyó en gran medida a la comprensión correcta de la naturaleza de la noción de función y dio la definición que ahora se usa con más frecuencia, a saber, que y es función de x cuando a cada valor de x en un intervalo dado le corresponde un único valor de y . Añadía que no importa si y depende de x de acuerdo con alguna «fórmula» o «ley» u «operación matemática», y recalca esto mediante el ejemplo de la función que toma valor 1 en todo x racional y valor 0 en todo x irracional.

Sus dos trabajos más relevantes fueron quizás dos largas memorias de 1837 y 1839 en las que hizo contribuciones muy importantes al análisis y a la teoría de números. En la primera de ellas demostró su bello teorema según el cual existen infinitos primos en toda progresión aritmética de la forma $a + nb$, donde a, b son números positivos sin factor común. Sus resultados relativos a series absolutamente convergentes datan también de 1837. Su criterio de convergencia, aludido en la nota 4 a pie de página en la Sección 33, se publicó a título póstumo en su *Vorlesungen über Zahlentheorie* (1863). Estas lecturas vieron muchas ediciones y ejercieron indudable influencia.

⁹ Para conocer el modo maravillosamente ingenioso en que Euler llegó a (5), véase el Apéndice A.12 en el libro de Simmons citado en la nota 4 a pie de página.

Se interesó asimismo por la física matemática, y formuló el llamado principio de Dirichlet en teoría del potencial, según el cual existen funciones armónicas (o sea, funciones que satisfacen la ecuación de Laplace) con valores de contorno prefijados. Riemann, quien dio al principio ese nombre, lo utilizó con eficacia en varias de sus más brillantes investigaciones. Hilbert dio una demostración rigurosa del principio de Dirichlet a comienzos de este siglo.

PROBLEMAS

- En los Problemas 1, 2, 3, 4, 6 de la Sección 33, esbozar el gráfico de la suma de cada serie de Fourier en el intervalo $-5\pi \leq x \leq 5\pi$.
- Usar el ejemplo del texto para escribir sin cálculos la serie de Fourier de la función definida por

$$f(x) = -x, \quad -\pi < x \leq 0;$$

$$f(x) = 0, \quad 0 < x \leq \pi.$$

Dibujar el gráfico de esta suma sobre el intervalo $-5\pi \leq x \leq 5\pi$.

- Hallar la serie de Fourier de la función periódica definida por

$$f(x) = -\pi, \quad -\pi \leq x < 0;$$

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x < \pi.$$

Dibujar el gráfico de la suma de esa serie en el intervalo $-5\pi \leq x \leq 5\pi$ y hallar los valores numéricos que implica la convergencia en los puntos de discontinuidad $x = 0$ y $x = \pi$.

- (a) Probar que la serie de Fourier de la función periódica definida por $f(x) = 0$, $-\pi \leq x < 0$ y $f(x) = x^2$, $0 \leq x < \pi$ es

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

- Dibujar el gráfico de la suma de esa serie en el intervalo $-5\pi \leq x \leq 5\pi$.
- Usar la serie en (a) con $x = 0$ y $x = \pi$ para obtener las sumas

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

y

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

- (d) Deducir la segunda de las sumas en (c) a partir de la primera. Ayuda: Sumar $2 \sum \left(\frac{1}{2n} \right)^2$ en ambos lados.
5. (a) Hallar la serie de Fourier de la función periódica definida por $f(x) = e^x$, $-\pi \leq x < \pi$. Ayuda: Recordar que $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$.
- (b) Dibujar el gráfico de la suma de esa serie sobre el intervalo $-5\pi \leq x \leq 5\pi$.
- (c) Usar la serie en (a) para establecer las sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{tgh} \frac{\pi}{\pi} - 1 \right]$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sh} \frac{\pi}{\pi} - 1 \right].$$

6. Los matemáticos prefieren que las clases de funciones que estudian formen espacios lineales, es decir, que sean cerradas bajo las operaciones de suma y producto por escalares. Desgraciadamente, eso no ocurre para la clase de funciones definidas en el intervalo $-\pi \leq x < \pi$ que satisfacen las condiciones de Dirichlet. Comprobar esta afirmación examinando las funciones

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} + 2x \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

y

$$g(x) = -2x.$$

7. Si $f(x)$ está definida sobre el intervalo $-\pi \leq x < \pi$ y satisface allí las condiciones de Dirichlet, probar que $f(x-)$ y $f(x+)$ existen en el punto del extremo de la derecha. Ayuda: Cada punto de discontinuidad interior está aislado de los demás, en el sentido de que la función es continua en todos los puntos próximos; además, a cada lado de uno de esos puntos y suficientemente cerca de él, la función no oscila, luego es creciente o decreciente.

35. FUNCIONES PARES E IMPARES. SERIES DE SENOS Y DE COSENOS

En principio, en las secciones precedentes pudimos haber trabajado en cualquier intervalo de longitud 2π , por ejemplo sobre el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$. Sin embargo, el intervalo simétrico $-\pi \leq x \leq \pi$ ofrece ventajas notorias para explotar las propiedades de simetría de las funciones, como ahora mostraremos.

Una función $f(x)$ definida en ese intervalo (o sobre cualquier otro intervalo simétrico) se dice que es *par* si

$$f(-x) = f(x), \tag{1}$$

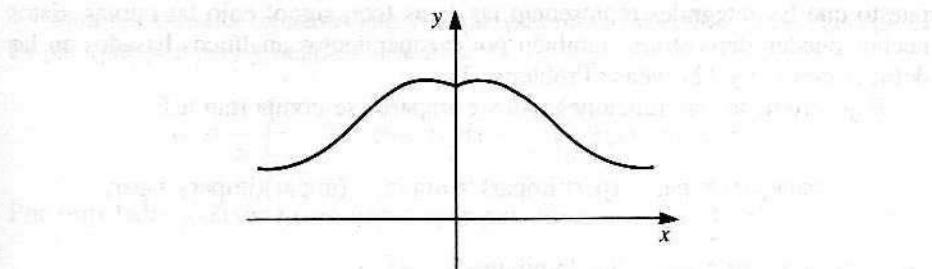


Figura 42

e impar si

$$f(-x) = -f(x). \quad (2)$$

Así, x^2 y $\cos x$ son pares, mientras que x^3 y $\sin x$ son impares. La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y, como indica la Figura 42, y la de una impar es antisimétrica (Fig. 43). Poniendo $x=0$ en (2) vemos que una función impar siempre cumple $f(0)=0$. Es claro de las figuras que

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{si } f(x) \text{ es par}, \quad (3)$$

e

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad \text{si } f(x) \text{ es impar}, \quad (4)$$

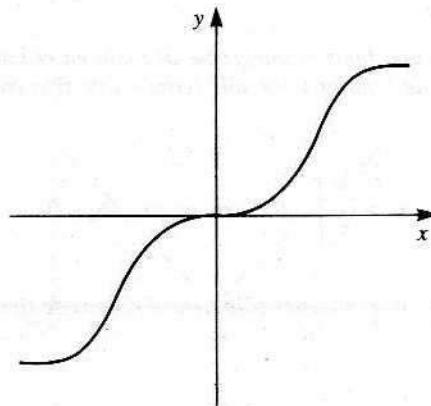


Figura 43

puesto que las integrales representan las áreas (con signo) bajo las curvas. Estos hechos pueden demostrarse también por razonamientos analíticos basados en las definiciones (1) y (2) (véase Problema 3).

Bajo producto, las funciones pares e impares se comportan así:

$$(\text{par})(\text{par}) = \text{par}, \quad (\text{par})(\text{impar}) = \text{impar}, \quad (\text{impar})(\text{impar}) = \text{par},$$

que corresponden a las reglas familiares

$$(+1)(+1) = +1, \quad (+1)(-1) = -1, \quad (-1)(-1) = +1.$$

Por ejemplo, para probar la segunda de ellas, consideremos la función $F(x) = f(x)g(x)$, con f par y g impar. Entonces

$$F(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)] = -f(x)g(x) = -F(x),$$

lo que demuestra que el producto $f(x)g(x)$ es impar. Las otras dos se demuestran análogamente. A título de ejemplo, deducimos que $x^3 \cos nx$ es impar, porque x^3 es impar y $\cos nx$ es par, de modo que (4) nos dice que

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos nx dx = 0,$$

sin necesidad de integración por partes.

El siguiente teorema sencillo pone de relieve la importancia de estas ideas en el estudio de las series de Fourier.

Teorema. *Sea $f(x)$ una función integrable definida en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. Si $f(x)$ es par, su serie de Fourier tiene sólo términos de tipo coseno y sus coeficientes vienen dados por*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0. \quad (5)$$

Si $f(x)$ es impar, su serie de Fourier sólo tiene términos de tipo seno, con coeficientes dados por

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx. \quad (6)$$

Para demostrarlo, tomemos una $f(x)$ par en primer lugar. Por tanto, $f(x) \cos nx$ es par (par por par) y según (3) tenemos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Por otro lado, $f(x) \sin nx$ es impar (par por impar), luego (4) nos dice que

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0,$$

lo cual completa el argumento para (5). Es fácil probar (6) de forma similar.

Ejemplo 1. (a) Consideremos brevemente la función $f(x) = x$ sobre el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. Puesto que es impar, su serie de Fourier es de tipo seno, y en consecuencia no es preciso ocuparse en calcular los coeficientes de tipo coseno. En la Sección 33 vimos que su serie de Fourier es

$$x = 2 \left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \dots \right), \quad (7)$$

y sabemos que este desarrollo es válido sólo sobre el intervalo abierto $-\pi < x < \pi$ pero no en los puntos extremos $x = \pm \pi$, porque toda serie de tipo seno converge a cero en esos puntos.

(b) Consideremos ahora la función $f(x) = |x|$ sobre el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ (Figura 44). Como es par, su serie de Fourier se reduce a una serie de cosenos, y por (5) tenemos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx.$$

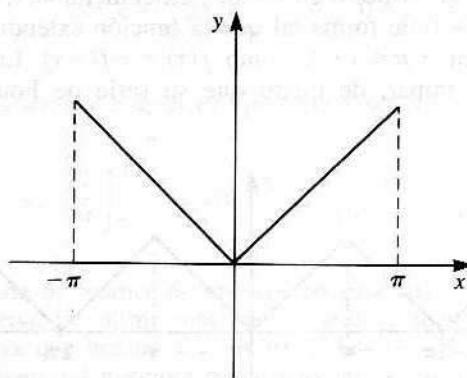


Figura 44

Es fácil ver que $a_0 = \pi$, y para $n \geq 1$ una integración por partes da

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1].$$

De ahí que

$$a_{2n} = 0 \quad \text{y} \quad a_{2n-1} = -\frac{4}{\pi(2n-1)^2},$$

y llegamos al desarrollo

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right). \quad (8)$$

La extensión periódica de la función inicialmente dada se muestra en la Figura 45. De lo dicho en la Sección 34 se desprende que la serie (8) converge a esa extensión para todo x , y por tanto (8) es un desarrollo válido sobre el intervalo cerrado $-\pi \leq x \leq \pi$.

Como $|x| = x$ para $x \geq 0$, las dos series (7) y (8) son ambas desarrollos de una misma función $f(x) = x$ sobre el intervalo $0 \leq x \leq \pi$. La primera serie (7) se llama una *serie de Fourier de tipo seno* para x , y (8) se llama una *serie de Fourier de tipo coseno* para x . Análogamente, cualquier función $f(x)$ definida en $0 \leq x \leq \pi$ que satisfaga las condiciones de Dirichlet allí, puede desarrollarse en una serie de Fourier de tipo seno o en una serie de Fourier de tipo coseno sobre ese intervalo, con la advertencia de que la de tipo seno no puede converger a $f(x)$ en los puntos extremos $x = 0$ y $x = \pi$ a menos que f tome valor cero en ellos.

Para hallar la serie de Fourier de tipo seno de $f(x)$, redefinimos la función (si es necesario) dándole valor 0 en $x = 0$, y extendiéndola a continuación sobre el intervalo $-\pi \leq x < 0$ de forma tal que la función extendida sea impar. Esto es, definimos $f(x)$ en $-\pi \leq x < 0$ como $f(x) = -f(-x)$. La función así extendida es obviamente impar, de modo que su serie de Fourier sólo contiene

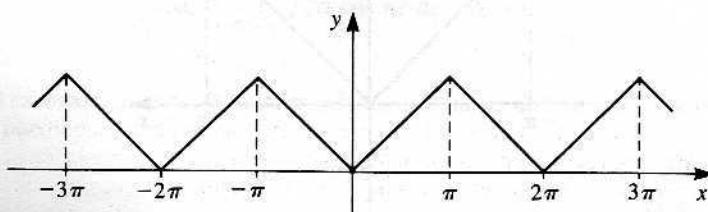


Figura 45

términos de tipo seno, con coeficientes dados por (6). De forma similar se obtiene la serie de Fourier de tipo coseno de $f(x)$, extendiendo la función a una función par sobre el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ y usando (5) para calcular sus coeficientes. Con respecto a las series de tipo seno o coseno aquí descritas queremos insistir en que la función original no se supone a priori par o impar, o periódica, ni siquiera definida. Se trata de una función esencialmente arbitraria sobre el intervalo $0 \leq x \leq \pi$, salvo las débiles restricciones que imponen las condiciones de Dirichlet.

Ejemplo 2. Hallar la serie de Fourier de tipo seno y la serie de Fourier de tipo coseno de la función $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$.

Para la serie de Fourier de tipo seno, (6) da

$$a_n = 0 \quad y \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos x \operatorname{sen} nx dx.$$

Para $n = 1$ se tiene $b_1 = 0$, y para $n > 1$ un sencillo cálculo muestra que

$$b_n = \frac{2n}{\pi} \left[\frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} \right].$$

Por tanto, tenemos

$$b_{2n-1} = 0 \quad y \quad b_{2n} = \frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)},$$

y en consecuencia la serie de senos es

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} 2nx}{4n^2 - 1}, \quad 0 < x < \pi.$$

Para hallar la serie de Fourier de tipo coseno, observemos que (5) da $b_n = 0$ y

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos x \operatorname{sen} nx dx = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n \neq 1. \end{cases}$$

Por tanto, la serie de Fourier de tipo coseno para $\cos x$ es simplemente $\cos x$, como cabía esperar. La misma conclusión se deduce directamente de la identidad $\cos x = \cos x$, ya que nuestro análisis de la Sección 33 enseña que toda serie trigonométrica finita (el miembro de la derecha) es automáticamente la serie de Fourier de su suma (el de la izquierda).

PROBLEMAS

1. Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas:

$$x^5 \operatorname{sen} x, x^2 \operatorname{sen} 2x, e^x, (\operatorname{sen} x)^3, \operatorname{sen} x^2, \cos(x+x^3), x+x^2+x^3, \log \frac{1+x}{1-x}.$$

2. Demostrar que cualquier función $f(x)$ definida sobre un intervalo simétrico se puede escribir como la suma de una función par y una impar. Ayuda: $f(x) = 1/2[f(x) + f(-x)] + 1/2[f(x) - f(-x)]$.
3. Probar analíticamente las propiedades (3) y (4), haciendo el cambio $x = -t$ en la parte de la integral desde $-a$ hasta 0 y usando las definiciones (1) y (2).
4. Probar que la serie de Fourier de tipo seno de la función constante $f(x) = \pi/4$ es

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots, \quad 0 < x < \pi.$$

¿Qué suma se obtiene poniendo $x = \pi/2$? ¿Cuál es la serie de Fourier de tipo coseno de esa función?

5. Hallar la serie de Fourier de la función de período 2π definida por $f(x) = \cos 1/2 x$, $-\pi \leq x \leq \pi$. Esbozar la gráfica de la suma de esta serie en el intervalo $-5\pi \leq x \leq 5\pi$.
6. Hallar la serie de Fourier de tipo seno y la serie de Fourier de tipo coseno de $\operatorname{sen} x$.
7. Hallar la serie de Fourier de la función de período 2π definida por

$$f(x) = x + \frac{\pi}{2}, \quad -\pi \leq x < 0;$$

$$f(x) = -x + \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

- (a) calculando sus coeficientes de Fourier;
 (b) directamente del desarrollo (8).

Dibujar el gráfico de la suma de esa serie (una onda triangular) sobre el intervalo $-5\pi \leq x \leq 5\pi$.

8. Para la función $f(x) = \pi - x$, hallar:

- (a) su serie de Fourier en el intervalo $-\pi < x < \pi$;
 (b) su serie de Fourier de tipo coseno en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$;
 (c) su serie de Fourier de tipo seno en el intervalo $0 < x \leq \pi$.

Dibujar la gráfica de la suma de cada una de esas series sobre el intervalo $-5\pi \leq x \leq 5\pi$.

9. Si $f(x) = x$ para $0 \leq x \leq \pi/2$ y $f(x) = \pi - x$ para $\pi/2 < x \leq \pi$, probar que la serie de Fourier de tipo coseno para esa función es

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Representar en un gráfico la suma de esa serie en el intervalo $-5\pi \leq x \leq 5\pi$.

10. (a) Demostrar que la serie de Fourier de tipo coseno de x^2 es

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

- (b) Hallar la serie de Fourier de tipo seno de x^2 , y usarla junto con la fórmula (7) para deducir la igualdad

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}.$$

- (c) Denotar

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \dots = s,$$

y probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{8}{7} s.$$

El valor numérico exacto de la suma última ha sido uno de los misterios no resueltos de las matemáticas desde que Euler planteara la cuestión allá por el año 1736.

11. (a) Probar que la serie de Fourier de tipo coseno de x^3 es

$$x^3 = \frac{\pi^3}{4} + 6\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{24}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^4}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

- (b) Usando esa serie, obtener, en este orden, las sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

12. (a) Demostrar que la serie de Fourier de tipo coseno de x^4 es

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^2 n^2 - 6}{n^4} \cos nx, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

- (b) Usando esta serie, deducir de nuevo la segunda de las sumas del Problema 11(b).

13. (a) Si α no es entero, verificar que

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\alpha^2 - n^2}$$

para $-\pi \leq x \leq \pi$.

- (b) Mediante la serie de (a), obtener la igualdad

$$\pi \cotg \alpha \pi = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}.$$

Esta suma se conoce como *desarrollo de Euler en fracciones simples de la cotangente*.

- (c) Reformular el desarrollo de (b) como

$$\pi \cotg \pi t - \frac{\pi}{\pi t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2t}{n^2 - t^2},$$

e integrando término a término desde $t = 0$ hasta $t = x$ ($0 < x < 1$) obtener

$$\log \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right),$$

o sea,

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2} \right) \dots.$$

Si se sustituye x por x/π , ese producto infinito adopta la forma equivalente

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2} \right) \dots,$$

que se llama *producto infinito de Euler para el seno*. Nótese que esta fórmula hace aparecer las raíces no nulas $x = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ de la ecuación trascendente $\sin x = 0$.

14. Las funciones $\sin^2 x$ y $\cos^2 x$ son pares. Probar brevemente, sin cálculos, que las identidades

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

y

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

son sus series de Fourier.

15. Hallar la serie de Fourier de tipo seno de las funciones del problema anterior y verificar que esos desarrollos satisfacen la identidad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
16. Demostrar las identidades trigonométricas

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \quad y \quad \cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x,$$

y probar brevemente, sin cálculos, que son los desarrollos en serie de Fourier de las funciones de la izquierda.

36. EXTENSION A INTERVALOS ARBITRARIOS

La forma canónica de las series de Fourier es la que hemos manejado en las secciones precedentes, donde la función en cuestión estaba definida sobre el intervalo $-\pi \leq x < \pi$. En muchas aplicaciones es deseable adaptar la forma de una serie de Fourier a funciones $f(x)$ definidas sobre un intervalo $-L \leq x < L$, donde L es un número positivo distinto de π . Esto se logra gracias a un cambio de variable que equivale a un cambio de escala sobre el eje horizontal.

Introducimos una nueva variable t que recorre desde $-\pi$ hasta π mientras x va de $-L$ a L . Esto es fácil de recordar como una regla de tres:

$$\frac{t}{\pi} = \frac{x}{L}, \quad \text{o sea,} \quad t = \frac{\pi x}{L} \quad \text{y} \quad x = \frac{Lt}{\pi}. \quad (1)$$

La función $f(x)$ se transforma, por consiguiente, en una función de t ,

$$f(x) = f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) = g(t), \quad -\pi \leq t < \pi,$$

y si suponemos que $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet, también $g(t)$ las cumple. Podemos pues desarrollar $g(t)$ en serie de Fourier del modo usual,

$$g(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (2)$$

donde usamos las conocidas fórmulas para los coeficientes,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt dt \quad y \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin nt dt. \quad (3)$$

Una vez encontrado el desarrollo (2), usamos (1) para regresar a una solución de nuestro problema original, a saber, hallar un desarrollo de $f(x)$ en el intervalo $-L \leq x < L$:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (4)$$

Ni que decir tiene que también podemos transformar las fórmulas (3) en integrales respecto a x ,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad y \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (5)$$

Si se desea, pueden utilizarse directamente las fórmulas (5), pero cambiando a la variable t se suele simplificar la labor.

Ejemplo. Desarrollar $f(x)$ en serie de Fourier sobre el intervalo $-2 \leq x < 2$ si $f(x) = 0$ para $-2 \leq x < 0$ y $f(x) = 1$ para $0 \leq x < 2$.

Aquí introducimos t haciendo

$$\frac{t}{\pi} = \frac{x}{2}, \quad \text{es decir,} \quad t = \frac{\pi x}{2} \quad y \quad x = \frac{2t}{\pi}.$$

Entonces $g(t) = 0$ para $-\pi \leq t < 0$ y $g(t) = 1$ para $0 \leq t < \pi$, y se tiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dt + \int_0^\pi 1 dt \right] = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nt dt = 0, \quad n \geq 1;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin nt dt = \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n].$$

La última de estas fórmulas nos dice que

$$b_{2n} = 0 \quad y \quad b_{2n-1} = \frac{2}{(2n-1)\pi}.$$

Tenemos, por tanto,

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)t}{2n-1},$$

de modo que el desarrollo requerido es

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin (2n-1) \frac{\pi x}{2}.$$

Además, sabemos que esa serie converge a la extensión periódica de $f(x)$ [con período 4] en todos los puntos excepto en los de discontinuidad $x = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$, y en estos puntos converge con suma $1/2$, que es el promedio de los dos límites laterales.

PROBLEMAS

1. Escribir la serie de Fourier de la función

$$f(x) = -3, \quad -2 \leq x < 0 \quad \text{y} \quad f(x) = 3, \quad 0 \leq x < 2,$$

directamente del ejemplo del texto, sin cálculos adicionales.

2. Hallar las series de Fourier de las funciones definidas por

$$(a) \quad f(x) = 1 + x, \quad -1 \leq x < 0 \quad \text{y} \quad f(x) = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1; \\ (b) \quad f(x) = |x|, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

3. Demostrar que

$$\frac{1}{2}L - x = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L.$$

4. Hallar la serie de Fourier de tipo coseno de la función definida en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ por $f(x) = x^2 - x + 1/6$. [En el contexto del Problema 9 de más abajo, esta función es el polinomio de Bernoulli $B_2(x)$, y la serie encontrada aquí es tan sólo un caso especial, el más simple, del desarrollo del Problema 10.]

5. Hallar la serie de Fourier de tipo coseno para la función definida por

$$f(x) = 2, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad f(x) = 0, \quad 1 < x \leq 2.$$

6. Desarrollar $f(x) = \cos \pi x$ en serie de Fourier en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

7. Hallar la serie de Fourier de tipo coseno para la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{4} - x, \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad f(x) = x - \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

8. (Este problema y el próximo son preliminares necesarios para el de series de Fourier que les sigue, y por tanto para la obtención de las notables fórmulas del Problema 11.) Como

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots$$

para $x \neq 0$ y esta serie de potencias tiene valor 1 en $x = 0$, la función recíproca $x/(e^x - 1)$ tiene un desarrollo en serie de potencias válido en algún entorno del origen si el valor de esta función en $x = 0$ se define como 1:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_0^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = B_0 + B_1 x + \frac{B_2}{2!} x^2 + \dots \quad (*)$$

Los números $B_n(x)$ así definidos se llaman *números de Bernoulli* y juegan un papel destacado en la teoría de series infinitas¹⁰. Evidentemente $B_0 = 1$.

(a) Escribiendo

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 1 \right) = -\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

y observando que el segundo término de la derecha es una función par, concluir que $B_1 = -1/2$ y $B_n = 0$ si n es impar y > 1 .

(b) Escribiendo (*) en la forma

$$\left(\frac{B_0}{0!} + \frac{B_1}{1!} x + \frac{B_2}{2!} x^2 + \dots \right) \left(\frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \right) = 1$$

y multiplicando las dos series de potencias de la izquierda, deducir, examinando el coeficiente de x^{n-1} , que

$$\binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{2} B_2 + \dots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0 \quad (**)$$

para $n \geq 2$, donde $\binom{n}{k}$ es el coeficiente $n!/[k!(n-k)!]$.

(c) Haciendo $n = 3, 5, 7, 9, 11$ en (**), probar que

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}.$$

Por el modo recurrente de calcularlos, todos los números de Bernoulli pueden ser considerados como conocidos (aunque puede requerir un trabajo muy duro hacer explícito el valor de uno de ellos) y todos son racionales.

¹⁰ Puede probarse, por ejemplo, que la serie de potencias de la función $\operatorname{tg} x$ es

$$\operatorname{tg} x = \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

9. Los *polinomios de Bernoulli* $B_0(x), B_1(x), B_2(x), \dots$ se definen como los coeficientes del siguiente producto de dos series de potencias (véase el problema anterior):

$$e^x \cdot \frac{t}{e^t - 1} = \left(\sum_0^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} \right) \left(\sum_0^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \right) = \sum_0^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n.$$

- (a) Comprobar que $B_n(x)$ es el polinomio de grado n dado por la fórmula

$$B_n(x) = \binom{n}{0} B_0 x^n + \binom{n}{1} B_1 x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} x + \binom{n}{n} B_n.$$

- (b) Probar que $B_n(0) = B_n$ para $n \geq 0$, y usando la (**) del problema anterior, probar que $B_n(1) = B_n$ para $n \geq 2$.
 (c) Probar que

$$B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x),$$

y deducir de ahí que

$$B_{n+1}(x) = B_{n+1} + (n+1) \int_0^x B_n(t) dt$$

y (si $n \geq 1$)

$$\int_0^1 B_n(x) dx = 0.$$

- (d) Verificar que

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x, \quad B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

10. Verificar que la serie de Fourier de tipo coseno para el polinomio de Bernoulli $B_{2n}(x)$ sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$ es

$$B_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2n}}, \quad n \geq 1.$$

11. Usando el desarrollo del Problema 10, probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = (-1)^{p+1} \frac{2^{2p} B_{2p}}{2(2p)!} \pi^{2p},$$

donde p es un entero positivo. Mediante los resultados del Problema 8, obtener las sumas especiales correspondientes a $p = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}.$$

Todos estos hechos fueron descubiertos por Euler¹¹.

37. FUNCIONES ORTOGONALES

Una sucesión de funciones $\theta_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, se dice que es *ortogonal* sobre el intervalo $[a, b]$ ¹² si

$$\int_a^b \theta_m(x) \theta_n(x) dx \begin{cases} = 0 & \text{para } m \neq n, \\ \neq 0 & \text{para } m = n. \end{cases} \quad (1)$$

Así, la sucesión

$$\theta_1(x) = \sin x, \quad \theta_2(x) = \sin 2x, \quad \dots, \quad \theta_n(x) = \sin nx, \quad \dots$$

es ortogonal sobre $[0, \pi]$ porque

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \theta_m(x) \theta_n(x) dx &= \int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx \begin{cases} = 0 & \text{para } m \neq n, \\ = \frac{\pi}{2} & \text{para } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Hicimos notar en la Sección 33 que la sucesión

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \dots \quad (2)$$

es ortogonal en $[-\pi, \pi]$ pero no en $[0, \pi]$ porque

$$\int_0^\pi 1 \cdot \sin x dx = 2 \neq 0.$$

En las secciones anteriores de este capítulo hemos usado la sucesión trigonométrica (2) para construir series de Fourier. En el siglo XIX y a principios

¹¹ Puede verse una información más detallada sobre estas fórmulas en el trabajo de Raymond Ayoub, «Euler and the Zeta Function», *American Mathematical Monthly*, vol. 81 (1974), páginas 1067-1086.

¹² Como de costumbre, esta notación designa el intervalo *cerrado* $a \leq x \leq b$.

del XX muchos matemáticos y físicos se dieron cuenta de que uno puede formar series análogas a las de Fourier utilizando cualquier sucesión de funciones ortogonales. Estas series de Fourier generalizadas pasaron a ser instrumentos indispensables de trabajo en muchas ramas de la física matemática, especialmente en la mecánica cuántica. Son también de importancia central en varias áreas de las matemáticas de nuestro siglo, en conexión con los espacios de funciones y las teorías de integración¹³.

La fórmula para los coeficientes de Fourier generalizados es particularmente simple si la integral (1) toma valor 1 para $m = n$. En tal caso, las funciones $\theta_n(x)$ se dice que están *normalizadas*, y $\{\theta_n(x)\}$ se llama una *sucesión ortonormal*. Por otra parte, si

$$\int_a^b [\theta_n(x)]^2 dx = \alpha_n \neq 1$$

en (1), entonces es fácil ver que las funciones

$$\phi_n(x) = \frac{\theta_n(x)}{\sqrt{\alpha_n}}$$

son ortonormales, esto es,

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx \begin{cases} = 0 & \text{para } m \neq n, \\ = 1 & \text{para } m = n. \end{cases} \quad (3)$$

Por ejemplo, como

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi \quad (4)$$

para $n \geq 1$, la sucesión ortonormal correspondiente a la sucesión ortogonal (2) es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (5)$$

Sea ahora $\{\phi_n(x)\}$ una sucesión ortonormal de funciones sobre $[a, b]$, y supongamos que intentamos desarrollar otra función $f(x)$ en una serie del tipo

$$f(x) = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \dots + a_n \phi_n(x) + \dots \quad (6)$$

¹³ Véase, por ejemplo, el excelente libro de Béla Sz.-Nagy, *Introduction to Real Functions and Orthogonal Expansions*, Oxford University Press, 1965.

Para determinar los coeficientes a_n multiplicamos ambos lados de (6) por $\phi_n(x)$. Se obtiene así

$$f(x)\phi_n(x) = a_1\phi_1(x)\phi_n(x) + \cdots + a_n[\phi_n(x)]^2 + \cdots, \quad (7)$$

donde los términos no escritos contienen productos $\phi_m(x)\phi_n(x)$ con $m \neq n$. Si suponemos que es válida la integración término a término en (7), realizando dicha integración y teniendo en cuenta (3), vemos que la mayoría de los términos desaparecen y lo único que queda es

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x) dx = \int_a^b a_n[\phi_n(x)]^2 dx = a_n,$$

luego

$$a_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x) dx. \quad (8)$$

Al deducir la fórmula (8) para los coeficientes en el desarrollo (6) hemos hecho dos hipótesis fuertes. En primer lugar, se ha supuesto que la función $f(x)$ puede ser representada por una serie de la forma (6), y en segundo lugar que la integración término a término es válida. Desgraciadamente no tenemos argumentos, a no ser nuestro deseo de que sea cierto, que avalen tales hipótesis. Dicho de otro modo, no tenemos garantizado en absoluto que la serie (6) con coeficientes definidos por (8) sea siquiera convergente, y mucho menos de que converja a $f(x)$. No obstante, los números (8) se llaman *coeficientes de Fourier* de $f(x)$ con respecto a la sucesión ortonormal $\{\phi_n(x)\}$, y la serie resultante (6) se llama la *serie de Fourier* de $f(x)$ respecto a $\{\phi_n(x)\}$ ¹⁴. Si se aplican estas ideas generales a la sucesión ortonormal (5), producen las series de Fourier ordinarias descritas en las secciones anteriores (véase Problema 2).

Notemos también, como se hizo ya en la Sección 33, que la integración término a término de (7) que conduce a (8) es legítima si las funciones son continuas y la serie uniformemente convergente. Sin embargo, en la próxima sección se obtendrá la fórmula (8) de modo completamente diferente, sin relación alguna con la convergencia uniforme. Quedará patente entonces que no hay que sentir desasosiego porque la fórmula (8) se haya deducido por un razonamiento imperfecto. Lo cierto es que podemos utilizar cualquier argumento como *motivación* para las definiciones de los coeficientes y las series de Fourier, y considerar después la cuestión de descubrir condiciones bajo las cuales la serie de Fourier (6) sea un desarrollo válido para la función dada $f(x)$.

La mayoría de las sucesiones ortogonales surgen al resolver ecuaciones

¹⁴ Algunos autores emplean los términos *coeficientes de Fourier generalizados* y *series de Fourier generalizadas*. Preferimos simplificar la terminología omitiendo el adjetivo «generalizadas» y dejar que el contexto aclare si se trata de las generalizadas o de las ordinarias.

diferenciales, como ilustra el próximo ejemplo. La Sección 43 contiene una discusión más extensa de este punto.

Ejemplo. Usar la ecuación diferencial $y'' + \lambda y = 0$, o lo que es lo mismo $y'' = -\lambda y$, para probar que la sucesión trigonométrica (2) es ortogonal sobre $[-\pi, \pi]$.

Sean m, n enteros positivos. Si $y_m = \sin mx$ o $\cos mx$ e $y_n = \sin nx$ o $\cos nx$, entonces

$$y_m'' = -m^2 y_m \quad \text{e} \quad y_n'' = -n^2 y_n.$$

Si la primera de estas ecuaciones se multiplica por y_n , la segunda por y_m y se restan los resultados, se llega a

$$y_n y_m'' - y_m y_n'' = (n^2 - m^2) y_m y_n.$$

Notemos ahora que el lado izquierdo es la derivada de $y_n y_m' - y_m y_n'$, así que una integración de $-\pi$ a π da

$$(y_n y_m' - y_m y_n')|_{-\pi}^{\pi} = (n^2 - m^2) \int_{-\pi}^{\pi} y_m y_n \, dx. \quad (9)$$

La función $y_n y_m' - y_m y_n'$ es periódica con período 2π y por consiguiente tiene los mismos valores en $-\pi$ y en π , de modo que el lado izquierdo de (9) es cero. Esto conduce a la propiedad de ortogonalidad

$$\int_{-\pi}^{\pi} y_m y_n \, dx = 0,$$

excepto en el caso $m = n$. En este caso, empero, la integral relevante es fácil de calcular:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx \, dx = \frac{1}{2n} \sin^2 nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Sólo resta por hacer notar que la función 1 en la sucesión (2) es ortogonal a todas las demás, o sea,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot y_n \, dx = 0$$

para todo n , lo que completa la demostración.

Existe una analogía muy sugestiva entre las series de Fourier y los vectores, que debemos mencionar. Consideraremos brevemente el espacio euclídeo tridimensional, con los familiares vectores unitarios $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, mutuamente perpendi-

culares y dirigidos según los ejes coordenados. Otros vectores se pueden expresar como

$$\mathbf{A} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{B} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}.$$

Denotemos su producto escalar (o producto interno) por el símbolo (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , es decir,

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (10)$$

Queremos dejar patente que este producto está íntimamente relacionado con las propiedades geométricas más importantes del espacio.

En primer lugar, dos vectores \mathbf{A}, \mathbf{B} son *ortogonales* (o perpendiculares) si su producto escalar es cero, es decir, si

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0. \quad (11)$$

Además, en el concepto de producto escalar subyace el de *norma*, o longitud, de un vector \mathbf{A} : si denotamos la norma por $\|\mathbf{A}\|$, un símbolo que se parece al de valor absoluto pero es diferente a él, entonces

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(\mathbf{A}, \mathbf{A})}. \quad (12)$$

Esta norma, a su vez, da lugar al concepto de distancia entre cualquier par de puntos del espacio, o equivalentemente, distancia entre los extremos de dos vectores cualesquiera,

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|. \quad (13)$$

Como último recordatorio, digamos que si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ son tres vectores unitarios ortogonales dos a dos, y por lo demás arbitrarios, entonces todo vector \mathbf{V} se puede expresar en la forma

$$\mathbf{V} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3, \quad (14)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son constantes. Con el fin de determinar esas constantes para cualquier vector \mathbf{V} , tomamos el producto escalar de ambos miembros de (14) con \mathbf{u}_k , donde $k = 1, 2, 3$. Así resulta

$$(\mathbf{V}, \mathbf{u}_k) = \alpha_1 (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k) + \alpha_2 (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_k) + \alpha_3 (\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_k);$$

y como los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ son mutuamente ortogonales y tienen longitud 1, la suma de la derecha se reduce a un solo término,

$$(\mathbf{V}, \mathbf{u}_k) = \alpha_k.$$

Por tanto, la fórmula para los coeficientes es

$$\alpha_k = (\mathbf{V}, \mathbf{u}_k). \quad (15)$$

Deben compararse (14) y (15) con (6) y (8), pues sus significados son muy similares. En esencia, los α_k son los «coeficientes de Fourier» del vector \mathbf{V} , y (14) es su desarrollo en «serie de Fourier».

En el caso de las series de Fourier genuinas, trabajamos con funciones definidas sobre un intervalo $[a, b]$ en lugar de con vectores. Hablamos de un «espacio de funciones» en vez de un «espacio vectorial». Ese espacio de funciones es de dimensión infinita, en el sentido de que es necesaria una sucesión ortonormal infinita para poder representar todas las funciones. La vida es algo más complicada en tales espacios infinito-dimensionales de lo que es en el espacio tridimensional. Para empezar, sólo ciertas sucesiones ortonormales especiales son aptas para representar funciones «arbitrarias». Y además es necesario introducir restricciones que eliminen la vaguedad de la expresión «función arbitraria», definiendo con precisión la clase de funciones que van a ser representadas por sus series de Fourier. Comenzamos esta discusión precisa en los próximos párrafos y la continuamos en la siguiente sección.

El espacio de funciones que consideramos se denota por R y consta de todas las funciones $f(x)$ definidas e integrables Riemann sobre el intervalo $[a, b]$. Como el producto escalar (10) es la suma de los productos de componentes, y dado que los valores de una función pueden interpretarse como sus componentes, es natural definir el *producto escalar* (o producto interno) de dos funciones en R por

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (16)$$

Obviamente,

$$(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g),$$

$$(cf, g) = c(f, g) \quad y \quad (f, g) = (g, f).$$

Con (11) como guía, decimos que f y g son *ortogonales* si su producto escalar es cero, o sea, si

$$(f, g) = 0.$$

Este es precisamente el significado de la ortogonalidad definida en la Sección 33,

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = 0.$$

Por la definición al comienzo de esta sección, una *sucesión ortogonal* en R es una sucesión tal que cada función es ortogonal a las demás pero no a sí misma. Continuando con la analogía, se define la *norma* de una función como

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left[\int_a^b [f(x)]^2 \, dx \right]^{1/2}, \quad (17)$$

de manera que

$$\|f\|^2 = (f, f).$$

Se dice que una función f es una *función nula* si

$$\|f\| = 0 \quad \text{o, lo que es equivalente, si} \quad \int_a^b [f(x)]^2 \, dx = 0.$$

Una función nula no tiene por qué ser idénticamente cero. Por ejemplo, si $f(x) = 0$ en $[-\pi, \pi]$ excepto en los puntos $x = 1, 1/2, 1/3, \dots$, pero $f(x) = 1$ en esos puntos, entonces f es una función nula. En el presente contexto conviene considerar una función nula como esencialmente cero, de manera que dos funciones serán consideradas como iguales si su diferencia es una función nula. Con este convenio, la norma tiene las propiedades inmediatas

$$\begin{aligned} \|cf\| &= |c| \|f\|, \quad \|f\| \geq 0, \\ \|f\| &= 0 \quad \text{si y sólo si} \quad f = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Otras dos menos obvias son

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\| \quad (19)$$

y

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|. \quad (20)$$

La desigualdad (19) se llama *desigualdad de Schwarz*. Usando (16) y (17) se puede escribir como sigue [en la forma $(f, g)^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2$]:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x) \, dx \right]^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \cdot \int_a^b [g(x)]^2 \, dx.$$

La desigualdad (20) se llama *desigualdad de Minkowski*; se escribe explícitamente así:

$$\left[\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right]^{1/2} \leq \left[\int_a^b [f(x)]^2 dx \right]^{1/2} + \left[\int_a^b [g(x)]^2 dx \right]^{1/2}.$$

Las versiones integrales de estas desigualdades ofrecen un aspecto impresionante y dan motivo para pensar que sólo deben ser posibles de demostrar por medio de complicados razonamientos. Pero, de hecho, existe una sencilla e ingeniosa demostración de (19) sobre la que invitamos a reflexionar al lector por sí mismo (véase Problema 3). Por su parte, (20) se sigue de (19) por un argumento que exponemos aquí. En efecto, por la desigualdad de Schwarz tenemos

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= (f+g, f+g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \\ &= \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2 \leq \\ &\leq \|f\|^2 + 2|(f, g)| + \|g\|^2 \leq \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2, \end{aligned}$$

de donde deducimos (20) tomando raíces cuadradas.

Utilizando el concepto de norma de una función somos capaces ya de definir la *distancia* $d(f, g)$ entre dos funciones f y g en R :

$$d(f, g) = \|f - g\| = \left[\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Hablamos de $d(f, g)$ como la distancia de f a g , o la distancia de g a f . Es sencillo comprobar que, a causa de (18) y (20), esa distancia posee las siguientes propiedades:

$$d(f, g) \geq 0, \quad \text{y} \quad d(f, g) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad f = g;$$

$$d(f, g) = d(g, f) \quad [\text{simétrica}];$$

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g) \quad [\text{desigualdad triangular}].$$

Un espacio (de vectores, funciones o cualesquiera otros objetos) investido con una noción de distancia que satisfaga esas propiedades se llama un *espacio métrico*. Con el sobrentendido de que dos funciones en R se consideran iguales si difieren en una función nula, R es un espacio métrico cuya estructura investigaremos más en detalle en la próxima sección.

NOTA SOBRE MINKOWSKI. A los 18 años el matemático germano-ruso Hermann Minkowski (1864-1909) consiguió el Gran Premio de la Academia de Ciencias de París por su brillante trabajo acerca de las formas cuadráticas, iniciado en un problema de representación de los enteros como sumas de cinco cuadrados. Este trabajo condujo más tarde a la creación de toda una rama de la teoría de números, llamada hoy geometría de números, basada a su vez en sus originales ideas sobre las propiedades de los cuerpos convexos en el espacio n -dimensional. En relación con esto, introdujo el concepto abstracto de distancia, analizó las nociones de superficie y volumen, y estableció la importante desigualdad que lleva su nombre. En los años 1907-1908 se convirtió en el matemático de la relatividad, formulando geométricamente el nuevo campo. Creó el concepto de espacio-tiempo de cuatro dimensiones, el modelo matemático correcto para la manera esencialmente física (no matemática) de pensar en la relatividad especial de Einstein. En un célebre seminario de 1908 comenzó con una afirmación difícil de relegar al olvido: «Desde ahora, el espacio en sí mismo y el tiempo en sí mismo están condenados a esfumarse como meras sombras, y sólo una clase de unión de ambos gozará de una existencia independiente».

NOTA SOBRE SCHWARZ. Hermann Amadeus Schwarz (1843-1921), discípulo de Weierstrass, a quien sucedió en Berlín, hizo contribuciones sustanciales a la teoría de superficies mínimas en geometría y a las aplicaciones conformes, teoría del potencial, funciones hipergeométricas y otros temas de análisis. En relación con las aplicaciones conformes, rescató y probó rigurosamente varios descubrimientos de Riemann, muy importantes pero más bien intuitivos, en especial el crucial teorema de la aplicación de Riemann. En la teoría de superficies mínimas dio la primera demostración convincente de que una esfera tiene menor área que cualquier otro cuerpo del mismo volumen. Descubrió también, y probó, el teorema del «triángulo pedal» de geometría elemental: En cualquier triángulo acutángulo, el triángulo inscrito de menor perímetro es aquel cuyos vértices son los pies de las alturas del triángulo dado¹⁵.

PROBLEMAS

- Una de las consecuencias más importantes de la ortogonalidad de la sucesión trigonométrica (2) [a saber, las ecuaciones (4) de esta sección y (2), (5), (6) y (8) de la Sección 33] es la *desigualdad de Bessel*: Si $f(x)$ es cualquier función integrable sobre $[-\pi, \pi]$, sus coeficientes de Fourier ordinarios satisfacen la desigualdad

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx. \quad (*)$$

Demostrarlo siguiendo estos pasos:

- Para todo $n \geq 1$, definir

$$s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

¹⁵ Para más detalles, véase el Capítulo 5 de H. Rademacher y O. Toeplitz, *The Enjoyment of Mathematics*, Princeton University Press, 1957; o R. Courant y H. Robbins, *What Is Mathematics?*, Oxford University Press, 1941, págs. 346-351.

y probar que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)s_n(x) dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

- (b) Considerando todos los posibles productos en la multiplicación de $s_n(x)$ por sí misma, mostrar que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [s_n(x)]^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

- (c) Escribiendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)s_n(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [s_n(x)]^2 dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - \frac{1}{2} a_0^2 - \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2), \end{aligned}$$

deducir que

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx,$$

y completar con ello la demostración.

Nótese que la convergencia de la serie de la izquierda en (*) implica el siguiente corolario de la desigualdad de Bessel: Si a_n y b_n son los coeficientes de Fourier ordinarios de $f(x)$, entonces $a_n \rightarrow 0$ y $b_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

2. En el caso de la sucesión ortonormal (5), verificar en detalle que los coeficientes de Fourier (8) son ligeramente diferentes de los ordinarios, pero que la serie de Fourier (6) es exactamente igual que la serie de Fourier ordinaria.
3. Demostrar la desigualdad de Schwarz (19). Ayuda: Si $\|g\| \neq 0$, la función $F(\alpha) = \|f + \alpha g\|^2$ es un polinomio de segundo grado en α que no toma valores negativos; analizar el discriminante.
4. Un teorema bien conocido de la geometría elemental afirma que la suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales. Demostrar que esta *ley del paralelogramo* es válida para la norma de R^n :

$$2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2.$$

5. Probar el *teorema de Pitágoras*, y su recíproco, en R : f es ortogonal a g si y sólo si $\|f - g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.
6. Probar que una función nula es cero en todo punto de continuidad, de modo que una función nula continua ha de ser idénticamente cero.

38. CONVERGENCIA EN MEDIA DE LAS SERIES DE FOURIER

Consideremos una función $f(x)$ y una sucesión de funciones $p_n(x)$, todas ellas definidas e integrables sobre el intervalo $[a, b]$. Existen diversas formas en que $p_n(x)$ puede converger a $f(x)$, y se captan mejor formulando el problema como aproximación de $f(x)$ mediante las $p_n(x)$.

Si intentamos aproximar $f(x)$ por $p_n(x)$, cada uno de los números

$$|f(x) - p_n(x)| \quad \text{y} \quad [f(x) - p_n(x)]^2 \quad (1)$$

da una medida del error de la aproximación en el punto x . Es claro que si uno de ellos es pequeño, también el otro lo es. La definición usual de convergencia equivale a decir que la sucesión de funciones $p_n(x)$ converge a la función $f(x)$ si en todo punto x alguna cualquiera de las expresiones (1) tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Este es el concepto familiar ya utilizado en las Secciones 33 a 36, y por razones evidentes se llama *convergencia punto a punto* (*o convergencia puntual*).

Por otra parte, puede ser preferible usar una medida del error que se refiera a todo el intervalo $[a, b]$ simultáneamente, en lugar de a cada punto por separado. Podemos obtener tal medida integrando las expresiones (1) desde a hasta b ,

$$\int_a^b |f(x) - p_n(x)| dx \quad \text{e} \quad \int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 dx.$$

La segunda integral es mejor elección que la primera por dos razones: evita el molesto valor absoluto de la primera y el exponente 2 hace más convenientes los cálculos necesarios, como tendremos ocasión de comprobar. Por tanto, adoptamos como medida de error

$$E_n = \int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 dx. \quad (2)$$

Esta cantidad se llama el *error cuadrático medio*. Esta terminología es apropiada por cuanto si dividimos (2) por $b - a$ el resultado es el valor medio del error cuadrático $[f(x) - p_n(x)]^2$. Si (2) tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, la

sucesión $\{p_n(x)\}$ se dice que *converge en media* a $f(x)$, y esta noción se llama *convergencia en media*. A veces se denota este tipo de convergencia escribiendo

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} p_n(x),$$

donde «l.i.m.» significa «límite en media». Nuestra discusión en el resto de la sección mostrará que en el caso de las series de Fourier la convergencia en media es mucho más sencilla de manejar que la convergencia ordinaria punto a punto.

Hemos supuesto al empezar que las funciones $f(x)$ y $p_n(x)$ pertenecen al espacio R definido en la sección anterior. Ahora hacemos notar que el error cuadrático medio (2) es justamente el cuadrado de la norma $f - p_n$ en R ,

$$E_n = \int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 dx = \|f - p_n\|^2. \quad (3)$$

La convergencia en media de $p_n(x)$ a $f(x)$ es, como consecuencia, equivalente a la convergencia de la sucesión $\{p_n(x)\}$ al límite $f(x)$ en el espacio métrico R , es decir,

$$d(f, p_n) = \|f - p_n\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Como acabamos de hacer, usaremos a menudo f y p_n como abreviaciones para $f(x)$ y $p_n(x)$, con el fin de aliviar las notaciones.

Llegamos ahora al punto crucial de esta sección. Sea $\{\phi_n(x)\}$ una sucesión ortonormal de funciones integrables sobre $[a, b]$, de modo que

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n, \\ 1 & \text{para } m = n. \end{cases} \quad (4)$$

Consideremos las primeras n de tales funciones,

$$\phi_1(x), \quad \phi_2(x), \quad \dots, \quad \phi_n(x), \quad (5)$$

e intentemos aproximar una función integrable dada f mediante una combinación lineal de las funciones (5),

$$p_n(x) = b_1 \phi_1(x) + b_2 \phi_2(x) + \dots + b_n \phi_n(x).$$

Nuestro deseo es minimizar el error cuadrático medio (2),

$$E_n = \int_a^b [f - p_n]^2 dx = \int_a^b [f - (b_1\phi_1 + \dots + b_n\phi_n)]^2 dx, \quad (6)$$

mediante una juiciosa elección de los coeficientes b_1, \dots, b_n .

Nuestro primer paso es desarrollar el término entre corchetes en (6), lo que da

$$\begin{aligned} E_n &= \int_a^b f^2 dx - 2 \int_a^b (b_1\phi_1 + \dots + b_n\phi_n)f dx + \\ &\quad + \int_a^b (b_1\phi_1 + \dots + b_n\phi_n)^2 dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Si los coeficientes de Fourier de f respecto a la sucesión ortonormal $\{\phi_n(x)\}$ se denotan por

$$a_k = \int_a^b f \phi_k dx,$$

como en la Sección 37, la segunda integral en (7) es

$$\int_a^b (b_1\phi_1 + \dots + b_n\phi_n)f dx = a_1b_1 + \dots + a_nb_n.$$

La tercera integral en (7) se puede escribir

$$\begin{aligned} \int_a^b (b_1\phi_1 + \dots + b_n\phi_n)(b_1\phi_1 + \dots + b_n\phi_n) dx &= \\ &= \int_a^b (b_1^2\phi_1^2 + \dots + b_n^2\phi_n^2 + \dots) dx = \\ &= b_1^2 + \dots + b_n^2, \end{aligned}$$

donde el segundo grupo de términos «+...» contiene productos $\phi_i\phi_j$ con $i \neq j$ y el valor final resulta de usar (4). Estas consideraciones nos permiten escribir el error cuadrático medio (7) como

$$E_n = \int_a^b f^2 dx - 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2. \quad (8)$$

Si ahora observamos que

$$-2a_k b_k + b_k^2 = -a_k^2 + (b_k - a_k)^2,$$

la fórmula para E_n toma la forma final

$$E_n = \int_a^b f^2 dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2. \quad (9)$$

La fórmula (9) para el error cuadrático medio E_n tiene consecuencias relevantes que se deducen por argumentos sencillos. En primer lugar, los términos $(b_k - a_k)^2$ en (9) son positivos a menos que $b_k = a_k$, en cuyo caso son cero. Por tanto, la elección de los b_k que minimiza E_n es obviamente $b_k = a_k$, y se tiene

Teorema 1. *Para cada entero positivo n , la n -ésima suma parcial de la serie de Fourier de f , es decir,*

$$\sum_{k=1}^n a_k \phi_k = a_1 \phi_1 + \dots + a_n \phi_n,$$

produce un error cuadrático medio $E_n = \int_a^b (f - p_n)^2 dx$ menor que el de otra cualquiera combinación lineal $p_n = b_1 \phi_1 + \dots + b_n \phi_n$. Además, este valor mínimo del error es

$$\min E_n = \int_a^b f^2 dx - \sum_{k=1}^n a_k^2. \quad (10)$$

La fórmula (6) nos dice que siempre será $E_n \geq 0$, ya que el integrando de (6), al ser un cuadrado, es no negativo. Como $E_n \geq 0$ para toda elección de los b_k , es claro que el valor mínimo de E_n (que ocurre cuando $b_k = a_k$) es también ≥ 0 . Por tanto, (10) implica que

$$\int_a^b f^2 dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 \geq 0, \quad \text{o sea,} \quad \sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \int_a^b f^2 dx.$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ obtenemos inmediatamente

Teorema 2. *Si los números $a_n = \int_a^b f \phi_n dx$ son los coeficientes de Fourier de f con respecto a la sucesión ortonormal $\{\phi_n(x)\}$, entonces la serie $\sum a_n^2$ es convergente y satisface la desigualdad de Bessel,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (11)$$

Puesto que el n -ésimo término de una serie convergente debe tender hacia cero, el Teorema 2 implica

Teorema 3. Si los números $a_n = \int_a^b f\phi_n dx$ son los coeficientes de Fourier de f respecto a la sucesión ortonormal $\{\phi_n\}$, entonces $a_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Los Teoremas 2 y 3 se obtienen en el Problema 37-1 para series de Fourier ordinarias. Aquí hemos visto que son ciertos para series de Fourier generalizadas con respecto a sucesiones ortonormales arbitrarias.

En las aplicaciones es importante saber si la serie de Fourier de f es válida como desarrollo de f en el sentido de convergencia en media. Esto equivale a preguntarse si las sumas parciales de Fourier convergen en media a f , o sea, si es cierto o no que

$$f = \text{l.i.m. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n. \quad (12)$$

A la vista del Teorema 1 es evidente que nos hallamos ante un desarrollo válido de f si y sólo si

$$\min E_n \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

y por la fórmula (10) vemos que esto sucede si y sólo si se cumple la *identidad de Parseval*:

$$\int_a^b f^2 dx - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = 0.$$

Resumimos estas observaciones en el siguiente

Teorema 4. La representación de f por su serie de Fourier, a saber,

$$f = a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + \dots + a_n \phi_n + \dots, \quad (13)$$

es válida en el sentido de la convergencia en media si y sólo si la desigualdad de Bessel se convierte en la identidad de Parseval,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (14)$$

Si un desarrollo de Fourier de la forma (13) es válido (en el sentido de la convergencia en media) para toda función $f(x)$ de R , se dice que la sucesión ortonormal $\{\phi_n(x)\}$ es *completa*. Así pues, una sucesión ortonormal completa puede ser utilizada para construir aproximaciones en media cuadrática de la forma (12) para funciones arbitrarias de R . Se puede demostrar que la sucesión trigonométrica

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (15)$$

es completa en $[-\pi, \pi]$.

Nota 1. La demostración del teorema que acabamos de enunciar acerca de la sucesión trigonométrica (15) es laboriosa y nos llevaría demasiado lejos¹⁶. No obstante, recordando el Problema 2 de la Sección 37 vemos que este teorema proporciona inmediatamente la siguiente conclusión de la máxima importancia, que viene a arrinconar las principales dificultades que aparecen en la teoría de la convergencia punto a punto de las series de Fourier.

Teorema 5. *Toda función $f(x)$ definida e integrable sobre $[-\pi, \pi]$ viene representada en el sentido de la convergencia en media por su serie de Fourier,*

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx), \quad (16)$$

donde los a_n y b_n son los coeficientes de Fourier ordinarios de $f(x)$.

Para apreciar la nitidez de esta proposición, conviene recordar que esta representación es falsa si (16) se interpreta en el sentido de la convergencia punto a punto y que además la representación falla para algunas funciones continuas.

Nota 2. En el Problema 6 se pedirá al estudiante demostrar que, si especializamos al intervalo $[-\pi, \pi]$ y usamos coeficientes de Fourier ordinarios, la identidad de Parseval (14) adopta la forma

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (17)$$

La función f en esta ecuación se supone que pertenece a R , o sea, que es integrable Riemann en $[-\pi, \pi]$, y para tales funciones el cuadrado $[f(x)]^2$ es automáticamente integrable. Por tanto, se sigue de (17) que para esta función los coeficientes de Fourier $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ tienen la propiedad de que la serie $\sum (a_n^2 + b_n^2)$ converge. Naturalmente, ya sabíamos esto a raíz del Problema 1 en la Sección 37.

Sin embargo, si se sustituye la integral de Riemann por su pariente más potente, la integral de Lebesgue, esa proposición admite un recíproco que fue demostrado en 1907 por F. Riesz y E. Fischer. El famoso *teorema de Riesz-Fischer*, uno de los logros más notables de la teoría de integración de Lebesgue, afirma que dada cualquier sucesión de números $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ tal que la serie $\sum (a_n^2 + b_n^2)$ sea convergente, existe una única función $f(x)$ de cuadrado integrable que tiene a esos números como coeficientes de Fourier.

¹⁶ Los ingredientes básicos en la demostración son dos piedras angulares del análisis clásico, el *teorema de sumabilidad de Fejér* y el *teorema de aproximación de Weierstrass*.

Suele utilizarse el símbolo L_2 para denotar el espacio de funciones de cuadrado integrable en $[-\pi, \pi]$ en el sentido de Lebesgue, considerando en él que dos funciones son iguales si difieren por una función nula¹⁷. Al tomar en consideración conjuntamente la identidad de Parseval (17) y el teorema de Riesz-Fischer, deducimos de nuestra discusión que dan una caracterización muy sencilla de las funciones de L_2 en términos de sus coeficientes de Fourier. Merece la pena destacar que ninguna otra clase importante de funciones tiene una caracterización comparable en simplicidad y amplitud, algo que deleita los espíritus de los matemáticos.

NOTA SOBRE PARSEVAL. Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836), miembro de una familia aristocrática francesa, monárquico ardiente, poeta y matemático aficionado, se las arregló para sobrevivir a la Revolución Francesa conservando la cabeza sobre sus hombros, aunque fue encarcelado brevemente en 1792, pero abandonó el país afortunadamente cuando Napoleón ordenó su arresto por publicar poemas que atacaban al régimen. Publicó muy poco en matemáticas, y nada de relieve, pero en esa escasa producción incluyó (en 1799) un enunciado vago que sólo se asemeja parcialmente a lo que hoy llamamos identidad de Parseval... y por esto su nombre se ha inmortalizado.

PROBLEMAS

1. Consideremos la sucesión de funciones $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, definida en el intervalo $[0,1]$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ \sqrt{n}, & 1/n < x < 2/n, \\ 0, & 2/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Probar que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge punto a punto a la función cero sobre ese intervalo.
 - (b) Probar que la sucesión $\{f_n(x)\}$ *no* converge en media a la función cero en ese intervalo.
2. Denotemos por I_n el n -ésimo de los elementos de esta sucesión de subintervalos de $[0, 1]$: $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$, $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$, $[3/4, 1]$, $[0, 1/8]$, $[1/8, 1/4]$, ... Definamos ahora una sucesión de funciones $f_n(x)$ sobre $[0, 1]$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ está en } I_n, \\ 0 & \text{si } x \text{ no está en } I_n. \end{cases}$$

- (a) Probar que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge en media a la función cero en el intervalo $[0,1]$.

¹⁷ Cabe añadir que L_2 contiene a R y a otras muchas funciones, y que siempre que se aplica la integral de Lebesgue a una función de R se obtiene el mismo resultado numérico que con la integral de Riemann.

- (b) Probar que dicha sucesión *no* converge punto a punto a la función cero en ese mismo intervalo.
3. Obtener la igualdad $b_k = a_k$ de (8) y (9) usando que es $\partial E_n / \partial b_k = 0$ cuando E_n toma valor mínimo.
4. Se quiere aproximar la función $f(x) = 1$ sobre $[0, \pi]$ por

$$p(x) = b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + b_3 \operatorname{sen} 3x + b_4 \operatorname{sen} 4x + b_5 \operatorname{sen} 5x$$

de modo tal que $\int_0^\pi [1 - p(x)]^2 dx$ sea mínimo. ¿Qué valores han de tener los coeficientes b_k ?

5. Se desea aproximar la función $f(x) = x$ sobre el intervalo $[0, \pi]$ por

$$p(x) = b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + b_3 \operatorname{sen} 3x$$

de manera tal que $\int_0^\pi [x - p(x)]^2 dx$ sea mínimo. ¿Qué valores han de tener los coeficientes b_k ?

6. Demostrar que la identidad de Parseval (14) se convierte en (17) cuando la sucesión ortonormal considerada es la trigonométrica.
7. Obtener las sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

aplicando la identidad de Parseval del problema anterior a las dos series de Fourier

$$x = 2 \left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \dots \right)$$

y

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

[Estas series se calculan en el Ejemplo 33-1 y en el Problema 35-10(a).]

8. Usar el método y los resultados del Problema 7 para deducir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

de la serie de Fourier de tipo seno para x^2 [Problema 35-10(b)].

9. Usar el método y los resultados de los Problemas 7 y 8 para deducir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$$

de la serie de Fourier de tipo coseno para x^4 [Problema 35-12(a)].

APENDICE A. UN TEOREMA DE CONVERGENCIA PUNTO A PUNTO

Dividimos la tarea de enunciar y demostrar el teorema en varias etapas, para facilitar su comprensión.

1. Nuestro primer objetivo consiste en obtener una fórmula explícita conveniente para la diferencia entre una función y la suma parcial n -ésima de su serie de Fourier que nos permita demostrar la convergencia punto a punto para una amplia clase de funciones que incluyan todos los ejemplos presentados en este capítulo.

A tal fin, comenzamos suponiendo solamente que f es una función integrable de período 2π . La n -ésima suma parcial de su serie de Fourier es

$$s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx), \quad (1)$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \quad y \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt dt. \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se llega a

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx) \right] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Si definimos el *núcleo de Dirichlet* por

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku, \quad (4)$$

entonces (3) se puede poner de modo más compacto, a saber,

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt. \quad (5)$$

Poniendo $u = t - x$ en (5) se obtiene

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) D_n(u) du. \quad (6)$$

Por la definición (4), $D_n(u)$ tiene período 2π , y como función de u , $f(x+u)$ tiene período 2π . Por tanto, la integral de $f(x+u)D_n(u)$ sobre cualquier intervalo de longitud 2π es independiente del intervalo particular escogido, y (6) se puede escribir

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u) du. \quad (7)$$

Como $D_n(-u) = D_n(u)$, podemos reemplazar u por $-u$ en (7), con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} s_n(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(x-u)D_n(u) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u) du, \end{aligned} \quad (8)$$

y sumando (7) y (8) vemos que

$$2s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)]D_n(u) du.$$

Este integrando es función par de u , luego la integral desde $-\pi$ hasta π es el doble que la integral de 0 a π , así que

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)]D_n(u) du. \quad (9)$$

Para poner la diferencia $s_n(x) - f(x)$ en forma adecuada, hagamos notar que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(u) du = \frac{1}{2},$$

ya que los términos $\cos ku$ en (4) dan cero al integrar. Si ahora multiplicamos esto por $2f(x)$, se deduce que

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2f(x)D_n(u) du, \quad (10)$$

y restando (10) de (9),

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)]D_n(u) du. \quad (11)$$

Esta fórmula es la herramienta fundamental para estudiar la convergencia de $s_n(x)$ a $f(x)$.

2. En este punto necesitamos la siguiente fórmula para el núcleo de Dirichlet (4),

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku = \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} u}, \quad (12)$$

si $\operatorname{sen} \frac{1}{2} u \neq 0$ ¹⁸. Con ella podemos escribir (11) en la forma

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(u) \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) u du, \quad (13)$$

donde

$$g(u) = \frac{f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} u}. \quad (14)$$

Naturalmente, $g(u)$ es en realidad función tanto de u como de x . Sin embargo, vamos a examinar g con x fija y u variable, y la notación $g(u)$ ayuda a evitar confusiones. En vista de (13), para demostrar que $s_n(x) \rightarrow f(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$, hemos de probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(u) \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) u du = 0. \quad (15)$$

Nuestra tarea es dar una demostración rigurosa de (15) con hipótesis apropiadas, comprensibles y claramente formuladas acerca del comportamiento de la función $f(x)$.

3. Como paso previo a la demostración del teorema principal de convergencia anunciado arriba, necesitamos el siguiente lema.

Lema. Si $\phi(u)$ es integrable sobre el intervalo $[0, \pi]$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \phi(u) \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) u du = 0. \quad (16)$$

¹⁸ Es fácil probar esta fórmula escribiendo la identidad $2 \cos A \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)$ n veces, con $A = u, 2u, 3u, \dots, nu$ y $B = u/2$, y sumando los resultados para llegar a

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} u (\cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu) = \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) u - \operatorname{sen} \frac{1}{2} u.$$

Demostración. Por la fórmula de suma del seno, esta integral se rompe en dos:

$$\int_0^\pi \phi(u) \cos \frac{1}{2} u \cdot \operatorname{sen} nu du + \int_0^\pi \phi(u) \operatorname{sen} \frac{1}{2} u \cdot \cos nu du.$$

Si llamamos

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \phi(u) \operatorname{sen} \frac{1}{2} u \cdot \cos nu du$$

y

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \phi(u) \cos \frac{1}{2} u \cdot \operatorname{sen} nu du,$$

la integral (16) es

$$\frac{\pi}{2} (A_n + B_n).$$

Es fácil ver que A_n es el n -ésimo coeficiente de Fourier en la serie de Fourier de tipo coseno para $\phi(u) \operatorname{sen} 1/2 u$ y B_n lo mismo en la serie de Fourier de tipo coseno para $\phi(u) \cos 1/2 u$. Como $\phi(u)$ es integrable, cada una de esas funciones es también integrable. Del corolario a la desigualdad de Bessel, enunciado al final del Problema 37-1, se sigue que $A_n \rightarrow 0$ y $B_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y la demostración de (16) está completa.

4. A la vista de la condición (14) y del lema, cuanto queda por hacer es formular hipótesis suficientemente fuertes para garantizar que la función $g(u)$ definida en (14) sea integrable sobre $[0, \pi]$.

Hasta ahora sólo tenemos los requisitos generales de que $f(x)$ sea integrable sobre $[-\pi, \pi]$ y periódica con período 2π . Ahora supondremos además que $f(x)$ es *diferenciable a trozos* en $[-\pi, \pi]$. Esto quiere decir que el gráfico de f en $[-\pi, \pi]$ consta de un número finito de curvas continuas, en cada una de las cuales $f'(x)$ existe y es continua. Significa también que la derivada existe en los puntos extremos de esas curvas, en el sentido de

$$\lim_{u \rightarrow 0+} \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} \quad \text{y} \quad \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{f(x-u) - f(x-)}{-u}. \quad (17)$$

De esta manera, queda garantizado que $f(x)$ posee derivadas laterales en todo punto x , incluidos los puntos de discontinuidad, que denotaremos por $f'_+(x)$ y $f'_-(x)$.

Claro está que la función $f(x)$ puede tener un número finito de discontinuidades con salto en $[-\pi, \pi]$. Sin embargo, como los coeficientes de Fourier

no cambian si f se redefine en un número finito de puntos, podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que

$$f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2} \quad (18)$$

en todo punto x , sea f continua en él o no.

Nuestro teorema sobre convergencia punto a punto puede enunciarse así:

Teorema. *Si $f(x)$ es diferenciable a trozos sobre $[-\pi, \pi]$, periódica con período 2π , y está definida en sus puntos de discontinuidad por (18), la serie de Fourier de $f(x)$ converge a $f(x)$ en todo punto x .*

5. Para demostrarlo, fijemos un punto x . Deseamos establecer la veracidad de (15) y, a la vista del lema, bastará probar que la función

$$g(u) = \frac{f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \quad (19)$$

es integrable en $[0, \pi]$. La única duda acerca de su integrabilidad surge del hecho de que $\operatorname{sen} 1/2 u = 0$ cuando $u = 0$, puesto que fuera de ese punto la función $\operatorname{sen} 1/2 u$ es continua y positiva en dicho intervalo, y el numerador de (19) es ciertamente una función integrable de u sobre $[0, \pi]$. De estos comentarios se desprende que $g(u)$ será integrable sobre $[0, \pi]$ en cuanto demostremos que tiende a un límite finito cuando $u \rightarrow 0+$.

Usando (18) podemos escribir

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{f(x+u) + f(x-u) - f(x-) - f(x+)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} u} = \\ &= \left[\frac{f(x+u) - f(x+)}{u} + \frac{f(x-u) - f(x-)}{u} \right] \cdot \frac{\frac{1}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u}. \end{aligned}$$

Pero cuando $u \rightarrow 0+$, (17) nos dice que

$$\frac{f(x+u) - f(x+)}{u} \rightarrow f'_+(x) \quad \text{y} \quad \frac{f(x-u) - f(x-)}{u} \rightarrow -f'_-(x),$$

y sabemos que

$$\frac{u/2}{\sin(u/2)} \rightarrow 1.$$

Se sigue de ahí que

$$g(u) \rightarrow f'_+(x) - f'_-(x),$$

de modo que $g(u)$ es integrable sobre $[0, \pi]$ y con ello queda terminada la demostración.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES Y PROBLEMAS DE CONTORNO

39. INTRODUCCION. NOTAS HISTORICAS

La teoría de series de Fourier discutida en el capítulo anterior tuvo su origen a mediados del siglo XVIII, cuando varios matemáticos estudiaron las vibraciones de cuerdas. La teoría de estas vibraciones lleva a la resolución de la ecuación en derivadas parciales

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)$$

donde a es una constante positiva. Esta *ecuación de ondas unidimensional* tiene muchas soluciones y la cuestión es, para una cuerda vibrante particular, conseguir hallar la que satisfaga ciertas condiciones preliminares asociadas con la cuerda, tales como su forma inicial, su velocidad inicial, etc. La solución describe entonces el movimiento subsiguiente de la cuerda al vibrar a causa de una tensión. Se supone que en la posición de equilibrio la cuerda está sobre el eje x , y si $y = y(x, t)$ es la solución deseada de (1), para un valor fijo de $t \geq 0$, la curva $y = y(x, t)$ da la forma de la cuerda desplazada en ese instante (curva de trazos discontinuos en la Figura 46), y esa forma cambia con el tiempo.

Para el caso de una cuerda tendida entre los puntos $x = 0$ y $x = \pi$, y deformada después en una forma arbitraria, que se suelta en el instante $t = 0$, Daniel Bernoulli dio en 1753 la solución de (1) mediante una serie de la forma

$$y = b_1 \sin x \cos at + b_2 \sin 2x \cos 2at + \dots \quad (2)$$

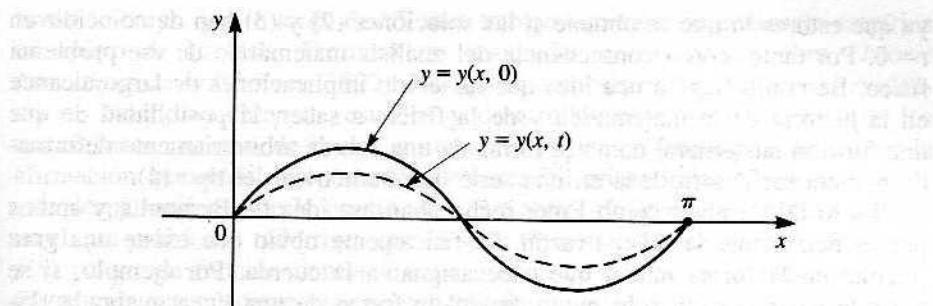


Figura 46

Es fácil verificar por inspección que un término típico de esta serie, $b_n \sin nx \cos nat$, es solución de (1). Además, toda suma finita de tales términos es solución, y la serie (2) será solución si la derivación término a término de la serie está justificada¹. Cuando $t = 0$, la serie (2) se reduce a

$$y = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots.$$

Esto representa la forma inicial de la cuerda, esto es, la curva $y = y(x, 0)$ en la que se deformó la cuerda, en el instante $t = 0$, antes de soltarla y de que, en consecuencia, comenzara a vibrar (véase la curva de trazo continuo en la Figura 46).

Sin embargo, D'Alembert (en 1747) y Euler (en 1748) ya habían publicado independientemente soluciones del problema, que para la situación recién descrita adoptaban la forma

$$y = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)]. \quad (3)$$

Aquí la curva $y = f(x)$ es la forma de la cuerda en $t = 0$; se supone que $f(x)$ está definida fuera del intervalo $[0, \pi]$ por el requisito de que sea impar de período 2π , es decir,

$$f(-x) = -f(x) \quad y \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Si comparamos la solución de Bernoulli con la de D'Alembert y Euler, vemos que debe ser

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots, \quad (4)$$

¹ En tiempos de Bernoulli ningún matemático ponía en duda que las series pudieran derivarse término a término. Esa duda se planteó más tarde, en una época más escéptica y sofisticada.

ya que esto es lo que se obtiene si las soluciones (2) y (3) han de coincidir en $t = 0$. Por tanto, como consecuencia del análisis matemático de ese problema físico, Bernoulli llegó a una idea que ha tenido implicaciones de largo alcance en la historia de la matemática y de la física, a saber, la posibilidad de que una función tan general como la forma de una cuerda arbitrariamente deformada pudiera ser desarrollada en una serie trigonométrica del tipo (4).

Tanto D'Alembert como Euler rechazaban esa idea de Bernoulli, y ambos por esencialmente la misma razón. Es físicamente obvio que existe una gran libertad en la forma inicial que cabe asignar a la cuerda. Por ejemplo, si se tensa la cuerda en un solo punto, tendrá la forma de una línea quebrada [Figura 47a)]; y si se tensa usando algún objeto circular, tendrá la forma de dos segmentos rectos unidos por un arco de círculo, como en la Figura 47b). ¿Es razonable esperar que la fórmula única (4) pueda representar un segmento recto en una parte del intervalo $[0, \pi]$, un arco circular en otra y un segundo segmento rectilíneo en otra? A los matemáticos de ese tiempo, a excepción de Bernoulli, eso les parecía absurdo. Para D'Alembert, la curva de la Figura 47b) representaría tres gráficas separadas de tres funciones distintas, unidas después entre sí. Para Euler sería un solo gráfico, pero de tres funciones distintas, no de una sola función. Ambos rechazaban la posibilidad de que tal gráfico fuera representable por una sola función «razonable» como la serie (4). La controversia siguió durante muchos años, y en ausencia de una demostración rigurosa, nadie convertía al contrario a su credo.

La forma más general de una serie trigonométrica de senos y cosenos, a saber,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx), \quad (5)$$

aparece de modo natural en otro problema físico, la conducción del calor. En 1807, el físico matemático francés Fourier anunció a este respecto que una «función arbitraria» $f(x)$ se puede representar en la forma (5), con coeficientes dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad y \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx. \quad (6)$$

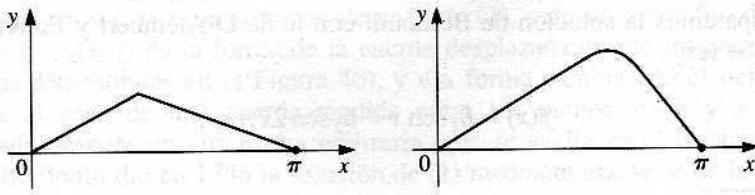


Figura 47

Nadie le creyó, y a lo largo de 15 años trabajó acumulando evidencia empírica en apoyo de su tesis. Presentó sus resultados en su clásica obra *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822). No aportó demostraciones, pero sí la evidencia de muchos problemas resueltos y desarrollos específicos; tantos que los matemáticos pasaron, de hecho, a invertir más tiempo intentando demostrar la afirmación que intentando echarla por tierra. El primer resultado sustancial de este desplazamiento de la opinión fue el trabajo clásico de Dirichlet en 1829, en el que probó con todo rigor que la serie (5) converge realmente a la función $f(x)$ para toda función continua cuyo gráfico conste de un número finito de trozos crecientes o decrecientes, en particular para las de la Figura 47. Con ello recibían su espaldarazo definitivo las ideas defendidas por Bernoulli y Fourier. Hemos de añadir, no obstante, que Euler encontró en 1777 las fórmulas (6), pero pensó que sólo eran válidas en el caso de funciones $f(x)$ de las que ya se supiera que eran representables en la forma (5).

Como vimos en el Capítulo 6, en reconocimiento de la tenacidad pionera de Fourier una serie trigonométrica tal como (5) se llama una *série de Fourier* si sus coeficientes de calculan mediante las fórmulas (6) a partir de una cierta función integrable dada.

Los lectores que deseen una descripción más pormenorizada de estos acontecimientos memorables en nuestra historia intelectual quedan invitados a consultar cualquiera (o todas) de las siguientes reseñas magistrales: Philip J. Davis y Reuben Hersh, *The Mathematical Experience*, Houghton Mifflin Co., Boston, 1982, págs. 255-270; Béla Sz.-Nagy, *Introduction to Real Functions and Orthogonal Expansions*, Oxford University Press, 1965, págs. 375-380; y especialmente Bernhard Riemann, en *A Source Book In Classical Analysis*, ed. Garrett Birkhoff, Harvard University Press, 1973, págs. 16-21.

En la próxima sección y en sus problemas presentaremos una exposición organizada de la teoría de la cuerda vibrante antes citada; y en secciones posteriores analizaremos otras aplicaciones en física y matemáticas.

NOTA SOBRE D'ALEMBERT. Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) fue un físico, matemático y hombre de letras francés. En ciencia se le recuerda por el *principio de D'Alembert* en mecánica y por su solución de la ecuación de ondas. Su principal aportación la constituye su colaboración con Diderot en la preparación de la famosa *Encyclopédie*, que jugó un papel crucial en Francia con su énfasis en la ciencia y en la literatura y sus ataques a las fuerzas reaccionarias de la Iglesia y el Estado. D'Alembert mantuvo excelente amistad con Euler, Lagrange y Laplace.

40. AUTOVALORES, AUTOFUNCIONES Y LA CUERDA VIBRANTE

Comenzamos buscando una solución $y(x)$ no trivial de la ecuación

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (1)$$

que satisfaga las *condiciones de contorno*

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(\pi) = 0. \quad (2)$$

El parámetro λ en (1) puede tomar cualquier valor real, y parte de nuestra labor consiste en descubrir los λ para los cuales el problema admite solución. Hasta ahora habíamos considerado sólo *problemas de valores iniciales*, en los que se busca la solución de una ecuación diferencial de segundo orden que cumpla dos condiciones en un solo valor de la variable independiente. Aquí nos enfrentamos a una situación muy diferente, porque queremos satisfacer una condición en dos valores distintos de x . Este tipo de problemas se conoce como *problemas de valores de contorno* (o en breve, *problemas de contorno*), y en general son más difíciles y de mayor alcance, en teoría y en la práctica, que los problemas de valores iniciales.

El problema propuesto en (1) y (2), sin embargo, no plantea dificultades. Si λ es negativo, el Teorema 24-B nos dice que únicamente la solución trivial de (1) puede satisfacer (2); y si $\lambda = 0$, la solución general de (1) es $y(x) = c_1x + c_2$, de modo que llegamos a la misma conclusión. Hemos de restringirnos, por tanto, al caso en que λ es positivo, y entonces la solución general de (1) es

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}x;$$

y como $y(0)$ ha de ser 0, eso se reduce a

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x. \quad (3)$$

Así pues, si nuestro problema tiene solución, ésta ha de ser de la forma (3). Para satisfacer la segunda condición de contorno $y(\pi) = 0$, es claro que $\sqrt{\lambda}\pi$ debe ser igual a $n\pi$ para algún entero positivo n , luego $\lambda = n^2$. En otras palabras, λ ha de ser igual a uno de los números 1, 4, 9, ... Estos valores de λ se llaman *autovalores* del problema, y las soluciones correspondientes

$$\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x, \dots \quad (4)$$

se llaman *autofunciones*. Es claro que los autovalores quedan unívocamente determinados por el problema, pero las autofunciones no, porque cualesquiera múltiplos no nulos de (4), digamos $a_1 \operatorname{sen} x, a_2 \operatorname{sen} 2x, a_3 \operatorname{sen} 3x, \dots$, sirven como autofunciones también. Para referencia posterior citemos dos hechos: los autovalores forman una sucesión creciente de números positivos que tiende a ∞ ; y la n -ésima autofunción, $\operatorname{sen} nx$, se anula en los extremos del intervalo $[0, \pi]$ y tiene exactamente $n - 1$ ceros en ese intervalo.

Pasamos a examinar el problema clásico de física matemática descrito en la sección anterior, el de la cuerda vibrante. Queremos entender cómo aparecen

los autovalores y las autofunciones. Supongamos que una cuerda flexible se tensa entre dos puntos del eje x , que por conveniencia tomamos como $x = 0$ y $x = \pi$. La cuerda se deforma entonces a una cierta curva $y = f(x)$ en el plano xy (Fig. 48) y se suelta a continuación. Para obtener la ecuación del movimiento, hacemos varias hipótesis de simplificación, la primera de las cuales es que la vibración subsiguiente es transversal. Ello quiere decir que cada punto de la cuerda tiene coordenada x constante, de manera que su coordenada y depende sólo de x y del tiempo t . Así pues, el desplazamiento de la cuerda a partir de su posición de equilibrio vendrá dado por cierta función $y = y(x, t)$, y sus derivadas en el tiempo $\partial y / \partial t$ y $\partial^2 y / \partial t^2$ representan la velocidad y la aceleración de la cuerda. Consideraremos el movimiento de un pequeño fragmento de la cuerda que tenga en equilibrio una longitud Δx . Si la densidad de masa lineal es $m = m(x)$, de modo que la masa de ese fragmento es $m\Delta x$, por la segunda ley de Newton la fuerza transversal F que actúa sobre él es

$$F = m\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Tratándose de una cuerda flexible, la tensión $T = T(x)$ en cualquier punto está dirigida a lo largo de la tangente (véase Figura 48) y tiene componente y igual a $T \operatorname{sen} \theta$. A continuación suponemos que el movimiento de la cuerda se debe exclusivamente a la tensión. En consecuencia, F es la diferencia entre los valores de $T \operatorname{sen} \theta$ en los extremos de nuestro fragmento, a saber, $\Delta(T \operatorname{sen} \theta)$, de modo que (5) se convierte en

$$\Delta(T \operatorname{sen} \theta) = m\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Si las vibraciones son relativamente pequeñas, de modo que θ es pequeño y $\operatorname{sen} \theta$ es aproximadamente igual a $\operatorname{tg} \theta = \partial y / \partial x$, entonces (6) nos dice que

$$\frac{\Delta(T \partial y / \partial x)}{\Delta x} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2};$$

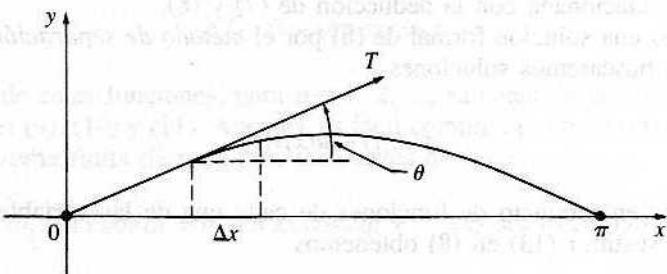


Figura 48

y cuando se hace tender Δx hacia cero se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial y}{\partial x} \right) = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Nuestro interés actual en esta ecuación se centra en el caso en que m y T son constantes, así que la ecuación pasa a ser

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (8)$$

con $a = \sqrt{T/m}$. Por razones que saldrán a la luz en los problemas, (8) se llama *ecuación de ondas unidimensional*. Buscamos una solución $y(x, t)$ que satisfaga las condiciones de contorno

$$y(0, t) = 0 \quad (9)$$

e

$$y(\pi, t) = 0, \quad (10)$$

y las condiciones iniciales

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (11)$$

e

$$y(x, 0) = f(x). \quad (12)$$

Las condiciones (9), (10) expresan la hipótesis de que los extremos de la cuerda están permanentemente fijos en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$; mientras que (11), (12) aseguran que la cuerda está en reposo en el momento de soltarla y que su forma entonces es $y = f(x)$. Nótese, sin embargo, que ninguna de estas condiciones está relacionada con la deducción de (7) y (8).

Daremos una solución formal de (8) por el *método de separación de variables*, o sea, buscaremos soluciones

$$y(x, t) = u(x)v(t), \quad (13)$$

factorizables en producto de funciones de cada una de las variables independientes. Al sustituir (13) en (8) obtenemos

$$a^2 u''(x)v(t) = u(x)v''(t),$$

o sea,

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{v''(t)}{v(t)}. \quad (14)$$

Como el miembro de la izquierda es función sólo de x y el de la derecha de t , (14) puede ser cierta sólo si ambos miembros son constantes. Denotando el valor común de esa constante por $-\lambda$, (14) se desdobra en dos ecuaciones diferenciales ordinarias para $u(x)$ y $v(t)$:

$$u'' + \lambda u = 0 \quad (15)$$

y

$$v'' + \lambda a^2 v = 0. \quad (16)$$

Es posible satisfacer (9) y (10) resolviendo (15) con las condiciones de contorno $u(0) = u(\pi) = 0$. Ya hemos dicho que este problema tiene solución no trivial si y sólo si $\lambda = n^2$ para algún entero positivo n , y las correspondientes soluciones (las autofunciones) son

$$u_n(x) = \sin nx.$$

Análogamente, para esos λ (los autovalores) la solución general de (16) es

$$v(t) = c_1 \sin nat + c_2 \cos nat;$$

y si imponemos el requisito de que $v'(0) = 0$, para que se cumpla (11), entonces $c_1 = 0$ y tenemos las soluciones

$$v_n(t) = \cos nat.$$

Los correspondientes productos de la forma (13) son, por tanto,

$$y_n(x, t) = \sin nx \cos nat.$$

Cada una de estas funciones, para $n = 1, 2, \dots$, satisface la ecuación (8) y las condiciones (9), (10) y (11). Además, es fácil comprobar que lo mismo es cierto para toda suma finita de múltiplos constantes de las y_n :

$$b_1 \sin x \cos at + b_2 \sin 2x \cos 2at + \dots + b_n \sin nx \cos nat.$$

Procediendo formalmente, esto es, ignorando cuestiones de convergencia, derivabilidad término a término y cosas por el estilo, toda serie del tipo

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \cos nat = b_1 \operatorname{sen} x \cos at + \\ + b_2 \operatorname{sen} 2x \cos 2at + \dots + b_n \operatorname{sen} nx \cos nat + \dots \quad (17)$$

es también solución de (8) y satisface (9), (10) y (11). Esto nos lleva a la última condición (12), es decir, que para $t = 0$ la solución (17) ha de reproducir la forma inicial de la cuerda:

$$f(x) = b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \dots + b_n \operatorname{sen} nx + \dots \quad (18)$$

Como dijimos en la sección anterior, cuando estas fórmulas fueron propuestas por Daniel Bernoulli en 1753, a muchos matemáticos les pareció imposible (18) salvo si $f(x)$ fuera una función de alguna clase especial. Durante el siglo siguiente quedó claro que esta opinión era errónea, y que realmente expresiones de la forma (18) son válidas para clases muy amplias de funciones $f(x)$ que se anulen en $x = 0$ y en $x = \pi$. Supuesto que esto sea cierto, quedaba para Bernoulli y sus contemporáneos calcular los coeficientes b_n , una vez dada la función $f(x)$. Este problema fue resuelto por Euler en 1777, y su solución abrió el vasto campo de las series de Fourier. En la Sección 35 vimos cómo calcular estos coeficientes, pero ahora los calcularemos de nuevo por métodos propios de un orden de ideas más amplio.

Las autofunciones $u_m(x)$ y $u_n(x)$, es decir, $\operatorname{sen} mx$ y $\operatorname{sen} nx$, satisfacen las ecuaciones

$$u_m'' = -m^2 u_m \quad \text{y} \quad u_n'' = -n^2 u_n.$$

Multiplicando la primera ecuación por u_n , la segunda por u_m , y restando, se obtiene

$$u_n u_m'' - u_m u_n'' = (n^2 - m^2) u_m u_n,$$

o sea,

$$(u_n u_m' - u_m u_n')' = (n^2 - m^2) u_m u_n. \quad (19)$$

Integrando de 0 a π y recordando que $u_m(x) = \operatorname{sen} mx$ y $u_n(x) = \operatorname{sen} nx$ se anulan ambas en 0 y en π llegamos a

$$(n^2 - m^2) \int_0^\pi u_m(x) u_n(x) dx = [u_n(x) u_m'(x) - u_m(x) u_n'(x)]_0^\pi = 0,$$

luego

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = 0 \quad \text{donde } m \neq n. \quad (20)$$

Este resultado sugiere multiplicar (18) por $\sin nx$ e integrar después término a término de 0 a π . Hecho esto, (20) produce una asombrosa cancelación de términos que deja en pie tan sólo

$$\int_0^\pi f(x) \sin nx dx = b_n \int_0^\pi \sin^2 nx dx;$$

y como

$$\int_0^\pi \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2nx) dx = \frac{\pi}{2},$$

vemos que

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx. \quad (21)$$

Estos b_n son muy familiares para nosotros y se llaman los *coeficientes de Fourier de $f(x)$* . Con estos coeficientes, (18) se llama la *serie de Fourier de tipo seno de $f(x)$* o el desarrollo en autofunciones de $f(x)$ en términos de las autofunciones $\sin nx$, y (17) se llama *solución de Bernoulli* de la ecuación de ondas.

La anterior «solución» de la ecuación de ondas queda enturbiada por procedimientos dudosos y preguntas sin respuesta. Tan es así que desde un punto de vista riguroso sólo tiene un valor de sugerencia. Pero aun con eso y con todo, el esfuerzo no es baldío, porque algunas de las cuestiones que emergen, especialmente las del significado y validez de (18), son muy fructíferas. Así, si los b_n se calculan por medio de (21) y se forma con ellos la serie de la derecha en (18), ¿bajo qué circunstancias será convergente? Y si converge, ¿converge necesariamente a $f(x)$? Damos el siguiente breve enunciado de una respuesta a estas cuestiones, contenida en el teorema probado en el Apéndice A al final del capítulo precedente.

La función $f(x)$ bajo consideración está definida sobre el intervalo $[0, \pi]$ y se anula en sus extremos. Supongamos que f es continua en todo el intervalo, y que también lo es su derivada, con la posible excepción de un número finito de *discontinuidades de salto*, donde existen derivadas laterales finitas pero distintas. En lenguaje geométrico, la gráfica de esa función es una curva continua tal que la dirección de la tangente cambia de manera continua al movernos por ella, salvo en un número finito de «puntos angulosos» o «esqui-

nas» donde su dirección cambia de forma abrupta. Bajo tales hipótesis el desarrollo (18) es válido; o sea, si los b_n se definen por (21), entonces la serie de la derecha converge en todo punto al valor de la función en él. La necesidad de una teoría rigurosamente elaborada puede verse justificada por el hecho de que si se supone sólo que f es continua, sin decir nada acerca de su derivada, se sabe que la serie de la derecha en (18) puede ser divergente en algunos puntos².

Otra línea de investigación considera la posibilidad de desarrollos en autofunciones del tipo (18) para otros problemas de contorno. Si dejamos de lado la cuestión de la validez de tales desarrollos, el principal problema consiste en probar en otros casos que disponemos de suficiente cantidad de elementos para la construcción, o sea, de una sucesión de autovalores con sus correspondientes autofunciones que satisfagan alguna condición similar a (20).

Supongamos, por ejemplo, que consideramos la cuerda vibrante de antes pero con una diferencia significativa: la cuerda se halla en un medio *inhomogéneo*, en el sentido de que la densidad $m = m(x)$ puede variar de punto a punto. En tal situación, (8) viene reemplazada por

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{m(x)}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (22)$$

Si buscamos de nuevo una solución de la forma (13), entonces (22) se convierte en

$$\frac{u''(x)}{m(x)u(x)} = \frac{1}{T} \frac{v''(t)}{v(t)};$$

y, como antes, nos vemos abocados al siguiente problema de valores de contorno:

$$u'' + \lambda m(x)u = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0. \quad (23)$$

¿Cuáles son los autovalores y las autofunciones en este caso? Ni que decir tiene que no cabe dar respuestas precisas sin conocer algo más concreto sobre la función densidad $m(x)$. Pero al menos podemos probar que existen autovalores y autofunciones. Los detalles del argumento se dan en el Apéndice A al final de este capítulo.

² Desde 1966 se sabe que existen incluso funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en todo punto racional de $[0, \pi]$.

PROBLEMAS

1. Hallar los autovalores λ_n y las autofunciones $y_n(x)$ para la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ en cada uno de estos casos:
- $y(0) = 0, y(\pi/2) = 0;$
 - $y(0) = 0, y(2\pi) = 0;$
 - $y(0) = 0, y(1) = 0;$
 - $y(0) = 0, y(L) = 0$ cuando $L > 0;$
 - $y(-L) = 0, y(L) = 0$ cuando $L > 0;$
 - $y(a) = 0, y(b) = 0$ cuando $a < b.$

Resolver los dos problemas siguientes formalmente, es decir, sin pararse a estudiar aspectos como la convergencia de las series o la derivabilidad término a término.

2. Si $y = F(x)$ es una función arbitraria, $y = F(x + at)$ representa una onda de forma fija que se mueve hacia la izquierda por el eje x con velocidad a (Fig. 49). Análogamente, si $y = G(x)$ es otra función arbitraria, $y = G(x - at)$ es una onda que se mueve hacia la derecha, y la onda unidimensional más general con velocidad a es

$$y(x, t) = F(x + at) + G(x - at). \quad (*)$$

- Mostrar que (*) satisface la ecuación de ondas (8).
- Es fácil ver que la constante a en (8) tiene dimensiones de velocidad. Asimismo, es intuitivamente claro que si se perturba una cuerda tensa las ondas se moverán en ambas direcciones alejándose de la fuente perturbadora. Todo esto sugiere introducir nuevas variables $\alpha = x + at$ y $\beta = x - at$. Probar que en estas variables independientes, la ecuación (8) se convierte en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} = 0,$$

y deducir (*) de ahí, por integración. La fórmula (*) se llama *solución de D'Alembert* de la ecuación de ondas. Fue obtenida también por Euler, independientemente de D'Alembert aunque un poco más tarde.

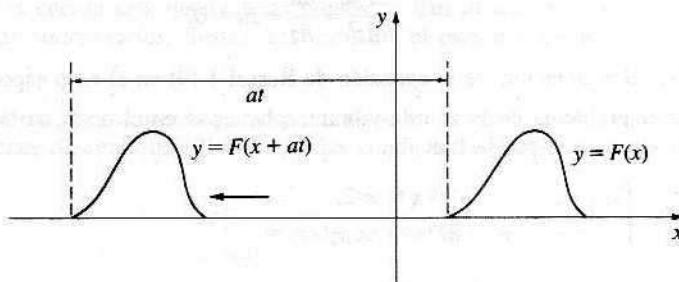


Figura 49

3. Consideremos una cuerda tensa infinita colocada sobre el eje x desde $-\infty$ hasta ∞ . Se perturba la cuerda hasta que adopta la forma de una curva $y = f(x)$, y entonces se suelta. Supongamos que adquiere un movimiento gobernado por la ecuación de ondas (8).

- (a) Usar (*) para demostrar que el desplazamiento de la cuerda viene dado por la fórmula de D'Alembert,

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)]. \quad (**)$$

Ayuda: Recordar las condiciones iniciales (11) y (12).

- (b) Supongamos además que la cuerda está fija, sin movimiento, en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$ (tales puntos se llaman *nodos*), de manera que $y(0, t) = y(\pi, t) = 0$, y usar (**) para probar que $f(x)$ es una función impar de período 2π [esto es, $f(-x) = -f(x)$ y $f(x + 2\pi) = f(x)$].

- (c) Probar que por ser $f(x)$ impar y periódica, con período 2π , se anula necesariamente en 0 y en π .

- (d) Demostrar que la solución de Bernoulli (17) se puede escribir en la forma (**).

Ayuda: $2 \operatorname{sen} nx \cos nat = \operatorname{sen}[n(x + at)] + \operatorname{sen}[n(x - at)]$.

4. Consideremos una cadena flexible uniforme de densidad de masa constante m_0 , colgando de un extremo. Si se toma un sistema de coordenadas como el que indica la Figura 50, las vibraciones laterales de la cadena, al perturbarla, vienen gobernadas por la ecuación (7). En este caso, la tensión T en cualquier punto es el peso del trozo de cadena que está por debajo de dicho punto, es decir, $T = m_0 x g$, siendo g la aceleración de la gravedad. Al cancelar m_0 , (7) pasa a ser

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g x \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

- (a) Suponiendo que esta ecuación en derivadas parciales tiene una solución de la forma $y(x, t) = u(x)v(t)$, probar como consecuencia que $u(x)$ satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d}{dx} \left(g x \frac{du}{dx} \right) + \lambda u = 0. \quad (***)$$

- (b) Si se cambia de la variable independiente x a $z = 2\sqrt{\lambda x/g}$, probar que la ecuación (***) se convierte en

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + zu = 0,$$

que, salvo notación, es la ecuación de Bessel 1-(9) en el caso especial $p = 0$.

5. Resolver el problema de la cuerda vibrante planteado en el texto, si la forma inicial (12) viene dada por la función

$$(a) f(x) = \begin{cases} 2cx/\pi, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 2c(\pi - x)/\pi, & \pi/2 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{\pi} x(\pi - x);$$

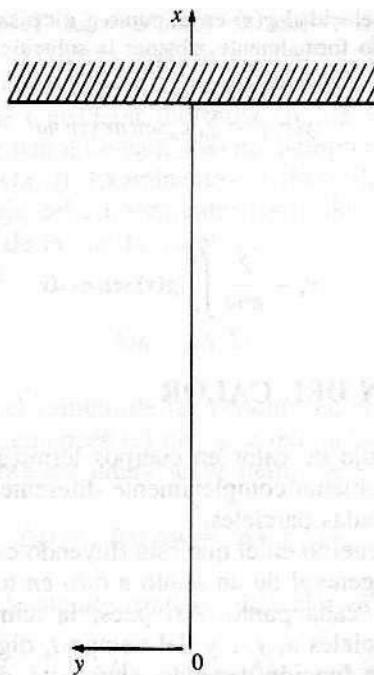


Figura 50

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/4, \\ \pi/4, & \pi/4 \leq x \leq 3\pi/4, \\ \pi - x, & 3\pi/4 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

En cada caso, dibujar la forma inicial de la cuerda.

6. Resolver el problema de la cuerda vibrante si la forma inicial (12) es la de un solo arco de la curva seno, $f(x) = c \sen x$. Probar que la cuerda mantiene siempre, en su movimiento, la misma forma genérica. Hacer lo mismo para funciones del tipo $f(x) = c \sen nx$. Probar, en particular, que hay $n - 1$ puntos entre $x = 0$ y $x = \pi$ en los que la cuerda está quieta; esos puntos se llaman *nodos* y esas soluciones son las *ondas estacionarias*. Ilustrar gráficamente el movimiento de las ondas estacionarias.
7. El problema de la *cuerda pulsada* consiste en resolver la ecuación (8) con las condiciones de contorno (9) y (10) y las condiciones iniciales

$$\frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x) \quad \text{e} \quad y(x, 0) = 0.$$

[Estas condiciones iniciales significan que la cuerda está inicialmente en la posición

de equilibrio y tiene velocidad $g(x)$ en el punto x a causa del impulso.] Separando variables y procediendo formalmente, obtener la solución

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \sin nat$$

donde

$$c_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^\pi g(x) \sin nx dx.$$

41. LA ECUACION DEL CALOR

Cuando se estudia el flujo de calor en cuerpos térmicamente conductores, se encuentra un tipo de problema completamente diferente, que conduce también a una ecuación en derivadas parciales.

En el interior de un cuerpo en el que está fluyendo calor de una zona a otra, la temperatura varía en general de un punto a otro en todo instante, y también varía con el tiempo en cada punto. Así pues, la temperatura w es función de las coordenadas espaciales x, y, z y del tiempo t , digamos $w = w(x, y, z, t)$. La forma precisa de esta función depende, claro está, de la forma del cuerpo, de las características térmicas del material, de la distribución inicial de temperatura y de las condiciones mantenidas sobre la superficie del cuerpo. El físico matemático francés Fourier analizó este problema en su clásico tratado de 1822, *Théorie Analytique de la Chaleur*. Utilizó principios físicos para probar que la temperatura w debe satisfacer la *ecuación del calor*

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (1)$$

Reproduciremos su razonamiento en una situación unidimensional simple y deduciremos la ecuación del calor unidimensional.

Necesitaremos los siguientes principios físicos:

- (a) El calor fluye en la dirección de temperatura decreciente, o sea, de las zonas calientes a las frías.
- (b) El ritmo al que fluye el calor a través de un área es proporcional al área y al ritmo de cambio de la temperatura respecto de la distancia en una dirección perpendicular al área. (El factor de proporcionalidad se denota por k y se llama *conductividad térmica* de la sustancia.)
- (c) La cantidad de calor ganado o perdido por un cuerpo cuando su temperatura cambia, es decir, la variación de su energía térmica, es proporcional a la masa del cuerpo y al cambio de temperatura. (Este factor de proporcionalidad se denota por c y se llama *calor específico* de la sustancia.)

Consideremos ahora el flujo de calor en una varilla cilíndrica delgada de área transversal A (Fig. 51) cuya superficie lateral está perfectamente aislada, de modo que no fluye calor por ella. Aquí la palabra «delgada» significa que la temperatura se puede considerar uniforme en cualquier sección transversal del cilindro, siendo, por tanto, función sólo del tiempo y de la posición de dicha sección, digamos $w = w(x, t)$. Examinemos el ritmo de cambio del calor contenido en una fina rodaja del cilindro entre las posiciones x y $x + \Delta x$.

Si ρ es la densidad de la varilla, es decir, su masa por unidad de volumen, la masa de la rodaja es

$$\Delta m = \rho A \Delta x.$$

Además, si Δw denota el cambio de temperatura en el punto x en un pequeño intervalo de tiempo Δt , entonces (c) nos dice que la cantidad de calor almacenado en la rodaja durante ese intervalo de tiempo es

$$\Delta H = c \Delta m \Delta w = c \rho A \Delta x \Delta w,$$

de modo que el ritmo de almacenamiento del calor es aproximadamente

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = c \rho A \Delta x \frac{\Delta w}{\Delta t}. \quad (2)$$

Suponemos que no se genera calor dentro de la rodaja por procesos químicos o eléctricos, por ejemplo, con lo que la rodaja gana calor solamente por medio del flujo que penetra por sus caras. Según (b), el ritmo al que el calor fluye en la rodaja por la cara izquierda es

$$-kA \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_x.$$

El signo negativo se escoge de acuerdo con (a), de tal manera que esa cantidad resulta positiva si $\partial w / \partial x$ es negativa. Análogamente se calcula el ritmo al que el calor fluye por la cara derecha, a saber,

$$kA \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x},$$

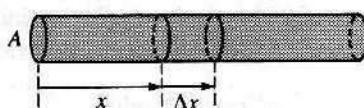


Figura 51

de modo que el ritmo total del flujo es

$$kA \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - kA \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_x. \quad (3)$$

Igualando (2) y (3) resulta

$$kA \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - kA \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_x = c\rho A \Delta x \frac{\Delta w}{\Delta t},$$

o sea,

$$\frac{k}{c\rho} \left[\frac{\partial w / \partial x|_{x+\Delta x} - \partial w / \partial x|_x}{\Delta x} \right] = \frac{\Delta w}{\Delta t}.$$

Finalmente, haciendo Δx e $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos la ecuación buscada,

$$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (4)$$

donde $a^2 = k/c\rho$. Este es el razonamiento físico que conduce a la ecuación del calor unidimensional. La ecuación del calor tridimensional (1) se deduce del mismo modo.

Vamos a resolver la ecuación del calor unidimensional (4) sujeta a las siguientes condiciones: la varilla tiene π unidades de longitud y está situada en el eje x , entre los puntos $x = 0$ y $x = \pi$; la temperatura inicial es una función prescrita $f(x)$, de modo que

$$w(x, 0) = f(x); \quad (5)$$

y los extremos de la varilla están a temperatura cero en todo instante $t \geq 0$,

$$w(0, t) = 0 \quad y \quad w(\pi, t) = 0. \quad (6)$$

Intentaremos hallar una solución de este problema de contorno por el método de separación de variables que tan bien funcionaba en el caso de la ecuación de ondas. En otras palabras, buscamos una solución de (4) de la forma

$$w(x, t) = u(x)v(t). \quad (7)$$

Al sustituir esta expresión en (4) queda

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{v'(t)}{v(t)}. \quad (8)$$

Como cada lado de esta ecuación depende sólo de una de las variables, ambos lados han de ser constantes, y si denotamos la constante común por $-\lambda$, (8) se desdobra en dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$u'' + \lambda u = 0 \quad (9)$$

y

$$v' + \lambda a^2 v = 0. \quad (10)$$

Igual que en la Sección 40, resolvemos (9) y satisfacemos las condiciones de contorno (6) poniendo $\lambda = n^2$ para cualquier entero positivo n , y la correspondiente autofunción es

$$u_n(x) = \sin nx.$$

Con ese valor de λ , la ecuación (10) queda

$$v' + n^2 a^2 v = 0,$$

con la solución evidente

$$v_n(t) = e^{-n^2 a^2 t}.$$

Los productos resultantes de la forma (7) son pues

$$w_n(x, t) = e^{-n^2 a^2 t} \sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Esto nos coloca en situación de saber que cada una de las funciones (11) cumple la ecuación (4) y las condiciones de contorno (6), y salta a la vista que lo mismo es cierto para toda combinación lineal finita de las w_n :

$$b_1 e^{-a^2 t} \sin x + b_2 e^{-4a^2 t} \sin 2x + \dots + b_n e^{-n^2 a^2 t} \sin nx. \quad (12)$$

Sin preocuparnos por las importantes cuestiones matemáticas de convergencia y derivabilidad término a término, pasamos de (12) a la serie infinita

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 a^2 t} \sin nx. \quad (13)$$

Esta será una solución de nuestro problema de contorno original si nos permite satisfacer la condición inicial (5), es decir, si (13) se reduce a la distribución inicial de temperatura $f(x)$ en $t = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (14)$$

Para terminar esta parte de nuestra tarea y hacer completamente explícita la solución (13), cuanto queda por hacer es determinar los b_n como los coeficientes de Fourier en el desarrollo (14) de $f(x)$ en serie de Fourier,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx. \quad (15)$$

Ejemplo 1. Supongamos que la delgada varilla antes aludida se sumerge en agua hirviendo, es decir, a 100°C de temperatura, y después se saca en el instante $t = 0$ y se colocan sus dos extremos inmediatamente en contacto con hielo, de manera que los extremos se van a mantener a 0°C . Hallar la temperatura $w = w(x, t)$ bajo esas circunstancias.

Solución. Es un caso especial de la anterior discusión, con una distribución inicial de temperatura dada por la función constante

$$f(x) = 100, \quad 0 < x < \pi.$$

En consecuencia, hemos de hallar la serie de senos de esta función, que se puede calcular usando (15) o por algún otro camino (véase Problema 35-4),

$$f(x) = \frac{400}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

Refiriéndonos a la fórmula (13), vemos que la función de temperatura requerida es

$$w(x, t) = \frac{400}{\pi} \left[e^{-a^2 t} \sin x + \frac{1}{3} e^{-9a^2 t} \sin 3x + \frac{1}{5} e^{-25a^2 t} \sin 5x + \dots \right].$$

Ejemplo 2. Hallar la temperatura estacionaria de la varilla estudiada antes si las temperaturas fijas de sus extremos $x = 0$ y $x = \pi$ son w_1 y w_2 , respectivamente.

Solución. «Estacionaria» significa que $\partial w / \partial t = 0$, luego la ecuación del calor (4) se reduce a $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$, o sea, $d^2 w / dx^2 = 0$. La solución general, por tanto, es $w = c_1 x + c_2$, y usando las condiciones de contorno calculamos fácilmente esas constantes de integración y llegamos a la deseada solución:

$$w = w_1 + \frac{1}{\pi} (w_2 - w_1) x.$$

La versión estacionaria de la ecuación del calor tridimensional (1) es

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0; \quad (16)$$

se llama *ecuación de Laplace*. El estudio de esta ecuación y de sus soluciones y aplicaciones (existen muchas en la teoría de la gravitación) conforma la rica

rama de las matemáticas denominada *teoría del potencial*. Continuaremos con este asunto en el Apéndice A al final del próximo capítulo. La ecuación correspondiente en dos dimensiones es

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad (17)$$

útil a la hora de considerar problemas en el plano, adquiere especial relevancia en el análisis complejo.

PROBLEMAS

- Deducir la ecuación tridimensional del calor (1), adaptando el razonamiento expuesto en el texto al caso de una pequeña caja con aristas Δx , Δy , Δz contenida en una región R del espacio xyz en que la función temperatura es $w(x, y, z, t)$. *Ayuda:* Considerar el flujo de calor a través de dos caras opuestas de la caja, primero perpendiculares al eje x , luego al eje y y por fin al eje z .
- Resolver el problema de contorno del texto si las condiciones se cambian de (5) y (6) a

$$w(x, 0) = f(x) \quad y \quad w(0, t) = w_1, \quad w(\pi, t) = w_2,$$

Ayuda: Escribir $w(x, t) = W(x, t) + g(x)$ y recordar el Ejemplo 2.

- Supongamos que la superficie lateral de la varilla citada en el texto no está aislada sino que irradia calor a su entorno. Supuesta correcta la ley de Newton del enfriamiento, probar que la ecuación del calor unidimensional pasa a ser

$$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t} + c(w - w_0),$$

donde c es una constante positiva y w_0 la temperatura del entorno.

- En el problema anterior, hallar $w(x, t)$ si los extremos de la varilla se mantienen a 0° C , $w_0 = 0^\circ \text{ C}$, y la distribución inicial de temperatura es $f(x)$.
- En el Ejemplo 1, supongamos que los extremos de la varilla están aislados en lugar de mantenerse a 0° C . ¿Cuáles son las nuevas condiciones de contorno? Hallar la temperatura $w(x, t)$, en este caso por simple sentido común.
- Hallar $w(x, t)$ para la varilla con extremos aislados en $x = 0$ y $x = \pi$ (véase problema precedente) si la distribución inicial de temperatura viene dada por $w(x, 0) = f(x)$.
- La ecuación del calor bidimensional es

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Hallar, por separación de variables, una solución estacionaria de esta ecuación en la banda infinita del plano xy limitada por las rectas $x = 0$, $x = \pi$ e $y = 0$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$w(0, y) = 0, \quad w(\pi, y) = 0,$$

$$w(x, 0) = f(x), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} w(x, y) = 0.$$

42. EL PROBLEMA DE DIRICHLET PARA UN CÍRCULO. INTEGRAL DE POISSON

Proseguimos nuestro plan de este capítulo familiarizando al estudiante con importantes problemas matemáticos relacionados tanto con ecuaciones diferenciales como con series de Fourier. Aunque no nos es posible tratar tales problemas con los pormenores que merecen, al menos es factible dar una idea de en qué consisten y describir brevemente algunos métodos para resolverlos.

Comenzamos con la ecuación de Laplace en dos dimensiones, citada al final de la Sección 41. En coordenadas rectangulares (x, y) es

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad (1)$$

y en coordenadas polares (r, θ)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2)$$

Transformar una en otra es un simple ejercicio con la regla de la cadena (véase Problema 1). Muchos tipos de problemas físicos requieren resolver la ecuación de Laplace, y existe una amplia variedad de soluciones que involucran funciones diversas. Sin embargo, al igual que en las secciones anteriores, un problema físico concreto usualmente exige una solución definida en una región dada y que satisfaga cierta condición sobre el contorno de esa región.

El famoso problema del análisis conocido como *problema de Dirichlet* puede enunciarse, en una de sus versiones, así: Dada una región R en el plano, limitada por una curva cerrada simple C , y dada una función $f(P)$ definida y continua en los puntos P de C , se pide hallar una función $w(P)$, continua en R y sobre C , que verifique la ecuación de Laplace en R y coincida con $f(P)$ sobre el contorno C .

Consideraremos el caso particular en que R es el interior del círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$, y usaremos coordenadas polares como sugiere la geometría. Sea $w = w(r, \theta)$ una función continua dentro del círculo y sobre su contorno. Sus valores en $r = 1$ se llaman los *valores de contorno* en esa región circular. La función $w(1, \theta)$ es evidentemente una función continua de θ con período 2π . El problema de Dirichlet para esta región circular es el siguiente: Dada una

función cualquiera $f(\theta)$ continua y con período 2π , hemos de hallar una función $w = w(r, \theta)$ que satisfaga la ecuación de Laplace (2) para $0 \leq r < 1$, y tal que $w(1, \theta) = f(\theta)$ para todo valor de θ . En algunas versiones del problema de Dirichlet, la condición de que f sea continua se relaja y la condición $w(1, \theta) = f(\theta)$ se expresa en forma distinta; más adelante comentaremos estas variantes.

Si w es la temperatura, sabemos por la Sección 41 que el problema de Dirichlet para el círculo traduce el problema de hallar la temperatura estacionaria en una placa circular delgada cuando la temperatura a lo largo de su contorno ha sido prefijada. Las soluciones de la ecuación de Laplace se llaman entonces *funciones armónicas*. En esta terminología, el problema de Dirichlet consiste en encontrar una función armónica en la región circular que tome valores decididos de antemano sobre el contorno.

Vamos con los detalles de su resolución. De momento ignoramos la función de contorno $f(\theta)$ y buscamos soluciones de la ecuación de Laplace (2) de la forma $w = w(r, \theta) = u(r)v(\theta)$, esto es, factorizables como producto de una función de r por otra de θ . Así pues, realizamos otra aplicación del método de separación de variables. Cuando esta función se sustituye en (2), queda

$$u''(r)v(\theta) + \frac{1}{r}u'(r)v(\theta) + \frac{1}{r^2}u(r)v''(\theta) = 0,$$

o sea,

$$\frac{r^2u''(r) + ru'(r)}{u(r)} = -\frac{v''(\theta)}{v(\theta)}. \quad (3)$$

El miembro de la izquierda de (3) es independiente de θ , y el de la derecha es independiente de r , luego ambos han de ser constantes; denotando el valor de esta constante común por λ , (3) se desdobra en dos ecuaciones

$$v'' + \lambda v = 0 \quad (4)$$

y

$$r^2u'' + ru' - \lambda u = 0. \quad (5)$$

Queremos que $v(\theta)$ sea continua y periódica, con período 2π y, por supuesto, no idénticamente nula. Ello obliga a que la constante λ en (4) sea de la forma $\lambda = n^2$ con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Para $n = 0$, la única elección adecuada es $v = \text{constante}$, y para $n = 1, 2, 3, \dots$ las soluciones de (4) son combinaciones lineales de $\cos n\theta$ y $\sin n\theta$,

$$v_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

Acto seguido, ponemos $\lambda = n^2$ en la ecuación (5), que con ello se convierte en

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - n^2 u = 0.$$

Esta es la ecuación de Euler equidimensional (Problema 17-5), con soluciones

$$u(r) = A + B \log r \quad \text{si } n = 0,$$

$$u(r) = Ar^n + Br^{-n} \quad \text{si } n = 1, 2, 3, \dots,$$

con A, B constantes. Queremos que $u(r)$ sea continua en $r = 0$, así que tomamos $B = 0$ en todos los casos, y tenemos, por tanto,

$$u_n(r) = r^n.$$

Si ahora escribimos todas las soluciones $w = u_n(r)v_n(\theta)$ en orden secuencial, resulta:

$$n = 0, \quad w = \text{una constante } 1/2a_0;$$

$$n = 1, \quad w = r(a_1 \cos \theta + b_1 \operatorname{sen} \theta);$$

$$n = 2, \quad w = r^2(a_2 \cos 2\theta + b_2 \operatorname{sen} 2\theta);$$

$$n = 3, \quad w = r^3(a_3 \cos 3\theta + b_3 \operatorname{sen} 3\theta);$$

...

Es fácil darse cuenta de que cualquier suma finita de soluciones de la ecuación de Laplace es también solución, y lo mismo es cierto para una serie infinita, supuesto que ésta posea las propiedades de convergencia apropiadas. Eso nos conduce a la solución

$$w = w(r, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta). \quad (6)$$

Si ponemos $r = 1$ en (6) y recordamos que deseamos satisfacer la condición de contorno $w(1, \theta) = f(\theta)$, entonces obtenemos

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta). \quad (7)$$

Ahora está claro lo que hemos de hacer para resolver el problema de Dirichlet en el círculo unidad: calcular para la función dada $f(\theta)$ su serie de Fourier (7), y construir después la solución (6) insertando simplemente el factor r^n al frente de la expresión entre paréntesis en (7). Naturalmente, el término constante en (6) se escribe como $1/2a_0$ por coherencia con la notación empleada en las series de Fourier.

Ejemplo. Resolver el problema de Dirichlet para el círculo unidad si $f(\theta) = 1$ sobre la mitad superior del círculo ($0 < \theta < \pi$) y $f(\theta) = -1$ sobre la mitad inferior del círculo ($-\pi < \theta < 0$), con $f(0) = f(\pm\pi) = 0$.

Solución. Por el Problema 35-4 sabemos que la serie de Fourier de $f(\theta)$ es

$$f(\theta) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \theta + \frac{\sin 3\theta}{3} + \frac{\sin 5\theta}{5} + \dots \right).$$

La solución del problema de Dirichlet es, por consiguiente,

$$w(r, \theta) = \frac{4}{\pi} \left(r \sin \theta + \frac{1}{3} r^3 \sin 3\theta + \frac{1}{5} r^5 \sin 5\theta + \dots \right).$$

La discusión anterior se refiere tan sólo a los aspectos formales y no a las cuestiones delicadas de convergencia. No obstante, anunciamos sin demostración que si a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de $f(\theta)$, la serie (6) converge para $0 \leq r < 1$ y su suma $w(r, \theta)$ es una solución de la ecuación de Laplace en esa región. Para que esto sea cierto no es necesario exigir que $f(\theta)$ sea continua, ni que su serie de Fourier sea convergente. Basta suponer que $f(\theta)$ es integrable. Más aún, incluso con tan débil hipótesis resulta que $f(\theta)$ es el valor de contorno de $w(r, \theta)$, en el sentido de que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} w(r, \theta) = f(\theta)$$

en todo punto de continuidad de la función $f(\theta)$. Estos hechos notables han surgido de investigaciones minuciosas de la integral de Poisson, que pasamos a exponer con brevedad³.

La integral de Poisson. El problema de Dirichlet para el círculo unidad ya está resuelto, al menos formalmente. Ahora bien, se puede hallar una expresión más compacta de su solución como sigue, si no nos da miedo operar con números complejos. Como sabemos, los coeficientes en (6) vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \sin n\phi d\phi.$$

³ Pueden encontrarse más detalles acerca de estas interesantes cuestiones teóricas en H. S. Carslaw, *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, 3.^a ed., Macmillan, Londres, 1930, págs. 250-254; R. T. Seeley, *An Introduction to Fourier Series and Integrals*, W. A. Benjamin, Nueva York, 1966, págs. 16-19; o págs. 436-442 del libro de Sz.-Nagy mencionado en la Sección 39.

Cuando estas expresiones se introducen en (6), usando la identidad

$$\cos(\theta - \phi) = \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi$$

e intercambiando el orden de la integración y de la suma se obtiene

$$w(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \left[\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} r^n \cos n(\theta - \phi) \right] d\phi. \quad (8)$$

Para sumar la serie entre corchetes ponemos $\alpha = \theta - \phi$ y $z = re^{i\alpha} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Entonces $z^n = r^n e^{in\alpha} = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$ y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} r^n \cos n\alpha &= \text{parte real de } \left[\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} z^n \right] = \\ &= \text{parte real de } \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{1-z} \right] = \\ &= \text{parte real de } \left[\frac{1+z}{2(1-z)} \right] = \\ &= \text{parte real de } \left[\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{2|1-z|^2} \right] = \\ &= \frac{1-|z|^2}{2|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{2(1-2r \cos \alpha + r^2)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en (8) vemos que

$$w(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi) d\phi. \quad (9)$$

Esta notable fórmula para la solución del problema de Dirichlet se conoce como *integral de Poisson*; expresa el valor de la función armónica $w(r, \theta)$ en todos los puntos *interiores* al círculo, en términos de sus valores sobre la *frontera* del círculo. Hay que hacer notar que para $r = 0$ la fórmula (9) da

$$w(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) d\phi.$$

Esto demuestra que el valor de la función armónica w en el centro del círculo es el promedio de sus valores sobre la circunferencia frontera.

NOTA SOBRE POISSON. Siméon Denis Poisson (1781-1840), eminente matemático y físico francés, sucedió a Fourier en 1806 como profesor en l'Ecole Polytechnique. La

ecuación de Poisson describe en física la variación de potencial en el interior de distribuciones de masa o de carga eléctrica, paralelamente a lo que hace la de Laplace en el vacío. Cuenta en su haber con importantes aportaciones al estudio de la elasticidad, el magnetismo, el calor y la capilaridad. En matemática pura, la fórmula de suma de Poisson es una herramienta fundamental en la teoría analítica de números, y la integral de Poisson citada en el texto dio pie a abundantes desarrollos del análisis de Fourier. Además de todo ello, trabajó extensamente en teoría de probabilidades. A él se debe el nombre de la ley de los grandes números; y la distribución de Poisson tiene múltiples aplicaciones en fenómenos tales como la distribución de hematíes en un corte al microscopio, de automóviles en una autopista, de espectadores en la cola de un teatro, etc. Según Abel, Poisson era un hombre grueso y de escasa estatura. Su familia trató de animarle en muchas direcciones, desde ser médico hasta abogado, esto último en la creencia de que tal vez no servía para mejor cosa, pero al final encontró su nicho ecológico como científico y produjo unas 300 obras en una vida relativamente corta. «La vida es trabajo», afirmaba, y no sin buenas razones para ello.

PROBLEMAS

1. Si $w = F(x, y) = G(r, \theta)$ con $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, probar que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

Ayuda:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial w}{\partial y} (r \cos \theta).$$

Análogamente, calcular $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right)$ y $\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$.

2. Resolver el problema de Dirichlet para el círculo unidad si la función de contorno $f(\theta)$ se define como
- $f(\theta) = \cos(\theta/2)$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$;
 - $f(\theta) = \theta$, $-\pi < \theta < \pi$;
 - $f(\theta) = 0$ para $-\pi \leq \theta < 0$, $f(\theta) = \sin \theta$ para $0 \leq \theta \leq \pi$;
 - $f(\theta) = 0$ para $-\pi < \theta < 0$, $f(\theta) = 1$ para $0 \leq \theta \leq \pi$;
 - $f(\theta) = \theta^2/4$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.
3. Demostrar que el problema de Dirichlet para el círculo $x^2 + y^2 = R^2$, con función de contorno $f(\theta)$, tiene solución

$$w(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de $f(\theta)$. Probar asimismo que la integral de Poisson para este caso más general es

$$w(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi) d\phi.$$

4. Sea $w(P)$ armónica en una región del plano y sea C cualquier disco contenido por completo en esa región. Probar que el valor de w en el centro de C es el promedio de sus valores sobre la circunferencia frontera. (Este es un teorema de gran trascendencia en teoría del potencial, debido a Gauss.)

43. PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE

Retornamos brevemente a la discusión de autovalores y autofunciones del comienzo de la Sección 40, con el fin de situar esas ideas en un contexto más amplio que facilitará la transición a los temas del próximo capítulo.

Como ya sabemos, una sucesión de funciones $y_n(x)$ con la propiedad de que

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \alpha_n \neq 0 & \text{si } m = n, \end{cases} \quad (1)$$

se dice que es *ortogonal* sobre el intervalo $[a, b]$. Si $\alpha_n = 1$ para todo n , las funciones se dicen *normalizadas* y se habla de una *sucesión ortonormal*. Un tipo más general de ortogonalidad se define por la propiedad

$$\int_a^b q(x) y_m(x) y_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \alpha_n \neq 0 & \text{si } m = n. \end{cases} \quad (2)$$

En este caso se dice que la sucesión es *ortogonal con respecto a la función peso $q(x)$* . Poseen propiedades de ortogonalidad de este tipo las autofunciones asociadas a una amplia gama de problemas de contorno.

Consideraremos una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [\lambda q(x) + r(x)] y = 0, \quad (3)$$

para la que deseamos encontrar soluciones válidas en el intervalo $[a, b]$. De acuerdo con el Teorema A en la Sección 14, si $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son continuas en ese intervalo y $p(x)$ no se anula en él, existe una y sólo una solución $y(x)$ del problema de valores iniciales en el que asignamos de antemano valores arbitrarios a $y(a)$ e $y'(a)$. Supongamos, sin embargo, que deseamos prefijar los valores de $y(a)$ e $y(b)$, es decir, de $y(x)$ en dos puntos diferentes, en lugar de los valores de $y(x)$ y de su derivada en un mismo punto. Examinemos las circunstancias bajo las cuales este problema de valores de contorno tiene solución no trivial.

Ejemplo 1. Al comienzo de la Sección 40 hemos considerado (3) en el caso especial $p(x) = q(x) = 1$ y $r(x) = 0$, de modo que la ecuación es entonces

$$y'' + \lambda y = 0.$$

El intervalo era $[0, \pi]$ y las condiciones de contorno

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(\pi) = 0.$$

Vimos que para que fuera resoluble, λ había de tomar uno de los valores

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

y que las soluciones correspondientes son

$$y_n(x) = \operatorname{sen} nx.$$

Llamamos a los λ_n *autovalores* del problema, y las y_n son las correspondientes *autofunciones*.

En el caso de la ecuación más general (3), resulta que si las funciones $p(x)$ y $q(x)$ se restringen adecuadamente, en concreto si $p(x) > 0$ y $q(x) > 0$ en $[a, b]$, entonces también seremos capaces de obtener soluciones no triviales que satisfagan condiciones de contorno apropiadas en los dos puntos distintos a y b si y sólo si el parámetro λ toma ciertos valores específicos. Estos son los *autovalores* del problema de contorno; son números reales que se pueden ordenar en sucesión creciente

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \dots, \quad (4)$$

y además,

$$\lambda_n \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Es conveniente esta ordenación porque nos permite ordenar las correspondientes *autofunciones*

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad \dots, \quad y_n(x), \quad \dots \quad (5)$$

de forma natural. Como en el Ejemplo 1, las *autofunciones* no son únicas, pero bajo las condiciones de contorno en que estaremos interesados, quedarán determinadas salvo un factor constante no nulo.

Vamos a indagar ahora posibles propiedades de ortogonalidad de la sucesión de *autofunciones* (5), y descubriremos por el camino qué tipo de condiciones

de contorno son «adecuadas». Consideremos la ecuación diferencial (3) para dos autovalores distintos λ_m, λ_n , con autofunciones asociadas y_m, y_n :

$$\frac{d}{dx} \left[p \frac{dy_m}{dx} \right] + [\lambda_m q + r] y_m = 0$$

y

$$\frac{d}{dx} \left[p \frac{dy_n}{dx} \right] + [\lambda_n q + r] y_n = 0.$$

Si cambiamos a la notación de primas para las derivadas, más concisa, multiplicamos entonces la primera ecuación por y_n , la segunda por y_m , y restamos, nos queda

$$y_n(p y'_m)' - y_m(p y'_n)' + (\lambda_m - \lambda_n) q y_m y_n = 0.$$

Pasamos ahora los dos primeros términos a la derecha e integramos desde a hasta b , utilizando integración por partes, con lo que resulta

$$\begin{aligned} & (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b q y_m y_n dx = \\ &= \int_a^b y_m (p y'_n)' dx - \int_a^b y_n (p y'_m)' dx = \\ &= [y_m (p y'_n)]_a^b - \int_a^b y'_m (p y'_n) dx - [y_n (p y'_m)]_a^b + \int_a^b y'_n (p y'_m) dx = \\ &= p(b)[y_m(b)y'_n(b) - y_n(b)y'_m(b)] - p(a)[y_m(a)y'_n(a) - y_n(a)y'_m(a)]. \quad (6) \end{aligned}$$

Si denotamos por $W(x)$ el wronskiano de las soluciones $y_m(x)$ e $y_n(x)$, que se define como

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_m(x) & y'_m(x) \\ y_n(x) & y'_n(x) \end{vmatrix} = y_m(x)y'_n(x) - y_n(x)y'_m(x),$$

se puede escribir (6) de un modo más conveniente:

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b q y_m y_n dx = p(b)W(b) - p(a)W(a). \quad (7)$$

Nótese que la integración por partes en el cálculo (6) y las subsiguientes cancelaciones son posibles a causa de la forma especial del primer término en la ecuación diferencial (3)⁴.

⁴ Las ecuaciones diferenciales de esta forma especial se llaman *autoadjuntas*. En los problemas se explicará esta denominación.

Queremos que el miembro de la derecha de (6) o (7) se anule, con el fin de llegar a la propiedad de ortogonalidad

$$\int_a^b q y_m y_n dx = 0 \quad \text{si } m \neq n. \quad (8)$$

Mirando el lado derecho de (6) vemos que ello ocurrirá ciertamente en cuanto impongamos a una solución no trivial de (3) las condiciones de contorno

$$y(a) = 0 \quad , \quad y(b) = 0$$

e

$$y'(a) = 0 \quad , \quad y'(b) = 0.$$

Cada una de ellas es un caso especial de las condiciones de contorno más generales

$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0 \quad \text{y} \quad d_1 y(b) + d_2 y'(b) = 0, \quad (9)$$

donde c_1 o $c_2 \neq 0$ y d_1 o $d_2 \neq 0$. Para mostrar que estas condiciones de contorno hacen realmente que se anule el miembro de la derecha en (7), supongamos que las soluciones $y_m(x)$ e $y_n(x)$ satisfacen ambas la primera condición (9), de modo que

$$c_1 y_m(a) + c_2 y'_m(a) = 0,$$

$$c_1 y_n(a) + c_2 y'_n(a) = 0.$$

Como este sistema admite solución no trivial c_1, c_2 , el determinante de los coeficientes ha de ser cero:

$$\begin{vmatrix} y_m(a) & y'_m(a) \\ y_n(a) & y'_n(a) \end{vmatrix} = W(a) = 0.$$

Análogamente $W(b) = 0$, y se deduce que el lado derecho de (7) es, en efecto, nulo.

Las condiciones de contorno de la forma (9) se llaman *condiciones de contorno homogéneas*. Tienen como rasgo especial que cualquier suma de soluciones de (3) que satisfagan individualmente tales condiciones de contorno satisface asimismo dichas condiciones de contorno. Cualquier ecuación diferencial de la forma (3) con condiciones de contorno homogéneas se llama un *problema de Sturm-Liouville*.

Lo significativo de estas nociones es que la propiedad de ortogonalidad (8)

nos proporciona un método formal para hallar desarrollos en serie de funciones $f(x)$ en términos de las autofunciones de uno de estos problemas de Sturm-Liouville. Formalmente nos vemos conducidos al siguiente procedimiento. Supongamos que $f(x)$ se puede escribir como

$$f(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \cdots + a_n y_n(x) + \cdots. \quad (10)$$

Multiplicando ambos miembros por $q(x)y_n(x)$ e integrando término a término desde a hasta b se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)q(x)y_n(x) dx = \\ &= a_1 \int_a^b q(x)y_1(x)y_n(x) dx + \cdots + a_n \int_a^b q(x)[y_n(x)]^2 dx + \cdots = \\ &= a_n \int_a^b q(x)[y_n(x)]^2 dx, \end{aligned} \quad (11)$$

debido a (8). Con los coeficientes a_n dados por (11), la fórmula (10) se dice que constituye un *desarrollo en autofunciones* de $f(x)$.

Surge ahora una cuestión matemática de vital importancia que ya nos ha salido al paso en el Capítulo 6 y en las primeras secciones del presente capítulo: ¿cómo saber si la serie (10), con coeficientes dados por (11), representa realmente a $f(x)$? Y ¿qué significa «representa»? ¿Es en el sentido de la convergencia punto a punto o en convergencia en media? ¿O quizás en algún otro tipo de convergencia? Hemos visto en el Capítulo 6 cuán difíciles son algunas de estas preguntas para las series de Fourier ordinarias, que no son sino el ejemplo más sencillo de todos los desarrollos en autofunciones. Dos casos más que resultan ser muy importantes en la práctica se refieren a las sucesiones ortogonales de los polinomios de Legendre y de las funciones de Bessel. Estas dos sucesiones de funciones, y sus propiedades, así como los desarrollos en autofunciones asociados, configuran el próximo capítulo.

Los problemas de contorno autoadjuntos del tipo descrito se llaman *regulares*, porque el intervalo $[a, b]$ es finito y las funciones $p(x)$, $q(x)$ continuas y positivas sobre él. Son problemas *singulares* aquellos en los que alguna de estas funciones se anula o se hace infinita en un extremo del intervalo, o en los que el propio intervalo es infinito. Desgraciadamente, muchos de los problemas interesantes son singulares y exigen una teoría más sofisticada⁵.

⁵ Se encontrarán tratamientos completos en E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions*, 2 volúmenes, Oxford University Press, 1946 y 1958; y en E. A. Coddington y N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, Nueva York, 1955.

Ejemplo 2. Consideremos la importante ecuación de Legendre en su forma autoadjunta,

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Aquí la función $p(x) = 1 - x^2$ se anula en ambos extremos del intervalo. No se imponen condiciones de contorno de la clase habitual en los extremos $x = \pm 1$, pero se exige que las soluciones permanezcan acotadas cerca de ellos. Resulta que tal cosa sucede sólo cuando $\lambda = n(n+1)$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, y las soluciones correspondientes son los polinomios de Legendre $P_n(x)$. Los detalles de este problema de contorno singular se expondrán en el Capítulo 8.

Observación. En esta sección apenas hemos hecho otra cosa que tomar contacto con algunos aspectos del tema, sin adentrarnos en las demostraciones. Una de las primeras cuestiones acerca de cualquier problema de contorno autoadjunto, ya sea de Sturm-Liouville o de otros tipos, es ésta: ¿existen suficientes autovalores y autofunciones asociadas? Para el lector interesado en estos aspectos teóricos, se ofrece una demostración rigurosa del teorema de existencia pertinente en el Apéndice A, si bien sólo para el caso un tanto especial del problema de Sturm-Liouville regular antes descrito.

NOTA SOBRE LIOUVILLE. Joseph Liouville (1809-1882) fue un respetado profesor del Collège de France en París, fundador y editor del *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, una famosa revista que jugó un papel central en la vida matemática francesa del siglo XIX. Por alguna razón, no obstante, sus propios descubrimientos como matemático creador, muy notables, no han recibido el aprecio que merecen. Así, es un hecho lamentable, y un tanto sorprendente, que jamás hayan sido publicado sus obras completas por parte de sus compatriotas.

Fue el primero en resolver un problema de valores de contorno mediante la resolución de una ecuación integral equivalente, un método que se convirtió, de la mano de Fredholm y Hilbert, a comienzos de este siglo en uno de los campos principales del análisis moderno. Su ingeniosa teoría de la derivación fraccionaria dio respuesta a la cuestión, mucho tiempo pendiente, de qué significado razonable cabe asignar al símbolo $d^n y/dx^n$ donde n no es un entero positivo. Descubrió el resultado fundamental de análisis complejo que hoy se conoce como *teorema de Liouville*, según el cual una función entera acotada es necesariamente constante, y lo usó como base de su teoría de funciones elípticas. También existe un famoso teorema de Liouville en mecánica hamiltoniana que establece que las integrales de volumen son invariantes con el tiempo en el espacio de fases. Su teoría de las integrales de funciones elementales constituye quizás lo más original de su obra. Demostró que integrales tales como

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\log x},$$

así como las integrales elípticas de primera y segunda clase, no son expresables por medio de un número finito de funciones elementales⁶.

La difícil y fascinante teoría de los números trascendentes es otra rama de las matemáticas que tuvo su origen en las investigaciones de Liouville. La irracionalidad de π y de e , es decir, el hecho de que esos dos números no son raíces de ninguna ecuación lineal $ax + b = 0$ con coeficientes enteros, fue demostrado en el siglo XVIII por Lambert y Euler. En 1844 Liouville probó que e tampoco es raíz de ninguna ecuación cuadrática con coeficientes enteros, lo que le indujo a conjeturar que e era *trascendente*, o sea, que no satisface ninguna ecuación polinómica

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

con coeficientes enteros. Aunque fracasó en sus intentos de demostrarlo, sus ideas contribuyeron al éxito de Hermite en 1873 y a la demostración de Lindemann en 1882 de que π era asimismo trascendente. El resultado de Lindemann puso de manifiesto que el antiquísimo problema de la cuadratura del círculo mediante regla y compás es imposible. Uno de los logros matemáticos más relevantes de los tiempos modernos fue la demostración de Gelfond de que e^π es trascendente, pero nada se sabe todavía acerca de la naturaleza de números tales como $\pi + e$, πe o π^e . Liouville descubrió además una condición suficiente para el carácter trascendente y la utilizó en 1844 para producir los primeros ejemplos de números reales cuyo carácter trascendente se puede probar. Uno de ellos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots = 0,11000100\cdots$$

Sus métodos en este punto han sido el punto de partida de extensas investigaciones en el siglo actual⁷.

PROBLEMAS

1. La ecuación diferencial $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ se llama *exacta* si se puede escribir como $[P(x)y']' + [S(x)y]' = 0$ para alguna función $S(x)$. En tal caso, la segunda ecuación se puede integrar, con lo que se llega a $P(x)y' + S(x)y = c_1$, ya resoluble por el método de la Sección 10. Igualando coeficientes y eliminando $S(x)$, probar que una condición necesaria y suficiente para la exactitud es $P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$.
2. Consideremos la ecuación equidimensional de Euler de la Sección 42,

$$x^2y'' + xy' - n^2y = 0,$$

⁶ Véase D. G. Mead, «Integration», *Am. Math. Monthly*, vol. 68, págs. 152-156 (1961). Para más detalles, consultar el libro de G. H. Hardy, *The Integration of Functions of a Single Variable*, Cambridge University Press, Londres, 1916; o J. F. Ritt, *Integration in Finite Terms*, Columbia University Press, Nueva York, 1948.

⁷ Se podrá hacer una idea de lo profundo e intrincado de este asunto consultando A. O. Gelfond, *Transcendental and Algebraic Numbers*, Dover, Nueva York, 1960.

con n entero positivo. Hallar los valores de n para los cuales esta ecuación es exacta, y hallar para ellos la solución general por el método sugerido en el Problema 1.

3. Si la ecuación del Problema 1 no es exacta, se puede convertir en exacta multiplicándola por un factor integrante adecuado $\mu(x)$. Así pues, $\mu(x)$ debe cumplir la condición de que la ecuación $\mu(x)P(x)y'' + \mu(x)Q(x)y' + \mu(x)R(x)y = 0$ sea expresable en la forma $[\mu(x)P(x)y']' + [S(x)y]' = 0$ para alguna función $S(x)$. Demostrar que $\mu(x)$ ha de ser solución de la *ecuación adjunta*

$$P(x)\mu'' + [2P'(x) - Q(x)]\mu' + [P''(x) - Q'(x) + R(x)]\mu = 0.$$

En general (no siempre) la ecuación adjunta es tan difícil de resolver como la original. Hallar la ecuación adjunta de cada una de las ecuaciones siguientes:

- (a) Ecuación de Legendre: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0$;
- (b) Ecuación de Bessel: $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$;
- (c) Ecuación de Chebyshev: $(1 - x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$;
- (d) Ecuación de Hermite: $y'' - 2xy' + 2py = 0$;
- (e) Ecuación de Airy: $y'' + xy = 0$;
- (f) Ecuación de Laguerre: $xy'' + (1 - x)y' + py = 0$.

4. Resolver la ecuación

$$y'' - \left(2x + \frac{3}{x}\right)y' - 4y = 0$$

hallando una solución de la ecuación adjunta a simple vista.

5. Probar que la adjunta de la adjunta de la ecuación $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ es la ecuación original.
6. La ecuación $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ se dice que es *autoadjunta* si coincide con su ecuación adjunta (salvo notación).
- (a) Probar que esta ecuación es autoadjunta si y sólo si $P'(x) = Q(x)$. En tal caso la ecuación se convierte en

$$P(x)y'' + P'(x)y' + R(x)y = 0,$$

o sea,

$$[P(x)y']' + R(x)y = 0,$$

que es la forma canónica de una ecuación autoadjunta.

- (b) ¿Cuáles de las ecuaciones del Problema 3 son autoadjuntas?
7. Probar que cualquier ecuación $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ puede hacerse autoadjunta multiplicándola por

$$\frac{1}{P} e^{\int (Q/P) dx}.$$

8. Usando cuando sea necesario el Problema 7, escribir cada ecuación del Problema 3 en la forma autoadjunta canónica descrita en el Problema 6.
9. Consideremos el problema de Sturm-Liouville regular planteado por la ecuación (3) con las condiciones de contorno (9). Probar que toda autofunción es única salvo un factor constante. *Ayuda:* Sean $y = u(x)$ e $y = v(x)$ autofunciones correspondientes a un mismo autovalor λ ; usar su wronskiano para ver que son linealmente dependientes en $[a, b]$.
10. Consideremos el problema de contorno autoadjunto sobre $[a, b]$:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [\lambda q(x) + r(x)]y = 0,$$

$$y(a) = y(b) \quad \text{e} \quad y'(a) = y'(b),$$

donde $p(a) = p(b)$. Se supone que $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son continuas y que $p(x) > 0$, $q(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$. Este problema se dice entonces que tiene *condiciones de contorno periódicas*. Se puede demostrar que existe una sucesión de autovalores

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \dots$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

- (a) Examinando el cálculo (6), probar que las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales respecto a la función peso $q(x)$.
- (b) En este caso, sin embargo, a cada autovalor le corresponden una o dos autofunciones independientes. Comprobarlo hallando los autovalores y sus autofunciones asociadas para el problema $y'' + \lambda y = 0$, donde $y(-\pi) = y(\pi)$ e $y'(-\pi) = y'(\pi)$.
- (c) ¿Por qué no puede tener este problema más de dos autofunciones independientes asociadas a un autovalor concreto?

APENDICE A. EXISTENCIA DE AUTOVALORES Y AUTOFUNCIONES

La teoría general de autovalores, autofunciones y desarrollos en autofunciones es una de las parcelas más ricas y profundas de la matemática moderna. En este apéndice confinamos nuestra atención a un pequeño pero significativo fragmento de este extenso campo. Nuestro objetivo básico es probar que todo problema de contorno de la forma 40-(23), que apareció en relación con la cuerda vibrante inhomogénea, tiene autovalores y autofunciones con propiedades semejantes a las encontradas en la Sección 40. Una vez hecho eso, veremos

que un simple cambio de variable nos permite extender este resultado a una clase considerablemente más amplia de problemas.

Comenzamos con algunas consecuencias sencillas del teorema de comparación de Sturm.

Lema 1. Sean $y(x)$ y $z(x)$ soluciones no triviales de

$$y'' + q(x)y = 0$$

y

$$z'' + r(x)z = 0,$$

donde $q(x)$ y $r(x)$ son funciones continuas positivas, con $q(x) > r(x)$. Supongamos que $y(x)$ y $z(x)$ se anulan ambas en un punto b_0 y que $z(x)$ tiene un número finito o infinito de ceros sucesivos $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ a la derecha de b_0 . Entonces $y(x)$ tiene al menos tantos ceros como $z(x)$ sobre todo intervalo cerrado $[b_0, b_n]$; y si los ceros sucesivos de $y(x)$ a la derecha de b_0 son $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, entonces $a_n < b_n$ para todo n .

Demostración. Por el teorema de comparación de Sturm (Teorema 25-B), $y(x)$ tiene al menos un cero en cada uno de los intervalos abiertos $(b_0, b_1), (b_1, b_2), \dots, (b_{n-1}, b_n)$, y ambas afirmaciones se desprenden de aquí inmediatamente.

Lema 2. Sea $q(x)$ una función positiva continua que satisface las desigualdades

$$0 < m^2 < q(x) < M^2$$

sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Si $y(x)$ es una solución no trivial de $y'' + q(x)y = 0$ sobre ese intervalo y x_1, x_2 son ceros sucesivos de $y(x)$, entonces

$$\frac{\pi}{M} < x_2 - x_1 < \frac{\pi}{m}. \quad (1)$$

Además, si $y(x)$ se anula en a y b y en $n - 1$ puntos del intervalo abierto (a, b) , entonces

$$\frac{m(b-a)}{\pi} < n < \frac{M(b-a)}{\pi}. \quad (2)$$

Demostración. Para probar (1) comparamos la ecuación dada con $z'' + m^2 z = 0$. Una solución no trivial de ésta que se anula en x_1 es $z(x) = \operatorname{sen} m(x - x_1)$. Puesto que el siguiente cero de $z(x)$ es $x_1 + \pi/m$, el Teorema 25-B nos dice que $x_2 < x_1 + \pi/m$, o sea, $x_2 - x_1 < \pi/m$. Un argumento análogo da la otra desigualdad en (1).

Para demostrar (2) notemos en primer lugar que hay n subintervalos entre los $n + 1$ ceros, así que por (1) tenemos $b - a =$ suma de las longitudes de los n

subintervalos $< n(\pi/m)$, y por tanto $m(b-a)/\pi < n$. Del mismo modo se ve que $b-a > n(\pi/M)$, y por tanto $n < M(b-a)/\pi$.

Nuestro principal resultado preliminar es el siguiente lema.

Lema 3. *Sea $q(x)$ una función positiva continua y consideremos la ecuación diferencial*

$$y'' + \lambda q(x)y = 0 \quad (3)$$

sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Para cada λ , sea $y_\lambda(x)$ la única solución de la ecuación (3) que satisface las condiciones iniciales $y_\lambda(a) = 0$ e $y'_\lambda(a) = 1$. Existe una sucesión creciente de números positivos

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

que tiende a ∞ y tiene la propiedad de que $y_\lambda(b) = 0$ si y sólo si λ coincide con uno de los λ_n . Además, la función $y_{\lambda_n}(x)$ tiene exactamente $n-1$ ceros en el intervalo abierto (a, b) .

Demostración. Es claro, a la vista del Teorema 24-B, que $y_\lambda(x)$ carece de ceros a la derecha de a cuando $\lambda \leq 0$. Nuestra estrategia es vigilar el comportamiento oscilatorio de $y_\lambda(x)$ cuando λ crece partiendo de cero. Empezamos haciendo notar que, por la continuidad de $q(x)$, existen números positivos m y M tales que sobre $[a, b]$ se tiene $0 < m^2 < q(x) < M^2$. Así pues, en el sentido que precisamos en la Sección 25, $y_\lambda(x)$ oscila más de prisa en $[a, b]$ que las soluciones de

$$y'' + \lambda m^2 y = 0,$$

y menos de prisa que las de

$$y'' + \lambda M^2 y = 0.$$

Por el Lema 2, cuando λ es positivo y pequeño (tanto que $\pi/\sqrt{\lambda}M \geq b-a$), la función $y_\lambda(x)$ no tiene ceros en $[a, b]$ a la derecha de a ; y cuando λ crece hasta ser $\pi/\sqrt{\lambda}m \leq b-a$, entonces $y_\lambda(x)$ tiene al menos un cero allí. Análogamente, cuando λ crece de 0 a ∞ , el número de ceros de $y_\lambda(x)$ en $[a, b]$ tiende a ∞ . Del Lema 1 se sigue que el n -ésimo cero de $y_\lambda(x)$ a la derecha de a se mueve hacia la izquierda al crecer λ , y daremos por sabido (se puede probar) que se mueve de forma continua. En consecuencia, cuando λ parte de 0 y crece hacia ∞ , existen infinitos valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ para los cuales un cero de $y_\lambda(x)$ alcanza b y después entra en el intervalo, de manera que $y_{\lambda_n}(x)$ se anula en a y b y tiene $n-1$ ceros en (a, b) . Para demostrar que la sucesión $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ tiende a ∞ , recurrimos a las desigualdades (2), que en este caso se convierten en

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}m(b-a)}{\pi} < n < \frac{\sqrt{\lambda_n}M(b-a)}{\pi},$$

o sea,

$$\frac{n^2\pi^2}{M^2(b-a)^2} < \lambda_n < \frac{n^2\pi^2}{m^2(b-a)^2}.$$

La ecuación (3) es el caso particular de la ecuación de *Sturm-Liouville*

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda q(x) y = 0 \quad (4)$$

en que $p(x) = 1$. Suponemos aquí que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones positivas y continuas sobre $[a, b]$ y que $p(x)$ tiene derivada continua en ese intervalo. Si cambiamos la variable independiente en (4) de x a una nueva variable w definida por

$$w(x) = \int_a^x \frac{dt}{p(t)},$$

de modo que

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{p(x)} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \frac{dw}{dx} = \frac{1}{p(x)} \frac{dy}{dw},$$

entonces (4) toma la forma

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \lambda q_1(w) y = 0, \quad (5)$$

donde $q_1(w)$ es positiva y continua en el intervalo transformado $0 \leq w \leq c = w(b)$. Aplicando el Lema 3 a (5) obtenemos inmediatamente la siguiente conclusión acerca de (4).

Teorema A. Consideremos el problema de valores de contorno

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda q(x) y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (6)$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ satisfacen las condiciones arriba citadas. Entonces existe una sucesión creciente de números positivos

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

que tiende a ∞ y tiene la propiedad de que (6) admite una solución no trivial si y sólo si λ coincide con uno de esos λ_n . La solución correspondiente a $\lambda = \lambda_n$ es única salvo un factor constante arbitrario, y tiene exactamente $n - 1$ ceros sobre el intervalo abierto (a, b) .

Merece la pena hacer un comentario. Tal como se advirtió en la Sección 43, nos referimos habitualmente a (6) como problema de Sturm-Liouville regular debido a que el intervalo es finito y las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son positivas y continuas en él. Los problemas *singulares* aparecen cuando el intervalo es infinito o cuando p , q se anulan o son discontinuas en al menos uno de los extremos del intervalo. Estos problemas son mucho más arduos y no quedan cubiertos, claro está, por lo aquí expuesto. Desgraciadamente, un buen número de las ecuaciones diferenciales más interesantes son singulares en ese sentido. Mencionemos la *ecuación de Legendre*

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

la *ecuación de Chebyshev*

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{1/2} \frac{dy}{dx} \right] + \lambda (1-x^2)^{-1/2} y = 0, \quad -1 < x < 1;$$

la *ecuación de Hermite*

$$\frac{d}{dx} \left[e^{-x^2} \frac{dy}{dx} \right] + \lambda e^{-x^2} y = 0, \quad -\infty < x < \infty;$$

y la *ecuación de Laguerre*

$$\frac{d}{dx} \left[x e^{-x} \frac{dy}{dx} \right] + \lambda e^{-x} y = 0, \quad 0 \leq x < \infty.$$

Estas ecuaciones aparecieron en el Capítulo 5, donde se analizaron desde un punto de vista completamente diferente.

ALGUNAS FUNCIONES ESPECIALES DE LA FISICA MATEMATICA

44. POLINOMIOS DE LEGENDRE

Estas dos primeras secciones se dedicarán por completo a la definición de los polinomios de Legendre y a establecer algunas de sus propiedades. Es natural preguntarse por el propósito de este fárrago técnico e incluso sobre el porqué de nuestro interés por los polinomios de Legendre. La respuesta más simple es que los polinomios de Legendre tienen importantes aplicaciones en física matemática y estas aplicaciones dependen de sus propiedades. En beneficio de los lectores que deseen comprobarlo por sí mismos, el bagaje físico subyacente a varias aplicaciones típicas se expone en el Apéndice A. Cabe otra respuesta, no obstante, menos utilitaria y válida asimismo para el tratamiento posterior de las funciones de Bessel: el estudio de funciones específicas clásicas y sus propiedades individuales proporcionan un saludable contrapunto a las ideas abstractas que a veces dominan en la matemática contemporánea. Más aún, mencionemos varios temas que surgen de modo natural en este capítulo y que esperamos atraigan el interés de cualquier estudiante de matemáticas: la función gamma y la fórmula $(-1/2)! = \sqrt{\pi}$, la fracción continua de Lambert para la tangente,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{1}{\frac{1}{x - \frac{1}{3 - \frac{1}{x - \frac{5}{...}}}}} ; \\ &\quad \end{aligned}$$

y las famosas series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

cuyas sumas descubrió Euler a comienzos del siglo XVIII y que aparecen de nuevo, sorprendentemente, en conexión con los ceros de las funciones de Bessel.

Vamos ya con los polinomios de Legendre, a los que nos acercaremos de la mano de la ecuación hipergeométrica¹.

En la Sección 28 se utilizó la ecuación de Legendre para ilustrar el cálculo de soluciones en series de potencias en puntos ordinarios. Por razones que se explican en el Apéndice A, escribimos ahora esa ecuación en la forma

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, \quad (1)$$

donde se sobrentiende que n es un entero no negativo. El lector recordará que todas las soluciones de (1) halladas en la Sección 28 eran analíticas sobre el intervalo $-1 < x < 1$. Sin embargo, las soluciones más útiles en las aplicaciones son las que se mantienen acotadas cerca de $x = 1$ y, con el fin de aislar tales soluciones, conviene cambiar la variable independiente de x a $t = (1 - x)/2$. Esto hace que $x = 1$ corresponda a $t = 0$ y (1) se transforma en

$$t(1 - t)y'' + (1 - 2t)y' + n(n + 1)y = 0, \quad (2)$$

donde la prima significa derivación respecto a t . Esta es una ecuación hipergeométrica con $a = -n$, $b = n + 1$ y $c = 1$, de manera que admite la siguiente solución polinómica cerca de $t = 0$:

$$y_1 = F(-n, n + 1, 1, t). \quad (3)$$

Como los exponentes de (2) en el origen son ambos cero ($m_1 = 0$ y $m_2 = 1 - c = 0$), buscamos una segunda solución por el método de la Sección 16. Esta resulta ser $y_2 = vy_1$, donde

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dt} = \frac{1}{y_1^2} e^{\int (2t-1)/t(1-t) dt} = \frac{1}{y_1^2 t(1-t)} = \frac{1}{t} \left[\frac{1}{y_1^2(1-t)} \right]$$

¹ Adrien Marie Legendre (1752-1833) encontró sus polinomios investigando la atracción gravitacional de elipsoides. Este matemático francés tuvo la mala fortuna de ver lo mejor de su obra, en integrales elípticas, teoría de números y método de mínimos cuadrados, superado por otros matemáticos más jóvenes y más potentes. Por ejemplo, dedicó 40 años a investigar sobre las integrales elípticas, pero su tratado, en dos volúmenes, apenas tuvo repercusión una vez que los hallazgos de Abel y Jacobi revolucionaron ese campo por completo. Es de destacar la generosidad de espíritu con que aceptó siempre trabajos nuevos y de más entidad que condenaban los suyos a la obsolescencia.

por integración elemental. Puesto que y_1^2 es un polinomio con término constante 1, la expresión entre corchetes de la derecha es una función analítica de la forma $1 + a_1t + a_2t^2 + \dots$, y tenemos

$$v' = \frac{1}{t} + a_1 + a_2t + \dots$$

Eso significa que $v = \log t + a_1t + \dots$, luego

$$y_2 = y_1 (\log t + a_1t + \dots)$$

y la solución general de (2) cerca del origen es

$$y = c_1y_1 + c_2y_2. \quad (4)$$

La presencia del término $\log t$ en y_2 hace patente que (4) es acotada cerca de $t = 0$ si y sólo si $c_2 = 0$. Sustituyendo t en (3) por $(1-x)/2$ se deduce que las soluciones de (1) acotadas cerca de $x = 1$ son precisamente los múltiplos constantes del polinomio $F[-n, n+1, 1, (1-x)/2]$.

Esto nos conduce a la definición fundamental. El n -ésimo *polinomio de Legendre* se denota por $P_n(x)$ y se define como

$$\begin{aligned} P_n(x) &= F\left[-n, n+1, 1, \frac{1}{2}(1-x)\right] = 1 + \frac{(-n)(n+1)}{(1!)^2} \left(\frac{1-x}{2}\right) + \\ &\quad + \frac{(-n)(-n+1)(n+1)(n+2)}{(2!)^2} \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{(-n)(-n+1) \dots [-n+(n-1)](n+1)(n+2) \dots (2n)}{(n!)^2} \times \left(\frac{1-x}{2}\right)^n \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{(1!)^2 2} (x-1) + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{(2!)^2 2^2} (x-1)^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} (x-1)^n. \end{aligned} \quad (5)$$

De lo visto en la Sección 28 sabemos que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n que contiene sólo potencias pares o sólo potencias impares de x , según que n sea par o impar. Por tanto, puede escribirse

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-4} x^{n-4} + \dots, \quad (6)$$

donde la suma termina con a_0 si n es par y con $a_1 x$ si n es impar. Es claro, a la vista de (5), que $P_n(1) = 1$ para todo n , y por (6) también se tiene $P_n(-1) = (-1)^n$.

Tal como está escrita, la fórmula (5) es muy incómoda para el estudio de $P_n(x)$, así que vamos a simplificarla. Podríamos desarrollar cada uno de sus términos, reunir potencias idénticas de x y reordenar el resultado en la forma (6), pero eso sería innecesariamente laborioso. Lo que haremos es observar en (5) que $a_n = (2n)!/(n!)^2 2^n$ y calcular a_{n-2}, a_{n-4}, \dots por recurrencia en términos de a_n . Necesitamos la fórmula 28-(9) con p reemplazado por n y n por $k-2$:

$$a_k = -\frac{(n-k+2)(n+k-1)}{(k-1)k} a_{k-2},$$

o sea,

$$a_{k-2} = -\frac{k(k-1)}{(n-k+2)(n+k-1)} a_k.$$

Cuando $k = n, n-2, \dots$, se deduce de ahí que

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n,$$

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} a_n,$$

y así sucesivamente, luego (6) pasa a ser

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} \left[x_n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-2k+1)}{2^k k!(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)} x^{n-2k} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Como

$$n(n-1)\dots(n-2k+1) = \frac{n!}{(n-2k)!}$$

y

$$\begin{aligned} &(2n-2k+1)(2n-2k+3)\dots(2n-3)(2n-1) = \\ &= \frac{(2n-2k+1)(2n-2k+2)(2n-2k+3)\dots(2n-3)(2n-2)(2n-1)2n}{(2n-2k+2)\dots(2n-2)2n} = \\ &= \frac{(2n)!}{(2n-2k)!} \frac{1}{2^k (n-k+1)\dots(n-1)n} = \frac{(2n)!(n-k)!}{(2n-2k)! 2^k n!}, \end{aligned}$$

el coeficiente de x^{n-2k} en (7) es

$$(-1)^k \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!} \frac{(2n-2k)! 2^k n!}{(2n)!(n-k)!} = (-1)^k \frac{(n!)^2 (2n-2k)!}{k! (2n)!(n-k)!(n-2k)!}.$$

Esto hace posible escribir (7) como

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^k k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad (8)$$

donde $\lfloor n/2 \rfloor$ es el símbolo usual para el mayor entero $\leq n/2$. Continuamos el camino hacia una forma todavía más compacta mediante la observación de que

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{2^k k!(n-k)!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{2^k k!(n-k)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2k} = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{k!(n-k)!} (x^2)^{n-k} (-1)^k. \end{aligned}$$

Si extendemos el recorrido de esta suma dejando que k varíe desde 0 hasta n , lo cual no cambia nada porque los términos nuevos son de grado $< n$ y sus derivadas n -ésimas son cero, obtenemos

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{n-k} (-1)^k;$$

y la fórmula del binomio da

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (9)$$

Esta expresión para $P_n(x)$ se llama *fórmula de Rodrigues*². Constituye un

² Olinde Rodrigues (1794-1851) fue un banquero francés que acudió en ayuda de Claude Henri Saint-Simon (fundador del socialismo) en su vejez, le mantuvo durante sus últimos años de vida y se convirtió en uno de sus seguidores. Descubrió la fórmula citada en 1816, pero poco después se interesó en la organización científica de la sociedad y nunca volvió a las matemáticas. El término «fórmula de Rodrigues» se aplica con frecuencia, por transferencia, a expresiones similares para otros polinomios clásicos, de los que Rodrigues nada sabía.

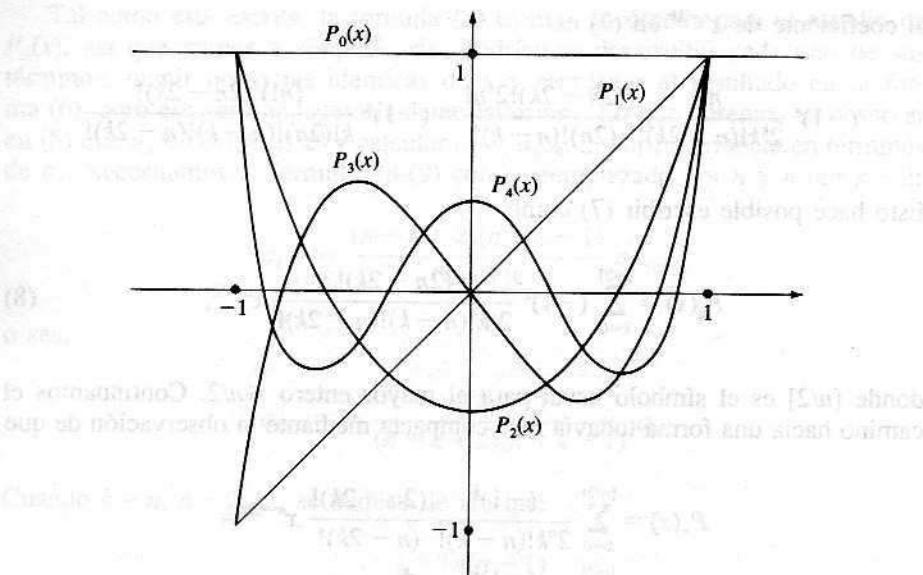


Figura 52

método relativamente fácil para el cálculo de sucesivos polinomios de Legendre, los primeros de los cuales (Fig. 52) son

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x). \end{aligned} \quad (10)$$

Un procedimiento aún más sencillo se sugiere en el Problema 2, y una aplicación más relevante de (9) aparecerá en la próxima sección.

PROBLEMAS

1. La función de la izquierda en

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots + P_n(x)t^n + \dots$$

se llama *función generatriz* de los polinomios de Legendre. Dando por correcta esa relación, y haciendo uso de ella,

- (a) comprobar que $P_n(1)$ y $P_n(-1) = (-1)^n$;
- (b) para demostrar que $P_{2n+1}(0) = 0$ y $P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!}$.

2. Considerar la relación generatriz del Problema 1,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

- (a) Derivando en ambos miembros respecto a t , probar que

$$(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1-2xt+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}.$$

- (b) Igualar los coeficientes de t^n en (a) para obtener la fórmula de recurrencia

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

- (c) Supuestos conocidos $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$, utilizar la fórmula de recurrencia en (b) para calcular $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ y $P_5(x)$.

3. Demostrar la relación generatriz siguiendo estos pasos:

- (a) Usar la serie binomial para escribir

$$\begin{aligned} [1-t(2x-t)]^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2} t(2x-t) + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!} t^2 (2x-t)^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^{n-1} (n-1)!} t^{n-1} (2x-t)^{n-1} + \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} t^n (2x-t)^n + \dots. \end{aligned}$$

- (b) Es obvio que t^n sólo puede aparecer en los términos escritos en (a), no en los siguientes. Desarrollando las diversas potencias de $2x-t$, probar que el coeficiente total de t^n es

$$\begin{aligned} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} (2x)^n - \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^{n-1} (n-1)!} \frac{n-1}{1!} (2x)^{n-2} + \\ + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-5)}{2^{n-2} (n-2)!} \frac{(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} - \dots. \end{aligned}$$

- (c) Demostrar que la suma en (b) es $P_n(x)$, tal como viene dado en (8).

4. Este problema constituye una verificación directa de que el $P_n(x)$ definido por la fórmula (9) satisface la ecuación de Legendre (1) y cumple $P_n(1) = 1$. Consideremos los polinomios de grado n definidos por

$$y(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

- (a) Si $w = (x^2 - 1)^n$, entonces $(x^2 - 1)w' - 2nxw = 0$. Derivando esta ecuación $k + 1$ veces, probar que

$$(x^2 - 1)w^{(k+2)} + 2(k + 1)xw^{(k+1)} + (k + 1)kw^{(k)} - 2nxw^{(k+1)} - 2(k + 1)nw^{(k)} = 0,$$

y concluir que $y = w^{(n)}$ es solución de la ecuación (1).

- (b) Llamando $u = (x - 1)^n$ y $v = (x + 1)^n$ y usando la fórmula

$$y = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v^{(1)} + \dots + nu^{(1)}v^{(n-1)} + uv^{(n)}$$

probar que $y(1) = n!2^n$.

45. PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

En la sección anterior hemos definido la sucesión de polinomios de Legendre

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots \quad (1)$$

El lector ya está informado de que estos polinomios encuentran muy diversas aplicaciones, que abarcan desde la física matemática hasta el cálculo numérico. Vamos a discutir algunas de las propiedades en las que reposan tales aplicaciones.

Ortogonalidad. La propiedad más importante de los polinomios de Legendre es que cumplen

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n. \end{cases} \quad (2)$$

Esto se expresa diciendo que (1) es una sucesión de *funciones ortogonales* sobre el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Explicaremos el significado de esta propiedad tras su demostración.

Sea $f(x)$ cualquier función con al menos n derivadas continuas en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, y consideremos la integral

$$I = \int_{-1}^1 f(x)P_n(x) dx.$$

La fórmula de Rodrigues nos permite escribir

$$I = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx,$$

que integrando por partes se convierte en

$$I = \frac{1}{2^n n!} \left[f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx.$$

La expresión entre corchetes se anula en ambos extremos, luego

$$I = -\frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx;$$

y continuando este proceso con nuevas integraciones por partes se obtiene

$$I = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 f^{(n)}(x) (x^2 - 1)^n dx.$$

Si $f(x) = P_m(x)$ con $m < n$, entonces $f^{(n)}(x) = 0$ y en consecuencia $I = 0$, lo que demuestra la primera parte de (2). En cuanto a la segunda, tomemos $f(x) = P_n(x)$. Como $P_n^{(n)}(x) = (2n)!/2^n n!$, se sigue que

$$I = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx. \quad (3)$$

Si cambiamos de variable, poniendo $x = \operatorname{sen} \theta$, y recordamos la fórmula (que se demuestra mediante integración por partes)

$$\int \cos^{2n+1} \theta d\theta = \frac{1}{2n+1} \cos^{2n} \theta \operatorname{sen} \theta + \frac{2n}{2n+1} \int \cos^{2n-1} \theta d\theta, \quad (4)$$

la integral definida (3) pasa a ser

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta &= \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} \theta d\theta = \\ &= \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \\ &= \frac{2^n n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}. \end{aligned}$$

Concluimos que en este caso $I = 2/(2n+1)$, y la demostración de (2) queda completa.

Series de Legendre. Como se ilustra en el Apéndice A, muchos problemas en teoría del potencial requieren disponer de desarrollos en serie de polinomios de Legendre de funciones dadas. Es fácil ver que ello es siempre factible si la función en cuestión es un polinomio. Por ejemplo, las fórmulas 44-(10) nos dicen que

$$1 = P_0(x), \quad x = P_1(x), \quad x^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} P_2(x) = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x),$$

$$x^3 = \frac{3}{5} x + \frac{2}{5} P_3(x) = \frac{3}{5} P_1(x) + \frac{2}{5} P_3(x);$$

y se sigue que todo polinomio de tercer grado $p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} p(x) &= b_0 P_0(x) + b_1 P_1(x) + b_2 \left[\frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x) \right] + b_3 \left[\frac{3}{5} P_1(x) + \frac{2}{5} P_3(x) \right] = \\ &= \left(b_0 + \frac{b_2}{3} \right) P_0(x) + \left(b_1 + \frac{3b_3}{5} \right) P_1(x) + \frac{2b_2}{3} P_2(x) + \frac{2b_3}{5} P_3(x) = \\ &= \sum_{n=0}^3 a_n P_n(x). \end{aligned}$$

Más en general, como $P_n(x)$ es un polinomio de grado n para todo entero positivo n , una simple extensión de este procedimiento muestra que x^n puede expresarse como combinación lineal de $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$, así que cualquier polinomio $p(x)$ de grado k admite un desarrollo de la forma

$$p(x) = \sum_{n=0}^k a_n P_n(x).$$

La cuestión que se plantea obviamente en este momento, y resulta vital en las aplicaciones, es la de si es posible desarrollar una función $f(x)$ «arbitraria» en *serie de Legendre*, entendiendo por tal un desarrollo del tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x). \quad (5)$$

Es claro que necesitamos un procedimiento nuevo para calcular los coeficientes a_n en (5), y la clave está en las fórmulas (2).

Si dejamos de lado las cautelas de rigor matemático, multiplicamos (5) por $P_m(x)$ e integramos término a término de -1 a 1 , resulta

$$\int_{-1}^1 f(x)P_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx;$$

y en vista de (2) eso lleva a

$$\int_{-1}^1 f(x)P_m(x) dx = \frac{2a_m}{2m+1}.$$

Por tanto, llegamos a la siguiente fórmula para los a_n de (5):

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 f(x)P_n(x) dx. \quad (6)$$

Estas manipulaciones son fáciles de justificar si se sabe de antemano que $f(x)$ admite un desarrollo en serie de la forma (5) y que esa serie es integrable término a término en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Ambas condiciones se satisfacen, sin duda, cuando $f(x)$ es un polinomio; pero para otras funciones no tenemos modo alguno de saber tal cosa, y nuestra conclusión de que los a_n en (5) vienen dados por (6) es de dudosa validez. Sin embargo, estos procedimientos formales son muy sugestivos, y pueden conducir a matemáticas legítimas si respondemos la siguiente pregunta. Si los a_n se definen por la fórmula (6) y se usan entonces para formar la serie, ¿para qué clases de funciones $f(x)$ existen los a_n y es válido el desarrollo (5)? Esta cuestión puede responderse, pero no es éste el lugar adecuado para entrar en detalles³.

La posibilidad de desarrollos del tipo (5) depende, como es bien evidente, de la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre. Este es un ejemplo del siguiente fenómeno general, frecuente en la teoría de funciones

³ La respuesta a la que nos referimos, conocida a veces como *teorema de los desarrollos de Legendre*, es fácil de comprender, pero su demostración depende de propiedades de los polinomios de Legendre que no hemos mencionado. El teorema afirma lo que sigue: Si $f(x)$ y $f'(x)$ tienen a lo sumo un número finito de discontinuidades con salto en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ y si $f(x-)$ y $f(x+)$ denotan los límites laterales de $f(x)$ en el punto x , entonces los a_n existen y la serie de Legendre converge a

$$\frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)]$$

para $-1 < x < 1$, a $f(-1+)$ en $x = -1$, y a $f(1-)$ en $x = 1$ y, en particular, converge a $f(x)$ en todo punto de continuidad. Véase N. N. Lebedev, *Special Functions and Their Applications*, páginas 53-58, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.

especiales. Si una sucesión de funciones $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, ..., $\phi_n(x)$, ... definidas sobre el intervalo $a \leq x \leq b$ tiene la propiedad de que

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \alpha_n \neq 0 & \text{si } m = n, \end{cases} \quad (7)$$

las ϕ_n se dice que son *funciones ortogonales* sobre ese intervalo. Igual que antes, el problema general que se plantea en conexión con una sucesión de esa clase es la de representar funciones $f(x)$ «arbitrarias» por desarrollos de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x),$$

y un manejo formal de (7) sugiere que los coeficientes a_n deben venir dados por

$$a_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_a^b f(x) \phi_n(x) dx.$$

Ejemplos adicionales se aportan en los Apéndices B y D del Capítulo 5, donde la ortogonalidad (con respecto a funciones peso apropiadas) de los polinomios de Hermite y de Chebyshev se menciona brevemente. La solución satisfactoria de este conjunto de problemas fue uno de los mayores éxitos de la matemática pura del siglo XIX y de comienzos del XX. El Capítulo 6 contiene un tratamiento bastante completo del problema clásico subyacente a todas estas nociones, a saber, el de desarrollar en serie de Fourier funciones convenientemente restringidas.

Aproximación por mínimos cuadrados. Sea $f(x)$ una función definida sobre el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ y consideremos el problema de aproximar $f(x)$ cuanto sea posible, en sentido de mínimos cuadrados, por polinomios $p(x)$ de grado $\leq n$. Si interpretamos la integral

$$I = \int_{-1}^1 [f(x) - p(x)]^2 dx \quad (8)$$

como la suma de los cuadrados de las desviaciones de $p(x)$ respecto a $f(x)$, el problema consiste en minimizar el valor de esa integral gracias a una elección adecuada de $p(x)$. Resulta que el polinomio que minimiza esa magnitud es precisamente la suma de los $n + 1$ primeros términos de la serie de Legendre (5),

$$p(x) = a_0 P_0(x) + \dots + a_n P_n(x),$$

con coeficientes dados por (6).

Para demostrarlo, usamos el hecho de que todo polinomio de grado $\leq n$ es expresable en la forma $b_0P_0(x) + \dots + b_nP_n(x)$. La integral (8) se puede escribir, por tanto, como

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \left[f(x) - \sum_{k=0}^n b_k P_k(x) \right]^2 dx = \\ &= \int_{-1}^1 f(x)^2 dx + \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} b_k^2 - 2 \sum_{k=0}^n b_k \left[\int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx \right] = \\ &= \int_{-1}^1 f(x)^2 dx + \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} b_k^2 - 2 \sum_{k=0}^n b_k \frac{2a_k}{2k+1} = \\ &= \int_{-1}^1 f(x)^2 dx + \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} (b_k - a_k)^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} a_k^2. \end{aligned}$$

Puesto que los a_k están fijados y los b_k a nuestra disposición, es claro que I toma valor mínimo cuando $b_k = a_k$ para $k = 0, \dots, n$. La única hipótesis requerida para este argumento es que $f(x)$ y $f(x)^2$ sean integrables. Si $f(x)$ admite un desarrollo en serie de potencias en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, la mayoría de los estudiantes daría por evidente que la «mejor» aproximación polinómica la consiguen las sumas parciales de esa serie de potencias. El resultado aquí establecido muestra que eso es falso si nuestro criterio de bondad en la aproximación es el de mínimos cuadrados.

PROBLEMAS

1. Verificar la fórmula (4).
2. La ecuación de Legendre se puede poner en la forma

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)y'] + n(n+1)y = 0,$$

así que

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)P'_n] + m(m+1)P_m = 0$$

y

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)P'_n] + n(n+1)P_n = 0.$$

Usar esas dos ecuaciones para dar una demostración de la primera parte de la

fórmula (2) que no dependa de la forma específica de los polinomios de Legendre.
Ayuda: Multiplicar la primera ecuación por P_n , la segunda por P_m , restar e integrar de -1 a 1 .

3. Si la relación generatriz de los Problemas 1 y 2 de la Sección 44 se eleva al cuadrado y se integra desde $x = -1$ hasta $x = 1$, la primera parte de (2) implica que

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx \right) t^{2n}.$$

Establecer la segunda parte de (2) probando que la integral de la izquierda tiene el valor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n}.$$

4. Hallar los tres primeros términos de la serie de Legendre de

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = e^x.$$

5. Si $p(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ tal que

$$\int_{-1}^1 x^k p(x) dx = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1,$$

probar que $p(x) = cP_n(x)$ para alguna constante c .

6. Si multiplicamos $P_n(x)$ por el recíproco r del coeficiente de x^n , el polinomio resultante $rP_n(x)$ tiene coeficiente dominante 1. Demostrar que este polinomio posee la siguiente propiedad de mínimo: Entre todos los polinomios de grado n con coeficiente dominante 1, $rP_n(x)$ es el que menos se desvía del cero sobre el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ en el sentido de mínimos cuadrados.

46. FUNCIONES DE BESSEL. LA FUNCION GAMMA

La ecuación diferencial

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad (1)$$

donde p es una constante no negativa, se llama *ecuación de Bessel*, y sus soluciones *funciones de Bessel*. Estas funciones aparecieron por vez primera en las investigaciones de Daniel Bernoulli sobre las oscilaciones de una cadena colgante (Problema 40-4) y de nuevo en la teoría de Euler de las vibraciones de una membrana circular y en los estudios de Bessel acerca del movimiento

de los planetas⁴. Más recientemente, las funciones de Bessel han encontrado aplicaciones diversas en física e ingeniería en relación con propagación de ondas, elasticidad, movimiento de fluidos y especialmente en la teoría del potencial y en la teoría de la difusión con simetría cilíndrica. Aparecen incluso en algunos problemas interesantes de matemática pura. Presentamos unas cuantas aplicaciones en el Apéndice B, pero antes es preciso definir las funciones de Bessel más importantes y obtener algunas de sus propiedades más sencillas⁵.

La definición de la función $J_p(x)$. Comenzamos nuestro estudio de las soluciones de (1) observando que tras dividir por x^2 los coeficientes de y' e y son $P(x) = 1/x$ y $Q(x) = (x^2 - p^2)/x^2$, luego $xP(x) = 1$ y $x^2Q(x) = -p^2 + x^2$. Así pues, el origen es un punto singular regular, la ecuación indicial 30-(5) es $m^2 - p^2 = 0$ y los exponentes son $m_1 = p$ y $m_2 = -p$. Del Teorema 30-A se desprende que (1) admite una solución de la forma

$$y = x^p \sum a_n x^n = \sum a_n x^{n+p}, \quad (2)$$

donde $a_0 \neq 0$ y la serie de potencias $\sum a_n x^n$ converge para todo x . Con el fin de hallar tal solución, escribimos

$$y' = \sum (n + p)a_n x^{n+p-1}$$

e

$$y'' = \sum (n + p - 1)(n + p)a_n x^{n+p-2}.$$

Estas fórmulas nos permiten expresar los términos de la izquierda en la ecuación (1) como

$$x^2 y'' = \sum (n + p - 1)(n + p)a_n x^{n+p},$$

$$xy' = \sum (n + p)a_n x^{n+p},$$

⁴ Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) fue un famoso astrónomo alemán e íntimo amigo de Gauss, con quien mantuvo correspondencia durante muchos años. Fue el primero en determinar con precisión la distancia de una estrella fija: su medida del paralaje de 1838 dio para la estrella Cisne 61 una distancia de once años luz, unas 360.000 veces el diámetro de la órbita de la Tierra. En 1844 descubrió que Sirio, la estrella más brillante del firmamento, va acompañada en su movimiento por otra, siendo por tanto lo que hoy se llama una estrella binaria. Esta compañera de Sirio, del tamaño de un planeta y la masa de una estrella y, en consecuencia, una densidad muchos miles de veces superior a la del agua, es uno de los objetos más interesantes del universo. Fue la primera estrella muerta descubierta y ocupa lugar destacado en las modernas teorías de la evolución estelar.

⁵ Todo el asunto recibe un tratamiento exhaustivo en G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2.^a ed., Cambridge University Press, Londres, 1944. Es una obra gigantesca de 752 páginas cuya bibliografía, de 36 páginas, contiene 791 citas. Lo que nosotros discutiremos viene a ser una gota en un inmenso océano de esfuerzo científico que se extiende a lo largo de tres siglos.

$$x^2y = \sum a_{n-2}x^{n+p},$$

$$-p^2y = \sum -p^2a_nx^{n+p}$$

Sumando esas series e igualando a cero el coeficiente de x^{n+p} se obtiene, después de simplificar, la siguiente fórmula de recurrencia para los a_n :

$$n(2p+n)a_n + a_{n-2} = 0, \quad (3)$$

o sea,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2p+n)}. \quad (4)$$

Sabemos que a_0 es no nulo y, por lo demás, arbitrario. Como $a_{-1} = 0$, (4) nos dice que $a_1 = 0$; y aplicando repetidas veces (4) se deduce que $a_n = 0$ para todo n impar. Los coeficientes no nulos de nuestra solución (2) son, por consiguiente,

$$a_0, \quad a_2 = -\frac{a_0}{2(2p+2)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2p+4)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)},$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(2p+6)} = -\frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)}, \dots$$

y la solución es

$$\begin{aligned} y &= a_0x^p \left[1 - \frac{x^2}{2^2(p+1)} + \frac{x^4}{2^4 2!(p+1)(p+2)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^6}{2^6 3!(p+1)(p+2)(p+3)} + \dots \right] = \\ &= a_0x^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} n!(p+1)\dots(p+n)}. \end{aligned} \quad (5)$$

La función de Bessel de primera clase de orden p , denotada por $J_p(x)$, se define poniendo $a_0 = 1/2^p p!$ en (5), de modo que

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p p!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} n!(p+1)\dots(p+n)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+p}}{n!(p+n)!}. \quad (6)$$

Las funciones de Bessel más útiles son las de orden 0 y las de orden 1, que son

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \quad (7)$$

y

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{1!2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \dots. \quad (8)$$

Sus gráficas, que se muestran en la Figura 53, revelan varias propiedades interesantes de las funciones $J_0(x)$ y $J_1(x)$: cada una de ellas tiene oscilación amortiguada, lo que produce un número infinito de ceros; además, estos ceros ocurren alternadamente, recordando a las funciones seno y coseno. Esta analogía se refuerza por la relación $J'_0(x) = -J_1(x)$, que se pide probar y aplicar en los Problemas 1 y 2.

Confiamos que el lector habrá descubierto el siguiente fallo en nuestra discusión: $J_p(x)$, tal como la define (6), carece de sentido a menos que el número real y no negativo p sea entero, ya que sólo en tal caso tiene sentido el factor $(p+n)!$ en los denominadores. Veamos cómo superar esta dificultad.

La función gamma. El objetivo de esta disgresión es asignar un significado razonable y útil a $p!$ [y más en general a $(p+n)!$ para $n = 0, 1, 2, \dots$] cuando el número real no negativo p no es un entero. Lo lograremos introduciendo la función gamma $\Gamma(p)$, definida por

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt, \quad p > 0. \quad (9)$$

El factor $e^{-t} \rightarrow 0$ tan rápidamente cuando $t \rightarrow \infty$ que esta integral impropia converge en el extremo superior, independientemente del valor de p . Sin embargo, en el extremo inferior se tiene $e^{-t} \rightarrow 1$, y el factor $t^{p-1} \rightarrow \infty$ siempre

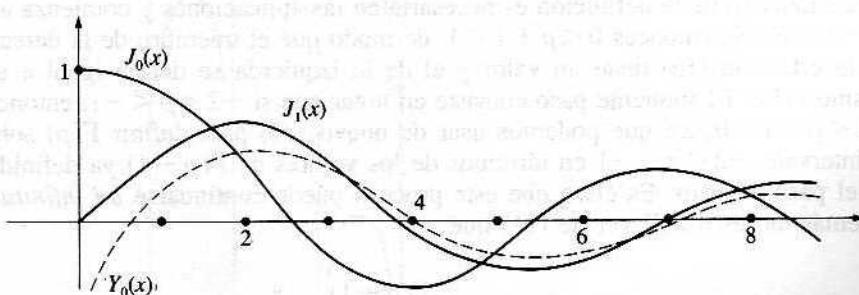


Figura 53

que $p < 1$. La restricción a p positivos es necesaria para garantizar la convergencia en el extremo inferior.

Es fácil ver que

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p); \quad (10)$$

ya que integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^p e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-t^p e^{-t} \Big|_0^b + p \int_0^b t^{p-1} e^{-t} dt \right) = \\ &= p \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^{p-1} e^{-t} dt \right) = p\Gamma(p), \end{aligned}$$

ya que $b^p/e^b \rightarrow 0$ cuando $b \rightarrow \infty$. Usando el hecho de que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1, \quad (11)$$

entonces (10) da

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1, \quad \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

y en general

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (12)$$

para cualquier entero $n \geq 0$.

Empezábamos la presentación de la función gamma bajo la hipótesis de que p es no negativo y hemos mencionado al final que la integral (9) no existe si $p = 0$. No obstante, podemos definir $\Gamma(p)$ para muchos valores negativos de p sin recurrir a esa integral si escribimos (10) en la forma

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}. \quad (13)$$

Esta extensión de la definición es necesaria en las aplicaciones y comienza así: Si $-1 < p < 0$, entonces $0 < p+1 < 1$, de modo que el miembro de la derecha de la ecuación (13) tiene un valor y el de la izquierda se define igual a ese mismo valor. El siguiente paso consiste en notar que si $-2 < p < -1$, entonces $-1 < p+1 < 0$, así que podemos usar de nuevo (13) para definir $\Gamma(p)$ sobre el intervalo $-2 < p < -1$ en términos de los valores de $\Gamma(p+1)$ ya definidos en el paso anterior. Es claro que este proceso puede continuarse *ad infinitum*. Además, no es difícil ver de (11) que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Gamma(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \pm\infty$$

según que $p \rightarrow 0$ por la derecha o por la izquierda. La función $\Gamma(p)$ se comporta de manera análoga cerca de todos los enteros negativos, y su gráfica ofrece el aspecto que muestra la Figura 54. Necesitaremos asimismo el hecho curioso de que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (14)$$

Esto se indica en la figura y su demostración se deja al lector (Problema 3). Como $\Gamma(p)$ nunca se hace cero, la función $1/\Gamma(p)$ estará definida y se comportará bien para todos los valores de p si convenimos que $1/\Gamma(p) = 0$ para $p = 0, -1, -2, \dots$

Estas ideas nos permiten definir $p!$ mediante

$$p! = \Gamma(p + 1)$$

para todo valor de p , excepto los enteros negativos, y por la fórmula (12) esta función tiene su significado habitual cuando p es un entero no negativo. Su

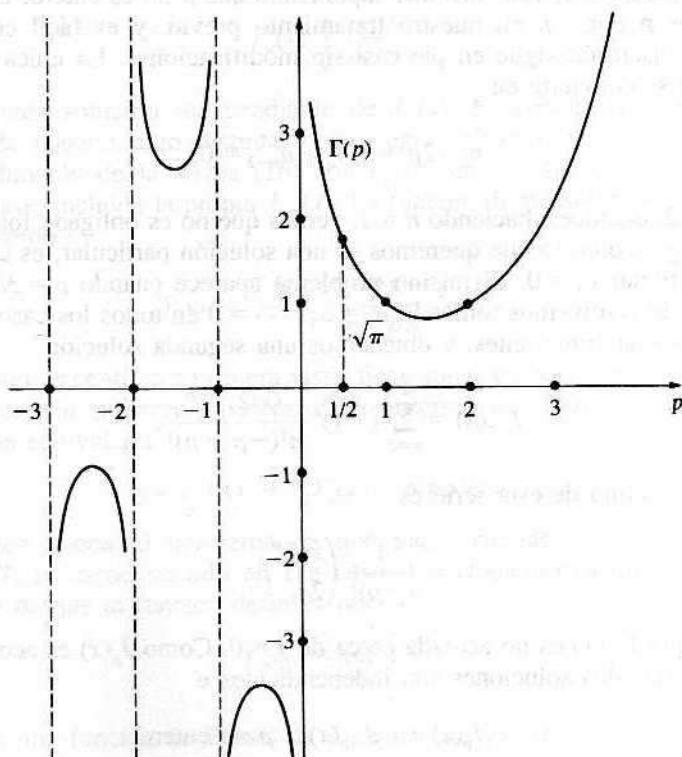


Figura 54

recíproca, $1/p! = 1/\Gamma(p+1)$, está definida para todo p , y toma valor 0 siempre que p es un entero negativo.

La función gamma es una función extremadamente importante por derecho propio. Ahora bien, nuestro único propósito al introducirla aquí es garantizar que la función $J_p(x)$, definida por (6), tenga sentido para todo $p \geq 0$. Queremos advertir que hemos logrado más que eso: como $1/(p+n)!$ ha adquirido significado para todo $p+n$, (6) define una función de x perfectamente respetable para todo valor de p , sin excepción alguna.

La solución general de la ecuación de Bessel. Nos encontramos en la siguiente posición: hemos hallado una solución particular de (1) correspondiente al exponente $m_1 = p$, a saber, $J_p(x)$. Con el fin de hallar la solución general, nos falta construir una segunda solución independiente, o sea, que no sea múltiplo constante de $J_p(x)$. Una tal solución se llama una *función de Bessel de segunda clase*. Parece natural ensayar con el otro exponente, $m_2 = -p$. Pero al hacerlo esperamos encontrar dificultades siempre que la diferencia $m_1 - m_2 = 2p$ sea cero o un entero positivo, esto es, siempre que la constante no negativa p sea un entero o semientero. Resulta que las dificultades esperadas son graves sólo en el primer caso.

Por consiguiente, comenzamos suponiendo que p no es entero. En tal caso, sustituimos p por $-p$ en nuestro tratamiento previo, y es fácil convencerse de que la discusión sigue en pie casi sin modificaciones. La única excepción es que (3) se convierte en

$$n(-2p + n)a_n + a_{n-2} = 0;$$

y si $p = 1/2$, entonces, haciendo $n = 1$, vemos que no es obligado tomar $a_1 = 0$. Sin embargo, como lo que queremos es una solución particular, es ciertamente admisible tomar $a_1 = 0$. El mismo problema aparece cuando $p = 3/2$ y $n = 3$, etcétera, y lo resolvemos tomando $a_1 = a_3 = \dots = 0$ en todos los casos. Todo lo demás funciona como antes, y obtenemos una segunda solución

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n-p}}{n!(-p+n)!}. \quad (15)$$

El primer término de esta serie es

$$\frac{1}{(-p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-p},$$

de modo que $J_{-p}(x)$ es no acotada cerca de $x = 0$. Como $J_p(x)$ es acotada cerca de $x = 0$, estas dos soluciones son independientes e

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x), \quad p \text{ no entero}, \quad (16)$$

es la solución general de (1).

La solución es completamente distinta cuando p es un entero $m \geq 0$. La fórmula (15) es ahora

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n-m}}{n!(-m+n)!} = \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n-m}}{n!(-m+n)!}$$

ya que los factores $1/(-m+n)!$ son cero cuando $n = 0, 1, \dots, m-1$. Reemplazando la variable muda n por $n+m$ y haciendo, en compensación, que la suma comience en $n=0$, obtenemos

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{(x/2)^{2(n+m)-m}}{(n+m)!n!} = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+m}}{n!(m+n)!} = (-1)^m J_m(x).$$

Esto demuestra que $J_{-m}(x)$ no es independiente de $J_m(x)$, así que en este caso

$$y = c_1 J_m(x) + c_2 J_{-m}(x)$$

no es la solución general de (1) y la búsqueda debe continuar.

Es en este momento cuando la historia se complica y nos limitamos a esbozarla. Una posible salida consiste en usar el método de la Sección 16, que lleva fácilmente a

$$J_m(x) \int \frac{dx}{x J_m(x)^2}$$

como segunda solución independiente de $J_m(x)$. Es costumbre, pese a ello, proceder de manera algo distinta, como sigue. Cuando p no es un entero, cualquier función de la forma (16) con $c_2 \neq 0$ es una función de Bessel de segunda clase, incluida la propia $J_{-p}(x)$. La función de Bessel de segunda clase se define como

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}. \quad (17)$$

Esta elección, excéntrica a primera vista, tiene sus buenas razones, como vamos a ver. Antes, sin embargo, el lector debe observar que (16) se puede escribir en la forma equivalente

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x), \quad p \text{ no entero.} \quad (18)$$

Todavía nos queda el problema de qué hacer cuando p es un entero m , porque (17) no tiene sentido en ese caso. Un cuidadoso análisis lleva a la conclusión de que la función definida por

$$Y_m(x) = \lim_{p \rightarrow m} Y_p(x) \quad (19)$$

existe y es una función de Bessel de segunda clase; y se sigue que

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x) \quad (20)$$

es la solución general de la ecuación de Bessel en todos los casos, sea p entero o no. La gráfica de $Y_0(x)$ corresponde a la curva de trazo discontinuo en la Figura 53. Esa gráfica ilustra el hecho importante de que para todo $p \geq 0$, la función $Y_p(x)$ es no acotada cerca del origen. Por consiguiente, si estamos interesados tan sólo en soluciones de la ecuación de Bessel que sean acotadas cerca de $x = 0$, como sucede con frecuencia en las aplicaciones, debemos hacer $c_2 = 0$ en (20).

Vamos ya con la prometida explicación de la sorprendente elección (17). Ya hemos comentado que existen varias maneras de definir las funciones de Bessel de segunda clase. Las definiciones (17) y (19) son particularmente convenientes, por dos razones. En primer lugar, la forma de (17) hace que sea muy fácil probar la existencia del límite (19) (véase Problema 9). Y, además, estas definiciones implican que el comportamiento de $Y_p(x)$, para grandes valores de x , se adapta bien al de $J_p(x)$. Para entender qué queremos decir con esto, recordemos del Problema 24-3 que el cambio de variable $u(x) = \sqrt{xy}(x)$ transforma la ecuación de Bessel (1) en

$$u'' + \left(1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2}\right) u = 0. \quad (21)$$

Cuando x es muy grande, (21) se aproxima a la ecuación diferencial familiar $u'' + u = 0$, que tiene soluciones independientes $u_1(x) = \cos x$ y $u_2(x) = \sin x$. Por tanto, esperamos que, para grandes x , cualquier función de Bessel $y(x)$ se comporte como alguna combinación lineal de

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \cos x \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x.$$

Esta esperanza viene corroborada por el hecho de que

$$J_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) + \frac{r_1(x)}{x^{3/2}}$$

e

$$Y_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) + \frac{r_2(x)}{x^{3/2}},$$

donde $r_1(x)$ y $r_2(x)$ están acotadas al hacer $x \rightarrow \infty$ ⁶.

⁶ Véase Watson, *op. cit.*, cap. VII (pie de página 5); o R. Courant y D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1, págs. 331-334, 526, Interscience-Wiley, Nueva York, 1953.

PROBLEMAS

1. Usar (7) y (8) para verificar que

$$(a) \frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x);$$

$$(b) \frac{d}{dx} [xJ_1(x)] = xJ_0(x).$$

2. Usar el Problema 1 y el teorema de Rolle para demostrar que:

- (a) Entre cualesquiera dos ceros positivos de $J_0(x)$ hay un cero de $J_1(x)$.
 (b) Entre cualesquiera dos ceros positivos de $J_1(x)$ hay un cero de $J_0(x)$.

3. Según la definición (9),

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt.$$

- (a) Probar que el cambio de variable $t = s^2$ conduce a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds.$$

- (b) Puesto que s es una variable muda en (a), podemos escribir

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Poniendo esta integral doble en coordenadas polares, demostrar que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi,$$

así que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

4. Como $p! = \Gamma(p+1)$ siempre que p no sea un entero negativo, (14) dice que $(-1/2)! = \sqrt{\pi}$. Calcular $(1/2)!$ y $(3/2)!$. Más en general, probar que

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi}$$

y

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

para todo entero n no negativo.

5. Cuando $p = 1/2$, la ecuación (21) muestra que la solución general de la ecuación de Bessel es expresable en cualquiera de estas formas equivalentes:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$$

e

$$y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x).$$

Debe ser cierto, por tanto, que

$$\sqrt{x} J_{1/2}(x) = a \cos x + b \operatorname{sen} x$$

y

$$\sqrt{x} J_{-1/2}(x) = c \cos x + d \operatorname{sen} x$$

con ciertas constantes a, b, c y d . Calculando esas constantes, probar que

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x \quad y \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

6. Establecer las fórmulas del Problema 5 por manipulación directa de los desarrollos en serie de $J_{1/2}$ y $J_{-1/2}(x)$.
7. Muchas ecuaciones diferenciales son realmente ecuaciones de Bessel disfrazadas y, como tales, resolubles por medio de funciones de Bessel. A título de ejemplo, escribir la ecuación de Bessel como

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - p^2)w = 0,$$

y probar que el cambio de variable $z = ax^b$ y $w = yx^c$ (donde a, b, c son constantes) la transforma en

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2c+1)x \frac{dy}{dx} + [a^2 b^2 x^{2b} + (c^2 - p^2 b^2)]y = 0.$$

Escribir la solución general de esta ecuación en términos de funciones de Bessel.

8. Mediante el resultado del Problema 7, mostrar que la solución general de la ecuación de Airy, $y'' + xy = 0$ (véase Problema 28-5), es

$$y = x^{1/2} \left[c_1 J_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) + c_2 J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right].$$

9. Aplicar la regla de L'Hospital al límite (19) para demostrar que

$$Y_m(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial p} J_p(x) - (-1)^m \frac{\partial}{\partial p} J_{-p}(x) \right]_{p=m}.$$

47. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE BESSEL

La función de Bessel $J_p(x)$ se ha definido para todo número real p como

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+p}}{n!(p+n)!}. \quad (1)$$

En esta sección analizaremos varias propiedades de estas funciones que son útiles en sus aplicaciones.

Identidades y las funciones $J_{m+1/2}(x)$. Vamos a empezar considerando las fórmulas

$$\frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x) \quad (2)$$

y

$$\frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x). \quad (3)$$

Para llegar a (2) basta multiplicar la serie (1) por x^p y derivar:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2p}}{2^{2n+p} n! (p+n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2p-1}}{2^{2n+p-1} n! (p+n-1)!} = \\ &= x^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+p-1}}{n! (p-1+n)!} = x^p J_{p-1}(x). \end{aligned}$$

La verificación de (3) es análoga; dejamos los detalles al cuidado del lector (Problema 1). Si se efectúan las derivaciones en (2) y (3) y se dividen los resultados por $x^{\pm p}$, las fórmulas se convierten en

$$J'_p(x) + \frac{p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) \quad (4)$$

y

$$J'_p(x) - \frac{p}{x} J_p(x) = J_{p+1}(x). \quad (5)$$

Si (4) y (5) se suman y se restan, queda

$$2J'_p(x) = J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) \quad (6)$$

y

$$\frac{2p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x). \quad (7)$$

Estas fórmulas hacen posible expresar las funciones de Bessel y sus derivadas en términos de otras funciones de Bessel.

Una aplicación interesante de (7) tiene su origen en las fórmulas

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad \text{y} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

que se obtuvieron en el Problema 46-5. Se sigue ahora de (7) que

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right)$$

y

$$J_{5/2}(x) = \frac{3}{4} J_{3/2}(x) - J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3 \sin x}{x^2} - \frac{3 \cos x}{x} - \sin x \right).$$

Además,

$$J_{-3/2}(x) = -\frac{1}{x} J_{-1/2}(x) - J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\frac{\cos x}{x} - \sin x \right)$$

y

$$J_{-5/2}(x) = -\frac{3}{x} J_{-3/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3 \cos x}{x^2} + \frac{3 \sin x}{x} - \cos x \right).$$

Es obvio que los cálculos de esta índole se pueden continuar indefinidamente y, en consecuencia, toda función de Bessel $J_{m+1/2}(x)$ (con m entero) es elemen-

tal. Liouville probó que éstos son los únicos casos en que $J_p(x)$ es elemental⁷.

Otra aplicación de (7) se recoge al final del Apéndice C, donde mostramos cómo proporciona la fracción continua de Lambert para la función tangente. Esta fracción continua encierra un enorme valor histórico, ya que llevó a la primera demostración del carácter irracional de π .

Escritas en la forma

$$\int x^p J_{p-1}(x) \, dx = x^p J_p(x) + c \quad (8)$$

$$\int x^{-p} J_{p+1}(x) \, dx = -x^{-p} J_p(x) + c, \quad (9)$$

las fórmulas (2) y (3) sirven para integrar muchas expresiones sencillas que involucran a las funciones de Bessel. Así, por ejemplo, cuando $p = 1$, (8) da

$$\int x J_0(x) \, dx = x J_1(x) + c. \quad (10)$$

En el caso de integrales más complicadas, donde el exponente no se ajuste al orden de la función de Bessel como lo hace en (8) y (9), suele ser preciso recurrir a integración por partes.

Ceros y series de Bessel. Se sigue del Problema 24-3 que para todo valor de p la función $J_p(x)$ tiene infinitos ceros positivos. Eso es cierto, en particular, para $J_0(x)$. Los ceros de esta función se conocen con mucha precisión y sus valores están tabulados en muchos libros de tablas matemáticas. Los primeros cinco son aproximadamente 2,4048, 5,5201, 8,6537, 11,7915 y 14,9309; sus distancias sucesivas son 3,1153, 3,1336, 3,1378 y 3,1394. Los correspondientes ceros positivos y diferencias para $J_1(x)$ son 3,8317, 7,0156, 10,1735, 13,3237 y 16,4706; y 3,1839, 3,1579, 3,1502 y 3,1469. Nótese que estas diferencias confirman las garantías dadas en el Problema 25-1.

¿A qué viene tanto interés en los ceros de $J_p(x)$? A menudo es necesario en física matemática desarrollar una función dada en términos de funciones de Bessel, dependiendo el tipo de desarrollo del problema entre manos. Los desarrollos más simples y más útiles de este tipo son las series de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_p(\lambda_n x) = a_1 J_p(\lambda_1 x) + a_2 J_p(\lambda_2 x) + \dots, \quad (11)$$

⁷ Los detalles de este notable descubrimiento pueden consultarse en Watson, *op. cit.*, cap. IV, y en J. F. Ritt, *Integration in Finite Terms*, Columbia University Press, Nueva York, 1948. Las funciones $J_{m+1/2}(x)$ se suelen llamar *funciones de Bessel esféricas* porque aparecen al resolver la ecuación de ondas en coordenadas esféricas.

donde $f(x)$ está definida sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$ y los λ_n son los ceros positivos de alguna función de Bessel fija $J_p(x)$ con $p \geq 0$. Hemos elegido el intervalo $0 \leq x \leq 1$ por una simple cuestión de comodidad, pero todas las fórmulas que vayamos escribiendo se pueden adaptar, por un simple cambio de variable, a intervalos de la forma $0 \leq x \leq a$. El cometido de tales desarrollos en la física es similar al que vimos para las series de Legendre, ilustrado en el Apéndice A, donde consideramos un problema de temperaturas sobre una esfera. En el Apéndice B enseñamos cómo se usa (1) para resolver la ecuación de ondas en dos dimensiones para una membrana circular vibrante.

A la luz de nuestra experiencia previa con las series de Legendre, esperamos que la determinación de los coeficientes en (11) se base en ciertas propiedades integrales de las funciones $J_p(\lambda_n x)$. Lo que necesitamos aquí es el hecho de que

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_m x) J_p(\lambda_n x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \frac{1}{2} J_{p+1}(\lambda_n)^2 & \text{si } m = n. \end{cases} \quad (12)$$

En términos de los conceptos introducidos en la Sección 43, estas fórmulas dicen que las funciones $J_p(\lambda_n x)$ son ortogonales con respecto a la función peso x sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Las demostraremos al final de esta sección, pero antes vamos a poner de manifiesto su utilidad.

Supuesto que sea factible un desarrollo del tipo (11), multiplicando por $x J_p(\lambda_m x)$, integrando formalmente término a término de 0 a 1 y usando (12) se llega a

$$\int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_m x) dx = \frac{a_m}{2} J_{p+1}(\lambda_m)^2;$$

y sustituyendo m por n se obtiene la siguiente fórmula para a_n :

$$a_n = \frac{2}{J_{p+1}(\lambda_n)^2} \int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x) dx. \quad (13)$$

La serie (11), con sus coeficientes calculados mediante (13), se llama la *serie de Bessel* (o a veces *série de Fourier-Bessel*) de la función $f(x)$. Como de costumbre, enunciamos sin demostración un teorema de cierta envergadura que da condiciones bajo las cuales la serie converge realmente con suma $f(x)$ ⁸.

Teorema A. (Teorema del desarrollo de Bessel.) *Supongamos que $f(x)$ y $f'(x)$ tienen a lo sumo un número finito de discontinuidades con salto en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Si $0 < x < 1$, entonces la serie de Bessel (11) converge a $f(x)$ cuando x es un punto de continuidad de esta función, y a $1/2[f(x^-) + f(x^+)]$ cuando x es punto de discontinuidad.*

⁸ Puede verse una demostración en Watson, *op. cit.*, cap. XVIII.

Es natural preguntarse qué ocurre en los extremos del intervalo. En $x = 1$ la serie converge a cero independientemente de la naturaleza de la función, porque todo $J_p(\lambda_n)$ es cero. La serie converge a cero también en $x = 0$, si $p > 0$ y a $f(0+)$ si $p = 0$.

Como ilustración, vamos a calcular la serie de Bessel de la función $f(x) = 1$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ en términos de las funciones $J_0(\lambda_n x)$, donde se sobrentiende que los λ_n son los ceros positivos de $J_0(x)$. En este caso, (13) es

$$a_n = \frac{2}{J_1(\lambda_n)^2} \int_0^1 x J_0(\lambda_n x) dx.$$

Por (10) vemos que

$$\int_0^1 x J_0(\lambda_n x) dx = \left[\frac{1}{\lambda_n} x J_1(\lambda_n x) \right]_0^1 = \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n},$$

luego

$$a_n = \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}.$$

De donde se sigue que

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} J_0(\lambda_n x) \quad (0 \leq x < 1)$$

es la deseada serie de Bessel.

Demostración de las propiedades de ortogonalidad. Para establecer (12), nótese que $y = J_p(x)$ es solución de

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Si a y b son constantes positivas distintas, las funciones $u(x) = J_p(ax)$ y $v(x) = J_p(bx)$ satisfacen las ecuaciones

$$u'' + \frac{1}{x} u' + \left(a^2 - \frac{p^2}{x^2}\right) u = 0 \tag{14}$$

y

$$v'' + \frac{1}{x} v' + \left(b^2 - \frac{p^2}{x^2}\right) v = 0. \tag{15}$$

Ahora multiplicamos estas ecuaciones respectivamente por v y u , restamos los resultados y obtenemos

$$\frac{d}{dx} (u'v - v'u) + \frac{1}{x} (u'v - v'u) = (b^2 - a^2)uv;$$

y tras multiplicar por x , eso nos dice que

$$\frac{d}{dx} [x(u'v - v'u)] = (b^2 - a^2)xuv. \quad (16)$$

Integrando (16) desde $x = 0$ hasta $x = 1$ resulta

$$(b^2 - a^2) \int_0^1 xuv \, dx = [x(u'v - v'u)]_0^1.$$

La expresión entre corchetes se anula claramente en $x = 0$, y en el otro extremo del intervalo tenemos $u(1) = J_p(a)$ y $v(1) = J_p(b)$. Por consiguiente, la integral de la izquierda es cero si a y b son ceros distintos positivos λ_m y λ_n de $J_p(x)$; es decir, tenemos

$$\int_0^1 xJ_p(\lambda_m x)J_p(\lambda_n x) \, dx = 0, \quad (17)$$

que es la primera parte de (12).

Finalmente, vamos a calcular la integral en (17) cuando $m = n$. Si (14) se multiplica por $2x^2u'$, se convierte en

$$2x^2u'u'' + 2xu'^2 + 2a^2x^2uu' - 2p^2uu' = 0,$$

o sea,

$$\frac{d}{dx} (x^2u'^2) + \frac{d}{dx} (a^2x^2u^2) - 2a^2xu^2 - \frac{d}{dx} (p^2u^2) = 0,$$

así que integrando entre $x = 0$ y $x = 1$ se obtiene

$$2a^2 \int_0^1 xu^2 \, dx = [x^2u'^2 + (a^2x^2 - p^2)u^2]_0^1. \quad (18)$$

Cuando $x = 0$, la expresión entre corchetes se anula, y como $u'(1) = aJ'_p(a)$, (18) nos dice que

$$\int_0^1 xJ_p(ax)^2 \, dx = \frac{1}{2} J'_p(a)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2}{a^2}\right) J_p(a)^2.$$

Ahora ponemos $a = \lambda_n$ y obtenemos

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_n x)^2 dx = \frac{1}{2} J'_p(\lambda_n)^2 = \frac{1}{2} J_{p+1}(\lambda_n)^2,$$

donde el último paso utiliza (5). La demostración de (12) está terminada.

PROBLEMAS

1. Verificar la fórmula (3).
2. Probar que los ceros positivos de $J_p(x)$ y $J_{p+1}(x)$ ocurren alternadamente, en el sentido de que entre cada par de ceros sucesivos de una de ellas hay exactamente un cero de la otra.
3. Expresar $J_2(x)$, $J_3(x)$ y $J_4(x)$ en términos de $J_0(x)$ y $J_1(x)$.
4. Si $f(x)$ se define mediante

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2, \\ 1/2 & x = 1/2, \\ 0 & 1/2 < x \leq 1, \end{cases}$$

mostrar que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n/2)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)^2} J_0(\lambda_n x),$$

donde los λ_n son los ceros positivos de $J_0(x)$.

5. Si $f(x) = x^p$ en el intervalo $0 \leq x < 1$, probar que su serie de Bessel en las funciones $J_p(\lambda_n x)$, donde los λ_n son los ceros positivos de $J_p(x)$, es

$$x^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n J_{p+1}(\lambda_n)} J_p(\lambda_n x).$$

6. Con la notación del Problema 5, demostrar formalmente que si $g(x)$ es una función que se comporta bien en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, entonces

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x^{p+1} g(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n J_{p+1}(\lambda_n)} \int_0^1 x g(x) J_p(\lambda_n x) dx.$$

Tomando $g(x) = x^p$ y x^{p+2} , deducir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{4(p+1)} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} = \frac{1}{16(p+1)^2(p+2)}.$$

7. Los ceros positivos de $\sin x$ son $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ Usar el resultado del Problema 6 (y del Problema 46-5) para probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots = \frac{\pi^4}{90}.$$

8. Verificar que el cambio de variable dependiente

$$By = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

transforma la ecuación especial de Riccati

$$\frac{dy}{dx} + By^2 = Cx^m$$

en

$$\frac{d^2u}{dx^2} - BCx^m u = 0.$$

Si $m \neq -2$, usar el Problema 46-7 para probar que esta ecuación es resoluble en términos de funciones elementales si y sólo si $m = -4k/(2k+1)$ para algún entero k . (Cuando $m = -2$, el cambio $y = v/x$ transforma la ecuación de Riccati en una ecuación con variables separadas que tiene solución elemental.)

9. Comprobar que la solución general de

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

se puede escribir como

$$y = x \frac{J_{-3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + cJ_{3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{cJ_{-1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - J_{1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}.$$

APENDICE A. POLINOMIOS DE LEGENDRE Y TEORIA DEL POTENCIAL

Si un número de partículas de masas m_1, m_2, \dots, m_n , que se atraen de acuerdo con la ley gravitacional del inverso del cuadrado, se colocan en los puntos P_1, P_2, \dots, P_n , el *potencial* debido a esas partículas en cualquier punto P (o sea, el trabajo realizado contra esas fuerzas atractivas al mover una unidad de masa desde P hasta una distancia infinita) es

$$U = \frac{Gm_1}{PP_1} + \frac{Gm_2}{PP_2} + \dots + \frac{Gm_n}{PP_n}, \quad (1)$$

siendo G la constante de la gravitación⁹. Si los puntos P, P_1, P_2, \dots, P_n tienen coordenadas rectangulares $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$, de modo que

$$PP_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

con expresiones análogas para las otras distancias, es fácil comprobar por derivación parcial que el potencial U satisface la *ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Esta ecuación en derivadas parciales no involucra ni las masas concretas de las partículas ni las coordenadas de los puntos donde están situadas, de modo que la cumple el potencial producido en el vacío por una distribución arbitraria, discreta o continua, de partículas. Se suele escribir en la forma

$$\nabla^2 U = 0, \quad (3)$$

donde el símbolo ∇^2 (delta cuadrado) es tan sólo una notación abreviada para el operador diferencial

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

La función U se llama *potencial gravitatorio*. Si en lugar de eso trabajásemos con partículas cargadas, de cargas q_1, q_2, \dots, q_n , su *potencial electrostático* tendría la misma forma que (1) con las masas sustituidas por las cargas y G por la constante de Coulomb, de manera que también satisface la ecuación de Laplace. Esta ecuación tiene tal multitud de aplicaciones que su estudio cons-

⁹ Véase la ecuación 21-(17).

tituye, por sí mismo, una rama del análisis, conocida como *teoría del potencial*. La ecuación relacionada

$$a^2 \nabla^2 U = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (4)$$

llamada *ecuación del calor*, surge en problemas de conducción del calor, donde U es ahora una función del tiempo t y de las coordenadas espaciales. La *ecuación de ondas*

$$a^2 \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (5)$$

está relacionada con fenómenos vibratorios.

Añadamos algunos comentarios sobre el significado físico de las ecuaciones (3) y (4). [La ecuación (5) es simplemente la contrapartida tridimensional de la ecuación de ondas unidimensional 40-(8), que ya ha sido tratada detenidamente.] En primer lugar, la ecuación de Laplace (3) encierra la misma afirmación acerca de la función U que la ecuación unidimensional $d^2y/dx^2 = 0$ para una función $y(x)$ de una sola variable x . Pero la última ecuación implica que $y(x)$ tiene forma lineal $y = mx + b$; y toda tal función tiene la propiedad de que su valor en el centro de un intervalo es el promedio de sus valores en los extremos del intervalo. Es claro de (1) que las soluciones de la ecuación de Laplace no tienen por qué ser funciones lineales de x, y, z ; de hecho pueden ser muy complicadas. No obstante, se puede demostrar (un hecho descubierto por Gauss) que toda solución de (3) tiene la notable propiedad de que su valor en el centro de una bola coincide con el promedio de sus valores sobre su superficie¹⁰. Más en general, la función $\nabla^2 U$ puede interpretarse como una medida grosera de la diferencia entre el valor promedio U sobre la superficie de una pequeña bola y su valor exacto en el centro. Así, por ejemplo, si U representa la temperatura en un punto arbitrario P de un sólido y $\nabla^2 U$ es positivo en un cierto punto P_0 , entonces el valor de U en P_0 es en general menor que sus valores en puntos próximos. Por tanto, esperamos que el calor fluya hacia P_0 , haciendo crecer la temperatura allí y, puesto que la temperatura está creciendo, $\partial U / \partial t$ es positivo en P_0 . Esto es esencialmente lo que dice la ecuación del calor (4): que $\partial U / \partial t$ es proporcional a $\nabla^2 U$ y tiene el mismo signo. Si la temperatura U alcanza un estado estacionario en el sólido, de manera que $\partial U / \partial t = 0$ en todos sus puntos, entonces $\nabla^2 U = 0$ y volvemos al caso de la ecuación de Laplace.

Tendremos ocasión de utilizar las fórmulas para $\nabla^2 U$ en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y en esféricas (ρ, θ, ϕ) , indicadas en la Figura 55. Estas coordenadas están relacionadas con las rectangulares mediante las ecuaciones

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

¹⁰ En el Problema 42-4 puede verse la versión bidimensional de esta propiedad.

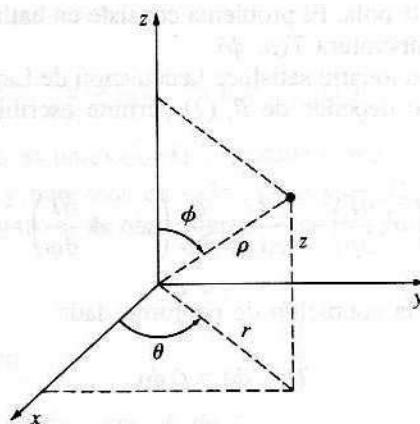


Figura 55

y

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

Un cálculo tedioso pero sencillo permite ver que en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad (6)$$

y en esféricas

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}. \quad (7)$$

Todo estudiante debe llevar a cabo estos cálculos al menos una vez en su vida, pero ¡quizá una sola vez sea suficiente!

Temperatura estacionaria en una esfera. En este ejemplo vamos a ilustrar de la forma más simple posible el papel de los polinomios de Legendre en la resolución de ciertos problemas de contorno en física matemática¹¹.

Sea una bola de radio 1 colocada en un sistema de coordenadas esféricas con origen en su centro. Supongamos que se mantiene la superficie esférica de dicha bola a una temperatura $f(\phi)$, independiente de θ para mayor sencillez, hasta que el flujo de calor produce un estado estacionario para la tempera-

¹¹ Muchos problemas de mayor complejidad se discuten en Lebedev, *op. cit.*, cap. 8.

tura $T(\rho, \phi)$ dentro de la bola. El problema consiste en hallar una representación explícita para la f temperatura $T(\rho, \phi)$.

La temperatura estacionaria satisface la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, y como T no depende de θ , (7) permite escribir esa ecuación en la forma

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\operatorname{sen} \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = 0. \quad (8)$$

Para resolver (8) bajo la condición de contorno dada

$$T(1, \phi) = f(\phi), \quad (9)$$

usamos el método de *separación de variables*; es decir, buscamos una solución de (8) del tipo $T(\rho, \phi) = u(\rho)v(\phi)$. Al insertar esta expresión en (8) y separar variables queda

$$\frac{1}{u} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{du}{d\rho} \right) = - \frac{1}{v \operatorname{sen} \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\operatorname{sen} \phi \frac{dv}{d\phi} \right). \quad (10)$$

El paso crucial en el método consiste en la siguiente observación: como el lado izquierdo de (10) es sólo función de ρ y el derecho sólo de ϕ , ambos han de ser iguales a una constante. Si esta constante común, que llamamos la *constante de separación*, se denota por λ , (10) se desdobra en dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\rho^2 \frac{d^2u}{d\rho^2} + 2\rho \frac{du}{d\rho} - \lambda u = 0 \quad (11)$$

y

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\operatorname{sen} \phi \frac{dv}{d\phi} \right) + \lambda v = 0. \quad (12)$$

La ecuación (11) es una ecuación de Euler con $p = 2$ y $q = -\lambda$, así que su ecuación indicial es

$$m(m-1) + 2m - \lambda = 0 \quad \text{o sea} \quad m^2 + m - \lambda = 0.$$

Los exponentes son, por tanto, $1/2(-1 \pm \sqrt{1+4\lambda})$, y la solución general de (11) es

$$u = c_1 \rho^{-1/2+\sqrt{\lambda+1/4}} + c_2 \rho^{-1/2-\sqrt{\lambda+1/4}}, \quad (13)$$

es decir,

$$u = c_3 \rho^{-1/2} + c_4 \rho^{-1/2} \log \rho.$$

Para garantizar que u es univaleuada y acotada cerca de $\rho = 0$, descartamos la segunda posibilidad y ponemos en (13) $c_2 = 0$ y $-1/2 + \sqrt{\lambda + 1/4} = n$, donde n es un entero no negativo. Se sigue que $\lambda = n(n + 1)$, así que (13) se reduce a

$$u = c_1 \rho^n \quad (14)$$

y (12) se convierte en

$$\frac{d^2v}{d\phi^2} + \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \frac{dv}{d\phi} + n(n + 1)v = 0.$$

Cambiando la variable independiente de ϕ a $x = \cos \phi$, esa ecuación se transforma en

$$(1 - x^2) \frac{d^2v}{dx^2} - 2x \frac{dv}{dx} + n(n + 1)v = 0, \quad (15)$$

que es precisamente la ecuación de Legendre. A causa de la física del problema, la función v ha de ser acotada para $0 \leq \phi \leq \pi$, o equivalentemente para $-1 \leq x \leq 1$; y sabemos de la Sección 44 que las únicas soluciones de (15) con tal propiedad son múltiplos constantes de los polinomios de Legendre $P_n(x)$. Combinando esta conclusión con (14), deducimos que para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, tenemos soluciones particulares de (8) de la forma

$$a_n \rho^n P_n(\cos \phi), \quad (16)$$

donde las a_n son constantes arbitrarias. No cabe esperar que podamos satisfacer la condición de contorno (9) utilizando estas soluciones individualmente. Ahora bien, como la ecuación de Laplace es lineal y las sumas de soluciones también son soluciones, es natural reunir las soluciones particulares (16) en una serie infinita y confiar en que $T(\rho, \phi)$ se pueda expresar como

$$T(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n P_n(\cos \phi). \quad (17)$$

La condición de contorno (9) exige ahora que

$$f(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \phi),$$

o lo que es lo mismo,

$$f(\cos^{-1} x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x). \quad (18)$$

De la Sección 45 sabemos que si la función $f(\cos^{-1} x)$ tiene un comportamiento suficientemente bueno, se puede expresar en una serie de Legendre de la forma (18), donde los coeficientes a_n vienen dados por

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 f(\cos^{-1} x) P_n(x) dx. \quad (19)$$

Con esos coeficientes, (17) es la deseada solución de nuestro problema.

Hemos encontrado la solución (17) por técnicas más bien formales, y hay que advertir que hemos pasado por alto cuestiones de índole puramente matemática nada triviales. Para un físico es evidente que un cuerpo sólido, cuya temperatura en la superficie esté especificada, alcanzará un estado estacionario de temperatura en todo punto interior; pero los matemáticos son desgraciadamente conscientes de que lo evidente resulta ser falso con demasiada frecuencia¹². En el llamado problema de Dirichlet en teoría el potencial requiere una demostración rigurosa de la existencia y unicidad de una función potencial sobre una región que tome valores dados sobre su contorno. Este problema fue resuelto a comienzos del siglo XX por el gran matemático alemán Hilbert para tipos precisos, pero muy amplios, de contornos y de funciones de contorno.

El potencial electrostático dipolar. La relación generatriz

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (20)$$

para los polinomios de Legendre se discute en los Problemas 44-1, 44-2 y 44-3. Como ilustración física directa de su interés podemos calcular con ella el potencial producido por dos cargas puntuales de igual magnitud q y de signos opuestos. Si estas partículas se colocan en un sistema de coordenadas polares (Fig. 56), el potencial es, en unidades de medida adecuadas,

$$U = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}, \quad (21)$$

donde

$$r_1 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta} \quad y \quad r_2 = \sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta}$$

¹² Algunos ejemplos sencillos en que la afirmación que acabamos de hacer es falsa se ofrecen en O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, pág. 285, Springer, Nueva York, 1929. Einstein, un gran inventor de aforismos, dijo: «El más raro y valioso de todos los atributos intelectuales es la capacidad para dudar de lo evidente».

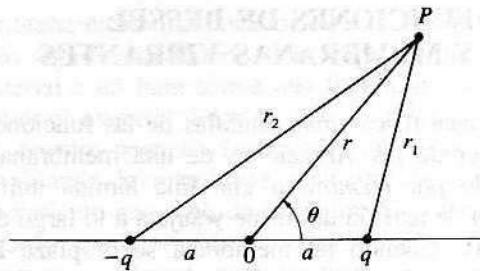


Figura 56

por la ley de los cosenos. Cuando $r > a$, (20) nos permite escribir

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cos \theta(a/r) + (a/r)^2}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n,$$

y análogamente

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cos \theta(a/r) + (a/r)^2}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n.$$

La fórmula (21) se puede escribir ahora como

$$U = \frac{q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} [P_n(\cos \theta) - P_n(-\cos \theta)] \left(\frac{a}{r}\right)^n. \quad (22)$$

Sabemos que el n -ésimo polinomio de Legendre $P_n(x)$ es par si n es par e impar si n es impar. Por tanto, la expresión entre corchetes es igual a 0 ó $2P_n(\cos \theta)$ según que n sea par o impar, y (22) se convierte en

$$\begin{aligned} U &= \frac{2q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} = \\ &= \frac{2q}{r} \left[P_1(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right) + P_3(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^3 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Si suponemos ahora que todos los términos, excepto el primero, son despreciables cuando r es grande comparado con a y recordamos que $P_1(x) = x$, (23) se reduce a

$$U = 2aq \left(\frac{\cos \theta}{r^2}\right).$$

Esta es la aproximación utilizada por los físicos para el potencial del dipolo.

APENDICE B. FUNCIONES DE BESSEL Y MEMBRANAS VIBRANTES

Una de las aplicaciones físicas más sencillas de las funciones de Bessel se da en la teoría de Euler de las vibraciones de una membrana circular. En este contexto se entiende por *membrana* una fina lámina uniforme de material flexible en un estado de tensión uniforme y sujetada a lo largo de una cierta curva cerrada del plano xy . Cuando tal membrana se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio y se suelta, las fuerzas de recuperación que la deformación produce la hacen vibrar. Nuestro problema consiste en analizar este movimiento vibratorio.

La ecuación del movimiento. Estamos ante una situación similar a la de la Sección 40 para la cuerda vibrante; es decir, haremos varias hipótesis de simplificación que nos permitan formular una ecuación en derivadas parciales, y confiamos en que esa ecuación describa el movimiento con una precisión razonable. Estas hipótesis se resumen en una sola afirmación: sólo consideramos *pequeñas* oscilaciones de una membrana *vibrante libre*. Las varias formas en que usaremos esta hipótesis aparecerán por el camino.

En primer lugar, supongamos que las vibraciones son tan pequeñas que cada punto de la membrana se mueve sólo en la dirección z , con desplazamiento dado en el instante t por una función $z = z(x, y, t)$. Consideremos un pequeño fragmento de la membrana (Fig. 57) limitado por planos verticales que pasan por los siguientes puntos del plano xy : (x, y) , $(x + \Delta x, y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ y $(x, y + \Delta y)$. Si m es la masa por unidad de área, la masa de ese fragmento será $m \Delta x \Delta y$, y por la segunda ley de Newton vemos que

$$F = m \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (1)$$

es la fuerza que actúa sobre él en la dirección z .

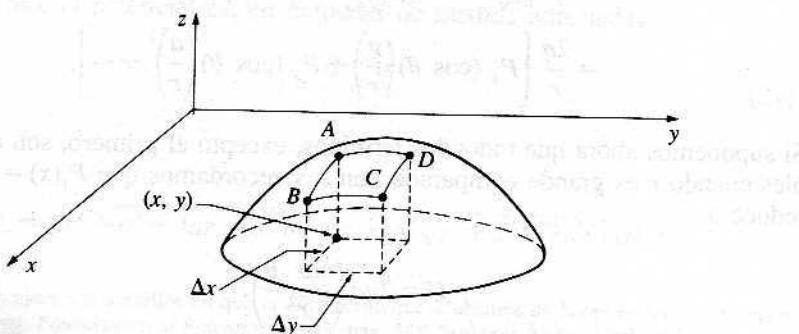


Figura 57

Cuando la membrana está en la posición de equilibrio, la tensión constante T tiene el siguiente significado físico: A lo largo de cualquier segmento de longitud Δs , el material a un lado ejerce una fuerza, normal al segmento y de magnitud $T \Delta s$, sobre el material del otro lado. En este caso las fuerzas sobre aristas opuestas de nuestro pequeño fragmento son paralelas al plano xy y se cancelan entre sí. Cuando la membrana está curvada, como en la posición instantánea del movimiento que muestra la Figura 57, suponemos que la deformación es tan pequeña que la tensión es todavía T pero ahora actúa paralelamente al plano tangente, por lo que presenta una componente vertical apreciable. Es la curvatura de nuestro trozo de membrana la que produce magnitudes diferentes para esas componentes verticales sobre aristas opuestas, y es a la vez responsable de las fuerzas de recuperación que darán lugar al movimiento.

Analizamos estas fuerzas suponiendo que el fragmento de membrana denotado $ABCD$ está sólo ligeramente curvado. Eso hace posible sustituir los senos de ciertos ángulos pequeños por sus tangentes en lo que sigue. A lo largo de las aristas DC y AB , las fuerzas son perpendiculares al eje x y casi paralelas al eje y , con pequeñas componentes z aproximadamente iguales a

$$T \Delta x \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y+\Delta y} \quad y \quad -T \Delta x \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_y,$$

de modo que su suma viene a ser

$$T \Delta x \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y+\Delta y} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_y \right].$$

Los subíndices en esas derivadas parciales indican sus valores en los puntos $(x, y + \Delta y)$ y (x, y) . Haciendo lo mismo en las aristas BC y AD , hallamos que la fuerza total en la dirección z (despreciando todas las fuerzas externas) es aproximadamente

$$F = T \Delta y \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_x \right] + T \Delta x \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y+\Delta y} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_y \right],$$

así que (1) se puede expresar en la forma

$$T \frac{(\partial z / \partial x)_{x+\Delta x} - (\partial z / \partial x)_x}{\Delta x} + T \frac{(\partial z / \partial y)_{y+\Delta y} - (\partial z / \partial y)_y}{\Delta y} = m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Si ahora denotamos $a^2 = T/m$ y hacemos $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$, eso nos lleva a

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad (2)$$

que es la *ecuación de ondas bidimensional*.

Tal vez los estudiantes se sientan algo escépticos ante los argumentos conducentes a (2). Si es así, sepan que no están solos en tal inquietud, porque la cuestión de qué cabe admitir como una deducción satisfactoria de la ecuación diferencial que describe un fenómeno físico nunca es sencilla, y en el caso de la ecuación de ondas, una discusión más detallada no nos llevaría a ninguna parte, ya que la membrana es, al fin y a la postre, atómica y no continua. Tal vez la actitud más sensata sea aceptar nuestra exposición como un argumento de plausibilidad que sugiere la ecuación de ondas como modelo matemático. Podemos adoptar esta ecuación como un axioma de la mecánica racional que describe una «membrana ideal» cuyo comportamiento matemático puede ajustarse o no al de las membranas reales¹³.

La membrana circular. Ahora nos especializamos al caso de una membrana circular, en la que es lógico usar coordenadas polares con el origen en su centro. La fórmula (6) del Apéndice A muestra que en estas circunstancias la ecuación de ondas (2) toma la forma

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad (3)$$

donde $z = z(r, \theta, t)$ es una función de las coordenadas polares y del tiempo. Por conveniencia, suponemos que la membrana tiene radio 1, de modo que en su posición de equilibrio se ajusta al círculo $r = 1$. De acuerdo con eso, nuestra condición de contorno es

$$z(1, \theta, t) = 0. \quad (4)$$

Hemos de hallar una solución de (3) que satisfaga esa condición de contorno y ciertas condiciones iniciales que concretaremos más adelante.

Al aplicar el método de separación de variables, empezamos por buscar soluciones particulares de la forma

$$z(r, \theta, t) = u(r)v(\theta)w(t). \quad (5)$$

Introduciendo (5) en (3) y reordenando se llega a

$$\frac{u''(r)}{u(r)} + \frac{1}{r} \frac{u'(r)}{u(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{v''(\theta)}{v(\theta)} = \frac{1}{a^2} \frac{w''(t)}{w(t)}. \quad (6)$$

Como el miembro de la izquierda en (6) es sólo función de r y θ , mientras que el de la derecha sólo depende de t , ambos deben ser constantes. Para que la

¹³ Acerca de la cuestión «¿qué es la mecánica racional?», recomendamos los esclarecedores comentarios de C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*, págs. 334-340, Springer, Nueva York, 1968.

membrana vibrante, $w(t)$ ha de ser periódica; y el lado derecho de (6) muestra que para garantizar tal cosa la constante de separación tiene que ser negativa. En consecuencia, igualamos cada lado de (6) a $-\lambda^2$ con $\lambda > 0$, y obtenemos con ello las dos ecuaciones

$$w''(t) + \lambda^2 a^2 w(t) = 0 \quad (7)$$

y

$$\frac{u''(r)}{u(r)} + \frac{1}{r} \frac{u'(r)}{u(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{v''(\theta)}{v(\theta)} = -\lambda^2. \quad (8)$$

Es claro que (7) tiene

$$w(t) = c_1 \cos \lambda at + c_2 \sin \lambda at \quad (9)$$

como solución general, y (8) se puede escribir

$$r^2 \frac{u''(r)}{u(r)} + r \frac{u'(r)}{u(r)} + \lambda^2 r^2 = -\frac{v''(\theta)}{v(\theta)}. \quad (10)$$

En (10) tenemos una función de r a la izquierda y una función de θ a la derecha, luego de nuevo ambas han de ser iguales a una constante. Recordemos ahora que el ángulo polar θ de un punto en el plano viene determinado módulo un múltiplo entero de 2π y que, por la naturaleza del problema, el valor de v en cualquier punto ha de ser independiente del valor de θ usado para describir dicho punto. Eso exige que v sea una constante o no constante y periódica, con período 2π . A la vista del lado derecho en (10) es claro que esas posibilidades quedan cubiertas escribiendo la constante de separación en la forma n^2 donde $n = 0, 1, 2, \dots$, y entonces (10) se desdobra en

$$v''(\theta) + n^2 v(\theta) = 0 \quad (11)$$

y

$$r^2 u''(r) + r u'(r) + (\lambda^2 r^2 - n^2) u(r) = 0. \quad (12)$$

Recordando que v es constante o periódica con período 2π , vemos que (11) implica

$$v(\theta) = d_1 \cos n\theta + d_2 \sin n\theta \quad (13)$$

para cada n , aunque (13) no es la solución general de (11) cuando $n = 0$. A continuación, es evidente del Problema 46-7 que (12) no es sino una forma algo enmascarada de la ecuación de Bessel de orden n , con una solución acotada $J_n(\lambda r)$ y una solución independiente no acotada $Y_n(\lambda r)$. Puesto que $u(r)$

es necesariamente acotada cerca de $r = 0$, descartamos la segunda solución y escribimos

$$u(r) = kJ_n(\lambda r). \quad (14)$$

La condición de contorno (4) se puede satisfacer ahora exigiendo que $u(1) = 0$, es decir,

$$J_n(\lambda) = 0. \quad (15)$$

Así pues, los valores admisibles de λ son los ceros positivos de la función $J_n(x)$, y vimos en la Sección 47 que $J_n(x)$ tiene una infinidad de tales ceros. Concluimos, por tanto, que las soluciones particulares (5) que este análisis proporciona son múltiplos constantes del listado doblemente infinito de funciones

$$J_n(\lambda r)(d_1 \cos n\theta + d_2 \operatorname{sen} n\theta)(c_1 \cos \lambda at + c_2 \operatorname{sen} \lambda at), \quad (16)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$, y para cada n los λ correspondientes son las raíces positivas de (15).

Condiciones iniciales especiales. Lo anterior pretendía mostrar cómo aparecen las funciones de Bessel de todo orden en la física. Enseña además el significado físico de los ceros positivos de esas funciones. Por motivos de simplicidad nos limitamos en lo que sigue a un caso especial: la membrana está desplazada a una forma $z = f(r)$, independiente de la variable θ , y entonces se suelta partiendo del reposo en el instante $t = 0$. Eso quiere decir que imponemos las condiciones iniciales

$$z(r, \theta, 0) = f(r) \quad (17)$$

y

$$\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (18)$$

El problema es determinar la forma $z(r, \theta, t)$ en cualquier instante posterior $t > 0$.

La estrategia consiste en adaptar las soluciones particulares ya conocidas a las condiciones iniciales dadas. Para empezar, la parte de (17) que dice que la forma inicial es independiente de θ implica que $v(\theta)$ es constante, así que (13) obliga a que $n = 0$. Si los ceros positivos de $J_0(x)$ se denotan por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, esa observación reduce el listado de funciones (16) a

$$J_0(\lambda_n r)(c_1 \cos \lambda_n at + c_2 \operatorname{sen} \lambda_n at), \quad n = 1, 2, \dots$$

A continuación, (18) implica que $c_2 = 0$, y eso nos deja con los múltiplos constantes de las funciones

$$J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n at, \quad n = 1, 2, \dots$$

Hasta este momento no hemos usado el hecho de que las sumas de soluciones de (13) son también soluciones. Según esto, las soluciones formales más generales disponibles son las series infinitas

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n at. \quad (19)$$

Como último eslabón intentemos satisfacer (17) poniendo $t = 0$ en (19) e igualando el resultado a $f(r)$:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r).$$

El teorema del desarrollo de Bessel en la Sección 47 garantiza que esta representación es válida siempre que $f(r)$ se comporte suficientemente bien, si los coeficientes se definen por

$$a_n = \frac{2}{J_1(\lambda_n)^2} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r) dr.$$

Con estos coeficientes, (19) es una solución formal de (3) que cumple las condiciones de contorno e iniciales dadas. Esto concluye nuestra discusión¹⁴.

APENDICE C. PROPIEDADES ADICIONALES DE LAS FUNCIONES DE BESSSEL

En las Secciones 46 y 47 no dimos cabida a varias propiedades notables de las funciones de Bessel que no deben ser relegadas al olvido, así que las presentaremos ahora. Desgraciadamente, una justificación completa exigiría varios teoremas de cálculo avanzado, lo cual no resta interés al conocimiento de los resultados.

La función generatriz. Las funciones de Bessel $J_n(x)$ de orden entero están ligadas entre sí por

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)[t^n + (-1)^n t^{-n}]. \quad (1)$$

¹⁴ Abundantes aplicaciones adicionales de las funciones de Bessel pueden verse en Lebedev, *op. cit.*, cap. 6. Véase también A. Gray y G. B. Mathews, *A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics*, Macmillan, Nueva York, 1952.

Como $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, eso se suele escribir en la forma

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n. \quad (2)$$

Para demostrar (1) multiplicamos formalmente las dos series

$$e^{xt/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{x^j}{2^j} t^j \quad \text{y} \quad e^{-xt^{-1/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^k}{2^k} t^{-k}. \quad (3)$$

El resultado es lo que se llama una serie doble, cuyos términos son todos los posibles productos de un término de la primera serie por uno de la segunda. El hecho de que cada una de las series implicadas sea absolutamente convergente, permite concluir que esa serie doble converge a la suma apropiada con independencia del orden de sus términos. Para cada entero fijado $n \geq 0$, obtenemos un término de la serie doble que contiene la potencia t^n justamente cuando $j = n + k$; y teniendo en cuenta todos los posibles valores de k , el coeficiente total de t^n es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \frac{x^{n+k}}{2^{n+k}} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!} = J_n(x).$$

Análogamente, un término con t^{-n} ($n \geq 1$) aparece precisamente cuando $k = n + j$, de manera que el coeficiente total de t^{-n} es

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{x^j}{2^j} \frac{(-1)^{n+j}}{(n+j)!} \frac{x^{n+j}}{2^{n+j}} = (-1)^n \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(x/2)^{2j+n}}{j!(n+j)!} = (-1)^n J_n(x),$$

y la demostración de (1) está terminada.

Una consecuencia simple de (2) es la *fórmula de suma*

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(x) J_k(y). \quad (4)$$

Para probarla, notemos en primer lugar que

$$e^{(x/2)(t-1/t)} e^{(y/2)(t-1/t)} = e^{[(x+y)/2](t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y) t^n.$$

Ahora bien, el producto de las dos exponentiales de la izquierda es también

$$\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} J_j(x) t^j \right] \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(y) t^k \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} J_{n-j}(x) J_j(y) \right] t^n,$$

y (4) se deduce inmediatamente al igualar los coeficientes de t^n en esas expresiones. Cuando $n = 0$, (4) se escribe

$$\begin{aligned} J_0(x+y) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{-k}(x)J_k(y) = \\ &= J_0(x)J_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} J_{-k}(x)J_k(y) + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(x)J_{-k}(y) = \\ &= J_0(x)J_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [J_k(x)J_k(y) + J_k(x)J_k(y)] = \\ &= J_0(x)J_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2J_k(x)J_k(y), \end{aligned}$$

o sea,

$$J_0(x+y) = J_0(x)J_0(y) - 2J_1(x)J_1(y) + 2J_2(x)J_2(y) - \dots \quad (5)$$

Si sustituimos y por $-x$ y usamos el hecho de que $J_n(x)$ es par o impar según lo sea n , la (5) produce una identidad notable:

$$1 = J_0(x)^2 + 2J_1(x)^2 + 2J_2(x)^2 + \dots, \quad (6)$$

de la que se deduce que $|J_0(x)| \leq 1$ y $|J_n(x)| \leq 1/\sqrt{2}$ para $n = 1, 2, \dots$

Fórmula integral de Bessel. Cuando $t = e^{i\theta}$, el exponente del miembro de la izquierda en (2) pasa a ser

$$x \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = ix \operatorname{sen} \theta,$$

y (2) se convierte en

$$e^{ix \operatorname{sen} \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta}. \quad (7)$$

Como $e^{ix \operatorname{sen} \theta} = \cos(x \operatorname{sen} \theta) + i \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta)$ y $e^{in\theta} = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$, igualando las partes real e imaginaria en (7) vemos que

$$\cos(x \operatorname{sen} \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos n\theta \quad (8)$$

y

$$\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \operatorname{sen} n\theta. \quad (9)$$

Si ahora utilizamos las relaciones $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, $\cos(-n\theta) = \cos n\theta$, y $\operatorname{sen}(-n\theta) = -\operatorname{sen} n\theta$, entonces (8) y (9) se convierten en

$$\cos(x \operatorname{sen} \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2n\theta \quad (10)$$

y

$$\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \operatorname{sen}(2n-1)\theta. \quad (11)$$

Nótese, como caso particular de (10), que $\theta = 0$ proporciona la interesante serie

$$1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \dots.$$

Además, poniendo $\theta = \pi/2$ en (10) y (11) obtenemos las fórmulas

$$\cos x = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \dots$$

y

$$\operatorname{sen} x = 2J_1(x) - 2J_3(x) + 2J_5(x) - \dots,$$

que corroboran los estrechos lazos existentes entre las funciones de Bessel y las funciones trigonométricas.

La aplicación más importante de (8) y (9) es la demostración de la *fórmula integral de Bessel*

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta. \quad (12)$$

En efecto, si multiplicamos (8) por $\cos m\theta$, (9) por $\operatorname{sen} m\theta$ y sumamos:

$$\cos(m\theta - x \operatorname{sen} \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos(m-n)\theta.$$

Integrando ambos lados de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$, el de la derecha se reduce a $\pi J_m(x)$, y sustituyendo m por n se llega a la fórmula (12). En sus trabajos sobre

astronomía, Bessel encontró las funciones $J_n(x)$ en esta versión integral y partiendo de ella obtuvo muchas de sus propiedades¹⁵.

Algunas fracciones continuas. Si escribimos la identidad 47-(7) como

$$J_{p-1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x),$$

dividiéndola por $J_p(x)$ se obtiene

$$\frac{J_{p-1}(x)}{J_p(x)} = \frac{2p}{x} - \frac{1}{J_p(x)/J_{p+1}(x)}.$$

Al aplicar esta fórmula al segundo denominador de su derecha, con p reemplazado por $p + 1$, y continuar el proceso indefinidamente se llega a

$$\frac{J_{p-1}(x)}{J_p(x)} = \frac{2p}{x} - \frac{1}{\frac{2p+2}{x} - \frac{1}{\frac{2p+4}{x} - \dots}}.$$

Se trata de un desarrollo en fracción continua infinita del cociente $J_{p-1}(x)/J_p(x)$. No vamos a investigar la teoría de tales desarrollos aquí. Sin embargo, puede ser interesante llamar la atención sobre el hecho de que cuando $p = 1/2$ se sigue del Problema 46-5 que $J_{-1/2}(x)/J_{1/2}(x) = \cot x$, así que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \cfrac{1}{\cfrac{1}{x - \cfrac{1}{\cfrac{1}{x - \cfrac{5}{x - \dots}}}}} \\ &= \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{\cfrac{1}{x - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x - \dots}}}}} \end{aligned}$$

Esta fracción continua fue descubierta en 1761 por Lambert, quien la utilizó para demostrar que π no es racional. Razonó así: Si x es un número racional no nulo, la forma de esta fracción continua implica que $\operatorname{tg} x$ no puede ser racional; pero $\operatorname{tg} \pi/4 = 1$, de modo que ni $\pi/4$ ni π son racionales. Algunas pequeñas lagunas en el argumento de Lambert fueron cubiertas por Legendre unos 30 años más tarde.

¹⁵ Para una descripción del problema original de Bessel, véase Gray y Mathews, *op. cit.*, páginas 4-7.

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

48. INTRODUCCION

Recientemente ha crecido de forma considerable el interés en el uso de transformadas de Laplace como método eficiente en la resolución de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales e integrales. Aparte de tales aplicaciones, las transformadas de Laplace tienen también conexiones con parcelas importantes de la matemática pura. Intentaremos ofrecer al lector una panorámica adecuada de estas cuestiones sin preocuparnos demasiado de los aspectos analíticos delicados ni de algunas técnicas computacionales que serían apropiadas en un tratamiento más extenso.

Antes de entrar en detalles, hagamos unos cuantos comentarios con el fin de situar las ideas de este capítulo en su propio contexto. Comencemos haciendo notar que la operación de derivación transforma una función $f(x)$ en otra función, su derivada $f'(x)$. Si utilizamos la letra D para denotar derivación, esa transformación se puede escribir

$$D[f(x)] = f'(x). \quad (1)$$

Otra importante transformación de funciones es la integración:

$$I[f(x)] = \int_0^x f(t) dt. \quad (2)$$

Una transformación más simple es la multiplicación de toda función por una función específica $g(x)$:

$$M_g[f(x)] = g(x)f(x). \quad (3)$$

El rasgo básico que estos ejemplos comparten entre sí es que cada una de esas transformaciones *opera sobre funciones y produce otras funciones*. Es claro que en la mayoría de los casos han de imponerse restricciones a las funciones $f(x)$ a las que la transformación es aplicable. Así, en (1) $f(x)$ ha de ser derivable, y en (2) integrable. En cada uno de nuestros ejemplos, la función de la derecha se llama la *transformada* de $f(x)$ bajo la transformación correspondiente.

Una transformación general T de funciones se dice que es *lineal* si se verifica

$$T[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha T[f(x)] + \beta T[g(x)] \quad (4)$$

para todas las funciones admisibles $f(x)$ y $g(x)$ y para todo par de constantes α y β . En palabras, la ecuación (4) dice que la transformada de cualquier combinación lineal de dos funciones es igual a la combinación lineal de las transformadas. Conviene llamar la atención sobre el hecho de que (4) se reduce a

$$T[f(x) + g(x)] = T[f(x)] + T[g(x)]$$

y

$$T[\alpha f(x)] = \alpha T[f(x)]$$

cuando $\alpha = \beta = 1$ y cuando $\beta = 0$. Es fácil ver que las transformaciones definidas por (1), (2) y (3) son lineales.

Una clase de transformaciones lineales de especial relevancia es la de las transformaciones integrales. Para comprender en qué consisten, consideremos funciones $f(x)$ definidas en cierto intervalo finito o infinito $a \leq x \leq b$ y tenemos una función fija $K(p, x)$ de la variable x y del parámetro p . Entonces la transformación integral general viene dada por

$$T[f(x)] = \int_a^b K(p, x)f(x) dx = F(p). \quad (5)$$

La función $K(p, x)$ se llama el *núcleo* de la transformación T , y evidentemente T es lineal con independencia de la naturaleza de K . El concepto de transformación integral lineal, en forma generalizada, ha sido fuente de algunas de las más fructíferas ideas del análisis moderno. Asimismo, en el análisis clásico se estudiaron varios casos concretos de (5) que condujeron a transformaciones específicas útiles en ciertos tipos de problemas.

Cuando $a = 0$, $b = \infty$ y $K(p, x) = e^{-px}$, obtenemos el caso especial de (5) que nos concierne, conocido como *transformación de Laplace L*, definido por

$$L[f(x)] = \int_0^\infty e^{-px}f(x) dx = F(p). \quad (6)$$

Así pues, la transformación de Laplace L actúa sobre cualquier función $f(x)$ para la que esa integral existe, y produce su transformada de Laplace $L[f(x)] = F(p)$, una función del parámetro p ¹. Recordamos al lector que la integral impropia en (6) está definida como el límite

$$\int_0^\infty e^{-px}f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-px}f(x) dx. \quad (7)$$

y existe sólo cuando tal límite existe, en cuyo caso se dice que la integral impropia de la izquierda es *convergente*.

Las siguientes transformadas de Laplace son muy fáciles de calcular:

$$f(x) = 1, \quad F(p) = \int_0^\infty e^{-px} dx = \frac{1}{p}; \quad (8)$$

$$f(x) = x, \quad F(p) = \int_0^\infty e^{-px}x dx = \frac{1}{p^2}; \quad (9)$$

$$f(x) = x^n, \quad F(p) = \int_0^\infty e^{-px}x^n dx = \frac{n!}{p^{n+1}}; \quad (10)$$

$$f(x) = e^{ax}, \quad F(p) = \int_0^\infty e^{-px}e^{ax} dx = \frac{1}{p-a}; \quad (11)$$

$$f(x) = \operatorname{sen} ax, \quad F(p) = \int_0^\infty e^{-px} \operatorname{sen} ax dx = \frac{a}{p^2 + a^2}; \quad (12)$$

$$f(x) = \cos ax, \quad F(p) = \int_0^\infty e^{-px} \cos ax dx = \frac{p}{p^2 + a^2}. \quad (13)$$

La integral en (11) converge para $p > a$, y todas las demás para $p > 0$. El estudiante debe realizar los cálculos necesarios por sí mismo, de modo que la razón de estas restricciones sobre p le quede absolutamente clara (véase Problema 1). Como ilustración damos los detalles para (10), en la que n se supone que es un entero positivo:

$$L[x^n] = \int_0^\infty e^{-px}x^n dx = -\left. \frac{x^n e^{-px}}{p}\right|_0^\infty + \frac{n}{p} \int_0^\infty e^{-px}x^{n-1} dx =$$

¹ Como esta observación sugiere, usaremos letras minúsculas para denotar funciones de x y mayúsculas para las transformadas de esas funciones.

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{p} L[x^{n-1}] = \frac{n}{p} \left(\frac{n-1}{p} \right) L[x^{n-2}] = \\ &= \dots = \frac{n!}{p^n} L[1] = \frac{n!}{p^{n+1}}. \end{aligned}$$

Nótese que hemos hecho uso esencial aquí de que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{px}} = 0 \quad \text{para } p > 0.$$

Las anteriores fórmulas se recogen en la Tabla 1 de la Sección 50. Otras transformadas sencillas pueden calcularse sin necesidad de integración, aprovechando la linealidad de L , como en

$$L[2x + 3] = 2L[x] + 3L[1] = \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p}.$$

En secciones posteriores desarrollaremos métodos para hallar transformadas de Laplace de funciones más complicadas.

Tal como hemos dicho antes, la transformación de Laplace L se puede considerar como el caso especial de la transformación integral general (5) correspondiente a tomar $a = 0$, $b = \infty$ y $K(p, x) = e^{-px}$. ¿Por qué tomamos esos límites y ese núcleo particulares? Con el fin de comprender las razones de esa elección, es conveniente considerar una sugerente analogía con las series de potencias.

Si escribimos una serie de potencias en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n,$$

su análogo natural es la integral impropia

$$\int_0^{\infty} a(t)x^t dt.$$

Ahora cambiamos la notación ligeramente poniendo $x = e^{-p}$, con lo que esa integral queda

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}a(t) dt,$$

que es precisamente la transformada de Laplace de la función $a(t)$. Las trans-

formadas de Laplace son por tanto análogas a las series de potencias, y como las series de potencias son importantes en análisis, cabe esperar razonablemente que las transformadas de Laplace lo sean también.

Una breve reseña sobre Laplace puede verse en el Apéndice A.

PROBLEMAS

1. Calcular las integrales en (8), (9), (11), (12) y (13).
2. Probar, sin integrar, que
 - (a) $L[\sinh ax] = \frac{a}{p^2 - a^2}$, $p > |a|$;
 - (b) $L[\cosh ax] = \frac{p}{p^2 - a^2}$, $p > |a|$.
3. Hallar $L[\sin^2 ax]$ y $L[\cos^2 ax]$ sin integrar. ¿Cómo están relacionadas entre sí estas dos transformadas?
4. Usar las fórmulas del texto para hallar la transformada de cada una de estas funciones:

(a) 10; (b) $x^5 + \cos 2x$; (c) $2e^{3x} - \sin 5x$;	(d) $4 \sin x \cos x + 2e^{-x}$; (e) $x^6 \sin^2 3x + x^6 \cos^2 3x$.
---	--
5. Hallar una función $f(x)$ cuya transformada de Laplace sea

(a) $\frac{30}{p^4}$; (b) $\frac{2}{p+3}$; (c) $\frac{4}{p^3} + \frac{6}{p^2+4}$;	(d) $\frac{1}{p^2+p}$; (e) $\frac{1}{p^4+p^2}$.
--	--
6. Dar una definición razonable de $\frac{1}{2}!$.

49. ALGUNOS COMENTARIOS TEORICOS

Antes de presentar las aplicaciones es deseable considerar con más cuidado las circunstancias bajo las cuales una función admite transformada de Laplace. Un tratamiento detallado y riguroso exigiría familiaridad con las integrales impropias, cosa que no damos por cierta. Ahora bien, es costumbre dar una breve introducción a este tema en cálculo elemental, y bastará conocer los siguientes hechos elementales.

En primer lugar, la integral

$$\int_0^\infty f(x) dx \quad (1)$$

se dice que es *convergente* si existe el límite

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$$

en cuyo caso el valor de (1) es, por definición, el valor de ese límite:

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx.$$

Además, (1) converge siempre que la integral

$$\int_0^\infty |f(x)| dx$$

sea convergente, y en tal caso diremos que (1) es *absolutamente convergente*. Finalmente, (1) converge absolutamente y por tanto es convergente si existe una función $g(x)$ tal que $|f(x)| \leq g(x)$ e

$$\int_0^\infty g(x) dx$$

converge (esto se conoce como *criterio de comparación*).

De acuerdo con todo eso, si $f(x)$ es una función dada, definida para $x \geq 0$, la convergencia de (1) exige antes que nada que la integral $\int_0^\infty f(x) dx$ exista para todo $b > 0$ finito. Para garantizar esto basta suponer que $f(x)$ es continua o, cuando menos, *continua a trozos*. Por esto último entendemos que $f(x)$ es continua sobre todo intervalo finito $0 < x < b$, excepto posiblemente en un número finito de puntos donde hay discontinuidades con salto, en los que la función tiene límites laterales distintos. La Figura 58 ilustra el aspecto de una función continua a trozos típica; su integral de 0 a b es la suma de las integrales de sus partes continuas sobre los correspondientes subintervalos. Esta clase de funciones contiene virtualmente cuantas aparecen normalmente en la práctica. En particular, contiene las funciones escalón y las funciones dentadas que describen la súbita aparición o desaparición de fuerzas y voltajes en problemas de física e ingeniería.

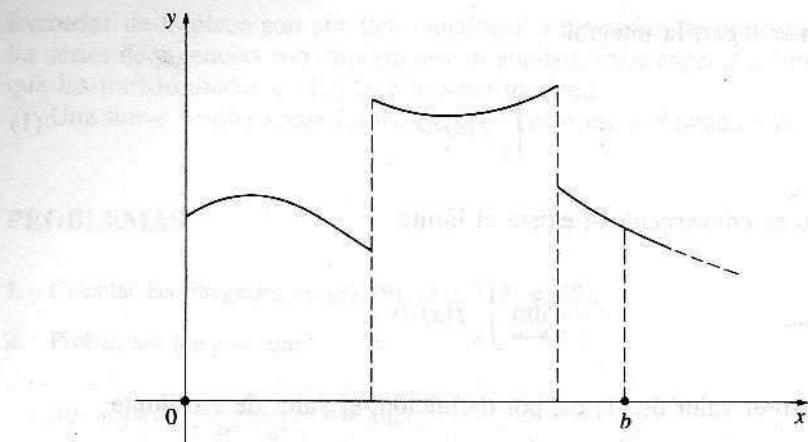


Figura 58

Si $f(x)$ es continua a trozos para $x \geq 0$, la única obstrucción a la existencia de su transformada de Laplace

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx$$

puede provenir del comportamiento del integrando $e^{-px}f(x)$ para grandes x . Con el fin de asegurar que ese integrando decrece suficientemente rápido para que se produzca la convergencia, o sea, que $f(x)$ no crece demasiado de prisa, supondremos además que $f(x)$ es de *orden exponencial*. Eso significa que existen constantes M y c tales que

$$|f(x)| \leq M e^{cx}. \quad (2)$$

Así pues, aunque $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente grande cuando $x \rightarrow \infty$, debe crecer menos rápidamente que un múltiplo de alguna función exponencial e^{cx} . Es evidente que toda función acotada es de orden exponencial con $c = 0$. Como ejemplos adicionales citemos e^{ax} (con $c = a$) y x^n (con c igual a cualquier número positivo). Por otra parte, e^{x^2} no es de orden exponencial. Si $f(x)$ cumple (2), se tiene

$$|e^{-px}f(x)| \leq M e^{-(p-c)x},$$

y puesto que la integral de la función de la derecha converge para $p > c$, la

transformada de Laplace de $f(x)$ converge absolutamente para $p > c$. Nótese además que

$$\begin{aligned}|F(p)| &= \left| \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx \right| \leq \int_0^\infty |e^{-px} f(x)| dx \leq \\&\leq M \int_0^\infty e^{-(p-c)x} dx = \frac{M}{p-c}, \quad p > c,\end{aligned}$$

luego

$$F(p) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } p \rightarrow \infty. \quad (3)$$

De hecho, puede demostrarse que (3) es válida siempre que existe $F(p)$, independientemente de que $f(x)$ sea o no continua a trozos o de orden exponencial. Por tanto, una función de p con la propiedad de que su límite cuando $p \rightarrow \infty$ o no existe o no es igual a cero, no puede ser la transformada de Laplace de *ninguna* $f(x)$. En particular, los polinomios en p , $\sin p$, $\cos p$, e^p y $\log p$ no son transformadas de Laplace. Por otro lado, una función racional es transformada de Laplace si el grado del numerador es menor que el del denominador.

Las observaciones precedentes muestran que toda función continua a trozos de orden exponencial admite transformada de Laplace, de modo que esas condiciones son suficientes para garantizar la existencia de $L[f(x)]$. Sin embargo, no son necesarias, como pone de manifiesto el ejemplo $f(x) = x^{-1/2}$. Esta función tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, luego no es continua a trozos, pese a lo cual su integral entre 0 y b existe; y como es acotada para grandes x , su transformada de Laplace existe. En efecto, para $p > 0$ tenemos

$$L[x^{-1/2}] = \int_0^\infty e^{-px} x^{-1/2} dx,$$

y el cambio de variable $px = t$ da

$$L[x^{-1/2}] = p^{-1/2} \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt.$$

Otro cambio de variable, $t = s^2$, nos conduce a

$$L[x^{-1/2}] = 2p^{-1/2} \int_0^\infty e^{-s^2} ds. \quad (4)$$

En la mayoría de los cursos de cálculo elemental se ve que esa última integral tiene valor $\sqrt{\pi}/2$ (véase Problema 1), de manera que

$$L[x^{-1/2}] = \sqrt{\frac{\pi}{p}}. \quad (5)$$

Este resultado será de utilidad en una sección posterior.

En el resto de este capítulo nos concentraremos en los usos de la transformación de Laplace, sin pretender analizar la teoría puramente matemática escondida tras nuestros procedimientos. Estos procedimientos, en buena ley, necesitan justificación, y los lectores impacientes con el formalismo podrán satisfacer su curiosidad en tratados más extensos de este tema.

PROBLEMAS

1. Si I denota la integral en (4), entonces podemos escribir (siendo s una variable muda)

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Calcular esa integral doble cambiando a coordenadas polares, demostrando con ello que $I = \sqrt{\pi}/2$.

2. En cada uno de los casos que se indican, dibujar la función y hallar su transformada de Laplace:

(a) $f(x) = u(x - a)$, donde a es un número positivo y $u(x)$ la *función paso* (o *función escalón*) definida por

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0; \end{cases}$$

(b) $f(x) = [x]$, donde $[x]$ denota el mayor entero $\leq x$;

(c) $f(x) = x - [x]$;

(d) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{si } x > \pi. \end{cases}$

3. Probar explícitamente que $L[e^{x^2}]$ no existe. Ayuda: $x^2 - px = (x - p/2)^2 - p^2/4$.

4. Idem con $L[x^{-1}]$.

5. Sea ε un número positivo y consideremos la función $f_\varepsilon(x)$ definida por

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{si } 0 \leq x \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases}$$

Su gráfico se muestra en la Figura 59. Es claro que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $\int_0^\infty f_\varepsilon(x) dx = 1$. Probar que

$$L[f_\varepsilon(x)] = \frac{1 - e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}$$

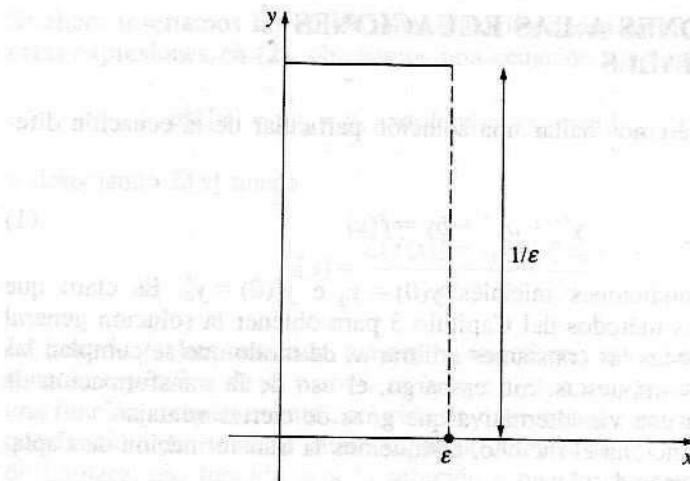


Figura 59

y

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} L[f_\epsilon(x)] = 1.$$

Estrictamente hablando, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x)$ no existe como función, de modo que $L[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x)]$ no está definido; pero si olvidamos las exquisiteces, podemos decir que

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x)$$

es una especie de «función generalizada» que es infinita en $x = 0$ y nula en $x > 0$, y tiene las propiedades

$$\int_0^\infty \delta(x) dx = 1 \quad \text{y} \quad L[\delta(x)] = 1.$$

La función generalizada $d(x)$ se llama *función delta de Dirac o función impulso unidad*².

² P. A. M. Dirac (1902-1984) fue un físico teórico inglés que obtuvo el Premio Nobel a los 31 años por sus trabajos en teoría cuántica. Hay varias formas de dar sentido riguroso a esta función delta. Véase, por ejemplo, I. Halperin, *Introduction to the Theory of Distributions*, University of Toronto Press, Toronto, 1952; o A. Erdélyi, *Operational Calculus and Generalized Functions*, Holt, Nueva York, 1962. La propia discusión de Dirac sobre esa función es interesante y fácil de leer; véanse las páginas 58-61 de su libro *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 4.^a ed., 1958.

50. APLICACIONES A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Supongamos que queremos hallar una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (1)$$

que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y'_0$. Es claro que podríamos aplicar los métodos del Capítulo 3 para obtener la solución general y particularizar entonces las constantes arbitrarias de modo que se cumplan las condiciones iniciales impuestas. Sin embargo, el uso de la transformación de Laplace proporciona una vía alternativa que goza de ciertas ventajas.

Para ver cómo funciona el método, apliquemos la transformación de Laplace L a ambos miembros de (1):

$$L[y'' + ay' + by] = L[f(x)].$$

Por la linealidad de L , eso es

$$L[y''] + aL[y'] + bL[y] = L[f(x)]. \quad (2)$$

Nuestro próximo paso es expresar $L[y']$ y $L[y'']$ en términos de $L[y]$. En primer lugar, integrando por partes se llega a

$$\begin{aligned} L[y'] &= \int_0^\infty e^{-px} y' dx = \\ &= ye^{-px} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-px} y dx = \\ &= -y(0) + pL[y], \end{aligned}$$

luego

$$L[y'] = pL[y] - y(0). \quad (3)$$

A continuación,

$$L[y''] = L[(y')'] = pL[y'] + y'(0),$$

de modo que

$$L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0). \quad (4)$$

Si ahora insertamos las condiciones iniciales dadas en (3) y (4) y sustituimos estas expresiones en (2), obtenemos una ecuación algebraica para $L[y]$,

$$p^2L[y] - py_0 - y'_0 + apL[y] - ay_0 + bL[y] = L[f(x)];$$

y despejando $L[y]$ queda

$$L[y] = \frac{L[f(x)] + (p+a)y_0 + y'_0}{p^2 + ap + b}. \quad (5)$$

La función $f(x)$ es conocida, así que su transformada de Laplace $L[f(x)]$ es una función específica de p ; y como a , b , y_0 e y'_0 son constantes conocidas, $L[y]$ es una función completamente conocida de p . Si somos capaces ahora de encontrar qué función $y(x)$ tiene al miembro de la derecha de (5) como su transformada de Laplace, esa función será la solución a nuestro problema, condiciones iniciales incluidas. Este procedimiento es particularmente adecuado para resolver ecuaciones de la forma (1) en las que la función $f(x)$ es discontinua, ya que en ese caso los métodos del Capítulo 3 pueden ser difíciles de aplicar.

Existe una laguna en nuestra discusión: para que (2) tenga sentido, las funciones $f(x)$, y , y' e y'' han de tener transformadas de Laplace. La dificultad queda superada en cuanto supongamos que $f(x)$ es continua a trozos y de orden exponencial. Bajo tal hipótesis, se demuestra (omitimos la demostración) que y , y' e y'' tienen necesariamente las mismas propiedades y, en consecuencia, admiten transformadas de Laplace. Otra dificultad es que al obtener (3) y (4) hemos dado por sentado que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ye^{-px} = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y'e^{-px} = 0.$$

No obstante, como y e y' son automáticamente de orden exponencial, esas proposiciones son válidas para grandes valores de p .

Ejemplo 1. Hallar la solución de

$$y'' + 4y = 4x \quad (6)$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 5$.

Aplicando L a ambos miembros de (6) se obtiene

$$L[y''] + 4L[y] = 4L[x]. \quad (7)$$

Recordando ahora que $L[x] = 1/p^2$ y usando (4) junto con las condiciones iniciales, (7) se convierte en

$$p^2L[y] - p - 5 + 4L[y] = \frac{4}{p^2},$$

o sea,

$$(p^2 + 4)L[y] = p + 5 + \frac{4}{p^2},$$

por lo que

$$\begin{aligned} L[y] &= \frac{p}{p^2 + 4} + \frac{5}{p^2 + 4} + \frac{4}{p^2(p^2 + 4)} = \\ &= \frac{p}{p^2 + 4} + \frac{5}{p^2 + 4} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 4} = \\ &= \frac{p}{p^2 + 4} + \frac{4}{p^2 + 4} + \frac{1}{p^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Consultando las transformadas de la Sección 48 resulta

$$\begin{aligned} L[y] &= L[\cos 2x] + L[2 \operatorname{sen} 2x] + L[x] = \\ &= L[\cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x + x], \end{aligned}$$

y por tanto

$$y = \cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x + x$$

es la solución buscada. Es fácil comprobar el resultado, ya que por inspección se ve que la solución general de (6) es

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + x,$$

y las condiciones iniciales implican que $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$.

La validez de este procedimiento reposa sobre la hipótesis de que la función $y(x)$, que tiene por transformada de Laplace el miembro de la derecha de (8), es única. Esto es cierto si nos restringimos a $y(x)$ continuas (y cualquier solución de una ecuación diferencial es necesariamente continua). Si se supone $f(x)$ continua, la ecuación $L[f(x)] = F(p)$ se suele escribir en la forma

$$L^{-1}[F(p)] = f(x).$$

Es costumbre llamar a L^{-1} la *transformación inversa de Laplace* y decir que $f(x)$ es la *transformada inversa de Laplace* de $F(p)$. Como L es lineal, también L^{-1} lo es, obviamente. En el Ejemplo 1 hemos usado las siguientes transformadas inversas de Laplace:

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2 + 4}\right] = \cos 2x, \quad L^{-1}\left[\frac{2}{p^2 + 4}\right] = 2 \operatorname{sen} 2x, \quad L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] = x.$$

Este ejemplo ilustra también el valor de la descomposición en fracciones simples como método de cálculo de transformadas inversas de Laplace.

La Tabla 1 contiene una breve lista de pares de transformadas útiles. Existen tablas mucho más extensas a disposición de quien vaya a aplicar con frecuencia esta técnica.

Vamos a considerar unas cuantas propiedades generales de la transformación de Laplace que amplían enormemente la flexibilidad de la Tabla 1. La primera es la *fórmula de desplazamiento*:

$$L[e^{ax}f(x)] = F(p - a). \quad (9)$$

Para demostrarla basta darse cuenta de que

$$\begin{aligned} L[e^{ax}f(x)] &= \int_0^\infty e^{-px}e^{ax}f(x)dx = \\ &= \int_0^\infty e^{-(p-a)x}f(x)dx = \\ &= F(p - a). \end{aligned}$$

La fórmula (9) se puede utilizar para calcular transformadas de productos de la forma $e^{ax}f(x)$ cuando se conoce $F(p)$, así como transformadas inversas de funciones del tipo $F(p - a)$ cuando $f(x)$ es conocida.

Tabla 1. Pares de transformadas elementales

$f(x)$	$F(p) = L[f(x)]$
1	$\frac{1}{p}$
x	$\frac{1}{p^2}$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{ax}	$\frac{1}{p - a}$
$\operatorname{sen} ax$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
$\cos ax$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$
$\operatorname{sh} ax$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
$\operatorname{ch} ax$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$

Ejemplo 2.

$$L[\sin bx] = \frac{b}{p^2 + b^2},$$

así que

$$L[e^{ax} \sin bx] = \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}.$$

Ejemplo 3.

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] = x,$$

y por tanto

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(p-a)^2}\right] = e^{ax}x.$$

Los métodos de esta sección son aplicables a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y a ciertos tipos de ecuaciones en derivadas parciales. En tratados más extensos se pueden encontrar aplicaciones adicionales de la transformación de Laplace³.

PROBLEMAS

1. Hallar las transformadas de Laplace de
 - (a) $x^5 e^{-2x}$;
 - (b) $(1-x^2)e^{-x}$;
 - (c) $e^{3x} \cos 2x$.

2. Hallar las transformadas inversas de Laplace de
 - (a) $\frac{6}{(p+2)^2 + 9}$;
 - (b) $\frac{12}{(p+3)^4}$;
 - (c) $\frac{p+3}{p^2 + 2p + 5}$.

³ Véase, por ejemplo, R. V. Churchill, *Operational Mathematics*, 2.^a ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1958.

3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de la transformación de Laplace:
- $y' + y = 3e^{2x}$, $y(0) = 0$;
 - $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$;
 - $y'' + 2y' + 2y = 2$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$;
 - $y'' + y' = 3x^2$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$;
 - $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x} \operatorname{sen} x$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$.
4. Hallar la solución de $y'' - 2ay' + a^2y = 0$ dejando las condiciones iniciales $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y'_0$ sin especificar. (Esto proporciona una nueva deducción de nuestra solución previa de la Sección 17 para el caso en que la ecuación auxiliar tiene una raíz doble.)
5. Aplicar (3) para establecer la fórmula integral para la transformada de Laplace,

$$L\left[\int_0^x f(x) dx\right] = \frac{F(p)}{p},$$

y verificarla hallando

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p(p+1)}\right]$$

de dos maneras.

6. Resolver $y' + 4y + 5 \int_0^x y dx = e^{-x}$, $y(0) = 0$.

51. DERIVADAS E INTEGRALES DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Consideremos la fórmula general de la transformación de Laplace

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx.$$

La derivación bajo el signo integral, justificable, da

$$F'(p) = \int_0^\infty e^{-px} (-x) f(x) dx, \quad (1)$$

o sea,

$$L[-xf(x)] = F'(p). \quad (2)$$

Derivando (1) obtenemos

$$L[x^2f(x)] = F''(p), \quad (3)$$

y, más en general,

$$L[(-1)^n x^n f(x)] = F^{(n)}(p) \quad (4)$$

para todo entero positivo n . Estas fórmulas pueden utilizarse para hallar transformadas de funciones de la forma $x^n f(x)$ cuando $F(p)$ es conocida.

Ejemplo 1. Como $L[\operatorname{sen} ax] = a/(p^2 + a^2)$, tenemos

$$L[x \operatorname{sen} ax] = -\frac{d}{dp} \left(\frac{a}{p^2 + a^2} \right) = \frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}.$$

Ejemplo 2. Por la Sección 49 sabemos que $L[x^{-1/2}] = \sqrt{\pi/p}$, luego

$$L[x^{1/2}] = L[x(x^{-1/2})] = -\frac{d}{dp} \left(\sqrt{\frac{\pi}{p}} \right) = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

Aplicando (2) a una función $y(x)$ y a sus derivadas y recordando las fórmulas 50-(3) y 50-(4) obtenemos

$$L[xy] = -\frac{d}{dp} L[y] = -\frac{dY}{dp}, \quad (5)$$

$$L[xy'] = -\frac{d}{dp} L[y'] = -\frac{d}{dp} [pY - y(0)] = -\frac{d}{dp} [pY], \quad (6)$$

y

$$L[xy''] = -\frac{d}{dp} L[y''] = -\frac{d}{dp} [p^2 Y - py(0) - y'(0)] = -\frac{d}{dp} [p^2 Y - py(0)]. \quad (7)$$

Estas fórmulas sirven en ocasiones para resolver ecuaciones diferenciales lineales cuyos coeficientes sean polinomios de primer grado en la variable independiente.

Ejemplo 3. La ecuación de Bessel de orden cero es

$$xy'' + y' + xy = 0. \quad (8)$$

Se sabe que tiene una única solución $y(x)$ con la propiedad de que $y(0) = 1$. Para hallar tal solución, aplicamos L a (8) y usamos (5) y (7), lo cual lleva a

$$-\frac{d}{dp} [p^2 Y - p] + pY - 1 - \frac{dY}{dp} = 0,$$

o sea,

$$(p^2 + 1) \frac{dY}{dp} = -pY. \quad (9)$$

Separando variables en (9) e integrando resulta

$$Y = \frac{c}{\sqrt{p^2 + 1}} = c(p^2 + 1)^{-1/2} = \frac{c}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2}. \quad (10)$$

Desarrollando el último factor por la serie del binomio

$$\begin{aligned} (1+z)^a &= 1 + az + \frac{a(a-1)}{2!} z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} z^3 + \dots + \\ &\quad + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} z^n + \dots, \end{aligned}$$

(10) se convierte en

$$\begin{aligned} Y &= \frac{c}{p} \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p^4} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{p^6} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!} \frac{(-1)^n}{p^{2n}} + \dots \right] = \\ &= c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Si ahora procedemos formalmente y calculamos la transformada inversa de esa serie término a término, vemos que

$$y(x) = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} = c \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right).$$

Como $y(0) = 1$, se sigue que $c = 1$, luego nuestra solución es

$$y(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots.$$

Esta serie define la importante función de Bessel $J_0(x)$, cuya transformada de Laplace vimos que es igual a $1/\sqrt{p^2 + 1}$. Obtuvimos esta serie en el Capítulo 8 por

un camino completamente distinto, y es interesante ver cuán fácilmente se deduce por el método de la transformación de Laplace.

Volvamos al problema de integrar transformadas. Nuestro resultado principal es

$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_p^\infty F(p) dp. \quad (11)$$

Para demostrarlo, pongamos $L[f(x)/x] = G(p)$. Aplicando (2) se obtiene

$$\frac{dG}{dp} = L\left[(-x)\frac{f(x)}{x}\right] = -L[f(x)] = -F(p),$$

y en consecuencia

$$G(p) = - \int_a^p F(p) dp$$

para algún a . Como deseamos que $G(p) \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow \infty$, ponemos $a = \infty$ con lo que obtenemos

$$G(p) = \int_p^\infty F(p) dp,$$

que es (11). Esta fórmula es útil a la hora de hallar transformadas de funciones de la forma $f(x)/x$ cuando $F(p)$ es conocida. Además, si escribimos (11) como

$$\int_0^\infty e^{-px} \frac{f(x)}{x} dx = \int_p^\infty F(p) dp$$

y hacemos $p \rightarrow 0$, vemos que

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^\infty F(p) dp, \quad (12)$$

que es válida siempre que la integral de la izquierda exista. Esta fórmula se puede utilizar a veces para evaluar integrales que son difíciles de manejar por otros métodos.

Ejemplo 4. Como $L[\operatorname{sen} x] = 1/(p^2 + 1)$, (12) conduce a

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{dp}{p^2 + 1} = \operatorname{tg}^{-1} p \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Tabla 2. Propiedades generales de $L[f(x)] = F(p)$

$L[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha F(p) + \beta G(p)$
$L[e^{ax}f(x)] = F(p-a)$
$L[f'(x)] = pF(p) - f(0); \quad L[f''(x)] = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$
$L\left[\int_0^x f(x) dx\right] = \frac{f(p)}{p}$
$L[-xf(x)] = F'(p); \quad L[(-1)^n x^n f(x)] = F^{(n)}(p)$
$L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_p^\infty F(p) dp$
$L\left[\int_0^x f(x-t)g(t) dt\right] = F(p)G(p)$

Para facilitar su consulta, se han recogido en la Tabla 2 las principales propiedades generales de la transformación de Laplace.

PROBLEMAS

1. Probar que

$$L[x \cos ax] = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2},$$

y usar este resultado para hallar

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}\right].$$

2. Hallar las siguientes transformadas de Laplace:

$$(a) \quad L[x^2 \operatorname{sen} ax]; \\ (b) \quad L[x^{3/2}].$$

3. Resolver cada una de estas ecuaciones diferenciales:

$$(a) \quad xy'' + (3x-1)y' - (4x+9)y = 0, \quad y(0) = 0; \\ (b) \quad xy'' + (2x+3)y' + (x+3)y = 3e^{-x}, \quad y(0) = 0.$$

4. Si $y(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$y'' + x^2y = 0,$$

donde $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y'_0$, mostrar que su transformada $Y(p)$ satisface la ecuación

$$Y'' + p^2Y = py_0 + y'_0.$$

Nótese que esta segunda ecuación es del mismo tipo que la primera, de modo que no hemos progresado. El método del Ejemplo 3 es ventajoso sólo cuando los coeficientes son polinomios de primer grado.

5. Si a y b son constantes positivas, calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx;$$

$$(b) \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx.$$

6. Demostrar formalmente que

$$(a) \int_0^{\infty} J_0(x) dx = 1;$$

$$(b) J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cos t) dt.$$

7. Si $x > 0$, probar formalmente que

$$(a) f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt = \frac{\pi}{2};$$

$$(b) f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

8. (a) Si $f(x)$ es periódica con período a , de modo que $f(x+a) = f(x)$, probar que

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-ap}} \int_0^a e^{-px} f(x) dx.$$

- (b) Hallar $F(p)$ si $f(x) = 1$ en los intervalos de 0 a 1, de 2 a 3, de 4 a 5, etc., y $f(x) = 0$ en los restantes intervalos.

52. CONVOLUCION Y EL PROBLEMA MECANICO DE ABEL

Si $L[f(x)] = F(p)$ y $L[g(x)] = G(p)$, ¿cuál es la transformada inversa de $F(p)G(p)$?

Para responder esa cuestión formalmente, usamos variables mudas s y t en las integrales que definen las transformadas y escribimos

$$\begin{aligned} F(p)G(p) &= \left[\int_0^{\infty} e^{-ps} f(s) ds \right] \left[\int_0^{\infty} e^{-pt} g(t) dt \right] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-p(s+t)} f(s) g(t) ds dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-p(s+t)} f(s) ds \right] g(t) dt, \end{aligned}$$

donde la integración se extiende sobre el primer cuadrante ($s \geq 0, t \geq 0$) en el plano st . Ahora introducimos una nueva variable x en la integral interior de la última expresión poniendo $s + t = x$, o sea, $s = x - t$ y (dejando t fija durante esta integración) $ds = dx$. Eso nos conduce a

$$F(p)G(p) = \int_0^\infty \left[\int_t^\infty e^{-px} f(x-t) dx \right] g(t) dt = \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-px} f(x-t) g(t) dx dt.$$

Esta integración está extendida a la primera mitad del primer cuadrante ($x-t \geq 0$) del plano xt , e invirtiendo el orden de integración, tal como sugiere la Figura 60, obtenemos

$$\begin{aligned} F(p)G(p) &= \int_0^\infty \left[\int_0^x e^{-px} f(x-t) g(t) dt \right] dx = \int_0^\infty e^{-px} \left[\int_0^x f(x-t) g(t) dt \right] dx = \\ &= L \left[\int_0^x f(x-t) g(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

La integral en la última expresión es función del límite superior x y proporciona la respuesta a la cuestión planteada. Esta integral se llama la *convolución* de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Puede interpretarse como un «producto generalizado» de esas funciones. El hecho contenido en la ecuación (1), es decir, que el producto de las transformadas de Laplace de dos funciones es la transformada de su convolución, se conoce como *teorema de la convolución*.

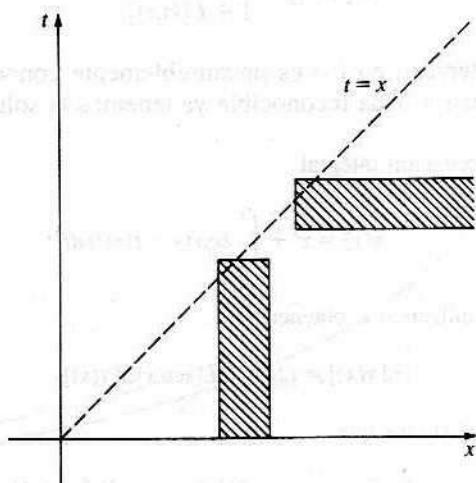


Figura 60

El teorema de la convolución puede usarse para hallar transformadas inversas. Por ejemplo, como $L[x] = 1/p^2$ y $L[\sin x] = 1/(p^2 + 1)$, tenemos

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p^2+1)}\right] &= L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right] = \\ &= \int_0^x (x-t) \sin t dt = \\ &= x - \sin x, \end{aligned}$$

como se comprueba sin dificultad por fracciones simples. Una clase más interesante de aplicaciones aparece como sigue. Si $f(x)$ y $k(x)$ son funciones dadas, la ecuación

$$f(x) = y(x) + \int_0^x k(x-t)y(t) dt, \quad (2)$$

en la que la función incógnita $y(x)$ figura bajo el signo integral, se llama una *ecuación integral*. A causa de su forma especial, en que la integral es la convolución de las dos funciones $k(x)$ e $y(x)$, esa ecuación admite solución por transformadas de Laplace. En efecto, si aplicamos L a ambos miembros de la ecuación (2), obtenemos

$$L[f(x)] = L[y(x)] + L[k(x)]L[y(x)],$$

de manera que

$$L[y(x)] = \frac{L[f(x)]}{1 + L[k(x)]}. \quad (3)$$

El miembro de la derecha en (3) es presumiblemente conocido como función de p , y si es una transformada reconocible ya tenemos la solución $y(x)$ deseada.

Ejemplo 1. La ecuación integral

$$y(x) = x^3 + \int_0^x \sin(x-t)y(t) dt \quad (4)$$

es de ese tipo, y aplicando L obtenemos

$$L[y(x)] = L[x^3] + L[\sin x]L[y(x)].$$

Despejando $L[y(x)]$ vemos que

$$L[y(x)] = \frac{L[x^3]}{1 - L[\sin x]} = \frac{3!/p^4}{1 - 1/(p^2+1)} = \frac{3!}{p^4} \left(\frac{p^2+1}{p^2} \right) = \frac{3!}{p^4} + \frac{3!}{p^6},$$

luego

$$y(x) = x^3 + \frac{1}{20}x^5$$

es la solución de (4).

Como ilustración adicional de esta técnica, analicemos un problema clásico de mecánica que conduce a una ecuación integral de ese tipo. Sea un hilo en forma de curva suave (Fig. 61) y un abalorio de masa m que parte del reposo y desliza sin rozamiento hacia el origen bajo la acción de su propio peso. Sea (x, y) el punto de partida y (u, v) cualquier punto intermedio. Si la forma del hilo viene dada por una función $y = y(x)$, el tiempo total del descenso será una función definida $T(y)$ de la altura inicial y . El *problema mecánico de Abel* es el inverso: se especifica de antemano la función $T(y)$ y se pide hallar la forma del hilo que produce un tiempo de descenso igual a $T(y)$.

Para formular el problema matemáticamente, recordamos el principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg(y - v), \quad \text{o sea}, \quad -\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y - v)},$$

que se puede escribir como

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(y - v)}}.$$

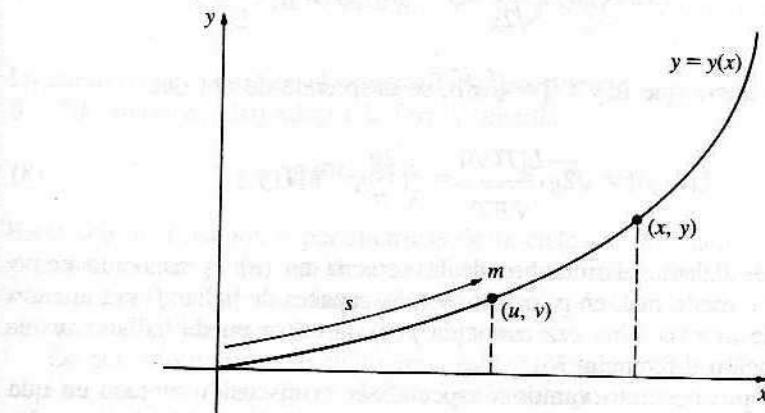


Figura 61

Integrando esto desde $v = y$ hasta $v = 0$ obtenemos

$$T(y) = \int_{v=y}^{v=0} dt = \int_{v=0}^{v=y} \frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{s'(v) dv}{\sqrt{y-v}}. \quad (5)$$

Ahora bien,

$$s = s(y) = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

es conocida siempre que lo sea la curva $y = y(x)$, así que su derivada

$$f(y) = s'(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad (6)$$

también es conocida. Insertando (6) en (5) vemos que

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{f(v) dv}{\sqrt{y-v}}, \quad (7)$$

y eso nos permite calcular $T(y)$ siempre que conozcamos la curva. En el problema de Abel queremos hallar la curva cuando $T(y)$ es prefijada. Desde ese punto de vista, la función $y(x)$ en (7) es la incógnita y la ecuación (7) se llama *ecuación integral de Abel*. Nótese que la integral en (7) es la convolución de las funciones $f(y)$ e $y^{-1/2}$, así que aplicando la transformación de Laplace L se obtiene

$$L[T(y)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} L[y^{-1/2}] L[f(y)].$$

Si recordamos ahora que $L[y^{-1/2}] = \sqrt{\pi/p}$, se desprende de ahí que

$$L[f(y)] = \sqrt{2g} \frac{L[T(y)]}{\sqrt{\pi/p}} = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} p^{1/2} L[T(y)]. \quad (8)$$

Cuando $T(y)$ está dada, el miembro de la derecha en (8) es conocido como función de p , de modo que, en principio, somos capaces de hallar $f(y)$ tomando la transformada inversa. Una vez conocida $f(y)$, la curva puede hallarse resolviendo la ecuación diferencial (6).

Como ejemplo concreto vamos a especializar la discusión al caso en que $T(y)$ es una constante T_0 . Esta hipótesis implica que el tiempo de descenso ha de ser independiente del punto de partida. La curva definida por esta propiedad

se llama *tautócrona*, de manera que nuestro problema es hallar la curva tautócrona. En este caso, (8) se convierte en

$$L[f(y)] = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} p^{1/2} L[T_0] = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} p^{1/2} \frac{T_0}{p} = b^{1/2} \sqrt{\frac{\pi}{p}},$$

donde $b = 2gT_0^2/\pi^2$. La transformada inversa de $\sqrt{\pi/p}$ es $y^{-1/2}$, así que

$$f(y) = \sqrt{\frac{b}{y}}. \quad (9)$$

Con esta $f(y)$, (6) nos da

$$1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 = \frac{b}{y}$$

como ecuación diferencial de la curva, así que

$$x = \int \sqrt{\frac{b-y}{y}} dy.$$

Sustituyendo $y = b \operatorname{sen}^2 \phi$, eso pasa a ser

$$x = 2b \int \cos^2 \phi d\phi = b \int (1 + \cos 2\phi) d\phi = \frac{b}{2} (2\phi + \operatorname{sen} 2\phi) + c,$$

luego

$$x = \frac{b}{2} (2\phi + \operatorname{sen} 2\phi) + c \quad \text{e} \quad y = \frac{b}{2} (1 - \cos 2\phi). \quad (10)$$

La curva ha de pasar por el origen $(0, 0)$, luego $c = 0$; y así ponemos $a = b/2$ y $\theta = 2\phi$, entonces (10) adopta la forma sencilla

$$x = a(\theta + \operatorname{sen} \theta) \quad \text{e} \quad y = a(1 - \cos \theta).$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de la cicloide, ilustrada en la Figura 62, generada por un punto fijo de un círculo de radio a que rueda bajo la línea de trazo discontinuo $y = 2a$. Como $2a = b = 2gT_0^2/\pi^2$, el diámetro del círculo generador viene determinado por el tiempo constante de descenso.

De acuerdo con eso, la tautócrona es una cicloide. En los Problemas 6-5 y 11-5 se comprobó esta propiedad de la cicloide por otros métodos. La exposición presente tiene la ventaja de permitir hallar la cicloide sin tener idea previamente de cuál es la solución.

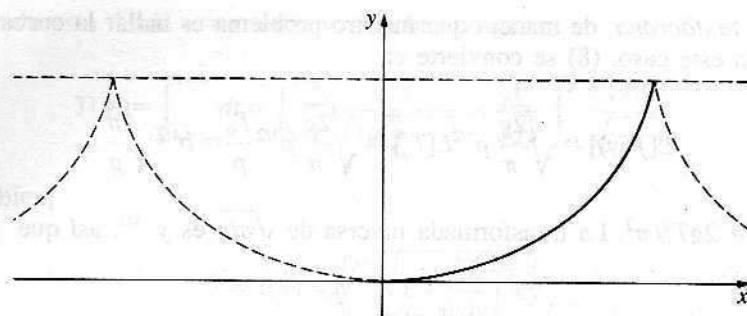


Figura 62

PROBLEMAS

1. Hallar $L^{-1}[1/(p^2 + a^2)^2]$ por convolución. (Véase Problema 51-1.)
2. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones integrales:

$$(a) \quad y(x) = 1 - \int_0^x (x-t)y(t) dt;$$

$$(b) \quad y(x) = e^x \left[1 + \int_0^x e^{-t} y(t) dt \right];$$

$$(c) \quad e^{-x} = y(x) + 2 \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt;$$

$$(d) \quad 3 \sin 2x = y(x) + \int_0^x (x-t) y(t) dt.$$

3. Deducir

$$f(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{T(t) dt}{\sqrt{y-t}}$$

de la ecuación (8) y usar esto para verificar (9) cuando $T(y)$ es una constante T_0 .

4. Hallar la ecuación de la curva de descenso si $T(y) = k\sqrt{y}$ para alguna constante k .
5. Probar que la ecuación diferencial

$$y'' + a^2 y = f(x), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

tiene a

$$y(x) = \frac{1}{a} \int_0^x f(t) \operatorname{sen} a(x-t) dt$$

como solución.

53. CONVOLUCION, FUNCION ESCALON Y FUNCION IMPULSO

En la sección anterior vimos que el producto de las transformadas de Laplace de dos funciones es la transformada de una cierta combinación de esas funciones que hemos llamado su *convolución*. Si usamos el tiempo t como variable independiente y si las dos funciones son $f(t)$ y $g(t)$, ese teorema de la convolución [la ecuación 52-(1)] se puede expresar así:

$$L[f(t)]L[g(t)] = L\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau\right]. \quad (1)$$

Es costumbre denotar la convolución de $f(t)$ y $g(t)$ por $f(t) * g(t)$, de modo que

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau. \quad (2)$$

El teorema de la convolución (1) se puede escribir entonces en la forma

$$L[f(t) * g(t)] = L[f(t)]L[g(t)]. \quad (3)$$

Nuestro propósito en esta sección es explicar una aplicación de este teorema que hace posible determinar la respuesta de un sistema mecánico o eléctrico a un estímulo general si se conoce su respuesta a la función paso. Estas ideas adquieren especial relevancia en ingeniería eléctrica y en otras áreas de ciencia aplicada.

Cualquier sistema físico capaz de responder a un estímulo puede imaginarse como un dispositivo que transforma una *función de entrada* (el estímulo) en una *función de salida* (la respuesta). Si suponemos que todas las condiciones iniciales son cero en el instante $t = 0$ en que el estímulo $f(t)$ comienza a actuar, entonces, estableciendo la ecuación diferencial que describe el sistema, aplicándole la transformación de Laplace L y despejando la transformada de la salida $y(t)$, obtenemos una ecuación del tipo

$$L[y(t)] = \frac{L[f(t)]}{z(p)}, \quad (4)$$

donde $z(p)$ es un polinomio cuyos coeficientes dependen sólo de los parámetros del propio sistema. Esta ecuación es la fuente principal de las fórmulas explícitas que obtendremos para $y(t)$ dentro de un momento con la ayuda del teorema de la convolución.

Seamos más específicos. Buscamos soluciones $y(t)$ de la ecuación diferencial lineal

$$y'' + ay' + by = f(t) \quad (5)$$

que satisfagan las condiciones iniciales

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad (6)$$

que describen un sistema mecánico o eléctrico en reposo en su posición de equilibrio. La entrada $f(t)$ puede interpretarse como una fuerza externa F o una fuerza electromotriz externa E que comienza a actuar en el instante $t = 0$ (véase Sección 20). Cuando esa entrada es la función paso $u(t)$ definida en el Problema 49-2(a), la solución (o salida) $y(t)$ se denota por $A(t)$ y se llama la *respuesta indicial* (o *respuesta al escalón*); esto es,

$$A'' + aA' + bA = u(t).$$

Aplicando la transformación de Laplace L y usando las fórmulas (3) y (4) de la Sección 50 obtenemos

$$p^2L[A] + apL[A] + bL[A] = L[u(t)] = \frac{1}{p},$$

y por tanto

$$L[A] = \frac{1}{p} \frac{1}{p^2 + ap + b} = \frac{1}{p} \frac{1}{z(p)}, \quad (7)$$

donde $z(p)$ viene definida por la última igualdad. Aplicamos ahora L del mismo modo a la ecuación general (5), lo que da (4); y dividiendo ambos lados por p y usando (7) llegamos a

$$\frac{1}{p}L[y] = \frac{1}{pz(p)}L[f] = L[A]L[f]. \quad (8)$$

El teorema de la convolución nos permite ahora escribir (8) como

$$\frac{1}{p}L[y] = L[A(t) * f(t)] = L\left[\int_0^t A(t-\tau)f(\tau)d\tau\right].$$

Recordando de nuevo la fórmula 50-(3) vemos que

$$L[y] = pL\left[\int_0^t A(t-\tau)f(\tau)d\tau\right] =$$

$$= L\left[\frac{d}{dt} \int_0^t A(t-\tau)f(\tau)d\tau\right],$$

de donde

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t A(t-\tau)f(\tau)d\tau. \quad (9)$$

Aplicando la regla de Leibniz de derivación de integrales⁴ a (9) obtenemos

$$y(t) = \int_0^t A'(t-\tau)f(\tau)d\tau + A(0)f(t). \quad (10)$$

A continuación, como $L[A]L[f] = L[f]L[A]$, (8) nos permite escribir

$$\frac{1}{p}L[y] = L[f(t) * A(t)] = L\left[\int_0^t f(t-\sigma)A(\sigma)d\sigma\right],$$

y siguiendo el mismo argumento que antes resulta

$$y(t) = \int_0^t f'(t-\sigma)A(\sigma)d\sigma + f(0)A(t). \quad (11)$$

En la fórmula (10) queremos hacer notar que $A(0) = 0$, a causa de las condiciones iniciales (6), y que (11) toma una forma más conveniente bajo el cambio de variable $\tau = t - \sigma$. Por tanto, nuestras dos fórmulas (10) y (11) para $y(t)$ se convierten en

$$y(t) = \int_0^t A'(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (12)$$

⁴ La regla de Leibniz afirma que si $F(t) = \int_u^v G(t, x)dx$, donde u y v son funciones de t , y x es una variable muda, entonces

$$\frac{d}{dt}F(t) = \int_u^v \frac{\partial}{\partial t}G(t, x)dx + G(t, v)\frac{dv}{dt} - G(t, u)\frac{du}{dt}.$$

Véase página 613 del libro de George F. Simmons, *Calculus With Analytic Geometry*, McGraw-Hill, Nueva York, 1985.

e

$$y(t) = \int_0^t A(t-\tau) f'(\tau) d\tau + f(0)A(t). \quad (13)$$

Cada una de estas fórmulas proporciona una solución de (5) para una entrada general $f(t)$ en términos de la respuesta $A(t)$ a la función escalón. La fórmula (13) se cita a veces como *principio de superposición*; se atribuye al famoso físico del siglo XIX James Clerk Maxwell, a Ludwig Boltzmann y al matemático aplicado inglés Oliver Heaviside.

Ejemplo 1. Usar la fórmula (13) para resolver $y'' + y' - 6y = 2e^{3t}$, donde $y(0) = y'(0) = 0$.

Aquí es

$$L[A(t)] = \frac{1}{p(p^2 + p - 6)},$$

así que por fracciones simples e inversión vemos que

$$A(t) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{15}e^{-3t} + \frac{1}{10}e^{2t}.$$

Como $f(t) = 2e^{3t}$, $f'(t) = 6e^{3t}$ y $f(0) = 2$, (13) da

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \left[-\frac{1}{6} + \frac{1}{15}e^{-3(t-\tau)} + \frac{1}{10}e^{2(t-\tau)} \right] 6e^{3\tau} d\tau + 2 \left[-\frac{1}{6} + \frac{1}{15}e^{-3t} + \frac{1}{10}e^{2t} \right] = \\ &= \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{1}{15}e^{-3t} - \frac{2}{5}e^{2t}. \end{aligned}$$

Puede comprobarse esta solución sustituyendo directamente en la ecuación dada o resolviendo la ecuación por el método estudiado en la Sección 50.

También podemos usar la fórmula (12) para resolver la ecuación de ese ejemplo, pero antes es deseable expresar (12) de manera más simple, cosa que vamos a conseguir gracias a la función impulso $\delta(t)$ descrita en el Problema 49-5. En física, el *impulso* debido a una fuerza constante F que actúa durante un intervalo de tiempo Δt se define como $F\Delta t$. La «función» $\delta(t)$ puede imaginarse como un límite de funciones constantes de impulso que actúan durante intervalos de tiempo cada vez más cortos; se utiliza en la descripción de fuerzas y voltajes que actúan muy repentinamente, como en el caso del impacto de un martillo en un sistema mecánico o un golpe de corriente brusco en uno eléctrico.

La propiedad esencial para nosotros de $\delta(t)$ es la que expresa la ecuación

$$L[\delta(t)] = 1,$$

obtenida en el Problema 49-5. Cuando la entrada en la ecuación diferencial (5) es la función impulso $\delta(t)$, la salida $y(t)$ se denota por $h(t)$ y se llama la *respuesta de impulso*. Aplicando L en este caso se deduce

$$L[h(t)] = \frac{1}{z(p)}, \quad (14)$$

por lo que

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{z(p)}\right].$$

Según (7) y (14),

$$L[A(t)] = \frac{1}{p} \frac{1}{z(p)} = \frac{L[h(t)]}{p},$$

y del Problema 50-5 se sigue que

$$A(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau.$$

Vemos así que $A'(t) = h(t)$, de modo que la fórmula (12) pasa a ser

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (15)$$

Por tanto, la solución de (5) con entrada general $f(t)$ resulta ser la convolución de la respuesta de impulso, $h(t)$, con $f(t)$.

Ejemplo 2. Consideremos de nuevo la ecuación $y'' + y' - 6y = 2e^{3t}$ resuelta en el Ejemplo 1. Tenemos

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(p+3)(p-2)}\right] = \frac{1}{5}(e^{2t} - e^{-3t}),$$

luego

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{5}[e^{2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}]2e^{3\tau} d\tau = \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{1}{15}e^{-3t} - \frac{2}{5}e^{2t},$$

como antes.

Nota 1. En situaciones prácticas complicadas, los ingenieros eléctricos se ven obligados a trabajar con respuestas indiciales o respuestas de impulso que sólo son accesibles experimentalmente por medio de osciloscopios que responden a entradas de tipo escalón o impulso producidas en un generador. En tales circunstancias, la salida puede ser calculada de (13) o (15) por métodos de integración gráfica que permiten marcar puntos aislados de la curva de respuesta. Para una discusión de estas cuestiones, véase el Capítulo 9 de W. D. Day, *Introduction to Laplace Transforms for Radio and Electronic Engineers*, Interscience, Nueva York, 1960.

Nota 2. Para disponer de una perspectiva más general del significado de la convolución consideremos un sistema físico lineal en el que el efecto en el momento presente de cualquier pequeño estímulo $g(\tau) d\tau$ en un instante anterior τ es proporcional a la magnitud del estímulo. Supongamos además que el factor de proporcionalidad depende solamente del tiempo transcurrido $t - \tau$, de modo que tiene la forma $f(t - \tau)$. El efecto en el momento presente es, por tanto,

$$f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Puesto que el sistema es lineal, el efecto total en el momento presente t debido a los estímulos que han actuado en toda la historia pasada del sistema se obtiene sumando esos efectos separados, lo que conduce a la integral de convolución

$$\int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Aquí el límite inferior es 0 porque suponemos que el estímulo comenzó a actuar en el instante $t = 0$, o sea, que $g(\tau) = 0$ para $\tau < 0$. Es difícil poner de relieve en su justa medida la importancia de la convolución: proporciona un medio razonable para tener en cuenta el pasado en el estudio de movimientos ondulatorios, de la conducción del calor, de la difusión y de otras cuestiones de física matemática.

PROBLEMAS

- Probar que $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$ directamente de la definición (2), introduciendo una nueva variable muda $\sigma = t - \tau$. Esto demuestra que la operación de tomar convoluciones es conmutativa. Es asimismo asociativa y distributiva:

$$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t)$$

y

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t),$$

$$[f(t) + g(t)] * h(t) = f(t) * h(t) + g(t) * h(t).$$

Una interesante discusión de las propiedades abstractas de la convolución viene expuesta por Mark Kac y Stanislaw Ulam en las páginas 140-142 de *Mathematics and Logic*, New American Library, Nueva York, 1969.

2. Hallar la convolución de cada uno de los pares de funciones que se indican:
 - (a) 1, $\sin at$;
 - (b) e^{at} , e^{bt} , donde $a \neq b$;
 - (c) t , e^{at} ;
 - (d) $\sin at$, $\sin bt$, donde $a \neq b$.
3. Verificar el teorema de convolución para cada uno de los pares de funciones del Problema 2.
4. Usar los métodos de los Ejemplos 1 y 2 para resolver las ecuaciones diferenciales:
 - (a) $y'' + 5y' + 6y = 5e^{3t}$, $y(0) = y'(0) = 0$;
 - (b) $y'' + y' - 6y = t$, $y(0) = y'(0) = 0$;
 - (c) $y'' - y' = t^2$, $y(0) = y'(0) = 0$.
5. Cuando el polinomio $z(p)$ tiene ceros distintos a y b , con lo que

$$\frac{1}{z(p)} = \frac{1}{(p-a)(p-b)} = \frac{A}{p-a} + \frac{B}{p-b}$$

para ciertas constantes A y B , se tiene

$$h(t) = Ae^{at} + Be^{bt}$$

y (15) adopta la forma

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) [Ae^{a(t-\tau)} + Be^{b(t-\tau)}] d\tau.$$

Esto se llama a veces *teorema del desarrollo de Heaviside*.

- (a) Usar ese teorema para escribir la solución de $y'' + 3y' + 2y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- (b) Calcular explícitamente la solución en (a) para los casos $f(t) = e^{3t}$ y $f(t) = t$.
- (c) Hallar las soluciones en (b) mediante el principio de superposición (13).
6. La fórmula (13) se puede deducir también de (4), sin hacer uso de la regla de Leibniz para derivar integrales, como sigue:

$$\begin{aligned} L[y(t)] &= \frac{L[f(t)]}{z(p)} = \frac{1}{pz(p)} \cdot pL[f(t)] = \\ &= L[A(t)] \cdot pL[f(t)] = \\ &= L[A(t)] \cdot \{L[f'(t)] + f(0)\} = \\ &= L[A(t) * f'(t)] + f(0)L[A(t)] = \\ &= L\left[\int_0^t A(t-\tau) f'(\tau) d\tau + f(0)A(t) \right]. \end{aligned}$$

Comprobar cada paso.

7. Como sabemos por la Sección 20, las vibraciones forzadas de un sistema masa-muelle no amortiguado vienen descritas por la ecuación diferencial

$$Mx'' + kx = f(t),$$

donde $x(t)$ es el desplazamiento e $f(t)$ la fuerza externa impresa o «fuerza de fricción». Si $x(0) = x'(0) = 0$, hallar las funciones $A(t)$ y $h(t)$ y escribir la solución $x(t)$ para una $f(t)$ arbitraria.

8. La corriente $I(t)$ en un circuito eléctrico, con inductancia L y resistencia R , viene dada por la ecuación (4) de la Sección 13:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

donde $E(t)$ es la fuerza electromotriz aplicada. Supuesto que $I(0) = 0$, usar los métodos de esta sección para calcular $I(t)$ en los siguientes casos:

- (a) $E(t) = E_0 u(t)$;
- (b) $E(t) = E_0 \delta(t)$;
- (c) $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$.

APENDICE A. LAPLACE

Pierre Simon de Laplace (1749-1827) fue un matemático y astrónomo teórico francés, tan famoso en su tiempo que se le conocía como el Newton de Francia. Sus principales campos de interés fueron la mecánica celeste, la teoría de probabilidades y el progreso personal.

A los 24 años ya se hallaba inmerso en la aplicación de la ley de gravitación de Newton al sistema solar como un todo en el que los planetas y sus satélites no están gobernados sólo por el sol sino que interaccionan entre sí de muy diversas formas. Incluso el propio Newton había sido de la opinión de que la intervención divina sería ocasionalmente necesaria para evitar que todo el sistema degenerara en el caos. Laplace decidió buscar la seguridad en otras causas y logró probar que el sistema solar ideal matemático es un sistema dinámico estable que permanecerá en todo tiempo. Este fue tan sólo uno de la larga cadena de éxitos recogidos en su monumental tratado *Mécanique Céleste* (publicado en cinco volúmenes entre 1799 y 1825), que resumía las investigaciones en gravitación de varias generaciones de matemáticos ilustres. Desgraciadamente para su reputación posterior, omitió toda referencia a los descubrimientos de sus predecesores y contemporáneos, dejando entrever que las ideas eran suyas por completo. Hay muchas anécdotas asociadas con su obra. Una de las más conocidas narra que en una ocasión Napoleón intentó sacarle de quicio protestando por el hecho de que hubiera escrito un libro enorme sobre el sistema del universo sin haber mencionado una sola vez a Dios como autor de su creación. Se cree saber que Laplace le contestó: «Señor, no tengo

necesidad de esa hipótesis». El principal legado de la *Mécanique Céleste* a las generaciones posteriores reside en el desarrollo de la teoría del potencial, con sus implicaciones de largo alcance en una docena de ramas de la física que van desde la gravitación y la mecánica de fluidos hasta el magnetismo y la física atómica. Aunque tomó la idea del potencial de Lagrange sin reconocimiento alguno hacia éste, la explotó tan extensamente que ya desde su tiempo la ecuación diferencial fundamental de la teoría del potencial se ha denominado ecuación de Laplace.

Su otra obra maestra fue el tratado *Théorie Analytique des Probabilités* (1812), en la que incorpora sus propios descubrimientos en los 40 años anteriores. De nuevo dejó sin agradecer las muchas ideas ajenas que mezcló con las suyas, pero, aun descontando eso, su libro está considerado como la más importante contribución a esta parte de las matemáticas. En la introducción dice: «En el fondo, la teoría de probabilidades no es sino sentido común reducido a cálculos». Puede que sí, pero no es menos cierto que las 700 páginas que siguen de análisis intrincado, en las que usa a discreción transformadas de Laplace, funciones generatrices y muchas otras técnicas no triviales, superan en complejidad, en opinión de algunos, a su *Mécanique Céleste*.

Tras la Revolución Francesa, el talento político y la ambición de Laplace alcanzaron su cenit. Sus compatriotas comentan irónicamente su «flexibilidad» y «versatilidad» como político. Lo que eso significa en realidad que cada vez que se producía un cambio de régimen (y los hubo en abundancia) Laplace se adaptaba suavemente cambiando sus principios, idas y vueltas entre republicano ferviente y monárquico convencido, y siempre emergía con mejor posición y mayores títulos. Se le ha comparado con razón al apócrifo Vicario de Bray de la literatura inglesa, que fue dos veces católico y dos veces protestante. Se cuenta que el Vicario rechazó así la acusación de sus cambios de chaqueta: «No es cierto, porque si bien cambié mi religión, estoy seguro de haber permanecido fiel a mi principio, que es el de vivir y morir Vicario de Bray».

En compensación de sus defectos, Laplace se mostró siempre generoso en ayudar y animar a jóvenes científicos. De vez en cuando, echó una mano en sus carreras a hombres como el químico Gay-Lussac, el naturalista Humboldt, el físico Poisson y, de forma especialmente pertinente, al joven Cauchy, destinado a convertirse en uno de los artífices fundamentales de las matemáticas del siglo XIX.

APENDICE B. ABEL

Niels Henrik Abel (1802-1829) fue uno de los matemáticos más sobresalientes el siglo XIX y probablemente el genio más destacado que han visto nacer los países escandinavos. Junto con sus contemporáneos Gauss y Cauchy, Abel fue uno de los pioneros en el desarrollo de la matemática moderna, caracterizada por su insistencia en el rigor de las demostraciones. Su carrera fue una acerba mezcla de optimismo pleno de buen humor bajo la opresión de la pobreza y la

negligencia, modesta satisfacción por los muchos descubrimientos de alto nivel en su breve madurez, y paciente resignación frente a una muerte temprana.

Abel fue uno de los seis hijos de la familia de un pobre pastor rural noruego. Su enorme capacidad no pasó inadvertida para uno de sus profesores, quien le animó, cuando tenía sólo 16 años, a cultivarla, de modo que pronto se encontró leyendo y comprendiendo las obras de Newton, Euler y Lagrange. A título de comentario sobre esta experiencia, insertó en uno de sus cuadernos de notas de matemáticas algún tiempo después esta frase al margen: «Creo que si uno quiere progresar en matemáticas debe estudiar a los maestros, no a los discípulos». Cuando Abel tenía 18 años, murió su padre, dejando a la familia desvalida. Subsistieron merced a la ayuda de amigos y vecinos y, de un modo u otro, con las contribuciones de varios profesores, el muchacho pudo ingresar en la Universidad de Oslo en 1821. Sus primeras investigaciones, publicadas en 1823, incluían la solución del clásico problema de la tautócrona por medio de la ecuación integral discutida en la Sección 52. Fue la primera solución de una ecuación de esta clase y abrió el camino al formidable desarrollo de las ecuaciones integrales en el siglo XIX y comienzos del XX. Probó asimismo que la ecuación general de quinto orden $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ no es resoluble por radicales, al contrario de lo que sucede con la de cuarto orden, zanjando así un problema que había traído en jaque a los matemáticos durante 300 años. La demostración apareció en un pequeño planfleto costeado a sus expensas.

En su desarrollo científico, Abel pronto se dio cuenta de que Noruega se le había quedado pequeña, y anhelaba visitar Francia y Alemania. Con el respaldo de sus amigos y profesores, solicitó una ayuda estatal y, tras los consabidos papeleos y demoras, recibió una beca para efectuar un periplo por el continente. La mayor parte del primer año la pasó en Berlín, donde tuvo la fortuna de entrar en contacto con August Leopold Crelle, un entusiasta matemático aficionado que se convirtió en su principal amigo, consejero y protector. A su vez, Abel inspiró a Crelle el lanzamiento de su famoso *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, que fue la primera revista dedicada por completo a las matemáticas editada en el mundo. Los tres primeros volúmenes contaron en sus páginas con 22 artículos de Abel.

La formación matemática previa de Abel había estado relacionada por completo con la tradición formal del siglo XVIII, tipificada por Euler. En Berlín pasó a situarse bajo la influencia de la nueva escuela de pensamiento liderada por Gauss y Cauchy, con énfasis en las demostraciones rigurosas por contraposición a los cálculos formales. Exceptuada la gran obra de Gauss acerca de las series hipergeométricas, resultaría harto difícil encontrar una sola demostración en análisis de esa época que fuera admitida hoy como aceptable. Como Abel expresaba en una carta a un amigo: «Si olvidamos los casos muy, muy simples, no hay una sola serie infinita en matemáticas cuya suma haya sido establecida de forma rigurosa. En otras palabras, las partes más importantes de las matemáticas carecen de fundamentación». En este período escribió su clásico estudio de la serie del binomio, en el que sentaba las bases de la teoría

general de convergencia y daba la primera demostración rigurosa de la validez de ese desarrollo en serie.

Abel había enviado su panfleto sobre la ecuación de quinto orden a Gauss a Göttingen, confiando que le sirviera a modo de pasaporte científico. Sin embargo, por alguna razón, Gauss lo dejó de lado sin mirarlo, ya que se halló sin cortar entre sus papeles tras su muerte 30 años después. Por desgracia para ambos, Abel se sintió rechazado y decidió ir a París sin visitar a Gauss.

En París se encontró con Cauchy, Legendre, Dirichlet y otros, pero sus encuentros fueron superficiales y no se le llegó a reconocer su auténtica valía. Ya había publicado unos cuantos trabajos en el *Journal de Crelle*, pero los franceses no estaban al tanto todavía de esa revista de reciente aparición y Abel era demasiado tímido para hablar de su propia obra a personas a las que apenas conocía. Poco tiempo después de su llegada terminó su gran *Mémoire sur une Propriété Générale d'une Classe Très Étendue des Fonctions Transcendantes*, que él consideraría como su obra maestra. En ella aparece el descubrimiento relativo a las integrales de funciones algebraicas, conocido hoy como teorema de Abel, y es la base de la teoría posterior de las integrales abelianas, las funciones abelianas y buena parte de la geometría algebraica. Décadas más tarde, Hermite parece haber comentado sobre esa *Mémoire*: «Lo que Abel ha legado a los matemáticos es suficiente para tenerles ocupados durante 500 años». Jacobi describió el teorema de Abel como el mayor hallazgo en cálculo integral del siglo XIX. Abel envió su manuscrito a la Academia de Francia, en la esperanza de que le haría ganar un cierto renombre entre los matemáticos franceses, mas esperó en vano, hasta que se quedó sin fondos y hubo de volver a Berlín. Lo que sucedió fue lo siguiente: se encargó a Cauchy y Legendre que examinaran el manuscrito; Cauchy se lo llevó a casa, lo traspapeló y se olvidó por completo de él; no se publicó hasta 1841, aunque volvió a perderse de nuevo el manuscrito antes de que fueran corregidas las pruebas. El original apareció finalmente en Florencia en 1952⁵. En Berlín, Abel terminó su primer artículo revolucionario sobre las funciones elípticas, un asunto que le había ocupado durante varios años, y entonces regresó a Noruega, fuertemente endeudado.

Confiaba ser nombrado, a su regreso, profesor en la Universidad, pero una vez más sus esperanzas se vieron defraudadas. Subsistió dando clases particulares y logró por un corto período de tiempo un puesto de profesor interino. Durante este período trabajó incesantemente, en especial en la teoría de las funciones elípticas que había descubierto como inversas de las integrales elípticas. Esta teoría pronto se abrió paso como uno de los campos principales del análisis del siglo XIX, con numerosas aplicaciones en teoría de números, física matemática y geometría algebraica. Entretanto, la fama de Abel se había propagado por todos los centros de matemáticas de Europa y figuraba entre la élite de los matemáticos de todo el mundo, pero en su aislamiento no tenía noticias

⁵ Los detalles de esta sorprendente historia pueden verse en el precioso libro de O. Ore, *Niels Henrik Abel: Mathematician Extraordinary*, University of Minnesota Press, Minneapolis, 1957.

de todo ello. A comienzos de 1829 la tuberculosis contraída en el transcurso de sus viajes había progresado hasta el punto de que era incapaz de trabajar, y en la primavera de ese mismo año murió, a la edad de 26 años. Ironía póstuma del destino, poco después de su muerte, Crelle le comunicaba que sus esfuerzos habían dado fruto y que Abel había sido propuesto para ocupar la cátedra de matemáticas en Berlín.

En su panegírico, Crelle hablaba de Abel en estos términos: «Toda la obra de Abel lleva la impronta de un ingenio y una potencia de pensamiento asombrosa. Cabe afirmar que fue capaz de penetrar todos los obstáculos hasta los fundamentos mismos de los problemas, con una fuerza que se nos antoja irresistible... Se distinguió también por la pureza y nobleza de su carácter y por una rara modestia que le hizo ser una persona tan apreciada como genial». Los matemáticos, no obstante, disponen de medios propios para recordar a sus grandes figuras, y por eso hablamos de la ecuación integral de Abel, de integrales y funciones de Abel, de grupos abelianos, de series de Abel, de la fórmula de sumación parcial de Abel, del teorema del límite de Abel en teoría de series de potencias, y de la sumabilidad de Abel. Pocos han visto su nombre adscrito a tantos conceptos y teoremas en la matemática moderna. Lo que hubiera podido llegar a hacer en una vida de duración normal está más allá de toda conjectura.

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

(4)

54. GENERALIDADES SOBRE SISTEMAS

Uno de los conceptos fundamentales del análisis es el de sistema de n ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden. Si $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ son funciones desconocidas de una sola variable independiente x , el sistema más general de interés para nosotros es aquel cuyas derivadas y'_1, y'_2, \dots, y'_n vienen dadas explícitamente como funciones de x e y_1, y_2, \dots, y_n :

$$\begin{aligned}y'_1 &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\y'_2 &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\&\dots \\y'_n &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n).\end{aligned}\tag{1}$$

Los sistemas de ecuaciones diferenciales aparecen de forma natural en muchos problemas científicos. En la Sección 22 hemos utilizado un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden para describir el movimiento de osciladores armónicos acoplados; en el ejemplo próximo veremos cómo aparecen en conexión con los sistemas dinámicos con varios grados de libertad; y en la Sección 57 los emplearemos para analizar una comunidad biológica sencilla compuesta por diferentes especies animales en interacción.

Una importante cuestión al estudiar sistemas es que una única ecuación de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\tag{2}$$

siempre se puede considerar como caso especial de (1). En efecto, pongamos

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)} \quad (3)$$

y observemos que (2) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= y_3 \\ &\dots \\ y'_n &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \quad (4)$$

que es evidentemente un caso particular de (1). La afirmación de que (2) y (4) son equivalentes quiere decir lo siguiente: si $y(x)$ es una solución de (2), entonces las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ definidas por (3) satisfacen la ecuación (4); y, reciprocamente, si $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ satisfacen (4), entonces $y(x) = y_1(x)$ es solución de (2).

Esta reducción de una ecuación de orden n a un sistema de n ecuaciones de primer orden tiene varias ventajas. Lo ilustramos considerando la relación entre los teoremas de existencia y unicidad para el sistema (1) y para la ecuación (2).

Si se fija un punto $x = x_0$ y se asignan arbitrariamente valores a las funciones desconocidas

$$y_1(x_0) = a_1, \quad y_2(x_0) = a_2, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = a_n \quad (5)$$

de manera tal que las funciones f_1, f_2, \dots, f_n estén definidas, entonces (1) da los valores de las derivadas $y'_1(x_0), y'_2(x_0), \dots, y'_n(x_0)$. La semejanza entre esta situación y la discutida en la Sección 2 sugiere el siguiente análogo del teorema de Picard.

Teorema A. Sean las funciones f_1, f_2, \dots, f_n y sus derivadas parciales $\partial f_1 / \partial y_1, \dots, \partial f_1 / \partial y_n, \dots, \partial f_n / \partial y_1, \dots, \partial f_n / \partial y_n$ continuas en una región R del espacio $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$. Si $(x_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ es un punto interior de R , el sistema (1) tiene una única solución $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ que satisface las condiciones iniciales (5).

No demostraremos este teorema, pero queremos advertir que una vez preparado el terreno su demostración es idéntica a la del teorema de Picard del Capítulo 13. Además, en virtud de la anterior reducción, el Teorema A incluye como caso especial el siguiente teorema correspondiente para la ecuación (2).

Teorema B. Sean la función f y sus derivadas parciales $\partial f / \partial y, \partial f / \partial y', \dots, \partial f / \partial y^{(n-1)}$ continuas en una región R del espacio $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Si $(x_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ es un punto interior de R , la ecuación (2) tiene una única solución $y(x)$ que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = a_1, y'(x_0) = a_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_n$.

Como ilustración adicional de las ventajas de reducir ecuaciones diferenciales de orden alto a sistemas de ecuaciones de primer orden, consideremos el famoso problema de n cuerpos de la mecánica clásica.

Sean n partículas de masas m_i situadas en los puntos (x_i, y_i, z_i) y supongamos que se atraen mutuamente de acuerdo con la ley de gravitación de Newton. Si r_{ij} denota la distancia entre m_i y m_j y θ es el ángulo desde el semieje x positivo hasta el segmento que las une (Fig. 63), la componente x de la fuerza ejercida sobre m_i por m_j es

$$\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \cos \theta = \frac{Gm_i m_j(x_j - x_i)}{r_{ij}^3}$$

siendo G la constante de la gravedad. Como la suma de esas componentes para todo $j \neq i$ es igual a $m_i(d^2x_i/dt^2)$, tenemos n ecuaciones de segundo orden

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j(x_j - x_i)}{r_{ij}^3},$$

y análogamente

$$\frac{d^2y_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j(y_j - y_i)}{r_{ij}^3}$$

y

$$\frac{d^2z_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j(z_j - z_i)}{r_{ij}^3}.$$

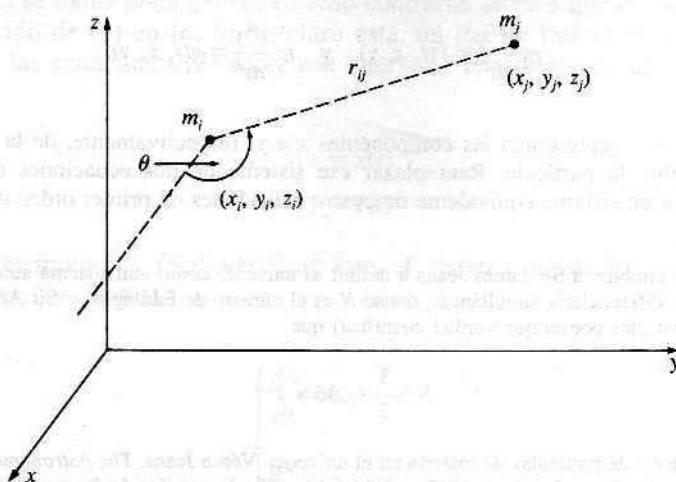


Figura 63

Si denotamos $v_{x_i} = dx_i/dt$, $v_{y_i} = dy_i/dt$ y $v_{z_i} = dz_i/dt$ y aplicamos la reducción anterior, obtenemos un sistema de $6n$ ecuaciones de primer orden de la forma (1) en las funciones incógnitas $x_1, v_{x_1}, \dots, x_n, v_{x_n}, y_1, v_{y_1}, \dots, y_n, v_{y_n}, z_1, v_{z_1}, \dots, z_n, v_{z_n}$. Si ahora hacemos uso de que

$$r_{ij}^3 = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{3/2},$$

el Teorema A nos lleva a la siguiente conclusión: si se dan las posiciones iniciales y las velocidades iniciales de las partículas, o sea, los valores de las funciones desconocidas en un cierto instante $t = t_0$, y si las partículas no colisionan (en el sentido de que r_{ij} no se anula), sus posiciones y velocidades posteriores quedan únicamente determinadas. Esta conclusión subyace en la otra popular filosofía del determinismo mecanicista, según el cual el universo no es sino una gigantesca máquina cuyo futuro está inexorablemente fijado por su estado en un instante cualquiera¹.

PROBLEMAS

- Sustituir cada una de estas ecuaciones diferenciales por un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden:
 - $y''' - x^2y' - xy = 0$;
 - $y'''' = y'' - x^2(y')^2$.
- Si una partícula de masa m se mueve por el plano xy , sus ecuaciones de movimiento son

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, y) \quad y \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = g(t, x, y),$$

donde f y g representan las componentes x e y , respectivamente, de la fuerza que actúa sobre la partícula. Reemplazar ese sistema de dos ecuaciones de segundo orden por un sistema equivalente de cuatro ecuaciones de primer orden del tipo (1).

¹ Condujo también a Sir James Jeans a definir el universo como «un sistema autorresuelto de $6N$ ecuaciones diferenciales simultáneas, donde N es el número de Eddington». Sir Arthur Eddington afirmó (con más poesía que verdad científica) que

$$N = \frac{3}{2} \times 136 \times 2^{256}$$

es el número total de partículas de materia en el universo. Véase Jeans, *The Astronomical Horizon*, Oxford University Press, Londres, 1945; o Eddington, *The Expanding Universe*, Cambridge University Press, Londres, 1952.

55. SISTEMAS LINEALES

Por razones de conveniencia y claridad, nos limitamos en el resto del capítulo a sistemas de sólo dos ecuaciones de primer orden en dos funciones incógnitas, de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(t, x, y). \end{cases} \quad (1)$$

El hecho de colocarlas entre llaves sirve para hacer énfasis en que las dos ecuaciones diferenciales van juntas, y el uso de t para la variable independiente y de x, y para las dependientes es usual por motivos que quedarán claros más adelante.

En esta sección y en la próxima nos especializamos todavía más, tratando sólo *sistemas lineales*, es decir, de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t). \end{cases} \quad (2)$$

Supondremos en la discusión que sigue, y en los teoremas que vamos a enunciar, que las funciones $a_i(t)$, $b_i(t)$ y $f_i(t)$, $i = 1, 2$ son continuas en un cierto intervalo cerrado $[a, b]$ del eje x . Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son idénticamente cero, el sistema (2) se llama *homogéneo*; en caso contrario, se dice que es *inhomogéneo*. Una solución de (2) en $[a, b]$ es, claro está, un par de funciones $x(t), y(t)$ que satisfacen las ecuaciones (2) sobre ese intervalo. Escribiremos una tal solución como

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$$

Así, por ejemplo, es fácil verificar que el sistema lineal homogéneo (con coeficientes constantes)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases} \quad (3)$$

admite a

$$\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = e^{3t} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = e^{2t} \\ y = 2e^{2t} \end{cases} \quad (4)$$

como soluciones sobre cualquier intervalo cerrado.

Damos ahora un breve esbozo de la teoría general de los sistemas lineales (2). Nótese que esta teoría es muy similar a la de las ecuaciones lineales de segundo orden analizada en las Secciones 14 y 15. Comenzamos enunciando el siguiente teorema fundamental de existencia y unicidad, demostrado en el Capítulo 13.

Teorema A. *Si t_0 es cualquier punto del intervalo $[a, b]$ y x_0, y_0 son números arbitrarios, (2) tiene una y sólo una solución*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$

válida en $[a, b]$ tal que $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$.

Nuestro próximo objetivo es estudiar la estructura de las soluciones del sistema homogéneo obtenido de (2) al suprimir los términos $f_1(t)$ y $f_2(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y. \end{cases} \quad (5)$$

Es obvio que (5) admite la llamada *solución trivial*, en la que $x(t)$ e $y(t)$ se toman idénticamente nulas. A la hora de encontrar soluciones más interesantes que la trivial es importante el próximo teorema.

Teorema B. *Si el sistema homogéneo (5) tiene dos soluciones*

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases} \quad (6)$$

sobre $[a, b]$, entonces

$$\begin{cases} x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \\ y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \end{cases} \quad (7)$$

es también solución en $[a, b]$ para todo par de constantes c_1 y c_2 .

Demostración. La dejamos al cuidado del lector por ser una mera comprobación.

La solución (7) se obtiene del par de soluciones (6) multiplicando la primera por c_1 , la segunda por c_2 , y sumando; por eso se llama a (7) una *combinación lineal* de las soluciones (6). Con esta terminología, podemos reformular el Teorema B así: toda combinación lineal de dos soluciones del sistema homogéneo (5) es también solución. Según eso, (3) tiene

$$\begin{cases} x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} \\ y = c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t} \end{cases} \quad (8)$$

como solución para toda elección de las constantes c_1 y c_2 .

La siguiente cuestión a dilucidar es si (7) contiene *todas* las soluciones de (5) sobre $[a, b]$, es decir, si es la *solución general* de (5) sobre $[a, b]$. Por el Teorema A, (7) será la solución general si las constantes c_1 y c_2 se pueden escoger de modo que se satisfagan condiciones arbitrarias $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ en un punto arbitrario t_0 de $[a, b]$, o lo que es equivalente, si el sistema de ecuaciones algebraicas lineales

$$c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = x_0$$

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0$$

en las incógnitas c_1 y c_2 se puede resolver para todo t_0 en $[a, b]$ y todo par de números x_0 , y_0 . Por la teoría de determinantes sabemos que ello es posible siempre que el determinante de los coeficientes

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix},$$

no se anule sobre el intervalo $[a, b]$. Ese determinante se llama *wronskiano* de las dos soluciones (6) (véase Problema 4), y las observaciones precedentes conducen al próximo teorema.

Teorema C. Si el wronskiano $W(t)$ de las dos soluciones (6) del sistema homogéneo (5) no se anula en $[a, b]$, entonces (7) es la solución general de (5) sobre ese intervalo.

Se deduce de este teorema que (8) es la solución general de (3) sobre cualquier intervalo cerrado, ya que el wronskiano de las soluciones (4) es

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = e^{5t},$$

que nunca se hace cero. Resulta útil saber, como sugiere este ejemplo, que la anulación o no del wronskiano $W(t)$ de dos soluciones no depende de la elección de t . Más concretamente:

Teorema D. *El wronskiano $W(t)$ de dos soluciones (6) del sistema homogéneo (5) o bien es idénticamente cero sobre $[a, b]$ o no se anula en ningún punto de $[a, b]$.*

Demostración. Un sencillo cálculo muestra que $W(t)$ satisface la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dW}{dt} = [a_1(t) + b_2(t)]W, \quad (9)$$

de donde se desprende que

$$W(t) = ce^{\int [a_1(t) + b_2(t)] dt} \quad (10)$$

para alguna constante c . La conclusión del teorema es ya evidente por cuanto el factor exponencial en (10) no se anula en ningún punto.

El Teorema C proporciona un modo adecuado de verificar si (7) es la solución general de (5): probar que el wronskiano $W(t)$ de las dos soluciones (6) no es nulo. A continuación desarrollamos un criterio equivalente que suele ser más directo y más conveniente.

Las dos soluciones (6) se dicen *linealmente dependientes* en $[a, b]$ si una de ellas es múltiplo constante de la otra en el sentido de que

$$\begin{aligned} x_1(t) &= kx_2(t) & x_2(t) &= kx_1(t) \\ y_1(t) &= ky_2(t) & y_2(t) &= ky_1(t) \end{aligned}$$

para alguna constante k y para todo t en $[a, b]$, y *linealmente independientes* si ninguna de ellas es múltiplo constante de la otra. La dependencia lineal es claramente equivalente a que existan dos constantes c_1 y c_2 , alguna de ellas al menos no nula, tales que

$$\begin{aligned} c_1x_1(t) + c_2x_2(t) &= 0 \\ c_1y_1(t) + c_2y_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

para todo t en $[a, b]$. Ahora tenemos el siguiente teorema.

Teorema E. *Si las dos soluciones (6) del sistema homogéneo (5) son linealmente independientes en $[a, b]$, entonces (7) es la solución general de (5) sobre ese intervalo.*

Demostración. En vista de los Teoremas C y D, basta probar que las soluciones (6) son linealmente dependientes si y sólo si su wronskiano $W(t)$ es idénticamente cero. Comenzamos suponiendo que son linealmente dependientes, es decir,

$$\begin{aligned}x_1(t) &= kx_2(t) \\y_1(t) &= ky_2(t).\end{aligned}\tag{12}$$

Entonces

$$\begin{aligned}W(t) &= \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kx_2(t) & x_2(t) \\ ky_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = \\&= kx_2(t)y_2(t) - kx_2(t)y_2(t) = 0\end{aligned}$$

para todo t en $[a, b]$. El mismo argumento funciona si la constante k está al otro lado de la ecuación (12). Supongamos ahora que $W(t)$ es idénticamente cero, y vamos a probar que las soluciones (6) son linealmente dependientes en el sentido de las ecuaciones (11). Fijemos un punto t_0 en $[a, b]$. Como $W(t_0) = 0$, el sistema de ecuaciones algebraicas lineales

$$c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) = 0$$

$$c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = 0$$

tiene una solución c_1, c_2 en la que estos números no son ambos cero. Así pues, la solución de (5) dada por

$$\begin{cases} x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \\ y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \end{cases}\tag{13}$$

es igual a la solución trivial en t_0 . Se sigue de la parte de unicidad del Teorema A que (13) debe ser la solución trivial sobre el intervalo $[a, b]$, de modo que (11) es válida y la demostración está completa.

El valor de este criterio estriba en que en problemas concretos suele ser cuestión de simple inspección el decidir si dos soluciones de (5) son linealmente independientes o no.

Volvemos ya al sistema inhomogéneo (2) para concluir la discusión con el siguiente resultado.

Teorema F. *Si las dos soluciones (6) del sistema homogéneo (5) son linealmente independientes sobre $[a, b]$ y si*

$$\begin{cases} x = x_p(t) \\ y = y_p(t) \end{cases}$$

es cualquier solución particular de (2) en ese intervalo, entonces

$$\begin{cases} x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + x_p(t) \\ y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + y_p(t) \end{cases} \quad (14)$$

es la solución general de (2) en $[a, b]$.

Demostración. Es suficiente probar que si

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

es una solución arbitraria de (2), entonces

$$\begin{cases} x = x(t) - x_p(t) \\ y = y(t) - y_p(t) \end{cases}$$

es solución de (5), y dejamos la verificación al lector.

El tratamiento anterior del sistema lineal (2) muestra cómo se puede construir su solución general a partir de piezas más simples. Pero ¿cómo hallar esas piezas simples? Por desgracia, como en el caso de las ecuaciones lineales de segundo orden, no hay ningún método general que funcione siempre. En la próxima sección presentamos un caso especial importante en el que esa dificultad puede solventarse: aquel en que los coeficientes $a_i(t)$, $b_i(t)$, $i = 1, 2$ son constantes.

PROBLEMAS

1. Demostrar el Teorema B.
2. Terminar la demostración del Teorema F.
3. Verificar la ecuación (9).
4. Consideraremos la ecuación lineal de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P(t) \frac{dx}{dt} + Q(t)x = 0 \quad (*)$$

reducida al sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -Q(t)x - P(t)y \end{cases} \quad (**)$$

Si $x_1(t)$, $x_2(t)$ son soluciones de la ecuación (*) y si

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

son las correspondientes soluciones de (**), probar que el wronskiano de las primeras, en el sentido de la Sección 15, es precisamente el wronskiano de las segundas en el sentido de esta sección.

5. (a) Probar que

$$\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = e^{4t} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = -e^{-2t} \end{cases}$$

son soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

- (b) Demostrar por dos caminos que las soluciones dadas en (a) son linealmente independientes sobre todo intervalo cerrado y escribir la solución general de ese sistema.
 (c) Hallar la solución particular

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

de este sistema para la que $x(0) = 5$ e $y(0) = 1$.

6. (a) Probar que

$$\begin{cases} x = 2e^{4t} \\ y = 3e^{4t} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = e^{-t} \\ y = -e^{-t} \end{cases}$$

son soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$$

- (b) Probar de dos formas que las soluciones dadas en (a) son linealmente independientes sobre todo intervalo cerrado y escribir la solución general de ese sistema.
 (c) Comprobar que

$$\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -2t + 3 \end{cases}$$

es una solución particular del sistema inhomogéneo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + t - 1 \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y - 5t - 2, \end{cases}$$

y escribir la solución general de este sistema.

7. Obtener las soluciones dadas en el Problema 6 para el sistema homogéneo
 (a) derivando la primera ecuación en t y eliminando y ;
 (b) derivando la segunda ecuación en t y eliminando x .
8. Usar el método sugerido por el Problema 7 para hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

9. (a) Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

- (b) Probar que cualquier ecuación de segundo orden obtenida del sistema en (a) no es equivalente a ese sistema, en el sentido de que tiene soluciones que no forman parte de ninguna solución del sistema. Así pues, si bien las ecuaciones de orden superior son equivalentes a sistemas, el recíproco no es cierto y los sistemas son más generales.

56. SISTEMAS LINEALES HOMOGENEOS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Ya estamos en disposición de dar una solución completa del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y, \end{cases} \quad (1)$$

donde a_1, b_1, a_2 y b_2 son constantes dadas. Algunos de los problemas de la sección anterior ilustran un procedimiento que es aplicable a menudo en este caso: derivar una ecuación, eliminar una de las variables dependientes y resolver la ecuación lineal de segundo orden resultante. En lugar de eso, el método que ahora presentaremos está basado en la construcción de un par de soluciones linealmente independientes directamente a partir del sistema dado.

Si recordamos que la función exponencial se reproduce, salvo un factor, bajo derivación (véase la Sección 17), es natural buscar soluciones de (1) del tipo

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt}. \end{cases} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) obtenemos

$$Ame^{mt} = a_1Ae^{mt} + b_1Be^{mt}$$

$$Bme^{mt} = a_2Ae^{mt} + b_2Be^{mt},$$

y dividiendo por e^{mt} resulta el sistema lineal algebraico

$$\begin{aligned} (a_1 - m)A + b_1B &= 0 \\ a_2A + (b_2 - m)B &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

en las incógnitas A y B . Es claro que (3) admite la solución trivial $A = B = 0$, que produce en (2) la solución trivial de (1). Como estamos buscando soluciones no triviales de (1), eso no nos sirve para nada. Sin embargo, sabemos que (3) tiene soluciones no triviales siempre que el determinante de los coeficientes se anula, o sea, cuando

$$\begin{vmatrix} a_1 - m & b_1 \\ a_2 & b_2 - m \end{vmatrix} = 0.$$

Al desarrollar este determinante obtenemos la ecuación cuadrática

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \quad (4)$$

en la incógnita m . Por analogía con lo visto antes, llamaremos a esta ecuación la *ecuación auxiliar* del sistema (1). Sean m_1 y m_2 las raíces de (4). Si sustituimos m en (3) por m_1 , sabemos que las ecuaciones resultantes tienen una solución no trivial A_1, B_1 , es decir, que

$$\begin{cases} x = A_1 e^{m_1 t} \\ y = B_1 e^{m_1 t} \end{cases} \quad (5)$$

es una solución no trivial del sistema (1). Procediendo análogamente con m_2 hallamos otra solución no trivial

$$\begin{cases} x = A_2 e^{m_2 t} \\ y = B_2 e^{m_2 t}. \end{cases} \quad (6)$$

Para estar seguros de haber obtenido dos soluciones linealmente independientes, y por tanto la solución general, es necesario examinar en detalle las tres posibilidades para m_1 y m_2 .

Raíces reales distintas. Cuando m_1 y m_2 son números reales distintos, se ve fácilmente que (5) y (6) son linealmente independientes (*¿por qué?*) y

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{m_1 t} + c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y = c_1 B_1 e^{m_1 t} + c_2 B_2 e^{m_2 t} \end{cases} \quad (7)$$

es la solución general de (1).

Ejemplo 1. En el caso del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y, \end{cases} \quad (8)$$

(3) es

$$(1 - m)A + B = 0 \quad (9)$$

$$4A + (-2 - m)B = 0. \quad (9)$$

La ecuación auxiliar es

$$m^2 + m - 6 = 0, \quad \text{o sea,} \quad (m + 3)(m - 2) = 0,$$

así que m_1 y m_2 son -3 y 2 . Con $m = -3$, (9) se convierte en

$$4A + B = 0$$

$$4A + B = 0.$$

Una solución sencilla no trivial de este sistema es $A = 1$, $B = -4$, luego

$$\begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = -4e^{-3t} \end{cases} \quad (10)$$

como solución no trivial de (8). Con $m = 2$, (9) se convierte en

$$-A + B = 0$$

$$4A - 4B = 0,$$

y una solución no trivial es $A = 1$, $B = 1$. Esto da

$$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{2t} \end{cases} \quad (11)$$

como otra solución de (8); y como es claro que (10) y (11) son linealmente independientes,

$$\begin{cases} x = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \\ y = -4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \end{cases} \quad (12)$$

es la solución general de (8).

Raíces complejas distintas. Si m_1 y m_2 son números complejos distintos, se pueden escribir en la forma $a \pm ib$ con a y b reales y $b \neq 0$. En este caso esperamos que los A y B obtenidos de (3) sean números complejos, y tendremos dos soluciones linealmente independientes

$$\begin{cases} x = A_1^* e^{(a+ib)t} \\ y = B_1^* e^{(a+ib)t} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = A_2^* e^{(a-ib)t} \\ y = B_2^* e^{(a-ib)t}. \end{cases} \quad (13)$$

Sin embargo, estas soluciones son complejas. Para extraer soluciones reales, procedemos como sigue. Si expresamos los números A_1^* y B_1^* en la forma $A_1^* = A_1 + iA_2$ y $B_1^* = B_1 + iB_2$ y usamos la fórmula de Euler 17-(7), la primera de las soluciones (13) puede escribirse

$$\begin{cases} x = (A_1 + iA_2)e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt) \\ y = (B_1 + iB_2)e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt), \end{cases}$$

o sea,

$$\begin{cases} x = e^{at}[(A_1 \cos bt - A_2 \operatorname{sen} bt) + i(A_1 \operatorname{sen} bt + A_2 \cos bt)] \\ y = e^{at}[(B_1 \cos bt - B_2 \operatorname{sen} bt) + i(B_1 \operatorname{sen} bt + B_2 \cos bt)]. \end{cases} \quad (14)$$

Es fácil ver que si un par de funciones complejas es solución de (1), cuyos coeficientes son constantes *reales*, sus partes reales e imaginarias son soluciones con valores reales. Se sigue de esto que (14) proporciona las dos soluciones reales

$$\begin{cases} x = e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \operatorname{sen} bt) \\ y = e^{at}(B_1 \cos bt - B_2 \operatorname{sen} bt) \end{cases} \quad (15)$$

y

$$\begin{cases} x = e^{at}(A_1 \operatorname{sen} bt + A_2 \cos bt) \\ y = e^{at}(B_1 \operatorname{sen} bt + B_2 \cos bt). \end{cases} \quad (16)$$

Puede probarse que estas soluciones son linealmente independientes (se pide al lector que lo demuestre en el Problema 3), de modo que la solución general es en este caso

$$\begin{cases} x = e^{at}[c_1(A_1 \cos bt - A_2 \operatorname{sen} bt) + c_2(A_1 \operatorname{sen} bt + A_2 \cos bt)] \\ y = e^{at}[c_1(B_1 \cos bt - B_2 \operatorname{sen} bt) + c_2(B_1 \operatorname{sen} bt + B_2 \cos bt)]. \end{cases} \quad (17)$$

Como ya hemos encontrado la solución general, no es preciso considerar la segunda de las soluciones (13).

Raíces reales iguales. Cuando m_1 y m_2 tienen el mismo valor m , (5) y (6) no son linealmente independientes y obtenemos esencialmente sólo una solución

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt}. \end{cases} \quad (18)$$

Nuestra experiencia en la Sección 17 nos invita a esperar una segunda solución linealmente independiente de la forma

$$\begin{cases} x = Ate^{mt} \\ y = Bte^{mt}. \end{cases}$$

Desgraciadamente, las cosas no son tan sencillas y debemos buscar en realidad una segunda solución de la forma

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y = (B_1 + B_2 t)e^{mt}, \end{cases} \quad (19)$$

de manera que la solución general es

$$\begin{cases} x = c_1 Ae^{mt} + c_2 (A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y = c_1 Be^{mt} + c_2 (B_1 + B_2 t)e^{mt}.^2 \end{cases} \quad (20)$$

Las constantes A_1, A_2, B_1 y B_2 se hallan sustituyendo (19) en el sistema (1). En vez de intentar llevar a cabo esto en general, mostramos cómo funciona en un ejemplo particular.

Ejemplo 2. En el caso del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \end{cases} \quad (21)$$

(3) es

$$\begin{aligned} (3 - m)A - 4B &= 0 \\ A + (-1 - m)B &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

La ecuación auxiliar es

$$m^2 - 2m + 1 = 0, \text{ o sea, } (m - 1)^2 = 0,$$

con raíces iguales ambas a 1. Con $m = 1$ la (22) pasa a ser

$$2A - 4B = 0$$

$$A - 2B = 0.$$

² La única excepción a esta afirmación ocurre cuando $a_1 = b_2 = a$ y $a_2 = b_1 = 0$, de modo que la ecuación auxiliar es $m^2 - 2am + a^2 = 0$, $m = a$, y las constantes A y B en (18) quedan libres. En tal situación, la solución general de (1) es obviamente

$$\begin{cases} x = c_1 e^{mt} \\ y = c_2 e^{mt}, \end{cases}$$

y se dice que el sistema está *desacoplado* (ya que cada ecuación puede resolverse independientemente de la otra).

Una sencilla solución no trivial de este sistema es $A = 2$, $B = 1$, de modo que

$$\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^t \end{cases} \quad (23)$$

es una solución no trivial de (2). Ahora buscamos una segunda solución linealmente independiente de la forma

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2 t)e^t \\ y = (B_1 + B_2 t)e^t. \end{cases} \quad (24)$$

Al sustituir eso en (21) se obtiene

$$(A_1 + A_2 t + A_2)e^t = 3(A_1 + A_2 t)e^t - 4(B_1 + B_2 t)e^t$$

$$(B_1 + B_2 t + B_2)e^t = (A_1 + A_2 t)e^t - (B_1 + B_2 t)e^t,$$

que se reduce a

$$(2A_2 - 4B_2)t + (2A_1 - A_2 - 4B_1) = 0$$

$$(A_2 - 2B_2)t + (A_1 - 2B_1 - B_2) = 0.$$

Dado que éstas han de ser identidades en la variable t , debemos tener

$$2A_2 - 4B_2 = 0 \quad 2A_1 - A_2 - 4B_1 = 0$$

$$A_2 - 2B_2 = 0, \quad A_1 - 2B_1 - B_2 = 0.$$

Las dos ecuaciones de la izquierda admiten $A_2 = 2$, $B_2 = 1$ como solución no trivial. Con ello, las dos ecuaciones de la derecha se convierten en

$$2A_1 - 4B_1 = 2$$

$$A_1 - 2B_1 = 1,$$

así que podemos tomar $A_1 = 1$, $B_1 = 0$. Ahora insertamos estos números en (24), con lo que resulta

$$\begin{cases} x = (1 + 2t)e^t \\ y = te^t \end{cases} \quad (25)$$

como segunda solución. Es evidente que (23) y (25) son linealmente independientes, de modo que

$$\begin{cases} x = 2c_1 e^t + c_2(1 + 2t)e^t \\ y = c_1 e^t + c_2 t e^t \end{cases} \quad (26)$$

es la solución general del sistema (21).

PROBLEMAS

1. Usar los métodos descritos en esta sección para hallar la solución general de los sistemas que se indican:

$$(a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y; \end{cases} \quad (e) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = 3y; \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y; \end{cases} \quad (f) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y; \end{cases} \quad (g) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 6y; \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 8x - 6y; \end{cases} \quad (h) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$$

2. Probar que la condición $a_2 b_1 > 0$ es suficiente, pero no necesaria, para que el sistema (1) tenga dos soluciones reales linealmente independientes de la forma (2).
3. Comprobar que el wronskiano de las dos soluciones (15) y (16) viene dado por

$$W(t) = (A_1 B_2 - A_2 B_1) e^{2at},$$

y probar que $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$.

4. Probar que en la fórmula (20) las constantes A_2 y B_2 satisfacen el mismo sistema algebraico lineal que A y B y que por tanto se puede hacer $A_2 = A$ y $B_2 = B$ sin pérdida de generalidad.
5. Consideremos el sistema lineal inhomogéneo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{cases} \quad (*)$$

y el correspondiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y. \end{cases} \quad (**)$$

(a) Si

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

son soluciones linealmente independientes de (**), así que

$$\begin{cases} x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \\ y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \end{cases}$$

es su solución general, probar que

$$\begin{cases} x = v_1(t)x_1(t) + v_2(t)x_2(t) \\ y = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t) \end{cases}$$

será una solución particular de (*) si las funciones $v_1(t)$ y $v_2(t)$ satisfacen el sistema

$$v'_1x_1 + v'_2x_2 = f_1$$

$$v'_1y_1 + v'_2y_2 = f_2.$$

Esta técnica para hallar soluciones particulares de sistemas lineales inhomogéneos se llama *método de variación de los parámetros*.

(b) Aplicar el método esbozado en (a) para hallar una solución particular del sistema inhomogéneo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - 5t + 2 \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y - 8t - 8, \end{cases}$$

cuyo sistema homogéneo asociado resolvimos en el Ejemplo 1.

57. SISTEMAS NO LINEALES. ECUACIONES PREDADOR-PRESA DE VOLTERRA

Todo el mundo sabe que existe una competición constante por la supervivencia entre las diferentes especies animales que habitan un mismo entorno. Un tipo de animales sobrevive alimentándose de otros; un segundo, desarrollando métodos de evasión para evitar ser comido; etc.

Como simple ejemplo de este conflicto universal entre predadores y presas, imaginemos una isla habitada por zorros y conejos. Los zorros se alimentan de conejos y los conejos de alfalfa. Supondremos que la alfalfa es tan abundante que los conejos nunca tienen escasez de alimento. Cuando los conejos son abundantes, los zorros no tienen problemas y su población aumenta. Cuando los zorros son ya demasiado numerosos y necesitan para comer demasiados conejos, comienza un período de hambre y su población disminuye. En consecuencia, los conejos están relativamente a salvo y se multiplican. Esto conlleva un nuevo aumento de la población de zorros, y con el transcurso del tiempo, el ciclo se repite una y otra vez, con crecimientos y decrecimientos alternos de las poblaciones de las dos especies. Estas fluctuaciones se muestran en la Figura 64, donde se han representado las poblaciones en función del tiempo.

Problemas de esta clase han sido estudiados tanto por los matemáticos como por los biólogos, y es muy interesante ver cómo las conclusiones matemáticas que presentaremos confirman y extienden las ideas obtenidas por intuición en el párrafo precedente. Al discutir la interacción entre zorros y conejos, seguiremos el esquema de Volterra, quien inició el tratamiento cuantitativo de este tipo de cuestiones³.

Si x es el número de conejos en el instante t , debemos tener

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad a > 0,$$

como consecuencia de la provisión ilimitada de alfalfa, si el número y de zorros es cero. Es lógico suponer que el número de encuentros por unidad de tiempo entre zorros y conejos es conjuntamente proporcional a x e y . Si suponemos

³ Vito Volterra (1860-1940) fue un eminente matemático italiano, cuyos trabajos pioneros sobre ecuaciones integrales, junto a los de Fredholm y Hilbert, abrieron el desarrollo a gran escala del análisis lineal que dominó buena parte de las matemáticas en la primera mitad del siglo xx. Sus profundas incursiones posteriores en la biología matemática enriquecieron al mismo tiempo las matemáticas y la biología. Para más detalles, véase sus *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, París, 1931; o A. J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology*, páginas 88-94, Dover, Nueva York, 1956. Una moderna exposición, con los datos de la Hudson's Bay Company sobre el número de linces y liebres en Canadá entre 1847 y 1903, puede encontrarse en E. R. Leigh, «The Ecological Role of Volterra's Equations», en *Some Mathematical Problems in Biology*, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1968.

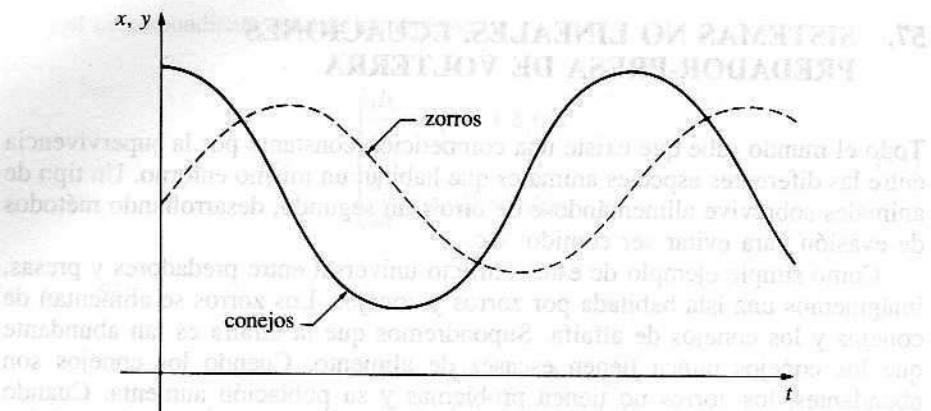


Figura 64

además que una cierta proporción de los encuentros da como resultado la captura de un conejo por un zorro, tendremos

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \quad a \text{ y } b > 0.$$

De igual modo

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy, \quad c \text{ y } d > 0;$$

porque en ausencia de conejos los zorros mueren y su crecimiento depende del número de sus encuentros con conejos. Por tanto, tenemos el siguiente sistema no lineal para la descripción de la interacción de esas dos especies:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} = -y(c - dx). \end{cases} \quad (1)$$

Las ecuaciones (1) se llaman *ecuaciones predador-presa de Volterra*. Por desgracia, este sistema no se puede resolver en términos de funciones elementales. Por otra parte, si pensamos en su desconocida solución

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

como las ecuaciones paramétricas de una curva en el plano xy , podemos encontrar la ecuación rectangular de esa curva. Eliminando t en (1) por división y separando variables vemos que

$$\frac{(a - by) \ dy}{y} = - \frac{(c - dx) \ dx}{x}.$$

Integrando,

$$a \log y - by = -c \log x + dx + \log K,$$

es decir,

$$y^a e^{-by} = K x^{-c} e^{dx}, \quad (2)$$

donde la constante K viene dada por

$$K = x_0 y_0^a e^{-dx_0 - by_0}$$

en términos de los valores iniciales de x e y .

Aunque no podemos despejar x o y en (2), sí podemos determinar puntos de la curva por un ingenioso método debido a Volterra. Para ello, igualamos los lados izquierdo y derecho de (2) a nuevas variables z y w y dibujamos las gráficas C_1 y C_2 de las funciones

$$z = y^a e^{-by} \quad y \quad w = K x^{-c} e^{dx} \quad (3)$$

como muestra la Figura 65. Como $z = w$, estamos confinados en el tercer cuadrante a la línea de trazo discontinuo L . Al máximo valor de z dado por el punto A sobre C_1 le corresponde un y , y vía M sobre L y los correspondientes puntos A' y A'' sobre C_2 dos x , las cuales determinan los límites entre los que x debe variar. Análogamente, el mínimo valor de w dado por B sobre C_2 conduce a N sobre L , y por tanto a B' y B'' sobre C_1 , puntos éstos que determinan los límites para y . De esta manera hallamos los puntos P_1 , P_2 y Q_1 , Q_2 sobre la deseada curva C_3 . Puntos adicionales se hallan fácilmente partiendo sobre L de un punto R cualquiera entre M y N , y proyectando hacia arriba a C_1 y luego a C_3 , o a la derecha sobre C_2 y luego sobre C_3 , como indica la figura. Es claro que un cambio del valor de K hace subir o bajar el punto B , lo cual expande o contrae la curva C_3 . Así pues, dando a K diversos valores obtenemos una familia de óvalos en torno al punto S que es todo cuanto queda de C_3 cuando el valor mínimo de w coincide con el valor máximo de z .

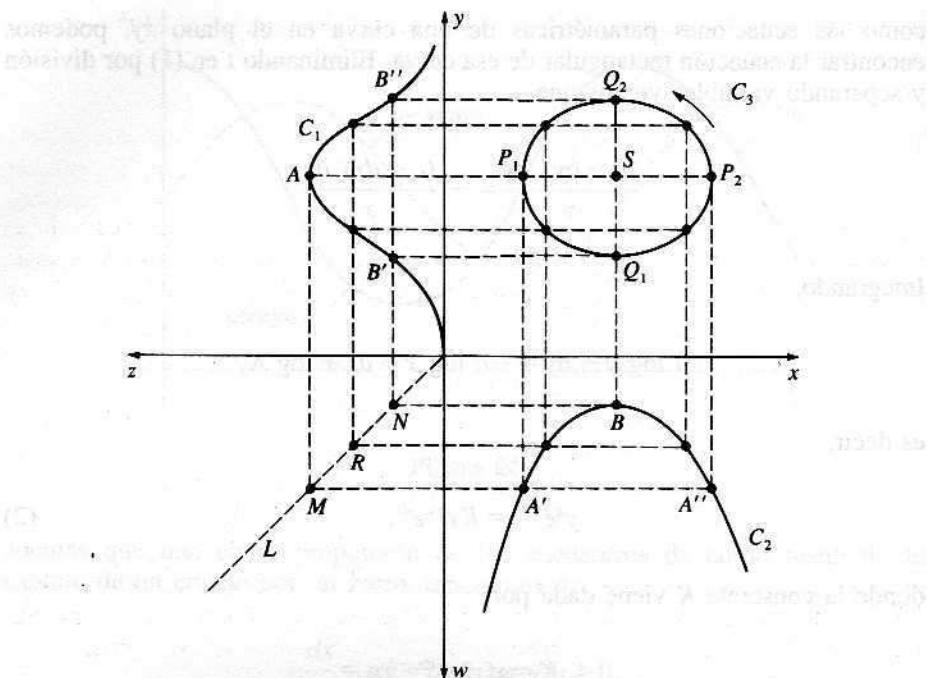


Figura 65

A continuación vamos a mostrar que al crecer t el punto correspondiente (x, y) de C_3 se mueve por la curva en sentido contrario a las agujas de un reloj. A tal fin, empezaremos haciendo notar que las ecuaciones (1) dan las componentes horizontal y vertical de la velocidad de ese punto. Un sencillo cálculo basado en (3) nos dice que el punto S tiene coordenadas $x = c/d$, $y = a/b$. Cuando $x < c/d$, de la segunda ecuación en (1) se desprende que dy/dt es negativa, así que nuestro punto sobre C_3 desciende mientras recorre el arco $Q_2P_1Q_1$. Análogamente, sube al recorrer el arco $Q_1P_2Q_2$, de modo que queda confirmada la proposición.

Finalmente, ilustremos el importante *método de linealización* aprovechando el ejemplo de los zorros y los conejos. Observemos en primer lugar que si las poblaciones de conejos y de zorros son

$$x = \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad y = \frac{a}{b}, \quad (4)$$

el sistema (1) se satisface y se tiene $dx/dt = 0$ y $dy/dt = 0$, de manera que x e y ni crecen ni decrecen. Esas poblaciones (4) se llaman *poblaciones de equilibrio*, porque x e y pueden mantenerse indefinidamente en esos valores. Es obvio que éste es el caso especial en el cual el mínimo de w coincide con

el máximo de z , de modo que el óvalo C_3 se reduce al punto S . Si regresamos al caso general y ponemos

$$x = \frac{c}{d} + X \quad \text{e} \quad y = \frac{a}{b} + Y,$$

entonces X e Y vienen a ser las desviaciones de x e y respecto de sus valores de equilibrio. Un cálculo sin dificultad muestra que si x e y en (1) se sustituyen por X e Y [lo que equivale a trasladar el punto $(c/d, a/b)$ al origen], (1) se convierte en

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -\frac{bc}{d} Y - bXY \\ \frac{dY}{dt} = \frac{ad}{b} X + dXY. \end{cases} \quad (5)$$

Ahora «linealizamos» suponiendo que si X e Y son pequeños, los términos en XY son despreciables en (5) sin error importante. Esta hipótesis es poco más que un deseo, pero en cualquier caso simplifica (5) a un sistema lineal

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -\frac{bc}{d} Y \\ \frac{dY}{dt} = \frac{ad}{b} X. \end{cases} \quad (6)$$

Es fácil hallar la solución general de (6), pero es todavía más fácil eliminar t por división para llegar a

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{ad^2}{b^2c} \frac{X}{Y},$$

cuya solución es inmediata:

$$ad^2X^2 + b^2cY^2 = C^2.$$

Es una familia de elipses que rodea al origen en el plano XY . Como las elipses son cualitativamente similares a los óvalos de la Figura 65, tenemos esperanza razonable en que (6) sea una aproximación aceptable de (5).

Confiamos en que el lector esté de acuerdo en que el problema de los zorros y los conejos es interesante por sí mismo. Más allá de él, sin embargo, hemos podido apreciar el hecho de que los sistemas no lineales nos enfrentan a cuestiones de naturaleza muy diferente a los tratados con anterioridad. Estu-

diando un sistema como (1) hemos aprendido a dirigir nuestra atención al comportamiento de las soluciones cerca de los puntos del plano xy en los que los miembros de la derecha se anulan; hemos visto por qué las soluciones periódicas (o sea, las que dan curvas cerradas simples tales como C_3 en la Figura 65) son importantes y deseables; y tenemos cierta idea de un método para estudiar sistemas no lineales por medio de sistemas lineales. En el próximo capítulo analizaremos los sistemas no lineales más detenidamente, y cada uno de esos aspectos se investigará con más detalle y generalidad.

PROBLEMAS

1. Eliminar y del sistema (1) y obtener la ecuación no lineal de segundo orden que satisface la función $x(t)$.
2. Probar que $d^2y/dt^2 > 0$ siempre que $dx/dt > 0$. ¿Qué significa ese resultado en términos de la Figura 64?

ECUACIONES NO LINEALES

58. SISTEMAS AUTONOMOS. EL PLANO DE FASES Y SUS FENOMENOS

Dos vías principales resumen el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales. La primera, y más antigua, se caracteriza por una búsqueda de soluciones explícitas, bien sea en fórmulas exactas (lo que rara vez resulta factible) o bien en términos de series de potencias. En la segunda, se abandona toda pretensión de resolver las ecuaciones diferenciales en sentido tradicional y uno se concentra, en vez de eso, en obtener información cualitativa sobre el comportamiento general de las soluciones. Hemos optado por este punto de vista en el Capítulo 4 referente a las ecuaciones lineales. La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales fue iniciada por Poincaré hacia 1880, en relación con sus trabajos en mecánica celeste, y desde entonces ha merecido interés creciente en matemática pura y aplicada¹.

La teoría de ecuaciones diferenciales lineales ha sido objeto de profundos estudios a lo largo de los últimos 200 años y es un campo muy bien conocido ya y muy completo. Por el contrario, no se sabe casi nada de carácter general acerca de las ecuaciones diferenciales no lineales. En este capítulo deseamos echar un vistazo a las ideas y métodos centrales en esta materia, así como poner de manifiesto que presenta una amplia gama de fenómenos nuevos e interesantes que no hacen acto de presencia en la teoría lineal. El lector quedará sorprendido al ver que muchos de ellos se pueden tratar de forma elemental, sin recurrir a técnicas matemáticas sofisticadas. De hecho, requieren poco más

¹ Véase el Apéndice A para una descripción general de la obra de Poincaré en física y matemáticas.

que ecuaciones diferenciales elementales y álgebra vectorial en dos dimensiones.

¿Por qué interesarse en ecuaciones no lineales? La razón principal es que muchos sistemas físicos, y las ecuaciones que los describen, son no lineales por la propia naturaleza del fenómeno en cuestión. Las linealizaciones usuales no son sino aproximaciones que conllevan la resignación de reconocerse impotente ante el problema no lineal, y son utilizadas por aquello de que, en todo caso, más vale poco que nada. Cabe añadir que en muchas situaciones físicas las aproximaciones lineales resultan ser adecuadas y válidas para la mayor parte de los propósitos. Ello no altera para nada el hecho de que en otras muchas situaciones la linealización está fuera de lugar².

Es bien sencillo ofrecer ejemplos de problemas que son esencialmente no lineales. Sin ir más lejos, si x es el ángulo de desviación de un péndulo no amortiguado de longitud a , cuya pesa tiene masa m , vimos en la Sección 5 que su ecuación de movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{a} \operatorname{sen} x = 0; \quad (1)$$

y si existiese una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad de la pesa, entonces la ecuación sería

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{g}{a} \operatorname{sen} x = 0. \quad (2)$$

En la linealización habitual se sustituye $\operatorname{sen} x$ por x , lo cual es razonable para pequeñas oscilaciones pero implica un error considerable para x grandes. Un ejemplo de tipo distinto se encuentra en la teoría de válvulas en vacío, que conduce a la importante *ecuación de van der Pol*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (3)$$

Veremos más adelante que cada una de estas ecuaciones no lineales tiene interesantes propiedades que las demás no comparten.

En este capítulo nos ocuparemos de ecuaciones no lineales de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (4)$$

² Incluso fue sugerido por Einstein que puesto que las ecuaciones fundamentales de la física son no lineales, habría que rehacer toda la física matemática. Si su bola de cristal estaba limpia el día en que dijo tal cosa, las matemáticas del futuro serán, con certeza, muy diferentes de las del pasado y el presente.

que incluyen a las ecuaciones (1), (2) y (3) como casos especiales. Si imaginamos un sistema dinámico simple constituido por una partícula de masa unidad que se mueve por el eje x y si $f(x, dx/dt)$ es la fuerza que actúa sobre ella, entonces (4) es su ecuación de movimiento. Los valores de x (posición) y de dx/dt (velocidad), que caracterizan el estado de la partícula en cada instante, se llaman sus *fases*, y el plano de las variables $x, dx/dt$ se llama el *plano de fases*. Introduciendo la variable $y = dx/dt$, (4) queda en la forma equivalente

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = f(x, y). \end{cases} \quad (5)$$

Veremos que estudiando las soluciones de (5) se aprende mucho sobre las de (4). Cuando se mira t como parámetro, en general una solución de (5) es un par de funciones $x(t), y(t)$ que definen una curva en el plano xy , que no es sino el plano de fases antes mencionado.

Estaremos interesados en la gráfica global formada por todas esas curvas en el plano de fases.

Más en general, estudiaremos sistemas

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y), \end{cases} \quad (6)$$

donde F y G son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en todo el plano. Un sistema de esta clase, en el que la variable independiente t no aparece en las funciones F y G de la derecha, se llama *autónomo*. Vamos a analizar más en detalle las soluciones de un tal sistema.

De nuestras hipótesis y del Teorema 59-A se sigue que si t_0 es cualquier número y (x_0, y_0) es cualquier punto del plano de fases, existe una única solución

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (7)$$

de (6) tal que $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$. Si $x(t)$ e $y(t)$ no son ambas funciones

constantes, entonces (7) define una curva en el plano de fases llamada una *trayectoria* del sistema³. Es claro que si (7) es solución de (6), entonces

$$\begin{cases} x = x(t + c) \\ y = y(t + c) \end{cases} \quad (8)$$

también lo es para cualquier constante c . Así pues, cada trayectoria viene representada por muchas soluciones que difieren entre sí por una traslación del parámetro. Además, es muy fácil probar (véase Problema 2) que cualquier trayectoria que pase por el punto (x_0, y_0) debe corresponder a una solución de la forma (8). De ello se deduce que a lo sumo pasa una trayectoria por cada punto del plano de fases. Más aún, la dirección de t creciente a lo largo de la trayectoria dada es la misma para todas las soluciones que representan a esa trayectoria. Una trayectoria es, por tanto, una *curva dirigida*, y en nuestras figuras utilizaremos flechas para indicar la dirección de t creciente sobre las trayectorias.

Las observaciones anteriores muestran que, en general, las trayectorias de (6) cubren todo el plano de fases y no intersectan entre sí. La única excepción a esta afirmación ocurre en los puntos (x_0, y_0) , donde tanto F como G son cero:

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad y \quad G(x_0, y_0) = 0.$$

Esos puntos se llaman *puntos críticos*, y en ellos la solución única garantizada por el Teorema 54-A es la solución constante $x = x_0$, $y = y_0$. Una solución constante no define una trayectoria, de modo que por un punto crítico no pasa ninguna trayectoria. En lo que sigue supondremos que todo punto crítico (x_0, y_0) es *aislado*, en el sentido de que existe un círculo centrado en (x_0, y_0) que no contiene ningún otro punto crítico.

Con el fin de lograr una interpretación física de los puntos críticos, consideremos el sistema autónomo especial (5) que surge de la ecuación dinámica (4). En este caso, un punto crítico es un punto $(x_0, 0)$ en el que $y = 0$ y $f(x_0, 0) = 0$; esto es, corresponde a un estado de movimiento de la partícula en el que tanto la velocidad dx/dt como la aceleración $dy/dt = d^2x/dt^2$ se anulan. Eso significa que la partícula está en reposo sin fuerza que actúe sobre ella, y está, por consiguiente, en un estado de equilibrio⁴. Es obvio que los estados de equilibrio de un sistema físico figuran entre sus rasgos más importantes, y eso forma parte de nuestra motivación para su estudio.

El sistema autónomo general (6) no proviene necesariamente de ecuaciones dinámicas de la forma (4). ¿Qué significado físico cabe asignar a las trayectorias y puntos críticos en esos otros casos? Aquí conviene considerar la Figura 66 y el campo vectorial bidimensional definido por

$$\mathbf{V}(x, y) = F(x, y)\mathbf{i} + G(x, y)\mathbf{j},$$

³ Algunos autores las llaman *características*.

⁴ Por esa razón algunos autores llaman a los puntos críticos *puntos de equilibrio*.

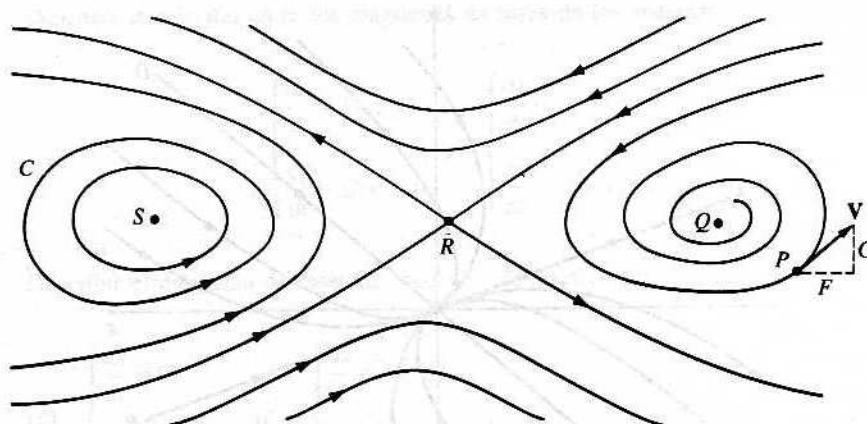


Figura 66

que en un punto típico $P = (x, y)$ tiene componente horizontal $F(x, y)$ y componente vertical $G(x, y)$. Como $dx/dt = F$ y $dy/dt = G$, este vector es tangente a la trayectoria en P y apunta en la dirección de t creciente. Si interpretamos t como el tiempo, \mathbf{V} se puede interpretar como el vector velocidad de una partícula que se mueve por la trayectoria. Podemos imaginar también que todo el plano de fases está lleno de partículas y que cada trayectoria es la traza de una partícula precedida y seguida por muchas otras sobre su misma trayectoria, y acompañada por muchas otras sobre las demás trayectorias. Esta situación puede describirse como un *fluido en movimiento*; y dado que el sistema (6) es autónomo, lo que significa que el vector $\mathbf{V}(x, y)$ en un punto fijo (x, y) no cambia con el tiempo, el movimiento del fluido es *estacionario*. Las partículas recorren las trayectorias, y los puntos críticos Q , R y S son puntos de velocidad cero donde las partículas se hallan en reposo (o sea, puntos de estancamiento del fluido).

Los rasgos más característicos del movimiento de un fluido, ilustrados en la Figura 67, son:

- los puntos críticos;
- la disposición de las trayectorias cerca de los puntos críticos;
- la estabilidad o inestabilidad de los puntos críticos, es decir, si una partícula próxima a uno de ellos permanece cerca de él o se aleja hacia otra zona del plano;
- las trayectorias cerradas (como la C de la figura), que corresponden a soluciones periódicas.

Estos ingredientes constituyen una parte esencial del *diagrama de fases* (gráfico global de las trayectorias) del sistema (6). Ya que en general las ecuaciones y sistemas no lineales no pueden resolverse explícitamente, el propósito de la teoría cualitativa discutida en este capítulo es descubrir cuánto sea posible acerca del diagrama de fases directamente de las funciones F y G . Para darnos

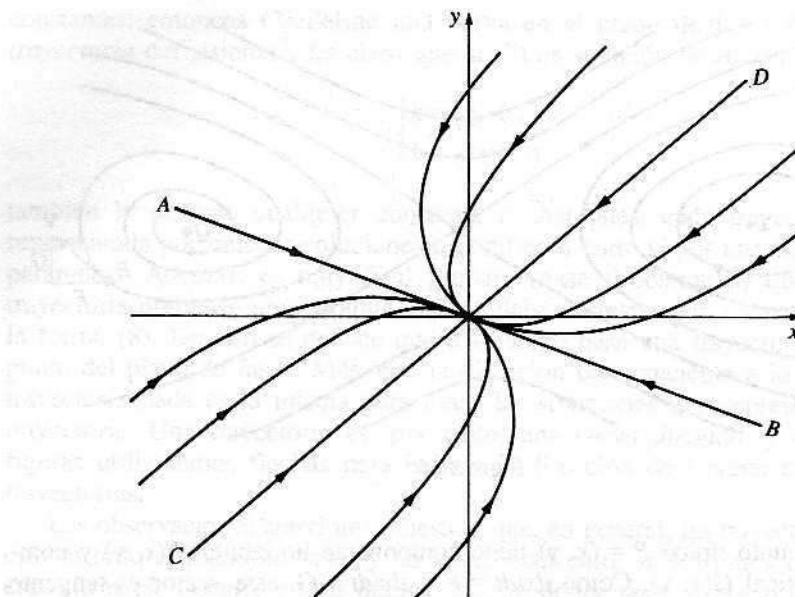


Figura 67

idea del tipo de información que se puede esperar obtener, nótese que si $x(t)$ es una solución periódica de la ecuación dinámica (4), su derivada $y = dx/dt$ es también periódica y por tanto la trayectoria asociada en el plano de fases es cerrada. Recíprocamente, si alguna trayectoria del sistema (5) es cerrada, el sistema tiene alguna solución periódica. Como ejemplo concreto de aplicación de esta idea, observemos que para la ecuación de van der Pol, que no se sabe resolver, podemos demostrar la existencia de una única solución periódica (si $\mu > 0$) sin más que probar que un sistema autónomo equivalente tiene una única trayectoria cerrada.

PROBLEMAS

- Deducir la ecuación (2) aplicando la segunda ley del movimiento de Newton a la pesa del péndulo.
- Sea (x_0, y_0) un punto del plano de fases. Si $x_1(t), y_1(t)$ y $x_2(t), y_2(t)$ son soluciones de (6) tales que $x_1(t_1) = x_0, y_1(t_1) = y_0$ y $x_2(t_2) = x_0, y_2(t_2) = y_0$ para apropiados t_1 y t_2 , probar que existe una constante c tal que

$$x_1(t+c) = x_2(t) \quad \text{e} \quad y_1(t+c) = y_2(t).$$

3. Describir la relación entre los diagramas de fases de los sistemas

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -G(x, y). \end{cases}$$

4. Describir el diagrama de fases de cada uno de los siguientes sistemas:

$$(a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0; \end{cases} \quad (c) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2; \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 0; \end{cases} \quad (d) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

5. Los puntos críticos y las trayectorias de la ecuación (4) son, por definición, los del sistema equivalente (5). Hallar los puntos críticos de las ecuaciones (1), (2) y (3).

6. Hallar los puntos críticos de

$$(a) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - (x^3 + x^2 - 2x) = 0;$$

$$(b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^2 - 5x + 6 \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

7. Hallar las soluciones del sistema no autónomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t, \end{cases}$$

y dibujar en el plano xy algunas de las curvas definidas por tales soluciones.

59. TIPOS DE PUNTOS CRITICOS. ESTABILIDAD

Consideremos un sistema autónomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Supondremos, como de costumbre, que las funciones F y G son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en todo el plano xy . Los puntos críticos de (1) se pueden calcular, al menos en principio, resolviendo las ecuaciones simultáneas $F(x, y) = 0$ y $G(x, y) = 0$. Hay cuatro tipos simples de puntos críticos que ocurren frecuentemente y nuestro objetivo en esta sección es describirlos en términos de las configuraciones de las trayectorias cercanas. Antes necesitamos un par de definiciones.

Sea (x_0, y_0) un punto crítico aislado de (1). Si $C = [x(t), y(t)]$ es una trayectoria de (1), diremos que C tiende a (x_0, y_0) cuando $t \rightarrow \infty$ si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0. \quad ^5 \quad (2)$$

Geométricamente, eso significa que si $P = (x, y)$ es un punto que recorre C de acuerdo con las ecuaciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$, entonces $P \rightarrow (x_0, y_0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Si es cierto que además

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} \quad (3)$$

existe, o si el cociente en (3) se hace positiva o negativamente infinito cuando $t \rightarrow \infty$, entonces se dice que C entra al punto crítico (x_0, y_0) cuando $t \rightarrow \infty$. El cociente en (3) es la pendiente de la recta que une (x_0, y_0) y el punto P de coordenadas $x(t)$ e $y(t)$, de manera que el requisito adicional significa que esa recta tiende a una dirección determinada cuando $t \rightarrow \infty$. En las definiciones anteriores podemos considerar asimismo límites para $t \rightarrow -\infty$. Es claro que estas propiedades son propiedades de la trayectoria C y no dependen de qué solución concreta se escoja para representarla.

A veces es posible hallar soluciones explícitas del sistema (1), y estas soluciones se pueden utilizar para determinar trayectorias. En la mayoría de los

⁵ Se puede demostrar que si (2) es cierta para alguna solución $x(t), y(t)$, entonces (x_0, y_0) es necesariamente un punto crítico. Véase F. G. Tricomi, *Differential Equations*, pág. 47, Blackie, Glasgow, 1961.

casos, sin embargo, para hallar las trayectorias es necesario eliminar t entre las dos ecuaciones del sistema, lo que lleva a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}. \quad (4)$$

Las ecuaciones de primer orden dan la pendiente de la tangente a la trayectoria de (1) que pasa por el punto (x, y) , supuesto que las funciones F y G no se anulan simultáneamente en ese punto. En este caso, claro está, el punto es un punto crítico y ninguna trayectoria pasa por él. Las trayectorias de (1) coinciden pues con la familia uniparamétrica de curvas integrales de (4), y esta familia puede obtenerse a menudo por los métodos del Capítulo 2. Hay que hacer notar, no obstante, que mientras las trayectorias de (1) son curvas dirigidas, las curvas integrales de (4) no tienen dirección asociada a ellas. Cada una de estas técnicas para determinar las trayectorias se ilustrará en los ejemplos que seguirán.

Ahora daremos la descripción geométrica de las cuatro clases de puntos críticos. En cada caso suponemos que el punto crítico en cuestión es el origen $O = (0, 0)$.

Nodos. Un punto crítico como el de la Figura 67 se llama un *nodo*. A un punto de este tipo tiende e incluso entra toda trayectoria cuando $t \rightarrow \infty$ (o cuando $t \rightarrow -\infty$). Para el nodo de la Figura 67 existen cuatro trayectorias en forma de semirrecta AO , BO , CO y DO , que junto con el origen forman las rectas AB y CD . Todas las demás trayectorias tienen el aspecto de partes de parábolas, y al tender hacia O sus pendientes tienden a la de la recta AB .

Ejemplo 1. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y. \end{cases} \quad (5)$$

Es claro que el origen es el único punto crítico y que la solución general se puede hallar fácilmente por los métodos de la Sección 56:

$$\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_1 e^t + c_2 e^{2t}. \end{cases} \quad (6)$$

Cuando $c_1 = 0$, tenemos $x = 0$ e $y = c_2 e^{2t}$. En este caso la trayectoria (Fig. 68) es el eje y positivo cuando $c_2 > 0$ y el negativo cuando $c_2 < 0$, y cada trayectoria tiende y entra al origen para $t \rightarrow -\infty$. Cuando $c_2 = 0$, tenemos $x = c_1 e^t$ e $y = c_1 e^t$. Esta trayectoria es la semirrecta $y = x$, $x > 0$, cuando $c_1 > 0$, y la semirrecta $y = x$, $x < 0$, si $c_1 < 0$, y de nuevo ambas trayectorias tienden y entran al origen para $t \rightarrow -\infty$. Cuando tanto c_1 como c_2 son $\neq 0$, las trayectorias están sobre las parábolas $y = x + (c_2/c_1^2)x^2$, que van hacia el origen con pendiente 1. Debe entenderse que cada

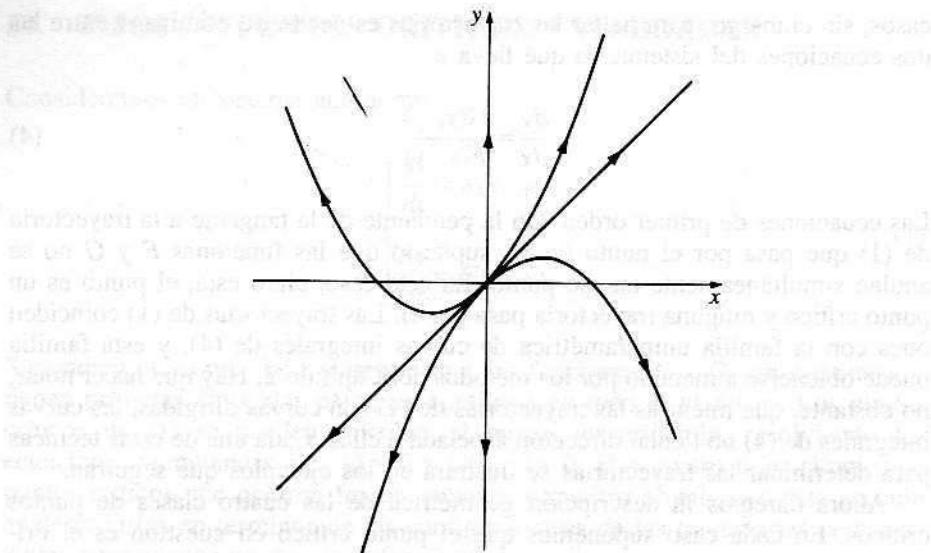


Figura 68

una de estas trayectorias consta sólo de una porción de parábola, la parte con $x > 0$ si $c_1 > 0$, y la parte $x < 0$ si $c_1 < 0$. Cada una de esas trayectorias tiende y entra también al origen cuando $t \rightarrow -\infty$; eso se puede ver de (6). Si pasamos directamente de (5) a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + 2y}{x}, \quad (7)$$

que da la pendiente de la tangente a la trayectoria que pasa por (x, y) [supuesto $(x, y) \neq (0, 0)$], entonces resolviendo (7) como ecuación homogénea encontramos que $y = x + cx^2$. Este procedimiento proporciona las curvas en las que se hallan las trayectorias (excepto aquellas que están sobre el eje y), pero no da información sobre cómo se recorren las trayectorias. De nuestra discusión es claro que el punto crítico $(0, 0)$ del sistema (5) es un nodo.

Puntos silla. Un punto crítico como el de la Figura 69 se llama un *punto silla*. Hacia él tiende y a él entran, de hecho, dos semirrectas AO y BO cuando $t \rightarrow \infty$, y esas dos trayectorias están situadas sobre una recta AB . También ocurre lo mismo con las semirrectas CO y DO cuando $t \rightarrow -\infty$, y esas dos trayectorias están sobre la recta CD . Entre esas cuatro trayectorias en forma de semirrecta hay cuatro regiones, cada una de las cuales contiene una familia de trayectorias que asemejan hipérbolas. Estas no tienden a O cuando $t \rightarrow \infty$ o $t \rightarrow -\infty$, sino que son asintóticas a alguna de las semirrectas cuando $t \rightarrow \infty$ y cuando $t \rightarrow -\infty$.

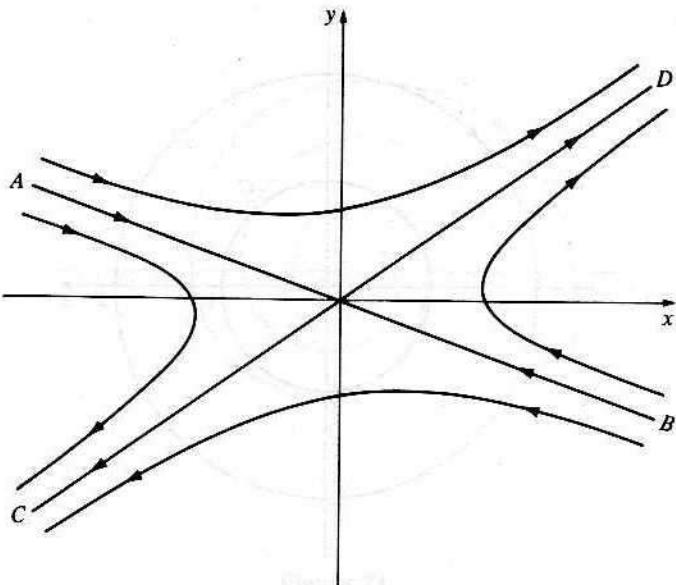


Figura 69

Centros. Un *centro* (llamado a veces un *vórtice*) es un punto crítico que está rodeado por una familia de trayectorias cerradas. Ninguna trayectoria tiende a él cuando $t \rightarrow \infty$ ni cuando $t \rightarrow -\infty$.

Ejemplo 2. El sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad (8)$$

tiene al origen como único punto crítico, y su solución general es

$$\begin{cases} x = -c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t \\ y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t. \end{cases} \quad (9)$$

La solución que satisface las condiciones $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$ es claramente

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t; \end{cases} \quad (10)$$

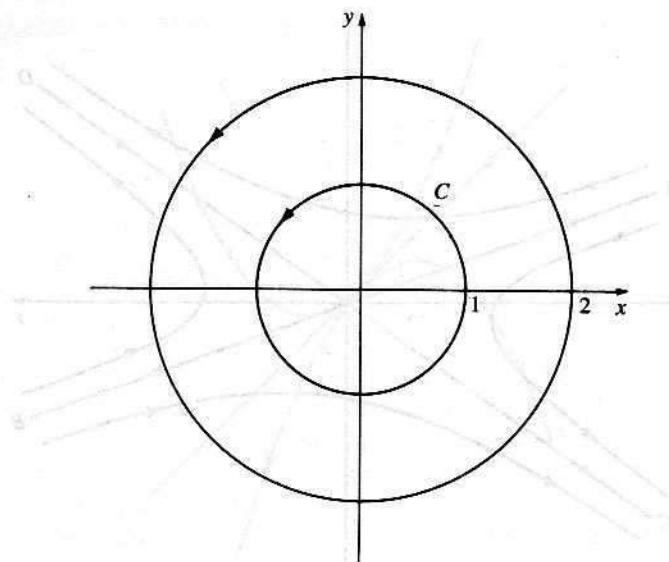


Figura 70

y la solución determinada por $x(0) = 0$ e $y(0) = -1$ es

$$\begin{cases} x = \sin t = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ y = -\cos t = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right). \end{cases} \quad (11)$$

Estas dos soluciones diferentes definen la misma trayectoria C (Fig. 70), a saber, el círculo $x^2 + y^2 = 1$. Tanto (10) como (11) muestran que esa trayectoria se recorre en sentido contrario a las agujas de un reloj. Si eliminamos t entre las ecuaciones del sistema, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

cuya solución general $x^2 + y^2 = c^2$ da todas las trayectorias (pero sin sus direcciones de recorrido). Es obvio que el punto crítico $(0, 0)$ del sistema (8) es un centro.

Focos. Un punto crítico como el de la Figura 71 se llama un *foco* (o *punto espiral*). A él tienden las trayectorias de una familia que gira en forma espiral un número infinito de veces cuando $t \rightarrow \infty$ (o cuando $t \rightarrow -\infty$). Nótese en particular que aunque las trayectorias tienden a O , no entran a él. Es decir, un punto P que se mueva por una de esas trayectorias se approxima a O

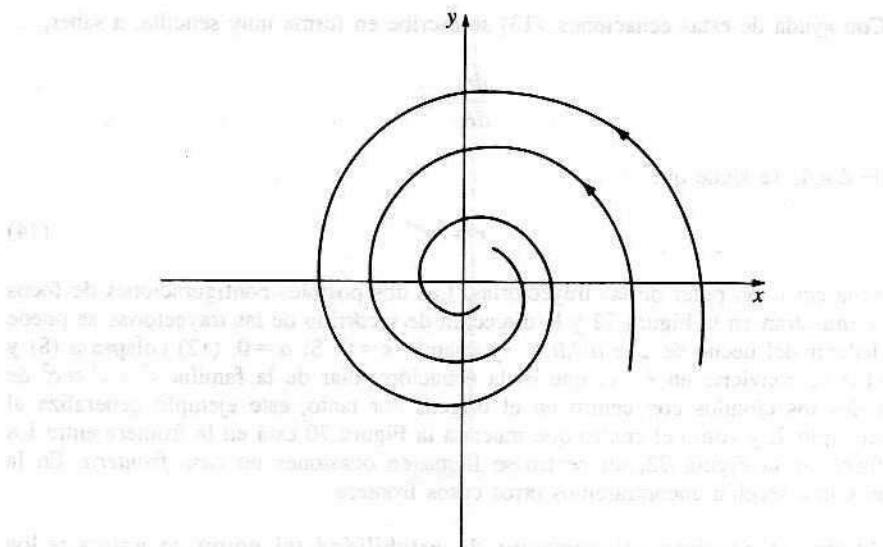


Figura 71

cuando $t \rightarrow \infty$ (o cuando $t \rightarrow -\infty$), pero la línea OP no tiende hacia O en ninguna dirección definida.

Ejemplo 3. Si a es una constante arbitraria, el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - y \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \end{cases} \quad (12)$$

tiene al origen como único punto crítico (¿por qué?). La ecuación diferencial de las trayectorias,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+ay}{ax-y}, \quad (13)$$

se resuelve más fácilmente introduciendo coordenadas polares r, θ definidas por $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Como

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad y \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x},$$

vemos que

$$r \frac{dr}{dx} = x + y \frac{dy}{dx} \quad y \quad r^2 \frac{d\theta}{dx} = x \frac{dy}{dx} - y.$$

Con ayuda de estas ecuaciones, (13) se escribe en forma muy sencilla, a saber,

$$\frac{dr}{d\theta} = ar,$$

de donde se sigue que

$$r = ce^{a\theta} \quad (14)$$

es la ecuación polar de las trayectorias. Las dos posibles configuraciones de focos se muestran en la Figura 72 y la dirección de recorrido de las trayectorias se puede deducir del hecho de que $dx/dt = -y$ cuando $x = 0$. Si $a = 0$, (12) colapsa a (8) y (14) se convierte en $r = c$, que es la ecuación polar de la familia $x^2 + y^2 = c^2$ de todos los círculos con centro en el origen. Por tanto, este ejemplo generaliza al Ejemplo 2, y como el centro que muestra la Figura 70 está en la frontera entre los focos de la Figura 72, un centro se llama en ocasiones un *caso frontera*. En la próxima sección encontraremos otros casos frontera.

Ahora introducimos el concepto de *estabilidad* tal como se aplica a los puntos críticos del sistema (1).

Sé hizo notar en la sección anterior que una de las cuestiones más importantes en el estudio de un sistema físico lo constituyen sus estados estacionarios. Sin embargo, un estado estacionario tiene poco interés si no goza de un cierto grado de permanencia, es decir, a menos que sea estable. A título de ejemplo sencillo, consideremos el péndulo de la Figura 73. Hay dos estados estacionarios posibles: cuando la pesa está en reposo en el punto más alto y cuando está en reposo en el punto más bajo. El primer estado es obviamente inestable y el segundo es estable. Recordemos ahora que un estado estacionario de un sistema físico simple corresponde a un punto de equilibrio (o punto crítico) en el plano de fases. Estas consideraciones sugieren que una pequeña perturbación de un estado de equilibrio inestable produce un alejamiento más y más grande de dicho punto, mientras que lo contrario es cierto para un punto de equilibrio estable.

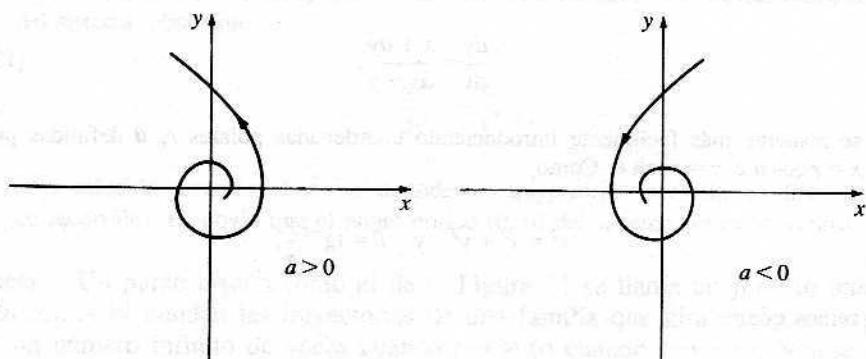


Figura 72



Figura 73

Vamos a formular estas nociones intuitivas de manera más precisa. Consideremos un punto crítico del sistema (1) y supongamos por conveniencia que está localizado en el origen $O = (0, 0)$ del plano de fases. Se dice que este punto crítico es *estable* si para cada número positivo R existe un número positivo $r \leq R$ tal que toda trayectoria que está dentro del círculo $x^2 + y^2 = r^2$ para algún $t = t_0$ permanece en el círculo $x^2 + y^2 = R^2$ para todo $t > t_0$ (Fig. 74). Hablando sin gran precisión, un punto crítico es estable si todas las trayectorias que están suficientemente cercanas a él permanecen cercanas a él. Además, nuestro punto crítico se llama *asintóticamente estable* si es estable y existe un círculo $x^2 + y^2 = r_0^2$ tal que toda trayectoria que está dentro de él para algún $t = t_0$ tiende al origen cuando $t \rightarrow \infty$. Finalmente, si nuestro punto crítico no es estable, diremos que es *inestable*.

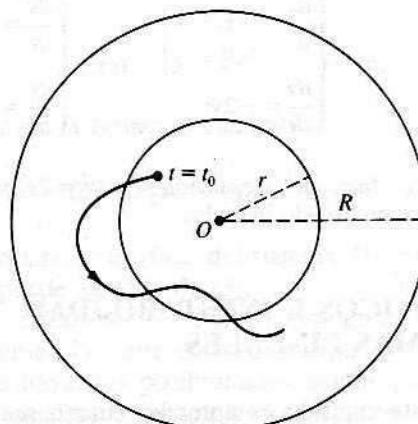


Figura 74

Como ejemplos de estos conceptos, digamos que el nodo de la Figura 68, el punto silla de la Figura 69 y el foco de la izquierda en la Figura 72 son inestables, mientras que el centro de la Figura 70 es estable pero no asintóticamente estable. El nodo de la Figura 67, el foco de la Figura 71 y el foco de la derecha en la Figura 72 son asintóticamente estables.

PROBLEMAS

1. Para cada uno de los siguientes sistemas no lineales: (i) hallar sus puntos críticos; (ii) hallar la ecuación diferencial de sus trayectorias; (iii) resolver esa ecuación para obtener las trayectorias, y (iv) dibujar aproximadamente varias trayectorias indicando la dirección creciente de t .

$$(a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(x^2 + 1) \\ \frac{dy}{dt} = 2xy^2; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^y \\ \frac{dy}{dt} = e^y \cos x; \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(x^2 + 1) \\ \frac{dy}{dt} = -x(x^2 + 1); \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = 2x^2y^2. \end{cases}$$

2. Cada uno de los siguientes sistemas lineales tiene en el origen un punto crítico aislado. (i) Hallar la solución general. (ii) Hallar la ecuación diferencial de las trayectorias. (iii) Resolver esa ecuación y dibujar algunas trayectorias indicando la dirección de t creciente. (iv) Discutir la estabilidad del punto crítico.

$$(a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -y; \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = -2y; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

3. Dibujar el diagrama de fases de la ecuación $d^2x/dt^2 = 2x^3$ y verificar que tiene en el origen un punto crítico aislado inestable.

60. PUNTOS CRITICOS E INESTABILIDAD PARA SISTEMAS LINEALES

Nuestro objetivo en este capítulo es aprender cuanto sea posible sobre ecuaciones diferenciales no lineales estudiando los diagramas de fases de sistemas autónomos no lineales del tipo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y). \end{cases}$$

Un aspecto de este problema es la clasificación de los puntos críticos de tal sistema atendiendo a su naturaleza y estabilidad. Veremos en la Sección 62 que bajo condiciones adecuadas ese problema se puede resolver para un sistema no lineal dado analizando un sistema lineal asociado. Dedicaremos esta sección, por tanto, a un análisis completo de los puntos críticos de sistemas autónomos lineales.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y, \end{cases} \quad (1)$$

que tiene, evidentemente, al origen como punto crítico. A lo largo de esta sección suponemos que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2)$$

de modo que $(0, 0)$ es el único punto crítico. Hemos probado en la Sección 56 que (1) tiene una solución no trivial de la forma

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases}$$

siempre que m es raíz de la ecuación cuadrática

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0, \quad (3)$$

que se conoce como *ecuación auxiliar* del sistema. Nótese que la condición (2) implica que cero no puede ser raíz de (3).

Sean m_1 y m_2 las raíces de (3). Probaremos que la naturaleza del punto crítico $(0, 0)$ del sistema (1) viene determinada por los números m_1 y m_2 . Es razonable esperar que haya tres posibilidades, según que m_1 y m_2 sean reales y distintos, reales e iguales, o complejos conjugados. Desgraciadamente, la situación es algo más complicada, y hemos de distinguir cinco casos, clasificados como sigue:

Casos principales:

- Caso A.* Las raíces m_1 y m_2 son reales, distintas y del mismo signo (nodo).
- Caso B.* Las raíces m_1 y m_2 son reales, distintas y de signos opuestos (punto silla).
- Caso C.* Las raíces m_1 y m_2 son complejas conjugadas pero no imaginarias puras (foco).

Casos frontera:

- Caso D.* Las raíces m_1 y m_2 son reales e iguales (nodo).
- Caso E.* Las raíces m_1 y m_2 son imaginarias puras (centro).

La razón para distinguir entre los casos principales y los casos frontera quedará patente en la Sección 62. Por el momento, basta hacer notar que mientras los casos frontera son de interés matemático, tienen poca relevancia en las aplicaciones, ya que las circunstancias que los definen son poco probables en problemas físicos. Vamos ahora con la demostración de las afirmaciones entre paréntesis.

Caso A. Si las raíces m_1 y m_2 son reales, distintas y del mismo signo, el punto crítico $(0, 0)$ es un nodo.

Demostración. Comenzamos suponiendo que m_1 y m_2 son ambas negativas, y escogemos la notación de modo que $m_1 < m_2 < 0$. Por la Sección 56, la solución general de (1) en este caso es

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{m_1 t} + c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y = c_1 B_1 e^{m_1 t} + c_2 B_2 e^{m_2 t}, \end{cases} \quad (4)$$

donde las A y las B son constantes definidas tales que $B_1/A_1 \neq B_2/A_2$, y donde las c son constantes arbitrarias. Cuando $c_2 = 0$, obtenemos las soluciones

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{m_1 t} \\ y = c_1 B_1 e^{m_1 t}, \end{cases} \quad (5)$$

y cuando $c_1 = 0$ obtenemos las soluciones

$$\begin{cases} x = c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y = c_2 B_2 e^{m_2 t}, \end{cases} \quad (6)$$

Para cualquier $c_1 > 0$, la solución (5) representa una trayectoria consistente en la semirrecta $A_1 y = B_1 x$ con pendiente B_1/A_1 ; y para $c_1 < 0$ representa una trayectoria que consta de la semirrecta complementaria a la anterior (la que está al otro lado del origen). Como $m_1 < 0$, ambas trayectorias en forma de semirrecta tienden a $(0, 0)$ para $t \rightarrow \infty$; y como $y/x = B_1/A_1$, ambas entran a $(0, 0)$ con pendiente B_1/A_1 (Figura 75). Exactamente del mismo modo, las soluciones (6) representan dos

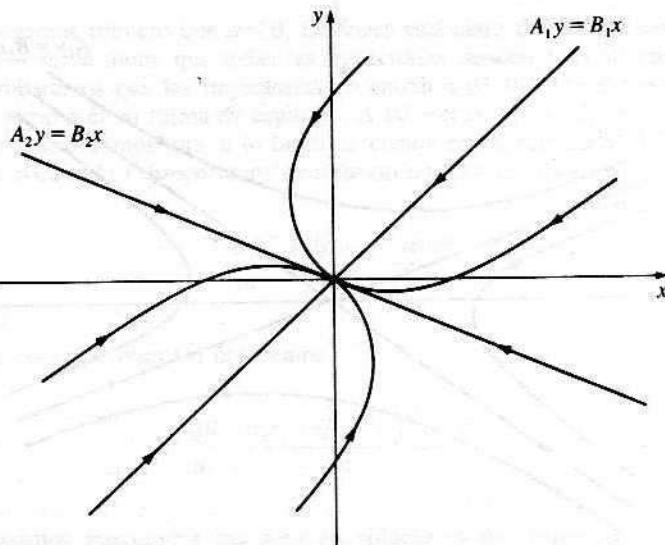


Figura 75

semirrectas en la recta $A_2y = B_2x$, con pendiente B_2/A_2 . Estas dos trayectorias también tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$, y entran a él con pendiente B_2/A_2 .

Si $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, la solución general (4) representa trayectorias curvas. Como $m_1 < 0$ y $m_2 < 0$, estas trayectorias también tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Además, al ser $m_1 - m_2 < 0$ e

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1B_1e^{m_1t} + c_2B_2e^{m_2t}}{c_1A_1e^{m_1t} + c_2A_2e^{m_2t}} = \frac{(c_1B_1/c_2)e^{(m_1-m_2)t} + B_2}{(c_1A_1/c_2)e^{(m_1-m_2)t} + A_2},$$

es claro que $y/x \rightarrow B_2/A_2$ cuando $t \rightarrow \infty$, así que todas ellas entran a $(0, 0)$ con pendiente B_2/A_2 . La Figura 75 presenta un gráfico cualitativo de esta situación. Es evidente que nuestro punto crítico es un nodo, y que es asintóticamente estable.

Si m_1 y m_2 son ambos positivos y elegimos la notación de manera que $m_1 > m_2 > 0$, la situación es exactamente la misma excepto que todas las trayectorias tienden a $(0, 0)$ y entran a él cuando $t \rightarrow -\infty$. La gráfica de las trayectorias es como en la Figura 75 pero con las flechas invertidas. Todavía se trata de un nodo, aunque esta vez inestable.

Caso B. Si las raíces m_1 y m_2 son reales, distintas y de signos opuestos, el punto crítico $(0, 0)$ es un punto silla.

Demonstración. Podemos elegir la notación de modo que $m_1 < 0 < m_2$. La solución general de (1) se puede escribir aun en la forma (4), y de nuevo tenemos soluciones particulares de la forma (5) y (6). Las dos trayectorias con forma de semirrecta representadas por (5) tienden y entran a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$, pero esta vez las representadas por (6) lo hacen para $t \rightarrow -\infty$. Si $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, la solución gene-

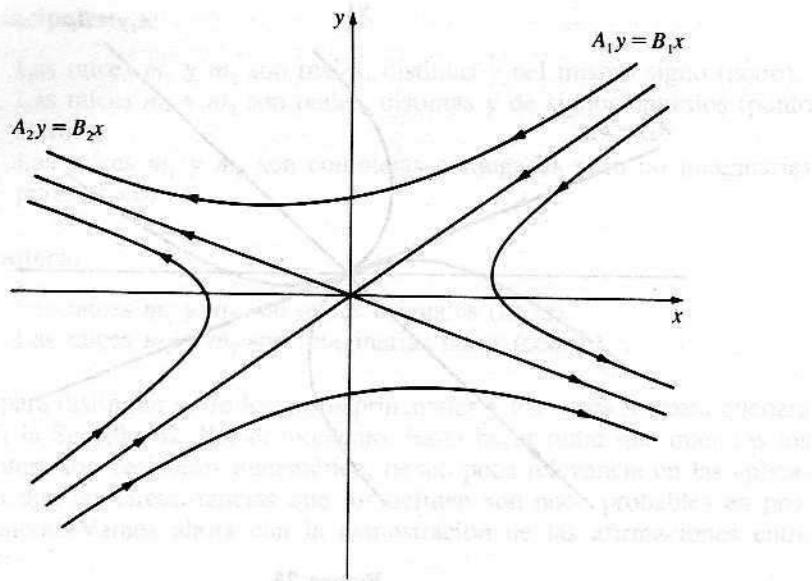


Figura 76

ral (4) todavía representa trayectorias curvas, pero al ser $m_1 < 0 < m_2$, ninguna de ellas tiende a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$ o $t \rightarrow -\infty$. En lugar de eso, cuando $t \rightarrow \infty$, cada una de esas trayectorias es asintótica a una de las semirrectas (6), y cuando $t \rightarrow -\infty$, cada una de ellas es asintótica a una de las semirrectas (5). La Figura 76 muestra una gráfica cualitativa de este comportamiento. En este caso el punto crítico es un punto silla, obviamente inestable.

Caso C. Si las raíces m_1 y m_2 son complejas conjugadas, pero no puramente imaginarias, el punto crítico es un foco (o punto espiral).

Demuestra. En esta ocasión podemos escribir m_1 y m_2 en la forma $a \pm ib$, donde a y b son números reales no nulos. Asimismo, para uso posterior, observemos que el discriminante D de la ecuación (3) es negativo:

$$\begin{aligned} D &= (a_1 + b_2)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1) = \\ &= (a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 < 0. \end{aligned} \quad (7)$$

De acuerdo con la Sección 56, la solución general de (1) es en este caso

$$\begin{cases} x = e^{at}[c_1(A_1 \cos bt - A_2 \operatorname{sen} bt) + c_2(A_1 \operatorname{sen} bt + A_2 \cos bt)] \\ y = e^{at}[c_1(B_1 \cos bt - B_2 \operatorname{sen} bt) + c_2(B_1 \operatorname{sen} bt + B_2 \cos bt)], \end{cases} \quad (8)$$

donde las A y B son constantes definidas y las c constantes arbitrarias.

Supongamos primero que $a < 0$. Entonces está claro de (8) que $x \rightarrow 0$ e $y \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, de modo que todas las trayectorias tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Ahora probaremos que las trayectorias no entran a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$, sino que giran en torno a él en forma de espirales. A tal efecto, introducimos la coordenada polar θ y demostramos que, a lo largo de cualquier trayectoria, $d\theta/dt$ es de signo constante para todo t . Empezamos recordando que $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(y/x)$, así que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x dy/dt - y dx/dt}{x^2 + y^2};$$

y usando las ecuaciones (1) obtenemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{a_2 x^2 + (b_2 - a_1)xy - b_1 y^2}{x^2 + y^2}. \quad (9)$$

Como estamos interesados tan sólo en soluciones que representan trayectorias, suponemos que $x^2 + y^2 \neq 0$. Ahora (7) implica que a_2 y b_1 tienen signos opuestos. Consideremos el caso $a_2 > 0$, $b_1 < 0$. Cuando $y = 0$, (9) da $d\theta/dt = a_2 > 0$. Si $y \neq 0$, $d\theta/dt$ no puede ser 0; porque, si lo fuera, (9) implicaría que

$$a_2 x^2 + (b_2 - a_1)xy - b_1 y^2 = 0,$$

o sea,

$$a_2 \left(\frac{x}{y}\right)^2 + (b_2 - a_1) \frac{x}{y} - b_1 = 0 \quad (10)$$

para algún número real x/y , cosa que no puede ser cierta por cuanto el discriminante D de la ecuación (10) es negativo por (7). Esto demuestra que $d\theta/dt$ es siempre positiva si $a_2 > 0$. Análogamente se ve que $d\theta/dt$ es siempre negativa si $a_2 < 0$. Puesto que, por (8), x e y cambian de signo infinitas veces cuando $t \rightarrow \infty$, todas las trayectorias giran en espiral en torno al origen (en sentido contrario al de las agujas del reloj o al revés, según sea $a_2 > 0$ o $a_2 < 0$). En este caso el punto crítico es un foco, asintóticamente estable.

Si $a > 0$, la situación es la misma salvo que las trayectorias tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow -\infty$ y el punto crítico es inestable. La Figura 72 ilustra el aspecto de las trayectorias cuando $a_2 > 0$.

Caso D. Si las raíces m_1 y m_2 son reales e iguales, el punto crítico $(0, 0)$ es un nodo.

Demostración. Empezamos suponiendo que $m_1 = m_2 = m < 0$. Hay dos subcasos que requieren discusión por separado: (i) $a_1 = b_2 \neq 0$ y $a_2 = b_1 = 0$; (ii) todas las demás posibilidades que conducen a una raíz doble de la ecuación (3).

Primero consideramos el subcaso (i), que es la situación descrita en la nota a pie de página en la Sección 56. Si a denota el valor común de a_1 y b_2 , la ecuación (3) se convierte en $m^2 - 2am + a^2 = 0$ y $m = a$. El sistema (1) es, por tanto,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = ay, \end{cases}$$

y su solución general es

$$\begin{cases} x = c_1 e^{mt} \\ y = c_2 e^{mt}, \end{cases} \quad (11)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Las trayectorias definidas por (11) son semirectas de todas las pendientes posibles (Fig. 77), y como $m < 0$ vemos que cada una de ellas tiende y entra a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. En consecuencia, el punto crítico es un nodo asintóticamente estable. Si $m > 0$, tenemos la misma situación excepto que las trayectorias entran a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow -\infty$, las flechas de la Figura 77 se invierten y $(0, 0)$ es inestable.

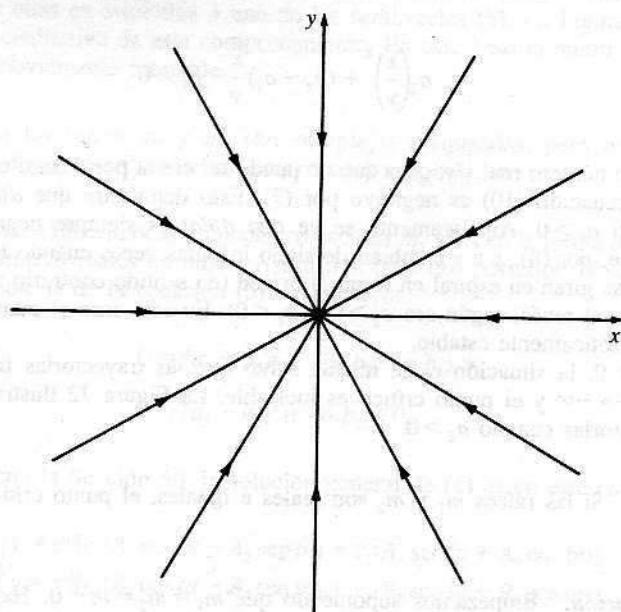


Figura 77

Ahora discutimos el subcaso (ii). Por las fórmulas 56-(20) y el Problema 56-(4), la solución general de (1) se puede escribir

$$\begin{cases} x = c_1 A e^{mt} + c_2 (A_1 + At) e^{mt} \\ y = c_1 B e^{mt} + c_2 (B_1 + Bt) e^{mt}, \end{cases} \quad (12)$$

donde las A y las B son constantes definidas y las c arbitrarias. Cuando $c_2 = 0$, obtenemos las soluciones

$$\begin{cases} x = c_1 A e^{mt} \\ y = c_1 B e^{mt}. \end{cases} \quad (13)$$

Sabemos que estas soluciones representan dos semirrectas de la recta $Ay = Bx$, con pendiente B/A , y como $m < 0$, ambas trayectorias tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$ (Figura 78). Además, como $y/x = B/A$, ambas trayectorias entran a $(0, 0)$ con pendiente B/A . Si $c_2 \neq 0$, las soluciones (12) representan trayectorias curvas, y como $m < 0$, es claro de (12) que esas trayectorias tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Más aún, se deduce de

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 B e^{mt} + c_2 (B_1 + Bt) e^{mt}}{c_1 A e^{mt} + c_2 (A_1 + At) e^{mt}} = \frac{c_1 B/c_2 + B_1 + Bt}{c_1 A/c_2 + A_1 + At}$$

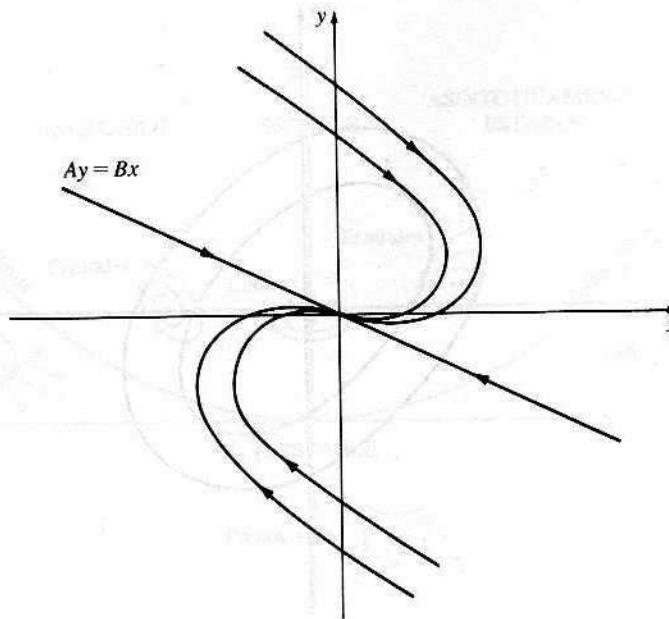


Figura 78

que $y/x \rightarrow B/A$ cuando $t \rightarrow \infty$, así que estas trayectorias curvadas entran todas a $(0, 0)$ con pendiente B/A . Observamos también que $y/x \rightarrow B/A$ cuando $t \rightarrow -\infty$. La Figura 78 muestra una gráfica cualitativa del comportamiento de las trayectorias. Es claro que $(0, 0)$ es un nodo asintóticamente estable. Si $m > 0$, la situación permanece inalterada, salvo que las direcciones de las flechas deben invertirse y el punto crítico pasa a ser inestable.

Caso E. Si las raíces m_1 y m_2 son imaginarias puras, el punto crítico $(0, 0)$ es un centro.

Demostración. Aquí basta referirnos a la discusión del Caso C, porque ahora m_1 y m_2 son de la forma $a \pm ib$ con $a = 0$ y $b \neq 0$. La solución general de (1) viene dada por tanto por (8) sin el factor exponencial, así que $x(t)$ e $y(t)$ son periódicas y cada trayectoria es una curva cerrada que rodea al origen. Como sugiere la Figura 79, esas curvas son elipses; esto puede probarse (véase Problema 5) resolviendo la ecuación diferencial de las trayectorias,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2 x + b_2 y}{a_1 x + b_1 y}. \quad (14)$$

Nuestro punto crítico $(0, 0)$ es evidentemente un centro, estable pero no asintóticamente estable.

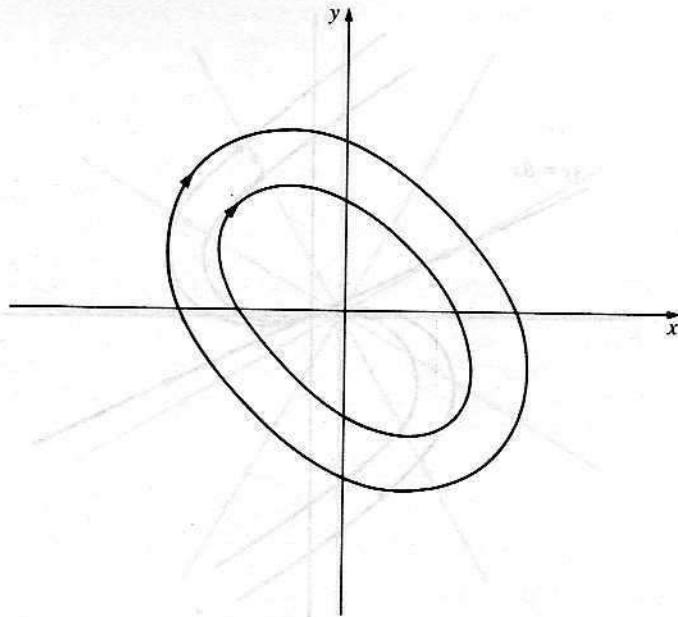


Figura 79

En los párrafos precedentes hemos hecho unas cuantas afirmaciones relativas a la estabilidad. Será conveniente recoger esa información como sigue.

Teorema A. *El punto crítico $(0, 0)$ del sistema lineal (1) es estable si y sólo si ambas raíces de la ecuación auxiliar (3) tienen partes reales no positivas, y es asintóticamente estable si y sólo si ambas raíces tienen partes reales negativas.*

Si ahora escribimos la ecuación (3) en la forma

$$(m - m_1)(m - m_2) = m^2 + pm + q = 0, \quad (15)$$

de modo que $p = -(m_1 + m_2)$ y $q = m_1 m_2$, nuestros cinco casos son tan sencillos de describir en términos de p y q como en términos de m_1 y m_2 . De hecho, si interpretamos estos casos en el plano pq , llegamos al curioso diagrama de la Figura 80, que permite saber a simple vista la naturaleza y las propiedades de estabilidad del punto crítico $(0, 0)$. La primera cosa interesante a observar es que el eje $p, q = 0$, está excluido, ya que por (2) sabemos que $m_1 m_2 \neq 0$. A la vista de lo que hemos aprendido sobre los cinco casos, toda la información condensada en el diagrama proviene directamente de que

$$m_1, m_2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

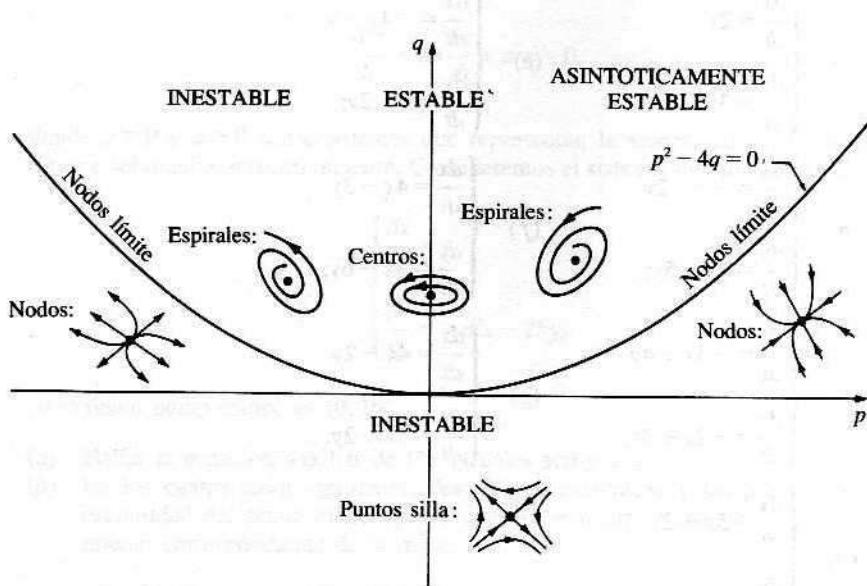


Figura 80

Así pues, por encima de la parábola $p^2 - 4q = 0$ tenemos $p^2 - 4q < 0$, luego m_1 y m_2 son números complejos conjugados que son imaginarios si y sólo si $p = 0$; son los Casos C y E de focos y centros. Por debajo del eje p tenemos $q < 0$, lo que significa que m_1 y m_2 son reales, distintos y de signos opuestos; esto da los puntos silla del Caso B. Y finalmente, la zona entre esas dos regiones (incluida la parábola pero excluido el eje p) se caracteriza por las relaciones $p^2 - 4q \geq 0$ y $q > 0$, de modo que m_1 y m_2 son reales y del mismo signo; aquí tenemos los nodos de los Casos A y D. Además, es claro que existe una región de estabilidad asintótica: el primer cuadrante. Más formalmente:

Teorema B. *El punto crítico $(0, 0)$ del sistema lineal (1) es asintóticamente estable si y sólo si los coeficientes $p = -(a_1 + b_2)$ y $q = a_1b_2 - a_2b_1$ de la ecuación auxiliar son ambos positivos.*

Finalmente, hay que hacer énfasis en que hemos estudiado las trayectorias de nuestro sistema lineal cerca de un punto crítico analizando soluciones explícitas del sistema. En las dos próximas secciones entramos más de lleno en el espíritu del asunto investigando problemas similares para sistemas no lineales, que en general no pueden ser resueltos explícitamente.

PROBLEMAS

1. Determinar la naturaleza y las propiedades de estabilidad del punto crítico $(0, 0)$ para cada uno de los siguientes sistemas autónomos lineales:

$$(a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = 3y; \end{cases} \quad (e) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y; \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 5y; \end{cases} \quad (f) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 8x - 6y; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y; \end{cases} \quad (g) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y. \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -17x - 5y; \end{cases}$$

2. Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, probar que el sistema (1) tiene infinitos puntos críticos, ninguno de los cuales es aislado.
3. (a) Si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, probar que el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1 \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$$

tiene un único punto crítico aislado (x_0, y_0) .

- (b) Demostrar que el sistema anterior se puede escribir en la forma (1) mediante el cambio de variables $\bar{x} = x - x_0$ e $\bar{y} = y - y_0$.
- (c) Hallar el punto crítico del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 2y + 10 \\ \frac{dy}{dt} = 11x - 8y + 49, \end{cases}$$

escribir el sistema en la forma (1) por cambio de variables y determinar el tipo y las propiedades de estabilidad del punto crítico.

4. En la Sección 20 hemos estudiado las vibraciones libres de una masa sujetada a un muelle, resolviendo la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + a^2x = 0,$$

donde $b \geq 0$ y $a > 0$ son constantes que representan la viscosidad del medio y la rigidez del muelle, respectivamente. Consideremos el sistema autónomo equivalente

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -a^2x - 2by, \end{cases} \quad (*)$$

cuyo único punto crítico es $(0, 0)$.

- (a) Hallar la ecuación auxiliar de (*). ¿Cuáles son p y q ?
- (b) En los cuatro casos siguientes, describir la naturaleza y las propiedades de estabilidad del punto crítico y dar una breve interpretación física del movimiento correspondiente de la masa:
- | | | | |
|---------------|--------------------|-----------------|----------------|
| (i) $b = 0$; | (ii) $0 < b < a$; | (iii) $b = a$; | (iv) $b > a$. |
|---------------|--------------------|-----------------|----------------|

5. Resolver la ecuación (14) bajo las hipótesis del Caso E y mostrar que el resultado es una familia uniparamétrica de elipses que rodean al origen. *Ayuda:* Recordar que si $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = D$ es la ecuación de una curva real, la curva es una elipse si y sólo si el discriminante $B^2 - 4AC$ es negativo.

61. ESTABILIDAD POR EL METODO DIRECTO DE LIAPUNOV

Es intuitivamente claro que si la energía total de un sistema físico tiene un mínimo local en un cierto punto de equilibrio, este punto es estable. La idea fue generalizada por Liapunov⁶ en un método sencillo, y potente a la vez, para estudiar problemas de estabilidad en un contexto más amplio. Vamos a presentar el método de Liapunov, junto a algunas de sus aplicaciones, en esta sección y en la próxima.

Consideremos un sistema autónomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

y supongamos que tiene un punto crítico aislado, que tomaremos como de costumbre en $(0, 0)$ ⁷. Sea $C = [x(t), y(t)]$ una trayectoria de (1), y considéremos una función $E(x, y)$ continua y con primeras derivadas parciales continuas en una región que contiene a la trayectoria. Si un punto (x, y) se mueve a lo largo de la trayectoria de acuerdo con las ecuaciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$, entonces $E(x, y)$ puede verse como función de t sobre C [denotamos esta función por $E(t)$] y su razón de cambio es

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \\ &= \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G. \end{aligned} \quad (2)$$

⁶ Alexander Mikhailovich Liapunov (1857-1918) fue un matemático e ingeniero mecánico ruso. Tuvo el raro mérito de elaborar una tesis doctoral de valor duradero. Esta obra clásica se publicó originalmente en 1892 en ruso, pero ahora ya se dispone de una traducción al inglés, *Stability of Motion*, Academic Press, Nueva York, 1966. Liapunov tuvo una muerte violenta en Odessa, lo que no constituye un destino sorprendente para un intelectual de clase media en las caóticas secuelas de la Revolución Rusa.

⁷ Un punto crítico (x_0, y_0) siempre se puede llevar al origen mediante una traslación de coordenadas $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, o sea, que no se pierde generalidad suponiendo de entrada que el punto crítico está localizado en el origen.

Esta fórmula está en el corazón de las ideas de Liapunov. Para explotarla necesitamos varias definiciones que especifican las clases de funciones en las que estaremos interesados.

Supongamos que $E(x, y)$ es continua y tiene derivadas parciales primeras continuas en alguna región que contiene al origen. Si E se anula en el origen, es decir, $E(0, 0) = 0$, diremos que es *definida positiva* si $E(x, y) > 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$, y *definida negativa* si $E(x, y) < 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$. Análogamente, E se llama *semidefinida positiva* si $E(0, 0) = 0$ y $E(x, y) \geq 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$, y *semidefinida negativa* si $E(0, 0) = 0$ y $E(x, y) \leq 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$. Es claro que las funciones de la forma $ax^{2m} + by^{2n}$, con a, b constantes positivas y m, n enteros positivos, son definidas positivas. Como $E(x, y)$ es definida negativa si y sólo si $-E(x, y)$ es definida positiva, las funciones de la forma $ax^{2m} + by^{2n}$ con $a < 0$ y $b < 0$ son definidas negativas. Las funciones $x^{2m}, y^{2m}, (x - y)^{2m}$ no son definidas positivas, pero sí son semi-definidas positivas. Si $E(x, y)$ es definida positiva, $z = E(x, y)$ puede ser interpretada como la ecuación de una superficie (Fig. 81) que se parece a un paraboloide abierto hacia arriba y tangente al plano xy en el origen.

Una función definida positiva $E(x, y)$ con la propiedad de que

$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G \quad (3)$$

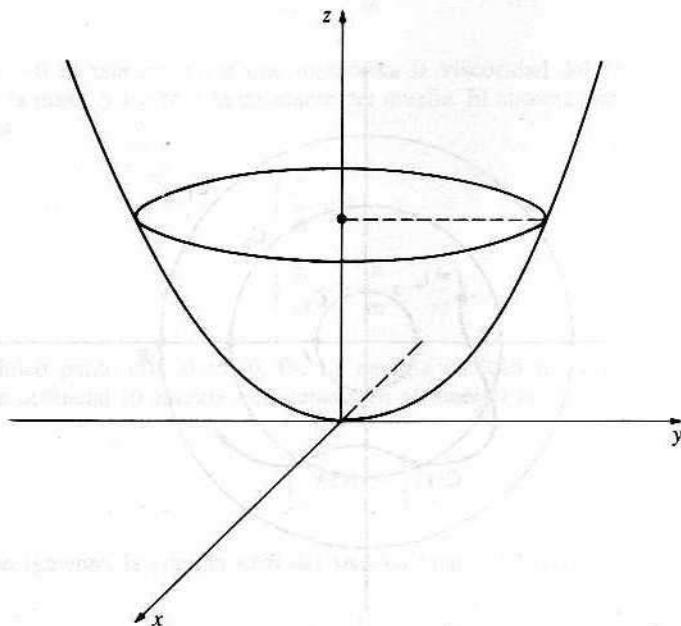


Figura 81

es semidefina negativa se llama una *función de Liapunov* para el sistema (1). Por la fórmula (2), el requisito de que (3) sea semidefina negativa significa que $dE/dt \leq 0$ (por tanto E es no creciente) a lo largo de las trayectorias de (1) próximas al origen. Estas funciones generalizan el concepto de energía total de un sistema físico. Su relevancia en cuestiones de estabilidad queda patente en el siguiente teorema, que constituye el principal descubrimiento de Liapunov.

Teorema A. *Si existe una función de Liapunov $E(x, y)$ para el sistema (1), el punto crítico $(0, 0)$ es estable. Si además (3) es definida negativa, el punto crítico $(0, 0)$ es asintóticamente estable.*

Demostración. Sea C_1 un círculo de radio $R > 0$ centrado en el origen (Fig. 82), y supongamos que C_1 es tan pequeño que se halla dentro del dominio de definición de la función E . Como $E(x, y)$ es continua y definida positiva, tiene un mínimo positivo m en C_1 . Además, $E(x, y)$ es continua en el origen y se anula en él, luego podemos hallar un número positivo $r < R$ tal que $E(x, y) < m$ siempre que (x, y) esté dentro del círculo C_2 de radio r . Sea ahora $C = [x(t), y(t)]$ cualquier trayectoria que esté dentro de C_2 para $t = t_0$. Entonces $E(t_0) < m$, y como (3) es semidefina negativa, tenemos $dE/dt \leq 0$, lo cual implica que $E(t) \leq E(t_0) < m$ para todo $t > t_0$. Se sigue que la trayectoria C nunca puede alcanzar el círculo C_1 en un $t > t_0$, así que tenemos estabilidad.

Para demostrar la segunda parte del teorema, basta probar que bajo la hipótesis adicional tenemos que $E(t) \rightarrow 0$, porque al ser $E(x, y)$ definida positiva eso implica que C se aproxima al punto crítico $(0, 0)$. Comenzamos observando que de $dE/dt < 0$

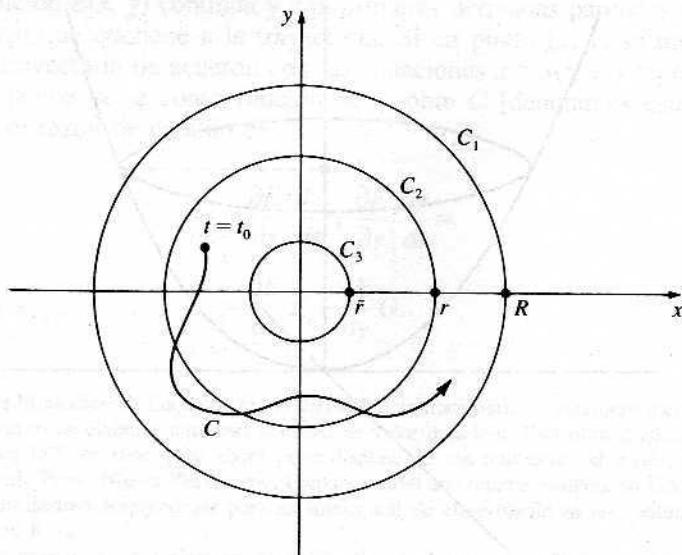


Figura 82

se deduce que $E(t)$ es una función decreciente; y como por hipótesis $E(t)$ está acotada inferiormente por 0, concluimos que $E(t)$ tiende a algún límite $L \geq 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Probar que $E(t) \rightarrow 0$ basta ver que $L = 0$, así que supongamos que $L > 0$ con el fin de llegar a una contradicción. Escojamos un número positivo $\tilde{r} < r$ tal que $E(x, y) < L$ siempre que (x, y) esté dentro del círculo C_3 de radio \tilde{r} . Como la función (3) es continua y definida negativa, tiene un máximo negativo $-k$ en el anillo limitado por los círculos C_1 y C_3 . Ese anillo contiene a toda la trayectoria C para $t \geq t_0$, así que de la ecuación

$$E(t) = E(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dE}{dt} dt$$

se obtiene la desigualdad

$$E(t) \leq E(t_0) - k(t - t_0) \quad (4)$$

para todo $t \geq t_0$. Sin embargo, el miembro de la derecha en (4) se hace infinitamente negativo cuando $t \rightarrow \infty$, luego $E(t) \rightarrow -\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Esto contradice el hecho de que $E(x, y) \geq 0$, lo que nos permite concluir que $L = 0$ y la demostración está terminada.

Ejemplo 1. Consideremos la ecuación

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (5)$$

Aquí $c \geq 0$ es una constante que representa la viscosidad del medio en el que se mueve la masa, y $k > 0$ es la constante del muelle. El sistema autónomo equivalente a (5) es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y, \end{cases} \quad (6)$$

y su único punto crítico es $(0, 0)$. La energía cinética de la masa es $my^2/2$ y la energía potencial (o energía almacenada en el muelle) es

$$\int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2.$$

Por consiguiente, la energía total del sistema viene dada por

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (7)$$

Es fácil ver que (7) es definida positiva; y puesto que

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G &= kxy + my\left(-\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y\right) = \\ &= -cy^2 \leqslant 0,\end{aligned}$$

(7) es una función de Liapunov para (6) y el punto crítico $(0, 0)$ es estable. Sabemos por el Problema 60-4 que cuando $c > 0$ ese punto crítico es asintóticamente estable, pero la función de Liapunov particular expuesta aquí no es capaz de detectar ese hecho⁸.

Ejemplo 2. El sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2xy \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - y^3 \end{cases} \quad (8)$$

tiene en $(0, 0)$ un punto crítico aislado. Intentemos probar su estabilidad construyendo una función de Liapunov de la forma $E(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$. Está claro que

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G &= 2max^{2m-1}(-2xy) + 2nbby^{2n-1}(x^2 - y^3) = \\ &= (-4max^{2m}y + 2nbxy^{2n-1}) - 2nbby^{2n+2}.\end{aligned}$$

Queremos que la expresión entre paréntesis se anule, y por simple inspección vemos que a tal fin basta tomar $m = 1$, $n = 1$, $a = 1$ y $b = 2$. Con esa elección tenemos $E(x, y) = x^2 + 2y^2$ (que es definida positiva) y $(\partial E/\partial x)F + (\partial E/\partial y)G = -4y^4$ (que es semidefinida negativa). El punto crítico $(0, 0)$ del sistema (8) es en consecuencia estable.

Está claro, a la vista de este ejemplo, que en situaciones complicadas puede ser muy difícil construir funciones de Liapunov apropiadas. El próximo resultado ayuda a veces en ese aspecto.

Teorema B. *La función $E(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es definida positiva si y sólo si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, y es definida negativa si y sólo si $a < 0$ y $b^2 - 4ac < 0$.*

⁸ Se sabe que tanto la estabilidad como la estabilidad asintótica se pueden detectar mediante funciones de Liapunov adecuadas, pero saber de entrada que tales funciones existen no es lo mismo que saber hallarlas explícitamente. Como referencias a esta cuestión, véase L. Cesari, *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, pág. 111, Academic Press, Nueva York, 1963; o G. Sansone y R. Conti, *Non-Linear Differential Equations*, pág. 481, Macmillan, Nueva York, 1964.

Demostración. Si $y = 0$, se tiene $E(x, 0) = ax^2$, así que $E(x, 0) > 0$ para $x \neq 0$ si y sólo si $a > 0$. Si $y \neq 0$, tenemos

$$E(x, y) = y^2 \left[a \left(\frac{x}{y} \right)^2 + b \left(\frac{x}{y} \right) + c \right];$$

y cuando $a > 0$, el polinomio en x/y que está entre corchetes (positivo para x/y grande) es positivo para todo x/y si y sólo si $b^2 - 4ac < 0$. Esto demuestra la primera parte del teorema, y la segunda se sigue sin más que considerar la función $-E(x, y)$.

PROBLEMAS

1. Determinar si cada una de las siguientes funciones es definida positiva, definida negativa, o ninguna de ambas cosas:
 - $x^2 - xy - y^2$; (c) $-2x^2 + 3xy - y^2$;
 - $2x^2 - 3xy + 3y^2$; (d) $-x^2 - 4xy - 5y^2$.
2. Probar que una función de la forma $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ no puede ser definida positiva ni definida negativa.
3. Mostrar que $(0, 0)$ es un punto crítico asintóticamente estable para cada uno de estos sistemas:

$(a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x^3 - y \\ \frac{dy}{dt} = x^5 - 2y^3; \end{cases}$	$(b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + xy^3 \\ \frac{dy}{dt} = -x^2y^2 - y^3. \end{cases}$
--	--
4. Demostrar que el punto crítico $(0, 0)$ del sistema (1) es inestable si existe una función $E(x, y)$ con las siguientes propiedades:
 - $E(x, y)$ es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas en cierta región que contiene al origen;
 - $E(0, 0) = 0$;
 - todo círculo centrado en el origen contiene al menos un punto en el que $E(x, y)$ es positiva;
 - $(\partial E / \partial x)F + (\partial E / \partial y)G$ es definida positiva.
5. Probar que $(0, 0)$ es un punto crítico inestable del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy + x^3 \\ \frac{dy}{dt} = -x^2 + y^5. \end{cases}$$

6. Sea $f(x)$ una función tal que $f(0) = 0$ y $xf(x) > 0$ para $x \neq 0$ [es decir, $f(x) > 0$ cuando $x > 0$ y $f(x) < 0$ cuando $x < 0$].

- (a) Probar que

$$E(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \int_0^x f(x) dx$$

es definida positiva.

- (b) Verificar que la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0$$

tiene $x = 0, y = dx/dt = 0$ como punto crítico estable.

- (c) Si $g(x) \geq 0$ en algún entorno del origen, probar que la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x) \frac{dx}{dt} + f(x) = 0$$

tiene $x = 0, y = dx/dt = 0$ como punto crítico estable.

62. PUNTOS CRITICOS SIMPLES DE SISTEMAS NO LINEALES

Consideremos un sistema autónomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

con un punto crítico aislado en $(0, 0)$. Si $F(x, y)$ y $G(x, y)$ se pueden desarrollar en series de potencias en x e y , entonces (1) adopta la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1x^2 + d_1xy + e_1y^2 + \dots \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2x^2 + d_2xy + e_2y^2 + \dots \end{cases} \quad (2)$$

Cuando $|x|$ e $|y|$ son pequeños, es decir, cuando (x, y) está cerca del origen, los términos de segundo orden o de orden superior son muy pequeños. Es natural despreciar esos términos no lineales y conjeturar que el comportamiento cualitativo de las trayectorias de (2) cerca del punto crítico $(0, 0)$ es similar al de las trayectorias del sistema lineal asociado.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases} \quad (3)$$

Veremos que, en general, eso es efectivamente lo que ocurre. El proceso de sustituir (2) por el sistema lineal (3) se suele llamar *linealización*.

Más en general, consideremos sistemas de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + g(x, y). \end{cases} \quad (4)$$

Supondremos que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (5)$$

de modo que el sistema lineal asociado (3) tiene en $(0, 0)$ un punto crítico aislado; que f y g son funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas para todo (x, y) ; y que cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ se tiene

$$\lim \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \quad (6)$$

Nótese que las condiciones (6) implican $f(0, 0) = 0$ y $g(0, 0) = 0$, de manera que $(0, 0)$ es un punto crítico de (4); no es difícil probar, además, que es aislado (véase Problema 1). Con las restricciones indicadas, $(0, 0)$ se llama un *punto crítico simple* del sistema (4).

Ejemplo 1. Para el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 3y + xy \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - 2xy^2 \end{cases} \quad (7)$$

es

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

así que (5) se satisface. Por otra parte, usando coordenadas polares vemos que

$$(6) \quad \frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|r^2 \sin \theta \cos \theta|}{r} \leq r$$

y

$$\frac{|g(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|2r^3 \sin^2 \theta \cos \theta|}{r} \leq 2r^2,$$

de modo que $f(x, y)/r$ y $g(x, y)/r \rightarrow 0$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ (o cuando $r \rightarrow 0$). Esto muestra que las condiciones (6) también se satisfacen, luego $(0, 0)$ es un punto crítico simple del sistema (7).

Los hechos principales relativos a los puntos críticos simples vienen resumidos en el siguiente teorema de Poincaré, que enunciamos sin demostración⁹.

Teorema A. *Sea $(0, 0)$ un punto crítico simple del sistema no lineal (4), y consideremos el sistema lineal asociado (3). Si el punto crítico $(0, 0)$ de (3) pertenece a alguno de los tres casos principales descritos en la Sección 60, el punto crítico $(0, 0)$ de (4) es del mismo tipo.*

A título de ilustración, examinemos el sistema no lineal (7) del Ejemplo 1, cuyo sistema lineal asociado es

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$$

La ecuación auxiliar de (8) es $m^2 + m + 1 = 0$, con raíces

$$m_1, m_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Como las raíces son complejas conjugadas y no imaginarias, estamos en el Caso C y el punto crítico $(0, 0)$ del sistema lineal (8) es un foco. Por el Teorema A, el punto crítico $(0, 0)$ del sistema no lineal (7) es también un foco.

Ha de quedar claro que si bien el tipo del punto crítico $(0, 0)$ es el mismo para (4) que para (3) en los casos aludidos por el teorema, la apariencia concreta

⁹ Pueden verse tratamientos pormenorizados en W. Hurewicz, *Lectures on Ordinary Differential Equations*, págs. 86-98, MIT, Cambridge, Mass., 1958; L. Cesari, *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, págs. 157-163, Academic Press, Nueva York, 1963; o F. G. Tricomi, *Differential Equations*, págs. 53-72, Blackie, Glasgow, 1961.

de las trayectorias puede ser bastante diferente. Por ejemplo, la Figura 76 muestra un punto silla típico para un sistema lineal, mientras que la Figura 83 indica cómo puede ser un punto silla no lineal. En el último hay una cierta distorsión, pero los rasgos cualitativos de las dos configuraciones son los mismos.

Es natural cuestionarse sobre los dos casos frontera, no mencionados en el Teorema A. He aquí lo que sucede: si el sistema lineal asociado (3) tiene un nodo frontera en el origen (Caso D), el sistema no lineal (4) puede tener un nodo o un foco; y si (3) tiene un centro en el origen (Caso E), entonces (4) puede tener un centro o un foco. Por ejemplo, $(0, 0)$ es punto crítico para los sistemas

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x^2 \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases} \quad (9)$$

En cada caso el sistema lineal asociado es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases} \quad (10)$$

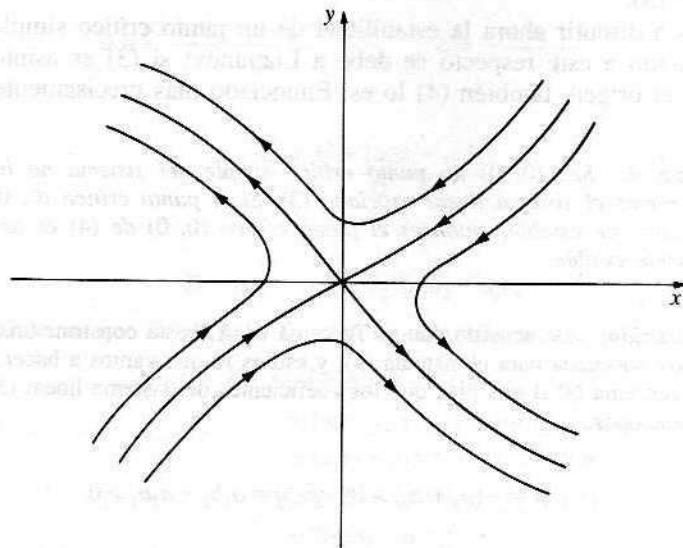


Figura 83

Es fácil ver que $(0, 0)$ es un centro para (10). Sin embargo, puede demostrarse que mientras $(0, 0)$ es un centro para el primer sistema en (9), es un foco para el segundo¹⁰.

Hemos encontrado ya una considerable variedad de configuraciones en puntos críticos de sistemas lineales, y las observaciones anteriores enseñan que en los puntos críticos simples de sistemas no lineales no aparecen fenómenos nuevos. ¿Qué sucede con los puntos críticos que no son simples? Las posibilidades aquí pueden apreciarse mejor examinando un sistema no lineal de la forma (2). Si los términos lineales en (2) no determinan la disposición de las trayectorias cerca del origen, hay que considerar los términos de segundo grado; si tampoco éstos la determinan, entonces hay que pasar a los de tercer grado, etcétera. Eso sugiere que además de las configuraciones lineales podrán surgir muchas otras, infinitamente variadas y de asombrosa complejidad. Varias de ellas se muestran en la Figura 84. Es quizás sorprendente darse cuenta de que configuraciones así de complicadas pueden aparecer en sistemas de apariencia bien inocente. Por ejemplo, las tres figuras de la fila superior muestran las trayectorias de

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy \\ \frac{dy}{dt} = y^2 - x^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^3 - 2xy^2 \\ \frac{dy}{dt} = 2x^2y - y^3, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y\sqrt{|xy|} \\ \frac{dy}{dt} = -y + 4x\sqrt{|xy|}. \end{cases}$$

En el primer caso eso se comprueba directamente mirando a la Figura 3 y a la ecuación 3-(8).

Vamos a discutir ahora la estabilidad de un punto crítico simple. El principal resultado a este respecto se debe a Liapunov; si (3) es asintóticamente estable en el origen, también (4) lo es. Enunciado más precisamente:

Teorema B. *Sea $(0, 0)$ un punto crítico simple del sistema no lineal (4), y consideremos el sistema lineal asociado (3). Si el punto crítico $(0, 0)$ de (3) es asintóticamente estable, entonces el punto crítico $(0, 0)$ de (4) es también asintóticamente estable.*

Demostración. De acuerdo con el Teorema 61-A, basta construir una función de Liapunov adecuada para el sistema (4), y eso es lo que vamos a hacer.

El Teorema 60-B nos dice que los coeficientes del sistema lineal (3) satisfacen las condiciones

$$p = -(a_1 + b_2) > 0 \quad y \quad q = a_1b_2 - a_2b_1 > 0. \quad (11)$$

¹⁰ Véase Hurewicz, *op. cit.*, pág. 99.

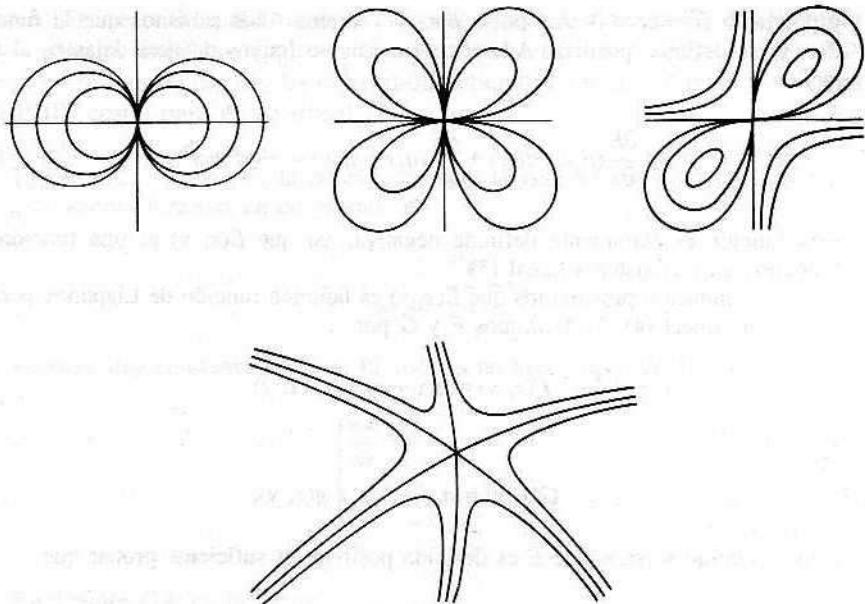


Figura 84

Definamos ahora

$$E(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

haciendo

$$a = \frac{a_2^2 + b_2^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)}{D}, \quad b = -\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{D},$$

y

$$c = \frac{a_1^2 + b_1^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)}{D},$$

donde

$$D = pq = -(a_1 + b_2)(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Por (11) vemos que $D > 0$ y $a > 0$. Y un sencillo cálculo muestra que

$$\begin{aligned} D^2(ac - b^2) &= (a_2^2 + b_2^2)(a_1^2 + b_1^2) + \\ &\quad + (a_2^2 + b_2^2 + a_1^2 + b_1^2)(a_1b_2 - a_2b_1) + \\ &\quad + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 - (a_1a_2 + b_1b_2)^2 = \\ &= (a_2^2 + b_2^2 + a_1^2 + b_1^2)(a_1b_2 - a_2b_1) + \\ &\quad + 2(a_1b_2 - a_2b_1)^2 > \\ &> 0, \end{aligned}$$

y por tanto $b^2 - ac < 0$. Así pues, por el Teorema 61-B sabemos que la función $E(x, y)$ es definida positiva. Además, otro cálculo (cuyos detalles dejamos al lector) da

$$\frac{\partial E}{\partial x}(a_1x + b_1y) + \frac{\partial E}{\partial y}(a_2x + b_2y) = -(x^2 + y^2). \quad (12)$$

Esta función es claramente definida negativa, así que $E(x, y)$ es una función de Liapunov para el sistema lineal (3)¹¹.

A continuación probaremos que $E(x, y)$ es también función de Liapunov para el sistema no lineal (4). Si definimos F y G por

$$F(x, y) = a_1x + b_1y + f(x, y)$$

y

$$G(x, y) = a_2x + b_2y + g(x, y),$$

entonces como se sabe que E es definida positiva, es suficiente probar que

$$\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G \quad (13)$$

es definida negativa. Usando (12), la (13) se escribe

$$-(x^2 + y^2) + (ax + by)f(x, y) + (bx + cy)g(x, y);$$

e introduciendo coordenadas polares se reformula así:

$$-r^2 + r[(a \cos \theta + b \sen \theta)f(x, y) + (b \cos \theta + c \sen \theta)g(x, y)].$$

Denotemos por K el mayor de los números $|a|, |b|, |c|$. La hipótesis (6) implica que

$$|f(x, y)| < \frac{r}{6K} \quad y \quad |g(x, y)| < \frac{r}{6K}$$

para todo $r > 0$ suficientemente pequeño, de modo que

$$\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G < -r^2 + \frac{4K^2}{6K} = -\frac{r^2}{3} < 0$$

para estos r . Así pues, $E(x, y)$ es una función definida positiva tal que (13) es definida negativa. El Teorema 61-A implica que $(0, 0)$ es un punto crítico asintóticamente estable de (4), lo que demuestra el teorema.

¹¹ Ahora se comprenderá la razón de las definiciones de a, b, c : queremos que (12) sea cierta.

Para ilustrar este teorema, consideremos de nuevo el sistema (7) del Ejemplo 1, cuyo sistema lineal asociado es (8). Para (8) tenemos $p = 1 > 0$ y $q = 1 > 0$, luego el punto crítico $(0, 0)$ es asintóticamente estable, tanto para el sistema lineal (8) como para el no lineal (7).

Ejemplo 2. Vimos en la Sección 58 que la ecuación del movimiento para las oscilaciones forzadas de un péndulo es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{g}{a} \operatorname{sen} x = 0,$$

siendo c una constante positiva. El sistema no lineal equivalente es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{a} \operatorname{sen} x - \frac{c}{m} y. \end{cases} \quad (14)$$

Escribamos (14) en la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{a}x - \frac{c}{m}y + \frac{g}{a}(x - \operatorname{sen} x). \end{cases} \quad (15)$$

Es fácil ver que

$$\frac{x - \operatorname{sen} x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0$$

cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, porque si $x \neq 0$, se tiene que

$$\frac{|x - \operatorname{sen} x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|x - \operatorname{sen} x|}{|x|} = \left| 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| \rightarrow 0;$$

y como $(0, 0)$ es evidentemente un punto crítico aislado del sistema lineal asociado

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{a}x - \frac{c}{m}y, \end{cases} \quad (16)$$

se sigue que $(0, 0)$ es un punto crítico simple de (15). A simple vista se observa que ($p = c/m > 0$ y $q = g/a > 0$) que $(0, 0)$ es un punto crítico asintóticamente estable

de (16), así que por el Teorema B lo es también de (15). Esto refleja el hecho físico obvio de que si el péndulo se perturba ligeramente el movimiento resultante se extinguirá con el paso del tiempo.

PROBLEMAS

- Probar que si $(0, 0)$ es un punto crítico simple de (4), necesariamente es aislado. *Ayuda:* Escribir (6) en la forma $f(x, y)/r = \varepsilon_1 \rightarrow 0$ y $g(x, y)/r = \varepsilon_2 \rightarrow 0$, y a la vista de (5), usar coordenadas polares para llegar a una contradicción partiendo de la hipótesis de que ambos lados de (4) se anulan en puntos arbitrariamente próximos al origen pero diferentes de él.
- Dibujar la familia de curvas cuya ecuación polar es $r = a \operatorname{sen} 2\theta$ (véase Figura 84) y expresar la ecuación diferencial de esa familia en la forma $dy/dx = G(x, y)/F(x, y)$.
- Si $(0, 0)$ es punto crítico simple de (4) y $q = a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0$, el Teorema A implica que $(0, 0)$ es un punto silla de (4), inestable por tanto. Demostrar que si $p = -(a_1 + b_2) < 0$ y $q = a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$, entonces $(0, 0)$ es un punto crítico inestable de (4). *Ayuda:* Adaptar la demostración del Teorema B para ver que existe una función positiva $E(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial E}{\partial x}(a_1 x + b_1 y) + \frac{\partial E}{\partial y}(a_2 x + b_2 y) = x^2 + y^2,$$

y aplicar el Problema 61-4. (Nótese que estos hechos, junto con el Teorema B, demuestran que toda la información de la Figura 80 sobre estabilidad asintótica e inestabilidad se traslada directamente a los sistemas no lineales con puntos críticos simples desde sus sistemas lineales asociados.)

- Probar que $(0, 0)$ es asintóticamente estable como punto crítico de

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} = x - y^3, \end{cases}$$

pero inestable como punto crítico de

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^3 \\ \frac{dy}{dt} = x + y^3 \end{cases}$$

¿Cómo se relacionan estos hechos con la nota entre paréntesis del Problema 3?

5. Verificar que $(0, 0)$ es un punto crítico simple para cada uno de estos sistemas y determinar su naturaleza y sus propiedades de estabilidad:

$$(a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - 2xy \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y + 3y^2; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y - 3x^2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 4y + y \sin x. \end{cases}$$

6. La ecuación de van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - \mu(x^2 - 1)y. \end{cases}$$

Investigar las propiedades de estabilidad del punto crítico $(0, 0)$ para los casos $\mu > 0$ y $\mu < 0$.

63. MECANICA NO LINEAL. SISTEMAS CONSERVATIVOS

Es bien sabido que en todo sistema dinámico se disipa energía, generalmente a causa de alguna fricción. Sin embargo, en ciertas situaciones esa disipación es tan lenta que se puede despreciar en cortos períodos de tiempo. En tales casos suponemos válida la ley de conservación de la energía en el sentido de que la suma de la energía cinética y la energía potencial se mantiene constante. Un sistema de ese tipo se llama *conservativo*. Así, la tierra en rotación puede considerarse un sistema conservativo en tiempos pequeños, digamos de algunos siglos, pero si queremos estudiar su comportamiento a lo largo de millones de años hemos de tener en cuenta la disipación.

El sistema conservativo más simple consiste en una masa m , sujetada a un muelle, que se mueve en una recta en el vacío. Si x denota el desplazamiento de m respecto de su posición de equilibrio y la fuerza restauradora ejercida por el muelle es $-kx$ donde $k > 0$, sabemos que la ecuación del movimiento es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Un *muelle* de esta clase se llama *lineal* porque la fuerza de recuperación es función lineal de x . Si m se mueve en un medio que ofrece resistencia y la

fuerza de amortiguamiento debida a esa resistencia es $-c(dx/dt)$, con $c > 0$, la ecuación del movimiento de este sistema no conservativo es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Aquí el *amortiguamiento es lineal* porque la fuerza de amortiguamiento es función lineal de dx/dt . Por analogía, si f y g son funciones arbitrarias tales que $f(0) = 0$ y $g(0) = 0$, la ecuación más general

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + g\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x) = 0 \quad (1)$$

puede ser interpretada como la ecuación de movimiento de una masa m bajo la acción de una *fuerza de recuperación* $-f(x)$ y una *fuerza de amortiguamiento* $-g(dx/dt)$. En general estas fuerzas son no lineales, y (1) viene a ser la ecuación básica de la mecánica no lineal. En esta sección consideraremos brevemente el caso especial de un sistema no lineal conservativo descrito por la ecuación

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0, \quad (2)$$

donde la fuerza de amortiguamiento es cero y no hay, por tanto, disipación de energía¹².

La ecuación (2) es equivalente al sistema autónomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{f(x)}{m}. \end{cases} \quad (3)$$

Si eliminamos dt , obtenemos la ecuación diferencial de las trayectorias de (3) en el plano de fases,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{m}, \quad (4)$$

¹² Extensas discusiones de (1), con aplicaciones a diversos problemas físicos, se encuentran en J. J. Stoker, *Nonlinear Vibrations*, Interscience-Wiley, Nueva York, 1950; y en A. A. Andronow y C. E. Chaikin, *Theory of Oscillations*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949.

que se puede escribir como

$$my dy = -f(x) dx. \quad (5)$$

Si $x = x_0$ e $y = y_0$ cuando $t = t_0$, integrando (5) desde t_0 hasta t se llega a

$$\frac{1}{2} my^2 - \frac{1}{2} my_0^2 = - \int_{x_0}^x f(x) dx,$$

o sea,

$$\frac{1}{2} my^2 + \int_0^x f(x) dx = \frac{1}{2} my_0^2 + \int_0^{x_0} f(x) dx. \quad (6)$$

Para interpretar este resultado, nótese que $1/2my^2 = 1/2m(dx/dt)^2$ es la energía cinética del sistema dinámico y

$$V(x) = \int_0^x f(x) dx \quad (7)$$

es su energía potencial. En consecuencia, (6) expresa la ley de conservación de la energía,

$$\frac{1}{2} my^2 + V(x) = E, \quad (8)$$

donde $E = 1/2my_0^2 + V(x_0)$ es la energía total constante del sistema. Está claro que (8) es la ecuación de las trayectorias de (3), ya que ha sido obtenida resolviendo (4). La trayectoria particular determinada al especificar un valor concreto de E es una curva de energía constante en el plano de fases. Los puntos críticos del sistema (3) son los puntos $(x_c, 0)$, donde los x_c son las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. Como advertimos en la Sección 58, esos son los puntos de equilibrio del sistema dinámico descrito por (2). Es evidente de (4) que las trayectorias cruzan el eje x en ángulo recto y son horizontales cuando atraviesan la recta $x = x_c$. La ecuación (8) muestra asimismo que las trayectorias son simétricas respecto al eje x .

Si escribimos (8) en la forma

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}, \quad (9)$$

las trayectorias se pueden construir siguiendo los pasos que se indican a continuación. Primero, situamos un plano xz con el eje z sobre la misma recta

vertical que el eje y sobre el plano de fases (Fig. 85). A continuación dibujamos la gráfica de $z = V(x)$ y varias rectas horizontales $z = E$ en el plano xz (en la figura se indica una de ellas) y observamos el significado geométrico de la diferencia $E - V(x)$. Finalmente, para cada x , multiplicamos la diferencia $E - V(x)$ obtenida en el paso anterior por $2/m$ y usamos (9) para dibujar los valores correspondientes de y en el plano de fases justamente debajo. Nótese que al ser $dx/dt = y$, la dirección positiva sobre cualquier trayectoria va hacia la derecha por encima del eje x y hacia la izquierda por debajo de él.

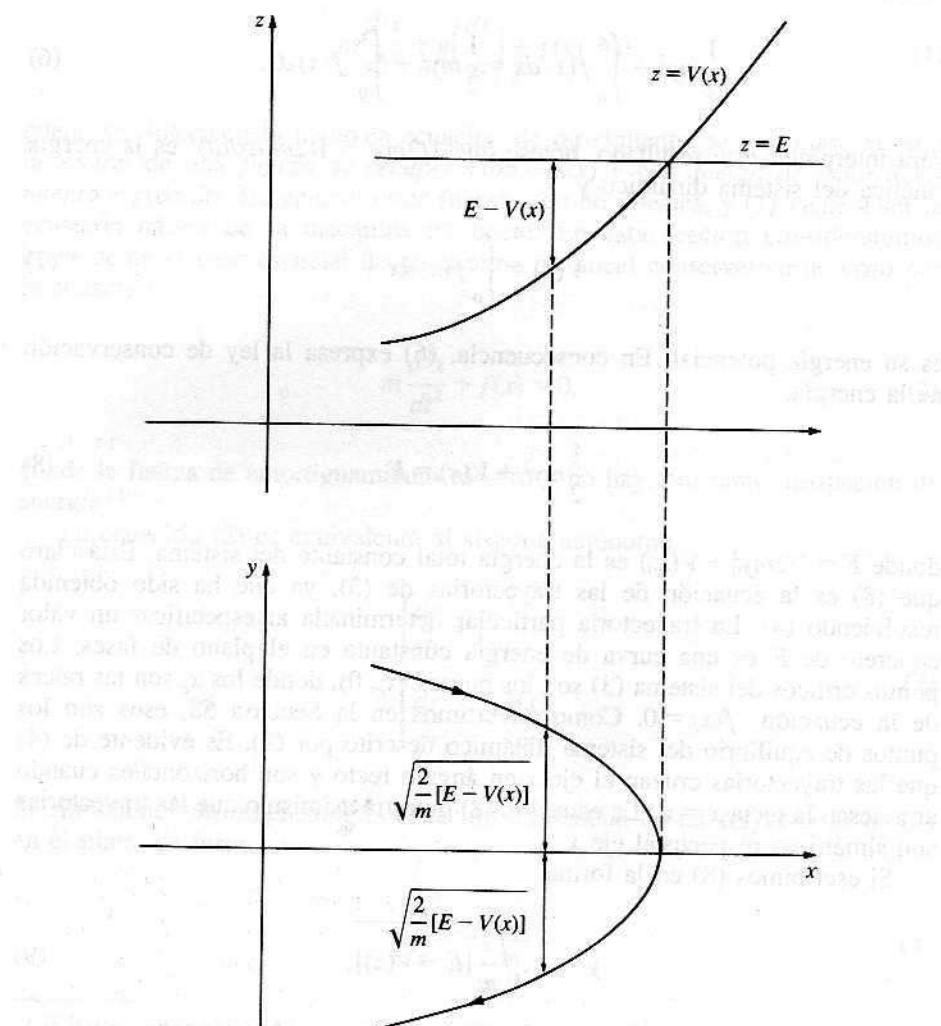


Figura 85

Ejemplo 1. Vimos en la Sección 58 que la ecuación del movimiento de un péndulo sin amortiguamiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \operatorname{sen} x = 0, \quad (10)$$

donde k es una constante positiva. Como esta ecuación es del tipo (2), se puede interpretar que describe el movimiento rectilíneo no amortiguado de una masa unidad bajo la influencia de un muelle no lineal de fuerza restauradora $-k \operatorname{sen} x$. El sistema autónomo equivalente a (10) es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -k \operatorname{sen} x, \end{cases} \quad (11)$$

y sus puntos críticos son $(0, 0)$, $(\pm \pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, ... La ecuación diferencial de las trayectorias es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k \operatorname{sen} x}{y},$$

de donde, separando variables e integrando, vemos que la ecuación de la familia de trayectorias es

$$\frac{1}{2} y^2 + (k - k \cos x) = E.$$

Es evidentemente de la forma (8), con $m = 1$ y

$$V(x) = \int_0^x f(x) dx = k - k \cos x$$

es la energía potencial. Ahora construimos las trayectorias dibujando en primer lugar la gráfica de $z = V(x)$ y varias rectas $z = E$ en el plano xz (Figura 86, donde $z = E = 2k$ es la única recta dibujada). De ahí leemos los valores de $E - V(x)$ y dibujamos las trayectorias en el plano de fases justamente debajo usando $y = \pm \sqrt{2[E - V(x)]}$. A la vista de este diagrama de fases es claro que si la energía total está entre 0 y $2k$ las correspondientes trayectorias son cerradas y la ecuación (10) tiene soluciones periódicas. Por otra parte, si $E > 2k$, las trayectorias no son cerradas y las soluciones correspondientes de (10) no son periódicas. El valor $E = 2k$ separa los dos tipos de movimiento, y por esa razón una trayectoria correspondiente

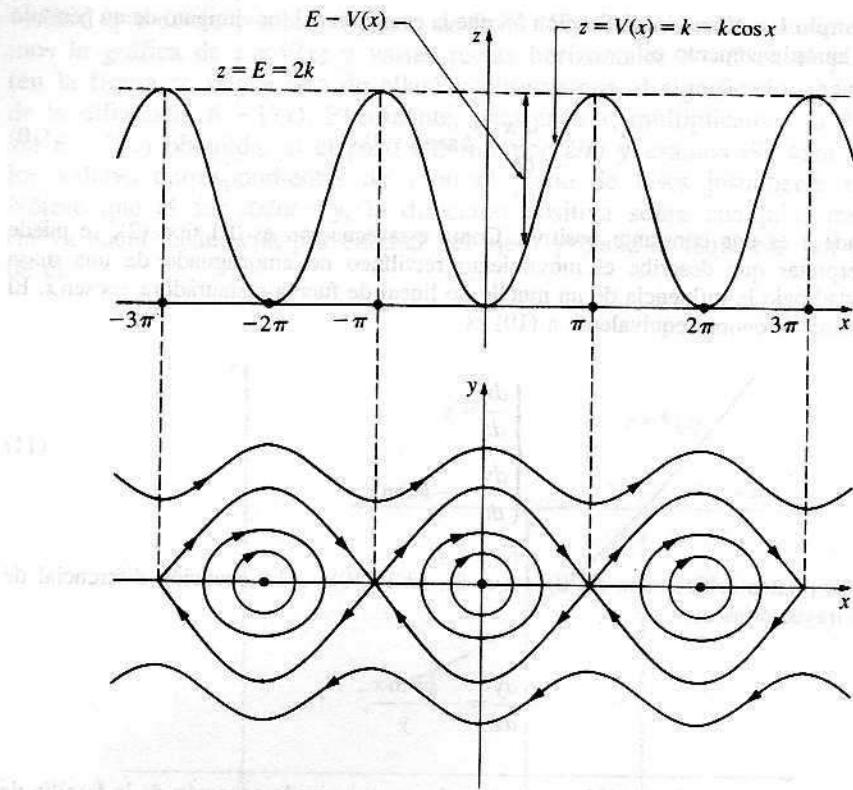


Figura 86

a $E = 2k$ se llama *separatriz*. Las trayectorias onduladas externas a las separatrices corresponden a movimientos giratorios del péndulo y las trayectorias cerradas del interior a movimientos oscilantes. Es evidente que los puntos críticos son alternativamente puntos silla inestables y centros estables (pero no asintóticamente estables). Como contraste, es interesante considerar el efecto que produce transformar este sistema dinámico conservativo en uno no conservativo mediante la adición de una fuerza de amortiguamiento lineal. En ese caso la ecuación del movimiento adopta la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + k \sin x = 0, \quad c > 0.$$

y la configuración de las trayectorias viene indicada en la Figura 87. Vemos que los centros de la Figura 86 se convierten en focos asintóticamente estables y que toda trayectoria (exceptuadas las separatrices que entran a los puntos silla cuando $t \rightarrow \infty$) tiende finalmente a uno de esos focos por una espiral.

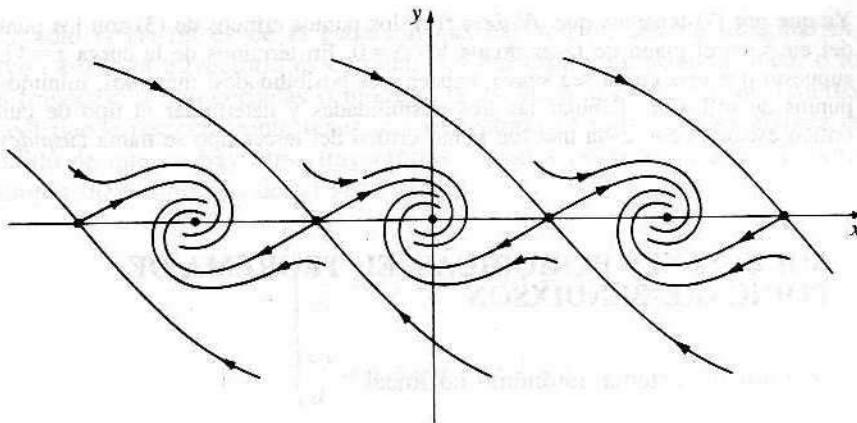


Figura 87

PROBLEMAS

1. Si $f(0) = 0$ y $xf(x) > 0$ para $x \neq 0$, probar que las trayectorias de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0$$

son curvas cerradas que rodean el origen en el plano de fases; es decir, probar que el punto crítico $x = 0$, $y = dx/dt = 0$ es un centro estable pero no asintóticamente estable. Describir la naturaleza y estabilidad de este punto crítico si $f(0) = 0$ y $xf(x) < 0$ para $x \neq 0$.

2. La mayoría de los muelles en la realidad son no lineales. Un muelle no lineal se dice que es *duro* o *blando* según que la magnitud de la fuerza de recuperación crezca más o menos rápidamente que una función lineal del desplazamiento. La ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx + \alpha x^3 = 0, \quad k > 0,$$

describe el movimiento de un muelle duro si $\alpha > 0$ y de uno blando si $\alpha < 0$. Dibujar las trayectorias en cada caso.

3. Hallar la ecuación de las trayectorias de

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x + 2x^3 = 0,$$

y dibujarlas en el plano de fases. Localizar los puntos críticos y determinar su naturaleza.

4. Ya que por (7) tenemos que $dV/dx = f(x)$, los puntos críticos de (3) son los puntos del eje x en el plano de fases donde $V'(x) = 0$. En términos de la curva $z = V(x)$, supuesto que esta curva sea suave, existen tres posibilidades: máximos, mínimos y puntos de inflexión. Dibujar las tres posibilidades y determinar el tipo de punto crítico asociado con cada una (un punto crítico del tercer tipo se llama *cúspide*).

64. SOLUCIONES PERIODICAS. EL TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON

Consideremos un sistema autónomo no lineal

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

donde las funciones F y G , así como sus primeras derivadas parciales, son continuas en el plano de fases. Lo dicho hasta ahora apenas da información sobre las trayectorias de (1), a no ser en el entorno de ciertos puntos críticos. No obstante, en muchos problemas estamos más interesados en las propiedades globales de las trayectorias que en esas propiedades locales. Son *propiedades globales* de las trayectorias aquellas que describen su comportamiento sobre grandes regiones del plano de fases, y en general resultan muy difíciles de establecer.

El problema central de la teoría global es determinar si (1) tiene o no trayectorias cerradas. Como apuntamos en la Sección 58, esta cuestión es importante porque guarda estrecha relación con la existencia o no de soluciones periódicas de (1). Una solución $x(t), y(t)$ de (1) se llama *periódica* si ninguna de esas dos funciones es constante, están ambas definidas para todo t y existe un número $T > 0$ tal que $x(t+T) = x(t)$ e $y(t+T) = y(t)$ para todo t . El T más pequeño con esa propiedad se conoce como *período* de la solución¹³. Es evidente que cada solución periódica de (1) define una trayectoria cerrada que se recorre una vez por completo cuando t crece desde t_0 hasta $t_0 + T$, sea cual sea t_0 . Recíprocamente, es fácil ver que si $C = [x(t), y(t)]$ es una trayectoria cerrada de (1), entonces $x(t), y(t)$ definen una solución periódica. De acuerdo con eso, la búsqueda de soluciones periódicas de (1) se reduce a la de trayectorias cerradas.

Sabemos por la Sección 60 que un sistema lineal tiene trayectorias cerradas

¹³ Toda solución periódica tiene un período en ese sentido. ¿Por qué?

si y sólo si las raíces de la ecuación auxiliar son puramente imaginarias, en cuyo caso toda trayectoria es cerrada. Así pues, para un sistema lineal o todas las trayectorias son cerradas o ninguna lo es. Bien al contrario, un sistema no lineal puede perfectamente tener una trayectoria cerrada que sea aislada en el sentido de que no hay otras trayectorias cerradas próximas a ella. He aquí un ejemplo bien conocido de tal sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (2)$$

Para resolver este sistema introducimos coordenadas polares r y θ , con $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Derivando las relaciones $x^2 + y^2 = r^2$ y $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(y/x)$ obtenemos las útiles fórmulas

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt} \quad \text{y} \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (3)$$

Multiplicando la primera ecuación de (2) por x , la segunda por y , y sumando, se obtiene

$$r \frac{dr}{dt} = r^2(1 - r^2). \quad (4)$$

Análogamente, si multiplicamos la segunda por x , la primera por y , y restamos, llegamos a

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = r^2. \quad (5)$$

El sistema (2) tiene un único punto crítico en $r = 0$. Puesto que sólo deseamos hallar las trayectorias, podemos suponer $r > 0$. Con ello, (4) y (5) muestran que (2) se convierte en

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(1 - r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Estas ecuaciones son fáciles de resolver por separado, y la solución general del sistema (6) resulta ser

$$\begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}} \\ \theta = t + t_0 \end{cases} \quad (7)$$

La correspondiente solución general de (2) es

$$\begin{cases} x = \frac{\cos(t + t_0)}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}} \\ y = \frac{\sin(t + t_0)}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}} \end{cases} \quad (8)$$

Analicemos (7) geométricamente (Fig. 88). Si $c = 0$, tenemos las soluciones $r = 0$ y $\theta = t + t_0$, que describen la trayectoria circular cerrada $x^2 + y^2 = 1$ en sentido contrario a las agujas de un reloj. Si $c < 0$, es claro que $r > 1$ y que $r \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow \infty$. Y si $c > 0$, vemos que $r < 1$, y de nuevo $r \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow \infty$. Estas observaciones demuestran que existe una sola trayectoria cerrada ($r = 1$) a la que todas las demás trayectorias tienden de forma espiral, bien sea por dentro o por fuera, cuando $t \rightarrow \infty$.

En la discusión anterior hemos mostrado que el sistema (2) tiene una trayectoria cerrada por construcción directa. En general, claro está, no podemos esperar ser capaces de semejante hazaña. Necesitamos criterios que nos permitan decidir si ciertas regiones del plano de fases contienen o no trayectorias cerradas. Nuestro primer criterio viene dado por el siguiente teorema de Poincaré, cuya demostración se esboza en el Problema 1.

Teorema A. *Una trayectoria cerrada del sistema (1) rodea necesariamente al menos un punto crítico de este sistema.*

Este resultado proporciona un criterio negativo de interés limitado: un sistema sin puntos críticos en una cierta región no puede tener en ella trayectorias cerradas.

El próximo teorema, debido a Bendixson¹⁴, da otro criterio negativo.

Teorema B. *Si $\partial F/\partial x + \partial G/\partial y$ es siempre positiva o siempre negativa en una cierta región del plano de fases, el sistema (1) no tiene trayectorias cerradas en esa región.*

¹⁴ Ivar Otto Bendixson (1861-1935) fue un matemático sueco que publicó una importante memoria en 1901 como suplemento a trabajos previos de Poincaré. Profesor (y más tarde Rector) en la Universidad de Estocolmo, fue durante mucho tiempo un energético miembro de la corporación municipal de esa ciudad.

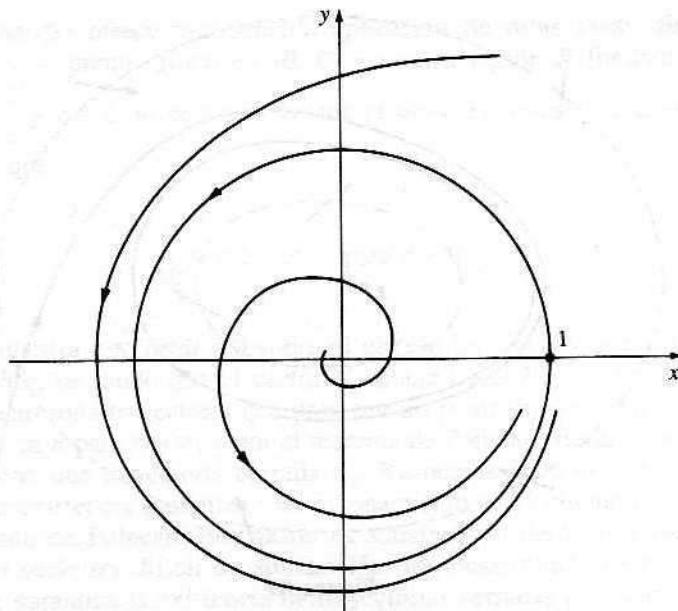


Figura 88

Demostración. Supongamos que la región contuviese una trayectoria cerrada $C = [x(t), y(t)]$ con interior R . El teorema de Green y nuestra hipótesis implican que

$$\int_C (F dy - G dx) = \iint_R \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy \neq 0.$$

Sin embargo, a lo largo de C se tiene $dx = F dt$ y $dy = G dt$, y por tanto

$$\int_C (F dy - G dx) = \int_0^T (FG - GF) dt = 0.$$

Esta contradicción muestra que nuestra hipótesis inicial es falsa, de modo que la región en cuestión no puede contener trayectorias cerradas.

Estos teoremas son útiles a veces, pero lo que realmente deseamos son criterios positivos que formulen condiciones suficientes para la existencia de trayectorias cerradas de (1). Uno de los pocos teoremas generales a este res-

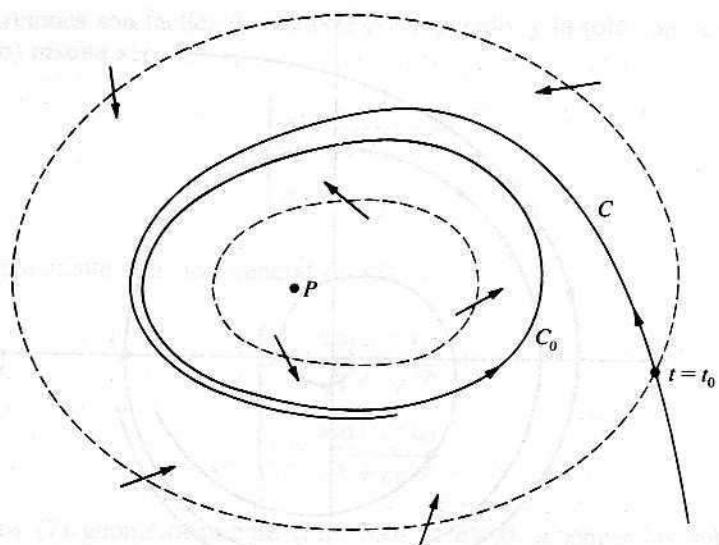


Figura 89

pecto es el clásico *teorema de Poincaré-Bendixson*, que pasamos a enunciar sin demostración¹⁵.

Teorema C. *Sea R una región acotada del plano de fases junto con su contorno, y supongamos que R no contiene puntos críticos del sistema (1). Si $C = [x(t), y(t)]$ es una trayectoria de (1) que está en R para cierto t_0 y permanece en R para todo $t \geq t_0$, entonces C o bien es una trayectoria cerrada o tiende en forma espiral hacia una trayectoria cerrada cuando $t \rightarrow \infty$. Así pues, en cualquier caso el sistema (1) tiene en R una trayectoria cerrada.*

Con el fin de comprender el enunciado, consideremos la situación sugerida por la Figura 89, donde R consta de las dos curvas de trazo discontinuo junto con la región anular entre ellas. Supongamos que el vector

$$\mathbf{V}(x, y) = F(x, y)\mathbf{i} + G(x, y)\mathbf{j}$$

apunta hacia R en todo punto del contorno. Entonces toda trayectoria C que pase por un punto del contorno (en $t = t_0$) debe entrar a R y no podrá salir ya, y bajo estas circunstancias el teorema asegura que C ha de tender en espiral hacia una trayectoria cerrada C_0 . Hemos elegido una región de forma anular para ilustrar el teorema porque una trayectoria cerrada como C_0 ha de encerrar algún punto crítico (P en la figura) y R no ha de incluir puntos críticos.

¹⁵ Para más detalles, véase Hurewicz, *loc. cit.*, págs. 102-111, o Cesari, *loc. cit.*, págs. 163-167.

El sistema (2) ofrece una sencilla aplicación de estas ideas. Está claro que (2) tiene un punto crítico en $(0, 0)$ y que la región R limitada por los círculos $r = \frac{1}{2}$ y $r = 2$ no contiene puntos críticos. En nuestro análisis previo hemos visto que

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2) \quad \text{para } r > 0.$$

Esto demuestra que $dr/dt > 0$ sobre el círculo interior y $dr/dt < 0$ sobre el círculo exterior, de modo que el vector \mathbf{V} apunta hacia R en todos sus puntos frontera. Luego toda trayectoria que pase por un punto frontera entrará en R y permanecerá en R para $t \rightarrow \infty$, y por el teorema de Poincaré-Bendixson sabemos que R contiene una trayectoria cerrada C_0 . Ya hemos visto que la trayectoria cerrada cuya existencia garantiza este razonamiento es el círculo $r = 1$.

El teorema de Poincaré-Bendixson es satisfactorio desde una perspectiva teórica, pero suele ser difícil de aplicar. Ha sido desarrollado un criterio más práctico que garantiza la existencia de trayectorias cerradas para toda ecuación de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0, \quad (9)$$

conocida como *ecuación de Liénard*¹⁶. Al hablar de una trayectoria cerrada para tal ecuación queremos decir, naturalmente, una trayectoria cerrada del sistema equivalente

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y \end{cases} \quad (10)$$

y como sabemos, una trayectoria cerrada de (10) corresponde a una solución periódica de (9). El hecho fundamental acerca de trayectorias cerradas de (9) está contenido en el siguiente resultado.

¹⁶ Alfred Liénard (1869-1958) fue un científico francés que dedicó la mayor parte de su carrera a la enseñanza de la física aplicada en la Escuela de Minas de París, de la que fue nombrado director en 1929. Sus investigaciones en física se desarrollaron principalmente en electromagnetismo, elasticidad e hidrodinámica. Esporádicamente trabajó en cuestiones de física matemática originadas en sus investigaciones, y en 1933 fue elegido Presidente de la Sociedad Matemática de Francia. Hombre modesto, su vida estuvo dedicada por entero a su trabajo y a sus estudiantes.

Teorema D. (Teorema de Liénard.) Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que satisfacen las siguientes condiciones: (i) ambas son continuas, al igual que sus derivadas, en todo x ; (ii) $g(x)$ es impar y tal que $g(x) > 0$ para $x > 0$, y $f(x)$ es par; y (iii) la función impar $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ tiene exactamente un cero positivo en $x = a$, es negativa para $0 < x < a$, es positiva y no decreciente para $x > a$, y $F(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. Entonces la ecuación (9) tiene una única trayectoria cerrada que rodea al origen en el plano de fases, y a ella tienden en forma de espirales todas las demás trayectorias cuando $t \rightarrow \infty$.

En atención a los lectores escépticos y tenaces que no estén dispuestos a aceptar afirmaciones injustificadas, presentamos en el Apéndice B una demostración de este teorema. Se puede vislumbrar el papel de las hipótesis de modo intuitivo pensando en (9) en términos de las ideas de la sección precedente. Desde este punto de vista, (9) es la ecuación del movimiento de una masa unidad sujeta a un muelle y sometida a la doble influencia de una fuerza restauradora $-g(x)$ y una fuerza de amortiguamiento $-f(x) dx/dt$. La hipótesis sobre $g(x)$ asegura que el muelle actúa como uno esperaría, tendiendo a disminuir la magnitud de cualquier desplazamiento. Por otra parte, las hipótesis acerca de $f(x)$ [grosso modo, que $f(x)$ es negativa para pequeños $|x|$ y positiva para grandes $|x|$] significan que el movimiento se intensifica para pequeños $|x|$ y se retarda para grandes $|x|$ tendiendo, por tanto, a permanecer en oscilación estacionaria. Este comportamiento peculiar de $f(x)$ puede expresarse también diciendo que el sistema físico absorbe energía cuando $|x|$ es pequeño y la disipa cuando $|x|$ es grande.

La principal aplicación del teorema de Liénard ocurre en la ecuación de van der Pol¹⁷.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (11)$$

donde μ es una constante, positiva por razones físicas. Aquí $f(x) = \mu(x^2 - 1)$ y $g(x) = x$, así que la condición (i) es claramente satisfecha. Es también claro que la condición (ii) es cierta. Como

$$F(x) = \mu \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) = \frac{1}{3} \mu x(x^2 - 3),$$

vemos que $F(x)$ tiene un único cero positivo en $x = \sqrt{3}$, es negativa en $0 < x < \sqrt{3}$, positiva para $x > \sqrt{3}$, y $F(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. Finalmente, $F'(x) = \mu(x^2 - 1)$ es positiva para $x > 1$, de manera que $F(x)$ es no decreciente (de hecho, es creciente) para $x > \sqrt{3}$. Por tanto, se cumplen todas las condicio-

¹⁷ Balthasar van der Pol (1889-1959), científico holandés especialista en aspectos teóricos de radio-inginería, inició el estudio de la ecuación (11) en los años veinte, estimulando con ello a Liénard y otros a investigar la teoría matemática de las oscilaciones automantenidas en mecánica no lineal.

nes del teorema y concluimos que la ecuación (11) tiene una única trayectoria cerrada (solución periódica) a la que tienden en forma espiral (asintóticamente) todas las demás trayectorias (soluciones no triviales).

PROBLEMAS

1. Se puede lograr una demostración del Teorema A a partir de las siguientes ideas geométricas (Fig. 90). Sea C una curva cerrada simple (no necesariamente una trayectoria) en el plano de fases, y supongamos que C no pasa por ningún punto crítico del sistema (1). Si $P = (x, y)$ es un punto de C , entonces

$$\mathbf{V}(x, y) = F(x, y)\mathbf{i} + G(x, y)\mathbf{j}$$

es un vector no nulo y, por tanto, tiene una dirección definida dada por el ángulo θ . Si P recorre C una vez en sentido contrario a las agujas del reloj, el ángulo θ cambia en una cantidad $\Delta\theta = 2\pi n$, donde n es un entero positivo, negativo o cero. Este entero n se llama el *índice* de C . Si C se deforma a una curva cerrada simple más pequeña C_0 de forma continua, sin pasar por ningún punto crítico, su índice varía de modo continuo; y como el índice es entero, no puede cambiar su valor.

- (a) Si C es una trayectoria de (1), probar que su índice es 1.
- (b) Si C es una trayectoria de (1) que no contiene puntos críticos, probar que una C_0 pequeña tiene índice 0, deduciendo de ahí el Teorema A.

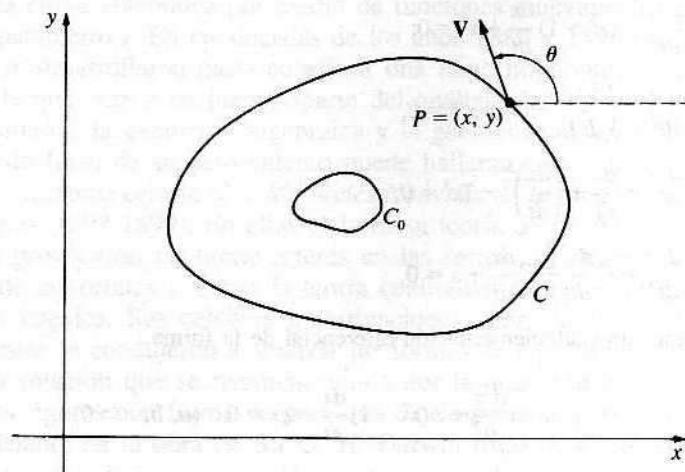


Figura 90

2. Consideremos el sistema autónomo no lineal

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 4y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 4y - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

- (a) Escribirlo en coordenadas polares.
- (b) Aplicar el teorema de Poincaré-Bendixson para demostrar que existe una trayectoria cerrada entre los círculos $r = 1$ y $r = 3$.
- (c) Hallar la solución general no constante $x = x(t)$, $y = y(t)$ del sistema original, y usarla para hallar una solución periódica correspondiente a la trayectoria cerrada cuya existencia se ha establecido en (b).
- (d) Dibujar la trayectoria cerrada y al menos un par de trayectorias más en el plano de fases.

3. Probar que el sistema autónomo no lineal

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y - xe^{x^2+y^2} \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y - ye^{x^2+y^2} \end{cases}$$

tiene una solución periódica.

4. En cada uno de los casos siguientes, usar un teorema de esta sección para determinar si la ecuación diferencial dada admite o no una solución periódica:

$$(a) \frac{d^2x}{dt^2} + (5x^4 - 9x^2)\frac{dx}{dt} + x^5 = 0;$$

$$(b) \frac{d^2x}{dt^2} - (x^2 + 1)\frac{dx}{dt} + x^5 = 0;$$

$$(c) \frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - (1 + x^2) = 0;$$

$$(d) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^5 - 3x^3 = 0;$$

$$(e) \frac{d^2x}{dt^2} + x^6 \frac{dx}{dt} - x^2 \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

5. Mostrar que cualquier ecuación diferencial de la forma

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (a, b, c > 0)$$

puede ser transformada en la ecuación de van der Pol por un cambio de variable independiente.

APENDICE A. POINCARÉ

Jules Henri Poincaré (1854-1912) era considerado al comienzo del siglo XX como el más grande de los matemáticos de su generación. Inició su carrera académica en Caen en 1879, pero dos años más tarde fue nombrado profesor en la Sorbona, donde permaneció el resto de su vida, explicando una disciplina distinta cada año. En sus cursos, cuyas notas publicaron y editaron sus alumnos, trató con maestría y originalidad la práctica totalidad de los campos conocidos de la matemática pura y aplicada, y muchos que él mismo inventó. En total produjo más de 30 libros técnicos sobre física matemática y mecánica celeste, media docena de libros de divulgación y casi 500 artículos de investigación en matemáticas. Fue un pensador rápido, potente e infatigable, no inclinado a perderse en detalles, descrito por uno de sus contemporáneos como «un conquistador, no un colonizador». Disfrutaba asimismo de una memoria prodigiosa y habitualmente hacia sus matemáticas mentalmente, paseando de un lado a otro de su despacho, escribiendo las cosas una vez maduras en su cabeza. A la temprana edad de 32 años fue elegido miembro de la Academia de Ciencias. El académico que le propuso como nuevo miembro dijo que «su obra está por encima de las alabanzas ordinarias y nos recuerda inevitablemente lo que Jacobi escribió de Abel: plantea cuestiones que antes de él eran inimaginables».

El primer gran logro de Poincaré en matemáticas se produjo en análisis. Generalizó la noción de función periódica creando su teoría de funciones automorfas. Las funciones trigonométricas y exponenciales son simplemente periódicas y las funciones elípticas son doblemente periódicas. Las funciones automorfas de Poincaré constituyen una amplia generalización de ellas, pues son invariantes bajo un grupo infinito numerable de transformaciones racionales lineales e incluyen la rica teoría de las funciones elípticas como caso particular. Las aplicó a la resolución de ecuaciones diferenciales con coeficientes algebraicos y mostró cómo pueden utilizarse asimismo para expresar las coordenadas de cualquier punto de una curva algebraica por medio de funciones unievaluadas $x(t)$ e $y(t)$ de un solo parámetro t . En las décadas de los años 1880 y 1890 las funciones automorfas se desarrollaron hasta constituir una rama importante de las matemáticas en la que entran en juego, aparte del análisis, la teoría de grupos, la teoría de números, la geometría algebraica y la geometría no euclídea.

Otro punto focal de su pensamiento puede hallarse en sus investigaciones acerca de la mecánica celeste (*Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, tres volúmenes, 1892-1899). En ellas elaboró su teoría de los desarrollos asintóticos (que provocaron un fuerte interés en las series asintóticas), estudió la estabilidad de las órbitas e inició la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales no lineales. Sus célebres investigaciones sobre la evolución de los cuerpos celestes le condujeron a analizar las formas de equilibrio de una masa de fluido en rotación que se mantiene unida por la atracción gravitacional, y descubrió las figuras con forma de pera que tan importante papel desempeñarían más adelante en la obra de Sir G. H. Darwin (hijo de Charles)¹⁸. En su

¹⁸ Véase G. H. Darwin, *The Tides*, cap. XVIII, Houghton Mifflin, Boston, 1899.

resumen de tales investigaciones, Poincaré escribe: «Imaginemos un fluido en rotación que se contrae por enfriamiento, suficientemente despacio como para mantenerse uniforme y para que la rotación sea la misma en todas sus partes. Siendo al principio con muy buena aproximación esférica, la figura de esa masa pasará a ser un elipsoide de revolución que se achatará más y más, convirtiéndose en un cierto momento en un elipsoide con tres ejes de distintas longitudes. Más tarde, la figura dejará de ser elipsoidal y adquirirá forma de pera hasta que finalmente la masa, hundiéndose progresivamente por su “cintura”, se separará en dos cuerpos desiguales». Estas ideas han recobrado interés en nuestros días, pues con la ayuda de satélites artificiales los geofísicos han comprobado recientemente que la propia tierra presenta una ligera forma de pera.

Muchos de los problemas que trató en este período fueron simiente de nuevas vías de reflexión que han alcanzado su mayoría de edad en el siglo XX. Ya hemos mencionado las series divergentes y las ecuaciones diferenciales no lineales. Además de eso, sus intentos por dominar la naturaleza cualitativa de curvas y superficies en dimensiones superiores dieron lugar a su famosa memoria *Analysis situs* (1895), que marca, en opinión de muchos expertos, el comienzo de la era moderna en topología algebraica. Además, en sus estudios sobre órbitas periódicas creó la dinámica topológica (o cualitativa). El tipo de cuestiones abordadas en ella lo ilustra un teorema que él conjeturó en 1912 pero no llegó a ver demostrado: si una transformación continua biyectiva aplica el anillo comprendido entre dos círculos concéntricos en sí mismo de manera tal que preserva áreas y mueve los puntos del círculo interior en sentido de las agujas de un reloj y los del círculo exterior en sentido contrario, entonces al menos dos puntos del anillo quedan fijos. Este teorema tiene importantes aplicaciones al clásico problema de tres cuerpos (y al movimiento de una bola de billar sobre una mesa de billar convexa). Fue probado en 1913 por Birkhoff, un joven matemático americano¹⁹. Otro descubrimiento notable en este campo, conocido hoy como teorema de recurrencia de Poincaré, se refiere al comportamiento a largo plazo de los sistemas dinámicos conservativos. Su resultado pareció demostrar la futilidad de los esfuerzos contemporáneos para deducir la segunda ley de la termodinámica a partir de la mecánica clásica, y la controversia subsiguiente fue germán de la moderna teoría ergódica.

Una de las más impactantes contribuciones de Poincaré, entre las numerosas que aportó a la física matemática, es su famoso artículo de 1906 sobre la dinámica del electrón. Había estado reflexionando durante años acerca de los fundamentos de la física y había obtenido, independientemente de Einstein, muchos de los resultados de la teoría especial de la relatividad²⁰. La principal diferencia era que el tratamiento de Einstein se basaba en ideas elementales relacionadas con señales luminosas, mientras Poincaré basaba su teoría en

¹⁹ Véase G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Cap. VI, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. IX, Providence, R. I., 1927.

²⁰ Una exposición de tipo histórico puede consultarse en Charles Scribner, Jr., «Henri Poincaré and the Principle of Relativity», *Am. J. Phys.*, vol. 32, pág. 672 (1964).

la teoría del electromagnetismo y su aplicación quedaba, por tanto, limitada a fenómenos relacionados con esta teoría. Poincaré tenía en alta estima la capacidad de Einstein y en 1911 le apoyó en su acceso a su primer puesto académico²¹.

En 1902 comenzó a dedicarse, como interés secundario, a escribir y dar conferencias para un público amplio, en un esfuerzo por compartir con los no especialistas la importancia y significación de las matemáticas y de la ciencia. Estas obras menores han sido recogidas en cuatro volúmenes, *La Science et l'Hypothèse* (1903), *La Valeur de la Science* (1904), *Science et Méthode* (1908) y *Dernières Pensées* (1913)²². Son claras, ingeniosas, profundas y a la vez deliciosas, y hacen de él un auténtico maestro de la prosa en lengua francesa. En el más famoso de estos ensayos, dedicado a los descubrimientos matemáticos, se miraba de forma introspectiva y analizaba sus propios procesos mentales, proporcionándonos a los demás una perspectiva poco frecuente de la mente de un genio en acción. Como Jourdain escribió a su muerte: «Una de las muchas razones por las que seguirá vivo es que nos permitió no sólo admirarle, sino comprenderle».

En el momento presente se dice que el conocimiento matemático se multiplica por dos cada diez años más o menos, si bien algunos se muestran escépticos sobre la continuidad de tal ritmo. Hoy en día se da por imposible que un ser humano alcance una profunda comprensión de más de una o dos de las cuatro grandes ramas de las matemáticas (análisis, álgebra, geometría y teoría de números), y eso incluso dejando de lado la física matemática. Poincaré tenía capacidad creativa en la totalidad de las matemáticas existentes en su tiempo. Ha sido, a buen seguro, el último hombre capaz de tal cosa.

APENDICE B. DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE LIENARD

Consideremos la ecuación de Liénard

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0, \quad (1)$$

y supongamos que f y g satisfacen: (i) $f(x)$ y $g(x)$ y sus derivadas son continuas; (ii) $g(x)$ es una función impar tal que $g(x) > 0$ si $x > 0$, y $f(x)$ es una función par; (iii) la función impar $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ tiene exactamente un cero positivo en $x = a$, es negativa para $0 < x < a$, positiva y no decreciente para $x > a$, y $F(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. Demostraremos que la ecuación (1) tiene una

²¹ Véase M. Lincoln Schuster (ed.), *A Treasury of the World's Great Letters*, pág. 453, Simon and Schuster, Nueva York, 1940.

²² Su traducción al inglés ha sido publicada por Dover Publications, Nueva York.

única trayectoria cerrada que rodea al origen en el plano de fases y que las demás trayectorias tienden a ella en forma de espirales cuando $t \rightarrow \infty$.

El sistema equivalente a (1) en el plano de fases es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y. \end{cases} \quad (2)$$

Por la condición (i), el teorema básico sobre existencia y unicidad de soluciones es aplicable. De (ii) se sigue que $g(0) = 0$ y $g(x) \neq 0$ para $x \neq 0$, de modo que el origen es el único punto crítico. Además, sabemos que cualquier trayectoria cerrada debe rodear al origen. El hecho de que

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{dx}{dt} + \int_0^x f(x) dx \right] = \\ &= \frac{d}{dt} [y + F(x)] \end{aligned}$$

sugiere introducir una nueva variable,

$$z = y + F(x).$$

Con esa notación, (1) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = z - F(x) \\ \frac{dz}{dt} = -g(x) \end{cases} \quad (3)$$

en el plano xz . De nuevo vemos que es válido el teorema de existencia y unicidad, que el origen es el único punto crítico, y que cualquier trayectoria cerrada debe rodearlo. La correspondencia $(x, y) \leftrightarrow (x, z)$ entre los puntos de los dos planos es continua en ambos sentidos, de modo que trayectorias cerradas corresponden a trayectorias cerradas y las configuraciones de las trayectorias en ambos planos son cualitativamente similares. La ecuación diferencial de las trayectorias de (3) es

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-g(x)}{z - F(x)}. \quad (4)$$

Estas trayectorias son más sencillas de analizar que las correspondientes en el plano de fases por las siguientes razones.

En primer lugar, como $g(x)$ y $F(x)$ son impares, las ecuaciones (3) y (4) quedan invariantes al sustituir x, z por $-x, -z$. Esto quiere decir que toda curva simétrica a una trayectoria con respecto al origen es también una trayectoria. Así pues, si conocemos las trayectorias en el semiplano de la derecha ($x > 0$), las del semiplano de la izquierda ($x < 0$) se obtienen sin más que efectuar una inversión respecto al origen.

En segundo lugar, la ecuación (4) muestra que las trayectorias son horizontales sólo cuando atraviesan el eje z , y verticales cuando cruzan a la curva $z = F(x)$. Asimismo, una mirada a los signos de los miembros de la derecha en las ecuaciones (3) nos dice que todas las trayectorias están dirigidas hacia la derecha por encima de la curva $z = F(x)$ y hacia la izquierda por debajo de ella, y suben o bajan según que $x > 0$ o $x < 0$. Estas observaciones significan que la curva $z = F(x)$ sólo puede ser atravesada en las direcciones que indican las flechas de la Figura 91. Supongamos que la solución de (3) que define la trayectoria C que pasa por Q se escoge de forma tal que Q corresponde al valor $t = 0$ del parámetro. Entonces, al crecer t hacia valores positivos, un punto de C con coordenadas $x(t), y(t)$ descenderá hacia la izquierda hasta que cruce el eje z en un punto R ; y si t decrece hacia valores negativos, el punto de C sube hacia la izquierda hasta que cruce el eje z en un punto P . Será conveniente denotar por b la abscisa de Q y la trayectoria C por C_b .

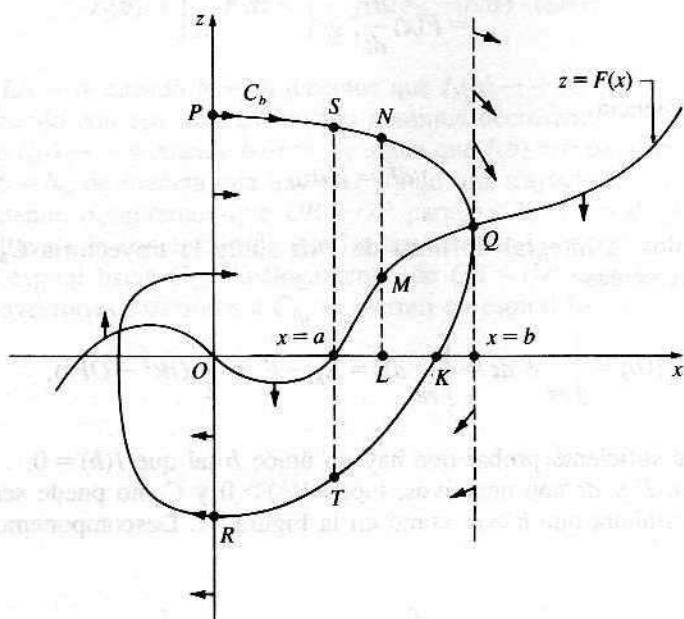


Figura 91

Es fácil ver, por la propiedad de simetría, que cuando la trayectoria C_b se prolonga más allá de P y R al semiplano izquierdo, resulta una trayectoria cerrada si y sólo si las distancias OP y OR son iguales. Para probar que hay una única trayectoria cerrada, bastará, por consiguiente, demostrar que hay un solo valor de b para el cual $OP = OR$.

A tal fin, denotemos

$$G(x) = \int_0^x g(x) dx$$

y consideremos la función

$$E(x, z) = \frac{1}{2} z^2 + G(x),$$

que se reduce a $z^2/2$ sobre el eje z . A lo largo de cualquier trayectoria tenemos

$$\frac{dE}{dt} = g(x) \frac{dx}{dt} + z \frac{dz}{dt}$$

$$= -[z - F(x)] \frac{dz}{dt} + z \frac{dz}{dt}$$

$$= F(x) \frac{dz}{dt},$$

y en consecuencia

$$dE = F dz.$$

Si calculamos la integral de línea de $F dz$ sobre la trayectoria C_b desde P hasta R , obtenemos

$$I(b) = \int_{PR} F dz = \int_{PR} dE = E_R - E_P = \frac{1}{2}(OR^2 - OP^2),$$

así que será suficiente probar que hay un único b tal que $I(b) = 0$.

Si $b \leq a$, F y dz son negativos, luego $I(b) > 0$ y C_b no puede ser cerrada. Supongamos ahora que $b > a$, como en la Figura 91. Descomponemos $I(b)$ en dos partes,

$$I_1(b) = \int_{PS} F dz + \int_{TR} F dz \quad \text{e} \quad I_2(b) = \int_{ST} F dz,$$

luego

$$I(b) = I_1(b) + I_2(b).$$

Como F y dz son negativos al recorrer C_b desde P hasta S y desde T hasta R , es claro que $I_1(b) > 0$. Por otro lado, si vamos de S a T a lo largo de C_b , tenemos $F > 0$ y $dz < 0$, luego $I_2(b) < 0$. Nuestro objetivo inmediato es probar que $I(b)$ es una función decreciente de b considerando separadamente $I_1(b)$ e $I_2(b)$. Para empezar, nótese que (4) nos permite escribir

$$F dz = F \frac{dz}{dx} dx = \frac{-g(x)F(x)}{z - F(x)} dx.$$

El efecto de hacer crecer b es que el arco PS sube y el arco TR baja, lo cual hace decrecer la magnitud de $[-g(x)F(x)]/[z - F(x)]$ para un x dado entre 0 y a . Puesto que los límites de integración para $I_1(b)$ están fijos, el resultado es un decrecimiento de $I_1(b)$. Además, como $F(x)$ es positiva y no decreciente a la derecha de a , vemos que un aumento en b da lugar a un crecimiento en el número positivo $-I_2(b)$, y por tanto a un decrecimiento de $I_2(b)$. Así pues, $I(b) = I_1(b) + I_2(b)$ es función decreciente para $b \geq a$. Ahora vamos a ver que $I_2(b) \rightarrow -\infty$ cuando $b \rightarrow \infty$. Si L en la Figura 91 está fijo y K está a la derecha de L , entonces

$$I_2(b) = \int_{ST} F dz < \int_{NK} f dz \leq -(LM) \cdot (LN);$$

y ya que $LN \rightarrow \infty$ cuando $b \rightarrow \infty$, tenemos que $I_2(b) \rightarrow -\infty$.

De acuerdo con eso, $I(b)$ es función continua decreciente de b para $b \geq a$, $I(a) > 0$, e $I(b) \rightarrow -\infty$ cuando $b \rightarrow \infty$. Se sigue que $I(b) = 0$ para un y sólo para un valor $b = b_0$, de manera que hay una y sólo una trayectoria cerrada C_{b_0} .

Finalmente, observemos que $OR > OP$ para $b < b_0$; lo cual, junto con la simetría, lleva a la conclusión de que las trayectorias interiores a C_{b_0} se abren en forma espiral hacia C_{b_0} . Análogamente, de $OR < OP$ para $b > b_0$ se sigue que las trayectorias exteriores a C_{b_0} se cierran en espiral hacia C_{b_0} .

EL CALCULO DE VARIACIONES

Este es el tema 61 entre los 70 que se han ido haciendo recien en este libro. Es un tema sobre un sujeto que no se ha visto en el libro anterior. El tema anterior es el de las integrales de Riemann y el tema siguiente es el de las integrales de Lebesgue. Los temas anteriores son los siguientes: 1) Introducción al cálculo de variaciones; 2) Problemas de optimización; 3) Problemas de control óptimo; 4) Problemas de control óptimo con restricciones; 5) Problemas de control óptimo con restricciones y restricciones de tipo óptimo; 6) Problemas de control óptimo con restricciones y restricciones de tipo óptimo y restricciones de tipo óptimo.

65. INTRODUCCION. ALGUNOS PROBLEMAS TIPICOS DEL CALCULO DE VARIACIONES

El cálculo de variaciones se ha erigido como una de las ramas más importantes del análisis durante más de dos siglos. Es una técnica muy potente aplicable a una amplísima gama de problemas en matemática pura. Asimismo puede ser utilizada para expresar los principios básicos de la física matemática en forma elegante y de inusitada sencillez.

El aroma de este tema se capta sin dificultad considerando unos pocos de sus problemas típicos. Sean dos puntos P y Q en un plano (Fig. 92). Existen infinitas curvas que los unen y cabe preguntarse por la más corta de todas ellas. La respuesta intuitiva es, claro está, la línea recta. Podemos preguntarnos también qué curva genera, por rotación en torno al eje x , la superficie de revolución de área mínima, y en este caso la respuesta dista mucho de ser evidente. Si pensamos en una curva como si fuera un hilo sin rozamiento en un plano vertical, otro problema no trivial es el de hallar la curva por la que un abalorio deslizará desde P hasta Q en el menor tiempo posible. Este es el famoso problema de la braquistócrona de John Bernoulli, expuesto en la Sección 6. Es raro disponer de respuesta intuitiva de este tipo de cuestiones. El cálculo de variaciones proporciona un método analítico general para enfrentarse a tales situaciones.

Todo estudiante de cálculo está familiarizado con el problema de hallar los puntos en los que una función de una variable toma valor máximo o mínimo. Los problemas antes mencionados muestran que en el cálculo de variaciones se consideran cantidades (longitud de arco, área, tiempo de descenso) que dependen de la curva como un todo, y se trata de buscar la curva que hace

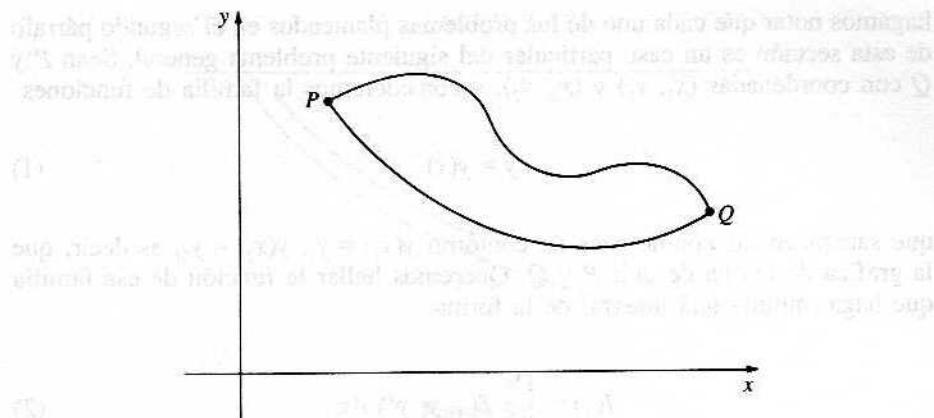


Figura 92

mínima la cantidad en cuestión. El cálculo de variaciones trata también problemas de mínimos en los que una cantidad depende de superficies, no ya de curvas. Por ejemplo, si se deforma un alambre circular de una cierta manera y se sumerge en una solución jabonosa, la película de jabón que subtenderá el alambre adopta la forma de la superficie de área mínima entre todas las que tienen como contorno al alambre dado. El problema matemático consiste en encontrar dicha superficie partiendo de la citada propiedad de mínima área y de la forma del alambre.

Por añadidura, el cálculo de variaciones ha desempeñado un papel importante como impulso unificador en mecánica y como guía en la interpretación matemática de muchos fenómenos físicos. Así, se ha visto que si la configuración de un sistema de partículas móviles viene dictada por su atracción gravitacional mutua, sus trayectorias serán curvas que hagan mínima la integral, respecto al tiempo, de la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema. Esta proposición de largo alcance es conocida en mecánica como *principio de Hamilton*, en honor de su descubridor. En la física moderna, Einstein hizo uso frecuente del cálculo de variaciones en sus trabajos de relatividad general, y Schrödinger lo utilizó para descubrir su célebre ecuación de ondas, una de las piedras angulares de la mecánica cuántica.

Algunos de los problemas del cálculo de variaciones son muy antiguos y fueron considerados, y parcialmente resueltos, por los antiguos griegos. La invención del cálculo por Newton y Leibniz estimuló el estudio de gran cantidad de problemas variacionales, siendo resueltos algunos de ellos por ingeniosos métodos especiales. Sin embargo, fue Euler quien lo elevó en 1744 al rango de rama coherente del análisis gracias a su descubrimiento de la ecuación diferencial básica para una curva minimizante.

Presentaremos la ecuación de Euler en la próxima sección, pero antes

hagamos notar que cada uno de los problemas planteados en el segundo párrafo de esta sección es un caso particular del siguiente problema general. Sean P y Q con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , y consideremos la familia de funciones

$$y = y(x) \quad (1)$$

que satisfacen las condiciones de contorno $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, es decir, que la gráfica de (1) ha de unir P y Q . Queremos hallar la función de esa familia que haga mínima una integral de la forma

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx. \quad (2)$$

Para convencernos de que este problema contiene a los otros, nótese que la longitud de la curva (1) es

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (3)$$

y que el área de la superficie de revolución obtenida al girarla en torno al eje x es

$$\int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (4)$$

En el caso de la curva de descenso más rápido conviene invertir el sistema de coordenadas y tomar el punto P en el origen, como en la Figura 93. Como la velocidad $v = ds/dt$ viene dada por $v = \sqrt{2gy}$, el tiempo total de descenso es la integral de ds/v , luego la integral que ha de hacerse mínima es

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (5)$$

Según eso, la función $f(x, y, y')$ que aparece en (2) tiene las formas respectivas $\sqrt{1 + (y')^2}$, $2\pi y \sqrt{1 + (y')^2}$ y $\sqrt{1 + (y')^2}/\sqrt{2gy}$ en nuestros tres problemas.

Es necesario ser algo más preciso al formular el problema básico de hacer mínima la integral (2). En primer lugar, supondremos siempre que la función $f(x, y, y')$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden respecto a x , y e y' . La siguiente cuestión es ¿qué clase de funciones (1) vamos a admitir?

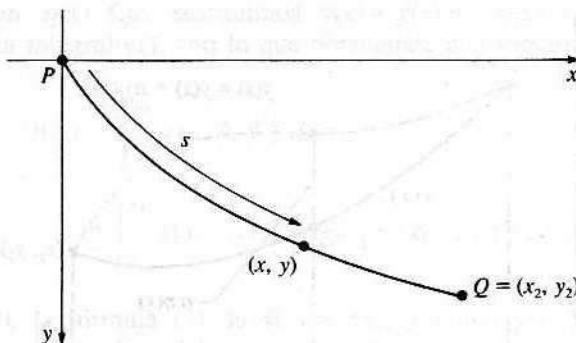


Figura 93

La integral (2) es un número real bien definido siempre que el integrando sea una función continua de x , para lo cual basta suponer que $y'(x)$ es continua. Ahora bien, para garantizar la validez de las operaciones que estamos a punto de efectuar, es conveniente limitarse de una vez por todas a funciones incógnita $y(x)$ con segunda derivada continua y que satisfagan las condiciones de contorno $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$. Las funciones de esta clase se llamarán *admisibles*. Podemos imaginar una competición en la que sólo se permite participar a las funciones admisibles, y el problema consiste en seleccionar de esa familia la función o funciones que logren para I el mínimo valor posible.

A pesar de estos comentarios, no nos preocuparemos demasiado por los aspectos de rigor matemático. Adoptaremos un punto de vista deliberadamente ingenuo. Nuestro objetivo real es alcanzar las aplicaciones relevantes lo antes posible. El lector que desee explorar la extensa teoría del cálculo de variaciones lo podrá hacer en tratados sistemáticos¹.

66. ECUACION DIFERENCIAL DE EULER PARA UNA EXTREMAL

Suponiendo que existe una función admisible $y(x)$ que haga mínima la integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx, \quad (1)$$

¹ Véase, por ejemplo, I. M. Gelfand y S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963; G. M. Ewing, *Calculus of Variations with Applications*, Norton, Nueva York, 1969; o C. Carathéodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Part II: Calculus of Variations*, Holden-Day, San Francisco, 1967.

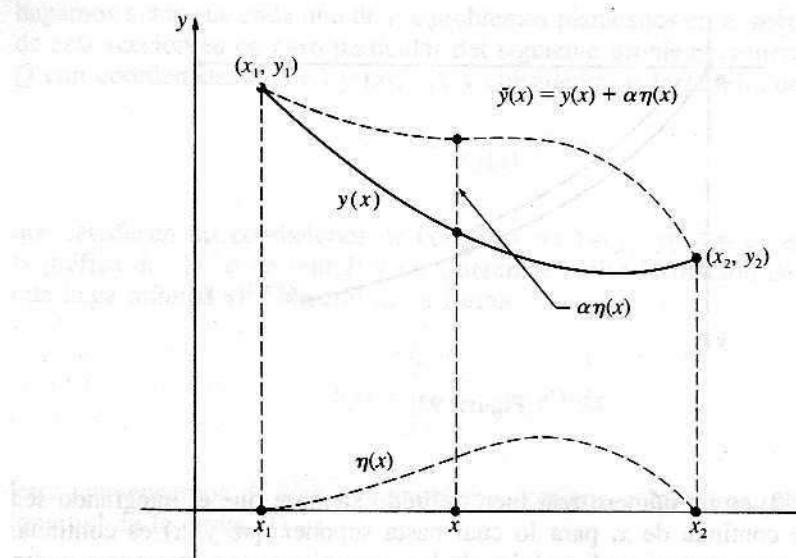


Figura 94

¿cómo hallarla? Obtendremos una ecuación diferencial para $y(x)$ comparando los valores de I que corresponden a funciones admisibles muy próximas. La idea central es que puesto que $y(x)$ da valor mínimo a I , el valor de I crecerá en cuanto «perturbemos» $y(x)$ ligeramente. Estas perturbaciones se construyen como sigue.

Sea $\eta(x)$ cualquier función tal que $\eta''(x)$ sea continua y

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \quad (2)$$

Si α es un parámetro pequeño,

$$\bar{y}(x) = y(x) + \alpha \eta(x) \quad (3)$$

representa una familia uniparamétrica de funciones admisibles. La desviación vertical de una curva de esa familia respecto de la curva minimizante $y(x)$ es $\alpha \eta(x)$, como indica la Figura 94². Nótese que para toda familia del tipo (3), es decir, para cada elección de la función $\eta(x)$, la función minimizante $y(x)$ pertenece a la familia y corresponde al valor del parámetro $\alpha = 0$.

² La diferencia $\bar{y} - y = \alpha \eta$ se llama la *variación* de la función y . Se suele denotar por δy . Esta notación da origen a un formalismo útil (que no usaremos aquí) y es la causa de la denominación de *cálculo de variaciones*.

Ahora, con $\eta(x)$ fija, sustituimos $\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$ e $\bar{y}'(x) = y'(x) + \alpha\eta'(x)$ en la integral (1), con lo que obtenemos una función de α ,

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x)] dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Cuando $\alpha = 0$, la fórmula (3) da $\bar{y}(x) = y(x)$; y como $y(x)$ hace mínima la integral, sabemos que $I(\alpha)$ debe tener un mínimo en $\alpha = 0$. Por cálculo elemental, una condición necesaria para ello es que se anule la derivada $I'(\alpha)$ para $\alpha = 0$: $I'(0) = 0$. La derivada $I'(\alpha)$ se puede calcular derivando en (4) bajo el signo integral, o sea,

$$I'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx. \quad (5)$$

Por la regla de la cadena para la derivación de funciones de varias variables tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \bar{y}, \bar{y}') = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \eta'(x),$$

así que (5) se puede escribir

$$I'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \eta'(x) \right] dx. \quad (6)$$

Pero $I'(0) = 0$, así que haciendo $\alpha = 0$ en (6) concluimos que

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \eta'(x) \right] dx = 0. \quad (7)$$

En esta ecuación la derivada $\eta'(x)$ aparece junto a la función $\eta(x)$. Podemos eliminar $\eta'(x)$ integrando el segundo término por partes, lo que lleva a

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \eta'(x) dx &= \left[\eta(x) \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right) dx = \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right) dx \end{aligned}$$

en virtud de (2). Por tanto, (7) se puede expresar como

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx = 0. \quad (8)$$

Nuestro razonamiento hasta este momento está basado en una elección fija de la función $\eta(x)$. No obstante, como la integral en (8) debe anularse para *toda* tal función, concluimos inmediatamente que la expresión entre corchetes debe ser nula. Eso significa que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

que es la *ecuación de Euler*³.

Es importante comprender con claridad nuestra conclusión: si $y(x)$ es una función admisible que hace mínima la integral (1), entonces y satisface la ecuación de Euler. Supongamos que podemos encontrar una función admisible y que satisface esa ecuación. ¿Implica esto que y minimiza el valor de I ? No necesariamente. La situación es similar a la que se produce en el cálculo elemental, donde una función cuya derivada es 0 en un punto x_0 puede tener en él un máximo, un mínimo o un punto de inflexión. Cuando no se hace distinción entre ellos, estos casos se denominan *valores estacionarios* de $g(x)$, y los puntos x_0 en los que suceden se llaman *puntos estacionarios*. Análogamente, la condición $I'(0) = 0$ puede esconder perfectamente un máximo o un punto de inflexión de $I(\alpha)$ en $\alpha = 0$, en lugar de un mínimo. Así pues, se suele llamar a cualquier solución admisible de la ecuación de Euler *función estacionaria* o *curva estacionaria*, y referirse al correspondiente valor de la integral (1) como el *valor estacionario* de esta integral, sin prejuzgar de cuál de las varias posibilidades se trata. Además, las soluciones de la ecuación de Euler sin restricción de contorno se denominan *extremales*.

En cálculo se recurre a la segunda derivada para formular condiciones suficientes que distingan entre los diversos tipos de puntos estacionarios. Se dispone de condiciones suficientes análogas en el cálculo de variaciones, pero son demasiado complicadas para incluirlas aquí. En la práctica, la geometría o la física del problema en cuestión hace posible, con frecuencia, decidir si una función estacionaria concreta hace mínima o máxima (o ni una cosa ni otra) a la integral. El lector interesado en las condiciones suficientes y en otros aspectos teóricos encontrará una exposición adecuada en las referencias de la Sección 65.

³ Más detalladamente, el argumento indirecto que conduce a (9) es como sigue. Supongamos que la función entre corchetes en (8) no es cero (pongamos que es positiva) en algún punto $x = a$ del intervalo. Puesto que esa función es continua, será positiva en algún subintervalo en torno a $x = a$. Escogamos una $\eta(x)$ que sea positiva dentro de ese subintervalo y cero fuera de él. Para esa $\eta(x)$, la integral en (8) será positiva, lo cual es una contradicción. Cuando se formaliza este argumento, la proposición resultante se conoce como *lema fundamental del cálculo de variaciones*.

Tal como está formulada, la ecuación de Euler (9) no es muy transparente. Con el fin de interpretarla y convertirla en un instrumento eficaz, empezaremos haciendo énfasis en que las derivadas parciales $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial y'$ se calculan tratando a x , y e y' como variables independientes. En general, sin embargo, $\partial f/\partial y'$ es función de x explícitamente, y también implícitamente a través de y e y' , de modo que el primer término en (9) se puede desarrollar como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{dy'}{dx}.$$

En consecuencia, la ecuación de Euler es

$$f_{y'y'} \frac{d^2y}{dx^2} + f_{y'y} \frac{dy}{dx} + (f_{y'x} - f_y) = 0 \quad (10)$$

Es una ecuación de segundo orden, a menos que $f_{y'y'} = 0$, así que en general las extremales (sus soluciones) constituyen una familia biparamétrica de curvas. Entre éstas, las funciones estacionarias son aquellas para las que los dos parámetros se escogen de manera tal que se satisfagan las condiciones de contorno. Una ecuación no lineal de segundo orden tal como (10) es, generalmente hablando, imposible de resolver, pero por fortuna muchas aplicaciones desembocan en casos especiales que sí son resolubles.

CASO A. Si x e y están ausentes de la función f , la ecuación de Euler se reduce a

$$f_{y'y'} \frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

y si $f_{y'y'} \neq 0$, tenemos $d^2y/dx^2 = 0$ e $y = c_1x + c_2$, así que son extremales todas las rectas.

CASO B. Si y está ausente de la función f , la ecuación de Euler se convierte en

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0,$$

que puede integrarse sin dificultad para obtener la ecuación de primer orden

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = c_1$$

para las extremales.

CASO C. Si x está ausente de la función f , la ecuación de Euler puede integrarse, y se llega así a

$$\frac{\partial f}{\partial y'} y' - f = c_1,$$

Eso es consecuencia de la identidad

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} y' - f \right) = y' \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} \right] - \frac{\partial f}{\partial x},$$

ya que $\partial f / \partial x = 0$ y la expresión entre corchetes de la derecha es cero por la ecuación de Euler.

Vamos a aplicar todo esto a los tres problemas planteados en la Sección 65.

Ejemplo 1. Para hallar la curva más corta que une dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) (que intuitivamente conjeturamos será una recta), debemos hacer mínima la integral de longitud de arco

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Las variables x e y están ausentes de $f(y') = \sqrt{1 + (y')^2}$, luego este problema pertenece al Caso A. Como

$$f_{y'y'} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{1}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \neq 0,$$

el Caso A nos dice que las extremales son las rectas de la familia biparamétrica $y = c_1 x + c_2$. Las condiciones de contorno dan

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (11)$$

como la curva estacionaria, que no es sino la recta que une los puntos dados. Nótese que este análisis demuestra tan sólo que si I tiene un valor estacionario, la correspondiente curva estacionaria ha de ser la recta (11). Ahora bien, es claro por la geometría que I no admite curva de máximo pero sí de mínimo, luego podemos concluir que (11) es realmente la curva más corta que une esos dos puntos.

En este ejemplo hemos llegado a una conclusión obvia por medios analíticos. Un problema mucho más difícil y más interesante es el de hallar la curva más corta que une dos puntos dados sobre una superficie y que esté contenida

totalmente en la superficie. Tales curvas se llaman *geodésicas* y el estudio de sus propiedades es uno de los puntos focales de la rama de las matemáticas conocida como geometría diferencial.

Ejemplo 2. Para hallar la curva que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y que genera, al girar en torno al eje x , la superficie de revolución de área mínima, hay que hacer mínima la integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (12)$$

La variable x está ausente de $f(y, y') = 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2}$, así que el Caso C nos dice que la ecuación de Euler se convierte en

$$\frac{y(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} - y\sqrt{1 + (y')^2} = c_1,$$

y tras simplificar,

$$c_1 y' = \sqrt{y^2 - c_1^2}.$$

Separando variables e integrando obtenemos

$$x = c_1 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c_1^2}} = c_1 \log \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - c_1^2}}{c_1} \right) + c_2,$$

que despejando y da

$$y = c_1 \operatorname{ch} \left(\frac{x - c_2}{c_1} \right). \quad (13)$$

Las extremales son, por tanto, catenarias, y la requerida superficie, si existe, debe engendrarse haciendo girar una catenaria. El siguiente paso es ver si los parámetros c_1 y c_2 pueden elegirse de manera tal que la curva (13) pase por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) .

La elección de esos parámetros acaba siendo sorprendentemente complicada. Si la curva (13) se hace pasar por el primer punto (x_1, y_1) , queda todavía un parámetro libre. La Figura 95 muestra dos miembros de esa familia uniparamétrica. Se puede demostrar que todas esas curvas son tangentes a la curva de trazo discontinuo C , de modo que ninguna de ellas cruza a C . Por consiguiente, cuando el segundo punto está por debajo de C , como en la Figura 95, no existe ninguna catenaria que pase por ambos puntos y no hay función estacionaria. En este caso se puede ver que se generan superficies más y más pequeñas mediante curvas que se aproximan a la curva de trazos desde (x_1, y_1) a $(x_1, 0)$ a $(x_2, 0)$ a (x_2, y_2) , así que ninguna curva admisible puede generar una superficie de área mínima. Cuando el segundo punto está por encima de C , hay dos catenarias que unen esos dos puntos y, por tanto,

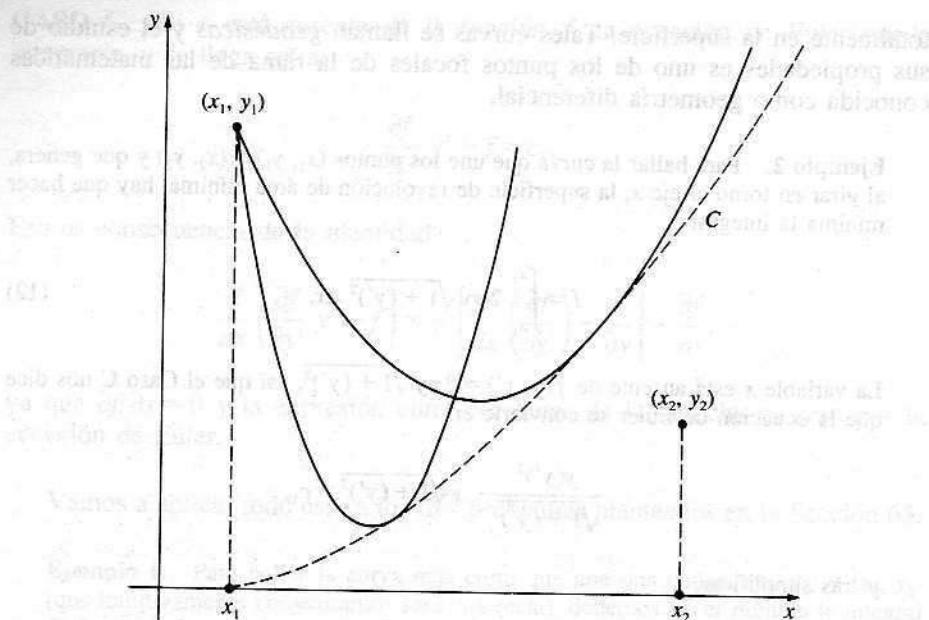


Figura 95

dos funciones estacionarias, pero sólo la catenaria superior genera una superficie de área mínima. Finalmente, cuando el segundo punto está en la propia curva C , hay sólo una función estacionaria pero la superficie engendrada no es mínima⁴.

Ejemplo 3. Para encontrar la curva de descenso más rápido en la Figura 93, hemos de minimizar

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

De nuevo está ausente la variable x en la función $f(y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}/\sqrt{2gy}$, de modo que por el Caso C la ecuación de Euler se convierte en

$$\frac{(y')^2}{\sqrt{y} \sqrt{1 + (y')^2}} - \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} = c_1.$$

Esto se reduce a

$$y[1 + (y')^2] = c,$$

⁴ Una discusión completa de estas afirmaciones, incluyendo demostraciones, se puede encontrar en el Capítulo IV del libro de G. A. Bliss, *Calculus of Variations*, Carus Monograph núm. 1, Mathematical Association of America, 1925.

que es precisamente la ecuación diferencial 6-(4) a la que llegamos en una discusión previa de este famoso problema. Su solución viene dada en la Sección 6. La curva estacionaria resultante es la cicloide

$$x = a(\theta - \sin \theta) \quad \text{e} \quad y = a(1 - \cos \theta) \quad (14)$$

generada por un círculo de radio a que rueda sobre el eje x , donde a se toma de forma tal que el primer arco invertido pase por el punto (x_2, y_2) de la Figura 93. Como antes, este argumento muestra sólo que si I tiene un mínimo, la correspondiente curva estacionaria ha de ser la cicloide (14). Sin embargo, está razonablemente claro, por consideraciones físicas, que I no admite curva que la haga máxima y sí una que la hace mínima, así que la cicloide realmente hace mínimo el tiempo de descenso.

Cerramos esta sección con una extensión sencilla, pero importante, de nuestro tratamiento de la integral (1). Esta integral representa problemas variacionales del tipo más simple ya que sólo involucra una función desconocida. No obstante, algunas de las situaciones que encontraremos después no son tan sencillas y conducen a integrales que dependen de dos o más funciones desconocidas.

Por ejemplo, supongamos que queremos hallar condiciones necesariamente satisfechas por dos funciones $y(x)$ y $z(x)$ que asigne un valor estacionario a la integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z') dx, \quad (15)$$

donde los valores de contorno $y(x_1)$, $z(x_1)$ e $y(x_2)$, $z(x_2)$ se especifican de antemano. Igual que antes, introducimos funciones $\eta_1(x)$ e $\eta_2(x)$ con segundas derivadas continuas y nulas en los puntos inicial y final de la integración. Con ellas formamos las funciones vecinas $\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta_1(x)$ y $\bar{z}(x) = z(x) + \alpha\eta_2(x)$, y consideramos a continuación la función α definida por

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \alpha\eta_1, z + \alpha\eta_2, y' + \alpha\eta'_1, z' + \alpha\eta'_2) dx. \quad (16)$$

De nuevo, si $y(x)$ y $z(x)$ son funciones estacionarias, debe ocurrir que $I'(0) = 0$, así que calculando la derivada de (16) y poniendo $\alpha = 0$ obtenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \eta_2 + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'_1 + \frac{\partial f}{\partial z'} \eta'_2 \right) dx = 0,$$

o, si integramos por partes los términos que contienen a η'_1 y η'_2 ,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \eta_1(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] + \eta_2(x) \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) \right] \right\} dx = 0. \quad (17)$$

Finalmente, como (17) ha de ser cierta para toda elección de las funciones η_1 y η_2 , nos vemos conducidos a las ecuaciones de Euler

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Así pues, para hallar las extremales de nuestro problema hemos de resolver el sistema (18). Ni que decir tiene que un sistema de ecuaciones intratables es más difícil de resolver que una sola; pero si se puede resolver (18), las funciones estacionarias quedan determinadas ajustando las soluciones resultantes a las condiciones de contorno dadas. Comentarios semejantes se aplican sin modificación sustancial a integrales como (15) que involucren más de dos funciones incógnitas.

PROBLEMAS

- Hallar las extremales de la integral (1) si el integrando es
 - $\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y}$;
 - $y^2 - (y')^2$.
- Hallar la función estacionaria de

$$\int_0^4 [xy' - (y')^2] dx$$
 determinada por las condiciones de contorno $y(0) = 0$ e $y(4) = 3$.
- Probar que cuando el integrando de (1) es de la forma

$$a(x)(y')^2 + 2b(x)yy' + c(x)y^2,$$
 la ecuación de Euler es una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

- Si P y Q son dos puntos de un plano, la longitud de una curva que los une es, en coordenadas polares,

$$\int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

Hallar la ecuación polar de una recta haciendo que esa integral sea mínima

- con θ como la variable independiente;
- con r como la variable independiente.

- Sean P y Q dos puntos de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y tomemos sobre ella coordenadas esféricas θ, ϕ , con $x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ y $z = a \cos \phi$. Sea $\theta = F(\phi)$ una curva contenida en la superficie que une P y Q .

Probar que el más corto de tales caminos (una geodésica) es un arco de círculo máximo, es decir, está en un plano que pasa por el centro. *Ayuda:* Expresar la longitud de la curva como

$$\int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = a \int_P^Q \sqrt{1 + \left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2 \sin^2 \phi} d\phi,$$

resolver la correspondiente ecuación de Euler para θ y reescribir el resultado en coordenadas rectangulares.

6. Demostrar que toda geodésica sobre el cono circular recto $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$, $z \geq 0$, tiene la siguiente propiedad: Si se corta el cono a lo largo de una generatriz y se coloca sobre un plano, la geodésica se convierte en una recta. *Ayuda:* Representar el cono paramétricamente por las ecuaciones

$$x = \frac{r \cos (\theta\sqrt{1+a^2})}{\sqrt{1+a^2}}, \quad y = \frac{r \sin (\theta\sqrt{1+a^2})}{\sqrt{1+a^2}}, \quad z = \frac{ar}{\sqrt{1+a^2}};$$

probar que los parámetros r y θ representan coordenadas polares ordinarias sobre el cono aplano y demostrar que una geodésica $r = r(\theta)$ es una recta en esas coordenadas polares.

7. Si se hace girar la curva $y = g(z)$ en torno al eje z , la superficie de revolución generada tiene ecuación $x^2 + y^2 = g(z)^2$. Una representación paramétrica conveniente de esa superficie viene dada por

$$x = g(z) \cos \theta, \quad y = g(z) \sin \theta, \quad z = z,$$

donde θ es el ángulo polar en el plano xy . Probar que una geodésica $\theta = \theta(z)$ sobre esa superficie tiene ecuación

$$\theta = c_1 \int \frac{\sqrt{1 + [g'(z)]^2}}{g(z)\sqrt{g(z)^2 - c_1^2}} dz + c_2$$

8. Si la superficie de revolución del Problema 7 es un cilindro circular recto, probar que toda geodésica de la forma $\theta = \theta(z)$ es una hélice o una generatriz.

67. PROBLEMAS ISOPERIMETRICOS

Los antiguos griegos propusieron el problema de hallar la curva cerrada plana de longitud dada que encierra área máxima. Le llamaron *problema isoperimétrico* y fueron capaces de probar de modo más o menos riguroso que la respuesta obvia (el círculo) es correcta⁵. Si la curva se expresa paramétrica-

⁵ Véase B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, págs. 268-269, Oxford University Press, Londres, 1961; además, G. Polya, *Induction and Analogy in Mathematics*, cap. 10, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.

mente por $x = x(t)$, $y = y(t)$ y se recorre una vez en sentido contrario a las agujas del reloj cuando t varía entre t_1 y t_2 , el área encerrada viene dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt, \quad (1)$$

integral que depende de dos funciones incógnitas⁶. Como la longitud de la curva es

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt, \quad (2)$$

el problema consiste en hacer máxima (1) sometida a la condición de que (2) sea igual a una cierta constante. El término *problema isoperimétrico* se suele extender al caso general de hallar las extremales de una integral sometida a cualquier restricción (ligadura) consistente en que una segunda integral tome un valor constante prefijado.

Consideraremos también ligaduras finitas, es decir, que no contienen integrales o derivadas. Por ejemplo, si

$$G(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

es una superficie dada, una curva sobre ella queda determinada paramétricamente por tres funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ que satisfacen (3), y el problema de hallar las geodésicas significa hacer mínima la integral de longitud de arco

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} dt \quad (4)$$

sujeta a la condición (3).

Multiplicadores de Lagrange. Es necesario comenzar considerando algunos problemas de cálculo elemental muy similares a los problemas isoperimétricos. Por ejemplo, supongamos que deseamos hallar los puntos (x, y) en los que tiene valores estacionarios una función $z = f(x, y)$, donde las variables x e y no son independientes sino que están sujetas a la condición adicional

$$g(x, y) = 0. \quad (5)$$

⁶ La fórmula (1) es un caso particular del teorema de Green. Véase también el Problema 1.

El procedimiento usual es elegir arbitrariamente una de las variables, digamos x , en (5) como independiente, y la otra como dependiente de ésa, de modo que dy/dx se puede calcular como

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

A continuación usamos el hecho de que como z es ahora función sólo de x , $dz/dx = 0$ es una condición necesaria para que z tenga valor estacionario, así que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

o sea,

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y} = 0. \quad (6)$$

Resolviendo (5) y (6) simultáneamente obtenemos los requeridos puntos (x, y) ⁷.

Una dificultad de este procedimiento es que las variables x e y aparecen simétricamente y, sin embargo, son tratadas de forma asimétrica. Es posible resolver el mismo problema por un método diferente y más elegante que ofrece además numerosas ventajas prácticas. Formemos la función

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

e investiguemos sus valores estacionarios *sin ligaduras* por medio de las condiciones necesarias

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0. \quad (7)$$

Eliminando λ de la primera de esas dos ecuaciones, el sistema se reduce a

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y} = 0 \quad y \quad g(x, y) = 0,$$

y éste es el sistema obtenido en el párrafo anterior. Nótese que esta técnica [resolver el sistema (7) para x e y] resuelve el problema dado de un modo que presenta dos matices importantes desde el punto de vista teórico: no perturba

⁷ En casos muy simples, claro está, podemos resolver (5) para y en función de x e insertar esto en $z = f(x, y)$, lo que da z como función explícita de x , y sólo resta calcular dz/dx , resolver la ecuación $dz/dx = 0$ y hallar las correspondientes y .

la simetría del sistema por elección arbitraria de la variable independiente y elimina la ligadura al módico precio de introducir λ como otra variable. El parámetro λ se llama *multiplicador de Lagrange*, y el método se conoce como método de los multiplicadores de Lagrange⁸. Esta discusión se extiende de manera obvia a problemas con funciones en más de dos variables y con varias ligaduras.

Ligaduras integrales. Ahora queremos hallar la ecuación diferencial que debe satisfacer una función $y(x)$ que asigne un valor estacionario a la integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx, \quad (8)$$

donde y está sujeta a la ligadura

$$J = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y') dx = c \quad (9)$$

y toma valores prescritos $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$ en los límites de integración. Como antes, suponemos que $y(x)$ es la función estacionaria, y la perturbamos ligeramente con el fin de hallar la deseada condición analítica. Sin embargo, este problema no puede ser atacado por nuestro método anterior de considerar funciones próximas de la forma $\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$, porque en general estas funciones no mantendrán para la segunda integral J el valor constante c . En lugar de eso, consideraremos una familia biparamétrica de funciones próximas

$$\bar{y}(x) = y(x) + \alpha_1\eta_1(x) + \alpha_2\eta_2(x), \quad (10)$$

donde $\eta_1(x)$ y $\eta_2(x)$ tienen segundas derivadas parciales y se anulan en los límites de integración. Los parámetros α_1 y α_2 no son independientes, sino que están relacionados por

$$J(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} g(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = c. \quad (11)$$

Nuestro problema queda reducido, por tanto, a hallar condiciones necesarias para que la función

$$I(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx \quad (12)$$

⁸ Una breve reseña sobre Lagrange está recogida en el Apéndice A.

tenga valor estacionario para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, donde α_1 y α_2 satisfacen (11). Es una situación ideal para el método de los multiplicadores de Lagrange, de manera que introducimos la función

$$\begin{aligned} K(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) &= I(\alpha_1, \alpha_2) + \lambda J(\alpha_1, \alpha_2) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx, \end{aligned} \quad (13)$$

con

$$F = f + \lambda g,$$

e investigamos su valor estacionario sin ligaduras en $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ por medio de las condiciones necesarias

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial K}{\partial \alpha_2} = 0 \quad \text{cuando} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \quad (14)$$

Si derivamos (13) bajo el signo integral y usamos (10), obtenemos

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \eta_i(x) + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \eta'_i(x) \right] dx \quad \text{para } i = 1, 2;$$

y tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ se llega a

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \eta_i(x) + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \eta'_i(x) \right] dx = 0$$

debido a (14). Tras integrar por partes el segundo término, eso se convierte en

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta_i(x) \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right) \right] dx = 0. \quad (15)$$

Como $\eta_1(x)$ y $\eta_2(x)$ son ambas arbitrarias, las dos condiciones contenidas en (15) equivalen a una sola, y concluimos que la función estacionaria $y(x)$ debe satisfacer la ecuación de Euler

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (16)$$

Las soluciones de esta ecuación (las extremales de nuestro problema) hacen intervenir tres parámetros indeterminados: dos constantes de integración y el multiplicador de Lagrange λ . La función estacionaria se selecciona de entre

estas extremales imponiendo las dos condiciones de contorno e imponiendo a la integral J su valor prefijado c .

En el caso de integrales que dependan de dos o más funciones, este resultado se extiende del mismo modo que en la sección precedente. Por ejemplo, si

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z') dx$$

tiene un valor estacionario sometida a la ligadura

$$J = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, z, y', z') dx = c,$$

las funciones estacionarias $y(x)$, $z(x)$ han de satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad (17)$$

donde $F = f + \lambda g$. El razonamiento es análogo al ya expuesto, por lo que omitimos sus detalles.

Ejemplo 1. Hallaremos la curva de longitud fija L que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$, está por encima del eje x , y encierra la máxima área posible entre su gráfica y el eje x . Esta es una versión restringida del problema isoperimétrico original en el que parte de la curva que limita el área que ha de hacerse máxima se exige que sea un segmento recto de longitud 1. Nuestro problema consiste en hacer máxima $\int_0^1 y dx$ sujeta a la ligadura

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx = L$$

y con condiciones de contorno $y(0) = 0$ e $y(1) = 0$. Aquí se tiene $F = y + \lambda \sqrt{1 + (y')^2}$, luego la ecuación de Euler es

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) - 1 = 0, \quad (18)$$

o sea, tras efectuar la derivación,

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{1}{\lambda}. \quad (19)$$

En este caso no es necesario integrar, ya que (19) nos dice directamente que la curvatura es constante e igual a $1/\lambda$. Se sigue que la requerida curva de máximo es

un arco de círculo (como cabía esperar) con radio λ . Como procedimiento alternativo, se puede integrar (18), con lo que se obtiene

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{x-c_1}{\lambda}.$$

Despejando y' e integrando de nuevo se llega a

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = \lambda^2, \quad (20)$$

que es, naturalmente, la ecuación de un círculo de radio λ .

Ejemplo 2. En el Ejemplo 1 es obviamente necesario que $L > 1$. Además, si $L > \pi/2$, el arco circular no definirá $y > 0$ como función univariada de x . Pueden soslayarse estas cuestiones artificiales considerando curvas en forma paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, y volviendo nuestra mirada al problema isoperimétrico original de hacer máxima la cantidad

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$$

(donde $\dot{x} = dx/dt$ e $\dot{y} = dy/dt$) con la ligadura

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = L.$$

Aquí se tiene

$$F = \frac{1}{2} (x\dot{y} + y\dot{x}) + \lambda \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

así que las ecuaciones de Euler (17) son

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} y + \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) - \frac{1}{2} \dot{y} = 0$$

y

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} x + \frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) + \frac{1}{2} \dot{x} = 0.$$

Estas ecuaciones pueden integrarse directamente:

$$-y + \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -c_1 \quad y \quad x + \frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_2.$$

Despejando $x - c_2$ e $y - c_1$, elevando al cuadrado, y sumando, resulta

$$(x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 = \lambda^2,$$

de modo que la curva de máximo es un círculo. Este resultado puede enunciarse así: si L es la longitud de una curva cerrada plana que encierra un área A , entonces $A \leq L^2/4\pi$, con igualdad si y sólo si la curva es un círculo. Una relación de esta clase se llama una *desigualdad isoperimétrica*⁹.

Ligaduras finitas. Al comienzo de esta sección formulamos el problema de hallar las geodésicas de una superficie dada

$$G(x, y, z) = 0. \quad (21)$$

Ahora vamos a considerar el problema un poco más general de hallar una curva espacial $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ que asigne valor estacionario a una integral de la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) dt \quad (22)$$

donde se requiere que la curva esté sobre la superficie (21).

Nuestra estrategia consistirá en eliminar la ligadura (21) del siguiente modo. No hay pérdida de generalidad al suponer que la curva está situada en una región de la superficie en la que $G_z \neq 0$. Sobre esta porción de la superficie podemos despejar z en (21), digamos $z = g(x, y)$, así que

$$\dot{z} = \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y}. \quad (23)$$

Sustituyendo (23) en (22) reducimos nuestro problema a hallar funciones estacionarias sin ligaduras para la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} f\left(\dot{x}, \dot{y}, \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y}\right) dt.$$

Por la sección anterior sabemos que las ecuaciones de Euler 66-(18) para este problema son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \frac{\partial g}{\partial x} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} = 0,$$

⁹ Los estudiantes de física encontrarán interesante el libro de G. Polya y G. Szegö, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

y

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

De (23) se sigue que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right),$$

luego las ecuaciones de Euler se pueden expresar como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0.$$

Si definimos ahora una función $\lambda(t)$ por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \lambda(t) G_z, \quad (24)$$

y usamos las relaciones $\partial g / \partial x = -G_x / G_z$ y $\partial g / \partial y = -G_y / G_z$, las ecuaciones de Euler pasan a ser

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \lambda(t) G_x, \quad (25)$$

y

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \lambda(t) G_y. \quad (26)$$

En consecuencia, una condición necesaria para un valor estacionario es la existencia de una función $\lambda(t)$ que satisfaga las ecuaciones (24), (25) y (26). Eliminando $\lambda(t)$ se obtienen las ecuaciones simétricas

$$\frac{(d/dt)(\partial f/\partial x)}{G_x} = \frac{(d/dt)(\partial f/\partial y)}{G_y} = \frac{(d/dt)(\partial f/\partial z)}{G_z}, \quad (27)$$

que junto con (21) determinan las extremales del problema. Conviene darse cuenta de que las ecuaciones (24), (25) y (26) son interpretables como las ecuaciones de Euler del problema consistente en hallar funciones estacionarias sin ligaduras para la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} [f(x, y, z) + \lambda(t) G(x, y, z)] dt.$$

Esto es muy parecido a nuestra conclusión para ligaduras integrales, salvo que aquí el multiplicador es una función indeterminada de t en vez de una constante indeterminada.

Cuando especializamos este resultado al problema de hallar las geodésicas sobre la superficie (21), tenemos

$$f = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Las ecuaciones (27) se convierten en

$$\frac{(d/dt)(\dot{x}/f)}{G_x} = \frac{(d/dt)(\dot{y}/f)}{G_y} = \frac{(d/dt)(\dot{z}/f)}{G_z}, \quad (28)$$

y el reto es extraer información de este sistema.

Ejemplo 3. Si tomamos como superficie (21) la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, entonces $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ y (28) es

$$\frac{f\ddot{x} - \dot{x}\dot{f}}{2x\dot{f}^2} = \frac{f\ddot{y} - \dot{y}\dot{f}}{2y\dot{f}^2} = \frac{f\ddot{z} - \dot{z}\dot{f}}{2z\dot{f}^2},$$

que se puede reexpresar como

$$\frac{x\ddot{y} - y\ddot{x}}{xy - y\dot{x}} = \frac{\dot{f}}{f} = \frac{y\ddot{z} - z\ddot{y}}{yz - z\dot{y}}.$$

Si ignoramos el término central, queda

$$\frac{(d/dt)(x\ddot{y} - y\ddot{x})}{x\ddot{y} - y\dot{x}} = \frac{(d/dt)(y\ddot{z} - z\ddot{y})}{y\ddot{z} - z\dot{y}}.$$

Integrando vemos que $xy - y\dot{x} = c_1(yz - z\dot{y})$, y por tanto,

$$\frac{\dot{x} + c_1\dot{z}}{x + c_1z} = \frac{\dot{y}}{y},$$

y una segunda integración lleva a $x + c_1z = c_2y$. Esta es la ecuación de un plano que pasa por el origen, luego las geodésicas sobre una esfera son arcos de círculos máximos. Otro método de llegar a esta conclusión se indica en el Problema 66-5.

En este ejemplo hemos sido capaces de resolver las ecuaciones (28) con toda sencillez, pero en general esa tarea suele ser más que difícil. La principal fuente de interés de esas ecuaciones está en su conexión con el siguiente

resultado, de importancia capital en física matemática: si una partícula se mueve sobre una superficie sin fuerzas externas actuando sobre ella, su trayectoria es una geodésica. Demostraremos este teorema de la dinámica en el Apéndice B. A efectos del argumento será conveniente suponer que el parámetro t es la longitud de arco s medida a lo largo de la curva, de manera que $f = 1$ y las ecuaciones (28) pasan a ser

$$\frac{d^2x/ds^2}{G_x} = \frac{d^2y/ds^2}{G_y} = \frac{d^2z/ds^2}{G_z}. \quad (29)$$

PROBLEMAS

- Convénzase de la validez de la fórmula (1) para una curva cerrada convexa como la que se muestra en la Figura 96. Ayuda: ¿Cuál es el significado geométrico de

$$\int_P^Q y \, dx + \int_Q^P y \, dx,$$

donde la primera integral se toma de derecha a izquierda a lo largo de la porción superior de la curva y la segunda de izquierda a derecha a lo largo de la porción inferior?

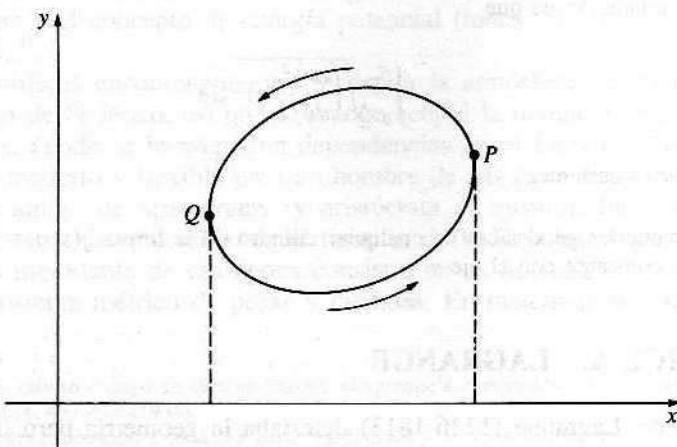


Figura 96

2. Verificar la fórmula (1) para el círculo de ecuaciones paramétricas $x = a \cos t$ e $y = a \sen t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
3. Resolver los siguientes problemas por el método de los multiplicadores de Lagrange.
- Hallar el punto del plano $ax + by + cz = d$ que está más próximo al origen.
Ayuda: Hacer mínima la cantidad $w = x^2 + y^2 + z^2$ con la ligadura $ax + by + cz - d = 0$.
 - Probar que el triángulo de mayor área A para un perímetro dado es equilátero.
Ayuda: Si x, y, z son sus lados, entonces $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ donde $s = (x+y+z)/2$.
 - Si la suma de n números positivos x_1, x_2, \dots, x_n tiene un valor fijo s , demostrar que su producto $x_1 x_2 \dots x_n$ tiene s^n/n^n como valor máximo, y concluir de ello que la media geométrica de n números positivos nunca puede ser mayor que su media aritmética:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

4. Una curva en el primer cuadrante une $(0, 0)$ con $(1, 0)$ y tiene bajo ella un área dada. Probar que la más corta de tales curvas es un arco de círculo.
5. Una cadena flexible uniforme cuelga de dos puntos. Hallar su forma, supuesto que cuelga de manera tal que su energía potencial es mínima.
6. Resolver el problema isoperimétrico original (Ejemplo 2) usando coordenadas polares. Ayuda: Escoger como origen un punto de la curva y como eje polar la tangente en ese punto; hacer máxima entonces

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 d\theta$$

con la condición de que

$$\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta$$

ha de ser constante.

7. Probar que las geodésicas de cualquier cilindro de la forma $g(x, z) = 0$ forman un ángulo constante con el eje y .

APENDICE A. LAGRANGE

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) detestaba la geometría pero llevó a cabo descubrimientos excepcionales en cálculo de variaciones y en mecánica analítica. Contribuyó asimismo a la teoría de números y al álgebra, e inició la estela

de pensamiento que seguirían más tarde Gauss y Abel. Su carrera en las matemáticas viene a ser la continuación de la obra de Euler, su más grande contemporáneo aunque mayor que él, que en muchos aspectos refinó y llevó a cotas más altas.

Lagrange nació en Turín en el seno de una familia franco-italiana. De muchacho sus aficiones fueron más clásicas que científicas, pero su interés por las matemáticas se vio catapultado por la lectura, cuando todavía estaba en el colegio, de un artículo de Edmund Halley sobre las aplicaciones del álgebra en la óptica. A raíz de eso comenzó a estudiar en plan autodidacta y progresó tan rápidamente que a los 19 años fue nombrado profesor de matemáticas en la Escuela Real de Artillería de Turín¹⁰.

Las aportaciones de Lagrange al cálculo de variaciones se cuentan entre sus más tempranas e importantes obras. En 1755 comunicó a Euler su método de multiplicadores para la resolución de problemas isoperimétricos que habían resistido los ataques de Euler durante años debido a que estaban fuera del alcance de sus métodos semigeométricos. Euler fue entonces capaz de responder diversas cuestiones sobre las que había reflexionado largo tiempo, pero contestó a Lagrange amable y generosamente, reteniendo la publicación de su propio trabajo «para no privarle de un ápice de la gloria que merece». Lagrange continuó trabajando unos años en su versión analítica del cálculo de variaciones, y tanto Euler como él lo aplicaron a muchos tipos nuevos de problemas, sobre todo en mecánica.

En 1766, cuando Euler dejó Berlín para trasladarse a San Petersburgo, sugirió a Federico el Grande que Lagrange ocupara su puesto. Lagrange aceptó y vivió 20 años en Berlín, hasta la muerte de Federico el Grande acaecida en 1786. Durante ese período trabajó con profusión en álgebra y en teoría de números y escribió su obra maestra, el tratado *Mécanique Analytique* (1788), en el que unificó la mecánica e hizo de ella, como señaló Hamilton más tarde, «una especie de poema científico». Entre los legados imperecederos de su obra cabe destacar las ecuaciones de Lagrange del movimiento, las coordenadas generalizadas y el concepto de energía potencial (todos ellos discutidos en el Apéndice B)¹¹.

Los científicos encontraban muy inhóspita la atmósfera de Prusia tras el fallecimiento de Federico, así que Lagrange aceptó la invitación de Luis XVI de ir a París, donde se le asignaron dependencias en el Louvre. Lagrange era sumamente modesto y flexible para un hombre de sus extraordinarias dotes, y aunque fue amigo de aristócratas (y aristócrata él mismo), fue respetado y querido por todas las facciones en el tumulto de la Revolución Francesa. Su trabajo más importante de esa época consistió en su liderazgo para la instauración del sistema métrico de pesas y medidas. En matemáticas intentó esta-

¹⁰ Véase el valioso ensayo de George Sarton, «Lagrange's Personality», *Proc. Am. Phil. Soc.*, volumen 88, págs. 457-496 (1944).

¹¹ Interesantes exposiciones de la mecánica lagrangiana y de otros muchos temas se encontrarán en S. Bochner, *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, págs. 199-207, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1966.

blecer una base sólida para los procedimientos fundamentales del análisis, pero tales esfuerzos fueron en gran parte baldíos. Hacia el final de su vida, Lagrange presintió que las matemáticas habían llegado a una vía muerta y que otras ciencias, como la química, la física o la biología, atraerían el principal esfuerzo en el futuro. Su pesimismo se hubiera hecho añicos si hubiera podido alcanzar a presenciar la llegada de Gauss y sus sucesores, quienes convirtieron al siglo XIX en el período más fructífero de la larga historia de las matemáticas.

APENDICE B. EL PRINCIPIO DE HAMILTON Y SUS CONSECUENCIAS

Uno de los objetivos de los matemáticos del siglo XVIII era el de descubrir un principio general del que fuera deducible la mecánica de Newton. En la búsqueda de sus claves llegaron a observar un cierto número de hechos curiosos de física elemental: por ejemplo, que un rayo de luz sigue el camino más rápido al viajar por un medio óptico; que la forma de equilibrio de una cadena colgante minimiza su energía potencial; y que las pompas de jabón adoptan la forma que produce área mínima para un volumen prefijado. Estos y otros hechos sugirieron a Euler que la naturaleza persigue sus diversos fines por los medios más económicos y eficientes, y que esa simplicidad oculta subyace al aparente caso de los fenómenos. Fue esta idea metafísica la que le indujo a crear el cálculo de variaciones como técnica para la investigación de tales cuestiones. El sueño de Euler fue hecho realidad casi un siglo después por Hamilton.

El principio de Hamilton. Consideremos una partícula de masa m que se mueve por el espacio bajo la influencia de una fuerza

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k},$$

y supongamos que esta fuerza es *conservativa* en el sentido de que el trabajo que realiza al mover la partícula de un punto a otro es independiente del camino seguido. Es fácil probar que existe una función escalar $U(x, y, z)$ tal que $\partial U / \partial x = F_1$, $\partial U / \partial y = F_2$ y $\partial U / \partial z = F_3$ ¹². La función $V = -U$ se llama *energía potencial* de la partícula, ya que el cambio de su valor de un punto a otro es el trabajo realizado contra la fuerza \mathbf{F} al mover la partícula desde el primer punto hasta el segundo. Además, si $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ es el vector posición de la partícula, de modo que

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \quad y \quad v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

¹² En el lenguaje del análisis vectorial, \mathbf{F} no es sino el *gradiente* de U .

son, respectivamente, su velocidad y su aceleración, entonces $T = mv^2/2$ es su *energía cinética*.

Si la partícula está en los puntos P_1 y P_2 en los instantes t_1 y t_2 , nos interesamos por el camino que sigue para ir de P_1 a P_2 . La *acción* (o *integral de Hamilton*) se define como

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt,$$

y su valor depende, por lo general, del camino seguido para ir de P_1 a P_2 . Probaremos que el camino realmente seguido por la partícula es aquel que proporciona un valor estacionario para la acción A .

La función $L = T - V$ se llama *lagrangiano*, y en el caso bajo consideración viene dada por

$$L = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] - V(x, y, z).$$

Por tanto, el integrando de la acción es una función de la forma $f(x, y, z, dx/dt, dy/dt, dz/dt)$, y si la acción tiene un valor estacionario, las ecuaciones de Euler deben satisfacerse. Estas ecuaciones son

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

y se pueden reescribir como

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} = \mathbf{F}.$$

Esta es precisamente la segunda ley del movimiento de Newton. Así pues, la ley de Newton es una condición necesaria para que la acción de la partícula tenga un valor estacionario. Puesto que la ley de Newton gobierna el movimiento de la partícula, llegamos a la siguiente conclusión.

Principio de Hamilton. *Si una partícula va de un punto P_1 a otro punto P_2 en un intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$, la trayectoria que sigue es necesariamente una que hace estacionaria a la acción.*

Es muy fácil citar ejemplos en los que el camino real de una partícula minimiza la acción. Pues bien, si el intervalo de tiempo es suficientemente breve, se puede demostrar que la acción es necesariamente mínima. En esta forma, el principio de Hamilton se llama a veces *principio de mínima acción*, y se puede interpretar diciendo que la naturaleza tiende a igualar las energías cinética y potencial durante el movimiento.

En la discusión anterior hemos supuesto la ley de Newton y hemos deducido el principio de Hamilton como consecuencia. El mismo argumento muestra que la ley de Newton se sigue del principio de Hamilton, de modo que estas dos aproximaciones a la dinámica de una partícula, la vectorial y la variacional, son equivalentes entre sí. Este resultado incide en la característica esencial de los principios variacionales de la física: expresan las leyes físicas pertinentes en términos exclusivamente de la energía, sin hacer referencia a ningún sistema coordinado.

El argumento expuesto se extiende sin dificultad a un sistema de n partículas de masas m_i , con vectores posición $\mathbf{r}_i(t) = x_i(t)\mathbf{i} + y_i(t)\mathbf{j} + z_i(t)\mathbf{k}$, que se mueven bajo el influjo de fuerzas conservativas $\mathbf{F}_i = F_{i1}\mathbf{i} + F_{i2}\mathbf{j} + F_{i3}\mathbf{k}$. Aquí la energía potencial del sistema es una función $V(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = -F_{i1}, \quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = -F_{i2}, \quad \frac{\partial V}{\partial z_i} = -F_{i3},$$

la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right],$$

y la acción sobre un intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$ es

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt.$$

Al igual que antes, vemos que las ecuaciones de Newton para el sistema,

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i,$$

son condición necesaria para que la acción tenga un valor estacionario. El principio de Hamilton es válido, por tanto, para todo sistema finito de partículas en el que las fuerzas sean conservativas. Es asimismo aplicable a sistemas dinámicos más generales en los que intervengan ligaduras y sólidos rígidos, e incluso a medios continuos.

Más aún, el principio de Hamilton produce también las leyes básicas del electromagnetismo, de la teoría cuántica y de la relatividad. Su influencia es tan profunda y de alcance tal que muchos científicos lo juzgan como el más potente principio aislado de la física matemática y lo colocan en el pináculo de la física. Max Planck, fundador de la teoría cuántica, lo expresaba en estas palabras: «El supremo objetivo de la física, y el más codiciado, es condensar todos los fenómenos naturales que han sido observados y los que todavía están por observar, en un principio simple... Entre las leyes más o menos generales

que reflejan los logros de la física en los últimos siglos es quizá el principio de mínima acción el que, en cuanto a forma y contenido, tiene derecho a ser reconocido como el que más cerca ha llegado de ese fin ideal de la investigación teórica».

Ejemplo 1. Si una partícula de masa m está constreñida a moverse sobre una superficie dada $G(x, y, z) = 0$ y si no hay fuerzas actuando sobre dicha partícula, se moverá siguiendo una geodésica. Para probarlo, empiezamos observando que al no haber fuerzas actuando se tiene $V = 0$, luego el lagrangiano $L = T - V$ se reduce a T , con

$$T = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right].$$

Ahora aplicamos el principio de Hamilton y exigimos que la acción

$$\int_{t_1}^{t_2} L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} T \, dt$$

sea estacionaria, sujeta a la ligadura $G(x, y, z) = 0$. Por la Sección 67 esto equivale a exigir que la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} [T + \lambda(t)G(x, y, z)] \, dt$$

sea estacionaria sin ligaduras, donde $\lambda(t)$ es una función indeterminada de t . Las ecuaciones de Euler para este problema variacional sin ligaduras son

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - \lambda G_x = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} - \lambda G_y = 0, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} - \lambda G_z = 0.$$

Cuando se eliminan m y λ , esas ecuaciones se convierten en

$$\frac{d^2x/dt^2}{G_x} = \frac{d^2y/dt^2}{G_y} = \frac{d^2z/dt^2}{G_z}.$$

Ahora bien, la energía total de la partícula, $T + V = T$, es constante (probamos esto más adelante), luego su velocidad es constante y, por tanto, $s = kt$ para alguna constante k , si se mide la longitud de arco s desde un punto adecuado. Eso nos permite escribir nuestras ecuaciones en la forma

$$\frac{d^2x/ds^2}{G_x} = \frac{d^2y/ds^2}{G_y} = \frac{d^2z/ds^2}{G_z}.$$

Estas son precisamente las ecuaciones 67-(29), luego la partícula sigue un camino geodésico sobre la superficie, como habíamos anunciado.

Ecuaciones de Lagrange. En mecánica clásica el principio de Hamilton puede verse como el origen de las ecuaciones de Lagrange del movimiento, que ocupan lugar destacado en este contexto. Para ver la conexión, hemos de entender antes lo que se entiende por grados de libertad y coordenadas generalizadas.

Una única partícula que se mueve libremente por el espacio tridimensional se dice que tiene tres *grados de libertad*, por estar su posición determinada por tres coordenadas independientes x, y, z . Si está obligada a moverse sobre una superficie $G(x, y, z) = 0$, reducimos a dos sus grados de libertad, porque una de las coordenadas puede expresarse en términos de las otras dos. Análogamente, un sistema de n partículas sin ligaduras tiene $3n$ grados de libertad, y el efecto de introducir ligaduras es reducir el número de coordenadas independientes necesarias para describir sus configuraciones. Si las coordenadas rectangulares de las partículas son x_i, y_i y z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y las ligaduras vienen descritas por k ecuaciones consistentes e independientes de la forma

$$G_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

el número de grados de libertad es $m = 3n - k$. En principio, se pueden usar estas ecuaciones para reducir el número de coordenadas de $3n$ a m sin más que expresar los $3n$ números x_i, y_i y z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) en términos de m de ellos. No obstante, es más conveniente introducir *coordenadas generalizadas* de Lagrange q_1, q_2, \dots, q_m , entendiendo por tales cualesquiera m coordenadas independientes cuyos valores determinen las configuraciones del sistema. Eso nos otorga plena libertad para elegir cualesquiera coordenadas adaptadas al problema entre manos, y hace que nuestro análisis sea independiente de cualquier sistema particular de coordenadas. Expresemos ahora las coordenadas rectangulares de las partículas en términos de estas coordenadas generalizadas y observemos que las fórmulas resultantes incluyen automáticamente las ligaduras: $x_i = x_i(q_1, \dots, q_m)$, $y_i = y_i(q_1, \dots, q_m)$ y $z_i = z_i(q_1, \dots, q_m)$, donde $i = 1, 2, \dots, n$.

Si m_i es la masa de la i -ésima partícula, la energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right];$$

y en términos de las coordenadas generalizadas eso se escribe

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 \right], \quad (1)$$

donde $\dot{q}_j = dq_j/dt$. Para uso posterior hacemos notar que T es función homogénea de grado 2 en las \dot{q}_j . Se supone que la energía potencial V del sistema es una función de las q_j solamente, de modo que el lagrangiano $L = T - V$ es una función de la forma

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m).$$

El principio de Hamilton nos dice que el movimiento se produce de manera tal que la acción $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ es estacionaria en cualquier intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$, luego las ecuaciones de Euler han de satisfacerse. En este caso, esas ecuaciones son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

que se conocen como *ecuaciones de Lagrange*. Constituyen un sistema de m ecuaciones diferenciales de segundo orden cuya solución dará las q_j como funciones de t .

Extraeremos tan sólo una consecuencia de carácter general de las ecuaciones de Lagrange, a saber, la *ley de conservación de la energía*.

El primer paso del argumento consiste en advertir la siguiente identidad, válida para toda función L de las variables $t, q_1, q_2, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m$:

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right] = \sum_{j=1}^m \dot{q}_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3)$$

Como el lagrangiano de nuestro sistema cumple (2) y no depende explícitamente de t , el miembro de la derecha en (3) se anula y tenemos

$$\sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = E \quad (4)$$

para cierta constante E . A continuación observamos que $\partial V / \partial \dot{q}_j = 0$, de modo que $\partial L / \partial \dot{q}_j = \partial T / \partial \dot{q}_j$. Tal como hemos hecho notar ya, la fórmula (1) muestra que T es una función homogénea de grado 2 en las \dot{q}_j , luego

$$\sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$$

por el teorema de Euler acerca de las funciones homogéneas¹³. Con este resultado, (4) se convierte en $2T - L = E$ o $2T - (T - V) = E$, así que

$$T + V = E,$$

¹³ Recordemos que una función $f(x, y)$ se dice homogénea de grado n en x e y si $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$. Si derivamos ambos miembros respecto a k y hacemos $k = 1$, obtenemos

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y),$$

que es el teorema de Euler. El mismo resultado es cierto para funciones homogéneas de más de dos variables.

de acuerdo con lo cual la suma de energías cinética y potencial es constante durante el movimiento.

En el ejemplo que sigue ilustramos cómo utilizar las ecuaciones de Lagrange en problemas específicos de dinámica.

Ejemplo 2. Si una partícula de masa m se mueve en un plano bajo la acción de una fuerza gravitacional de magnitud km/r^2 dirigida hacia el origen, es natural tomar las coordenadas polares como coordenadas generalizadas: $q_1 = r$, $q_2 = \theta$. Es fácil ver que $T = (m/2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ y $V = -km/r$, luego el lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{km}{r}$$

y las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (6)$$

Dado que L no depende explícitamente de θ , la ecuación (6) prueba que $\partial L / \partial \dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$ es constante, así que

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad (7)$$

para alguna constante h que se supone positiva. Seguidamente observamos que (5) se reescribe como

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k}{r^2}.$$

Esta es justamente la ecuación 21-(12), que resolvimos en la Sección 21 con la conclusión de que el camino de la partícula es una sección cónica.

Problemas variacionales para integrales dobles. Nuestro método general de hallar condiciones necesarias para que una integral sea estacionaria puede aplicarse también a integrales múltiples. Por ejemplo, sea R la región limitada en el plano xy por una curva cerrada C (Fig. 97). Sea $z = z(x, y)$ una función definida sobre R que toma valores prefijados sobre el contorno C , siendo por lo demás arbitraria (excepto las hipótesis de derivabilidad de siempre). Podemos pensar que tal función define una superficie variable en el espacio con su contorno fijo. Una integral de la forma

$$I(z) = \iint_R f(x, y, z, z_x, z_y) dx dy \quad (8)$$

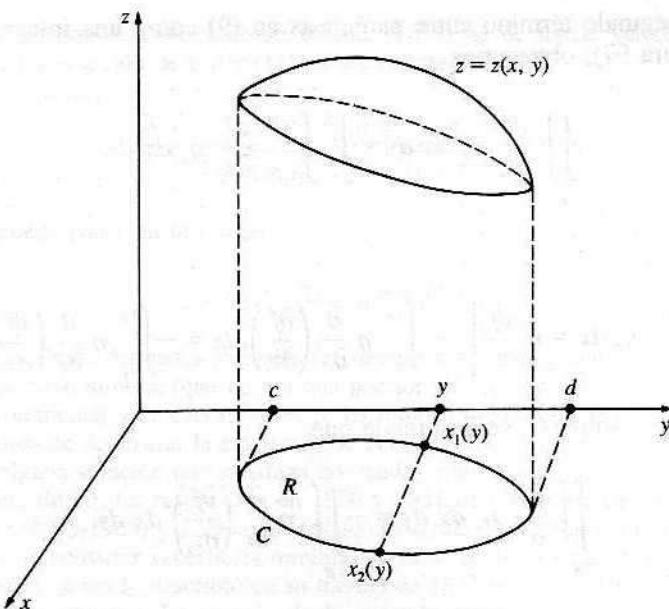


Figura 97

tendrá valores que dependen de la elección de z , y nos podemos plantear el problema de hallar una función z (una función estacionaria) que asigne un valor estacionario a esta integral.

Vamos a efectuar un razonamiento que suena ya familiar. Sea $z(x, y)$ la deseada función estacionaria y formemos las funciones $\bar{z}(x, y) = z(x, y) + \alpha\eta(x, y)$, donde $\eta(x, y)$ se anula sobre C . Al sustituir \bar{z} en la integral (8) obtenemos una función $I(\alpha)$ del parámetro α y, como antes, la condición necesaria $I'(0) = 0$ conduce a

$$\iint_R \left(\frac{\partial f}{\partial z} \eta + \frac{\partial f}{\partial z_x} \eta_x + \frac{\partial f}{\partial z_y} \eta_y \right) dx dy = 0. \quad (9)$$

Al objeto de simplificar la tarea de eliminar η_x y η_y , suponemos ahora que la curva C tiene la propiedad de que toda recta en el plano xy paralela a un eje intersecta a C en dos puntos a lo sumo¹⁴. Entonces, interpretando la integral

¹⁴ Esta restricción es innecesaria. Podría evitarse empleando el teorema de Green.

doble del segundo término entre paréntesis en (9) como una integral sucesiva (véase Figura 97), obtenemos

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial z_x} \eta_x \, dx \, dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial z_x} \eta_x \, dx \, dy;$$

y como

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial z_x} \eta_x \, dx = \eta \left. \frac{\partial f}{\partial z_x} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z_x} \right) \, dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z_x} \right) \, dx$$

por ser η nula sobre C , se desprende que

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial z_x} \eta_x \, dx \, dy = - \iint_R \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z_x} \right) \, dx \, dy.$$

El término que contiene a η_y se puede transformar de modo análogo, y (9) se convierte en

$$\iint_R \eta \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z_y} \right) \right] \, dx \, dy = 0. \quad (10)$$

Por ser η arbitraria concluimos que la expresión entre corchetes en (10) debe anularse, luego

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z_y} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

es la ecuación de Euler para una extremal en este caso. Como antes, una función estacionaria (si existe alguna) es una extremal que satisface las condiciones de contorno dadas.

Ejemplo 3. En su forma más simple, el *problema de las superficies mínimas* fue propuesto por Euler como sigue: hallar la superficie de área mínima acotada por una curva cerrada dada en el espacio. Supuesto que esa curva se proyecte en el plano xy en una curva cerrada C que rodea una región R , y que la superficie integral de área para la superficie

$$\iint_R \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy$$

sujeta a la condición de contorno de que $z(x, y)$ ha de tomar valores prefijados sobre C . La ecuación de Euler (11) para esta integral es

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) = 0,$$

que se puede poner en la forma

$$z_{xx}(1+z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1+z_x^2) = 0. \quad (12)$$

Esta ecuación en derivadas parciales fue descubierta por Lagrange. Euler probó que toda superficie mínima (que no sea una porción de algún plano) ha de tener forma de silla de montar y su curvatura ha de ser nula en todos sus puntos¹⁵. El problema matemático de demostrar la existencia de tales superficies mínimas, o sea, que (12) admite alguna solución que satisfaga adecuadas condiciones de contorno, es verdaderamente difícil. Lo resolvieron en 1930 y 1931 de forma independiente T. Radó (húngaro, 1895-1965) y J. Douglas (estadounidense, 1897-1965). Un método experimental de construir superficies mínimas se debe al físico ciego J. Plateau (belga, 1801-1883), quien lo describió en su tratado de 1873 relativo a las fuerzas moleculares en los líquidos. La esencia de la cuestión radica en que si se sumerge un alambre en forma de curva cerrada en una solución jabonosa, la bomba de jabón resultante toma la forma de una superficie mínima con el fin de hacer mínima la energía potencial debida a la tensión superficial. Plateau llevó a cabo muchos experimentos sorprendentes de esta clase, y en su honor el problema de las superficies mínimas se conoce como *problema de Plateau*¹⁶.

Ejemplo 4. En la Sección 40 dedujimos la ecuación de ondas unidimensional a partir de la segunda ley de Newton. En este ejemplo vamos a deducirla del principio de Hamilton gracias a la ecuación (11). Supongamos lo que sigue: una cuerda de densidad lineal de masa constante m se estira con una tensión T y se coloca en el eje x , sujetada a los puntos $x = 0$ y $x = \pi$; se pulsa y se le deja vibrar en el plano xy ; sus desplazamientos son relativamente pequeños, de manera que la tensión permanece esencialmente constante y las potencias de la pendiente de orden superior al segundo son despreciables. Cuando la cuerda está desplazada, un elemento de longitud dx está estirado a una longitud ds , donde

$$ds = \sqrt{1+y_x^2} dx \cong \left(1 + \frac{1}{2} y_x^2\right) dx.$$

Esta aproximación resulta de desarrollar $\sqrt{1+y_x^2} = (1+y_x^2)^{1/2}$ en la serie del binomio $1+y_x^2/2+\dots$ y de descartar todas las potencias de y_x de orden superior al segundo.

¹⁵ La curvatura media de una superficie en un punto se define como sigue. Consideremos la recta normal a la superficie en ese punto y un plano que contenga a dicha recta. Al girar ese plano en torno a la recta normal, la curvatura de la curva en que interseca a la superficie varía; la curvatura media es la semisuma de sus valores máximo y mínimo.

¹⁶ La obra clásica sobre este asunto es la de R. Courant, *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces*, Interscience-Wiley, Nueva York, 1950.

El trabajo realizado sobre ese elemento es $T(ds - dx) = 1/2Ty_x^2 dx$, así que la energía potencial de toda la cuerda es

$$V = \frac{1}{2} T \int_0^\pi y_x^2 dx.$$

El elemento tiene masa $m dx$ y velocidad y_t , o sea, que su energía cinética es $1/2my_t^2 dx$, y para toda la cuerda tenemos

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^\pi y_t^2 dx.$$

Por tanto, el lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2} \int_0^\pi (my_t^2 - Ty_x^2) dx,$$

y la acción, que debe ser estacionaria por el principio de Hamilton, es

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\pi (my_t^2 - Ty_x^2) dx dt.$$

En este caso la ecuación (11) se expresa

$$\frac{T}{m} y_{xx} = y_{tt},$$

donde reconocemos la ecuación de ondas 40-(8).

NOTA SOBRE HAMILTON. El matemático y físico matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865) fue un clásico niño prodigo. Su educación estuvo a cargo de un tío clérigo, excéntrico pero muy culto. A los 3 años leía inglés; a los 4 se inició en griego, latín y hebreo; a los 8 añadió italiano y francés; a los 10 aprendió sánscrito y árabe; y se dice que a los 13 dominaba un idioma por cada año de edad. Este florecimiento forzado de utilidad lingüística se quebró a los 14 años, en que giró hacia las matemáticas, la astronomía y la óptica. A los 18 publicó un artículo corrigiendo un error en la *Mécanique Céleste* de Laplace; y siendo todavía estudiante en el Trinity College de Dublín, fue nombrado profesor de astronomía en esa institución y pasó a ser automáticamente Astrónomo Real de Irlanda.

Su primera obra importante la produjo en óptica geométrica. Alcanzó fama a los 27 años a causa de su predicción matemática de la refracción cónica. Más relevante aún fue su demostración de que todo problema de la óptica se puede resolver por un método único que incluye el principio del tiempo mínimo de Fermat como caso particular. Extendió entonces ese método a problemas de mecánica, y hacia los 30 años llegó a un principio único (el hoy llamado principio de Hamilton) que pone de manifiesto que la mecánica y la óptica no son sino dos aspectos del cálculo de variaciones.

En 1835 centró su atención en el álgebra y construyó una teoría rigurosa de los números complejos basada en la idea de un número complejo como par ordenado de números reales. Esto fue hecho independientemente por Gauss, quien ya lo había publicado en 1813, aunque poniendo su énfasis en la interpretación de los números complejos como puntos del plano complejo. Subsiguientemente Hamilton intentó extender la estructura algebraica de los números complejos, que pueden verse como vectores en el plano, a vectores en el espacio tridimensional. Fracasó en su intento, pero en 1843 sus esfuerzos le condujeron a descubrir los cuaterniones. Estos son vectores en cuatro dimensiones que incluyen a los números complejos como subsistema; en terminología moderna, constituyen el álgebra lineal no comunitativa más simple en la que es posible la división¹⁷. El resto de la vida de Hamilton estuvo dedicada a la elaboración perfeccionada de la teoría y aplicaciones de los cuaterniones, y a la producción de tratados enormes, indigestos, sobre ese tema. Esta obra tuvo poca influencia en física y en geometría, y se vio suplantada por el más eficiente cálculo vectorial de Willard Gibbs y el álgebra multilineal de Grassmann y E. Cartan. El poso relevante de las investigaciones de Hamilton sobre los cuaterniones fue la demostración de la existencia de un sistema consistente de números en los que la ley conmutativa del producto no es válida. Esto liberó al álgebra de algunos prejuicios que la habían atenazado, y animó a otros matemáticos de finales del siglo XIX a investigar álgebras lineales de todo tipo.

Hamilton fue además un mal poeta y amigo de Wordsworth y Coleridge, con quienes mantuvo copiosa correspondencia referente a ciencia, literatura y filosofía.

¹⁷ Por fortuna para él, Hamilton jamás supo que Gauss había descubierto los cuaterniones en 1813 guardando para sí su hallazgo. Véase Gauss, *Werke*, vol. VIII, págs. 357-362.

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

68. EL METODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

Uno de los principales temas recurrentes en este libro ha sido la idea de que tan sólo unos pocos tipos simples de ecuaciones diferenciales se pueden resolver explícitamente en términos de funciones elementales. Algunos de esos tipos se han descrito en los tres primeros capítulos, mientras el Capítulo 5 contiene una exposición detallada de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden cuyas soluciones son expresables en series de potencias. Sin embargo, muchas ecuaciones diferenciales caen fuera de estas categorías y nada de cuanto hemos hecho hasta el momento sugiere un procedimiento que pueda funcionar en tales casos.

Comencemos examinando el problema de valores iniciales descrito en la Sección 2:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1)$$

donde $f(x, y)$ es una función arbitraria definida y continua en algún entorno del punto (x_0, y_0) . En lenguaje geométrico, nuestro propósito es conseguir un método para construir una función $y = y(x)$ cuya gráfica pase por el punto (x_0, y_0) y que satisfaga además la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ en algún entorno de x_0 (Fig. 98). Ya estamos predispuestos a esperar que los procedimientos elementales no van a funcionar y que en general será necesario algún tipo de proceso infinito.

El método que vamos a describir proporciona una línea de ataque a la resolución de ecuaciones diferenciales completamente distinto de todo lo que

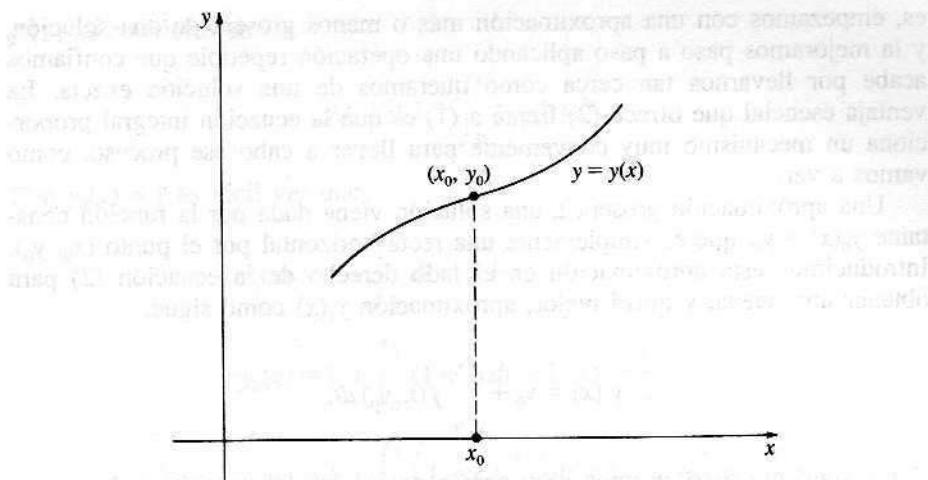


Figura 98

hemos encontrado hasta ahora. Su clave consiste en sustituir el problema de valores iniciales (1) por la ecuación integral equivalente

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt. \quad (2)$$

Esto se llama una *ecuación integral* porque la función incógnita aparece bajo el signo integral. Para ver la equivalencia de (1) y (2), supongamos que $y(x)$ es una solución de (1). Entonces $y(x)$ es automáticamente continua y el miembro de la derecha en

$$y'(x) = f[x, y(x)]$$

es una función continua de x . Al integrar desde x_0 hasta x y usar $y(x_0) = y_0$, el resultado es (2). Como de costumbre, se utiliza en (2) como variable muda t para evitar confusión con el límite superior de la integral, también variable. Así pues, toda solución de (1) es solución continua de (2). Recíprocamente, si $y(x)$ es una solución continua de (2), entonces $y(x_0) = y_0$ debido a que la integral se anula cuando $x = x_0$, y derivando (2) recuperamos la ecuación diferencial $y' = f[x, y(x)]$. Estos sencillos argumentos prueban que (1) y (2) son equivalentes en el sentido de que las soluciones de (1), si existen, son precisamente las soluciones continuas de (2). En particular, obtendremos automáticamente una solución de (1) en cuanto seamos capaces de construir una solución continua de (2).

Volvamos nuestra atención ahora a la resolución de (2) por iteración. Esto

es, empezamos con una aproximación más o menos grosera de una solución, y la mejoramos paso a paso aplicando una operación repetible que confiamos acabe por llevarnos tan cerca como queramos de una solución exacta. La ventaja esencial que ofrece (2) frente a (1) es que la ecuación integral proporciona un mecanismo muy conveniente para llevar a cabo ese proceso, como vamos a ver.

Una aproximación grosera a una solución viene dada por la función constante $y_0(x) = y_0$, que es simplemente una recta horizontal por el punto (x_0, y_0) . Introducimos esta aproximación en el lado derecho de la ecuación (2) para obtener una nueva, y quizás mejor, aproximación $y_1(x)$ como sigue:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt.$$

Como siguiente paso, usamos $y_1(x)$ para generar otra, tal vez aún mejor, aproximación $y_2(x)$ del mismo modo:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_1(t)] dt.$$

En el n -ésimo paso de este proceso tendremos

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_{n-1}(t)] dt. \quad (3)$$

Este procedimiento se llama *método de aproximaciones sucesivas de Picard*¹. Veamos en varios ejemplos sencillos cómo funciona.

El problema de valores iniciales

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

admite la solución evidente $y(x) = e^x$. La ecuación integral equivalente es

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt,$$

¹ Emile Picard (1856-1941), uno de los matemáticos franceses más eminentes del siglo pasado, hizo dos contribuciones cruciales al análisis: su método de aproximaciones sucesivas, que le permitió perfeccionar la teoría de ecuaciones diferenciales iniciada por Cauchy en la década de 1820, y su famoso teorema (conocido como «teorema grande de Picard») sobre los valores que toma una función compleja analítica en el entorno de una singularidad esencial, que ha estimulado gran cantidad de investigaciones importantes hasta el presente. Como todo francés que se precie, era un experto degustador de la buena cocina y se sentía especialmente orgulloso de la bullabesa.

y (3) se convierte en

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(t) dt.$$

Con $y_0(x) = 1$ es fácil ver que

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1+t+\frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3},$$

y en general

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

En este caso es bien claro que las aproximaciones sucesivas convergen realmente a la solución exacta, ya que esas aproximaciones no son otra cosa que las sumas parciales del desarrollo en serie de potencias de e^x .

Consideremos ahora el problema

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1. \quad (4)$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal de primer orden, y es fácil darse cuenta de que la solución que cumple la condición inicial dada es $y(x) = 2e^x - x - 1$. La ecuación integral equivalente es

$$y(x) = 1 + \int_0^x [t + y(t)] dt,$$

y (3) es

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x [t + y_{n-1}(t)] dt.$$

Con $y_0(x) = 1$ el método de Picard da

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (t+1) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + 2t + \frac{t^2}{2!} \right) dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3!},$$

$$\begin{aligned} y_3(x) &= 1 + \int_0^x \left(1 + 2t + t^2 + \frac{t^3}{3!} \right) dt \\ &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_4(x) &= 1 + \int_0^x \left(1 + 2t + t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4!} \right) dt \\ &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{5!}, \end{aligned}$$

y en general

$$y_n(x) = 1 + x + 2\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Esto converge evidentemente a

$$1 + x + 2(e^x - x - 1) + 0 = 2e^x - x - 1,$$

así que de nuevo estamos ante la solución exacta.

A pesar de estos ejemplos, es muy posible que el lector no esté muy convencido todavía del valor práctico del método de Picard. ¿Qué hacer, por ejemplo, si las integraciones sucesivas son muy complicadas o incluso imposibles? Escepticismo justificado, sin duda, porque la potencia verdadera del método de Picard reside sobre todo en la *teoría* de ecuaciones diferenciales; no en la búsqueda de soluciones, sino en demostrar que bajo condiciones muy generales, un problema de valores iniciales tiene solución, y que esa solución es, además, única. Los teoremas que enuncian de manera precisa afirmaciones de ese tipo se llaman *teoremas de existencia y unicidad*. Formularemos y demostraremos varios de estos teoremas en las dos próximas secciones.

PROBLEMAS

1. Hallar la solución exacta del problema de valores iniciales

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Partiendo de $y_0(x) = 1$, aplicar el método de Picard para calcular $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ y comparar los resultados con la solución exacta.

2. Hallar la solución exacta del problema de valores iniciales

$$y' = 2x(1+y), \quad y(0) = 0.$$

Partiendo de $y_0(x) = 0$, calcular $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ y comparar estos resultados con la solución exacta.

3. Es instructivo ver cómo funciona el método de Picard con una elección de la aproximación inicial distinta de la función constante $y_0(x) = y_0$. Aplicar el método al problema de valores iniciales (4) con

- (a) $y_0(x) = e^x$;
- (b) $y_0(x) = 1 + x$;
- (c) $y_0(x) = \cos x$.

69. EL TEOREMA DE PICARD

Tal como indicamos al final de la sección anterior, la principal aportación práctica la encuentra el método de aproximaciones sucesivas de Picard en la teoría de ecuaciones diferenciales. Esta contribución queda bien patente en la demostración del siguiente teorema fundamental.

Teorema A. (Teorema de Picard.) Sean $f(x, y)$ y $\partial f / \partial y$ funciones continuas de x e y en un rectángulo cerrado R con lados paralelos a los ejes (Fig. 99). Si (x_0, y_0) es cualquier punto interior de R , existe un número $h > 0$ con la propiedad de que el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

tiene una y sólo una solución $y = y(x)$ sobre el intervalo $|x - x_0| \leq h$.

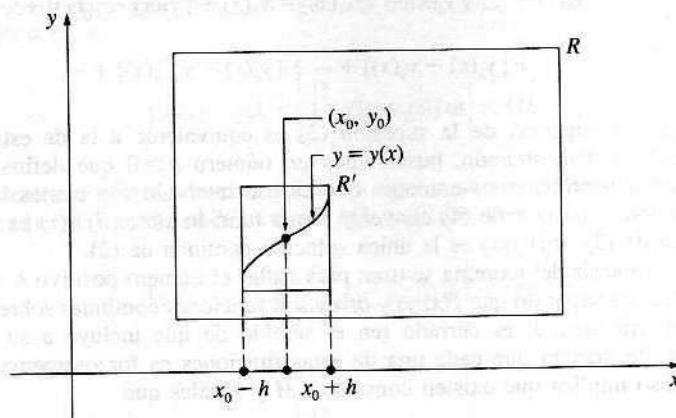


Figura 99

Demostración. El argumento es francamente largo e intrincado, por lo que será más fácil de digerir en varias etapas.

En primer lugar, sabemos que toda solución de (1) es solución continua de la ecuación integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt, \quad (2)$$

y recíprocamente. Eso nos permite concluir que (1) tiene una solución única sobre un intervalo $|x - x_0| \leq h$ si y sólo si (2) tiene una solución continua única sobre ese mismo intervalo. En la Sección 68 hemos presentado ciertas evidencias de que la sucesión de funciones $y_n(x)$ definida por

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_0(t)] dt,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_1(t)] dt,$$

...

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_{n-1}(t)] dt,$$

...

converge a una solución de (2). Hagamos notar ahora que $y_n(x)$ es la n -ésima suma parcial de la serie de funciones

$$\begin{aligned} y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)] &= y_0(x) + [y_1(x) - y_0(x)] + \\ &\quad + [y_2(x) - y_1(x)] + \cdots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \cdots, \end{aligned} \quad (4)$$

luego la convergencia de la sucesión (3) es equivalente a la de esta serie. Para completar la demostración, buscaremos un número $h > 0$ que defina el intervalo $|x - x_0| \leq h$ y probaremos entonces que en ese intervalo son ciertas las siguientes proposiciones: (i) la serie (4) converge a una función $y(x)$; (ii) $y(x)$ es una solución continua de (2); (iii) $y(x)$ es la única solución continua de (2).

Las hipótesis del teorema se usan para hallar el número positivo h , como vamos a ver. Hemos supuesto que $f(x, y)$ y $\partial f / \partial y$ son funciones continuas sobre el rectángulo R . Ahora bien, R es cerrado (en el sentido de que incluye a su contorno) y acotado, de manera que cada una de estas funciones es forzosamente acotada sobre R . Eso implica que existen constantes M y K tales que

$$|f(x, y)| \leq M \quad (5)$$

y

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right| \leq K \quad (6)$$

para todos los puntos (x, y) de R . A continuación observemos que si (x, y_1) y (x, y_2) son puntos distintos de R con idéntica coordenada x , el teorema del valor medio garantiza que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial}{\partial y} f(x, y^*) \right| |y_1 - y_2| \quad (7)$$

para algún número y^* entre y_1 e y_2 . De (6) y (7) es claro que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2| \quad (8)$$

para todo par de puntos (x, y_1) y (x, y_2) de R (distintos o no) que estén en una misma recta vertical. Ahora escogemos como h cualquier número positivo que cumpla

$$Kh < 1 \quad (9)$$

y tal que el rectángulo R' definido por las desigualdades $|x - x_0| \leq h$ y $|y - y_0| \leq Mh$ esté contenido en R . Como (x_0, y_0) es un punto interior de R , no hay dificultad en verificar que tal h existe. Las razones de estas argumentaciones un tanto barrocas irá haciéndose patentes conforme la demostración vaya avanzando.

Desde este momento nos restringimos al intervalo $|x - x_0| \leq h$. Para probar (i) es suficiente mostrar que la serie

$$|y_0(x)| + |y_1(x) - y_0(x)| + |y_2(x) - y_1(x)| + \dots + |y_n(x) - y_{n-1}(x)| + \dots \quad (10)$$

converge. Y a tal fin vamos a estimar los términos $|y_n(x) - y_{n-1}(x)|$. Es necesario darse cuenta de que el gráfico de cada función $y_n(x)$ está en R' y por ende en R . Esto es obvio para $y_0(x) = y_0$, así que los puntos $[t, y_0(t)]$ están en R' , (5) da $|f[t, y_0(t)]| \leq M$, y

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f[t, y_0(t)] dt \right| \leq Mh,$$

que demuestra la afirmación para $y_1(x)$. Se sigue a su vez de esta desigualdad que los puntos $[t, y_1(t)]$ están en R' , así que $|f[t, y_1(t)]| \leq M$ y

$$|y_2(x) - y_1| = \left| \int_{x_0}^x f[t, y_1(t)] dt \right| \leq Mh.$$

Análogamente,

$$|y_3(x) - y_2| = \left| \int_{x_0}^x f[t, y_2(t)] dt \right| \leq Mh,$$

y así sucesivamente. Vamos ya con las estimaciones antes mencionadas. Dado que una función continua sobre un intervalo cerrado tiene un máximo, y puesto que $y_1(x)$ es continua, podemos definir una constante a mediante $a = \max |y_1(x) - y_0|$ y escribimos

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq a.$$

Pues bien, los puntos $[t, y_1(t)]$ y $[t, y_0(t)]$ están en R' , de modo que según (8)

$$|f[t, y_1(t)] - f[t, y_0(t)]| \leq K|y_1(t) - y_0(t)| \leq Ka$$

y tenemos

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^x (f[t, y_1(t)] - f[t, y_0(t)]) dt \right| \leq Kah = a(Kh).$$

Análogamente,

$$|f[t, y_2(t)] - f[t, y_1(t)]| \leq K|y_2(t) - y_1(t)| \leq K^2 ah,$$

luego

$$|y_3(x) - y_2(x)| = \left| \int_{x_0}^x (f[t, y_2(t)] - f[t, y_1(t)]) dt \right| \leq (K^2 ah)h = a(Kh)^2.$$

Continuando de esta manera, se llega a

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq a(Kh)^{n-1}$$

para todo $n = 1, 2, \dots$ Cada término en la serie (10) es por tanto menor o igual que el término correspondiente en la serie de constantes

$$|y_0| + a + a(Kh) + a(Kh)^2 + \dots + a(Kh)^{n-1} + \dots$$

Ahora bien, (9) garantiza la convergencia de esta serie, luego (10) converge por el criterio de comparación. Si denotamos su suma por $y(x)$, tenemos $y_n(x) \rightarrow y(x)$. Como el gráfico de cada $y_n(x)$ está en R' , es evidente que el de $y(x)$ también.

Vamos con la demostración de (ii). El argumento anterior muestra no sólo que $y_n(x)$ converge a $y(x)$, sino que además la convergencia es *uniforme*. Esto significa que tomando n suficientemente grande podemos hacer que $y_n(x)$ esté tan próxima de $y(x)$ como queramos para todo x del intervalo; o sea, con más precisión, dado $\epsilon > 0$ existe un entero positivo n_0 tal que si $n \geq n_0$ tenemos $|y(x) - y_n(x)| < \epsilon$ para todo x del intervalo. Puesto que cada $y_n(x)$ es claramente continua, el carácter uniforme de la convergencia asegura que la función límite $y(x)$ es continua². Para probar que $y(x)$ es realmente solución de (2), hemos de ver que

² No entraremos en detalles, pero el razonamiento es muy simple y se basa en la desigualdad

$$\begin{aligned} |y(x) - y(\bar{x})| &= |[y(x) - y_n(x)] + [y_n(x) - y_n(\bar{x})] + [y_n(\bar{x}) - y(\bar{x})]| \leq \\ &\leq |y(x) - y_n(x)| + |y_n(x) - y_n(\bar{x})| + |y_n(\bar{x}) - y(\bar{x})|. \end{aligned}$$

$$y(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt = 0. \quad (11)$$

Pero sabemos que

$$y_n(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f[t, y_{n-1}(t)] dt = 0, \quad (12)$$

así que restando el lado izquierdo de (12) del izquierdo de (11) obtenemos

$$y(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt = y(x) - y_n(x) + \int_{x_0}^x (f[t, y_{n-1}(t)] - f[t, y(t)]) dt,$$

y obtenemos

$$\left| y(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt \right| \leq |y(x) - y_n(x)| + \left| \int_{x_0}^x (f[t, y_{n-1}(t)] - f[t, y(t)]) dt \right|.$$

Como el gráfico de $y(x)$ está en R' y por tanto en R , de (8) deducimos

$$\left| y(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt \right| \leq |y(x) - y_n(x)| + Kh \max |y_{n-1}(x) - y(x)|. \quad (13)$$

El carácter uniforme de la convergencia de $y_n(x)$ a $y(x)$ implica ahora que el miembro de la derecha en (13) se puede hacer tan pequeño como queramos tomando n suficientemente grande. El miembro de la izquierda de (13) ha de ser, en consecuencia, igual a cero, y la demostración de (11) está acabada.

Para demostrar (iii), vamos a suponer que $\bar{y}(x)$ es otra solución continua de (2) sobre el intervalo $|x - x_0| \leq h$, y mostraremos que $\bar{y}(x) = y(x)$ para todo x del intervalo. Para nuestro argumento necesitaremos saber que el gráfico de $\bar{y}(x)$ está en R' , y por tanto en R , de manera que comenzamos estableciendo este hecho. Supongamos que el gráfico de $\bar{y}(x)$ saliera fuera de R' (Fig. 100). En tal circunstancia, las propiedades de esta función [continuidad y el hecho de que $\bar{y}(x_0) = y_0$] implicarían la existencia de un x_1 tal que $|x_1 - x_0| < h$, $|\bar{y}(x_1) - y_0| = Mh$, e $|\bar{y}(x) - y_0| < Mh$ si $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$. Se sigue que

$$\frac{|\bar{y}(x_1) - y_0|}{|x_1 - x_0|} = \frac{Mh}{|x_1 - x_0|} > \frac{Mh}{h} = M.$$

Sin embargo, el teorema del valor medio asegura que existe un número x^* entre x_0 y x_1 tal que

$$\frac{|\bar{y}(x_1) - y_0|}{|x_1 - x_0|} = |\bar{y}'(x^*)| = |f[x^*, \bar{y}(x^*)]| \leq M,$$

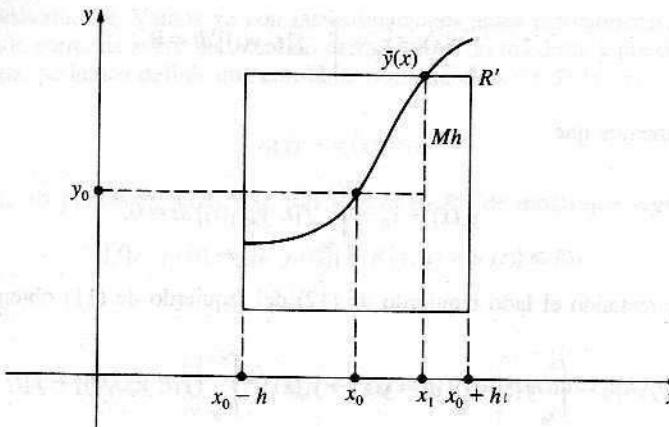


Figura 100

ya que el punto $[x^*, \bar{y}(x^*)]$ está en R' . Esta contradicción prueba que no puede existir ningún punto con las propiedades de x_1 , así que el gráfico de $\bar{y}(x)$ está en R' . Para completar la demostración de (iii) usamos que $\bar{y}(x)$ e $y(x)$ son ambas soluciones de (2) para escribir

$$|\bar{y}(x) - y(x)| = \left| \int_{x_0}^x \{f[t, \bar{y}(t)] - f[t, y(t)]\} dt \right|.$$

Dado que los gráficos de $\bar{y}(x)$ y de $y(x)$ están ambos en R' , (8) nos da

$$|\bar{y}(x) - y(x)| \leq Kh \max |\bar{y}(x) - y(x)|,$$

luego

$$\max |\bar{y}(x) - y(x)| \leq Kh \max |\bar{y}(x) - y(x)|.$$

Esto implica que $\max |\bar{y}(x) - y(x)| = 0$, porque de lo contrario tendríamos $1 \leq Kh$ en contradicción con (9). Se sigue que $\bar{y}(x) = y(x)$ para todo x del intervalo $|x - x_0| \leq h$, y el teorema de Picard queda demostrado.

Nota 1. Este teorema admite diversas mejoras debilitando sus hipótesis. Por ejemplo, nuestra hipótesis de que $\partial f / \partial y$ es continua en R es más fuerte de lo que la demostración requiere, y sólo se ha utilizado para obtener la desigualdad (8). Podemos, por tanto, introducir esta desigualdad en el teorema como hipótesis sustitutiva de la continuidad de $\partial f / \partial y$. De esta forma llegamos a un enunciado más potente del teorema, ya que hay muchas funciones que carecen de derivadas parciales continuas y, no obstante, verifican (8) para al-

guna constante K . Esta desigualdad, que dice que el cociente de incrementos

$$\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2}$$

es acotado sobre R , se llama una *condición de Lipschitz*³ en la variable y .

Nota 2. Si abandonamos la condición de Lipschitz y suponemos tan sólo que $f(x, y)$ es continua en R , todavía es posible probar que el problema de valores iniciales (1) tiene solución. Este resultado se conoce como *teorema de Peano*⁴. Las únicas demostraciones conocidas se apoyan en argumentos más sofisticados que los aquí expuestos⁵. Además, la solución cuya existencia garantiza este teorema no es necesariamente única. A título de ejemplo, consideremos el problema

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0, \quad (14)$$

y sea R el rectángulo $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$. Aquí $f(x, y) = 3y^{2/3}$ es obviamente continua en R . Además, $y_1(x) = x^3$ e $y_2(x) = 0$ son dos soluciones diferentes válidas para todo x , así que ciertamente (14) admite solución, pero no única. La explicación de la no unicidad reposa en el hecho de que $f(x, y)$ no satisface una condición de Lipschitz sobre el rectángulo R , ya que el cociente de incrementos

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y = 0} = \frac{3y^{2/3}}{y} = \frac{3}{y^{1/3}}$$

es no acotado en cualquier entorno del origen.

³ Rudolph Lipschitz (1832-1903) fue profesor en Bonn la mayor parte de su vida. Se le recuerda especialmente por su papel en la simplificación y clarificación de la teoría original de Cauchy sobre existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, también extendió el teorema de Dirichlet sobre representabilidad de una función por su serie de Fourier, obtuvo la fórmula para el número de formas en que un número entero positivo se puede descomponer como suma de cuatro cuadrados como corolario de su propia teoría de factorización de cuaterniones enteros, e hizo contribuciones relevantes a la mecánica teórica, al cálculo de variaciones, a las funciones de Bessel, a las formas diferenciales cuadráticas y a la teoría de fluidos viscosos.

⁴ Giuseppe Peano (1858-1932), lógico y matemático italiano, influyó fuertemente en el tratamiento axiomático de la geometría del plano de Hilbert y la obra de Whitehead y Russel en lógica matemática. Sus postulados para los enteros positivos han hecho preguntarse a generaciones de estudiantes si toda el álgebra moderna no es una especie de conspiración para convertir lo trivial en ininteligible (no lo es!). En 1890 dejó atónito al mundo de las matemáticas con su notable construcción de una curva continua en el plano que llena por completo el cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Desgraciadamente para un hombre que tenía en tan alta estima la lógica, su demostración en 1886 del citado teorema de existencia y unicidad de soluciones para $y' = f(x, y)$ era incorrecta, y hasta muchos años después no se encontró una rigurosa.

⁵ Véase, por ejemplo, A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, vol. 1, pág. 56, Graylock, Baltimore, 1957.

Nota 3. El Teorema A se dice que es un teorema *local* de existencia y unicidad porque garantiza la existencia de una única solución sólo en algún intervalo $|x - x_0| \leq h$, donde h puede ser muy pequeño. En varias circunstancias de interés se puede evitar esa restricción. Consideremos, por ejemplo, la ecuación lineal de primer orden

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ están definidas y son continuas en un intervalo $a \leq x \leq b$. Aquí es

$$f(x, y) = -P(x)y + Q(x);$$

y si $K = \max |P(x)|$ para $a \leq x \leq b$, es claro que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |-P(x)(y_1 - y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

La función $f(x, y)$ es, por tanto, continua y satisface una condición de Lipschitz sobre la banda vertical infinita definida por $a \leq x \leq b$ y $-\infty < y < \infty$. Bajo tales circunstancias, el problema de valores iniciales

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

tiene una única solución sobre el intervalo completo $a \leq x \leq b$. Además, el punto (x_0, y_0) puede ser cualquier punto de la banda, interior o no. Esta afirmación es un caso especial del siguiente teorema.

Teorema B. *Sea $f(x, y)$ una función continua que satisface una condición de Lipschitz*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

sobre una banda definida por $a \leq x \leq b$ y $-\infty < y < \infty$. Si (x_0, y_0) es cualquier punto de la banda, el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{15}$$

tiene una y sólo una solución $y = y(x)$ sobre el intervalo $a \leq x \leq b$.

Demarcación. El argumento es parecido al del Teorema A, con ciertas simplificaciones debidas a que la región bajo consideración no es acotada por arriba ni por abajo. En concreto, iniciamos la demostración de la misma manera probando que la serie (4), y por ende la sucesión (3), es uniformemente convergente sobre todo el intervalo $a \leq x \leq b$. Conseguiremos esto utilizando un método algo distinto para la estimación de los términos de la serie (10).

En primer lugar, definimos M_0 , M_1 y M mediante

$$M_0 = |y_0|, \quad M_1 = \max |y_1(x)|, \quad M = M_0 + M_1,$$

y observamos que $|y_0(x)| \leq M$ y $|y_1(x) - y_0(x)| \leq M$. A continuación, si $x_0 \leq x \leq b$, se deduce que

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f[t, y_1(t)] - f[t, y_0(t)]\} dt \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |f[t, y_1(t)] - f[t, y_0(t)]| dt \leq \\ &\leq K \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_0(t)| dt \leq \\ &\leq KM(x - x_0), \\ |y_3(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f[t, y_2(t)] - f[t, y_1(t)]\} dt \right| \leq \\ &\leq K \int_{x_0}^x |y_2(t) - y_1(t)| dt \leq \\ &\leq K^2 M \int_{x_0}^x (t - x_0) dt = K^2 M \frac{(x - x_0)^2}{2}, \end{aligned}$$

y en general

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq K^{n-1} M \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

El mismo argumento es válido para $a \leq x \leq x_0$, supuesto que $x - x_0$ se sustituye por $|x - x_0|$, así que

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &\leq K^{n-1} M \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!} \leq \\ &\leq K^{n-1} M \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

para todo x del intervalo y $n = 1, 2, \dots$ Concluimos que cada término de la serie (10) es menor o igual que el correspondiente término de la serie convergente de constantes

$$M + M + KM(b-a) + K^2 M \frac{(b-a)^2}{2!} + K^3 M \frac{(b-a)^3}{3!} + \dots,$$

de modo que (3) converge uniformemente sobre el intervalo $a \leq x \leq b$ a una función límite $y(x)$.

Igual que antes, el carácter uniforme de la convergencia implica que $\bar{y}(x)$ es una solución de (15) sobre todo el intervalo, y cuanto resta por probar es que no hay más soluciones. Si $\tilde{y}(x)$ fuese otra solución de (15) sobre el intervalo, vamos a demostrar que $y_n(x) \rightarrow \tilde{y}(x)$ para todo x cuando $n \rightarrow \infty$; y como también sabemos que $y_n(x) \rightarrow y(x)$, se deducirá que $\tilde{y}(x) = y(x)$. Comenzamos observando que $\bar{y}(x)$ es continua y satisface la ecuación

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \bar{y}(t)] dt.$$

Si $A = \max |\bar{y}(x) - y_0|$, entonces para $x_0 \leq x \leq b$ vemos que

$$\begin{aligned} |\bar{y}(x) - y_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f[t, \bar{y}(t)] - f[t, y_0(t)]\} dt \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |f[t, \bar{y}(t)] - f[t, y_0(t)]| dt \leq \\ &\leq K \int_{x_0}^x |\bar{y}(t) - y_0| dt \leq \\ &\leq KA(x - x_0), \\ |\bar{y}(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f[t, \bar{y}(t)] - f[t, y_1(t)]\} dt \right| \leq \\ &\leq K \int_{x_0}^x |\bar{y}(t) - y_1(t)| dt \leq \\ &\leq K^2 A \int_{x_0}^x (t - x_0) dt = K^2 A \frac{(x - x_0)^2}{2}, \end{aligned}$$

y en general

$$|\bar{y}(x) - y_n(x)| \leq K^n A \frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

Un resultado análogo se aplica en $a \leq x \leq x_0$, así que para todo x del intervalo tenemos

$$|\bar{y}(x) - y_n(x)| \leq K^n A \frac{|x - x_0|^n}{n!} \leq K^n A \frac{(b - a)^n}{n!}.$$

Como el término de la derecha tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, podemos concluir que $\bar{y}(x) = y(x)$ para todo x del intervalo, lo que completa la demostración.

PROBLEMAS

1. Sea (x_0, y_0) un punto arbitrario del plano y consideremos el problema de valores iniciales

$$y' = y^2, \quad y(x_0) = y_0.$$

Explicar por qué el Teorema A garantiza que este problema tiene una solución única en algún intervalo $|x - x_0| \leq h$. Como $f(x, y) = y^2$ y $\partial f / \partial y = 2y$ son continuas sobre todo el plano, uno siente la tentación de concluir que esa solución es válida en todo el plano. Examinando las soluciones en los puntos $(0, 0)$ y $(0, 1)$, probar que esta conclusión es falsa en ocasiones y que, por consiguiente, la inferencia es incorrecta.

2. Probar que $f(x, y) = y^{1/2}$

- (a) no satisface una condición de Lipschitz sobre el rectángulo $|x| \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$;
- (b) satisface una condición de Lipschitz sobre el rectángulo $|x| \leq 1$ y $c \leq y \leq d$, donde $0 < c < d$.

3. Probar que $f(x, y) = x^2|y|$ satisface una condición de Lipschitz sobre el rectángulo $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$, pero que $\partial f / \partial y$ no existe en muchos puntos de dicho rectángulo.

4. Demostrar que $f(x, y) = xy^2$

- (a) satisface una condición de Lipschitz sobre cualquier rectángulo $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$;
- (b) no satisface una condición de Lipschitz sobre ninguna banda $a \leq x \leq b$ y $-\infty < y < \infty$.

5. Demostrar que $f(x, y) = xy$

- (a) satisface una condición de Lipschitz sobre cualquier rectángulo $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$;
- (b) satisface una condición de Lipschitz sobre cualquier banda $a \leq x \leq b$ y $-\infty < y < \infty$;
- (c) no satisface una condición de Lipschitz sobre todo el plano.

6. Consideraremos el problema de valores iniciales

$$y' = |y|, \quad y(x_0) = y_0.$$

- (a) ¿Para qué puntos (x_0, y_0) implica el Teorema A que este problema tiene una solución única sobre algún intervalo $|x - x_0| \leq h$?
- (b) ¿Para qué puntos (x_0, y_0) tiene realmente este problema una solución única sobre algún intervalo $|x - x_0| \leq h$?

7. ¿Para qué puntos (x_0, y_0) implica el Teorema A que el problema de valores iniciales

$$y' = y|y|, \quad y(x_0) = y_0$$

tiene una solución única sobre algún intervalo $|x - x_0| \leq h$?

70. SISTEMAS. LA ECUACION LINEAL DE SEGUNDO ORDEN

El método de Picard de aproximaciones sucesivas es aplicable asimismo a sistemas de ecuaciones de primer orden. Por ejemplo, consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), & y(x_0) = y_0, \\ \frac{dz}{dx} = g(x, y, z), & z(x_0) = z_0, \end{cases} \quad (1)$$

donde f y g son funciones continuas en cierta región del espacio xyz que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) . Aquí usamos la notación diferencial para recalcar que x es la variable independiente. Una solución de tal sistema es, claro está, un par de funciones $y = y(x)$, $z = z(x)$ que satisfacen conjuntamente las condiciones impuestas por (1) sobre algún intervalo que contiene al punto x_0 . Como en el caso de una sola ecuación de primer orden, el sistema (1) es equivalente al sistema de ecuaciones integrales

$$\begin{cases} y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t), z(t)] dt, \\ z(x) = z_0 + \int_{x_0}^x g[t, y(t), z(t)] dt, \end{cases} \quad (2)$$

en el sentido de que las soluciones de (1), si existen, son precisamente las soluciones continuas de (2). Si intentamos resolver (2) por aproximaciones sucesivas comenzando con las funciones constantes

$$y_0(x) = y_0 \quad y \quad z_0(x) = z_0,$$

el método de Picard procede exactamente igual que antes. En el primer paso tenemos

$$\begin{cases} y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_0(t), z_0(t)] dt, \\ z_1(x) = z_0 + \int_{x_0}^x g[t, y_0(t), z_0(t)] dt; \end{cases}$$

en el segundo paso,

$$\begin{cases} y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_1(t), z_1(t)] dt, \\ z_2(x) = z_0 + \int_{x_0}^x g[t, y_1(t), z_1(t)] dt; \end{cases}$$

y así sucesivamente. Este procedimiento genera dos sucesiones de funciones $y_n(x)$ y $z_n(x)$. Bajo hipótesis apropiadas, los argumentos del Teorema 69-A se adaptan sin dificultad para probar que estas sucesiones convergen a una solución de (1) que existe y es única en algún intervalo $|x - x_0| \leq h$.

Ahora restringimos nuestra atención a un sistema lineal, en el que las funciones $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ son funciones lineales de y y de z . Es decir, consideramos un problema de valores iniciales de la forma

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = p_1(x)y + q_1(x)z + r_1(x), & y(x_0) = y_0, \\ \frac{dz}{dx} = p_2(x)y + q_2(x)z + r_2(x), & z(x_0) = z_0, \end{cases} \quad (3)$$

donde las seis funciones $p_i(x)$, $q_i(x)$ y $r_i(x)$ son continuas sobre un intervalo $a \leq x \leq b$ y x_0 es un punto de ese intervalo. Puesto que cada una de esas funciones es acotada para $a \leq x \leq b$, existe una constante K tal que $|p_i(x)| \leq K$ y $|q_i(x)| \leq K$ para $i = 1, 2$. Ahora es fácil ver que las funciones de la derecha en las ecuaciones diferenciales (3) satisfacen condiciones de Lipschitz de la forma

$$|f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| \leq K(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)$$

y

$$|g(x, y_1, z_1) - g(x, y_2, z_2)| \leq K(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|).$$

Exactamente igual que en la demostración del Teorema 69-B, estas condiciones se pueden utilizar para mostrar que (3) tiene una solución única sobre todo el intervalo $a \leq x \leq b$. De nuevo dejamos los detalles al cuidado del lector.

Estas observaciones acerca de los sistemas hacen posible dar una demostración sencilla del siguiente teorema básico que enunciamos al comienzo del Capítulo 3 y que ha desempeñado un papel discreto pero crucial en todo cuanto hemos hecho relativo a ecuaciones lineales de segundo orden.

Teorema A. Sean $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ funciones continuas sobre un intervalo $a \leq x \leq b$. Si x_0 es cualquier punto de ese intervalo e y_0, y'_0 son números arbitrarios, el problema de valores iniciales

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(x_0) = y'_0, \quad (4)$$

tiene una y sólo una solución $y = y(x)$ sobre el intervalo $a \leq x \leq b$.

Demostración. Si introducimos la variable $z = dy/dx$, es claro que toda solución de (4) proporciona una solución del sistema lineal

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, & y(x_0) = y_0, \\ \frac{dz}{dx} = -P(x)z - Q(x)y + R(x), & z(x_0) = y'_0, \end{cases} \quad (5)$$

y recíprocamente. Hemos visto que (5) tiene una solución única sobre el intervalo $a \leq x \leq b$, de manera que lo mismo es cierto para (4).

PROBLEMA

1. Resolver el siguiente problema de valores iniciales por el método de Picard y comparar el resultado con la solución exacta:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, & y(0) = 1, \\ \frac{dz}{dx} = -y, & z(0) = 0. \end{cases}$$

CATORCE

METODOS NUMERICOS

POR JOHN S. ROBERTSON

*Department of Mathematical Sciences,
U.S. Military Academy,
West Point, New York 10996-1786*

71. INTRODUCCION

Pese al amplio espectro de potentes métodos analíticos presentados a lo largo de este libro, en muchas ocasiones resulta ineludible recurrir a métodos numéricos en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, una solución exacta puede ser inalcanzable, o simplemente de escaso interés¹. Esta situación se presenta al construir soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden mediante series de potencias. En general, las series son buenas aproximaciones cerca de la condición inicial, pero los desarrollos de Taylor exigen pronto una cantidad de términos prohibitiva a distancias un poco mayores de ese punto. Para sistemas grandes de ecuaciones, puede existir una solución exacta (en forma vectorial) pero las manipulaciones algebraicas subsiguientes pueden llegar a ser abrumadoras. Además, no hay que considerar a las soluciones numéricas como un último recurso, ya que constituyen el caldo de cultivo de los matemáticos, una probeta en la que pueden llevar a cabo innumerables experimentos sobre su ecuación diferencial y, por poderes, sobre el propio fenómeno que intentan modelar².

¹ Para una reseña histórica detallada del papel que han jugado los métodos numéricos en su aplicación a las ecuaciones diferenciales, véase «Numerical Fluid Dynamics», la 1981 John von Neumann Lecture, por Garrett Birkhoff, publicada en *SIAM Review*, vol. 25, págs. 1-34 (1983).

² En 1965, N. J. Zabusky y M. D. Kruskal descubrieron los *solitones* precisamente de esta manera. Considerando una versión particular de una ecuación que gobierna el movimiento superficial de ondas en el agua y experimentando con su solución numérica, dedujeron la existencia de objetos matemáticos con propiedades verdaderamente sorprendentes. Los solitones y las ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento han sido uno de los aspectos más intensamente estudiados en las dos últimas décadas dentro de la física matemática.

Estos métodos numéricos se basan en dos aproximaciones, fundamentales pero *distintas*. En primer lugar, una ecuación diferencial se sustituye por una ecuación en diferencias, y el papel que desempeñaba una variable continua lo asume una variable discreta. Para que tal esquema sea eficaz, es importante comprender las condiciones bajo las cuales la solución de la ecuación en diferencias es próxima a la de la ecuación diferencial original. En segundo lugar, en prácticamente todos los ordenadores actuales la recta real se approxima mediante un subconjunto grande, pero finito, de números racionales. Limitarnos a sólo un subconjunto de racionales puede tener consecuencias nada obvias, y cruciales en ciertos casos: los errores de la máquina pueden llegar a producir auténticas catástrofes. Sea como fuere, las dos aproximaciones citadas permiten implementar las ecuaciones en diferencias sobre una variedad enorme de equipamiento computacional. Sin embargo, se cuentan multitud de anécdotas apócrifas sobre ingenieros que han efectuado costosos cálculos en potentes ordenadores para no obtener más que respuestas sin sentido. Queremos insistir en que las cuestiones de existencia y unicidad, discutidas en otra parte de este libro, son de vital importancia y deben consultarse siempre antes de nada. Aparte de éstos, otros problemas, tales como la inestabilidad numérica o la existencia de soluciones *espúreas*, pueden ser fuente de dificultades. A pesar de la abundancia de algoritmos bien contrastados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, el lector debe tener en cuenta la necesidad de mantenerse siempre alerta. Antes de acudir a la máquina, es prudente conocer algo acerca de la respuesta que uno está buscando. Es decir, el científico práctico ha de esforzarse por saber cuanto le sea posible sobre la solución. Por ejemplo, ¿es acotada?, ¿estable?, ¿periódica?, ¿cómo de grande o de pequeña se espera que sea la respuesta? Una atención cuidadosa ante estas cuestiones, tal como se presenta en los capítulos precedentes, le será útil al lector en lo que sigue³.

Con el fin de comprender lo que entendemos por una solución numérica de una ecuación diferencial, consideremos el sencillo problema de valores iniciales

$$y' = y, \quad y(0) = 1 \quad (1)$$

que admite la solución obvia $y = e^x$, a muchos efectos teóricos más que suficiente. Sin embargo, en una aplicación práctica podría ser necesario conocer el valor de la solución para $x = 0,5$, y el decimal 1,649 es probablemente mucho más útil que el símbolo $e^{0,5}$. En contraste con la solución teórica de (1), una solución numérica puede obtenerse de una tabla de valores de e^x o con una calculadora. En cualquier caso, el número así obtenido depende de nuestro conocimiento de la fórmula $y = e^x$.

³ Para una introducción histórica excelente sobre la evolución de los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales que tuvo lugar en las décadas en torno al desarrollo de los primeros ordenadores, véase Herman H. Goldstine, *The Computer from Pascal to von Neumann*, Princeton University Press, Princeton, 1972.

En este capítulo explicamos varios métodos para calcular una solución numérica aproximada de la forma

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Supondremos que este problema tiene una solución única, denotada por $y(x)$. Nuestros métodos consisten en procedimientos numéricos basados tan sólo en la información contenida en (2), y son completamente independientes de si se conoce o no una fórmula para $y(x)$. Estos métodos numéricos y otros análogos son de enorme utilidad para aquellos problemas de valores iniciales que no se saben resolver explícitamente, así como para aquellos que poseen soluciones formales exactas pero inmanejables en la práctica⁴.

Seamos un poco más concretos acerca de la naturaleza de nuestros métodos. No aproximaremos la solución exacta $y(x)$ para todo valor de x en cierto intervalo, sino sólo para una sucesión discreta de puntos que arranca de x_0 , digamos

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \dots, x_n = x_{n-1} + h,$$

donde h es un número positivo. Eso significa que queremos una aproximación y_1 al valor exacto $y(x_1)$, una aproximación y_2 al valor exacto $y(x_2)$, y así sucesivamente. Cada método numérico dará una regla para calcular y_{k+1} a partir de y_k ⁵. Como conocemos el valor inicial $y(x_0) = y_0$ (éste es exacto), podemos aplicar la regla con $k = 0$ para obtener y_1 , con $n = 1$ para obtener y_2 , etc. Nuestro objetivo es aplicar cada método con detalle suficiente como para que el lector sea capaz de aplicarlo por sí mismo si en alguna ocasión tiene necesidad de ello. Evitaremos, eso sí, los detalles relativos a la pléthora de calculadoras, ordenadores y lenguajes de programación existentes, por varias razones. En primer lugar, esas cuestiones es más conveniente dejarlas para textos especializados en la materia. En segundo lugar, la experiencia nos confirma que casi todos los estudiantes tienen cierta familiaridad con los fundamentos del cálculo y son capaces de escribir los programas necesarios para resolver los ejercicios de este capítulo. En cuanto a los medios, dejamos la elección al estudiante y a su profesor. Además, los avances en computación se producen a ritmo vertiginoso y nos parece superfluo embarullar el texto con detalles no matemáticos que correrían el riesgo de quedar obsoletos a la vuelta de muy poco tiempo.

Ilustraremos nuestros métodos aplicándolos al sencillo problema.

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1, \quad (3)$$

⁴ El notable matemático norteamericano R. W. Hamming dijo que «el propósito del cálculo es lograr intuiciones, no números». Aun con eso y con todo, es necesario algo más que intuiciones para construir un rascacielos o una nave espacial.

⁵ Estos son los llamados métodos de *paso único*. Existen también métodos multipaso en los que y_{k+1} depende no sólo de y_k , sino posiblemente de y_{k-1} y términos anteriores.

que llamaremos nuestro *banco de pruebas*. Esta ecuación diferencial es claramente lineal y admite la solución exacta

$$y = 2e^x - x - 1. \quad (4)$$

Hemos elegido (3) como banco de pruebas por dos motivos. Es tan simple que se le pueden aplicar los métodos numéricos a mano sin que queden oscurecidos los pasos principales por un inmenso fárrago de cálculos. Y, por otra parte, la solución exacta (4) se calcula fácilmente para varios x con ayuda de una calculadora de bolsillo, de modo que disponemos de los medios adecuados para juzgar la bondad de las soluciones aproximadas que los métodos numéricos vayan produciendo.

PROBLEMA

1. ¿Ha encontrado en otros cursos, o en otros libros (o se ha referido a ellos el profesor), ejemplos de soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales ordinarias? Ponga un ejemplo y discuta lo que ha oído o leído.

72. EL METODO DE EULER

Si integramos la ecuación diferencial (2) desde x_0 hasta $x_1 = x_0 + h$ y usamos la condición inicial $y(x_0) = y_0$, obtenemos

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx,$$

o sea,

$$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx. \quad (5)$$

Como la función incógnita $y = y(x)$ aparece en (5) bajo la integral, no podemos seguir adelante sin hacer algún tipo de aproximación para esa integral. Los diferentes tipos de aproximaciones corresponden a otros tantos métodos de resolución numérica de (2).

El método de Euler se obtiene de la más simple de todas las aproximaciones de la integral en (5). Es interesante considerarlo porque prepara el camino para comprender otros métodos más sofisticados. La idea es obtener y_1 , nuestra aproximación a $y(x_1)$, suponiendo que el integrando $f(x, y)$ en (5) varía tan poco sobre el intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$ que se comete un error muy pequeño al reemplazarlo por su valor $f(x_0, y_0)$ en el punto del extremo izquierdo. Eso equivale a

reemplazar en (5) el integrando por su polinomio de Taylor de orden cero, o sea,

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + R, \quad (6)$$

donde

$$R(x) = [f'(\xi, y(\xi)) + f_y(\xi, y(\xi))y'(\xi)](x - x_0),$$

donde R es el resto de Taylor, $f_y = \partial f / \partial y$ y $x_0 < \xi < x$. Puesto que $y'' = f' + f_y y'$, sustituyendo (6) en (5) se obtiene

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2} y''(\xi).$$

Suponemos que $h^2 y''(\xi)/2$ es «pequeño» en un sentido apropiado y lo despreciamos. Cuán pequeño es en general y, más concretamente, cuándo ese término es pequeño, son cuestiones importantes que discutiremos más tarde. (Véase Problema 6, Sección 73, relacionado con esto.) Despreciando ese término,

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \quad (7)$$

Ahora proseguimos obteniendo y_2 de y_1 por el mismo procedimiento, mediante la fórmula $y_2 = y_1 + hf(x, y)$; y en general tenemos

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k). \quad (8)$$

para $k = 0, 1, \dots, n$. El significado geométrico de estas fórmulas se ilustra en la Figura 101, donde la curva suave es la solución exacta desconocida que está

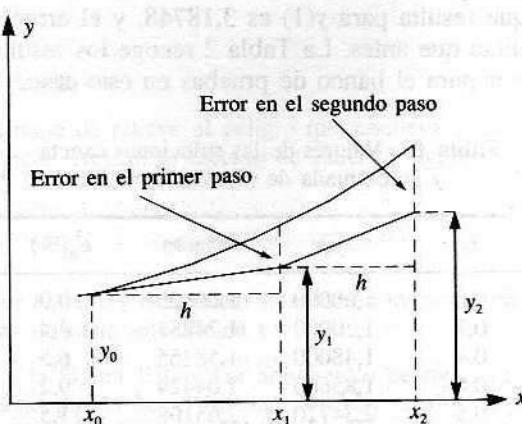


Figura 101

siendo aproximada por la línea quebrada (lineal a trozos) construida con (8). Para entender esa figura, recordemos que $f(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto inicial (x_0, y_0) . El punto y_1 se halla trazando un segmento recto que parte de (x_0, y_0) y tiene esa pendiente, y avanzando por él una distancia h en la dirección positiva de las x . Ese punto pasa a ser la segunda aproximación a la solución. La figura indica la distancia vertical entre la solución y la aproximación como el error en este primer paso. Una cantidad importante deducida de esto es el *error relativo total* \bar{E}_n en el n -ésimo paso, definido como

$$\bar{E}_n = \frac{|y(x_n) - y_n|}{|y(x_n)|}. \quad (9)$$

Se suele expresar como porcentaje y proporciona una forma cómoda de calibrar con qué grado de precisión se va efectuando la aproximación. A continuación, usando (x_1, y_1) se repite el proceso para obtener el próximo punto (x_2, y_2) , indicado también en la figura. La visualización geométrica del método de Euler sugiere que el error puede crecer muy rápidamente, cosa que ocurre con frecuencia.

Ilustramos el método de Euler aplicándolo a nuestro banco de pruebas (3). Aproximaremos la solución en los puntos $x_n = 0,2, 0,4, 0,6, 0,8$ y $1,0$ usando intervalos de longitud $h = 0,2$. Conviene disponer los cálculos como muestra la Tabla 1. En su primera línea, la condición inicial $y = 1$ cuando $x = 0$ determina la pendiente $y' = x + y = 1,00$. Como $h = 0,2$ e $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, el siguiente valor viene dado por $1,00 + 0,2(1,00) = 1,20$. Esta aproximación se lleva a la segunda línea de la tabla bajo y_n y se repite el proceso para hallar y_2 , que resulta ser 1,48. En la tabla (y en la mayoría de los ejemplos que seguirán) retenemos cinco cifras decimales, y el valor aproximante de $y(1)$ es 2,97664. El valor exacto calculado de (4) es 3,43656, de modo que el error viene a ser de un 13 por 100. Si efectuamos un cálculo análogo con $h = 0,1$, la aproximación que resulta para $y(1)$ es 3,18748, y el error se reduce a un 7 por 100, casi la mitad que antes. La Tabla 2 recoge los resultados intermedios del método de Euler para el banco de pruebas en este caso.

Tabla 1. Valores de las soluciones exacta y aproximada de (3) con $h = 0,2$

x_n	y_n	Exacto	$\bar{E}_n(\%)$
0,0	1,00000	1,00000	0,0
0,2	1,20000	1,24281	3,4
0,4	1,48000	1,58365	6,5
0,6	1,85600	2,04424	9,2
0,8	2,34720	2,65108	11,5
1,0	2,97664	3,43656	13,4

Tabla 2. Valores de las soluciones exacta
y aproximada de (3) con $h = 0,1$

x_n	y_n	Exacto	$\tilde{E}_n(\%)$
0,0	1,00000	1,00000	0,0
0,1	1,10000	1,11034	0,9
0,2	1,22000	1,24281	1,8
0,3	1,36200	1,39972	2,7
0,4	1,52820	1,58365	3,5
0,5	1,72102	1,79744	4,3
0,6	1,94312	2,04424	4,9
0,7	2,19743	2,32751	5,6
0,8	2,48718	2,65108	6,2
0,9	2,81590	3,01921	6,7
1,0	3,18748	3,43656	7,2

En consecuencia, podemos mejorar la precisión del método tomando valores más pequeños de h , aunque a expensas de más trabajo computacional. Aun así, pasado un cierto punto, la reducción del tamaño del paso no hará sino *empeorar* la situación, como pondremos de manifiesto en la próxima sección.

PROBLEMAS

En los problemas que se indican a continuación, usar el método de Euler con $h = 0,1$, $0,05$ y $0,01$ para estimar la solución en $x = 1$. Comparar los resultados con la solución *exacta* en cada caso y discutir la bondad (¡o maldad!) de la aproximación de Euler.

- $y' = 2x + 2y, y(0) = 1.$
- $y' = 1/y, y(0) = 1.$
- $y' = e^y, y(0) = 0.$
- $y' = y - \operatorname{sen} x, y(0) = -1.$
- $y' = (x + y - 1)^2, y(0) = 0.$
- Este problema pone de relieve el peligro que conlleva la utilización a ciegas de métodos numéricos. Aplicar el método de Euler al siguiente problema de valores iniciales:

$$y' = \sec^2 x, \quad y(0) = 0.$$

Usar como paso $h = 0,1$ y determinar la solución numérica en $x = 1$. Explicar por qué el problema no tiene solución en $x = 1$.

- Refiriéndonos a la Figura 101, y por argumentos geométricos, ¿para qué clase de soluciones exactas podría dar el método de Euler resultados precisos? ¿Dependen tales resultados de h en alguna medida? Elaborar dos ejemplos distintos que corroboren las ideas vertidas en la respuesta.

8. La ecuación diferencial ordinaria

$$y' = y(1 - y^2),$$

posee dos soluciones de equilibrio: $f_1 = 0$, que es inestable, y $f_2 = 1$, que es estable. Predecir qué *debe* ocurrir con la solución para una condición inicial $y(0) = 0,1$. A continuación, con $h = 0,1$, usar el método de Euler para aproximar la solución hasta $x = 3$. ¿Qué le ocurre a la solución numérica?

73. ERRORES

El concepto de *error* es crucial en el estudio de los métodos numéricos y le dedicaremos una cierta atención. Hemos mencionado en la sección anterior que la reducción del tamaño del paso en el método de Euler puede ser muy costosa. Ello se debe a dos causas. En primer lugar, el número de operaciones de cálculo es directamente proporcional al número de pasos necesarios, de manera que un aumento de la precisión implica un aumento del coste computacional. Y en segundo lugar, puede adquirir protagonismo el fenómeno conocido como error de redondeo, como consecuencia de que el ordenador sólo es capaz de representar una colección finita de números racionales.

Ejemplo. Examinemos qué ocurre en el banco de pruebas (3) si hacemos h demasiado pequeño. Supongamos que nuestra calculadora tiene nueve dígitos decimales de precisión. Sea $h = 10^{-10}$, un tamaño de paso muy pequeño que, en principio, debe conducir a respuestas muy precisas. Calculando por el método de Euler el primer paso, vemos que la calculadora da

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 10^{-10} = 1! \quad (10)$$

La última cantidad en (10) no es una errata. Debido a su limitada precisión, la calculadora representa y_1 como si fuera exactamente 1. Desgraciadamente, lo mismo sucede con y_2 . En este ejemplo, el método de Euler predeciría una solución *constante* al problema en cuestión. Los errores de redondeo han provocado una auténtica catástrofe numérica. Un análisis riguroso de los errores de redondeo cae fuera del alcance de este libro⁶. Por consiguiente, nos concentraremos exclusivamente en el error de *discretización* en el resto de este capítulo, dando por supuesto que los errores de redondeo son despreciables⁷.

El error de discretización local en el n -ésimo paso se define como $\varepsilon_n = y(x_n) - y_n$. (Esto presupone que y_n es exactamente correcto.) Como vimos en la sección anterior, esa cantidad viene dada por el método de Euler por

$$\varepsilon_k = \frac{y''(\xi)h^2}{2}, \quad (11)$$

⁶ Pero véase el Capítulo 1 del libro de R. L. Burden y J. D. Faires *Numerical Analysis*, 4.^a ed., PWS-Kent, Boston, 1989, para una discusión muy completa.

⁷ *Caveat computer.*

donde $x_{k-1} < \xi < x_k$. Nótese que sobre el intervalo $x_0 < x < x_n$ la cantidad $y''(x)$ está acotada por una constante positiva M independiente de h . Así pues, $|\varepsilon_k| \leq Mh^2/2$. Disminuir el tamaño del paso en un factor 2 reduce la cota de error para el error de discretización local en un factor 4, por ejemplo.

Por desgracia, la historia es algo más complicada que todo eso, porque nada prohíbe que esos errores locales se vayan acumulando al efectuar muchos pasos. Esto conduce a la noción de *error de discretización total* en el n -ésimo paso, E_n . Para estimarlo, observemos que para llevar la solución numérica desde x_0 hasta x_n se han efectuado n pasos, y que $n = (x_n - x_0)/h$. Poniéndonos en lo peor, es decir, suponiendo que todos los errores locales se suman y nunca se cancelan, obtenemos una cota heurística para el error total:

$$|E_n| \leq n \frac{Mh^2}{2} = (x_n - x_0) \frac{Mh}{2}.$$

Por tanto, para el método de Euler el error de discretización total no puede superar a una constante multiplicada por el tamaño del paso.

Como ilustración de todo esto, vamos a estimar los errores de discretización asociados con el problema (3). Antes de nada, nótese que $y'' = 2e^x$. Es fácil ver que sobre $0 \leq x \leq 1$, esa cantidad toma valor máximo en $x = 1$. Así pues, $|\varepsilon_n| \leq eh^2$. El error total está acotado a su vez por $|E_n| \leq eh$. Refiriéndonos a la Tabla 1 en la Sección 72, con $h = 0,2$, el error de discretización total en $x = 1$ es 0,46 (redondeado a dos decimales). La cota de error es $e(0,2) = 0,54$, y, como era de esperar, el error es menor que esa cota. Con $h = 0,1$, los números resultantes se pueden inferir de la Tabla 2 en la Sección 72. El error total es 0,25, mientras la cota de error es 0,27.

Finalizamos esta sección con algunas advertencias de tipo práctico. Puesto que en muchas ocasiones no se dispone de la solución exacta con la que calcular una cota de error, ¿cómo se las apaña uno para saber si un cierto h es ya «suficientemente pequeño»? Un método consiste en calcular la solución numérica varias veces, rebajando cada vez el valor de h a la mitad. Si los resultados ya no cambian dentro de la precisión requerida, una decisión razonable (no infalible) es dar por suficientemente pequeño a h . Análogamente, ¿cómo puede uno comprobar si h es «demasiado pequeño», es decir, que no se están inmiscuyendo de forma dramática en la solución los errores de redondeo? Una posibilidad consiste en repetir el cálculo utilizando aritmética de *doble precisión*. La mayoría de los lenguajes de programación y de los ordenadores están preparados para ello. Cuando al recalcular con doble precisión los resultados numéricos sufren modificaciones sustanciales, es casi seguro que se están produciendo errores de redondeo serios. Sin embargo, este criterio no es definitivo, porque siempre es posible que los errores no se manifiesten de manera explícita ni siquiera en doble precisión. No debe olvidarse jamás que por muy útiles que sean las calculadoras y los métodos numéricos, han de utilizarse con cuidado.

PROBLEMAS

En los siguientes problemas, usar la solución exacta junto con tamaños de paso $h = 0,2$ y $0,1$ para estimar el error de discretización total que se produce en el método de Euler en $x = 1$.

1. $y' = 2x + 2y$, $y(0) = 1$.
2. $y' = 1/y$, $y(0) = 1$.
3. $y' = e^y$, $y(0) = 0$.
4. $y' = y - \sin x$, $y(0) = -1$.
5. $y' = (x + y - 1)^2$, $y(0) = 0$.
6. Consideremos el problema $y' = \sin 3\pi x$, con $y(0) = 0$. Determinar la solución exacta y dibujar su gráfico en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Usar el método de Euler con $h = 0,2$ y $h = 0,1$ y representar los resultados respecto de los mismos ejes. A continuación, usar los resultados de esta sección para calcular un tamaño de paso que garantice un error total 0,01 en $x = 1$. Aplicar el método de Euler con ese tamaño de paso y comparar con la solución exacta. ¿Por qué es tan pequeño ese tamaño de paso?

74. UNA MEJORA DEL METODO DE EULER

Errores de la magnitud de un 13 o un 7 por 100 son obviamente insatisfactorios. Pueden reducirse tomando valores muy pequeños de h , pero eso conlleva los riesgos apuntados en la sección anterior, de manera que lo que procede es poner a punto métodos más seguros. Por ejemplo, es razonable esperar que mejoren las prestaciones si aproximamos el integrando de (5) por el promedio de sus dos valores en los extremos del intervalo, o sea, $1/2[f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1))]$. Eso equivale a usar la *regla trapezoidal* para aproximar la integral definida en (5). Sustituyendo se obtiene

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1))]. \quad (12)$$

La pega es que no conocemos $y(x_1)$. Ahora bien, si reemplazamos $y(x_1)$ por su valor aproximado hallado por el método de Euler, que denotamos por $z_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, entonces (12) adopta la forma ya útil siguiente:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, z_1)]. \quad (13)$$

En general,

$$y_{k+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, z_{k+1})]. \quad (14)$$

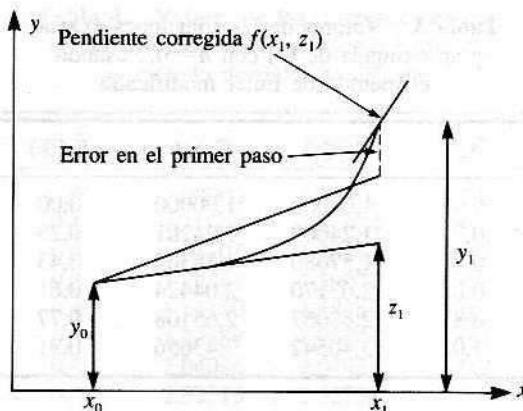


Figura 102

donde

$$z_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k). \quad (15)$$

Este método, usualmente llamado método mejorado de Euler o método de Heun⁸, *predice* primero y *corrige* después una estimación de y_k ; es un método sencillo de la clase de métodos numéricos conocidos como *métodos de predictor-corrector*. El error de truncación local para este método se puede demostrar que es $\epsilon_k = -y'''(\xi)h^3/12$ con $x_k \leq \xi \leq x_{k+1}$; en consecuencia, el error de truncación total es proporcional a h^2 , por lo que esperamos más precisión a igual tamaño del paso.

La Figura 102 permite visualizar el método mejorado de Euler. En primer lugar se predice el punto (x_1, z_1) usando el método de Euler. Se utiliza este punto para estimar la pendiente de la curva solución en x_1 . Se promedia entonces ésta con la estimación original de la pendiente en (x_0, y_0) para lograr una mejor predicción de la solución, digamos (x_1, y_1) .

Para ver cuánta mejora se consigue, apliquemos (14) y (15) al banco de pruebas (3) con tamaño de paso $h = 0,2$. Esas fórmulas se convierten en

$$z_{k+1} = y_k + 0,2(x_k + y_k),$$

e

$$y_{k+1} = y_k + 0,1[(x_k + y_k) + (x_{k+1} + z_{k+1})].$$

⁸ Karl Heun (1859-1929), contemporáneo de C. Runge y R. Kutta (q.v.), contribuyó a la mecánica clásica, a la teoría de funciones especiales y a los métodos de cuadratura de Gauss.

Tabla 3. Valores de las soluciones exacta y aproximada de (3) con $h = 0,2$ usando el método de Euler modificado

x_n	y_n	Exacto	$\bar{E}_n(\%)$
0,0	1,00000	1,00000	0,00
0,2	1,24000	1,24281	0,23
0,4	1,57680	1,58365	0,43
0,6	2,03170	2,04424	0,61
0,8	2,63067	2,65108	0,77
1,0	3,40542	3,43656	0,91

Para comenzar los cálculos ponemos $k = 0$ y usamos los valores iniciales $x_0 = 0,0$ e $y_0 = 1,0000$ de modo que

$$z_1 = 1,000 + 0,2(0,0 + 1,000) = 1,200$$

e

$$y_1 = 1,000 + 0,1[(0,0 + 1,000) + (0,2 + 1,200)] = 1,240.$$

La Tabla 3 recoge los valores aproximados de la solución obtenidos en los puntos $x_n = 0,2, 0,4, 0,8$ y $1,0$ siguiendo con ese proceso. El valor aproximado que resulta para $y(1)$ es 3,40542. Por consiguiente, el error con este método viene a ser del 1 por 100, una sustancial mejora frente al método de Euler a igual tamaño del paso.

Con un paso menor los resultados son todavía mejores. La Tabla 4 muestra los resultados del método mejorado de Euler aplicado a (3) con $h = 0,1$. El error relativo en $x = 1,0$ ha bajado hasta un 0,2 por 100. Puesto que el error de discretización total es proporcional a h^2 , el hecho de dividir por dos el tamaño del paso implica el resultado mencionado (un factor aproximadamente cuatro de reducción en el error).

Está claro que el nuevo método logra una notable mejora con una mínima complicación de la fórmula. Supongamos, sin embargo, que se desea todavía mayor precisión. Se conseguirá disminuyendo el tamaño del paso, pero, como en el método de Euler, los cálculos se complican y pueden aparecer errores inaceptablemente grandes. Hay dos direcciones en las que intentar una mejor precisión. Tal vez la más natural sea manejar aproximaciones más precisas para el integrando en (5). Esto se puede hacer esencialmente de dos maneras: usando un polinomio aproximante para $f(x, y)$ en el intervalo $[x_0, x_1]$ o subdividiendo el intervalo. Esta última opción da lugar a los métodos de Runge-Kutta que describimos en la próxima sección. La primera conduce a los métodos multitermino de Taylor, uno de los cuales vamos a exponer de forma breve.

Tabla 4. Valores de las soluciones exacta
y aproximada de (3) con $h = 0,1$ usando
el método de Euler modificado

x_n	y_n	Exacto	$\tilde{E}_n(\%)$
0,0	1,00000	1,00000	0,0
0,1	1,11000	1,11034	0,0
0,2	1,24205	1,24281	0,1
0,3	1,39847	1,39972	0,1
0,4	1,58180	1,58365	0,1
0,5	1,79489	1,79744	0,1
0,6	2,04086	2,04424	0,2
0,7	2,32315	2,32751	0,2
0,8	2,64558	2,65108	0,2
0,9	3,01236	3,01921	0,2
1,0	3,42816	3,43656	0,2

En primer lugar, hallamos el polinomio de Taylor de primer orden para $f(x, y)$ en torno al punto $x = x_0$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + [f'(x, y) + f_y(x, y)y'](x - x_0).$$

Seguidamente sustituimos esto en (5) y obtenemos el esquema de tres términos de Taylor:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0), \quad (16)$$

donde hemos usado que $y'' = [f(x, y)]'$. El error de truncación local es $\varepsilon_k = y'''(\xi)h^3/12$ donde $x_0 \leq \xi \leq x_n$. El error de truncación total es proporcional a h^2 . Por consiguiente, esperamos de (16) una calidad comparable a la de (14).

En la Tabla 5 pueden verse los resultados de aplicar (16) a (3) con $h = 0,1$. En $x = 1$, este método produce resultados idénticos (con los decimales aquí manejados) a los del método mejorado de Euler. Evidentemente, cabe lograr una mayor precisión reteniendo más términos de la serie de Taylor (véase Problema 8). La dificultad en este método proviene de la necesidad de evaluar derivadas de $f(x, y)$ de orden alto. Tales derivadas pueden hacerse inmanejables rápidamente, dando lugar a cálculos muy lentos para un problema dado. Más aún, $f(x, y)$ puede que no se conozca de forma analítica, sino, por ejemplo, mediante unos cuantos datos experimentales aislados o como subproducto, a su vez, de algún cálculo numérico. Con ello, los cálculos de derivadas altas tienen grandes posibilidades de ser muy inexactos, anulando las ventajas que se presumían a priori. De ahí que los métodos multitermino de Taylor se

Tabla 5. Valores de las soluciones exacta y aproximada de (3) con $h = 0,1$ usando el método de Taylor de tres términos

x_n	y_n	Exacto	$\bar{E}_n(\%)$
0,0	1,00000	1,00000	0,0
0,1	1,11000	1,11034	0,0
0,2	1,24205	1,24281	0,1
0,3	1,39847	1,39972	0,1
0,4	1,58180	1,58365	0,1
0,5	1,79489	1,79744	0,1
0,6	2,04086	2,04424	0,2
0,7	2,32315	2,32751	0,2
0,8	2,64558	2,65108	0,2
0,9	3,01236	3,01921	0,2
1,0	3,42816	3,43656	0,2

usen rara vez en la práctica. Existen formas mucho mejores de garantizar precisión con cálculos mucho menos costosos, como veremos en la sección siguiente.

PROBLEMAS

En los problemas que siguen, usar el método mejorado de Euler con $h = 0,1$, 0,05 y 0,01 para estimar la solución en $x = 1$. Comparar los resultados con la solución *exacta* y con los resultados obtenidos por medio del método de Euler en la Sección 72.

1. $y' = 2x + 2y$, $y(0) = 1$.
2. $y' = 1/y$, $y(0) = 1$.
3. $y' = e^y$, $y(0) = 0$.
4. $y' = y - \operatorname{sen} x$, $y(0) = -1$.
5. $y' = (x + y - 1)^2$, $y(0) = 0$.
6. Pensar algunos ejemplos en los que el método de Taylor con tres términos puede funcionar mejor que el de Euler mejorado. En cada ejemplo, explicar el porqué y, si es posible, usar una calculadora o un ordenador para ilustrar la situación.
7. Pensar algunos ejemplos en los que el método de Taylor con tres términos puede funcionar mal. En cada caso, describir el origen de la dificultad. Si fuera posible, usar una calculadora o un ordenador para ilustrar el problema.
8. Deducir una expresión para el método de Taylor de *cuatro términos*. Aplicarla al banco de pruebas (3) con un tamaño de paso $h = 0,1$ y calcular la solución hasta $x = 1$. ¿Se gana precisión respecto al método de Taylor de tres términos?

75. METODOS DE ORDEN SUPERIOR

Igual que los métodos mejorados de Euler discutidos en la Sección 74, los métodos de Runge-Kutta⁹ se pueden deducir de (5) usando una aproximación distinta para la integral. Consideremos la *regla de Simpson*. En este caso,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx = \frac{1}{6} [f(x_0, y_0) + 4f(x_{1/2}, y(x_{1/2})) + f(x_1, y_1)], \quad (17)$$

donde $x_{1/2} = x_0 + h/2$. Una deducción rigurosa del método de Runge-Kutta de cuarto orden nos llevaría demasiado tiempo. En lugar de enunciar escuetamente los resultados, vamos a hacer un desarrollo *intuitivo* de este esquema extraordinariamente importante en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias¹⁰.

De forma muy parecida a como hicimos con otras fórmulas de integración, hemos de estimar tanto $y_{1/2}$ como y_1 . La primera estimación de $y_{1/2}$ se obtiene por el método de Euler:

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{m_1}{2}, \quad (18)$$

donde $m_1 = hf(x_0, y_0)$. El factor 1/2 es necesario porque el tamaño del paso desde x_0 hasta $x_{1/2}$ es $h/2$. Para corregir esta estimación de $y_{1/2}$, la calculamos de nuevo del siguiente modo:

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{m_2}{2}, \quad (19)$$

donde ahora $m_2 = hf(x_0 + h/2, y_0 + m_1/2)$. A continuación, para predecir y_1 usamos esta última estimación de $y_{1/2}$ y el método de Euler:

$$y_1 = y_{1/2} + \frac{m_3}{2}, \quad (20)$$

⁹ Carl Runge (1856-1927) fue profesor de matemática aplicada en Göttingen desde 1904 hasta 1925. Es conocido por sus investigaciones sobre el efecto Zeeman y por un teorema que abrió el camino al famoso teorema de Thue-Siegel-Roth sobre ecuaciones diofánticas. Enseñó a esquiar a Hilbert. M. W. Kutta (1867-1944), otro matemático aplicado alemán, es recordado por su contribución a la teoría de Kutta-Joukowski del perfil de alas de aviones en aerodinámica.

¹⁰ Conviene señalar que se puede deducir más de un método de Runge-Kutta de cuarto orden. Véase B. Carnahan, H. A. Luther y J. O. Wilkes, *Applied Numerical Methods*, Wiley, Nueva York, 1969, págs. 361-363, para una breve e interesante discusión histórica de este punto.

donde $m_3 = hf(x_0 + h/2, y_0 + m_2/2)$. Finalmente hacemos $m_4 = hf(x + h, y_0 + m_3)$. El método de Runge-Kutta se obtiene entonces sustituyendo cada una de estas estimaciones en (17), lo que lleva a

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4). \quad (21)$$

Tal como sucedía con los métodos precedentes, también éste admite extensión a cualquier número de puntos en la malla de forma natural. En cada paso, calculamos primero los cuatro números m_1, \dots, m_4 :

$$m_1 = hf(x_k, y_k),$$

$$m_2 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_1}{2}\right),$$

$$m_3 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_2}{2}\right),$$

$$m_4 = hf(x_k + h, y_k + m_3).$$

Entonces y_{k+1} viene dado por

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4). \quad (22)$$

Este potente método es capaz de conseguir precisiones altas sin tener que tomar h tan pequeño como para hacer excesiva la tarea computacional o que los errores de redondeo planteen serias dificultades. El error de truncación local es $\epsilon_k = -y''(\xi)h^5/180$ donde $x_0 \leq x \leq x_n$ y el total es proporcional a h^4 . He aquí una buena razón de su gran precisión.

Vamos a aproximar ahora $y(1)$ en nuestro problema (3) aplicando (22). Con $h = 1$, de modo que se requiere un único paso, tenemos

$$m_1 = 1(0 + 1) = 1,$$

$$m_2 = 1(0 + 0,5 + 1 + 0,5) = 2,$$

$$m_3 = 1(0 + 0,5 + 1 + 1) = 2,5,$$

$$m_4 = 1(0 + 1 + 1 + 2,5) = 4,5,$$

luego

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(1 + 4 + 5 + 4,5) = 3,417.$$

Tabla 6. Valores de las soluciones exacta y aproximada de (3) con $h = 0,2$ usando el método de Runge-Kutta

x_n	y_n	Exacto	$\bar{E}_n(\%)$
0,0	1,00000	1,00000	0,00000
0,2	1,24280	1,24281	0,00044
0,4	1,58364	1,58365	0,00085
0,6	2,04421	2,04424	0,00125
0,8	2,65104	2,65108	0,00152
1,0	3,43650	3,43656	0,00179

¡Esta aproximación es incluso mejor que la del método mejorado de Euler con $h = 0,2$! En la Tabla 6 se muestra el resultado de aplicar el método de Runge-Kutta al banco de pruebas con $h = 0,2$. Nótese que nuestro valor aproximado para $y(1)$ es 3,43650, que coincide con el exacto en cuatro cifras decimales. El error relativo es mucho menor, sin llegar al 0,2 por 100 en este caso. La Tabla 7 prueba que con una longitud de paso igual a la mitad de la anterior los resultados mejoran aún más. Con $h = 0,1$, las soluciones exacta y aproximada coinciden en todas las cifras decimales retenidas y el error relativo al final del cálculo es ahora menor que el 0,02 por 100, ¡un buen resultado, sin duda!

PROBLEMAS

En los siguientes problemas, usar el método de Runge-Kutta con $h = 0,1, 0,05$ y $0,01$ para estimar la solución en $x = 1$. Comparar los resultados con la solución *exacta* y con

Tabla 7. Valores de las soluciones exacta y aproximada de (3) con $h = 0,1$ usando el método de Runge-Kutta

x_n	y_n	Exacto	$\bar{E}_n(\%)$
0,0	1,00000	1,00000	0,00000
0,1	1,11034	1,11034	0,00002
0,2	1,24281	1,24281	0,00003
0,3	1,39972	1,39972	0,00004
0,4	1,58365	1,58365	0,00006
0,5	1,79744	1,79744	0,00007
0,6	2,04424	2,04424	0,00008
0,7	2,32750	2,32751	0,00009
0,8	2,65108	2,65108	0,00010
0,9	3,01920	3,01921	0,00011
1,0	3,43656	3,43656	0,00012

los resultados obtenidos en la Sección 72, con el método de Euler, y en la Sección 74, con el método de Euler mejorado.

1. $y' = 2x + 2y, y(0) = 1.$
2. $y' = 1/y, y(0) = 1.$
3. $y' = e^y, y(0) = 0.$
4. $y' = y - \sin x, y(0) = -1.$
5. $y' = (x + y - 1)^2, y(0) = 0.$
6. ¿Existen otras reglas numéricas de integración que puedan ser utilizadas para generar métodos tan precisos como el de Runge-Kutta o incluso más? Hallar una e intentar elaborar los pasos necesarios para construir un algoritmo. Experimentar el resultado aplicándolo al banco de pruebas y discutir lo que se obtenga.
7. Usar el método de Runge-Kutta con $h = 0,2$ para resolver la ecuación $t^2y'' - 3ty' + 3y = 1, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$

Determinar la solución exacta y comparar con el resultado obtenido. ¿Tiene solución la ecuación diferencial en $t = 0$? ¿Cómo podría emplearse el método de Runge-Kutta para calcular la solución allí?

76. SISTEMAS

Hasta este momento nuestros métodos numéricos se han referido a problemas de valores iniciales de primer orden. Muchos problemas importantes en la práctica se formulan como ecuaciones de segundo orden o de orden superior (por ejemplo, los de vibraciones en mecánica), o directamente como sistemas de ecuaciones (tal como el sistema predador-presa). Es natural, por tanto, extender en cuanto sea posible esos métodos para poder cubrir estos tipos de situaciones.

Como $d^2y/dt^2 = f(t, y, dy/dt)$ se puede transformar en el sistema de ecuaciones de primer orden $dy/dt = x$ y $dx/dt = f(t, x, y)$, es costumbre transformar *todas* las ecuaciones diferenciales de orden superior en sistemas de primer orden. En esta sección presentamos fórmulas dirigidas a sistemas de dos ecuaciones de primer orden, pero los resultados son generalizables sin gran dificultad al caso de más de dos ecuaciones. Queremos hacer notar que las situaciones realistas en las aplicaciones en física e ingeniería, que emplean modelos con complicados sistemas de ecuaciones diferenciales, se resuelven casi siempre con métodos muy parecidos a los que aquí estamos a punto de exponer (aunque con un mayor grado de sofisticación).

Nuestro objetivo es formular métodos para generar soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones del tipo:

$$x' = f(t, x, y), \tag{23}$$

$$y' = g(t, x, y), \tag{24}$$

con condiciones iniciales

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (25)$$

Suponemos, claro está, que las funciones f y g son suficientemente buenas como para que exista solución única a (23), (24) y (25)¹¹. Al igual que en la sección anterior, pretendemos construir soluciones aproximadas x_n e y_n de ese sistema en los puntos $t = t_0, t_1 = t_0 + h, \dots, t_n = t_0 + nh$.

El método de Euler adopta una forma muy similar en este caso:

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k, y_k), \quad (26)$$

$$y_{k+1} = y_k + hg(t_k, x_k, y_k), \quad (27)$$

donde $k = 0, 1, \dots, n - 1$. La expresión para el error local de truncación es más complicada para el método de Euler en este caso, pero sigue siendo cierto que el error de discretización total es proporcional a h .

Consideremos la siguiente ecuación diferencial lineal, no homogénea, de segundo orden:

$$\frac{dy^2}{dt^2} + 4y = \cos t \quad (28)$$

con condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$. Cabe pensar en la ecuación (28) como modelo para un par masa-muelle sin amortiguamiento, sometido a una fuerza exterior sinusoidal. En el instante $t = 0$ la masa está en su posición de equilibrio sin velocidad inicial. La solución exacta de (28) es

$$y = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t).$$

Para replantear el problema en forma de sistema, hacemos $y' = x$, con lo que

$$x' = -4y + \cos t, \quad (29)$$

$$y' = x, \quad (30)$$

con condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 0$. La Tabla 8 contiene los resultados¹² para este sistema sobre el intervalo $0 \leq t \leq 1$, obtenidos mediante el método de Euler con $h = 0.1$. Nótese que el error relativo para y empieza siendo muy grande, decrece hasta un valor más bien pequeño, y de nuevo comienza a crecer. Véase el Problema 5 para un análisis de este fenómeno.

¹¹ Véase el Capítulo 11.

¹² Esta tabulación convencerá (si necesario fuera) a quien intente hacer los cálculos a mano, de que no hay nada como un ordenador, en conjunción con un buen lenguaje de programación, para tal fin. Imagíñese lo que sería tiempo atrás (antes de la Segunda Guerra Mundial), cuando la casi totalidad de los cálculos en ingeniería se efectuaban con lápiz, papel y, en todo caso, una calculadora.

Tabla 8. Valores de las soluciones exacta y aproximada de (29) y (30) con $h = 0,1$ usando el método de Euler

t_n	x_n	y_n	x exacto	y exacto	E_n para y (%)
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	—
0,1	0,10000	0,00000	0,09917	0,00498	100
0,2	0,19950	0,01000	0,19339	0,01967	49
0,3	0,29351	0,02995	0,27792	0,04333	31
0,4	0,37706	0,05930	0,34843	0,07478	21
0,5	0,44545	0,09701	0,40117	0,11243	14
0,6	0,49440	0,14155	0,43315	0,15433	8,3
0,7	0,52032	0,19099	0,44223	0,19829	3,7
0,8	0,52040	0,24302	0,42726	0,24197	0,4
0,9	0,49286	0,29506	0,38812	0,28294	4,3
1,0	0,43700	0,34435	0,32571	0,31882	8,0

El método de Runge-Kutta para este sistema es

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6}(\mu_{k1} + \mu_{k2} + \mu_{k3} + \mu_{k4}), \quad (31)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(v_{k1} + v_{k2} + v_{k3} + v_{k4}), \quad (32)$$

donde

$$\mu_{k1} = hf(t_k, x_k, y_k),$$

$$v_{k1} = hg(t_k, x_k, y_k),$$

$$\mu_{k2} = hf\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{\mu_{k1}}{2}, y_k + \frac{v_{k1}}{2}\right),$$

$$v_{k2} = hg\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{\mu_{k1}}{2}, y_k + \frac{v_{k1}}{2}\right),$$

$$\mu_{k3} = hf\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{\mu_{k2}}{2}, y_k + \frac{v_{k2}}{2}\right),$$

$$v_{k3} = hg\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{\mu_{k2}}{2}, y_k + \frac{v_{k2}}{2}\right),$$

$$\mu_{k4} = hf(t_k + h, x_k + \mu_{k3}, y_k + v_{k3}),$$

$$v_{k4} = hg(t_k + h, x_k + \mu_{k3}, y_k + v_{k3}).$$

Tabla 9. Valores de las soluciones exacta y aproximada de (29) y (30) con $h = 0,1$ usando el método de Runge-Kutta

t_n	x_n	y_n	x exacto	y exacto	E_n para y (%)
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	—
0,1	0,09917	0,00498	0,09917	0,00498	0,0006
0,2	0,19339	0,01967	0,19339	0,01967	0,0018
0,3	0,27792	0,04333	0,27792	0,04333	0,0022
0,4	0,34843	0,07478	0,34843	0,07478	0,0023
0,5	0,40117	0,11242	0,40117	0,11243	0,0024
0,6	0,43314	0,15432	0,43315	0,15433	0,0024
0,7	0,44223	0,19829	0,44223	0,19829	0,0024
0,8	0,42726	0,24196	0,42726	0,24197	0,0223
0,9	0,38813	0,28293	0,38812	0,28294	0,0022
1,0	0,32571	0,31881	0,32571	0,31882	0,0021

El error de discretización total para este Runge-Kutta más general continúa siendo proporcional a h^4 . La solución numérica de (29) y (30) con tamaño de paso $h = 0,1$ viene recogida en la Tabla 9. Observemos que el error relativo es notablemente menor que el del método de Euler de la Tabla 8 y que, además, el error relativo no exhibe el mismo grado de fluctuación que en ese caso.

PROBLEMAS

1. Usar el método de Euler con paso $h = 0,2$ para evaluar la solución de $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$ en $t = 0,2$ y $t = 0,4$. Comparar el resultado con la solución exacta.
2. Usar el método de Euler con paso $h = 0,1$ para evaluar la solución del siguiente sistema de ecuaciones en $t = 0,5$:

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= x(1-x),\end{aligned}$$

con $x(0) = y(0) = 1$.

3. Usar el método de Runge-Kutta (¡y un ordenador!) para calcular la solución de $y'' - y(1-y)y' + y = 0$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$, en $t = 1$. Utilizar tamaños de paso 0,5, 0,2 y 0,1.
4. Generalizar la formulación del método de Euler a un sistema de *tres* ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
5. Usando los resultados recogidos en la Tabla 8, dibujar el gráfico de y_n e y respecto a t_n . Explicar la fluctuación del error relativo. ¿Se produce el mismo comportamiento del error para x_n y x ? ¿Por qué razón no se comporta así el error del Runge-Kutta? (véase Tabla 9).

TABLAS NUMERICAS

Tabla 1. Funciones trigonométricas

Angulo		Seno	Coseno	Tangente	Angulo		Seno	Coseno	Tangente
Grados	Radianes				Grados	Radianes			
0	0,000	0,000	1,000	0,000	46	0,803	0,719	0,695	1,036
1	0,017	0,017	1,000	0,017	47	0,820	0,731	0,682	1,072
2	0,035	0,035	0,999	0,035	48	0,838	0,743	0,669	1,111
3	0,052	0,052	0,999	0,052	49	0,855	0,755	0,656	1,150
4	0,070	0,070	0,998	0,070	50	0,873	0,766	0,643	1,192
5	0,087	0,087	0,996	0,087	51	0,890	0,777	0,629	1,235
6	0,105	0,105	0,995	0,105	52	0,908	0,788	0,616	1,280
7	0,122	0,122	0,993	0,123	53	0,925	0,799	0,602	1,327
8	0,140	0,139	0,990	0,141	54	0,942	0,809	0,588	1,376
9	0,157	0,156	0,988	0,158	55	0,960	0,819	0,574	1,428
10	0,175	0,174	0,985	0,176	56	0,977	0,829	0,559	1,483
11	0,192	0,191	0,982	0,194	57	0,995	0,839	0,545	1,540
12	0,209	0,208	0,978	0,213	58	1,012	0,848	0,530	1,600
13	0,227	0,225	0,974	0,231	59	1,030	0,857	0,515	1,664
14	0,244	0,242	0,970	0,249	60	1,047	0,866	0,500	1,732
15	0,262	0,259	0,966	0,268	61	1,065	0,875	0,485	1,804
16	0,279	0,276	0,961	0,287	62	1,082	0,883	0,469	1,881
17	0,297	0,292	0,956	0,306	63	1,100	0,891	0,454	1,963
18	0,314	0,309	0,951	0,325	64	1,117	0,899	0,438	2,050
19	0,332	0,326	0,946	0,344	65	1,134	0,906	0,423	2,145
20	0,349	0,342	0,940	0,364	66	1,152	0,914	0,407	2,246
21	0,367	0,358	0,934	0,384	67	1,169	0,921	0,391	2,356
22	0,384	0,375	0,927	0,404	68	1,187	0,927	0,375	2,475
23	0,401	0,391	0,921	0,424	69	1,204	0,934	0,358	2,605
24	0,419	0,407	0,914	0,445	70	1,222	0,940	0,342	2,748
25	0,436	0,423	0,906	0,466	71	1,239	0,946	0,326	2,904
26	0,454	0,438	0,899	0,488	72	1,257	0,951	0,309	3,078
27	0,471	0,454	0,891	0,510	73	1,274	0,956	0,292	3,271
28	0,489	0,469	0,883	0,532	74	1,292	0,961	0,276	3,487
29	0,506	0,485	0,875	0,554	75	1,309	0,966	0,259	3,732
30	0,524	0,500	0,866	0,577	76	1,326	0,970	0,242	4,011
31	0,541	0,515	0,857	0,601	77	1,344	0,974	0,225	4,332
32	0,559	0,530	0,848	0,625	78	1,361	0,978	0,208	4,705
33	0,576	0,545	0,839	0,649	79	1,379	0,982	0,191	5,145
34	0,593	0,559	0,829	0,675	80	1,396	0,985	0,174	5,671
35	0,611	0,574	0,819	0,700	81	1,414	0,988	0,156	6,314
36	0,628	0,588	0,809	0,727	82	1,431	0,990	0,139	7,115
37	0,646	0,602	0,799	0,754	83	1,449	0,993	0,122	8,144
38	0,663	0,616	0,788	0,781	84	1,466	0,995	0,105	9,514
39	0,681	0,629	0,777	0,810	85	1,484	0,996	0,087	11,43
40	0,698	0,643	0,766	0,839	86	1,501	0,998	0,070	14,30
41	0,716	0,656	0,755	0,869	87	1,518	0,999	0,052	19,08
42	0,733	0,669	0,743	0,900	88	1,536	0,999	0,035	28,64
43	0,750	0,682	0,731	0,933	89	1,553	1,000	0,017	57,29
44	0,768	0,695	0,719	0,966	90	1,571	1,000	0,000	
45	0,785	0,707	0,707	1,000					

Tabla 2. Funciones exponenciales

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0,00	1,0000	1,0000	2,5	12,182	0,0821
0,05	1,0513	0,9512	2,6	13,464	0,0743
0,10	1,1052	0,9048	2,7	14,880	0,0672
0,15	1,1618	0,8607	2,8	16,445	0,0608
0,20	1,2214	0,8187	2,9	18,174	0,0550
0,25	1,2840	0,7788	3,0	20,086	0,0498
0,30	1,3499	0,7408	3,1	22,198	0,0450
0,35	1,4191	0,7047	3,2	24,533	0,0408
0,40	1,4918	0,6703	3,3	27,113	0,0369
0,45	1,5683	0,6376	3,4	29,964	0,0334
0,50	1,6487	0,6065	3,5	33,115	0,0302
0,55	1,7333	0,5769	3,6	36,598	0,0273
0,60	1,8221	0,5488	3,7	40,447	0,0247
0,65	1,9155	0,5220	3,8	44,701	0,0224
0,70	2,0138	0,4966	3,9	49,402	0,0202
0,75	2,1170	0,4724	4,0	54,598	0,0183
0,80	2,2255	0,4493	4,1	60,340	0,0166
0,85	2,3396	0,4274	4,2	66,686	0,0150
0,90	2,4596	0,4066	4,3	73,700	0,0136
0,95	2,5857	0,3867	4,4	81,451	0,0123
1,0	2,7183	0,3679	4,5	90,017	0,0111
1,1	3,0042	0,3329	4,6	99,484	0,0101
1,2	3,3201	0,3012	4,7	109,95	0,0091
1,3	3,6693	0,2725	4,8	121,51	0,0082
1,4	4,0552	0,2466	4,9	134,29	0,0074
1,5	4,4817	0,2231	5	148,41	0,0067
1,6	4,9530	0,2019	6	403,43	0,0025
1,7	5,4739	0,1827	7	1096,6	0,0009
1,8	6,0496	0,1653	8	2981,0	0,0003
1,9	6,6859	0,1496	9	8103,1	0,0001
2,0	7,3891	0,1353	10	22026	0,00005
2,1	8,1662	0,1225			
2,2	9,0250	0,1108			
2,3	9,9742	0,1003			
2,4	11,023	0,0907			

Tabla 3. Logaritmos naturales ($\ln x = \log_e x$)

Esta tabla contiene los logaritmos en base e de los números entre 1 y 10. Para obtener los logaritmos naturales de otros números, hacer uso de las fórmulas:

$$\ln(10^r x) = \ln x + \ln 10^r \quad \ln\left(\frac{x}{10^r}\right) = \ln x - \ln 10^r$$

$$\ln 10 = 2,302585$$

$$\ln 10^2 = 4,605170$$

$$\ln 10^3 = 6,907755$$

$$\ln 10^4 = 9,210340$$

$$\ln 10^5 = 11,512925$$

$$\ln 10^6 = 13,815511$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,00000	0995	1980	2956	3922	4879	5827	6766	7696	8618
1,1	0,09531	*0436	*1333	*2222	*3103	*3976	*4842	*5700	*6551	*7395
1,2	0,18232	9062	9885	*0701	*1511	*2314	*3111	*3902	*4686	*5464
1,3	0,26236	7003	7763	8518	9267	*0010	*0748	*1481	*2208	*2930
1,4	0,33647	4359	5066	5767	6464	7156	7844	8526	9204	9878
1,5	0,40547	1211	1871	2527	3178	3825	4469	5108	5742	6373
1,6	0,47000	7623	8243	8858	9470	*0078	*0682	*1282	*1879	*2473
1,7	0,53063	3649	4232	4812	5389	5962	6531	7098	7661	8222
1,8	0,58779	9333	9884	*0432	*0977	*1519	*2078	*2594	*3127	*3658
1,9	0,64185	4710	5233	5752	6269	6783	7294	7803	8310	8813
2,0	0,69315	9813	*0310	*0804	*1295	*1784	*2271	*2755	*3237	*3716
2,1	0,74194	4669	5142	5612	6081	6547	7011	7473	7932	8390
2,2	0,78846	9299	9751	*0200	*0648	*1093	*1536	*1978	*2418	*2855
2,3	0,83291	3725	4157	4587	5015	5442	5866	6289	6710	7129
2,4	0,87547	7963	8377	8789	9200	9609	*0016	*0422	*0826	*1228
2,5	0,91629	2028	2426	2828	3216	3609	4001	4391	4779	5166
2,6	0,95551	5935	6317	6698	7078	7456	7833	8208	8582	8954
2,7	0,99325	9695	*0063	*0430	*0796	*1160	*1523	*1885	*2245	*2604
2,8	1,02962	3318	3674	4028	4380	4732	5082	5431	5779	6126
2,9	1,06471	6815	7158	7500	7841	8181	8519	8856	9192	9527
3,0	1,09861	*0194	*0526	*0856	*1186	*1514	*1841	*2168	*2493	*2817
3,1	1,13140	3462	3783	4103	4422	4740	5057	5373	5688	6002
3,2	1,16315	6627	6938	7248	7557	7865	8173	8479	8784	9089
3,3	1,19392	9695	9996	*0297	*0597	*0896	*1194	*1491	*1788	*2083
3,4	1,22378	2671	2964	3256	3547	3837	4127	4415	4703	4990
3,5	1,25276	5562	5846	6130	6413	6695	6976	7257	7536	7815
3,6	1,28093	8371	8647	8923	9198	9473	9746	*0019	*0291	*0563
3,7	1,30833	1103	1372	1641	1909	2176	2442	2708	2972	3237
3,8	1,33500	3763	4025	4286	4547	4807	5067	5325	5584	5841
3,9	1,36098	6354	6609	6864	7118	7372	7624	7877	8128	8379
4,0	1,38629	8879	9128	9377	9624	9872	*0118	*0364	*0610	*0854
4,1	1,41099	1342	1585	1828	2070	2311	2552	2792	3031	3270
4,2	1,43508	3746	3984	4220	4456	4692	4927	5161	5395	5629
4,3	1,45862	6094	6326	6557	6787	7018	7247	7476	7705	7933
4,4	1,48160	8387	8614	8840	9065	9290	9515	9739	9962	*0185
4,5	1,50408	0630	0851	1072	1293	1513	1732	1951	2170	2388
4,6	1,52606	2823	3039	3256	3471	3687	3902	4116	4330	4543
4,7	1,54756	4969	5181	5393	5604	5814	6025	6235	6444	6653
4,8	1,56862	7070	7277	7485	7691	7898	8104	8309	8515	8719
4,9	1,58924	9127	9331	9534	9737	9939	*0141	*0342	*0543	*0744
5,0	1,60944	1144	1343	1542	1741	1939	2137	2334	2531	2728
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Nota: El * indica que los dos primeros dígitos son los del comienzo de la siguiente fila.

Tabla 3. Logaritmos naturales ($\ln x = \log_e x$) (continuación)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	1,60944	1144	1343	1542	1741	1939	2137	2334	2531	2728
5,1	1,62924	3120	3315	3511	3705	3900	4094	4287	4481	4673
5,2	1,64866	5058	5250	5441	5632	5823	6013	6203	6393	6582
5,3	1,66771	6959	7147	7335	7523	7710	7896	8083	8269	8455
5,4	1,68640	8825	9010	9194	9378	9562	9745	9928	*0111	*0293
5,5	1,70475	0656	0838	1019	1199	1380	1560	1740	1919	2098
5,6	1,72277	2455	2633	2811	2988	3166	3342	3519	3695	3871
5,7	1,74047	4222	4397	4572	4746	4920	5094	5267	5440	5613
5,8	1,75786	5958	6130	6302	6473	6644	6815	6985	7156	7326
5,9	1,77495	7665	7843	8002	8171	8339	8507	8675	8842	9009
6,0	1,79176	9342	9509	9675	9840	*0006	*0171	*0336	*0500	*0665
6,1	1,80829	0993	1156	1319	1482	1645	1808	1970	2132	2294
6,2	1,82455	2616	2777	2938	3098	3258	3418	3578	3737	3896
6,3	1,84055	4214	4372	4530	4688	4845	5003	5160	5317	5473
6,4	1,85630	5786	5942	6097	6253	6408	6563	6718	6872	7026
6,5	1,87180	7334	7487	7641	7794	7947	8099	8251	8403	8555
6,6	1,88707	8858	9010	9160	9311	9462	9612	9762	9912	*0061
6,7	1,90211	0360	0509	0658	0806	0954	1102	1250	1398	1545
6,8	1,91692	1839	1986	2132	2279	2425	2571	2716	2862	3007
6,9	1,93152	3297	3442	3586	3730	3874	4018	4162	4305	4448
7,0	1,94591	4734	4876	5019	5161	5303	5445	5586	5727	5869
7,1	1,96009	6150	6291	6431	6571	6711	6851	6991	7130	7269
7,2	1,97408	7547	7685	7824	7962	8100	8238	8376	8513	8650
7,3	1,98787	8924	9061	9198	9334	9470	9606	9742	9877	*0013
7,4	2,00148	0283	0418	0553	0687	0821	0956	1089	1223	1357
7,5	2,01490	1624	1757	1890	2022	2155	2287	2419	2551	2683
7,6	2,02815	2946	3078	3209	3340	3471	3601	3732	3862	3992
7,7	2,04122	4252	4381	4511	4640	4769	4898	5027	5156	5284
7,8	2,05412	5540	5668	5796	5924	6051	6179	6306	6433	6560
7,9	2,06686	6813	6939	7065	7191	7317	7443	7568	7694	7819
8,0	2,07944	8069	8194	8318	8443	8567	8691	8815	8939	9063
8,1	2,09186	9310	9433	9556	9679	9802	9924	*0047	*0169	*0291
8,2	2,10413	0535	0657	0779	0900	1021	1142	1263	1384	1505
8,3	2,11626	1746	1866	1986	2106	2226	2346	2465	2585	2704
8,4	2,12823	2942	3061	3180	3298	3417	3535	3653	3771	3889
8,5	2,14007	4124	4242	4359	4476	4593	4710	4827	4943	5060
8,6	2,15176	5292	5409	5524	5640	5756	5871	5987	6102	6217
8,7	2,16332	6447	6562	6677	6791	6905	7020	7134	7248	7361
8,8	2,17475	7589	7702	7816	7929	8042	8155	8267	8380	8493
8,9	2,18605	8717	8830	8942	9054	9165	9277	9389	9500	9611
9,0	2,19722	9834	9944	*0055	*0166	*0276	*0387	*0497	*0607	*0717
9,1	2,20827	0937	1047	1157	1266	1375	1485	1594	1703	1812
9,2	2,21920	2029	2138	2246	2354	2462	2570	2678	2786	2894
9,3	2,23001	3109	3216	3324	3431	3538	3645	3751	3858	3965
9,4	2,24071	4177	4284	4390	4496	4601	4707	4813	4918	5024
9,5	2,25129	5234	5339	5444	5549	5654	5759	5863	5968	6072
9,6	2,26176	6280	6384	6488	6592	6696	6799	6903	7006	7109
9,7	2,27213	7316	7419	7521	7624	7727	7829	7932	8034	8136
9,8	2,28238	8340	8442	8544	8646	8747	8849	8950	9051	9152
9,9	2,29253	9354	9455	9556	9657	9757	9858	9958	*0058	*0158
10,0	2,30259	0358	0458	0558	0658	0757	0857	0956	1055	1154
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla 4. Logaritmos comunes o decimales ($\log_{10}x$)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774

Tabla 4. Logaritmos comunes o decimales ($\log_{10} x$) (continuación)

<i>x</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Nota: En esta tabla se han omitido los puntos decimales. Las entradas

0	1	2	
10	0000	0043	0086

significa que $\log_{10}(1,00) = 0,0000$, $\log_{10}(1,01) = 0,0043$ y $\log_{10}(1,02) = 0,0086$ (con precisión de cuatro cifras decimales).

Tabla 5. Potencias y raíces

x	x^2	\sqrt{x}	x^3	$\sqrt[3]{x}$	x	x^2	\sqrt{x}	x^3	$\sqrt[3]{x}$
1	1	1,000	1	1,000	51	2,601	7,141	132,651	3,708
2	4	1,414	8	1,260	52	2,704	7,211	140,608	3,733
3	9	1,732	27	1,442	53	2,809	7,280	148,877	3,756
4	16	2,000	64	1,587	54	2,916	7,348	157,464	3,780
5	25	2,236	125	1,710	55	3,025	7,416	166,375	3,803
6	36	2,449	216	1,817	56	3,136	7,483	175,616	3,826
7	49	2,646	343	1,913	57	3,249	7,550	185,193	3,849
8	64	2,828	512	2,000	58	3,364	7,616	195,112	3,871
9	81	3,000	729	2,080	59	3,481	7,681	205,379	3,893
10	100	3,162	1,000	2,154	60	3,600	7,746	216,000	3,915
11	121	3,317	1,331	2,224	61	3,721	7,810	226,981	3,936
12	144	3,464	1,728	2,289	62	3,844	7,874	238,328	3,958
13	169	3,606	2,197	2,351	63	3,969	7,937	250,047	3,979
14	196	3,742	2,744	2,410	64	4,096	8,000	262,144	4,000
15	225	3,873	3,375	2,466	65	4,225	8,062	274,625	4,021
16	256	4,000	4,096	2,520	66	4,356	8,124	287,496	4,041
17	289	4,123	4,913	2,571	67	4,489	8,185	300,763	4,062
18	324	4,243	5,832	2,621	68	4,624	8,246	314,432	4,082
19	361	4,359	6,859	2,668	69	4,761	8,307	328,509	4,102
20	400	4,472	8,000	2,714	70	4,900	8,367	343,000	4,121
21	441	4,583	9,261	2,759	71	5,041	8,426	357,911	4,141
22	484	4,690	10,648	2,802	72	5,184	8,485	373,248	4,160
23	529	4,796	12,167	2,844	73	5,329	8,544	389,017	4,179
24	576	4,899	13,824	2,884	74	5,476	8,602	405,224	4,198
25	625	5,000	15,625	2,924	75	5,625	8,660	421,875	4,217
26	676	5,099	17,576	2,962	76	5,776	8,718	438,976	4,236
27	729	5,196	19,683	3,000	77	5,929	8,775	456,533	4,254
28	784	5,292	21,952	3,037	78	6,084	8,832	474,552	4,273
29	841	5,385	24,389	3,072	79	6,241	8,888	493,039	4,291
30	900	5,477	27,000	3,107	80	6,400	8,944	512,000	4,309
31	961	5,568	29,791	3,141	81	6,561	9,000	531,441	4,327
32	1,024	5,657	32,768	3,175	82	6,724	9,055	551,368	4,344
33	1,089	5,745	35,937	3,208	83	6,889	9,110	571,787	4,362
34	1,156	5,831	39,304	3,240	84	7,056	9,165	592,704	4,380
35	1,225	5,916	42,875	3,271	85	7,225	9,220	614,125	4,397
36	1,296	6,000	46,656	3,302	86	7,396	9,274	636,056	4,414
37	1,369	6,083	50,653	3,332	87	7,569	9,327	658,503	4,431
38	1,444	6,164	54,872	3,362	88	7,744	9,381	681,472	4,448
39	1,521	6,245	59,319	3,391	89	7,921	9,434	704,969	4,465
40	1,600	6,325	64,000	3,420	90	8,100	9,487	729,000	4,481
41	1,681	6,403	68,921	3,448	91	8,281	9,539	753,571	4,498
42	1,764	6,481	74,088	3,476	92	8,464	9,592	778,688	4,514
43	1,849	6,557	79,507	3,503	93	8,649	9,644	804,357	4,531
44	1,936	6,633	85,184	3,530	94	8,836	9,695	830,584	4,547
45	2,025	6,708	91,125	3,557	95	9,025	9,747	857,375	4,563
46	2,116	6,782	97,336	3,583	96	9,216	9,798	884,736	4,579
47	2,209	6,856	103,823	3,609	97	9,409	9,849	912,673	4,595
48	2,304	6,928	110,592	3,634	98	9,604	9,899	941,192	4,610
49	2,401	7,000	117,649	3,659	99	9,801	9,950	970,299	4,626
50	2,500	7,071	125,000	3,684	100	10,000	10,000	1,000,000	4,642

Tabla 6. Factoriales

<i>n</i>	<i>n!</i>	<i>n</i>	<i>n!</i>	<i>n</i>	<i>n!</i>
0	1,00000 00000 E00	20	2,43290 20082 E18	35	1,03331 47966 E40
1	1,00000 00000 E00	21	5,10909 42172 E19	36	3,71993 32679 E41
2	2,00000 00000 E00	22	1,12400 07278 E21	37	1,37637 53091 E43
3	6,00000 00000 E00	23	2,58520 16739 E22	38	5,23022 61747 E44
4	24,00000 00000 E01	24	6,20448 40173 E23	39	2,03978 82081 E46
5	1,20000 00000 E02	25	1,55112 10043 E25	40	8,15915 28325 E47
6	7,20000 00000 E02	26	4,03291 46113 E26	41	3,34525 26613 E49
7	5,04000 00000 E03	27	1,08888 69450 E28	42	1,40500 61178 E51
8	4,03200 00000 E04	28	3,04888 34461 E29	43	6,04152 63063 E52
9	3,62880 00000 E05	29	8,84176 19937 E30	44	2,65827 15748 E54
10	3,62880 00000 E06	30	2,65252 85981 E32	45	1,19622 22087 E56
11	3,99168 00000 E07	31	8,22283 86542 E33	46	5,50262 21598 E57
12	4,79001 60000 E08	32	2,63130 83693 E35	47	2,58623 24151 E59
13	6,22702 08000 E09	33	8,68331 76188 E36	48	1,24139 15593 E61
14	8,71782 91200 E10	34	2,95232 79904 E38	49	6,08281 86403 E62
15	1,30767 43680 E12			50	3,04140 93202 E64
16	2,09227 89888 E13				
17	3,55687 42810 E14				
18	6,40237 37057 E15				
19	1,21645 10041 E17				

Nota: Se presentan los valores en notación científica con el exponente denotado por *E*; por ejemplo, 2,65252 85981 E32 denota $2,6525285981 \times 10^{32}$.

SOLUCIONES

SECCION 2, pág. 9

2. (a) $y = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}x^2 + c;$ (j) $x^{-4} + y^{-4} = c;$
(b) $y = \log x + c;$ (k) $\sin y = cx e^{-x^2};$
(c) $y = \frac{1}{2}e^{x^2} + C;$ (l) $y = ce^{x^2};$
(d) $y = x \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c;$ (m) $x^3 + 3 \cos y = c;$
(e) $y = x - \log(1+x) + c;$ (n) $y = -\log(\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x) + c;$
(f) $y = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c;$ (o) $y = c \cos x;$
(g) $y = \frac{1}{6} \log \left[\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right] + c;$ (p) $y = c \sec x;$
(h) $y = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}^{-1} x)^2 + c;$ (q) $y = \frac{c-x}{1+cx};$
(i) $x = c(y-1)e^y;$ (r) $y = e^{cx}.$
3. (a) $y = xe^x - e^x + 3;$ (d) $y = \frac{1}{2} \log \left[\frac{3x-3}{x+1} \right];$
(b) $y = \sin^2 x + 1;$ (e) $y = \frac{1}{8} \log \left[\frac{4-x^2}{3x^2} \right];$
(c) $y = x \log x - x;$ (f) $y = \frac{1}{4} \log [(x+1)^2(x^2+1)^3] - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} x + 1.$
4. (a) $3e^{2y} = 2e^{3x} + 1;$ (d) $2 \operatorname{sen} 3x \cos 2y = 1;$
(b) $y = x^2 + \log x;$ (e) $2y + 1 = e^x(\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x);$
(c) $\operatorname{tg}^{-1} x + e^y = 1;$ (f) $\log x(y+1) = y - x + 1.$
8. $m = 1, 1/2, -2; y = c_1 e^x + c_2 e^{x/2} + c_3 e^{-2x}.$

SECCION 3, pág. 16

1. (a) $x^2 - y^2 = c$; (c) $r = c(1 - \cos \theta)$;
 (b) $x^2 + 2y^2 = c^2$; (d) $y^2 = -2x + c$.

2. (a) $x^2 + 4y^2 = c^2$; (b) $x^2 + ny^2 = c^2$.

Las trayectorias ortogonales son elipses, más y más alargadas en la dirección x conforme n va siendo mayor cada vez.

3. $r = 2c \cos \theta$.

4. $r = c/(1 + \cos \theta)$.

5. $y^2 = 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$; la familia es *autoortogonal* en el sentido de que cuando una curva de la familia corta a otra curva de la familia, es ortogonal a ella.

6. (a) $xy = c$; (e) $x^2 + 2y^2 = c^2$;
 (b) $y^2 = \pm 2x + c$; (f) $y^2 = \pm x^2 + c$;
 (c) $y = ce^{\pm x}$; (g) $\theta = 0$ o $r = 2c \sin \theta$;
 (d) $y^2 = cx$; (h) $\theta = \theta_0$ o $r = ce^{k\theta}$.

7. $y = cx^2$.

8. $xy = ce^{kx}$.

9. Las intersecciones de los cilindros $xy = c$ con la superficie en forma de silla de montar $z = y^2 - x^2$.

10. (a) $(xy' - y)^2 = x^2(x^2 - y^2)$; (d) $y + y'^2 = xy'$;
 (b) $(x^2 - y^2 - 1)y' = 2xy$; (e) $(y - xy')^2 = 1 + y'^2$.
 (c) $(x - y)^2(1 + y'^2) = (x + yy')^2$;

SECCION 4, pág. 24

2. (a) $T = \frac{100 \log 2}{r}$ años; (b) aproximadamente 6,93 por 100.

3. (a) $A = D \left(\frac{e^{kt} - 1}{k} \right)$; (c) \$1866.
 (b) \$5986;

4. (a) $A = \frac{W}{k} + \left(P - \frac{W}{k} \right) e^{kt}$; (c) $T = \frac{1}{k} \log \frac{W}{W - W_0}$ años;
 (b) $W_0 = kP$; (d) unos 13,86 años.

5. Si $x = x(t)$ es su capital en el instante t y $t = 0$ hace un año, entonces $x = 20/(2 - t)$. Así pues, en seis meses $x = 40$ millones de dólares, y al cabo de un año (cuando $t \rightarrow 2$) x se hace infinito.

6. Hacia las 10:11 P.M.

7. 3531.

616 SOLUCIONES

8. En el año 2076; 6.600 millones.
 9. (b) Unos 15,2 gramos.

10. $x = \frac{x_0 x_1}{x_0 + (x_1 - x_0)e^{-kx_1 t}}$; cuando $x = \frac{1}{2} x_1$.

12. Aproximadamente 35,35 por 100; unos 3,125 por 100.

13. Unos 133 días.

14. Aproximadamente 13,53 por 100.

16. Si $B = A$, entonces

$$x = \frac{kA^2 abt}{kAabt + 1};$$

y si $B < A$, entonces

$$x = \frac{AB(1 - e^{-k(A-B)abt})}{A - Be^{-k(A-B)abt}}.$$

La primera fórmula es el límite de la segunda cuando $B \rightarrow A$; los estudiantes deben comprobarlo mediante la regla de L'Hospital.

17. $\frac{1 + (A/x)}{1 + (A/x_0)} = \left[\frac{1 + (A/x_1)}{1 + (A/x_0)} \right]^{xt_1}.$

18. $x = \frac{x_0}{x_0 + (1 - x_0)e^{-kt}}.$

19. $40 \log 2 \approx 27,72$ minutos.

20. $2 \log 2 \approx 1,39$ horas.

21. Antes de 36 minutos a partir de que se comience a fumar.

22. 40 pies.

23. $\frac{9}{25} I_0$ y $\frac{81}{625} I_0$; $I_0 \left(\frac{3}{5}\right)^{10/3}$.

25. $\frac{\log 5}{\log 2} - 1$ hora.

26. 60° .

27. 16° .

28. A las 6 A.M.

29. (a) Unos 3.330 años (1380 a. de C.). (c) Unos 10.510 años.
 (b) Unos 3.850 años (1900 a. de C.). (d) Unos 7.010 años.

SECCION 5, pág. 34

1. $v = \sqrt{\frac{g}{c}} \frac{1 - e^{(-2\sqrt{gc})t}}{1 + e^{(-2\sqrt{gc})t}}$; la velocidad terminal es $\sqrt{\frac{g}{c}}$.
2. 2 millas.
3. 256 pies; cuando $t = 4$, $t = 8$. $v_0^2/2g$; cuando $t = v_0/g$, $2v_0/g$.
7. $\sqrt{1.5gR}$; $\sqrt{2gR}$.
8. \sqrt{gR} , aproximadamente 5 millas/segundo.

PROBLEMAS DIVERSOS PARA EL CAPITULO 1, pág. 44

1. $(\sqrt{5} - 1)$ horas antes del mediodía.
2. $r = (2 - t)/8$; un mes más.
3. Despues de $100 \log 2$ minutos.
4. $100(\sqrt{2} - 1)$ minutos.
5. Las intersecciones de los cilindros $x = cy^4$ con $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 36$.
7. $\frac{14R^{5/2}}{15r^2\sqrt{2g}}$ segundos.
8. La forma de la superficie obtenida al hacer girar $y = cx^4$ en torno al eje y.
9. $25h$.
12. $\sqrt{\frac{4}{g}} \log(4 + \sqrt{15})$ segundos.
13. $\frac{dT}{d\theta} = \mu T$; $T = T_0 e^{\mu\theta}$.
14. $r = r_0 e^{\pi r_0^2 ax/2L}$.
15. El Presidente.
16. 2 millas hacia el origen y entonces salir por una de las espirales $r = e^{\pm\theta\sqrt{3}}$.
17. $r = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-\theta}$; distancia total = a .

SECCION 7, pág. 49

1. (a) $y^2 = x^2 + cx^4$;
 (b) $y = cx^2(x + y)$;
 (c) $y = x \operatorname{tg} cx^3$;
 (d) $\cos(y/x) + \log cx = 0$;

- (e) $y = x \log(\log cx^2)$;
 (f) $x^2 - 2xy - y^2 = c$;
 (g) $y = cx^3 - x$;
 (h) $y\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 \log(y + \sqrt{x^2 + y^2}) - 3x^2 \log x + y^2 = cx^2$;
 (i) $y = cx^2/(1 - cx)$;
 (j) $y^3 = x^3 \log cx^3$.

2. $x^2 + y^2 = cy$.

3. (a) $x + y = \operatorname{tg}(x + c)$; (b) $\operatorname{tg}(x - y + 1) = x + c$.

4. (b) $z = dx + ey$.

5. (a) $\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y+5}{x-1}\right) = \log \sqrt{(x-1)^2 + (y+5)^2} + c$;

(b) $y - x = 5 \log(x + y - 1) + c$;

(c) $\log[(y-x)^2 + (x-1)^2] + 2 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y-x}{x-1}\right) = c$;

(d) $(x+2y)(x-2y-4)^3 = c$;

(e) $(2x-y+3)^4 = c(x+1)^3$.

6. (a) $n = -1/2$, $x = ce^{xy^2}$;

(b) $n = 3/4$, $2 + 5xy^2 = cx^{5/2}$;

(c) $n = -1$, $x = cye^{xy}$.

11. (a) $r = ce^\theta$ (en coordenadas polares);

(b) $r = ce^{-\theta}$;

(c) $x^2 - y^2 = c$.

SECCION 8, pág. 54

1. $xy + \log y^2 = c$.

2. No es exacta.

3. $4xy - x^4 + y^4 = c$.

4. No es exacta.

5. $xy + \operatorname{sen} xy = c$.

6. No es exacta.

7. $xe^y + \operatorname{sen} x \cos y = c$.

8. $\cos \frac{x}{y} = c$ o $\frac{x}{y} = c$.

9. No es exacta.

10. $x^2y^3 + y \operatorname{sen} x = c$.

11. $\log \frac{1+xy}{1-xy} - 2x = c$.

12. $x^2y^4 + x \operatorname{sen} y = c$.

13. $\log\left(\frac{1+xy}{1-xy}\right) + x^2 = c.$
14. $3x^2 + 2(x^2 - y)^{3/2} = c.$
15. No es exacta.
16. $xe^{y^2} + \operatorname{cosec} y \cot g x = c.$
17. $x - y^2 \cos^2 x = c.$
18. $x^2 + y^2 = c^2.$
19. $x^3(1 + \log y) - y^2 = c.$
20. $-y + y^2 - x^2 = c(x + y)$ o $x + y^2 - x^2 = c(x + y).$
21. $x^2y^2(4y^2 - x^2) = c.$
22. (a) $n = 3, x^2y^2 + 2x^3y = c;$ (b) $n = 1, x^2 + e^{2xy} = c.$

SECCION 9, pág. 61

2. (a) $\mu = \frac{1}{y^4}, x^2 - y^2 = cy^3;$ (g) $\mu = x^2, 4x^3y^2 + x^4 = c;$
 (b) $\mu = \frac{1}{x}, 2xy - \log x^2 - y^2 = c;$ (h) $\mu = y, xy^2 - e^y(y^2 - 2y + 2) = c;$
 (c) $\mu = \frac{1}{(xy)^3}, 3x^2y^4 = 1 + cx^2y^2;$ (i) $\mu = \frac{1}{y}, x \log y - x^2 + y = c;$
 (d) $\mu = \operatorname{sen} y, e^y \operatorname{sen} y + y^2 = c;$ (j) $\mu = e^{xy}, e^{xy}(x+y) = c;$
 (e) $\mu = xe^x, x^2e^x \operatorname{sen} y = c;$ (k) $\mu = e^{x^2/2}, e^{x^2/2}(y^3 + x^2 - 2) = c.$
 (f) $\mu = \frac{1}{(xy)^2}, 1 + xy^3 = cxy;$

3. Cuando $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/(N - M)$ es una función $g(z)$ de $z = x + y.$

4. (a) $-\frac{x}{y} = -\frac{1}{y} + y + c;$ (h) $2\sqrt{xy} = y + c;$
 (b) $\log \frac{x}{y} = \frac{1}{3}y^3 + c;$ (i) $-\frac{1}{xy} - \log x + y = c;$
 (c) $\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{y} = -\frac{1}{4}x^4 + c;$ (j) $3x + x^3y^4 + cy = 0;$
 (d) $\log \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{y} + c;$ (k) $x(y^5 + cy) = 4;$
 (e) $\operatorname{tg}^{-1}\frac{3y}{x} = 3x + c;$ (l) $y = x/(x^2 + c);$
 (f) $y = x/(x + c);$ (m) $xy + x \cos x = \operatorname{sen} x + c.$
 (g) $y = 2x^2 + 3 + cx;$

5. $x^2 \cos(y/x^2) + y \operatorname{sen}(y/x^2) = cx^3.$

6. $r = c/(1 - \cos \theta), \text{ una par\'abola.}$

SECCION 10, pág. 63

2. (a) $y = x^4 + cx^3$;
 (b) $y = e^{-x} \operatorname{tg}^{-1} e^x + ce^{-x}$;
 (c) $y = (1+x^2)^{-1} \log(\operatorname{sen} x) + c(1+x^2)^{-1}$;
 (d) $y = x^2 e^{-x} + x^2 - 2x + 2 + ce^{-x}$;
 (e) $y = x^2 \operatorname{cosec} x + c \operatorname{cosec} x$;
 (f) $y = -x^3 + cx^2$;
 (g) $xy \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x - x \cos x + c$;
 (h) $y = 3x^2 e^{x^2} + ce^{x^2}$;
 (i) $y = (x^3 + c)/\log x$;
 (j) $y = x^2(1 + ce^{1/x})$.
3. (a) $\frac{1}{y^2} = -x^4 + cx^2$;
 (b) $y^3 = 3 \operatorname{sen} x + 9x^{-1} \cos x - 18x^{-2} \operatorname{sen} x - 18x^{-3} \cos x + cx^{-3}$;
 (c) $1 + xy \log x = cxy$.
4. (a) $xy^2 = e^y + c$; (c) $1 = x^2(y + ce^y)$;
 (b) $x = ye^y + cy$; (d) $2xf(y)^3 = f(y)^2 + c$.
5. (a) $x = y - 2 + ce^{-y}$; (b) $3x + y^2 = c\sqrt{y}$.
7. $\log y = 2x^2 + cx$.
8. $y = \operatorname{tg} x - \sec x$.
9. $x = (10-t) - \frac{8}{10^4}(10-t)^4$, $0 \leq t \leq 10$.
10. (a) 45 libras;
 (b) después de $\frac{40}{3}(3 - \sqrt{3}) \approx 16,9$ minutos.
11. (a) Si $k_2 \neq k_1$, $y = \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$; y si $k_2 = k_1$, $y = k_1 x_0 t e^{-k_1 t}$.
 (b) Unos 66 días.

SECCION 11, pág. 68

1. (a) $y^2 = c_1 x + c_2$;
 (b) $x^2 + (y - c_2)^2 = c_1^2$;
 (c) $y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$;
 (d) $y = -\frac{1}{2}x^2 - c_1 x - c_1^2 \log(x - c_1) + c_2$;
 (e) $2\sqrt{c_1 y - 1} = \pm c_1 x + c_2$;
 (f) $y = c_2 e^{c_1 x}$;
 (g) $y = x^2 + c_1 \log x + c_2$.
2. (a) $y = 1$ o $3y + x^3 = 3$;
 (b) $2y - 3 = 8ye^{3x/2}$;
 (c) $y = -\log(2e^{-x} - 1)$.
3. (a) $y = -\log[\cos(x + c_1)] + c_2$;
 (b) $y = \log(c_1 e^x + e^{-x}) + c_2$.

4. $T = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 89$ minutos.
5. $s = s_0 \cos \sqrt{g/4a}t$, período = $4\pi\sqrt{a/g}$.

SECCION 12, pág. 74

2. $T_0 y'' = w(s)\sqrt{1 + (y')^2} + L(x)$.
3. Una parábola.
5. $y = c(e^{ax} + e^{-ax})$, donde el borde inferior de la cortina está en el eje x y el punto más bajo de la cuerda en el eje y .
6. Una recta horizontal o una catenaria.
8. (a) $y = \frac{c}{2} \left[\frac{1}{1+k} \left(\frac{x}{c} \right)^{1+k} - \frac{1}{1-k} \left(\frac{x}{c} \right)^{1-k} \right] + \frac{ck}{1-k^2}$,
de modo que el conejo recorre una distancia $ck/(1-k^2)$.
- (b) $y = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2 - c^2}{2c} - c \log \frac{x}{c} \right]$,
y el perro llega a estar a cualquier distancia $c/2 + \varepsilon$, por pequeño que sea $\varepsilon > 0$, pero no llega a estar a distancia $c/2$.
9. $y = \frac{1}{2} \left(\frac{x^{k+1}}{c^k} - \frac{c^k}{x^{k-1}} \right)$.
Si $a > b$ ($k > 1$), entonces $y \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 0$ y la barca nunca llegará a tierra.
Si $a = b$ ($k = 1$), entonces $y \rightarrow -c/2$ cuando $x \rightarrow 0$ y la barca toca la orilla en $(0, -c/2)$. Si $a < b$ ($k < 1$), entonces $y \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$ y la barca toca la orilla en el origen.

SECCION 13, pág. 78

2. (a) $I = \frac{E_0}{R - kL} e^{-kt} + \left(I_0 - \frac{E_0}{R - kL} \right) e^{-Rt/L}$;
- (b) $I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sin(\omega t - \alpha) + \left(I_0 + \frac{E_0 L \omega}{R^2 + L^2\omega^2} \right) e^{-Rt/L}$,
donde $\operatorname{tg} \alpha = L\omega/R$.
4. (a) $Q = E_0 C (1 - e^{-t/RC})$;
(b) caso 1, $RC = 1$,
 $Q = E_0 C t e^{-t}$; caso 23, $RC \neq 1$,
 $Q = \frac{E_0 C}{RC - 1} [e^{-t/RC} - e^{-t}]$;
- (c) $Q = \frac{E_0 C}{R^2 C^2 \omega^2 + 1} [RC\omega \sin \omega t + \cos \omega t - e^{-t/RC}]$.
5. $Q = Q_0 \cos(t/\sqrt{LC})$, $I = (-Q_0/\sqrt{LC}) \sin(t/\sqrt{LC})$.

PROBLEMAS DIVERSOS PARA EL CAPITULO 2, pág. 79

1. $y = c_2 e^{c_1 x}.$
2. $xy = \log y + c,$
3. $3 \operatorname{tg}^{-1} \frac{y+1}{x-1} = \log [(y+1)^2 + (x-1)^2] + c.$
4. $y\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 \log(y + \sqrt{x^2 + y^2}) + y^2 = 3x^2 \log x + cx^2.$
5. $3y = 2x^2 + cx^2 y^3.$
6. $-\frac{1}{2x^2 y^2} = \log \frac{y}{x} + c.$
7. $y^2 = c_2 e^{2x} + c_1.$
8. $xy = x \operatorname{sen} x + \cos x + c.$
9. $y = x \operatorname{log} y + cx.$
10. $ye^x - x^2 y^3 = c.$
11. $c_1 \operatorname{tg}^{-1} c_1 x = y + c_2.$
12. $y = x^2 + cx.$
13. $y = x \operatorname{sen} x + 2 \cos x - 2x^{-1} \operatorname{sen} x + cx^{-1}.$
14. $(3x+2y) + \log(3x+2y)^2 + x = c,$
 $x \cos(x+y) = c.$
15. $y = \frac{1}{2} (\log x)^2 + c_1 \log x + c_2.$
16. $ye^y + \operatorname{sen} x = c.$
17. $(x-y) \log(x-y) = c - y.$
18. $y = xe^{-x^2} + ce^{-x^2}.$
19. $x^2 y^2 - 2x^3 y - x^4 = c.$
20. $y = x^4(1+x^2)^{-1} + c(1+x^2)^{-1}.$
21. $e^x \operatorname{sen} y + \cos xy = c.$
22. $y = c_1 \log(x + \sqrt{1+x^2}) + c_2.$
23. $2xe^y + x^2 + y^2 - 2x^2 y = c.$
24. $2xe^x e^{-y} + y^2 = c.$
25. $y^4 - x^4 \log x^4 = cx^4.$
26. $3y \cos^3 x = 3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x + c.$
27. $y = x(cx^2 - 1)/(cx^2 + 1).$
28. $1 + e^{(xy)^2} = cy.$
29. $(5y+4)^2 - 4(5y+4)(5x+2) - (5x+2)^2 = c.$
30. $x^3 \operatorname{log} y = c.$
31. $y^2 \log \frac{5x}{x+3} - 3 \cos y = c.$
32. $x = c(x+y)^2.$
33. $\log x - \frac{1}{xy} = c.$
34. $y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{c_1}{2} \log(x^2 + c_1) + c_2.$
35. $x^3 y - xy^3 = c.$
36. $4x^2 y = (x^2 + 1)^3 + c(x^2 + 1).$
37. $3(y-1)^2 + 4(y-1)(x+1) + 3(x+1)^2 = c.$

39. $xe^{x^2y} = c.$
 40. $x^3e^y - x^2 + \cos y = c.$
 41. $x = c_1y - \log c_2y.$
 42. $xy(x+y)^2 = c.$
 43. $y = x \operatorname{tg}(\log cx).$
 44. $\frac{1}{y} = 1 + \log x + cx.$
 45. $[\cos y][\log(5x+15)] + \log y = c.$
 46. $c_1y^2 = c_1x + \log(c_1x-1) + c_2.$
 47. $xye^x - e^x = c.$
 48. $y = x^2/(c-x).$
 49. $y^3 = 3(c_2 - x - c_1y).$
 50. $x = \operatorname{cosec} y[\log(\sec y) + c].$
 51. Cuando $t = 25.$
 52. $ce^{2x^5/5} = \frac{y-x}{y+x}.$

53. (a) $\frac{dz}{dt} + [s(t) + I]z = -Iz^2;$
 (b) $y = 1 + z,$ donde

$$\frac{1}{z} = e^{((1/2)at^2+It)} \left[I \int e^{-(1/2)at^2+It} dt + c \right].$$

55. Velocidad $= b \log \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) - \frac{gm_2}{a};$
 altura $= -\frac{gm_2^2}{2a^2} + \frac{bm_2}{a} + \frac{bm_1}{a} \log \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$

59. (a) Si la aceleración constante debida al campo gravitatorio constante se denota por $A,$ entonces

$$v = c \left(\frac{1 - e^{-2At/c}}{1 + e^{-2At/c}} \right).$$

SECCION 14, pág. 89

1. (a) $y = c_1 + c_2x^2;$ (b) $a = 1, y = c_1 + c_2x^2 + x^3.$
 2. $y = c_1 + c_2 \log x.$
 3. (a) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x};$ (b) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} - 2x + 1.$
 4. (a) $y = 1/(2x);$ (c) $y = -\frac{1}{3} \operatorname{sen} x.$
 (b) $y = -3x;$

5. (a) $y = c_1x + c_2 + e^x$; (d) $y = c_1x + c_2e^x$;
 (b) $y = c_1 + c_2e^{2x} - 2x$; (e) $y = c_1 + c_2e^{-2x} + 2e^x$.
 (c) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$;
6. (a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$; (e) $(1 - x \cot g x)y'' - xy' + y = 0$;
 (b) $y'' - k^2y = 0$; (f) $y'' - 2y' + y = 0$;
 (c) $y'' + k^2y = 0$; (g) $y'' + 2y' - 3y = 0$;
 (d) $y'' + 2y' = 0$; (h) $x^2y'' + xy' - y = 0$.

SECCION 15, pág. 94

2. $y = x + 2x^2$.
 3. $y = -3e^x + 2e^{2x}$.
 5. $y_1 = x^2$, $y_2 = x^{-1}$, $y = 3x^2 - 2x^{-1}$.
 6. (a) $y = 6e^x + 2e^{-2x}$; (c) $y = 4e^{-2x} - 3e^{-3x}$;
 (b) $y = 0$; (d) $y = e^{-2} - e^{-x}$.
 7. (a) y = una constante o bien $y = \log(x + c_1) + c_2$.
 11. (a) $u = e^{-1/2 \int P dx}$, $v'' + \left(Q - \frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}P^2\right)v = 0$; (b) $y = (c_1x + c_2)e^{-x^2/2}$.

SECCION 16, pág. 97

2. (a) $y_2 = -\cos x$, $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$; (b) $y_2 = -\frac{1}{2}e^{-x}$, $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$.
 3. $y_2 = -\frac{1}{2}x^{-2}$, $y = c_1 + c_2x^{-2}$.
 4. $y_2 = -\frac{1}{4}x^{-2}$, $y = c_1x^2 + c_2x^{-2}$.
 5. $y = c_1x + c_2 \left[\frac{x}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 1 \right]$.
 6. $y = c_1x^{-1/2} \operatorname{sen} x + c_2x^{-1/2} \cos x$.
 7. (a) $y = c_1x + c_2e^x$; (c) $y = c_1x + c_2xe^x$.
 (b) $y = c_1x + c_2x^{-2}$.
 8. $y = c_1x + c_2x \int x^{-2}e^{\int f(x)dx} dx$.
 9. $y = c_1e^x + c_2x^2e^x$.

10. (a) $y_1 = e^x, y_2 = e^x \int x^n e^{-x} dx.$
 (b) $y = c_1 e^x + c_2(x+1), y = c_1 e^x + c_2(x^2 + 2x + 2),$
 $y = c_1 e^x + c_2(x^3 + 3x^2 + 6x + 6).$

11. $y = c_1 e^x + c_2 e^x \int e^{[-2x + \int f(x) dx]} dx.$

SECCION 17, pág. 101

1. (a) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x};$
 (b) $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x};$
 (c) $y = c_1 \cos 2\sqrt{2}x + c_2 \sin 2\sqrt{2}x;$
 (d) $y = e^x(c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x);$
 (e) $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x};$
 (f) $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^4 x;$
 (g) $y = e^{-x/2} \left(c_1 \cos \frac{1}{2}\sqrt{5}x + c_2 \sin \frac{1}{2}\sqrt{5}x \right);$
 (h) $y = c_1 e^{3x/2} + c_2 x e^{3x/2};$
 (i) $y = c_1 + c_2 e^{-x};$
 (j) $y = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x);$
 (k) $y = c_1 e^{-5x/2} + c_2 x e^{-5x/2};$
 (l) $y = e^{-x}(c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x);$
 (m) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x};$
 (n) $y = e^x \left(c_1 \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_2 \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}x \right);$
 (o) $y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-x};$
 (p) $y = c_1 e^{x/4} + c_2 x e^{x/4};$
 (q) $y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x);$
 (r) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x};$
2. (a) $y = e^{3x-1};$ (d) $y = e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x);$
 (b) $y = e^x + 2e^{5x};$ (e) $y = e^{(-2+\sqrt{2})x} - 2e^{(-2-\sqrt{2})x};$
 (c) $y = 5xe^{3x};$ (f) $y = \frac{9}{5}e^{x-1} + \frac{1}{5}e^{-9(x-1)}.$
5. (a) $y = x^{-1}[c_1 \cos(\log x^3) + c_2 \sin(\log x^3)];$
 (b) $y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2} \log x;$
 (c) $y = c_1 x^3 + c_2 x^{-4};$
 (d) $y = c_1 x^{3/2} + c_2 x^{-1/2};$
 (e) $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \log x;$
 (f) $y = c_1 x^2 + c_2 x^{-3};$
 (g) $y = x^{-1/2} \left[c_1 \cos \left(\frac{1}{2}\sqrt{11} \log x \right) + c_2 \sin \left(\frac{1}{2}\sqrt{11} \log x \right) \right];$
 (h) $y = c_1 x^{\sqrt{2}} + c_2 x^{-\sqrt{2}},$
 (i) $y = c_1 x^4 + c_2 x^{-4}.$

7. (a) $y = e^{-x^2/4} \left(c_1 \cos \frac{1}{4} \sqrt{3}x^2 + c_2 \sin \frac{1}{4} \sqrt{3}x^2 \right)$;
 (b) imposible.

SECCION 18, pág. 107

1. (a) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x} + \frac{1}{3} e^{4x};$
 (b) $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + \operatorname{sen} x;$
 (c) $y = c_1 e^{-5x} + c_2 x e^{-5x} + 7x^2 e^{-5x};$
 (d) $y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + 2 + 4x + 5x^2;$
 (e) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - 4x e^{-2x};$
 (f) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2 \operatorname{sen} 2x + 3 \cos 2x;$
 (g) $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x \operatorname{sen} x;$
 (h) $y = c_1 + c_2 e^{2x} + 2x - 3x^2;$
 (i) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + 3x^2 e^x;$
 (j) $y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) - \frac{1}{2} x e^x \cos x;$
 (k) $y = c_1 + c_2 e^{-x} + 2x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 120x^2 + 242x.$
2. $y = c_1 \operatorname{sen} kx + c_2 \cos kx + \frac{\operatorname{sen} bx}{k^2 - b^2}$ a menos que $b = k$, en cuyo caso
 $y = c_1 \operatorname{sen} kx + c_2 \cos kx - \frac{x \cos kx}{2k}.$
3. (a) $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + x \operatorname{sen} 2x + 2 \cos x - 1 - x + 2x^2;$
 (b) $y = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x - \frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - 2e^{-2x} + 3x^3 - 2x.$

SECCION 19, pág. 110

1. $y_p = 2x + 4.$
2. $y_p = -\frac{1}{4} e^{-x}.$
3. (a) $y_p = -\frac{1}{4} \cos 2x \log(\sec 2x + \operatorname{tg} 2x);$
 (b) $y_p = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \log x - \frac{3}{4} x^2 e^{-x};$
 (c) $y_p = -e^{-x}(8x^2 + 4x + 1);$
 (d) $y_p = \frac{1}{2} x e^{-x} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} e^{-x} \cos 2x \log(\cos 2x);$
 (e) $y_p = \frac{1}{10} e^{-3x};$
 (f) $y_p = e^x \log(1 + e^{-x}) - e^x + e^{2x} \log(1 + e^{-x}).$

4. (a) $y_p = x \operatorname{sen} x + \cos x \log(\cos x)$;
 (b) $y_p = \cos x \log(\cosec x + \cotg x) - 2$;
 (c) $y_p = \frac{1}{2} \cos x \log(\sec x + \operatorname{tg} x) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \log(\cosec x + \cotg x)$;
 (d) $y_p = \frac{1}{4} (x^2 \operatorname{sen} x + x \cos x - \operatorname{sen} x)$;
 (e) $y_p = -\cos x \log(\sec x + \operatorname{tg} x)$;
 (f) $y_p = x \cos x - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \log(\cos x)$;
 (g) $y_p = -\operatorname{sen} x \log(\cosec x + \cotg x) - \cos x \log(\sec x + \operatorname{tg} x)$.
5. (b) $y_p(x) = \frac{1}{k} \int_0^x f(t) \operatorname{sen} k(x-t) dt$.
6. (a) $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1) + \frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{2} x^2$;
 (b) $y = c_1 e^x + c_2 x^{-1} - x - 1 - \frac{1}{3} x^2$;
 (c) $y = c_1 x + c_2 e^x + x^2 + 1$;
 (d) $y = c_1 e^x + c_2 (x+1) + \frac{1}{2} e^{2x} (x-1)$;
 (e) $y = c_1 x + c_2 x^2 - x e^{-x} - (x^2 + x) \int \frac{e^{-x}}{x} dx$, donde esta integral es una función no elemental.

SECCION 20, pág. 119

- La frecuencia es $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{c^2}{2M^2}}$ cuando $\frac{k}{M} - \frac{c^2}{2M^2}$ es positiva, que es más restrictiva que la condición de que $\frac{k}{M} - \frac{c^2}{4M^2} > 0$.
- $2\pi\sqrt{2r/3g}$ segundos.
- Unas 574 libras.
- El tiempo del viaje es $2\pi\sqrt{R/g}$ segundos, donde R denota el radio de la tierra; es de unos 90 minutos. La velocidad máxima es de $0,074L$ millas/minuto aproximadamente, o sea, 4,43 millas/hora.
- $x = \frac{1}{2} \cos 4t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4t - t \cos 4t$.

SECCION 21, pág. 128

- (a) $2\sqrt{2}$ años; (c) 125 años.
 (b) $3\sqrt{3}$ años;

2. (a) Aproximadamente 0,39 unidades astronómicas, es decir, 36.000.000 de millas.
 (b) Unos 29,5 años.

SECCION 22, pág. 133

1. $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}.$
2. $y = c_1 e^x + e^x(c_2 \cos x + c_3 \sin x).$
3. $y = c_1 e^x + e^{-x/2} \left(c_2 \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_3 \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}x \right).$
4. $y = c_1 e^{-x} + e^{x/2} \left(c_2 \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_3 \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}x \right).$
5. $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x}.$
6. $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3) e^{-x}.$
7. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$
8. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x.$
9. $y = (c_1 + c_2 x) e^{ax} + (c_3 + c_4 x) e^{-ax}.$
10. $y = (c_1 + c_2 x) \cos ax + (c_3 + c_4 x) \sin ax.$
11. $y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$
12. $y = (c_1 + c_2 x) e^x + e^{-2x}(c_3 \cos x + c_4 \sin x).$
13. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}.$
14. $y = c_1 e^{2x} + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2) e^{-x}.$
15. $y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + (c_3 + c_4 x) e^{-2x} + c_5 e^{6x}.$
17. $\frac{d^4 x_1}{dt^4} + \left[\frac{k_1 + k_3}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right] \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left[\left(\frac{k_1 + k_3}{m_1} \right) \left(\frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) - \frac{k_3^2}{m_1 m_2} \right] x_1 = 0.$
18. $x_1 = c_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + c_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + c_3 \cos \sqrt{\frac{3k}{m}} t + c_4 \sin \sqrt{\frac{3k}{m}} t; \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} y \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3k}{m}}.$
19. $y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 + \sin x + x^4.$
20. $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + 5x + 7e^{3x}.$
21. $y = \frac{9}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} - x.$
22. (a) $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^{-1};$ (c) $y = c_1 x + c_2 \cos(\log x) + c_3 \sin(\log x).$
 (b) $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^{-1};$

SECCION 23, pág. 143

1. $y = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16} \right) e^{2x}.$

2. $y = \frac{1}{27}(9x^2 - 24x + 26)e^{2x}.$

3. $y = \frac{1}{2}x^5e^{-2x}.$

4. $y = \frac{1}{2}x^2e^x.$

5. $y = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-x}.$

6. $y = \frac{1}{2}e^{5x}.$

7. $y = x^3 - 6x - 5.$

8. $y = 2x^3 + 9x^2 + 40x + 73.$

9. $y = x^4 - 48x^2 + 384.$

10. $y = -\frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - 2x.$

11. $y = -x^{10} - 151.200x^4.$

12. $y = x^4 + 4x^3 + 24x^2 + 69x + 117.$

13. $y = x^4 - 12x^2 + 24.$

14. $y = -2x^3 - 5x^2 - 10x - 10.$

15. $y = \frac{3}{4}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - 21x + 21.$

16. $y = -e^{2x}(x^3 + 6x).$

17. $y = \frac{1}{8}e^{2x}(4x^3 - 2x^2 - 18x - 25).$

18. $y = 2e^{-2x}(x^2 + 4x + 6) + \frac{1}{3}e^{2x}.$

19. $y = -2x^2.$

20. $y = x^3 - 1.$

21. $y = -2x^2.$

22. $y = \frac{1}{2}x(\log x - 1).$

23. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1.$

24. $y = \frac{1}{48}(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3).$

25. (a) $y = \left(\frac{1}{6}x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3\right)e^{2x}$; (c) $y = (-\sin x + c_1x + c_2)e^{2x}$.
 (b) $y = (2x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3)e^{-x}$.

SECCION 24, pág. 167

3. $u'' + \left(1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2}\right)u = 0$.

SECCION 25, pág. 170

3. Si $f(x) \geq 0$ y $k > 0$, entonces toda solución de la ecuación $y'' + [f(x) + k]y = 0$ tiene infinitos ceros positivos.

SECCION 26, pág. 177

6. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

SECCION 27, pág. 182

1. (a) $y = a_0 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots\right) = a_0 e^{x^2}$;
 (b) $y = a_0 - (a_0 - 1)x + \frac{(a_0 - 1)}{2!}x^2 - \frac{(a_0 - 1)}{3!}x^3 + \dots =$
 $= 1 + (a_0 - 1)\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) = 1 + (a_0 - 1)e^{-x}$.

2. (a) $y = a_1x$, sin discrepancias;
 (b) $y = 0$, $y = ce^{-1/x}$, siendo esta última analítica sólo para $c = 0$.

3. $\sin^{-1}x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

5. $y = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + x - 1 = e^{-x} + x - 1$.

SECCION 28, pág. 189

1. $y = a_0 \left(1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 - \frac{1}{7}x^8 + \dots\right) + a_1x = a_0(1 + x \operatorname{tg}^{-1} x) + a_1x$.

2. (a) $y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots,$
 $y_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} - \frac{x^7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots.$

3. $a_{n+2} = -\frac{(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}.$

(a) $y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots;$

(b) $y_2(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{4x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots.$

4. (c) $a_{n+2} = -\frac{p-n}{(n+1)(n+2)} a_n,$

$$w(x) = a_0 \left[1 - \frac{p}{2!} x^2 + \frac{p(p-2)}{4!} x^4 - \dots \right] + \\ + a_1 \left[x - \frac{(p-1)}{3!} x^3 + \frac{(p-1)(p-3)}{5!} x^5 - \dots \right].$$

5. (b) $y(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1) 3^n n!} \right] + \\ + a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1) 3^n n!} \right].$

(c) $y(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1) 3^n n!} \right] + \\ + a_1 \left[-x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1) 3^n n!} \right].$

6. (a) $y_1(x) = 1 - \frac{p \cdot p}{2!} x^2 + \frac{p(p-2)p(p+2)}{4!} x^4 - \dots,$
 $y_2(x) = x - \frac{(p-1)(p+1)}{3!} x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+1)(p+3)}{5!} x^5 - \dots.$

SECCION 29, pág. 197

1. (a) $x = 0$ irregular, $x = 1$ regular;
 (b) $x = 0$ y $x = 1$ regulares, $x = -1$ irregular;
 (c) $x = 0$ irregular;
 (d) $x = 0$ y $x = -\frac{1}{3}$ regulares.

2. (a) punto ordinario;
 (b) punto ordinario;
 (c) punto singular regular;
 (d) punto singular regular;
 (e) punto singular irregular.

3. (a) $m(m-1)-2m+2=0$, $m_1=2$, $m_2=1$;
 (b) $m(m-1)-\frac{5}{4}m+\frac{1}{2}=0$, $m_1=2$, $m_2=\frac{1}{4}$.

4. (a) $y_1(x)=x^{1/2}\left(1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\dots\right)=\sin \sqrt{x},$

$$y_2(x)=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\dots=\cos \sqrt{x};$$

(b) $y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)},$

$$y_2(x)=x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}=x^{-1/2} e^{x/2};$$

(c) $y_1(x)=x^{1/2}\left(1-\frac{7}{6}x+\frac{21}{40}x^2+\dots\right),$

$$y_2(x)=1-3x+2x^2+\dots;$$

(d) $y_1(x)=x\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{70}x^2+\dots\right),$

$$y_2(x)=x^{-1/2}\left(1-x-\frac{1}{2}x^2+\dots\right).$$

6. (b) $y_2(x)=-xe^{1/x}.$

SECCION 30, pág. 205

1. $y=x^2(1-4x+4x^2+\dots).$

2. $y=c_1 x^{1/2} e^x + c_2 x^{1/2} e^x \log x.$

3. (a) $y_1=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots=x^{-1} \sin x,$

$$y_2=x^{-1}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)=x^{-1} \cos x;$$

(b) $y_1=x^2\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}x^2-\frac{1}{60}x^3+\dots\right),$

$$y_2=x^{-1}\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\dots\right);$$

$$(c) \quad y_1 = x^2 \left(1 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \dots \right) = \sin x^2,$$

$$y_2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \dots = \cos x^2.$$

$$4. \quad y = x \left(1 - \frac{x^2}{2^2 2!} + \frac{x^4}{2^4 2! 3!} - \dots \right).$$

$$5. \quad y_1 = x^{1/2} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right) = x^{-1/2} \sin x,$$

$$y = x^{-1/2} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) = x^{-1/2} \cos x.$$

SECCION 31, pág. 210

$$2. \quad (a) \quad y = c_1 F\left(2, -1, \frac{3}{2}, x\right) + c_2 x^{-1/2} F\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, x\right) = \\ = c_1 \left(1 - \frac{4}{3}x\right) + c_2 x^{-1/2} F\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, x\right);$$

$$(b) \quad y = c_1 F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, -x\right) + c_2 (-x)^{1/2} F\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -x\right) = \\ = c_1 \left(\frac{1}{1+x}\right) + c_2 \left[\frac{(-x)^{1/2}}{1+x}\right];$$

$$(c) \quad y = c_1 F\left(2, 2, \frac{1}{2}, \frac{x+1}{2}\right) + c_2 \left(\frac{x+1}{2}\right)^{1/2} F\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x+1}{2}\right);$$

$$(d) \quad y = c_1 F\left(1, 1, \frac{14}{5}, \frac{3-x}{5}\right) + c_2 \left(\frac{3-x}{5}\right)^{-9/5} F\left(-\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{3-x}{5}\right).$$

$$4. \quad (a) \quad y = c_1 F(p, 1, p, x) + c_2 x^{1-p} F(1, 2-p, 2-p, x);$$

$$(b) \quad y = c_1 \left(\frac{1}{1-x}\right) + c_2 \left(\frac{x^{1-p}}{1-x}\right);$$

$$(c) \quad y = c_1 \left(\frac{1}{1-x}\right) + c_2 \left(\frac{\log x}{1-x}\right).$$

$$5. \quad y = c_1 F\left(1, -1, -\frac{1}{2}, 1-e^x\right) + c_2 (1-e^x)^{3/2} F\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1-e^x\right).$$

SECCION 32, pág. 214

1. (a) Un punto singular regular con exponentes $p+1$ y $-p$.
- (b) Un punto singular irregular.

SECCION 33, pág. 263

1. $\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos (2n-1)x - \sin (2n-1)x + \sin 2(2n-1)x}{2n-1}$

2. $\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos (2n-1)x + \sin (2n-1)x + \sin 2(2n-1)x}{2n-1}$

3. $\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} + \frac{1}{2} \sin x$

4. $\frac{1}{2} \cos x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2-1}$

5. (a) π ; (c) $\cos x$;
 (b) $\sin x$; (d) $\pi + \sin x + \cos x$.

Nótese que toda serie trigonométrica finita es automáticamente la serie de Fourier de su suma.

6. (a) $\frac{4a}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$;

(b) $\frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$;

(c) $\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots$;

(d) $\frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$;

(e) $\frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$.

7. Tras formar la serie indicada, restarla de la obtenida en el Problema 1 y dividir a continuación por π .

SECCION 34, pág. 271

2. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$.

3. $f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}$.

En cada caso, $\sum \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

5. $f(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \cos nx - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \sin nx \right]$.

SECCION 35, pág. 278

1. Par, impar, nada, impar, par, par, nada, impar.
2. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$. Esta suma concreta, que nos es familiar del cálculo elemental, llama la atención acerca de la notable naturaleza de la serie de senos bajo consideración: al variar x continuamente de 0 a π , cada término de la serie modifica su valor, pero estos cambios están tan delicadamente interrelacionados que la suma de todas esas cantidades variables es constantemente igual a $\frac{\pi}{4}$ (¡asombroso!); $\frac{\pi}{4}$.
5. $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{4n^2 - 1}$.
6. $\operatorname{sen} x; \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}, 0 \leq x \leq \pi$.
7. $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2}$.
8. (a) $\pi - x = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$;
 (b) $\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2}$;
 (c) $\pi - x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$.
10. (b) $x^2 = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} (2n-1)x}{(2n-1)^3}, 0 \leq x < \pi$.
15. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-3} \right] \operatorname{sen} (2n-1)x, 0 \leq x \leq \pi$,
 $\cos^2 x = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-3} \right] \operatorname{sen} (2n-1)x, 0 < x < \pi$.

SECCION 36, pág. 283

1. $f(x) = \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen} (2n-1) \frac{\pi x}{2}$.
2. (a) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$;
 (b) $f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos (2n-1) \frac{\pi x}{2}$.
4. $f(x) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^2}$.

5. $f(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos(2n-1) \frac{\pi x}{2}$.

6. $\cos \pi x = \cos \pi x$.

7. $f(x) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2(n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$.

SECCION 38, pág. 302

4. $b_1 = \frac{4}{\pi}, b_2 = 0, b_3 = \frac{4}{3\pi}, b_4 = 0, b_5 = \frac{4}{5\pi}$.

5. $b_1 = 2, b_2 = -1, b_3 = \frac{2}{3}$.

SECCION 40, pág. 321

1. (a) $\lambda_n = 4n^2, y_n(x) = \sin 2nx$;

(b) $\lambda_n = \frac{n^2}{4}, y_n(x) = \sin \frac{1}{2} nx$;

(c) $\lambda_n = n^2 \pi^2, y_n(x) = \sin n\pi x$;

(d) $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, y_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$;

(e) $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{4L^2}, y_n(x) = \sin \frac{n\pi(x+L)}{2L}$;

(f) $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{(b-a)^2}, y_n(x) = \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}$.

5. (a) $y(x, t) = \frac{8c}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin (2n-1)x \cos (2n-1)at}{(2n-1)^2}$;

(b) $y(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x \cos (2n-1)at}{(2n-1)^3}$;

(c) $y(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\sin \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{3n\pi}{4} \right] \sin nx \cos nat$.

SECCION 41, pág. 329

2. $w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 a^2 t} \sin nx + g(x)$,

donde $g(x) = w_1 + \frac{1}{\pi} (w_2 - w_1)x$ y $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi [f(x) - g(x)] \sin nx dx$.

4. $w(x, t) = e^{-ct} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 a^2 t} \sin nx,$

dónde $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx.$

5. $\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0; w(x, t) = 100.$

6. $w(x, t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 a^2 t} \cos nx, \text{ donde}$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

7. $w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny} \sin nx, \text{ donde } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx.$

SECCION 42, pág. 335

2. (a) $w(r, \theta) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{r^n \cos n\theta}{4n^2 - 1};$

(b) $w(r, \theta) = 2 \left(r \sin \theta - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta + \frac{1}{3} r^3 \sin 3\theta - \dots \right);$

(c) $w(r, \theta) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} \frac{\cos 2n\theta}{4n^2 - 1} + \frac{1}{2} r \sin \theta;$

(d) $w(r, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(r \sin \theta + \frac{1}{3} r^3 \sin 3\theta + \frac{1}{5} r^5 \sin 5\theta + \dots \right);$

(e) $w(r, \theta) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{r^n \cos n\theta}{n^2}.$

SECCION 43, pág. 342

2. $n = 1, y = -\frac{1}{2} c_1 x^{-1} + c_2 x.$

3. (a) $(1-x^2)\mu'' - 2x\mu' + p(p+1)\mu = 0;$

(b) $x^2\mu'' + 3x\mu' + (1+x^2-p^2)\mu = 0;$

(c) $(1-x^2)\mu'' - 3x\mu' + (p^2-1)\mu = 0;$

(d) $\mu'' + 2x\mu' + (2+2p)\mu = 0;$

(e) $\mu'' + x\mu = 0;$

(f) $x\mu'' + (1+x)\mu' + (1+p)\mu = 0.$

4. $\mu = x, y = x^4 e^{x^2} \left[c_1 \int \frac{e^{-x^2}}{x^5} dx + c_2 \right].$

6. (b) Legendre y Airy.

8. (a) $[(1-x^2)y']' + p(p+1)y = 0;$ (d) $[e^{-x^2}y']' + 2pe^{-x^2}y = 0;$

(b) $[xy']' + \left(x - \frac{p^2}{x}\right)y = 0;$ (e) $[y']' + xy = 0;$

(c) $[\sqrt{1-x^2}y']' + \frac{p^2}{\sqrt{1-x^2}}y = 0;$ (f) $[xe^{-x}y']' + pe^{-x}y = 0.$

10. (b)
- $\lambda_0 = 0, y_0(x) = 1; \lambda_n = n^2$
- para
- $n = 1, 2, 3, \dots$
- , y las autofunciones correspondientes a cada uno de estos
- λ_n
- son
- $\cos nx$
- y
- $\sin nx$
- .

SECCION 44, pág. 354

2. (c) $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

SECCION 45, pág. 361

4. (a) $f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) + \dots;$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}(e - e^{-1})P_0(x) + 3e^{-1}P_1(x) + \frac{1}{2}(5e - 35e^{-1})P_2(x) + \dots.$

SECCION 46, pág. 371

7. $y = x^{-c}[c_1J_p(ax^b) + c_2J_{-p}(ax^b)]$ si p no es un entero;

$y = x^{-c}[c_1J_p(ax^b) + c_2Y_p(ax^b)]$ en todos los casos.

SECCION 47, pág. 379

3. $J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x);$

$$J_3(x) = \left(\frac{8}{x^2} - 1\right)J_1(x) - \frac{4}{x}J_0(x);$$

$$J_4(x) = \left(\frac{48}{x^3} - \frac{8}{x}\right)J_1(x) - \left(\frac{24}{x^2} - 1\right)J_0(x).$$

SECCION 48, pág. 402

3. $L[\sin^2 ax] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4a^2} \right)$ y $L[\cos^2 ax] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4a^2} \right)$;
la suma de estas transformadas es la transformada de 1 ($= 1/p$).

4. (a) $\frac{10}{p}$; (d) $\frac{4}{p^2 + 4} + \frac{2}{p + 1}$;
 (b) $\frac{5!}{p^6} + \frac{p}{p^2 + 4}$; (e) $\frac{6!}{p^7}$.
 (c) $\frac{2}{p - 3} - \frac{5}{p^2 + 25}$;
 5. (a) $5x^3$; (d) $1 - e^{-x}$;
 (b) $2e^{-3x}$; (e) $x - \operatorname{sen} x$.
 (c) $2x^2 + 3 \operatorname{sen} 2x$;

SECCION 49, pág. 406

2. (a) $\frac{1}{pe^{ap}}$; (c) $\frac{e^p - 1 - p}{p^2(e^p - 1)}$;
 (b) $\frac{1}{p(e^p - 1)}$; (d) $\frac{1 + e^{-np}}{p^2 + 1}$.

SECCION 50, pág. 412

1. (a) $\frac{5!}{(p + 2)^6}$; (c) $\frac{p - 3}{(p - 3)^2 + 4}$.
 (b) $\frac{1}{p + 1} - \frac{2!}{(p + 1)^3}$;
 2. (a) $2e^{-2x} \operatorname{sen} 3x$; (c) $e^{-x} \cos 2x + e^{-x} \operatorname{sen} 2x$.
 (b) $2e^{-3x} x^3$;
 3. (a) $y(x) = -e^{-x} + e^{2x}$; (d) $y(x) = -5 + 6x - 3x^2 + x^3 + 5e^{-x}$;
 (b) $y(x) = 3xe^{2x}$; (e) $y(x) = e^{-x} \operatorname{sen} 2x + e^{-x} \operatorname{sen} x$.
 (c) $y(x) = 1 - e^{-x} \cos x$;
 4. $y(x) = y_0 e^{ax} + (y'_0 - ay_0)x e^{ax}$.
 5. $1 - e^{-x}$.
 6. $y = \frac{3}{2} e^{-2x} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} e^{-2x} \cos x - \frac{1}{2} e^{-x}$.

SECCION 51, pág. 417

1. $L^{-1}\left[\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}\right] = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{\sin ax}{a} - x \cos ax\right).$

2. (a) $\frac{6ap^2 - 2a^3}{(p^2 + a^2)^3};$ (b) $\frac{3}{4p^2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$

3. (a) $y(x) = cx^2 e^x;$ (b) $y(x) = xe^{-x}.$

5. (a) $\log \frac{b}{a};$ (b) $\operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{a}.$

8. (b) $\frac{1}{p(1 + e^{-p})}.$

SECCION 52, pág. 424

2. (a) $y(x) = \cos x;$ (c) $y(x) = e^{-x}(x - 1)^2;$
 (b) $y(x) = e^{2x};$ (d) $y(x) = -2 \sin x + 4 \sin 2x.$

4. $y = cx.$

SECCION 53, pág. 430

2. (a) $\frac{1}{a}(1 - \cos at);$ (c) $\frac{1}{a^2}(e^{at} - 1 - at);$

(b) $\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt});$ (d) $\frac{1}{a^2 - b^2}(a \sin bt - b \sin at).$

4. (a) $y = \frac{1}{6}e^{3t} + \frac{5}{6}e^{-3t} - e^{-2t};$ (c) $y = 2e^t - \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 2t - 2.$

(b) $y = -\frac{1}{6}t - \frac{1}{36} - \frac{1}{45}e^{-3t} + \frac{1}{20}e^{2t}.$

5. (a) $y(t) = \int_0^t f(\tau)[e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] d\tau,$

(b) $\frac{1}{20}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{-2t}$ y $\frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{2t}.$

7. $A(t) = \frac{1}{k} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{M}}t\right),$ $h(t) = \frac{1}{\sqrt{Mk}} \sin \sqrt{\frac{k}{M}}t,$

$x(t) = \frac{1}{\sqrt{Mk}} \int_0^t f(\tau) \sin \sqrt{\frac{k}{M}}(t - \tau) d\tau.$

8. (a) $I(t) = \frac{E_0}{R} [1 - e^{-Rt/L}]$;

(b) $I(t) = \frac{E_0}{L} e^{-Rt/L}$;

(c) $I(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \alpha) + \frac{E_0 L \omega}{R^2 + L^2\omega^2} e^{-Rt/L}$,

donde $\operatorname{tg} \alpha = L\omega/R$.

SECCION 54, pág. 440

1. (a) $\frac{dy}{dx} = z$

(b) $\frac{dy}{dx} = z$

$$\frac{dz}{dx} = xy + x^2z;$$

$$\frac{dz}{dx} = w$$

$$\frac{dw}{dx} = w - x^2z^2,$$

2. $\frac{dx}{dt} = v_x$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{f(t, x, y)}{m}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{g(t, x, y)}{m}.$$

SECCION 55, pág. 446

5. (b) $\begin{cases} x = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t} \\ y = c_1 e^{4t} - c_2 e^{-2t} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = 3e^{4t} + 2e^{-2t} \\ y = 3e^{4t} - 2e^{-2t} \end{cases}$

6. (b) $\begin{cases} x = 2c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} \\ y = 3c_1 e^{4t} - c_2 e^{-t} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = 2c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} + 3t - 2 \\ y = 3c_1 e^{4t} - c_2 e^{-t} - 2t + 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 t e^t \\ y = c_2 e^t. \end{cases}$

9. (a) $\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_2 e^t. \end{cases}$

SECCION 56, pág. 455

1. (a) $\begin{cases} x = 2c_1 e^{-t} + c_2 e^t \\ y = c_1 e^{-t} + c_2 e^t; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = e^{3t}(2c_1 \cos 3t + 2c_2 \operatorname{sen} 3t) \\ y = e^{3t}[c_1(\cos 3t + 3 \operatorname{sen} 3t) + c_2(\operatorname{sen} 3t - 3 \cos 3t)]; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = -2c_1 e^{3t} + c_2(1 + 2t)e^{3t} \\ y = c_1 e^{3t} - c_2 t e^{3t}; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x = 3c_1 + c_2 e^{-2t} \\ y = 4c_1 + 2c_2 e^{-2t}; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x = c_1 e^{2t} \\ y = c_2 e^{3t}; \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x = c_1 e^{-3t} + c_2(1 - t)e^{-3t} \\ y = -c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}; \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x = 2c_1 e^{10t} + 3c_2 e^{3t} \\ y = c_1 e^{10t} - 2c_2 e^{3t}; \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x = e^{3t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t) \\ y = e^{3t}[c_1(\operatorname{sen} 2t - \cos 2t) - c_2(\operatorname{sen} 2t + \cos 2t)]. \end{cases}$

5. (b) $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 1. \end{cases}$

SECCION 57, pág. 462

1. $x \frac{d^2x}{dt^2} = (dx^2 - cx) \frac{dx}{dt} + (acx^2 - adx^3) + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$

2. La curva del zorro es cóncava hacia arriba siempre que la del conejo está subiendo.

SECCION 58, pág. 468

2. Hacer $c = t_1 - t_2$ y usar la unicidad.

3. Son las mismas, salvo que las direcciones de todas las trayectorias se invierten al pasar de uno a otro.

4. (a) Todo punto es crítico. No hay trayectorias.
 (b) Todos los puntos del eje y son críticos. Las trayectorias son semirrectas horizontales que escapan a izquierda y derecha del eje y .
 (c) No hay puntos críticos, y las trayectorias son rectas de pendiente 2 ascendentes hacia la derecha.
 (d) El único punto crítico es $(0, 0)$. Las trayectorias son semirrectas de todas las pendientes posibles, que se dirigen hacia el origen.
5. Para las ecuaciones (1) y (2) son $(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, $(\pm 3\pi, 0)$, ...; y para la ecuación (3), $(0, 0)$ es el único punto crítico.
6. (a) $(-2, 0), (0, 0), (1, 0)$; (b) $(2, 2), (3, 3)$.
7. $\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_1 e^t + e^t + c_2 \end{cases}$

SECCION 59, pág. 478

1. (a) (i) Los puntos críticos son los puntos del eje x ;

(ii) $dy/dx = 2xy/(x^2 + 1)$;

(iii) $y = c(x^2 + 1)$.

- (b) (i) $(0, 0)$;

(ii) $dy/dx = -x/y$;

(iii) $x^2 + y^2 = c^2$.

- (c) (i) No hay puntos críticos;

(ii) $dy/dx = \cos x$;

(iii) $y = \sin x + c$.

- (d) (i) Los puntos críticos son los puntos del eje y ;

(ii) $dy/dx = -2xy^2$;

(iii) $y = 1/(x^2 + c)$ e $y = 0$.

2. (a) (i) $\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_2 e^{-t} \end{cases}$ (iii) $xy = c$;

- (ii) $dy/dx = -y/x$; (iv) inestable.

- (b) (i) $\begin{cases} x = c_1 e^{-t} \\ y = c_2 e^{-2t} \end{cases}$ (iii) $y = cx^2$;

- (ii) $dy/dx = 2y/x$; (iv) asintóticamente estable.

- (c) (i) $\begin{cases} x = 2c_1 \cos 2t + 2c_2 \sin 2t \\ y = -c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t \end{cases}$

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$;

(iii) $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$;

- (iv) estable, pero no asintóticamente estable.

SECCION 60, pág. 488

1. (a) Nodo inestable.
 (b) Foco asintóticamente estable.
 (c) Punto silla inestable.
 (d) Centro estable, pero no asintóticamente estable.
 (e) Nodo asintóticamente estable.
 (f) El punto crítico no es aislado.
 (g) Foco inestable.
3. (c) El punto crítico es $(-3, 2)$, el sistema transformado es

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = 2\bar{x} - 2\bar{y} \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = 11\bar{x} - 8\bar{y}, \end{cases}$$

y el punto crítico es un nodo asintóticamente estable.

4. (a) $m^2 + 2bm + a^2 = 0$; $p = 2b$, $q = a^2$.
 (b) (i) Un centro estable, pero no asintóticamente estable; la masa oscila; el desplazamiento x y la velocidad $y = dx/dt$ son funciones periódicas del tiempo.
 (ii) Un foco asintóticamente estable; la masa efectúa oscilaciones amortiguadas; x y $dx/dt \rightarrow 0$ mediante oscilaciones cada vez más pequeñas.
 (iii) Un nodo asintóticamente estable; la masa no oscila; x y $dx/dt \rightarrow 0$ sin oscilar.
 (iv) Igual que en (iii).
5. $a_2x^2 - 2a_1xy - b_1y^2 = c$.

SECCION 61, pág. 495

1. (a) Ni uno ni otro.
 (b) Definida positiva.
 (c) Ni uno ni otro.
 (d) Definida negativa.

SECCION 62, pág. 504

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y^3}{x^3 - 2xy^2}$.
3. Hacer $D = -pq = (a_1 + b_2)(a_1b_2 - a_2b_1) > 0$.
4. No puede inferirse ninguna conclusión sobre las propiedades de estabilidad del sistema no lineal (4) en $(0, 0)$ cuando el sistema lineal asociado (3) tiene un centro en ese punto.
5. (a) Espiral inestable.
 (b) Nodo asintóticamente estable.
6. El punto crítico $(0, 0)$ es inestable si $\mu > 0$ y asintóticamente estable si $\mu < 0$.

SECCION 63, pág. 511

1. Si $f(0) = 0$ y $xf'(x) < 0$ para $x \neq 0$, el punto crítico es un punto silla inestable.
3. $y^2 - x^2 + x^4 = 2E$; $(-\sqrt{2}/2, 0)$ es un centro; $(0, 0)$ es un punto silla; y $(\sqrt{2}/2, 0)$ es un centro.
4. Cuando $z = F(x)$ tiene un máximo, el punto crítico es un punto silla; cuando tiene un mínimo, el punto crítico es un centro; y cuando tiene un punto de inflexión, el punto crítico es una cúspide.

SECCION 64, pág. 519

2. (a) $\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(4 - r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} = -4; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = \frac{2 \cos 4(t + t_0)}{\sqrt{1 + ce^{-8t}}} \\ y = \frac{-2 \sin 4(t + t_0)}{\sqrt{1 + ce^{-8t}}}, \end{cases}$

4. (a) Una solución periódica (Teorema de Liénard).
- (b) No hay solución periódica (Teorema B).
- (c) No hay solución periódica (Teorema A).
- (d) No hay solución periódica (Teorema B).
- (e) Una solución periódica (Teorema de Liénard).

SECCION 66, pág. 540

1. (a) $(x - c_2)^2 + y^2 = c_1^2$; (b) $y = c_1 \operatorname{sen}(x - c_2)$.
2. $y = \frac{1}{4}(x^2 - x)$.
4. (a) $c_1 = r \cos(\theta - c_2)$; (b) Igual que en (a).

SECCION 67, pág. 551

3. (a) $x = \frac{ad}{a^2 + b^2 + c^2}$, $y = \frac{bd}{a^2 + b^2 + c^2}$,
 $z = \frac{cd}{a^2 + b^2 + c^2}$.

5. La catenaria $y + \lambda = c_1 \operatorname{ch}\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right)$.

SECCION 68, pág. 570

1. $y = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots, |x| < 1;$

$$y_1(x) = 1 + x, \quad y_2(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3,$$

$$y_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{9}x^6 + \frac{1}{63}x^7.$$

2. $y = e^{x^2} - 1;$

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2 + \frac{x^4}{2},$$

$$y_3(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2 \cdot 3},$$

$$y_4(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2 \cdot 3} + \frac{x^8}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

3. (a) $y_n(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + e^x \rightarrow (e^x - x - 1) + e^x;$

(b) $y_n(x) = 1 + x + 2 \left[\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right] \rightarrow 1 + x + 2(e^x - x - 1);$

(c) $y_1(x) = (\operatorname{sen} x - x) + 1 + x + \frac{x^2}{2!},$

$$y_2(x) = -\left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!}\right) + 1 + x + (x^2) + \frac{x^3}{3!},$$

$$y_3(x) = -\left(\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{3!}\right) + 1 + x + \left(x^2 + \frac{x^3}{3}\right) + \frac{x^4}{4!},$$

$$y_4(x) = \left(\cos x - 1 + \frac{x_2}{2!} - \frac{x^4}{4!}\right) + 1 + x + \left(x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4}\right) + \frac{x^5}{5!}.$$

SECCION 69, pág. 581

6. (a) Todos los puntos (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$,

(b) Todos los puntos (x_0, y_0) , ya que $f(x, y) = |y|$ satisface una condición de Lipschitz sobre cualquier rectángulo.

7. Todos los puntos (x_0, y_0) .

SECCION 70, pág. 584

1. $\begin{cases} y = \cos x \\ z = -\operatorname{sen} x. \end{cases}$

INDICE

- Abel, Niels H., 92, 229, 231, 234, 433, 521
comentario sobre Gauss, 231
ecuación integral, 422
fórmula, 92
problema mecánico, 421
Abierto, intervalo, 85
Abogados, 231
Acción, 555
Acción de masas, ley de, 26
Achieser, N. I., 242
Acotada, función, 266
Adams, John Couch, 190
Adjunta, ecuación, 343
Admisible, función, 531
Airy, Sir George B., 190
 ecuación, 190, 343
 funciones, 190
Aislado, punto crítico, 466
Amortiguada, vibración, 113
Amortiguamiento:
 fuerza de, 506
 lineal, 506
Amplitud, 112
Analítica, función, 177
Andrews, G. E., 149
Andronow, A. A., 506
Arago, F., 144
Armónicas:
 funciones, 331
 simples, vibraciones, 112
Armónicos, osciladores, 112, 226
 acoplados, 132
Asintóticamente estable, punto crítico, 477
Autoadjuntas, ecuaciones, 338, 343
Autofunción (función propia), 227, 314, 337,
 340
Autofunciones, desarrollo en, 319, 340
Autónomo, sistema, 465
Autovalor (valor propio), 227, 314, 337
Auxiliar ecuación, 99, 130, 450
 de un sistema, 479
Auxiliar, polinomio, 130
Ayoub, Raymond, 286

Ball, W. W. Rouse, 156
Barrow, Isaac, 154
Bell, E. T., 147, 234
Bendixson, Ivar Otto, 514
Bentley, Richard, 157
Bernoulli:
 ecuación, 64
 números, 284
 polinomios, 285
 solución de la ecuación de ondas, 319
Bernoulli, Daniel, 43, 310, 318
Bernoulli, Jacques, 42, 145
Bernoulli, John, 37, 42, 44, 144, 157, 528
Bertrand, postulado de, 244
Bessel:
 desigualdad, 294, 299
 estudio del movimiento de los planetas, 362
 fórmula integral, 396
Bessel, cartas de Gauss a, 235-236
Bessel, Friedrich W., 235, 236, 363, 397
Bidimensional:
 ecuación de Laplace, 330
 ecuación de ondas, 389
Binomio:
 coeficientes del, 181
 serie del, 181
 teorema del, 181
Birkhoff, G. D., 522
Birkhoff, Garret, 313, 585
Bliss, G. A., 538
Bochner, S., 553
Boltzmann, Ludwig, 428
Bolyai, Johann, 236

- Bolyai, Wolfgang, 255
 Bolzano-Weierstrass, teorema de, 167
 Boyer, C. B., 145
 Brahe, Tycho, 123
 Braquistócrona, 36
 problema de la, 42, 158, 528
 Brouncker, Lord, 146
 Burden, R. L., 592
- Caída:
 libre, 29
 retardada, 30
 Cajori, F., 145
 Cálculo de variaciones, lema fundamental del, 534
 Calor:
 ecuación del, 3, 324, 382
 unidimensional, 326
 específico, 324
 Camino, 466
 de Euler, 149
 entra al punto crítico, 500
 propiedades globales, 512
 se aproxima al punto crítico, 470
 Canónica, forma, de ecuaciones diferenciales, 165
 Cantor, G., 254
 Característica de Euler, 152
 Carathéodory, C., 531
 Carnahan, B., 599
 Carslaw, H. S., 142, 333
 Cartan, E., 565
 Casos principales de puntos críticos, 480
 Catenaria, 70, 537
 Cauchy, A. L., 433, 434, 435
 ecuaciones equidimensional, 102
 Centro, 473
 Ceros:
 de las funciones de Bessel, 375
 de una función, 90
 Cesari, L., 494, 498, 516
 Cicloide, 40, 43-44, 68, 423, 539
 Cinética, energía, 30, 555
 Circuito, problema de Dirichlet para el, 331
 Circular, error, de los relojes de péndulo, 32
 Clarke, Arthur A., 231
 Clepsidra, 45
 Cociente, criterio del, 174
 Coddington, E. A., 340
 Coeficiente(s):
 de Fourier, 256, 288, 319
 del binomio, 181
 indeterminados, método de los, 104
 Cohen, I. Bernard, 154
 Comparación, criterio de, para integrales impropias, 403
 Comparación, teorema de Sturm, 168
 Completa, sucesión ortonormal, 300
 Conant, James B., 43
 Condición(es):
 de contorno homogéneas, 339
 de contorno periódicas, 344
 de Dirichlet, 268
 de Lipschitz, 577, 581
 iniciales, 8
 Conductividad térmica, 324
 Cónicas:
 cofocales, 45
 secciones, 126
 Conservación de la energía, 30, 559
 Conservativa, fuerza, 554
 Conservativos, sistemas dinámicos, 505
 Constante:
 de Euler, 147
 de separación, 384, 391
 gravitacional, 124
 Constante de ritmo, 82
 Conti, R., 494
 Continua a trozos, función, 403
 Convergencia:
 de integrales impropias, 400, 402
 intervalo de, 174
 media, 297
 punto a punto, 296
 radio de, 174
 uniforme, 574
 Convergente, serie, 173
 Convolución, teorema de, 419
 Coordenadas generalizadas, 558
 Copérnico, N., 156
 Cotangente, desarrollo de Euler en fracciones, 280
 Courant, R., 152, 294, 370, 563
 Crecimiento:
 de poblaciones, 19
 exponencial, 19
 Crell, August L., 434, 436
 Criterio:
 de comparación, 403
 del cociente, 174
 Cuantificación de niveles de energía, 228
 Cuerda:
 estirada, 310
 pulsada, 323
 vibrante, 315
 Curva estacionaria, 534
 Curvas:
 de persecución, 69
 familia uniparamétrica de, 8
 integrales, 8
 Curvatura media, 563
- Chaikin, C. E., 506
 Chebyshev, Pafnuty L., 242-244
 ecuación, 190, 210, 343, 348
 polinomios, 190, 211, 237
 ortogonalidad, 240
 propiedad minimax, 241
 serie, 241
 Cheney, E. W., 242
 Churchill, R. V., 412

- D'Alambert, Jean le Rond, 311, 313
 fórmula, 322
 solución de la ecuación de ondas, 321
- Darwin, Sir G. H., 521
- Datación (fechado) por carbono radiactivo, 23-24
- Davis, Philip J., 313
- Day, W. D., 430
- Decrecimiento exponencial, 22
- Decremento logarítmico, 119
- Dedekind, Richard, 232
- Delta de Dirac, 407
- Desacoplado, sistema, 453
- Desarrollo:
 de autofunciones, 320, 340
 de Heaviside, 139
 en serie, teoremas de:
 Bessel, 376
 Heaviside, 431
 Legendre, 359
- Desarrollos de Bessel, 376
- Descartes, René, 41
- Desigualdad:
 de Bessel, 294, 299
 de Minkowski, 293
 de Schwarz, 292
 isoperimétrica, 548
 triangular, 293
- Desintegración radiactiva, 20, 21
- Desplazamiento:
 exponencial, regla de, 141
 fórmula de, 411
- Determinismo, 440
- Diagrama de fases, 467
- Diófanto, 147
- Dipolar electrostático potencial, 386
- Dirac, P. A. M., 407
 función delta, 407
- Dirichlet, P. G. L., 248, 263, 268, 270, 435
 condiciones, 268
 núcleo, 304
 problema, 235, 330, 386
 para un círculo, 331
 teorema, 266
- Discontinuidad:
 salto, 265, 319
 simple, 265
- Distancia, 290
 entre dos funciones, 293
 media, 128
- Douglas, J., 563
- Dunnington, G. Waldo, 232
- e*, 182
- Ecuación(es):
 adjunta, 343
 autoadjunta, 338, 343
 auxiliar, 99, 130, 450
 de un sistema, 480
 de Airy, 190, 343
 de Bernoulli, 64
 de Bessel (*véase* Ecuación de Bessel)
- de Chebyshev, 190, 210, 343, 348
 de Euler en el cálculo de variaciones, 534
 de Hermite, 190, 219, 343, 348
 de Lagrange, 559
 de Laguerre, 215, 343, 348
 de Laplace, 3, 328, 381
 de Laplace bidimensional, 330
 de Legendre, 3, 185, 341, 343, 348
 de Liénard, 517
 de ondas (*véase* Ecuación de ondas)
 de ondas de Schrödinger, 227
 de ondas unidimensional, 310, 316
 de Parseval, 300, 301
 de Riccati (*véase* Ecuación de Riccati)
 de Riemann, 247
 de Sturm-Liouville, 347
 de van der Pol, 464, 468, 518, 520
 del calor, 3, 324, 382
 del calor unidimensional, 326
 del movimiento para un péndulo sin amortiguamiento, 31-34, 509
 diferencial (*véase* Ecuación diferencial)
 equidimensional de Euler, 102, 134, 167, 193, 332
 hipergeométrica:
 confluente, 213
 de Gauss, 206
 generalizada, 247
 homogénea, 48, 86
 inicial, 196, 202
 integral (*véase* Ecuación integral)
 lineal de segundo orden, 84
 no homogénea, 86
 predador-presa, de Volterra, 458
 reducida, 86
 separable, 6
 Ecuación de Bessel, 3, 167, 169, 170, 205, 322, 343, 362
 de orden cero, 198, 414
 de orden p , 192
 forma normal, 167, 169
 generalización, 372
 $p = 1$, solución, 205, 364
 $p = 1/2$, solución, 98, 205, 372
 $p = 0$, solución, 179, 198, 364
 segunda solución, 205
 punto del infinito, 214
 solución general, 368-370
 vibraciones de una cadena, 322
 vibraciones de una membrana, 388-393
- Ecuación diferencial, 1
 completa, 86
 exacta, 51
 forma canónica, 165
 forma normal, 165
 lineal, 62
 orden, 3
 ordinaria, 2
 parcial, 3
 punto ordinario, 183
 punto singular, 183, 191
 irregular, 192
 regular, 192

- reducida, 86 (*véase también Ecuación*)
 Ecuación hipergeométrica:
 confluente, 213
 de Gauss, 206
 generalizada, 247
 Eddington, Sir Arthur, 440
 Einstein, A., 233, 250, 294, 386, 464, 523,
 529
 dudando de lo obvio, 386
 imposibilidad de la relatividad sin Gauss,
 233
 masa variable y $E = Mc^2$, 83
 sobre el futuro de la física matemática, 464
 sobre la geometría de Riemann, 251
 teoría especial de la relatividad, 83
 uso del cálculo de variaciones, 528
 y Poincaré, 522
 Elipse, 126
 Elíptica, integral:
 de primera especie, 33
 de segunda especie, 33
 Energía:
 cinética, 555
 conservación de la, 30, 559
 potencial, 554
 Enfriamiento, ley de Newton, 28
 Equidimensional de Euler, ecuación, 102,
 135, 167, 192, 332
 Equilibrio:
 poblaciones en, 460
 punto de, 464
 Erdélyi, A., 170, 207, 407
 Error:
 circular de relojes de péndulo, 32
 local de discretización, 592
 relativo total, 590
 total de discretización, 593
 Esféricas de Bessel, funciones, 375
 Espacio métrico, 293
 Especial:
 ecuación de Riccati, 380
 teoría de la relatividad de Einstein, 83
 Especiales, funciones, 171
 Específico, calor, 324
 Espiral, 474
 Estable, punto crítico, 477
 Estacionaria, función, 534
 Estacionario:
 régimen, 118, 328
 valor, 534
 Euclides, teorema de, 148
 Euler, Leonhard, 144-153, 209, 230, 243, 254,
 270, 286, 311, 318, 342, 350, 529, 553,
 554
 camino de, 149
 carácter irracional de e , 342
 característica de, 152
 circuito, 150
 constante, 147
 desarrollo en fracciones de la cotangente,
 280
 ecuación equidimensional, 102, 134, 167,
 193, 332
 ecuación para el cálculo de variaciones,
 534
 fórmula(s):
 para los coeficientes de Fourier, 256,
 313, 318
 para los números complejos, 99
 para poliedros, 151
 función hipergeométrica, 209
 identidad para primos, 251
 ley de reciprocidad cuadrática, 231
 membrana vibrante, 331
 método, 588
 método mejorado, 595
 producto infinito para el seno, 280
 sobre sucesiones de primos, 243
 suma de series, 145, 350
 superficies mínimas, 562
 teorema sobre funciones homogéneas, 559
 y Lagrange, 553
 Ewing, G. M., 531
 Exacta:
 diferencial, 52
 ecuación, 52
 Excentricidad de una órbita, significado
 físico, 126
 Exponencial:
 crecimiento, 19
 descrecimiento, 22
 función de orden, 404
 regla de desplazamiento, 141
 Exponentes, 202
 Extremal, 534
 Faires, J. D., 592
 Fases:
 diagrama de, 467
 plano de, 465
 Fermat, Pierre de, 41
 principio del tiempo mínimo, 38, 564
 Fermi, Enrico, 83
 Filósofos, 232, 236
 Fischer, E., 301
 Focal propiedad, de las parábolas, 61
 Foco, 474
 Fomin, S. V., 531, 577
 Ford, Henry, 120
 Forzada, vibración, 116
 Fourier, J. B. J., 262, 313, 324
 coeficientes, 256, 288, 319
 serie, 256, 288, 313
 de cosenos, 276
 de senos, 276, 319
 Fourier-Bessel, series de, 376
 Fracción continua de Lambert, 349, 397
 Frecuencia, 113
 de resonancia, 119
 natural, 116
 normal, 134
 Fredholm, I., 341, 457
 Frobenius, F. G., 195
 método de, 195
 series, 195

- Frontera, caso, 476, 480
Fuerza:
 central, 122
 conservativa, 554
 de amortiguamiento, 506
 de recuperación, 506
 gravitacional, 120
 central, 123
Fuerza gravitacional central, 123
Función(es):
 acotada, 266
 admisible, 531
 algebraica, 171
 analítica, 177
 armónica, 331
 continua a trozos, 403
 de Airy, 190
 de Bessel (*véase Función(es) de Bessel*)
 de estímulo, 425
 de Hermite de orden n , 224
 de impulso, 425
 de Legendre, 187
 de Liapunov, 492
 de orden exponencial, 404
 de respuesta, 425
 definida negativa, 491
 definida positiva, 491
 delta de Dirac, 407
 distancia entre dos, 293
 elemental, 171
 esféricas de Bessel, 375
 estacionaria, 534
 gamma, 365
 generatriz:
 para las funciones de Bessel, 393
 para los polinomios de Legendre, 354
 hipergeométrica, 207
 confluente, 214
 homogéneas, 48
 teorema de Euler, 559
 impar, 273
 impulso unidad, 407
 norma, 292
 normalizada, 287, 336
 nula, 292
 ortogonales, 336, 360
 sucesión de, 287
 par, 272
 paso (unidad), 406
 periódica, 257
 producto interno de dos, 297
 semidefinida negativa, 491
 semidefinida positiva, 491
 suave a trozos, 307
 trascendente, 171
 zeta de Riemann, 252
Función(es) de Bessel, 362, 373
 ceros de la, 375
 de orden 1, 205, 365
 gráfico, 365
 de orden 1/2, 98, 205, 371
 de orden 0, 179, 198, 365, 415
 gráfico, 365
 de primera clase de orden p , 364
 de segunda clase, 367-370
 esféricas, 375
 fórmula de suma, 394
 fórmula integral, 396
 función generatriz, 393
 integrales de las, 375
 $J_0(x)$, 179, 198, 365, 415
 membrana vibrante, 388-393
 ortogonalidad, 376-379
 oscilación, 167, 169-170
- g*, 1
Galileo, 36, 43, 156
Gauss, Carl F., 144, 209, 229-237, 243, 247,
 248, 250, 270, 336, 363, 382, 433, 434,
 554, 565
 disertación de Riemann, 248
 ecuación hipergeométrica, 206
 función hipergeométrica, 209
 geometría riemanniana, 250-251
 números complejos y cuaterniones, 565
 teorema de los números primos, 244
 teoría del potencial, 382
 y Abel, 434
Gauss, Hélén W., 229
Gay-Lussac, Joseph L., 433
Gelfand, I. M., 531
Gelfond, A. O., 342
General, solución, 8, 86, 91
Generalizada, ecuación hipergeométrica, 247
Generalizadas, coordenadas, 558
Generatriz, función:
 funciones de Bessel, 393
 polinomios de Hermite, 221
 polinomios de Legendre, 354
Género, 152
Geodésicas, 537
 en física, 557
 sobre el cilindro, 541, 552
 sobre el cono, 541
 sobre la esfera, 540, 550
Gibbs, J. W., 565
Globales, propiedades, de los caminos, 512
Goldstine, Herman H., 586
Gradiente, 554
Grados de libertad, 558
Gráfico, 149
Grassmann, H., 565
Gravitación, ley de Newton, 34, 123, 432, 439
Gravitacional:
 constante, 124
 fuerza, 123
 potencial, 381
Gray, A., 393, 397
Green, George, 235
- Hadamard**, J., 252
Haldane, J. B. S., 3
Halley, Edmund, 155

- Halperin, I., 407
 Hamilton, principio de, 251, 529, 554
 Hamilton, William Rowan, 553, 564
 Hamming, R. W., 587
 Hardy, G. H., 149, 342
 Heaviside, Oliver, 135, 428
 desarrollo, 139
 teorema del desarrollo, 431
 Hegel, G. W., 232
 Hermite, Charles, 228, 342, 435
 ecuación, 190, 219, 343, 348
 fórmula de Rodrigues, 224
 funciones:
 de orden n , 224
 ortogonalidad, 224-226
 polinomios, 191, 219, 221
 función generatriz, 221
 series, 226
 Herschel, Sir Williams, 157
 Hersh, Reuben, 313
 Heun, Karl, 595
 Heun, método de, 595
 Hilbert, D., 271, 370, 386
 Hiltebeitel, A., 233
 Hipérbola, 126
 Hipergeométrica confluente, ecuación, 213
 Hipergeométrica confluente, función, 214
 Hobbes, Thomas, 157
 Homogénea(s):
 condiciones de contorno, 340
 ecuaciones, 86, 102
 funciones, 102
 teorema de Euler, 559
 sistema lineal, 441
 Hooke, Robert, 155
 Humboldt, F. H. A. von, 433
 Hurewicz, W., 498, 500, 516
 Hurley, James F., 28
 Huygens, Christian, 44
- Identidad:
 de Euler para los números primos, 252
 de Riemann, 247
 Impulso, 428
 respuesta de, 429
 unidad, función, 407
 Indeterminados, coeficientes, 103
 Índice, 519
 Índicial:
 ecuación, 196, 202
 respuesta, 426
 Inestable, punto crítico, 477
 Infinito, punto del, 212
 Inicial, condición, 8
 Iniciales, problemas de valores, 86, 314
 Integral(es):
 curvas, 8
 de Poisson, 334-335
 ecuación, 420, 567
 de Abel, 422
 elípticas:
 de primera clase, 33
 de segunda clase, 33
 fórmula, de Bessel, 396
 impropia:
 convergente, 400, 403
 absolutamente convergente, 403
 criterio de comparación, 403
 transformación, 399
 Integrante, factor, 56
 Interés compuesto de forma continua, 19
 Interno (escalar), producto:
 de dos funciones, 292
 de dos vectores, 290
 Intervalo:
 abierto, 85
 cerrado, 85
 de convergencia, 174
 Inversa, transformación de Laplace, 410
 Inverso, operador, 137
 Irregular, punto singular, 192
 Isoperimétrica, desigualdad, 548
 Isoperimétrico, problema, 541
- Jacobi, C. G. J., 236, 248, 350, 521
 sobre Abel, 435, 521
 y Gauss, 236
 Jaeger, J. C., 143
 Jeans, Sir James, 440
- Kac, Mark, 431
 Kant, Immanuel, 157, 236
 Kellogg, O. D., 386
 Kepler, Johannes, 123, 156
 Kepler, leyes de:
 primera, 126
 segunda, 123
 tercera, 128
 Kirchhoff, Gustav R., 76
 Kirchhoff, ley de, 76
 Klein, F., 232
 Kolmogorov, A. N., 577
 Königsberg, problema del puente de, 149
 Kruskal, M. D., 585
 Kummer, Ernst, 270
 Kutta, M. W., 599
- Lagrange, Joseph L., 433, 552
 ecuaciones, 559
 multiplicadores, 544, 552
 variación de los parámetros, 110
 Lagrangiano, 555
 Laguerre, Edmond, 215
 ecuación, 215, 343, 348
 polinomios, 215
 Lambert, Johann H., 27, 342
 fracción continua para la tangente, 349, 397
 ley de absorción, 27
 Lanczos, C., 233
 Laplace, Pierre S., 432, 564
 ecuación, 3, 328, 381

- bidimensional, 329
- transformación, 399
 - inversa, 410
 - transformada, 400
 - inversa, 410
- Lebedev, N. N., 359, 383
- Lebesgue, Henri, 253, 302
- Legendre, Adrien M., 230, 350, 397, 435
 - ecuación, 3, 185, 341, 343, 348
 - funciones, 187
 - polinomios, 187, 351
 - aplicaciones, 385-387
 - fórmula de Rodrigues, 353
 - función generatriz, 354
 - ortogonalidad, 356
 - series, 358
 - teorema de desarrollo en serie, 359
- Leibniz, G. W., 154, 155, 159
 - regla de, 427
- Leigh, E. R., 457
- Levinson, N., 340
- Ley(es):
 - conservación de la energía, 30, 559
 - de absorción de Lambert, 27
 - de acción de masas, 26
 - de Kepler:
 - primera, 126
 - segunda, 123
 - tercera, 128
 - de la gravitación de Newton, 34, 123, 432, 439
 - de Ohm, 75
 - de refracción de Snell, 38
 - del movimiento, segunda de Newton, 1, 122, 555
 - del paralelogramo, 295
- Liapunov, A. M., 490, 500
 - función, 492
- Libby, Willard, 23, 24
- Libertad, grados de, 558
- Libre, caída, 29
- Libres, vibraciones, 116
- Liénard, Alfred, 517, 518
 - ecuación, 517
 - teorema, 518
- Lindemann, F., 342
- Lineal:
 - amortiguamiento, 506
 - combinación, 87, 443
 - ecuación diferencial, 62
 - de segundo orden, 84
 - muelle, 83
 - sistema:
 - desacoplado, 453
 - homogéneo, 441
 - inhomogéneo, 441
 - transformación, 399
- Linealización, 497
 - método de, 460
- Linealmente dependiente, 90, 131
- Linealmente independiente, 90, 131
- Liouville, Joseph, 97, 341, 375
- Lipschitz, condición de, 577, 581
- Lipschitz, R., 577
- Lobachevsky, N., 71
- Local, error de discretización, 592
- Locke, John, 157
- Lorentz, G. G., 244
- Lotka, A. J., 457
- Luther, H. A., 599
- Manuel, Frank E., 160
- Masa variable, problemas dinámicos con, 82-83
- Mathews, G. B., 393, 397
- Maxwell, James Clerk, 153, 234, 428
- Mead, D. G., 5, 342
- Mecánico, problema, de Abel, 421
- Media:
 - convergencia en, 297
 - curvatura, 563
 - distancia, 128
- Membrana, 388
 - en vibración, teoría de Euler, 362, 388-393
 - circular, 390-393
- Método(s):
 - de aproximaciones sucesivas de Picard, 568
 - de Frobenius, 195
 - de linealización, 460
 - de separación de variables, 316, 326, 330, 331, 384, 390
 - mejorado de Euler, 595
 - númericos:
 - de paso único, 587
 - Euler, 588
 - Euler mejorado, 595
 - Heun, 595
 - predictor-corrector, 595
 - Runge-Kutta, 599
 - Taylor multitermino, 596
 - Métrico, espacio, 293
 - Mezclas, 22
 - Milikan, Robert A., 135
 - Mínima(as):
 - acción, principio de, 555
 - propiedad de los polinomios de Chebyshev, 241
 - superficies, problema de Euler, 562
 - Mínimos cuadrados aproximación por, 360
 - Minkowski, Hermann, 294
 - desigualdad, 293
 - Morehead, J., 233
 - Movimiento:
 - ecuación del péndulo sin amortiguamiento, 31-34, 509
 - segunda ley de Newton, 1, 122, 555
 - Muelle:
 - lineal, 4
 - no lineal:
 - blando, 511
 - duro, 511
 - Multiplicadores de Lagrange, 544, 552
 - Multiterminos, métodos de Taylor, 596

- n*-cuerpos, problema de, 439
 Natural, frecuencia, 116
 Negativa:
 función definida, 491
 función semidefinida, 491
 Newman, J. R. 150
 Newton, Isaac, 41, 128, 153-160, 432
 ley de enfriamiento, 28
 ley de gravitación, 34, 123, 432, 439
 segunda ley del movimiento, 1, 122, 555
 No homogéneo, sistema lineal, 441
 No lineal:
 mecánica, ecuación básica de la, 506
 muelle:
 blando, 511
 duro, 511
 Nodo, 322, 323
 punto crítico, 471
 Norma:
 de un vector, 290
 de una función, 292
 Normal, forma, de una ecuación diferencial, 165
 Normales, frecuencia, 134
 Normalizadas, funciones, 287, 336
 Núcleo:
 de Dirichlet, 304
 de una transformación integral, 399
 Nula, función, 292
 Números de Bernoulli, 284
- Ohm, G. S., 75
 Ohm, ley de, 75
 Onda estacionaria, 323
 Ondas, ecuación de, 3, 382, 565
 bidimensional, 389
 de Schrödinger, 227
 unidimensional, 310, 316
 solución de Bernoulli, 319
 solución de D'Alembert, 321
 Ondas, función de, 227
 Operador diferencial, 136
 inverso, 137
 Orden:
 de una ecuación diferencial, 3
 exponencial, función de, 404
 Ordinaria, ecuación diferencial, 2
 Ordinario, punto, 183
 Ore, O., 435
 Ortogonal(es):
 sucesión, 286, 287, 336
 completa, 300
 funciones, 336, 360
 trayectorias, 13
 vectores, 290
 Ortonormalidad, 262
 funciones
 de Bessel, 376-379
 de Hermite, 224-226
 polinomios
 de Chebyshev, 240
 de Legendre, 356
- Oscilador(es) armónico(s), 112, 226
 acoplados, 132
- Parábola(as): 126
 propiedad focal, 61
 Paralelogramo, ley del, 295
 Parámetro(os): 10
 variación de los, 108, 456
 Parciales, ecuación en derivadas, 3
 (véase también Ecuación del calor; ecuación de Laplace; Ecuación de ondas)
 Parseval des Chênes, M., 302
 Parseval, ecuación de, 300, 301
 Particiones, teoría de, 149
 Particular, solución, 8
 Pascal, B., 41
 Paso:
 función, 406
 único, métodos de, 587
 Pauling, Linus, 26, 135
 Peano, Giuseppe, 577
 Peano, teorema de, 577
 Péndulo sin amortiguamiento, 31-34, 509
 Pepys, Samuel, 157
 Periódica(as):
 función, 257
 solución, 512
 condiciones de contorno, 344
 Período, 113, 258, 512
 Persecución, curvas de, 69
 Peso, función, para sucesiones ortogonales, 336
 Picard, Emile, 568
 método de aproximaciones sucesivas, 568
 teorema, 438, 571
 Pitágoras, teorema de, 296
 Planck, Max, 556
 Planetario, movimiento, estudios de Bessel
 sobre el, 363
 Planetas, períodos de revolución, 127-128
 Plateau, J., 563
 Poblaciones:
 crecimiento de, 19
 equilibrio de, 460
 Poincaré, Henri, 229, 463, 498, 514, 521
 Poincaré-Bendixson, teorema, 516
 Poisson, S., 164, 334, 433
 integral, 334, 336
 Poliedros:
 fórmula de Euler, 151
 regulares, 150
 Polinomio(s):
 auxiliar, 130
 de Bernoulli, 285
 de Chebyshev, 190, 211, 237
 ortonormalidad, 240
 propiedad minimax, 241
 de Hermite, 219, 221
 fórmula de Rodrigues, 224
 función generatriz, 221
 de Laguerre, 215
 de Legendre (véase Legendre polinomios)

- Polya, G., 149, 152, 541, 548
Positiva:
 función definida, 491
 función semidefinida, 491
Potencial, 381
 electrostático, 381
 electrostático dipolar, 386
 energía, 554
 gravitatorio, 381
 teoría del, 329, 382
Potencias, series de, 173
 intervalo de convergencia, 174
 radio de convergencia, 174
Predador-presa, ecuaciones de Volterra, 458
Predictor-corregidor, métodos, 595
Primos, teorema de los números, 244
Principio:
 de conservación de la energía, 30, 559
 de Dirichlet, 235
 de Hamilton, 251, 529, 555
 de mínima acción, 555
 de mínimo tiempo, de Fermat, 38, 564
 de superposición, 108, 428
Problema(s):
 abalorio en el círculo, 45
 bacterias, 26
 bola de naftalina, 44
 boyas, 119
 braquistócrona, 37, 42, 158, 528
 cadena colgante, 69, 74, 552
 cadena de vibración, 322
 cadena sobre la mesa, 45
 clepsidra, 45
 cohete, 77
 columna cónica, 46
 cónicas cofocales, 45
 cuerda en torno a un poste, 45
 de contorno, 86, 314, 336
 regulares, 340
 singulares, 340
 de Plateau, 563
 de valores de contorno, 86, 336
 regulares, 340
 singulares, 340
 depósito, 45
 desintegración radiactiva, 20-22
 destructor en persecución de un submarino, 46
 Dirichlet, 330, 386
 para un círculo, 326
 escarabajos en una mesa, 46
 espejo, 59-61
 explosión de la tierra, 129
 geodésicas:
 en el cilindro, 541, 552
 en el cono, 541
 en la esfera, 541
 gota de lluvia en caída, 83
 isoperimétrico, 541
 lata con agua en giro, 45
 ley de absorción de Lambert, 27
 ley de acción de masas, 26
 ley de enfriamiento de Newton, 28
 ley de Torricelli, 45
 mecánico de Abel, 421
 n-cuerpos, 437
 ondas en una dimensión, 321
 orificio en la tierra, 35, 119
 perro-conejo, 72-74
 Presidente y primer ministro, 46
 presión del aire, 27-28
 puente de Königsberg, 149
 quitanieves, 44
 radón, 65
 reacción química, 26
 relatividad, 83
 rugby, 44
 salmuera, 22, 27, 80
 Sturm-Liouville, 339
 regular, 348
 singular, 348
 superficie mínima:
 de Euler, 562
 de revolución, 537
 tautócrona, 423, 434
 teorema de Torricelli, 43
 teorema de Wren, 43
 tractriz, 71
 trayectoria de un bote, 73
 túnel a través de la tierra, 119
 valores iniciales, 85
 velocidad de escape, 35
 velocidad terminal, 34
Pseudoesfera, 71
Punto:
 crítico, 466
 aislado, 466
 asintóticamente estable, 477
 camino que entra a un, 470
 camino que se aproxima a un, 470
 casos frontera, 480
 casos principales, 480
 centro, 473
 espiral, 474
 estable, 477
 foco, 474
 inestable, 477
 nodo, 471
 punto silla, 472
 simple, 497
 vórtice, 473
 de equilibrio, 466
 del infinito, 212
 ordinario, 183
 singular, 183, 191
 irregular, 192
 regular, 192
Punto a punto, convergencia, 296
Pura, resonancia, 119

 Rademacher, H., 294
 Radiactiva, desintegración, 20, 21
 Radio de convergencia, 174
 Radiocarbono, 23
 datalogía por, 23-24

- Radó, T., 563
 Radón, 65
 Rainville, E. D., 247
 Rapoport, Anatol, 81
 Reacción:
 de primer orden, 20
 de segundo orden, 26
 Recuperación, fuerza de, 506
 Recurrencia, fórmula de, 189
 de dos términos, 189
 de tres términos, 189
 Refracción, ley de Snell, 38
 Régimen permanente, 324
 Regular(es):
 problema de Sturm-Liouville, 348
 poliedros, 150
 punto singular, 192
 Relatividad especial, teoría de Einstein, 83
 Relativo total, error, 590
 Resonancia, 118
 frecuencia, 119
 pura, 119
 Respuesta:
 de impulso, 428
 función de, 425
 indicial, 426
 Retardada, caída, 30
 Riccati, J. F., 80
 ecuación, 80
 especial, 380
 Riemann, Bernhard, 144, 248-252, 253, 270,
 294, 313
 ecuación, 247
 función zeta, 252
 identidad, 247
 Riesz, F., 301
 Riesz-Fischer, teorema de, 302
 Ritt, J. F., 5, 342, 375
 Robbins, H., 152, 294
 Rodrigues, fórmula de, 353
 para polinomios de Hermite, 224
 para polinomios de Legendre, 354
 Rodrigues, Olinde, 354
 Rogosinski, W., 268
 Runge, Carl, 599
 Runge-Kutta, método, 599

 Salto, discontinuidades con, 265, 319
 Sansone, G., 494
 Sarton, George, 553
 Schrödinger, Erwin, 227, 529
 ecuación de ondas, 227
 función de ondas, 227
 Schuster, M. L., 523
 Schwarz, H. A., 294
 desigualdad, 292
 Scribner, Charles, Jr., 522
 Secciones cónicas, 126
 Seeley, R. T., 333
 Segunda ley de Kepler, 123
 Segunda ley de Newton, 122

 Segundo orden, ecuación lineal, 84
 Segundo orden, reacción, 26
 Semivida, 21
 Seno:
 producto infinito de Euler para el, 280
 series de Fourier, 276, 319
 Separable, ecuación, 6
 Separación:
 constante de, 384, 391
 de variables, método de, 316, 326, 330,
 331, 384, 390
 teorema de Sturm, 164
 Separatriz, 509
 Series:
 Bessel, 376
 Chebyshev, 241
 convergente, 173
 de potencias, 173
 del binomio, 181
 Fourier, 256, 288, 313
 cosenos, 276
 senos, 276, 319
 Fourier-Bessel, 376
 Frobenius, 195
 Hermite, 226
 hipergeométrica, 208
 Legendre, 358
 suma de, 173
 Taylor, 177
 Silla, punto, 472
 Simple:
 discontinuidad, 265
 vibración armónica, 112
 Simpson, regla de, 599
 Singular:
 problema de Sturm-Liouville, 348
 punto, 191
 irregular, 192
 regular, 192
 Sistema:
 autónomo, 465
 desacoplado, 453
 dinámico conservativo, 505
 ecuación auxiliar, 479
 lineal homogéneo, 441
 lineal inhomogéneo, 441
 Smith, D. E., 230, 250
 Snell, Willebrord, 38
 ley de refracción, 38
 Sobreamortiguada, vibración, 114
 Solución:
 general, 8, 87, 90
 linealmente dependiente, 444
 linealmente independiente, 444
 particular, 8
 periódica, 512
 trivial, 87, 442
 Steinmetz, Charles Proteus, 120
 Stephens, E., 143
 Stoker, J. J., 506
 Sturm, J. C. F., 164
 teorema de comparación, 168
 teorema de separación, 164

- Sturm-Liouville:**
 desarrollo, 340
 ecuación, 347
 problema, 339
 regular, 340, 348
 singular, 340, 348
Suave a trozos, función, 307
Sucesión:
 completa, 300
 ortogonal de funciones, 286
 ortonormal, 287, 336
Sucesivas, aproximaciones, método de Picard, 568
Suma, fórmula de, para funciones de Bessel, 395
Superposición, principio de, 108, 428
Sz.-Nagy, Béla, 268, 287, 313, 333
Szegő, G., 548
- Tangente, fracción continua de Lambert, para la, 349**
Tautocrona, 44
 problema de la, 68, 423, 434
 propiedad, 68
Taylor, fórmula de, 176
Taylor multitermino, método de, 596
Taylor, series de, 177
Teorema fundamental del cálculo, 6
Teoría:
 de grafos, 150
 de la relatividad especial de Einstein, 83
 de particiones, 148
Tercera ley de Kepler, 128
Térmica, conductividad, 324
Terminal, velocidad, 31, 34
Tiempo:
 de duplicación, 20
 mínimo, principio de Fermat del, 38, 564
Tietze, H., 230
Titchmarsh, E. C., 252, 268, 340
Toepplitz, O., 294
Topología, 147, 152
Torricelli, Evangelista, 43
 ley de, 45
 teorema de, 43
Total:
 error de discretización, 593
 error relativo, 590
Tractriz, 71
Transformación, 399
 de Laplace, 399
 integral, 399
 inversa de Laplace, 410
 lineal, 399
Transformada, 399
 de Laplace, 399
 inversa de Laplace, 410
Transitorio, 118
Trascendentes, números, 342
Trascendentes superiores, funciones, 171
Trayectoria, 466
Triangular, desigualdad, 293
- Tricomi, F. G., 470, 498**
Trivial, solución, 87, 442
Trozos:
 función continua a, 403
 función suave a, 307
Truesdell, C., 153, 390
- Ulam, Stanislaw, 431**
Unidad:
 función impulso, 407
 función paso, 406
Unidimensional:
 ecuación de ondas, 310-316
 ecuación del calor, 326
 onda, 321
Uniforme, convergencia, 574
Uniparamérica, familia de curvas, 8
Universo:
 actitud de Euler ante el, 153
 definición de Jeans, 440
- Valores de contorno, 330**
van der Pol, Balthasar, 505, 518
 ecuación, 464, 468, 518, 520
Van der Waerden, B. L., 541
Variable(es):
 masa, 82-83
 método de separación de, 316, 326, 330, 331, 384, 390
Variación de parámetros, 108, 456
 para ecuaciones lineales, 108-110
 para sistemas lineales, 456
Vavilov, S. I., 158
Vector(es):
 norma, 290
 ortogonales, 290
 producto escalar, 290
Velocidad:
 de escape, 35
 terminal, 31, 34
Vibración:
 amortiguada, 113
 amortiguamiento crítico, 115
 armónica simple, 112
 críticamente amortiguada, 115
 forzada, 116
 libre, 116
 sin amortiguamiento, 112
 sobreamortiguada, 114
 subamortiguada, 115
Vibrante:
 cuerda, 315
 estirada, 310
 pulsada, 323
 membrana, 362, 388-393
Vicario de Bray, 433
Voltaire, 145
Volterra, ecuación predador-presa, 458
Volterra, Vito, 457
Vórtice, 473

Wallis, John, 146, 159
 Waltershausen, W. S. von, 229
 Watson, G. N., 80, 246, 363, 370, 375, 376
 Weierstrass, Karl, 254, 294
 Westfall, Richard S., 159
 Whewell, William, 156
 Whittaker, E. T., 248
 Wilkes, J. O., 599
 Wren, Sir Christopher, 43, 155

Wren, teorema de, 43
 Wright, E. M., 149
 Wronski, Hoëné, 91
 Wronskiano, 91, 443, 447

Zabusky, N. J., 585
 Zeta de Riemann, función, 252
 Zeuner, F. E., 23

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

Biblioteca

3 000102 513290

**OTRAS OBRAS DE INTERES PUBLICADAS
POR McGRAW-HILL/INTERAMERICANA**

- ABELLANAS/GALINDO. *Métodos de cálculo* (Schaum).
- AYRES. *Cálculo diferencial e integral* (3.^a ed.) (Schaum).
- BUDAK Y OTROS. *Problemas de la física matemática*
Vol. 1.
- BUDAK Y OTROS. *Problemas de la física matemática*
Vol. 2.
- CHURCHILL. *Variable compleja y sus aplicaciones*
(5.^a ed.).
- CONTE. *Análisis numérico* (2.^a ed.).
- GROSSMAN. *Algebra lineal con aplicaciones* (4.^a ed.).
- KAY. *Cálculo tensorial* (Schaum).
- KOSTRIKIN. *Introducción al álgebra* (2.^a ed.).
- RUDIN. *Análisis real y complejo*.
- SCHEID. *Métodos numéricos* (2.^a ed.) (Schaum).
- SPIEGEL. *Análisis vectorial* (Schaum).
- SPIEGEL. *Variable compleja* (Schaum).
- SPIEGEL/ABELLANAS. *Fórmulas y tablas de matemática aplicada* (Schaum).
- WALPOLE. *Probabilidad y estadística* (4.^a ed.).



9 788448 100452

Mc
Graw
Hill

ISBN: 84-481-0045-X