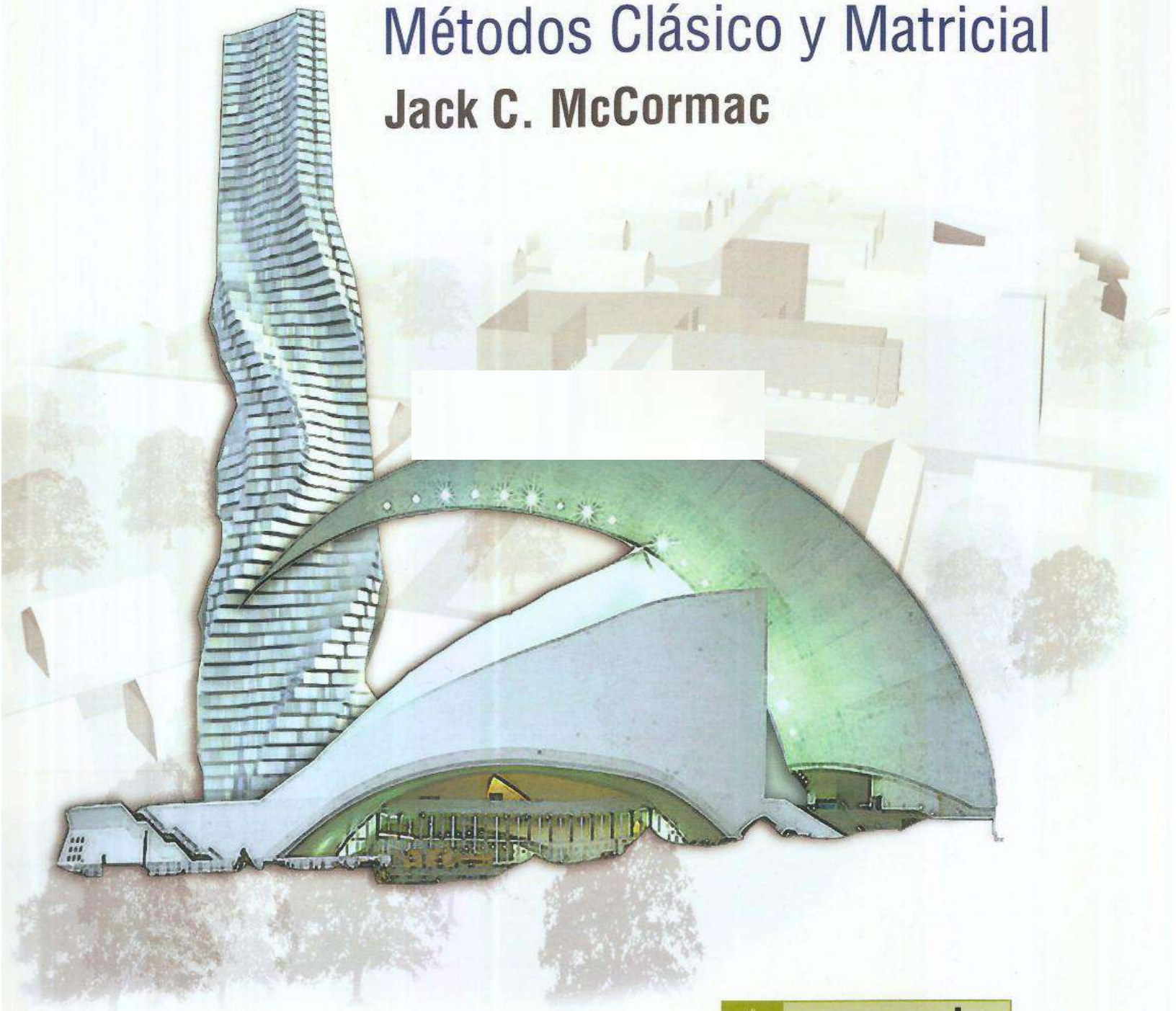
1ª PARTE
by: Jamez SCu para FNI

CUARTA EDICIÓN

Análisis de Estructuras

Métodos Clásico y Matricial

Jack C. McCormac



Alfaomega

marcombo
ediciones técnicas

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

Métodos clásico y matricial

Cuarta edición

Jack C. McCormac
Clemson University

Alfaomega

marcombo
ediciones técnicas

Análisis de Estructuras. Métodos Clásico y Matricial
Jack C. McCormac
edición original en inglés *Structural Analysis: Using Classical and Matrix Methods*, Fourth Edition, publicada por John Wiley & Sons, Inc. New Jersey, USA.
Derechos reservados © John Wiley & Sons, Inc.
Cuarta edición: Alfaomega Grupo Editor, México, abril 2010

Primera edición: MARCOMBO, S.A., 2011

© 2011 MARCOMBO, S.A.
Gran Via de les Corts Catalanes, 594
08007 Barcelona
www.marcombo.com

Diseño y maquetación: EDITEC

«Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra».

ISBN: 978-84-267-1709-2

D.L.: M. 5.582-2011
Impreso en Closas-Orcoyen, S. L.
Printed in Spain

Tabla breve del Contenido

PARTE UNO: ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

CAPÍTULO 1 Introducción 3
CAPÍTULO 2 Cargas estructurales 16
CAPÍTULO 3 Sistema de cargas y comportamiento 43
CAPÍTULO 4 Reacciones 57
CAPÍTULO 5 Fuerza cortante y momento flexionante 95
CAPÍTULO 6 Introducción al estudio de las armaduras planas 117
CAPÍTULO 7 Armaduras planas (continuación) 143
CAPÍTULO 8 Armaduras espaciales o tridimensionales 168
CAPÍTULO 9 Líneas de influencia para vigas 185
CAPÍTULO 10 Líneas de influencia y cargas móviles en armaduras 204
CAPÍTULO 11 Deflexiones y cambios angulares usando métodos geométricos 225
CAPÍTULO 12 Deflexiones y cambios angulares usando métodos geométricos (continuación) 248
CAPÍTULO 13 Deflexiones y cambios angulares usando métodos de energía 264

PARTE DOS: ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS
Métodos clásicos

CAPÍTULO 14 Introducción a las estructuras estáticamente indeterminadas 297
CAPÍTULO 15 Métodos de fuerzas para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas 305
CAPÍTULO 16 Métodos de fuerzas para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas (continuación) 322
CAPÍTULO 17 Líneas de influencia para estructuras estáticamente indeterminadas 347
CAPÍTULO 18 Pendiente-deflexión: un método de análisis por desplazamientos 363

PARTE TRES: ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS
Métodos comunes actualmente en uso

CAPÍTULO 19 Análisis aproximado de estructuras estáticamente indeterminadas 389
CAPÍTULO 20 Distribución de momentos en vigas 413
CAPÍTULO 21 Distribución de momentos para marcos 433
CAPÍTULO 22 Introducción a los métodos matriciales 461
CAPÍTULO 23 Fundamentos del método de los desplazamientos o de las rigideces 470
CAPÍTULO 24 Matrices de rigideces para elementos inclinados 494
CAPÍTULO 25 Temas adicionales de métodos matriciales 518

APÉNDICES

APÉNDICE A La ecuación de la catenaria 533
APÉNDICE B Álgebra matricial 538
APÉNDICE C Cargas eólica, sísmica y de nieve. Tablas y figuras 553
APÉNDICE D Análisis por computadora de diversas estructuras con SAP2000 565
APÉNDICE E Fórmulas útiles 573

Glosario 577
Índice 583

Contenido

DEDICATORIA *vii*
PREFACIO *xiii*

PARTE UNO:
ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS **1**

CAPÍTULO 1
Introducción **3**

1.1 Análisis y diseño estructural 3
1.2 Historia del análisis estructural 4
1.3 Principios básicos del análisis estructural 6
1.4 Componentes y sistemas estructurales 8
1.5 Fuerzas estructurales 9
1.6 Idealización estructural (diagramas de líneas) 11
1.7 Exactitud de los cálculos 13
1.8 Verificación de los problemas 13
1.9 Impacto de las computadoras en el análisis estructural 14

CAPÍTULO 2
Cargas estructurales **16**

2.1 Introducción 16
2.2 Seguridad estructural 17
2.3 Especificaciones y reglamentos de construcción 17
2.4 Tipos de cargas estructurales 20
2.5 Cargas muertas 20
2.6 Cargas vivas 21
2.7 Factores de impacto por carga viva 23
2.8 Cargas vivas sobre techos 23
2.9 Cargas de lluvia 24
2.10 Cargas de viento 26
2.11 Procedimiento simplificado de la ASCE para estimar las cargas de viento 29
2.12 Procedimiento detallado de la ASCE para estimar las cargas de viento 31
2.13 Cargas sísmicas 32
2.14 Procedimiento de fuerza lateral equivalente para estimar las cargas sísmicas 34
2.15 Cargas de nieve 37

2.16 Otras cargas 40
2.17 Problemas para solucionar 41

CAPÍTULO 3
Sistema de cargas y comportamiento **43**

3.1 Introducción 43
3.2 Áreas tributarias 44
3.3 Áreas de influencia 48
3.4 Reducción de la carga viva 48
3.5 Condiciones de carga para el diseño por esfuerzos permisibles 50
3.6 Condiciones de carga para el diseño por resistencia 52
3.7 Concepto de envolvente de fuerzas 55
3.8 Problemas para solucionar 56

CAPÍTULO 4
Reacciones **57**

4.1 Equilibrio 57
4.2 Cuerpos móviles 57
4.3 Cálculo de las incógnitas 58
4.4 Tipos de soporte 59
4.5 Estabilidad, determinación e indeterminación 61
4.6 Equilibrio inestable e inestabilidad geométrica 64
4.7 Convención de signos 65
4.8 Diagramas de cuerpo libre 66
4.9 Componentes horizontales y verticales 67
4.10 Reacciones por proporciones 67
4.11 Reacciones calculadas con ecuaciones de equilibrio estático 68
4.12 Principio de superposición 71
4.13 El voladizo simple 72
4.14 Estructuras con voladizo 73
4.15 Cálculo de las reacciones para las estructuras con voladizos 75
4.16 Arcos 77
4.17 Arcos de tres articulaciones 78
4.18 Usos de arcos y de estructuras con voladizos 83
4.19 Cables 83
4.20 Problemas para solucionar 88

CAPÍTULO 5
Fuerza cortante y momento flexionante **95**

5.1 Introducción 95
5.2 Diagramas de fuerza cortante 97
5.3 Diagramas de momento 98
5.4 Relaciones entre cargas, fuerzas cortantes y momentos flexionantes 98
5.5 Diagramas de momento flexionante dibujados a partir de diagramas de fuerza cortante 99
5.6 Diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para marcos estáticamente determinados 106
5.7 Ecuaciones de la fuerza cortante y del momento flexionante 110
5.8 Problemas para solucionar 112

CAPÍTULO 6
Introducción al estudio de las armaduras planas **117**

6.1 Introducción 117
6.2 Hipótesis para el análisis de armaduras 118
6.3 Notación para las armaduras 119
6.4 Armaduras para techos 120
6.5 Armaduras para puentes 121
6.6 Disposición de los elementos de una armadura 122
6.7 Determinación estática de las armaduras 123
6.8 Métodos de análisis y convenciones 127
6.9 Método de los nudos 129
6.10 Análisis por computadora de armaduras estáticamente determinadas 134
6.11 Problema de ejemplo en computadora 135
6.12 Problemas para solucionar 138

CAPÍTULO 7
Armaduras planas (continuación) **143**

7.1 Análisis por el método de las secciones 143
7.2 Aplicación del método de las secciones 144
7.3 Método de los cortantes 151
7.4 Miembros con fuerza cero 153
7.5 Cuando las hipótesis no son correctas 155
7.6 Armaduras simples, compuestas y complejas 156
7.7 Prueba de la carga cero 157
7.8 Estabilidad 159
7.9 Ecuaciones de condición 161
7.10 Problemas para solucionar 162

CAPÍTULO 8
Armaduras espaciales o tridimensionales **168**

8.1 Introducción 168
8.2 Principios básicos 168
8.3 Ecuaciones del equilibrio estático 169
8.4 Estabilidad de las armaduras espaciales 171
8.5 Teoremas especiales aplicables a las armaduras tridimensionales 171
8.6 Tipos de apoyo 172
8.7 Ejemplos ilustrativos 173
8.8 Solución usando ecuaciones simultáneas 178
8.9 Problema de ejemplo con SABLE32 180
8.10 Problemas para solucionar 182

CAPÍTULO 9
Líneas de influencia para vigas **185**

9.1 Introducción 185
9.2 Definición de la línea de influencia 185
9.3 Líneas de influencia para las reacciones de una viga simple 186
9.4 Líneas de influencia para fuerzas cortantes en vigas simples 187
9.5 Líneas de influencia para momentos en vigas simples 188

9.6 Líneas de influencia cualitativas 189
9.7 Usos de las líneas de influencia; cargas concentradas 194
9.8 Usos de las líneas de influencia; cargas uniformes 195
9.9 Fórmulas comunes para vigas simples a partir de líneas de influencia 196
9.10 Determinación de los efectos máximos de la carga usando líneas de influencia 197
9.11 Efectos máximos de las cargas usando la curvatura de la viga 198
9.12 Cargas de impacto 199
9.13 Problemas para solucionar 201

CAPÍTULO 10
Líneas de influencia y cargas móviles en armaduras **204**

10.1 Líneas de influencia en armaduras 204
10.2 Disposición de los sistemas de piso de puentes 204
10.3 Líneas de influencia para las reacciones de una armadura 206
10.4 Líneas de influencia para las fuerzas de los miembros de armaduras de cuerda paralela 206
10.5 Líneas de influencia para fuerzas de miembros de armaduras de cuerda no paralela 208
10.6 Líneas de influencia para armaduras K 210
10.7 Determinación de las fuerzas máximas 211
10.8 Barras de contratensión en las armaduras de puentes 213
10.9 Cargas vivas para puentes carreteros 215
10.10 Cargas vivas para puentes ferroviarios 219
10.11 Valores máximos para cargas móviles 220
10.12 Problemas para solucionar 223

CAPÍTULO 11
Deflexiones y cambios angulares usando métodos geométricos **225**

11.1 Introducción 225
11.2 Croquis de las deformaciones de las estructuras 225
11.3 Razones para calcular las deflexiones 230
11.4 Teoremas del área del diagrama de momento 232
11.5 Aplicación de los teoremas del área del diagrama de momento 234
11.6 Análisis de vigas doblemente empotradas 241
11.7 Teorema de Maxwell sobre las deflexiones recíprocas 243
11.8 Problemas para solucionar 245

CAPÍTULO 12
Deflexiones y cambios angulares usando métodos geométricos (continuación) **248**

12.1 El método de los pesos elásticos 248
12.2 Aplicación del método de los pesos elásticos 249
12.3 Limitaciones del método del peso elástico 254
12.4 Método de la viga conjugada 255
12.5 Resumen de vigas conjugadas 257
12.6 Equilibrio 257
12.7 Resumen de relaciones en vigas 258
12.8 Aplicación del método de la viga conjugada a vigas 258
12.9 Deflexiones a largo plazo 260

12.10 Aplicación del método de la viga conjugada a marcos 261
12.11 Problemas para solucionar 261

CAPÍTULO 13
Deflexiones y cambios angulares usando métodos de energía **264**

13.1 Introducción a los métodos de energía 264
13.2 Principio de la conservación de la energía 264
13.3 Trabajo virtual o método del trabajo virtual complementario 265
13.4 Deflexiones en armaduras por trabajo virtual 267
13.5 Aplicación del trabajo virtual en las armaduras 269
13.6 Cálculo de deflexiones en vigas y en marcos mediante el método del trabajo virtual 273
13.7 Problemas de ejemplo para vigas y marcos 274
13.8 Cálculo de rotaciones o cambios angulares por medio del trabajo virtual 281
13.9 Introducción a los teoremas de Castigliano 283
13.10 Segundo teorema de Castigliano 284
13.11 Problemas para solucionar 289

PARTE DOS:
ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS
Métodos clásicos

CAPÍTULO 14
Introducción a las estructuras estáticamente indeterminadas **297**

14.1 Introducción 297
14.2 Estructuras continuas 298
14.3 Ventajas de las estructuras indeterminadas 300
14.4 Desventajas de las estructuras indeterminadas 302
14.5 Métodos para analizar estructuras estáticamente indeterminadas 303
14.6 Mirando hacia adelante 304

CAPÍTULO 15
Métodos de fuerzas para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas **305**

15.1 Vigas y marcos con una redundante 305
15.2 Vigas y marcos con dos o más redundantes 314
15.3 Asentamiento de apoyos 316
15.4 Problemas para solucionar 320

CAPÍTULO 16
Métodos de fuerzas para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas (continuación) **322**

16.1 Análisis de armaduras con redundantes externas 322
16.2 Análisis de armaduras con redundantes internas 326
16.3 Análisis de armaduras con redundantes internas y externas 329
16.4 Cambios de temperatura, contracción, errores de fabricación, etcétera 330
16.5 Primer teorema de Castigliano 332

16.6 Análisis con computadoras 341
16.7 Problemas para solucionar 342

CAPÍTULO 17
Líneas de influencia para estructuras estáticamente indeterminadas **347**

17.1 Líneas de influencia para vigas estáticamente indeterminadas 347
17.2 Líneas de influencia cualitativas 353
17.3 Líneas de influencia para armaduras estáticamente indeterminadas 356
17.4 Problemas para solucionar 360

CAPÍTULO 18
Pendiente-deflexión: Un método de análisis por desplazamientos **363**

18.1 Introducción 363
18.2 Deducción de las ecuaciones de pendiente-deflexión 363
18.3 Aplicación de las ecuaciones de pendiente-deflexión a vigas continuas 366
18.4 Vigas continuas con extremos simplemente apoyados 369
18.5 Diversos aspectos relacionados con las vigas continuas 371
18.6 Análisis de vigas con asentamientos en los apoyos 372
18.7 Análisis de marcos sin desplazamiento lateral 374
18.8 Análisis de marcos con desplazamiento lateral 376
18.9 Análisis de marcos con columnas inclinadas 382
18.10 Problemas para solucionar 382

PARTE TRES:
ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS
Métodos comunes actualmente en uso

CAPÍTULO 19
Análisis aproximado de estructuras estáticamente indeterminadas **389**

19.1 Introducción 389
19.2 Armaduras con dos diagonales en cada tablero 390
19.3 Vigas continuas 391
19.4 Análisis de estructuras de edificios para cargas verticales 395
19.5 Análisis de portales 398
19.6 Análisis de marcos de edificio para cargas laterales 400
19.7 Análisis aproximado de marcos comparados con el análisis "exacto" por SABLE32 407
19.8 Distribución de momentos 408
19.9 Análisis de "armaduras" Vierendeel 408
19.10 Problemas para solucionar 410

CAPÍTULO 20
Distribución de momentos en vigas **413**

20.1 Introducción 413
20.2 Relaciones básicas 415

20.3 Definiciones 417
20.4 Convención de signos 419
20.5 Aplicación de la distribución de momentos 419
20.6 Modificación de la rigidez para el caso de extremos simples 424
20.7 Diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante 425
20.8 Soluciones con computadora con SABLE32 428
20.9 Problemas para solucionar 430

CAPÍTULO 21
Distribución de momentos para marcos **433**

21.1 Marcos sin desplazamiento lateral 433
21.2 Marcos con desplazamiento lateral 435
21.3 Momentos debidos al desplazamiento lateral 437
21.4 Marcos con elementos inclinados 447
21.5 Marcos de niveles múltiples 451
21.6 Análisis con computadora de los marcos 455
21.7 Problemas para solucionar 457

CAPÍTULO 22
Introducción a los métodos matriciales **461**

22.1 Análisis de estructuras con el uso de la computadora 461
22.2 Métodos matriciales 461
22.3 Repaso de álgebra matricial 462
22.4 Métodos de análisis de las fuerzas y de los desplazamientos 462
22.5 Introducción al método de las fuerzas o de las flexibilidades 463
22.6 Problemas para solucionar 468

CAPÍTULO 23
Fundamentos del método de los desplazamientos o de las rigideces **470**

23.1 Introducción 470
23.2 Relaciones generales 470
23.3 Ecuaciones de rigideces para barras con fuerza axial 472
23.4 Ecuaciones de rigideces para las barras sometidas a flexión 478
23.5 Matriz de rigidez para elementos combinados sujetos a fuerza axial y flexión 487
23.6 Características de las matrices de rigideces 489
23.7 Relación entre las matrices de rigideces y de flexibilidad 490
23.8 Problemas para solucionar 492

CAPÍTULO 24
Matrices de rigideces para elementos inclinados **494**

24.1 Generalidades 494
24.2 Elementos con fuerza axial 494
24.3 Elementos sometidos a flexión 500
24.4 Carga entre nodos 510
24.5 Problemas para solucionar 515

CAPÍTULO 25
Temas adicionales de métodos matriciales **518**

25.1 Generalidades 518
25.2 Adición de las ecuaciones de rigideces 518
25.3 Matrices de rigideces para elementos inclinados 520
25.4 Ecuaciones de rigideces para estructuras con desplazamientos impuestos 523
25.5 Ecuaciones de rigideces para estructuras con elementos que experimentan cambios de temperatura 524
25.6 Ecuaciones de rigideces para estructuras cuyos elementos tienen longitudes incorrectas 526
25.7 Aplicaciones de la partición de matrices 526
25.8 Condensación 527
25.9 Ancho de banda de las matrices de rigideces para estructuras generales 528
25.10 Problemas para solucionar 531

APÉNDICES

APÉNDICE A
La ecuación de la catenaria **533**

APÉNDICE B
Álgebra matricial **538**

B.1 Introducción 538
B.2 Definiciones y propiedades de las matrices 538
B.3 Tipos especiales de matrices 539
B.4 Determinante de una matriz cuadrada 540
B.5 Matriz adjunta 541
B.6 Aritmética matricial 542
B.7 Método de Gauss para resolver ecuaciones simultáneas 547
B.8 Temas especiales 548

APÉNDICE C
Cargas eólica, sísmica y de nieve. Tablas y figuras **553**

APÉNDICE D
Análisis por computadora de diversas estructuras con SAP2000 **565**

D.1 Introducción 565
D.2 Análisis de estructuras planas 565
D.3 Análisis de armaduras espaciales 567
D.4 Análisis de armaduras planas estáticamente indeterminadas 568
D.5 Análisis de estructuras compuestas 570
D.6 Análisis de vigas y marcos continuos 571

APÉNDICE E
Fórmulas útiles **573**

Glosario **577**
Índice **583**

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

PARTE UNO

ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

Capítulo 1

Introducción

1.1 ANÁLISIS Y DISEÑO ESTRUCTURAL

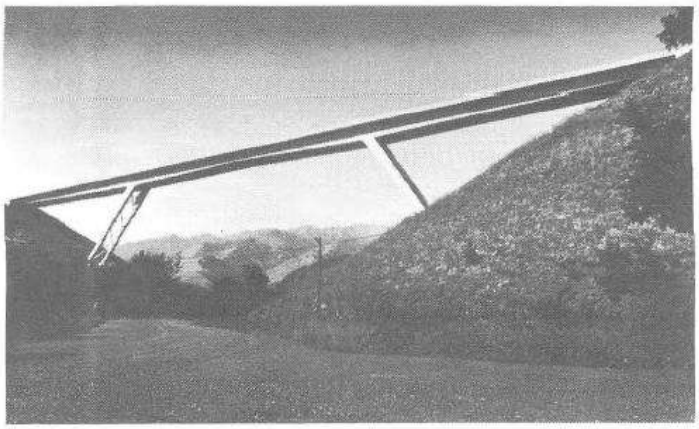
La aplicación de cargas a una estructura ocasiona que la estructura se deforme. Debido a la deformación, se producen varias fuerzas en las componentes que constituyen la estructura. Se denomina *análisis estructural* al cálculo de la magnitud de estas fuerzas, así como de las deformaciones que las causaron, lo cual es un tema muy importante para la sociedad. En realidad, casi todas las ramas de la tecnología tienen que ver tarde o temprano con interrogantes relacionadas con la resistencia y la deformación de los sistemas estructurales.

El *diseño estructural* incluye la disposición y el dimensionamiento de las estructuras y de sus partes, de manera que soporten en forma satisfactoria las cargas a las cuales puedan estar sujetas. Más específicamente, el diseño estructural implica lo siguiente: la disposición general del sistema estructural; el estudio de las configuraciones estructurales alternativas que proporcionen soluciones factibles; la consideración de las condiciones de carga; el análisis y el diseño estructural preliminares de las soluciones posibles; la selección de una solución y el análisis y el diseño estructural final de la estructura. El diseño estructural también incluye la preparación de planos.

Este libro se dedica al análisis estructural e incluye sólo algunas observaciones ocasionales relativas a otras fases del diseño estructural. El análisis estructural puede resultar tan interesante para los ingenieros que se convierten en sus adeptos y quizá decidan dedicarse por completo a su estudio. Aunque el análisis y la predicción del comportamiento de las estructuras y de sus partes es una etapa extremadamente importante del diseño estructural, en realidad sólo se trata de uno de varios pasos importantes interrelacionados. En consecuencia, es poco común que un ingeniero se dedique de manera exclusiva al análisis estructural. El ingeniero probablemente se ocupará de varias o de todas las fases del diseño estructural.

Se dice que Robert Louis Stevenson estudió ingeniería estructural durante algún tiempo, pero aparentemente encontró que la "ciencia de los esfuerzos y las deformaciones" era demasiado aburrida para su fértil imaginación. Se dedicó a estudiar leyes por un tiempo antes de dedicar el resto de su vida a escribir prosa y poesía.[1] La mayoría de quienes hemos leído *La isla del tesoro, Secuestrado,* o sus otras obras estamos de acuerdo en que el mundo es un mejor sitio para vivir debido a su decisión. Sin embargo, somos muchos los que pensamos que el análisis y el diseño estructural son temas muy interesantes. De hecho, algunos de nosotros los hallamos tan interesantes que nos hemos dedicado a ejercer en el campo de la ingeniería estructural. Los autores esperan que este libro induzca a más ingenieros a hacer lo mismo.

[1] Proceedings of the First United States Conference on Prestressed Concrete (Cambridge, Mass.: Massachusetts Institute of Technology, 1951), 1.



Puente White Bird Canyon, White Bird, Idaho. (Cortesía del American Institute of Steel Construction, Inc.)

1.2 HISTORIA DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

El análisis estructural, tal como lo conocemos actualmente, evolucionó durante varios miles de años. Durante este tiempo, muchos tipos de estructuras, como vigas, arcos, armaduras y marcos, se usaron en la construcción a lo largo de cientos o miles de años antes de que se desarrollaran para ellas métodos satisfactorios de análisis. Si bien los antiguos ingenieros mostraron tener cierto entendimiento del comportamiento estructural (como lo prueban sus exitosas construcciones de grandes puentes, catedrales, barcos de vela, etc.), un progreso real en la teoría del análisis estructural ocurrió sólo en los últimos 175 años.

Los egipcios y otros antiguos constructores contaban seguramente con algunas reglas empíricas obtenidas de la experiencia previa para determinar los tamaños de los miembros estructurales. Sin embargo, no contamos con pruebas de que hayan desarrollado alguna teoría de análisis estructural. El egipcio Imhotep, quien construyó la gran pirámide escalonada de Sokkara alrededor del año 3000 a. C., es considerado a veces como el primer ingeniero estructural del mundo.

Aunque los griegos construyeron algunas magníficas estructuras, sus contribuciones a la teoría estructural fueron pocas y muy espaciadas. Pitágoras (aprox. 582-500 a. C.), de quien se dice que creó la palabra *matemáticas*, es famoso por el teorema geométrico que lleva su nombre. Este teorema en realidad ya era conocido por los sumerios hacia el año 2000 a. C. Posteriormente, Arquímedes (287-212 a. C.) desarrolló algunos principios fundamentales de la estática e introdujo el término *centro de gravedad*.

Los romanos fueron constructores extraordinarios y muy competentes en el uso de ciertas formas estructurales, como son los arcos semicirculares de mampostería. Al igual que los griegos, ellos también tenían muy pocos conocimientos del análisis estructural e hicieron aun menos progresos científicos en teoría estructural. Probablemente, diseñaron la mayoría de sus hermosos edificios desde un punto de vista más bien artístico. Tal vez sus grandes puentes y acueductos fueron dimensionados con reglas empíricas; sin embargo, si esos métodos de diseño condujeron a dimensiones insuficientes, las estructuras deben haber fallado sin que haya quedado un registro histórico de ellas. Solamente sus construcciones exitosas prevalecieron.

Una de las más grandes y notables contribuciones al análisis estructural, así como a todos los otros campos científicos, fue el desarrollo del sistema de numeración hindú-arábigo. Matemáticos hindúes desconocidos crearon en los siglos II y III a. C., un sistema de numeración del uno al nueve. Alrededor del año 600 d. C., los hindúes inventaron el símbolo *sunya* (que significa vacío), que

ahora llamamos cero. Sin embargo, los indígenas mayas de la América central ya habían desarrollado el concepto de cero aproximadamente 300 años antes.[2]

En el siglo VIII d. C., los árabes tomaron este sistema de numeración de los escritos científicos de los hindúes. En el siguiente siglo, un matemático persa escribió un libro que incluyó al sistema. Su libro fue traducido al latín algunos años después y llevado a Europa.[3] Alrededor del año 1000 d. C., el papa Silvestre II decretó que los números hindú-arábigos deberían ser usados por los cristianos.

Antes de que pudieran hacerse avances reales en el análisis estructural, fue necesario desarrollar la ciencia de la mecánica de los materiales. Hacia mediados del siglo XIX se habían hecho grandes progresos en esta área. Un físico francés, Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) y un ingeniero-matemático francés, Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836), con base en el trabajo de numerosos investigadores realizado a lo largo de cientos de años, sentaron las bases de la ciencia de la mecánica de materiales. Especial importancia tuvo un libro de texto publicado por Navier en 1826, en el que analizó las resistencias y las deflexiones de vigas, columnas, arcos, puentes colgantes y otras estructuras.

Se cree que fue Andrea Palladio (1508-1580), un arquitecto italiano, quien usó por primera vez las armaduras modernas. Él revivió algunos tipos de estructuras romanas antiguas, así como las reglas empíricas para dimensionarlas. Sin embargo, fue hasta 1847 que Squire Whipple (1804-1888) introdujo el primer método racional para el análisis de armaduras. Ésta fue la primera gran contribución de Estados Unidos a la teoría de las estructuras. Se dice con frecuencia que el análisis de armaduras de Whipple señaló el principio del análisis estructural moderno. Desde entonces ha habido una serie continua de importantes desarrollos en esta ciencia.

Varios métodos excelentes para calcular deflexiones fueron publicados entre 1860 y 1870, y éstos aceleraron el desarrollo del análisis estructural. Entre los más importantes investigadores y sus logros se cuentan: James Clerk Maxwell (1831-1879), de Escocia, por su teorema de las deflexiones recíprocas, publicado en 1864; Otto Mohr (1835-1918), de Alemania, por su método de los pesos elásticos, presentado en 1870; Carlo Alberto Castigliano (1847-1884), de Italia, por su teorema sobre el trabajo mínimo en 1873; y Charles E. Greene (1842-1903), de Estados Unidos, por sus teoremas de área-momento, publicados en 1873.

El advenimiento de los ferrocarriles dio un gran impulso al desarrollo del análisis estructural. De pronto fue necesario construir puentes de grandes claros capaces de soportar cargas móviles muy pesadas. En consecuencia, el cálculo de esfuerzos y deformaciones adquirió gran importancia.

Un método para analizar vigas continuas estáticamente indeterminadas (el teorema de los tres momentos) fue dado a conocer en 1857 por el francés B. P. E. Clapeyron (1799-1864) y se usó para el análisis de muchos puentes de ferrocarril. En las décadas que siguieron se realizaron múltiples avances en el análisis de estructuras indeterminadas, basados en los recientes métodos desarrollados para el cálculo de deflexiones.

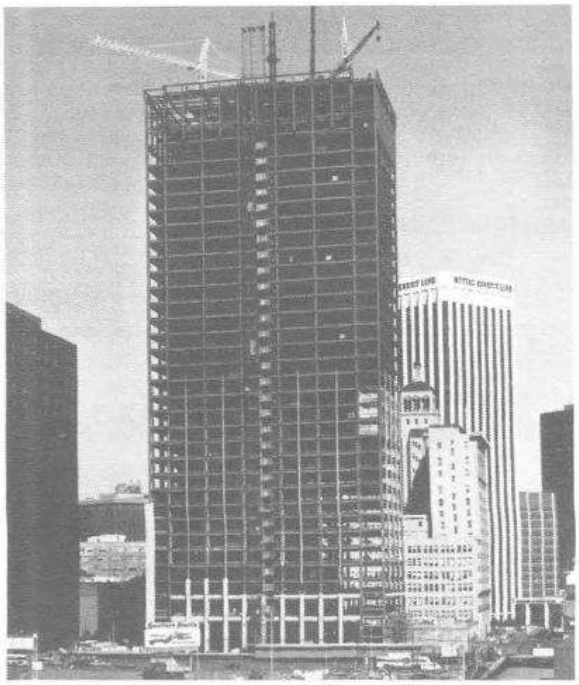
Otto Mohr, quien trabajó con ferrocarriles, reformuló en forma práctica y utilizable muchos de los desarrollos teóricos antes obtenidos. Al respecto, es notable su publicación en 1874 del método de las deformaciones consistentes para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas.

En Estados Unidos, dos grandes desarrollos en el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas fueron hechos por G. A. Maney (1888-1947) y Hardy Cross (1885-1959). En 1915 Maney presentó el método pendiente-deflexión, mientras que Cross introdujo la distribución de momentos en 1924.

[2] *The World Book Encyclopedia* (Chicago, Ill., 1993, Libro N-O), p. 617.

[3] *Ibídem*.

En la primera mitad del siglo XX, muchos problemas estructurales complejos fueron expresados en forma matemática, pero no se disponía entonces de computadoras para resolver prácticamente las ecuaciones resultantes. Esta situación continuó en la década de 1940, cuando gran parte del trabajo para analizar las estructuras de aviones se realizó con matrices. Por fortuna, el desarrollo de las computadoras digitales hizo práctico el uso de las ecuaciones para ésas y para muchos otros tipos de estructuras, incluidos los edificios de gran altura.



Edificio de la oficina matriz de la Pacific Gas and Electric Company, San Francisco. (Cortesía de Bethlehem Steel Corporation.)

Algunas referencias históricas de gran importancia sobre el desarrollo del análisis estructural son las de Kinney[4], Timoshenko[5] y Westergaard.[6] Éstas documentan el lento pero constante desarrollo de los principios fundamentales implicados. Parece irónico que los estudiantes de hoy día puedan aprender en unos pocos meses las teorías y los principios del análisis estructural que a muchos eruditos les tomó miles de años desarrollar.

1.3 PRINCIPIOS BÁSICOS DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

La ingeniería estructural abarca una extensa variedad de sistemas estructurales. Cuando se habla de estructuras, la gente comúnmente piensa en los puentes y los edificios. Sin embargo, existen muchos otros tipos de sistemas con los que tratan los ingenieros estructurales, tales como estadios deportivos y de entretenimiento, torres de radio y televisión, arcos, tanques de almacenamiento, estructuras espaciales y de aeronaves, pavimentos de concreto y estructuras de tejidos llenadas con

[4] J. S. Kinney, *Indeterminate Structural Analysis* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957), 1-16.

[5] S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials* (Nueva York: McGraw-Hill, 1953), 1-439.

[6] H. M. Westergaard, "One Hundred Fifty Years Advance in Structural Analysis" (*ASCE- 94,* 1930), 226-240.

Bodega de almacenamiento en frío en Grand Junction, Colorado. (Cortesía del American Institute of Steel Construction, Inc.)

aire. El tamaño de estas estructuras puede variar desde un miembro individual, como en el caso de un poste de luz, hasta edificios o puentes de gran tamaño. La Torre Sears en Chicago tiene más de 1 450 pies de altura, mientras que el edificio 101 en Taipei en Taiwan tiene una altura de 1 670 pies. Entre los grandes puentes del mundo están el puente del estuario Humber, en Inglaterra, con su claro colgante que tiene más de 4 626 pies de largo, y el puente Akashi-Kaikyo en Japón con su claro colgante principal de aproximadamente 6 530 pies. Actualmente se están desarrollando planos para construir un puente que conecte a Sicilia con Italia continental durante la próxima década. El claro colgante principal está proyectado para alcanzar una magnitud increíble de 2.05 millas.

Para tener la capacidad de analizar esta amplia variedad de tamaños y tipos de estructuras, un ingeniero estructural debe tener un conocimiento sólido de los principios básicos aplicables a todos los sistemas estructurales. No parece aconsejable aprender a analizar un tipo específico o aun algunos tipos diferentes de estructuras. En lugar de ello es más importante aprender los principios fundamentales que son aplicables a todos los sistemas estructurales, independientemente de su tipo o uso. Nunca se sabe qué tipos de problemas encierra el futuro o qué tipo de sistema estructural podría concebirse para una aplicación específica, pero un conocimiento sólido de los principios básicos nos ayudará a analizar con confianza a las estructuras nuevas.

Los principios fundamentales que se aplican en el análisis estructural son las leyes del movimiento y de la inercia de Sir Isaac Newton, que son:

1. Un cuerpo estará en estado de reposo o en estado de movimiento uniforme en línea recta, a menos que sea forzado a cambiar ese estado por fuerzas impuestas a él.
2. La razón de cambio del *momentum* o cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza neta aplicada.
3. Para toda acción existe una reacción igual y opuesta.

Estas leyes del movimiento pueden expresarse con la ecuación

$$\sum F = ma$$

En esta ecuación, ΣF es la sumatoria de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, m es la masa del cuerpo y a es su aceleración.

En este texto trataremos con un tipo particular de equilibrio denominado *equilibrio estático*, en el que el sistema no está acelerado. La ecuación de equilibrio toma entonces la forma

$$\sum F = 0$$

Esas estructuras no se mueven, como en la mayoría de las estructuras de la ingeniería civil, o se mueven con velocidad constante, como lo hacen los vehículos espaciales en órbita. Con el uso del principio del equilibrio estático se estudiarán las fuerzas que actúan sobre las estructuras, así como los métodos para determinar la respuesta de las estructuras a esas fuerzas. Por respuesta queremos decir el desplazamiento del sistema y las fuerzas que ocurren en cada componente del sistema. Este enfoque debe proporcionar a los lectores una base sólida para un estudio avanzado, y esperamos que los convenza de que la teoría estructural no es difícil y que no es necesario memorizar casos especiales.

1.4 COMPONENTES Y SISTEMAS ESTRUCTURALES

Todos los sistemas estructurales están integrados por componentes. Las componentes principales de una estructura son las siguientes:

- *Tirantes:* aquellos miembros sometidos sólo a fuerzas axiales de tensión. La carga se aplica a los tirantes solamente en los extremos. Los tirantes no pueden resistir fuerzas generadas por flexión.
- *Puntales:* aquellos miembros sometidos sólo a fuerzas axiales de compresión. Al igual que un tirante, un puntal puede cargarse solamente en sus extremos y tampoco puede resistir fuerzas generadas por flexión.
- *Vigas y trabes:* aquellos miembros sometidos principalmente a fuerzas de flexión. Casi siempre son miembros horizontales sometidos principalmente a fuerzas de gravedad; pero existen excepciones frecuentes (por ejemplo, viguetas inclinadas).
- *Columnas:* aquellos miembros sometidos principalmente a fuerzas axiales de compresión. Una columna también puede estar sometida a fuerzas de flexión. Generalmente las columnas son miembros verticales, pero pueden ser inclinadas.
- *Diafragmas:* componentes estructurales que son placas planas. Generalmente los diafragmas tienen una muy alta rigidez en su plano. Comúnmente se usan en pisos y muros cortantes. Los diafragmas suelen salvar claros entre vigas o columnas. Pueden estar rigidizados con costillas para resistir mejor las fuerzas fuera de su plano.

Las componentes estructurales se ensamblan para formar sistemas estructurales. En este texto trataremos con marcos estructurales típicos. En la figura 1.1 se muestra un edificio con estructuración reticular. En esta figura se considera que una trabe es una viga grande con vigas de menor tamaño conectadas a ella.

Una *armadura* es un tipo especial de marco estructural. Está compuesta enteramente de puntales y tirantes. Es decir, todas sus componentes están conectadas de manera que están sometidas sólo a fuerzas axiales. Se supone que todas las cargas externas que actúan sobre las armaduras están aplicadas en sus nudos y no directamente a sus componentes, donde las primeras causarían flexión en los miembros de la armadura. En la figura 1.2 se muestra un tipo antiguo de estructura de puente que consta de dos armaduras. En esta figura, las *cuerdas superior e inferior* y las *diagonales* son las componentes principales que soportan carga en las armaduras. Las *vigas de piso* se usan para sustentar a los carriles de rodamiento. Se colocan bajo los carriles de rodamiento y son perpendiculares a las armaduras.

Hay otros tipos de sistemas estructurales. Entre ellos se cuentan las estructuras a base de tejidos (por ejemplo, tiendas y estadios abiertos) y las estructuras a base de cascarones curvos (por ejemplo, las cortinas de presas y los estadios deportivos). El análisis de estos tipos de estructuras requiere principios avanzados de mecánica estructural y está más allá del alcance de este libro.

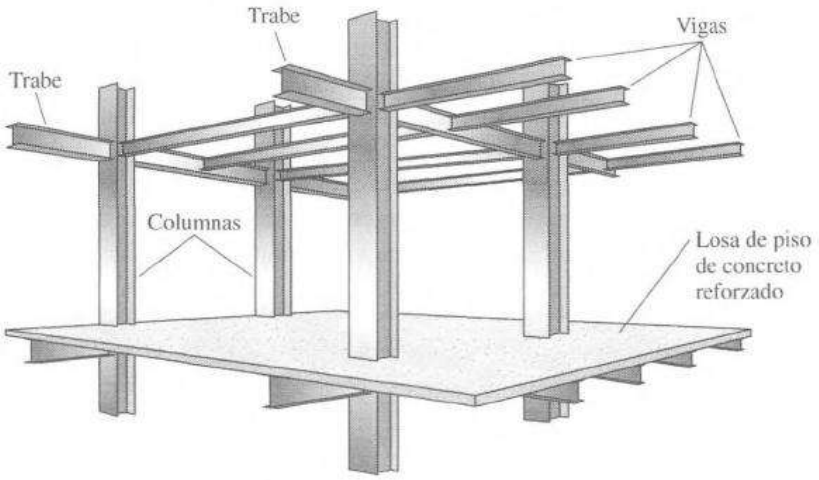
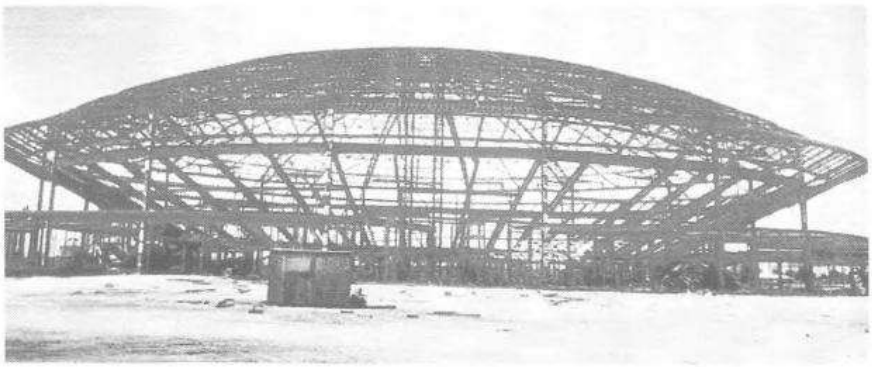


Figura 1.1 Estructuración típica de un edificio.

Figura 1.2 Algunas componentes de una armadura para puente de ferrocarril.

1.5 FUERZAS ESTRUCTURALES

Sobre un sistema estructural actúan fuerzas. Se supone que por la influencia de esas fuerzas toda la estructura se encuentra en un estado de equilibrio estático y, como consecuencia, cada componente de la estructura también está en un estado de equilibrio estático. Las fuerzas que actúan sobre una estructura incluyen las cargas aplicadas y las fuerzas de reacción resultantes.



Centro de Convenciones de Las Vegas. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

Las cargas aplicadas son las cargas conocidas que actúan sobre una estructura. Ellas pueden ser las resultantes del peso propio de la estructura, de las cargas de ocupación, de las cargas ambientales, etc. Las reacciones son las fuerzas que los soportes ejercen sobre una estructura. Ellas se consideran como parte de las fuerzas externas aplicadas y están en equilibrio con las otras cargas externas sobre la estructura.

A manera de presentación de las cargas y las reacciones, en la figura 1.3 se muestran tres sistemas estructurales simples. La viga mostrada en la parte (a) de la figura sustenta una carga gravitacional uniformemente distribuida y a su vez está sustentada por reacciones hacia arriba en sus extremos. La barcaza en la parte (b) de la figura transporta un grupo de contenedores en su cubierta. Ésta a su vez está sustentada por una presión hidrostática uniformemente distribuida proporcionada por el agua debajo. La parte (c) muestra un marco de edificio sujeto a una carga eólica lateral. Esta carga tiende a voltear a la estructura, por lo que se requiere una reacción

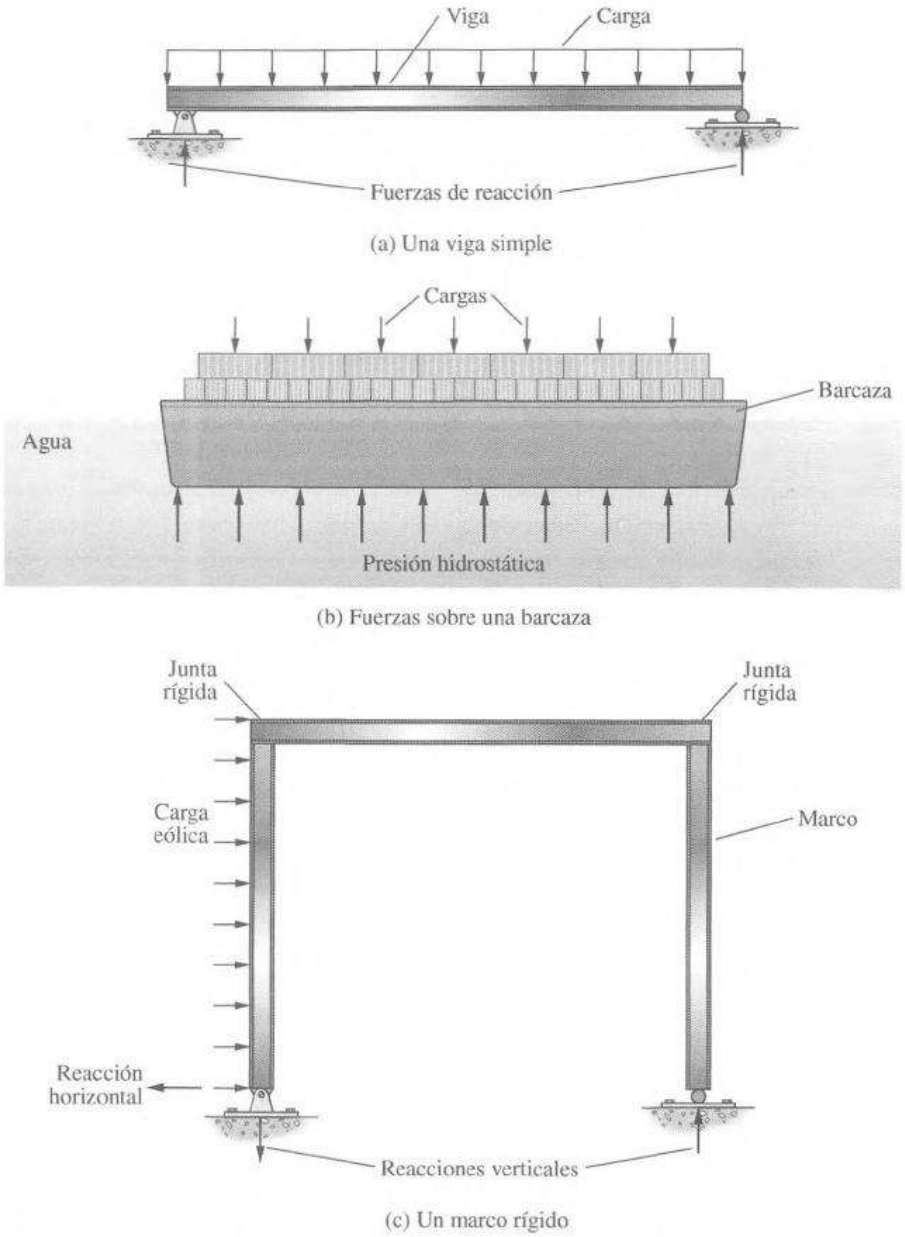


Figura 1.3 Cargas y reacciones para tres estructuras simples.

hacia arriba en el apoyo derecho y otra hacia abajo en el apoyo izquierdo. Estas fuerzas crean un par que contrarresta el efecto de la fuerza eólica. En el capítulo 4 se presenta un análisis detallado de las reacciones y de su cálculo.

1.6 IDEALIZACIÓN ESTRUCTURAL (DIAGRAMAS DE LÍNEAS)

Para calcular con relativa sencillez y exactitud las fuerzas en las diferentes partes de una estructura, es necesario representar la estructura de una manera sencilla susceptible de análisis. Las componentes estructurales tienen ancho y espesor. Las fuerzas concentradas rara vez actúan en un punto aislado; generalmente se distribuyen sobre áreas pequeñas. Sin embargo, si estas características se consideran con detalle, el análisis de una estructura será muy difícil, si no es que imposible de realizar.

El proceso de reemplazar una estructura real por un sistema simple susceptible de análisis se llama *idealización estructural*. A menudo, las líneas localizadas a lo largo de las líneas centrales de las componentes representan a las componentes estructurales. El croquis de una estructura idealizada de esta manera se llama *diagrama de líneas*.

La preparación de los diagramas de líneas se muestra en la figura 1.4. En la parte (a) de la figura, la viga de madera que se muestra sustenta a varios largueros de piso y ésta a su vez se apoya en tres muros de bloque de concreto. La distribución real de las fuerzas que actúan sobre la viga se muestra en la parte (b) de la figura. Sin embargo, para propósitos de análisis, podemos representar en forma conservadora a la viga y sus cargas y reacciones con el diagrama de líneas de la parte (c). Los claros con carga son más largos con el resultado de que las fuerzas cortantes y los momentos son mayores que los valores reales.

En la figura 1.5 se presenta otro diagrama de líneas para el sistema de piso de un edificio con marcos de acero. A lo largo del texto se presentan más diagramas de líneas diferentes a medida que se necesite.

En algunas ocasiones, la idealización de una estructura implica formular hipótesis sobre el comportamiento de la estructura. Como ejemplo, consideremos la armadura atornillada de acero para techo que se muestra en la figura 1.6(a). Los nudos de las armaduras a menudo son hechos con grandes placas de conexión o de nudo que, como tales, pueden transferir momentos a los extremos de los miembros. Sin embargo, la experiencia ha mostrado que los esfuerzos causados por las fuerzas axiales en los miembros exceden en forma considerable a los esfuerzos causados por las fuerzas de flexión. Entonces, para los fines del análisis podemos suponer que la armadura consta de un conjunto de líneas conectadas por pasadores, como se muestra en la figura 1.6(b).

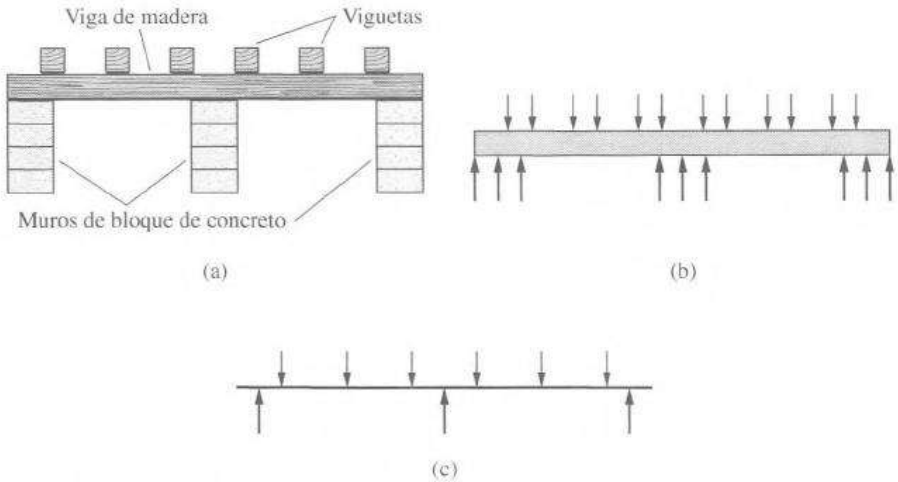


Figura 1.4 Reemplazo de una estructura y sus fuerzas por un diagrama de líneas.

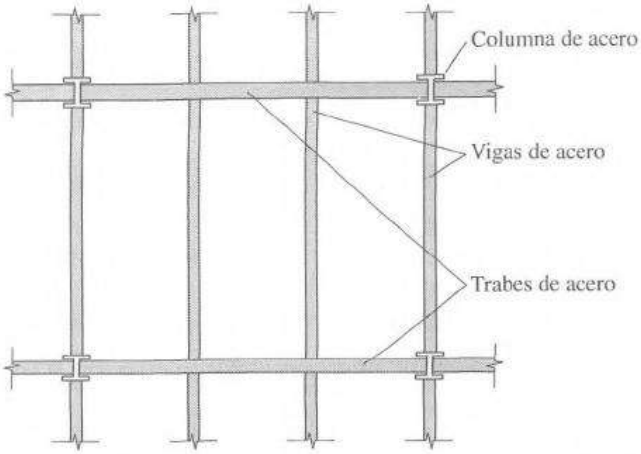


Figura 1.5 Diagrama de líneas de una parte del sistema de piso de un edificio con marcos de acero.

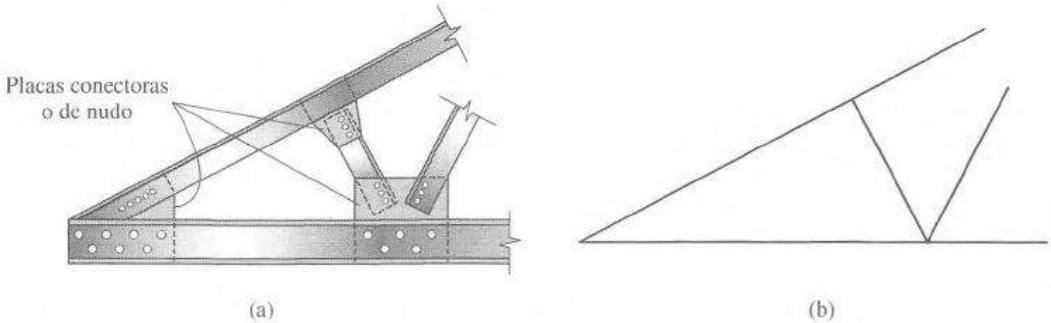
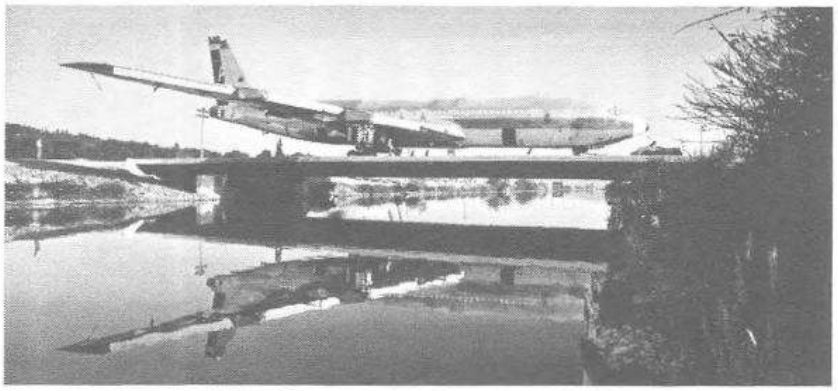


Figura 1.6 Diagrama de líneas de una parte de una armadura de acero para techo.

Si bien el uso de diagramas de líneas simples para el análisis de estructuras no conducirá a un análisis perfecto, los resultados suelen ser aceptables. Sin embargo, a veces el analista podrá tener dudas acerca de qué diagrama de líneas o modelo exacto usar para el análisis de una estructura particular. Por ejemplo, ¿las longitudes de las vigas deben corresponder a claros libres entre soportes o deben ser iguales a las distancias centro a centro de esos soportes? ¿Los soportes deben suponerse con capacidad para girar con libertad bajo la acción de las cargas, deben suponerse empotrados, o bien deben tener capacidad de rotación intermedia entre los dos casos extremos anteriores? Debido a que se suscitan muchas preguntas como éstas, quizá sea necesario considerar diferentes modelos y efectuar el análisis de cada uno para determinar los peores casos.



Puente de acceso, Renton, Washington. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

1.7 EXACTITUD DE LOS CÁLCULOS

Un punto muy importante que muchos estudiantes con sus magníficas calculadoras de bolsillo y computadoras personales encuentran difícil de entender, es que el análisis estructural no es una ciencia exacta en la que puedan calcularse respuestas confiables con ocho o más cifras significativas. Los resultados obtenidos con tres cifras significativas son probablemente más precisos que las estimaciones de las resistencias de los materiales y que las magnitudes de las cargas usadas para el análisis y el diseño estructural. Los materiales que se usan de manera común en las estructuras (madera, acero, concreto y algunos otros) tienen resistencias últimas que sólo pueden estimarse de manera aproximada. Las cargas aplicadas a las estructuras pueden conocerse sólo con una aproximación de unas cuantas centenas de libras o no más que unos cuantos miles de libras. Por lo tanto, parece inconsistente emplear cálculos de fuerzas con más de tres o cuatro cifras significativas.

Presa y embalse Hungry Horse, en las Montañas Rocallosas, en la parte noroeste de Montana. (Cortesía de la Montana Travel Promotion Division.)

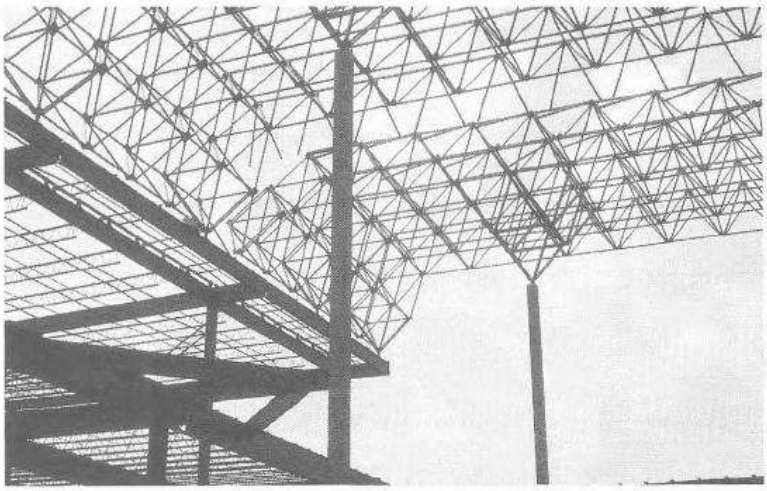
Formularemos algunas hipótesis, sólo parcialmente ciertas, sobre la construcción de armaduras tales como: que los miembros de las armaduras se encuentran conectados por medio de pasadores sin fricción; o que las deformaciones de los miembros cargados de las armaduras son tan pequeñas que no causarán ningún efecto en las fuerzas en los miembros, etc. Estas discrepancias de las condiciones reales enfatizan que es de poca utilidad efectuar el análisis estructural con demasiadas cifras significativas. Además, los cálculos con más de tres o cuatro cifras significativas pueden ser adversamente engañosos; hacerlo así puede dar un falso sentido de precisión.

1.8 VERIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS

Una ventaja definitiva del análisis estructural es la posibilidad de efectuar verificaciones matemáticas de éste con algún otro método distinto al empleado al inicio, o bien con el mismo método pero desde otra ubicación en la estructura. El lector debería ser capaz, en casi todas las situaciones, de poder determinar si ha hecho su trabajo en forma correcta.

Desafortunadamente, en toda persona existe la tendencia a cometer errores exasperantes, y lo más que podemos hacer es tratar de reducirlos a un mínimo. La aplicación de ciertas revisiones aritméticas sencillas, que se proponen en los próximos capítulos, eliminará muchos de esos

costosos errores. El mejor ingeniero estructural no es necesariamente el que comete menos errores inicialmente, sino tal vez el que descubre el mayor porcentaje de ellos y los corrige.



Galería del Valle Oxford, Langehorne, Pennsylvania. (Cortesía de Bethlehem Steel Corporation.)

1.9 IMPACTO DE LAS COMPUTADORAS EN EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

La disponibilidad de computadoras personales ha modificado de manera drástica la forma en que se analizan y diseñan las estructuras. En casi toda oficina y escuela de ingeniería, las computadoras se usan para resolver problemas estructurales. Sin embargo, es interesante observar que hasta este momento la percepción en la mayoría de las escuelas de ingeniería ha sido que la mejor manera de enseñar el análisis estructural es con gis y pizarrón, tal vez complementado con algunos ejemplos de computadora.

Un porcentaje más bien grande de profesores de ingeniería estructural piensa que los estudiantes deben aprender primero las teorías que intervienen en el análisis estructural y la solución de los problemas con sus calculadoras de bolsillo antes de introducir las aplicaciones de computadora. Como resultado, el autor ha puesto las aplicaciones de computadora al final de los capítulos para que puedan usarse en ese momento, dejarlas de lado u omitirse temporalmente hasta una fecha posterior, como lo prefiera el profesor. El lector debe percatarse que en la cobertura de cómputo contenida aquí no se presenta ninguna teoría que no se incluya en otras secciones del libro.

Este libro proporciona dos programas de cómputo. Éstos son SABLE32 (Structural Analysis and Behavior for Learning Engineering) y SAP2000. Ambos programas pueden descargarse del sitio del libro en la red en www.wiley.com/college/mccormac.

Para el autor fue muy difícil decidir la inclusión de uno de estos programas o de ambos. SABLE32 se preparó específicamente para manejar problemas de análisis estructural del tipo incluido en este texto, así como los tipos de problemas que se encuentran en un texto elemental que trate del diseño de concreto reforzado. Cierto tiempo después de la preparación de SABLE32, se concedió el acceso al autor a la versión estudiantil del programa estructural mucho más extenso SAP2000.

Una persona que no esté familiarizada con alguno de los dos programas puede aprender a usar SABLE32 en muy poco tiempo, mientras que el uso de SAP2000 requerirá considerable tiempo de estudio. El programa es la versión para estudiantes del SAP2000, que es un programa que ha sido muy utilizado. Su versión completa se usa extensamente en la profesión de ingeniería

no sólo en Estados Unidos, sino también en muchos otros países. Aunque a los estudiantes les tomará mucho más tiempo y esfuerzo aprender SAP2000, serán ampliamente recompensados por sus esfuerzos. Es el tipo de programa que van a usar después de titularse si trabajan para una compañía de ingeniería. Tal vez este conocimiento les dé una ventaja inicial en sus primeros empleos. Aquí está contenida muy poca información sobre la aplicación de SAP2000 y se piensa que las secciones de AYUDA del programa proporcionan un conjunto suficiente de instrucciones. Como resultado, la mayoría de los ejemplos suministrados aquí y en el manual de soluciones disponible para los profesores se manejan con el programa simple y directo SABLE32. En el apéndice D de este texto de presentan varios problemas de ejemplo que utilizan SAP2000.

Capítulo 2

Cargas estructurales

2.1 INTRODUCCIÓN

Con frecuencia los profesores de estructuras preguntan a sus ex-alumnos si piensan que fueron *preparados adecuadamente en sus cursos de estructuras para sus primeros empleos. En general la* respuesta es: Sí, en la mayoría de las áreas, pero probablemente no en la de estimar las cargas de diseño. Ésta es una respuesta más bien perturbadora porque la estimación exacta de la magnitud y naturaleza de las cargas que las estructuras tendrán que sustentar durante su vida útil es quizá la tarea más importante del diseñador.

Este libro de texto analiza un gran número de estructuras (vigas, marcos, armaduras, etc.), con todo tipo de cargas aplicadas sobre ellas. El lector podría preguntarse: "¿De dónde provienen todas esas cargas?" A esta importante y lógica pregunta se le da respuesta en éste y en el siguiente capítulo.

En la actualidad los ingenieros estructurales usan algún tipo de paquete computacional en su trabajo. Si bien esto les permite analizar y diseñar con rapidez estructuras una vez establecidas las cargas, les es de poca ayuda para seleccionar éstas.

En este capítulo se muestran varios tipos de cargas, así como las especificaciones con las cuales pueden estimarse las magnitudes de las cargas individuales. Nuestro objetivo es poder responder a preguntas como las siguientes: ¿Qué tan pesada puede llegar a ser una carga de nieve sobre una escuela en Minneapolis? ¿Qué fuerza máxima del viento puede esperarse en un hotel de Miami? ¿Cuánta carga por lluvia es probable que se dé en un techo plano en Houston?

Los métodos que se usan para estimar las cargas están siendo constantemente afinados y pueden implicar algunas fórmulas muy complicadas. Sin embargo, el estudiante no debe preocuparse por aprender esas fórmulas de memoria. Más bien, debe aprender a distinguir los diferentes tipos de cargas que pueden aplicarse a un tipo particular de estructura y saber encontrar la información disponible para estimar la magnitud de esas cargas.

El autor está consciente de que las secciones adjuntas sobre cargas eólicas y sísmicas pueden ser un poco abrumadoras para estudiantes que apenas comienzan el estudio de las estructuras. Se ha incluido el material principalmente para usarse como introducción y como referencia para un estudio futuro y no como una parte esencial de un curso elemental en análisis estructural. La estimación de las magnitudes de las cargas eólicas y sísmicas es tan complicada que con frecuencia estos temas constituyen cursos universitarios completos. Cuando se tomen en semestres posteriores cursos de diseño sobre acero estructural y concreto reforzado, el estudiante aprenderá más acerca de las fuerzas eólicas y las fuerzas sísmicas. Debemos percatarnos de que los procedimientos para estimar las cargas eólicas y sísmicas cambian constantemente a través de los años como resultado de una continua investigación de estos temas.

Una vez que el autor inició el estudio de estas cargas, le fue muy difícil encontrar un lugar razonable para detenerse. Es probable que los profesores de los cursos de análisis estructural ele-

mental, para quienes se preparó este libro, no requieran que los estudiantes aprendan con detalle la información presentada. Aquí el objetivo del autor es dar al estudiante una idea de los temas que intervienen en la estimación de la magnitud de las cargas eólicas y sísmicas así como servir como punto inicial y referencia para un estudio adicional cuando sea necesario en trabajos posteriores.

2.2 SEGURIDAD ESTRUCTURAL

Una estructura debe ser adecuada para soportar todas las cargas a las que pueda estar previsiblemente expuesta durante su vida útil. No solamente debe sustentar estas cargas con seguridad, sino que debe hacerlo de manera tal que las deflexiones y las vibraciones no sean tan grandes como para asustar a los ocupantes o causar grietas visibles.

El lector podría pensar que todo lo que tiene que hacer un diseñador de estructuras es observar algunas estructuras similares a aquella para la cual se está preparando para diseñar, estimar las cargas que sustentan estas estructuras, y luego diseñar su estructura para que sea lo suficientemente fuerte para sustentar esas cargas y un poquito más en aras de la seguridad. Sin embargo, no es tan sencillo porque hay muchas incertidumbres en el diseño; algunas de ellas son las siguientes:

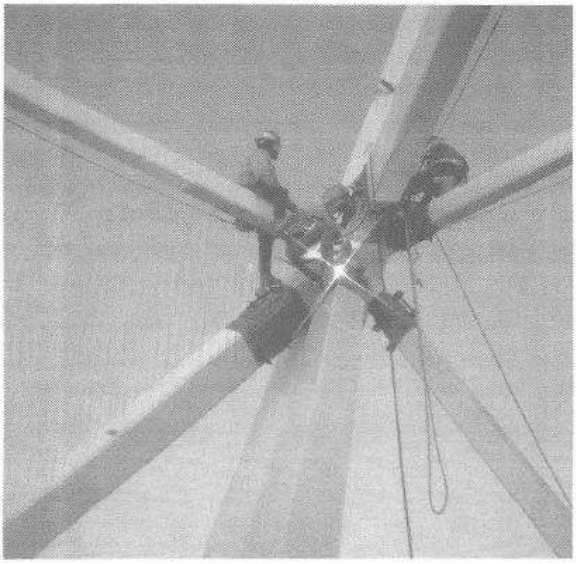
1. La resistencia de los materiales puede variar considerablemente de sus valores supuestos y variará más con el tiempo debido al flujo, la corrosión y la fatiga.
2. Con frecuencia, los métodos de análisis de las estructuras están sujetos a errores considerables.
3. Las llamadas "miserias de la naturaleza" o actos de Dios (terremotos, huracanes, lluvia y tormentas de nieve) causan cargas que son muy difíciles de predecir.
4. Hay cambios tecnológicos que causan un incremento en las cargas, tales como camiones, trenes o tanques del ejército que cruzan nuestros puentes.
5. Las cargas que se presentan durante las operaciones de construcción pueden ser severas y sus magnitudes son difíciles de predecir.
6. Entre otras incertidumbres que las estructuras enfrentan están las variaciones del tamaño de los miembros, los esfuerzos residuales y las concentraciones de esfuerzos.

Muchos años de experiencia, tanto favorable como desfavorable, en el diseño, han conducido a especificaciones detalladas y a los reglamentos de construcción. Este capítulo está dedicado a algunos de los requerimientos de cargas para esas especificaciones. Últimamente la seguridad del público es el aspecto principal en el tema de selección de las magnitudes de las cargas de diseño.

2.3 ESPECIFICACIONES Y REGLAMENTOS DE CONSTRUCCIÓN

El diseño de la mayoría de las estructuras está regulado por especificaciones. Aun cuando no sea así, el ingeniero probablemente se remitirá a las especificaciones como guía. Sin importar cuántas estructuras haya diseñado una persona, es imposible que conozca todos los casos. Al remitirse a las especificaciones, el ingeniero estará haciendo uso del mejor material disponible sobre el tema. Las especificaciones, que han sido desarrolladas por varias organizaciones, presentan la mejor opinión por lo que se refiere a una buena práctica.

Las autoridades municipales y estatales responsables de la seguridad pública han establecido reglamentos de construcción con los que controlan la construcción de diversas estructuras dentro de su jurisdicción. Esos reglamentos, que en realidad son leyes o normas, especifican las cargas y los esfuerzos de diseño, así como los tipos de construcción, la calidad de los materiales y otros factores. Los reglamentos pueden variar en forma considerable de ciudad a ciudad, lo cual puede provocar algo de confusión entre los arquitectos y los ingenieros.



La estructura que alberga el radiotelescopio más grande del mundo en Green Bank, Virginia Occidental. (Cortesía de la Lincoln Electric Company.)

La determinación de la magnitud de las cargas es sólo una parte de la determinación de las cargas estructurales. El ingeniero estructural debe ser capaz de determinar qué cargas puede esperarse de manera razonable que actúen en forma concurrente sobre una estructura. Por ejemplo, ¿un puente carretero cubierto por completo con hielo y nieve podría estar sometido simultáneamente en todos sus carriles a fuerzas dinámicas de camiones muy cargados y a un viento lateral de 90 millas por hora, o es más razonable y realista suponer una combinación menos severa de esas cargas? El tema de las cargas concurrentes se trata por primera vez en el capítulo 3, junto con el problema asociado de la colocación de esas cargas sobre una estructura, de manera que se obtenga la condición más severa posible.

Numerosas organizaciones publican normas o especificaciones de uso regional o nacional. Sin embargo, tales especificaciones no tienen carácter legal, a menos que formen parte del reglamento de construcción local o sean parte de un contrato particular. Entre esas organizaciones se cuentan la ASCE (American Society of Civil Engineers)[1], la AASHTO (American Association of State Highway and Transportation Officials)[2], y la AREA (American Railway Engineering Association)[3].

Recientemente, el International Code Council (Consejo Internacional de Normas) ha desarrollado el *International Building Code*®[4] (Reglamento Internacional de la Construcción). Este reglamento se desarrolló para satisfacer las necesidades de un reglamento de construcciones moderno para sistemas de construcción que enfatizan el rendimiento. El *International Building Code* (IBC-2003) está pensado para servir como un conjunto de reglamentos modelo para salvaguardar al público en todas las comunidades.

Los lectores deben saber que los reglamentos escritos con lógica y claridad son de considerable ayuda para los ingenieros estructurales. Además, ocurren mucho menos fallas estructurales

[1] American Society of Civil Engineers, *ASCE 7-02, Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures* (Cargas mínimas de diseño para edificios y otras estructuras), Reston, Virginia 20191-4400, 2002.

[2] American Association of State Highway and Transportation Officials, *AASHTO LRFD Bridge Design Specifications* (Especificaciones de diseño de puentes según el LRFD de la AASHTO) (Washington, D. C. 2002).

[3] American Railway Engineering Association, *Specifications for Steel Railway Bridges* (Especificaciones para puentes de acero para ferrocarriles) (Washington, D. C. 2003).

[4] *2003 International Building Code* (Falls Church, Virginia 22041-3401, International Code Council, Inc., 2003).

en las áreas que tienen buenos reglamentos y que éstos son puestos en vigor estrictamente. Las especificaciones publicadas por las organizaciones mencionadas se usan con frecuencia para estimar las cargas máximas a las que pueden estar sujetos los edificios, los puentes y otras estructuras durante su vida útil estimada.

Algunas personas creen que las especificaciones impiden a los ingenieros pensar por sí mismos, y tal vez haya alguna base para tal crítica. Los eruditos plantean que los antiguos ingenieros que construyeron las grandes pirámides, el Partenón y los grandes puentes romanos, estaban regidos por pocas especificaciones. Esta afirmación es cierta. Por otra parte, no debe olvidarse que sólo algunos de esos grandes proyectos fueron construidos a lo largo de muchos siglos y sin importar el costo del material, de la mano de obra o de vidas humanas. Probablemente fueron construidos por intuición y con ayuda de ciertas reglas empíricas que se desarrollaron observando el tamaño o la resistencia mínima de los miembros que fallarían sólo en ciertas condiciones. Sus fallas, tal vez, numerosas, no han quedado registradas en la historia. Sólo prevalecieron los proyectos construidos con éxito.

Actualmente se construyen en Estados Unidos cientos de proyectos que tienen tanta importancia y magnitud como las famosas estructuras del pasado. Los reglamentos y las especificaciones de construcción son preparados por expertos con conocimientos en temas específicos para proporcionar una guía a los ingenieros y un estándar mínimo de práctica aceptable para el diseño en una región específica. El resultado es que hay menos fallas que ocasionan desastres y el público está mejor protegido. *Por lo tanto, lo importante que debemos recordar acerca de las especificaciones es que no están escritas con el fin de restringir a los ingenieros. En lugar de ello, su propósito es proteger al público.* Sin embargo, sin importar cuántas especificaciones se escriban, es imposible que éstas incluyan toda situación posible. En consecuencia, independientemente de qué reglamento o especificación sea o no usado, la responsabilidad última del diseño de una estructura segura la tiene el ingeniero estructural.

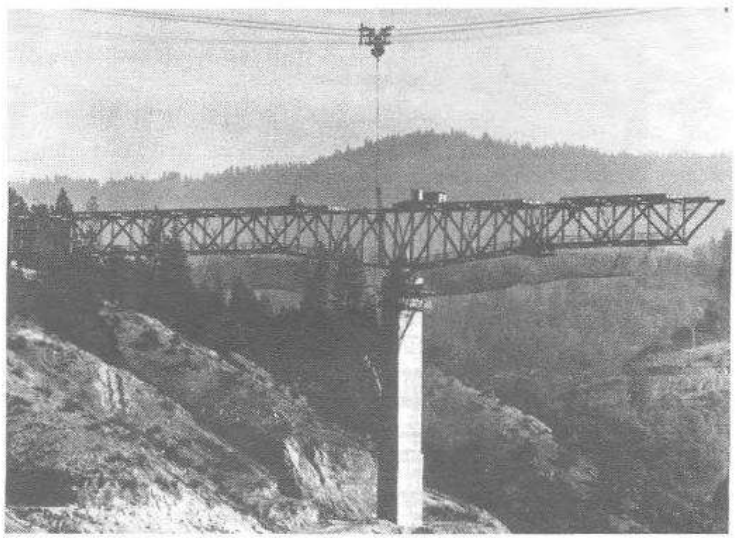
En muchas ocasiones las especificaciones prescribirán con claridad las cargas con que deberán diseñarse las estructuras. Sin embargo, a pesar de la disponibilidad de esta información, el ingenio y el conocimiento de la situación por parte del ingeniero son a menudo necesarios para predecir las cargas que una estructura particular tendrá que soportar en los años venideros. Por ejemplo, durante las últimas décadas, las estimaciones insuficientes de las futuras cargas de tránsito hechas por los ingenieros de puentes han resultado en una gran cantidad de reemplazos por estructuras más anchas y resistentes.

Este capítulo proporciona una introducción a los tipos básicos de cargas con las que el ingeniero estructural tiene que estar familiarizado. Su propósito es ayudar al lector a entender las cargas estructurales y su comportamiento, así como proporcionar una base para estimar sus magnitudes. Sin embargo, no debe considerarse como una exposición completa sobre el tema de las cargas que pueden aplicarse a cualquier tipo de estructura que el ingeniero deba diseñar.

Las cargas de edificios son las que se mencionan con mayor frecuencia en este texto, debido a que los ingenieros estructurales se ocupan de ellas con regularidad. El documento básico que en la actualidad utiliza un gran número de ingenieros para estimar las cargas por aplicarse a edificios es la especificación ASCE 7. Ésta se menciona de manera constante en este capítulo y ha sido incorporada en muchos códigos modelos de construcción. Esta especificación fue originalmente preparada y publicada por el American National Standards Institute y llamada ANSI 58.1 Standard. Como tal, fue revisada en varias ocasiones. En 1988, la ASCE se hizo cargo de ella y fue llamada ANSI/ASCE 7. Mucha de la información que figura en este libro se basa en la edición de 2002 de esta especificación, que ahora se llama ASCE 7-02. También se hace referencia al *International Building Code* (IBC-2003).

Al estudiar la información que se proporciona en este capítulo o al consultar cualquier especificación que proporcione cargas de diseño, el lector debe recordar que éstas son cargas mínimas de diseño. Un ingeniero siempre debe considerar las cargas mínimas de diseño con cierta reserva. Las normas de diseño resultan excelentes y están bien preparadas para la mayoría de las situaciones que se encuentran en la práctica. Sin embargo, puede darse el caso de una configu-

ración de edificio, o un uso de edificio, para los cuales las cargas de diseño especificadas sean inadecuadas. Un ingeniero estructural debe evaluar las cargas de diseño mínimas especificadas para determinar si son adecuadas para el sistema estructural que proyecta diseñar.



Puente South Fork Feather River, en el norte de California, en proceso de montaje por medio de un cable aéreo de 1 626 pies de largo colgado de mástiles de 210 pies de altura anclados a cada lado del cañón. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

2.4 TIPOS DE CARGAS ESTRUCTURALES

En general, las cargas estructurales son clasificadas atendiendo a su carácter y a su duración. Las cargas que suelen aplicarse a edificios se clasifican como sigue:

- *Cargas muertas:* aquellas cargas de magnitud constante que permanecen en una sola posición. Éstas incluyen el peso de la estructura considerada, así como cualquier accesorio que quede permanentemente unido a ella.
- *Cargas vivas:* aquellas cargas que pueden cambiar su magnitud y posición. Incluyen las cargas de ocupación, los materiales almacenados, las cargas de construcción, las grúas elevadas de servicio y las cargas para operar el equipo. En general, las cargas vivas son inducidas por gravedad.
- *Cargas ambientales:* aquellas cargas causadas por el ambiente en que se encuentra la estructura. Por lo que se refiere a los edificios, las cargas ambientales son causadas por lluvia, nieve, viento, temperatura y sismo. Estrictamente hablando, éstas también son cargas vivas, pero son el resultado del ambiente en que se localiza la estructura.

2.5 CARGAS MUERTAS

Las cargas muertas que debe soportar una estructura particular incluyen todas las cargas que están unidas de manera permanente a ella. No sólo debe ser incluido el peso de los marcos estructurales, sino también el de muros, techos, plafones, escaleras, etcétera.

El equipo unido de manera permanente a la estructura, descrito como "equipo fijo de servicio" en la ASCE 7-02, también se incluye en la carga muerta aplicada al edificio. Ese equipo incluye los sistemas de ventilación y de aire acondicionado, los dispositivos de la instalación sanitaria, los cables eléctricos, las ménsulas de soporte, etc. De acuerdo con el uso al que se destine la estructura, el equipo de cocina, como hornos y lavaplatos, el equipo de lavado y secado de ropa, y los pasillos colgantes, podrían también incluirse en la carga muerta.

Las cargas muertas que actúan sobre la estructura se determinan con base en los planos arquitectónicos, mecánicos y eléctricos del edificio. Con esos planos, el ingeniero estructural puede estimar el tamaño de la estructura necesaria para la disposición del edificio, el equipo y los detalles de los acabados indicados. Los manuales y las especificaciones estándar de los fabricantes pueden usarse para determinar el peso de los acabados de pisos y plafones, y del equipo y los dispositivos que se utilizarán. Los pesos aproximados de algunos materiales comunes usados para muros, pisos y plafones se muestran en la tabla 2.1.

TABLA 2.1 PESO DE ALGUNOS MATERIALES COMUNES DE CONSTRUCCIÓN

Material de construcción	Peso unitario	Material de construcción	Peso unitario
Concreto reforzado	150 lb/pie^2	Piso doble de madera, 2 × 2@ 16 plg	7 lb/pie^2
Loseta para plafón acústico	1 lb/pie^2	Loseta de linóleo o asfalto	1 lb/pie^2
Plafón colgante	2 lb/pie^2	Piso de madera dura ($\frac{7}{8}$ plg)	4 lb/pie^2
Yeso sobre concreto	5 lb/pie^2	Cubierta de 1 plg de cemento sobre concreto	32 lb/pie^2
Tejas de asfalto	2 lb/pie^2	Subdivisiones de acero movibles	4 lb/pie^2
Techado de tres capas	1 lb/pie^2	Montantes de madera con una capa de $\frac{1}{2}$ plg de yeso	8 lb/pie^2
Ductos mecánicos	4 lb/pie^2	Hiladas de 4 plg de ladrillo de arcilla	39 lb/pie^2

Es posible que las estimaciones del peso del edificio o de otras cargas muertas estructurales deban ser revisadas una o más veces durante el proceso de análisis y/o diseño. Antes de poder diseñar una estructura, ésta deberá analizarse. Entre las cargas usadas para el primer análisis están las estimaciones de los pesos de las componentes de la estructura, la cual se diseña usando los resultados de ese análisis. Su peso puede ser calculado y comparado con la estimación inicial del peso usada en el análisis. Si se encuentra una diferencia considerable, la estructura deberá analizarse de nuevo usando una estimación revisada del peso de la estructura. Este ciclo se repetirá tantas veces como sea necesario.

2.6 CARGAS VIVAS

Las cargas vivas son aquellas cargas que pueden variar en magnitud y posición con el tiempo. Son causadas por la ocupación, uso y mantenimiento del edificio. Prácticamente todas las cargas aplicadas a un edificio que no son cargas muertas son cargas vivas. Las cargas ambientales, que en realidad son cargas vivas de acuerdo con nuestra definición acostumbrada, figuran en una lista aparte que proporciona la ASCE 7-02 e IBC-2003. Si bien las cargas ambientales varían con el tiempo, no todas son causadas por gravedad o por condiciones de operación, como es común con otras cargas vivas.

En la tabla 2.2 se presentan algunas cargas vivas típicas que actúan sobre estructuras de edificios. Las cargas mostradas en la tabla fueron tomadas de la tabla 4-1 de la ASCE 7-02 y de la tabla 1607.1 en IBC-2003. Ellas actúan hacia abajo y tienen distribución uniforme sobre un piso o techo entero.

Muchas especificaciones para edificios proporcionan las cargas concentradas que deben considerarse en el diseño. Ésta es la situación en la Sección 4.3 de la ASCE 7-02 y la Sección 1607.4 del IBC-2003. Estas especificaciones estipulan que el ingeniero debe considerar el efecto de

TABLA 2.2 ALGUNAS CARGAS VIVAS TÍPICAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDAS

Uso del área	Carga viva	Uso del área	Carga viva
Salas de reunión	100 lb/pie^2	Salones de clase en escuelas	40 lb/pie^2
Salones de baile	100 lb/pie^2	Corredores en pisos superiores de escuelas	80 lb/pie^2
Salas de lectura en bibliotecas	60 lb/pie^2	Escaleras y salidas de emergencia	100 lb/pie^2
Cuartos de almacenaje de libros en bibliotecas	150 lb/pie^2	Bodegas de almacenamiento pesado	250 lb/pie^2
Manufactura ligera	125 lb/pie^2	Tiendas de menudeo, planta baja	100 lb/pie^2
Oficinas en edificios de oficinas	50 lb/pie^2	Tiendas de menudeo, pisos superiores	75 lb/pie^2
Áreas habitacionales	40 lb/pie^2	Pasillos y plataformas elevadas	60 lb/pie^2

ciertas cargas concentradas como alternativa a las cargas uniformes antes mencionadas. Es claro que se trata de que la carga usada para el diseño sea la que cause los esfuerzos más severos.

La tabla 4-1 de la ASCE 7-02 y la tabla 1607.1 del IBC-2003 presentan las cargas concentradas mínimas que han de considerarse. Algunos valores típicos de esta tabla se muestran en la tabla 2.3. Las cargas apropiadas deben colocarse sobre un piso o un techo en particular, de manera que causen los esfuerzos más grandes (tema que se estudiará con todo detalle en los capítulos 3 y 10). A menos que se especifique otra cosa, cada una de las cargas concentradas se supondrá distribuida de manera uniforme sobre un área cuadrada de 2.5 pies $\times$ 2.5 pies (6.25 pies^2).

TABLA 2.3 CARGAS VIVAS CONCENTRADAS TÍPICAS

Área o componente estructural	Carga viva concentrada
Rejilla sobre 4 plg^2 de cuarto de máquinas de elevador	300 lb
Pisos de oficinas	2 000 lb
Centro de huella de escalera sobre 4 plg^2	300 lb
Aceras	8 000 lb
Plafones accesibles	200 lb

Al estimar la magnitud de las cargas vivas que se pueden aplicar a una estructura particular durante la vida de ésta, es necesario considerar el uso futuro de esa estructura. Por ejemplo, los edificios modernos de oficinas se construyen a menudo con grandes espacios abiertos que pueden luego ser divididos en oficinas y otras áreas de trabajo por medio de muros provisionales. Esos muros pueden moverse, removerse o ser adicionados durante la vida de la estructura. Los reglamentos de construcción suelen requerir que las cargas de esos muros sean consideradas si la carga viva de piso es menor que 80 lb/pie^2, aun si esos muros no se muestran en los planos. Una práctica bastante común de los ingenieros estructurales es incrementar las cargas vivas de diseño de piso especificadas en 20 lb/pie^2 para estimar el efecto de las subdivisiones futuras, imposibles de anticipar. Ésta es la carga mínima por muros provisionales especificada en la Sección 1607.5 del IBC-2003.

El método usado en la ASCE 7-02 para establecer la magnitud de las cargas vivas es un proceso bastante complicado que se describe en los Comentarios a esa especificación. Entre los factores que contribuyen a generar un valor particular especificado se encuentran la carga media especificada, su variación con el tiempo, la magnitud de las cargas transitorias de corta duración y el periodo de referencia, el cual es típicamente de 50 años.

Para convencer al lector de que las cargas de la especificación son razonables, consideraremos un breve ejemplo de uno de los valores especificados. El ejemplo usado aquí es la carga viva de 100 lb/pie^2 especificada por la ASCE 7-02 para los vestíbulos de teatros y para áreas de reunión. Se quiere determinar si esta carga es razonable para un grupo de personas que permanecen quietas y cercanas entre sí. Se supone que el área en consideración está llena de hombres adultos que pesan

TABLA 2.4 FACTORES DE IMPACTO POR CARGA VIVA

Equipo o componente	Factor de impacto
Elevadores	100%
Maquinaria impulsada por motor	20%
Maquinaria alternativa	50%
Colgantes para pisos y balcones	33%

cada uno 165 lb y ocupan, también cada uno, un área de 20 por 12 pulgadas o 1.67 pies^2. La carga promedio aplicada es de 165/1.67 = 98.8 lb/pie^2. La carga viva especificada de 100 lb/pie^2 parece entonces razonable. En realidad es algo conservadora, ya que sería difícil tener hombres de pie tan cerca unos de los otros en un área pequeña o grande de un piso.

2.7 FACTORES DE IMPACTO POR CARGA VIVA

Las cargas de impacto son causadas por la vibración y la repentina detención o la caída de cargas móviles o movibles. Es claro que un bulto que se deja caer sobre el piso de una bodega, o un camión rebotando sobre el pavimento irregular de un puente, ocasionan fuerzas mayores que las que se presentarían si las cargas respectivas se aplicasen en forma gradual y sin brusquedad. Las cargas de impacto son iguales a la diferencia entre la magnitud de las cargas realmente causadas y la magnitud de las cargas en el caso de que éstas hubiesen sido muertas. En otras palabras, las cargas de impacto resultan de los efectos dinámicos de una carga cuando ésta se aplica a una estructura. Para las cargas estáticas, esos efectos son de corta duración y no requieren un análisis estructural dinámico. Sin embargo, ellas causan en los esfuerzos de la estructura un incremento que deberá considerarse. Las cargas de impacto suelen especificarse como un incremento porcentual de la carga viva básica. La tabla 2.4 muestra los porcentajes de impacto para los edificios que se especifican en la Sección 4.7.2 de la ASCE 7-02 y en la Sección 1607.8.2 del IBC-2003.

2.8 CARGAS VIVAS SOBRE TECHOS

Las cargas vivas que actúan sobre los techos se tratan en la mayoría de los reglamentos de construcción de manera un poco diferente a como se tratan las otras cargas vivas sobre edificios. La pendiente del techo (razón de la elevación al claro del techo) afecta la cantidad de carga que puede realmente colocarse sobre el mismo. Al incrementarse la pendiente, la cantidad de carga que puede colocarse sobre el techo, antes de que empiece a resbalar, decrece. Además, a medida que aumenta el área del techo que contribuye a la carga que actúa sobre un componente de soporte, es menos probable que el área entera del techo esté cargada en un momento dado.

Las cargas vivas máximas de techo por lo general son causadas por operaciones de reparación y mantenimiento que normalmente no ocurren de manera simultánea sobre todo el techo. Sin embargo, esto no es cierto con las cargas ambientales de nieve y lluvia, que serán consideradas en las secciones 2.9 y 2.15 de este capítulo.

En las ecuaciones que presentamos en esta sección se usa el término *área tributaria*. Este término, que se estudiará con detalle en el capítulo 3, se define como el área cargada de una estructura que contribuye directamente a la carga aplicada a un miembro en particular. Se considera que el área tributaria de un miembro va del miembro considerado hasta la mitad de la distancia de los miembros adyacentes en cada dirección. Cuando se analiza un edificio, es común que el ingeniero suponga que la carga soportada por un miembro sea la carga aplicada a su área tributaria. En la figura 2.1 se muestra el área tributaria para una columna.

La carga viva básica mínima de techo que se usa en diseño es de 20 lb/pie^2. Este valor se especifica en la Sección 4.9 de la ASCE 7-02 y en la Sección 1607.11.2.1 del IBC-2003. Este valor

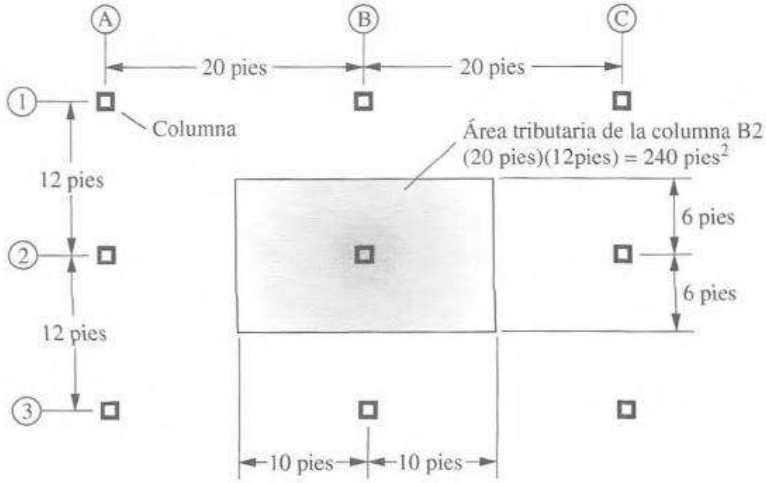


Figura 2.1 Área tributaria para una columna.

puede reducirse dependiendo del tamaño del área tributaria y de la elevación del techo. El valor real que habrá de usarse se determina con la expresión

$$L_r = 20R_1R_2$$
$$12 < L_r \leq 20$$

El término L_r representa la carga viva del techo en lb/pie^2 de proyección horizontal, mientras que R_1 y R_2 son factores de reducción. R_1 se usa para tomar en cuenta el tamaño del área tributaria A_t, en tanto que R_2 se incluye para estimar el efecto de la elevación del techo. Entre mayor sea el área tributaria (o mayor sea la elevación del techo) más pequeño será el factor de reducción aplicable, así como la carga viva de techo. La carga viva de techo máxima es de 20 lb/pie^2 y la mínima es de 12 lb/pie^2. A continuación se dan las expresiones para calcular R_1 y R_2.

$$R_1 = \begin{cases} 1.0 & A_t \leq 200 \text{ pies}^2 \\ 1.2 - 0.001A_t & 200 \text{ pies}^2 < A_t < 600 \text{ pies}^2 \\ 0.6 & A_t \geq 600 \text{ pies}^2 \end{cases}$$

$$R_2 = \begin{cases} 1.0 & F \leq 4 \\ 1.2 - 0.05F & 4 < F < 12 \\ 0.6 & F \geq 12 \end{cases}$$

El término F representa el número de pulgadas de elevación del techo por pie de claro. Si el techo es un domo o un arco, el término F es la razón de la elevación al claro de la estructura multiplicada por 32.

2.9 CARGAS DE LLUVIA

Se ha estimado que casi 50% de las demandas contra diseñadores de edificios en Estados Unidos tienen que ver con los sistemas de techo.[5] El *encharcamiento*, un problema presente en muchos techos planos, es uno de los temas comunes de esos litigios. Si en un techo el agua se acumula con más rapidez de lo que puede ser drenada, se llega al encharcamiento debido a que la carga incrementada sobre el techo lo deflexiona, dándole la forma de un plato que puede contener más agua, lo que a su vez ocasiona mayores deflexiones, y así indefinidamente. Este proceso se repite hasta

[5] Gary Van Ryzin, "Roof Design: Avoid Ponding by Sloping to Drain", *Civil Engineering* (Nueva York, ASCE, enero de 1980), 77-81.

que se alcanza el equilibrio, o la estructura se desploma. Por medio de una apropiada selección de cargas y un buen diseño que proporcione una rigidez adecuada del techo, se trata de evitar este último tipo de falla. Se dispone de muchas referencias útiles sobre el tema del encharcamiento.[6, 7, 8, 9]

Durante una tormenta, el agua se acumula sobre un techo por dos razones. Primera, cuando cae la lluvia se requiere tiempo para que el agua escurra por el techo. Por lo tanto, una parte de esta agua se acumulará. Segunda, los drenes de los techos pueden no estar a nivel con la superficie del techo y/o pueden estar obstruidos. En general, los techos con pendientes de 0.25 plg por pie o mayores no son susceptibles al encharcamiento, a menos que los drenes del techo estén obstruidos y permitan que se formen charcos profundos.

Además del encharcamiento, puede ocurrir otro problema en techos planos muy grandes (tal vez con áreas de media hectárea o mayores). Durante las lluvias fuertes se tienen a menudo fuertes vientos. Si se acumula gran cantidad de agua sobre el techo, es posible que un viento fuerte empuje una considerable porción de la misma hacia un extremo del techo. El resultado puede ser una peligrosa profundidad del agua con respecto a la carga en ese extremo del techo. Para esas situaciones se usan a veces *imbornales*. Los imbornales son grandes agujeros o tubos en las paredes o parapetos que permiten que el agua que ha excedido cierta profundidad pueda ser drenada con rapidez fuera del techo.

En general, en los techos se utilizan dos sistemas diferentes de drenaje. Estos sistemas se denominan drenaje primario y drenaje secundario. Usualmente, el sistema primario recoge el agua de la lluvia por medio de drenes superficiales sobre el techo y la dirige a ductos de tormenta. El sistema secundario consta de imbornales u otras aberturas o tubos en las paredes que permiten que el agua de la lluvia corra por los lados del edificio. Las entradas de los drenes secundarios con frecuencia se localizan a elevaciones superiores a las de las entradas del drenaje primario.

El sistema de drenaje secundario se usa para proporcionar un drenaje adecuado del techo en caso de que el sistema primario resulte obstruido o deje de funcionar por cualquier causa. La carga de diseño por agua de lluvia se basa, entonces, en la cantidad de agua que puede acumularse antes de que el sistema de drenaje secundario empiece a funcionar.

La determinación del agua que, durante una tormenta, puede acumularse sobre un techo antes de ser drenada depende de las condiciones locales y de la elevación de los drenes secundarios. La Sección 8 de la ASCE 7-02 especifica que la carga por lluvia (en lb/pie^2) sobre un techo no deflexionado puede calcularse con la siguiente expresión:

$$R = 5.2(d_s + d_h)$$

Ésta es la misma ecuación que se encuentra en el IBC-2003. El término d_s es la profundidad del agua (en pulgadas) sobre el techo no deflexionado hasta la entrada del sistema de drenaje secundario cuando el sistema de drenaje primario está bloqueado. Ésta es la carga estática, que puede determinarse con ayuda de los dibujos del sistema de techo. El término d_h es la profundidad adicional del agua sobre el techo no deflexionado, arriba de la entrada del sistema de drenaje secundario bajo su gasto de diseño. Ésta es la carga hidráulica, la cual depende de la capacidad de los drenes instalados y de la razón de la caída de la lluvia.

Según la Sección 8.3 de los Comentarios a la ASCE 7-02, el gasto (en galones por minuto) que un dren específico debe desalojar puede calcularse con la expresión

$$Q = 0.0104\,Ai$$

[6] F. J. Marino, "Ponding of Two-Way Roof System", *Engineering Journal*, AISC, tercer trimestre, núm. 3 (1966), 93-100.

[7] L. B. Burgett, "Fast Check for Ponding", *Engineering Journal*, AISC, 10, primer trimestre, núm. 1 (1973), 26-28.

[8] J. Chinn, "Failure of Simply-Supported Flat Roofs by Ponding of Rain", *Engineering Journal*, AISC, segundo trimestre, núm. 2 (1965), 38-41.

[9] J. L. Ruddy, "Ponding of Concrete Deck Floors", *Engineering Journal*, AISC, 23, tercer trimestre, núm. 2 (1986), 107-115.

El término A es el área del techo (en pies cuadrados) servida por un dren específico, e i es la intensidad de la lluvia (en pulgadas por hora). La intensidad de la lluvia es especificada por el reglamento que tenga jurisdicción en una zona específica. Una vez determinada la cantidad de flujo, la carga hidráulica puede determinarse con la tabla 2.5 (ASCE 7-02, Tabla C8-1) para el tipo de sistema de drenaje que se use. Si el sistema de drenaje secundario consiste meramente en el escurrimiento del agua por el borde del techo, entonces la carga hidráulica será cero.

TABLA 2.5 GASTO, Q, EN GALONES POR MINUTO PARA DIFERENTES SISTEMAS DE DRENADO Y CARGAS HIDRÁULICAS

	Carga hidráulica d_h (pulgadas)									
Sistema de drenado	1	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	7	8
Dren de 4 plg de diámetro	80	170	180							
Dren de 6 plg de diámetro	100	190	270	380	540					
Dren de 8 plg de diámetro	125	230	340	560	850	1 100	1 170			
Imbornal en canal de 6 plg de ancho	18	50		90		140		194	321	393
Imbornal en canal de 24 plg de ancho	72	200		360		560		776	1 284	1 572
Imbornal cerrado de 6 plg de ancho y 4 plg de altura	18	50		90		140		177	231	253
Imbornal cerrado de 24 plg de ancho y 4 plg de altura	72	200		360		560		708	924	1 012
Imbornal cerrado de 6 plg de ancho y 6 plg de altura	18	50		90		140		194	303	343
Imbornal cerrado de 24 plg de ancho y 6 plg de altura	72	200		360		560		776	1 212	1 372

Nota: La interpolación es apropiada, incluida entre anchos de cada imbornal. Los imbornales cerrados son de cuatro lados y los imbornales en canal son abiertos por arriba.

El ejemplo 2.1 plantea el cálculo de la carga de diseño por agua de lluvia para un techo con imbornales mediante la especificación ASCE 7-02.

EJEMPLO 2.1

Un techo de 240 pies × 160 pies tiene imbornales en forma de canal de 6 plg de ancho que sirven como drenes secundarios. Los imbornales están 4 plg arriba de la superficie del techo y espaciados cada 20 pies a lo largo de los dos lados de mayor longitud del edificio. La lluvia de diseño para esta localidad es de 3 plg por hora. ¿Cuál es la carga de diseño por lluvia para el techo?

Solución. El área servida por cada imbornal es:

$$A = (20 \text{ pies})\,(80 \text{ pies}) = 1\,600 \text{ pies}^2$$

El gasto para cada imbornal es

$$Q = 0.0104Ai = 0.0104(1\,600 \text{ pies}^2)(3 \text{ plg/h}) = 49.92 \text{ gal/min}$$

Con referencia a la tabla 2.5, observamos que la carga hidráulica para este gasto para el imbornal usado es de 2 plg. La carga de diseño del techo es entonces:

$$R = 5.2(d_s + d_h) = 5.2(4 \text{ plg} + 2 \text{ plg}) = 31.2 \text{ lb/pie}^2 \quad \blacksquare$$

2.10 CARGAS DE VIENTO

Un repaso de la bibliografía de la ingeniería de los últimos 150 años nos permitirá percatarnos de que abundan las referencias a las fallas estructurales causadas por el viento. Tal vez las más ignominiosas de ellas han sido las fallas de puentes, como la del Tay Bridge en Escocia, acaecida

en 1879 (que causó la muerte de 75 personas), y la del Tacoma Narrows Bridge (en Tacoma, Washington), en 1940. Se han tenido también algunas fallas desastrosas en edificios ocasionadas por el viento durante el mismo periodo, como la del Union Carbide Building en Toronto, en 1958. Es importante darse cuenta de que un gran porcentaje de las fallas en edificios ocasionadas por viento ha ocurrido durante su construcción.[10]

En años recientes se ha llevado a cabo una gran cantidad de investigaciones sobre el tema de las cargas de viento. Sin embargo, se requieren aún muchos estudios, ya que la estimación de las fuerzas de viento de ninguna manera puede considerarse una ciencia exacta.

Al diseñador estructural promedio le encantaría tener una regla sencilla con la cual calcular la magnitud de las cargas de viento de diseño, tal como: La presión del viento debe ser 20 lb/pie^2 para todas las partes de la estructura a 100 pies o menos por arriba del terreno y 30 lb/pie^2 para partes que estén a más de 100 pies arriba del terreno. Sin embargo, una especificación sencilla como ésta, aunque del tipo que se ha usado por muchos años, nunca ha sido satisfactoria. Si vamos a evitar futuros percances, tal vez catastróficos, debemos mejorar.

Jacobs Field, hogar de los Indios de Cleveland. (Cortesía de la Lincoln Electric Company.)

Las fuerzas eólicas actúan como presiones sobre las superficies verticales de barlovento, presiones o succiones sobre superficies inclinadas de barlovento (dependiendo de la pendiente), y succión o levantamiento sobre superficies planas y sobre superficies verticales e inclinadas de sotavento (debido a la creación de presiones negativas o vacíos). Tal vez el estudiante haya observado este efecto definitivo de succión cuando han sido levantadas tejas de madera u otras techumbres de las superficies de techo a sotavento de los edificios. Es fácil demostrar la succión o el levantamiento si se sostiene una hoja de papel en sentido horizontal por dos de sus esquinas diagonalmente opuestas y se sopla sobre ella. Usted puede ver que el extremo alejado del papel se mueve hacia arriba. Para algunas estructuras comunes, las cargas de levantamiento pueden ser tan grandes como 20 o 30 lb/pie^2 o aun mayores.

[10] Wind Forces on Structures, Task Committee on Wind Forces. Committee on Loads and Stresses, Structural Division, ASCE, Reporte Final, *Transactions ASCE* 126, parte II (1961), 1124-1125.

La norma ASCE 7-02 proporciona ecuaciones para estimar la presión del viento para las diferentes partes de un edificio. Aunque el uso de estas ecuaciones es complicado, el trabajo se simplifica un poco con las tablas y los gráficos presentados en la especificación. Varios de estos gráficos y tablas se muestran en el Apéndice C de este libro con la autorización de la ASCE. El lector deberá percatarse de que la información suministrada es para edificios con forma regular. Si se contemplan cúpulas, marcos A, o edificios con techos con pendientes de ángulo mayores que 45 grados o edificios con plantas de piso poco comunes tales como formas H o Y, sería conveniente realizar estudios de túnel de viento. En la sección 6.6 se presentan lineamientos para hacer estos estudios para la especificación antes mencionada.

Los valores obtenidos usando estas especificaciones no son satisfactorios para vientos de tipo tornado, aunque se ha estimado que los edificios diseñados para las fuerzas de viento obtenidas con el ASCE 7-02 tienen capacidad de resistir con poco daño, en aproximadamente la mitad de los tornados registrados.

El estudio introductorio de las fuerzas eólicas que se presenta en esta sección pretende ser sólo una breve introducción al tema. Además, en este análisis se consideran sólo las fuerzas eólicas aplicadas al sistema principal resistente al viento en edificios de poca altura con pendientes en techos de menos de 10 grados.

Hay muchos factores que afectan a las presiones eólicas. Entre ellas están la velocidad del viento, la exposición de las estructuras, las características del terreno circundante, la presencia de estructuras cercanas, etc. Al preparar los diseños para viento, otro factor que debe considerarse es la importancia relativa de la estructura. ¿Va a ser un hospital o una escuela o un granero agrícola? Los factores mencionados aquí se estudian brevemente en los siguientes párrafos.

Velocidad del viento de diseño, V

La velocidad básica de viento para usarse en el diseño del sitio estudiado se determina con la figura C.1 del Apéndice. Las velocidades del viento que se obtienen con esta tabla no deben usarse en zonas montañosas, cañadas, ni en otras regiones donde puedan existir condiciones poco comunes de viento. Para estas áreas deben hacerse estudios especiales. Las velocidades obtenidas son las velocidades estimadas más desfavorables de ráfagas de 3 segundos en millas por hora (mph) que ocurrirían a 33 pies arriba de la superficie del terreno durante un periodo de 50 años.

Factor de importancia, I

El factor de importancia introduce en el cálculo de las fuerzas de viento una medida de las consecuencias de la falla. Edificios críticos, como escuelas y hospitales, tendrán un factor de importancia mayor y por tanto fuerzas de diseño por viento mayores. Los edificios cuyas fallas tengan menor consecuencia en pérdidas de vidas humanas, como el caso de los edificios de una granja, tendrán un menor factor de importancia y por ello menores fuerzas de diseño por viento.

La ASCE clasifica los edificios en las categorías I, II, III o IV como se muestra en la tabla C.1 del Apéndice de este libro. Estas clasificaciones son aplicables no solamente a cargas de viento sino también a cargas por inundación, nieve, sismo y hielo. Después de seleccionar la categoría del edificio en estudio, su factor de importancia se determina en la Tabla C.4 del Apéndice.

Categorías de rugosidad de superficie

En la Sección 6.5.6.2 de la ASCE 7-02, las superficies del terreno alrededor de las estructuras se clasifican en cuanto a rugosidad como B, C o D. Estas clasificaciones, que se muestran en la Tabla C.2 del Apéndice, abarcan desde áreas urbanas hasta suburbanas con numerosos obstáculos muy cercanos entre sí hasta lodo liso o espejos de sal o hielo continuo. Originalmente había una categoría de rugosidad de clase A, pero la ASCE ya no la enlista.

ASCE 7-02 presenta dos métodos para estimar las cargas de viento. Éstos son el Procedimiento simplificado (Sección 6.4 de ASCE) y el Procedimiento analítico (Sección 6.5 de ASCE). El primer procedimiento es aplicable a un grupo limitado de estructuras mientras que el segundo tiene un rango de aplicación mucho más amplio. En realidad, como se mencionó anteriormente, hay otro procedimiento para situaciones muy complicadas que incluye pruebas en túnel de viento. Aquí se describe con detalle sólo el primero de estos métodos.

2.11 PROCEDIMIENTO SIMPLIFICADO DE LA ASCE PARA ESTIMAR LAS CARGAS DE VIENTO

La Sección 6.4 de la Norma ASCE presenta un método simplificado para estimar las cargas de viento. Sin embargo, el procedimiento solamente es satisfactorio para edificios con ciertas limitaciones. Estas limitaciones, que se listan con detalle en la Sección 6.4.1.1 de la Norma de la ASCE, incluyen lo siguiente:

1. El edificio debe ser de poca altura, cerrado, rígido con forma regular, casi simétrico, y tener un diafragma simple. (Para techo plano o techos a dos aguas o a cuatro aguas con pendiente $\leq 45°$).
2. La altura del techo no debe ser mayor a 60 pies.
3. No debe haber juntas expansivas ni separaciones en la estructura del edificio.
4. También hay algunos requerimientos en relación con derrubios transportados por el viento y las características de respuesta. (No se incluyen los efectos topográficos.)

La presión por velocidad del viento para estos edificios puede estimarse con la siguiente expresión:

$$p_s = \lambda I p_{S30}$$

Para usar esta expresión es necesario determinar los siguientes valores:

V = presión estimada del viento, lb/pie^2
λ = factor de ajuste para la altura y exposición del edificio
I = factor de importancia
p_{S30} = presión eólica de diseño simplificada para exposición B a una altura de 30 pies y para $I = 1.0$.

El ejemplo 2.2 presenta ejemplos de cálculos para estimar presiones eólicas con el procedimiento simplificado.

EJEMPLO 2.2

El edificio mostrado en la figura 2.2 va a construirse en un área suburbana con numerosos edificios pequeños cercanos entre sí en Galveston en la Costa del Golfo de Texas. Su uso principal será para habitaciones de hotel y no tendrá áreas donde puedan congregarse más de 300 personas.

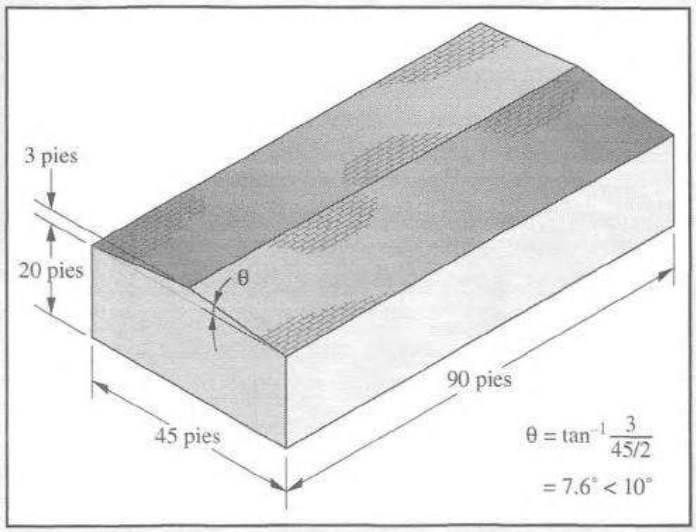


Figura 2.2

Calcule las presiones estimadas de viento que actúan sobre las diferentes áreas de esta estructura cerrada de diafragma simple con marcos rígidos usando el procedimiento simplificado de ASCE 7-02.

Solución.

(1) Velocidad del viento = 140 mph para Galveston (figura C.1 del Apéndice).
(2) Debido a la ocupación del edificio, tiene una Categoría II (tabla C.1 del Apéndice).
(3) La categoría de rugosidad de la superficie será C (tabla C.2 del Apéndice).
(4) $\lambda = 1.29$ (por interpolación de la figura C.2 del Apéndice para 20 pies, ya que $\theta < 10°$).

Las presiones o succiones estimadas están representadas por p_{S30} en la figura C.2 del Apéndice. Se seleccionan los valores aplicables para el edificio en cuestión y se registran en la tabla 2.6, que se muestra enseguida. Entonces estos valores se multiplican por λ I para ajustarlos para nuestras condiciones particulares para las cuales $\lambda = 1.29$ e $I = 1.0$. Los valores así obtenidos se muestran en la tabla para las diferentes zonas A a H que se muestran en la figura 2.3. Observe que los signos negativos representan succiones.

TABLA 2.6 PRESIONES DE VIENTO ESTIMADAS PARA EL EDIFICIO DEL EJEMPLO 2.2

	Presión horizontal, p_{S30} con I = 1.0			
Zona	Si $\theta = 5°$	Si $\theta = 10°$	Si $\theta = 7.6°$	Presión ajustada, lb/pie^2 = ps = $\lambda I p_{S30}$
A	31.1	35.1	33.2	42.8
B	−16.1	−14.5	−15.3	−19.7
C	20.6	23.3	22.0	28.3
D	−9.6	−8.5	−9.0	−11.6
E	−37.3	−37.3	−37.3	−48.1
F	−21.2	−22.8	−22.0	−28.3
G	−26.0	−26.0	−26.0	−32.5
H	−16.4	−17.5	−17.0	−21.9

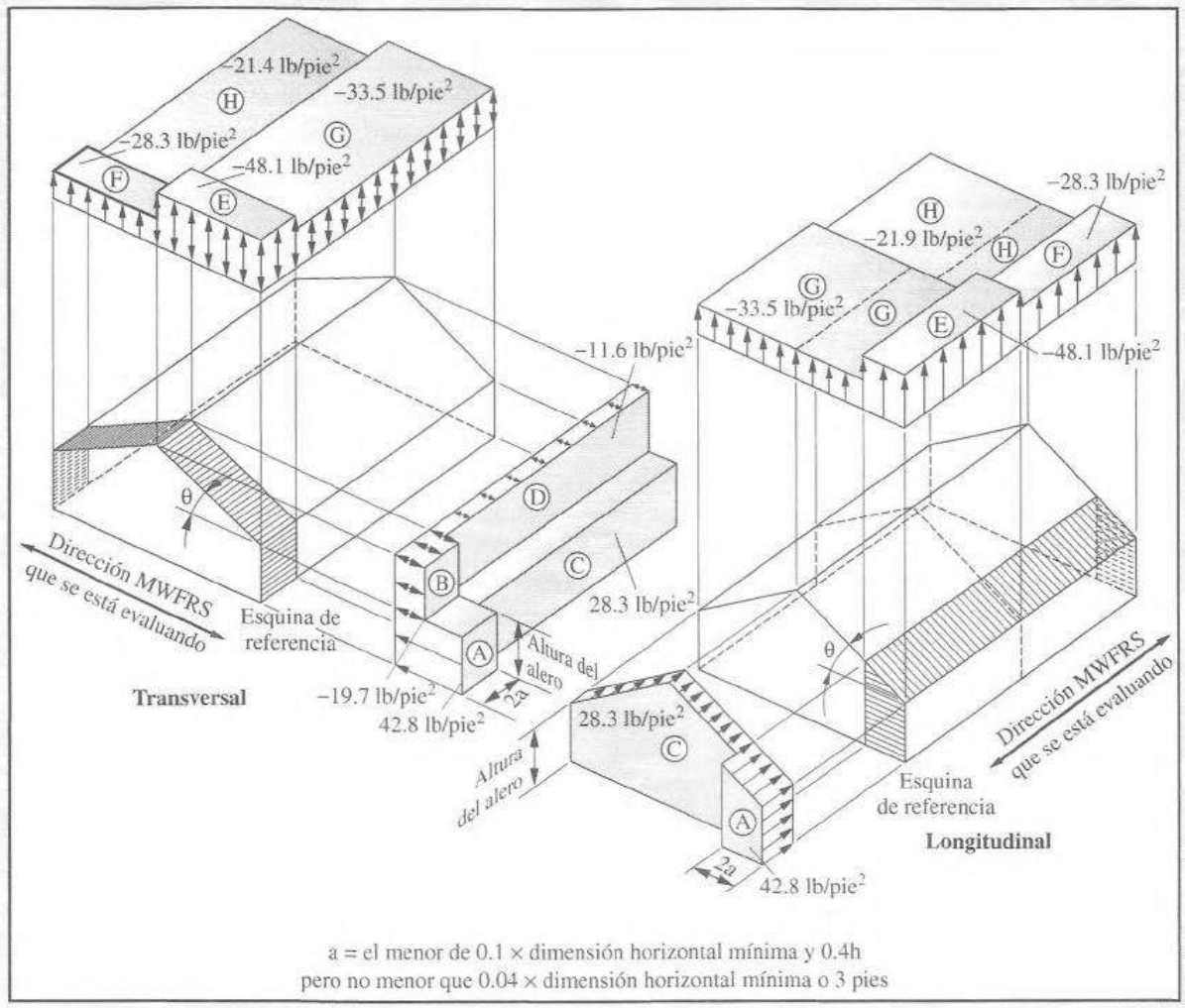


Figura 2.3

2.12 PROCEDIMIENTO DETALLADO DE LA ASCE PARA ESTIMAR LAS CARGAS DE VIENTO

La norma ASCE 7-02 presenta un procedimiento más detallado para estimar las presiones eólicas para edificios y otras estructuras. Debido a la extensión de su aplicación se le introduce en esta sección sólo brevemente.

En la Sección 6.5.10, ASCE 7-02, proporciona la siguiente expresión para estimar la presión por velocidad para una altura z sobre la superficie del terreno

$$q_z = 0.00256\ K_z K_{zt} K_d V^2 I$$

Como parte del procedimiento simplificado descrito en la sección anterior, se describió la determinación de las velocidades del viento (V) y de los factores de importancia (I). Estos términos se incluyen en la ecuación para q_z así como algunos otros términos.

Éstos otros son:

K_z, un coeficiente de exposición a la presión por velocidad que depende de la altura de la estructura y de las características del terreno circundante.

K_{zt}, un factor topográfico que se usa para estimar el efecto de las velocidades crecientes del viento causadas por los cambios repentinos en la topografía.

K_d es un factor de direccionalidad del viento.

Se dispone de diferentes tablas y figuras para estimar la magnitud de estos términos en ASCE 7-02.

Una vez que se determina el valor de q_z, puede usarse para calcular las presiones eólicas estimadas en diferentes partes del edificio que se está considerando. ASCE 7-02 proporciona un conjunto de ecuaciones para estimar estas presiones. La selección de la ecuación que se va a usar para un caso específico depende de la flexibilidad y la altura de la estructura en cuestión y de la intervención del sistema principal resistente a la fuerza del viento del edificio o de la resistencia al viento secundaria, suministradas por las componentes del edificio y su recubrimiento.

El lector puede entender fácilmente que como los edificios no son completamente herméticos al aire, sus interiores están sujetos a presiones al igual que lo están sus exteriores. Estas presiones internas están causadas por los vanos en los muros tales como puertas, ventanas, etc. El lector debe recordar que las ventanas pueden romperse o que las ventanas o puertas pueden quedarse abiertas. La Sección 6.2 de ASCE 7-02 suministra una descripción de edificios abiertos, parcialmente cerrados y cerrados.

La presión eólica de diseño para edificios rígidos de poca altura ($h < 60$ pies) puede determinarse a partir de la expresión que sigue en la cual p es la presión eólica de diseño, p_e es la presión externa del viento, y p_i es la presión interna del viento.

$$p = p_e - p_i$$

Esta expresión puede escribirse con más detalle como sigue para muros a barlovento y a sotavento.

$$p = q_h[(GC_{pf}) - (Gc_{pi})]$$ Ecuación 6-18 de ASCE 7-02 para muros a barlovento y a sotavento

En donde

q_h es la presión de velocidad calculada para la altura h

GC_{pf} es el coeficiente de presión externa disponible en la figura 6.10 de ASCE 7-02

GC_{pi} es el coeficiente de presión interna disponible en la figura 6.5 de ASCE 7-02

2.13 CARGAS SÍSMICAS

Muchas áreas del mundo se encuentran en "territorio sísmico" y en ellas es necesario considerar las fuerzas sísmicas en el diseño de todo tipo de estructuras. A través de los siglos se han presentado fallas catastróficas de edificios, puentes y otras estructuras debido a los sismos. Se ha estimado que 50 000 personas perdieron la vida en el sismo de 1988 en Armenia.[11] Aun más personas murieron en el sismo de 2005 en Kashmir. Los sismos de 1989 en Loma Prieta y de 1994 en Northridge en California ocasionaron daños en propiedades por muchos miles de millones de dólares, así como considerables pérdidas de vidas.

La corteza exterior de la Tierra está compuesta de placas duras tan grandes o más que continentes enteros. Estas placas flotan sobre roca fundida suave subyacente. Su movimiento es muy lento, tal vez sólo de unas cuantas pulgadas por año. Se ha observado que es más lento que el crecimiento de las uñas de las manos. Cuando las placas chocan entre sí, puede originarse un movimiento importante horizontal y vertical de la superficie del terreno. Estos movimientos

[11] V. Fairweather, "The Next Earthquake", *Civil Engineering* (Nueva York: ASCE, marzo de 1990), 54-57.

pueden causar fuerzas de inercia muy grandes en las estructuras. La distribución y las características de los materiales terrestres en un área específica afectan en gran medida la magnitud de los movimientos del terreno causados.

Sismos recientes han demostrado claramente que un edificio o puente promedio que no haya sido diseñado para fuerzas sísmicas puede ser destruido incluso por un sismo que no sea particularmente severo. La mayoría de las estructuras pueden ser diseñadas y construidas de manera económica para resistir las fuerzas causadas durante la mayoría de los sismos. Por otra parte, el costo de proporcionar resistencia sísmica a estructuras existentes (llamado remodelación) puede ser en extremo caro.

Algunos ingenieros piensan que las cargas sísmicas usadas en el diseño son meros incrementos porcentuales de las cargas de viento. Sin embargo, esta idea no es correcta. Las cargas sísmicas difieren en su manera de actuar respecto de las cargas de viento y no son proporcionales al área expuesta del edificio, sino a la distribución de la masa del edificio arriba del nivel particular en consideración.

Los reglamentos de construcción en Estados Unidos en donde es más probable que ocurran terremotos, requieren que se use algún tipo de diseño sísmico. Aun en áreas menos propensas a los terremotos, deberá considerarse seriamente a la carga sísmica para edificios de gran altura, hospitales, plantas nucleares y otras estructuras importantes.

El Comité Interdependencias de Seguridad Sísmica en la Construcción ha preparado una orden (firmada por el presidente) que establece que todos los edificios de propiedad federal o alquilados, así como toda construcción federalmente regulada y asistida deben construirse de modo que se mitiguen los riesgos sísmicos.

Para evaluar la importancia del diseño para fuerzas sísmicas, deberá examinarse un mapa de aceleración sísmica del terreno como el que se muestra en la figura C.3 del Apéndice. Este mapa específico presenta lo que se piensa que son las aceleraciones pico estimadas del terreno que podrían ocurrir en las diferentes partes de Estados Unidos durante un periodo de 50 años. Las áreas de alto riesgo, para sismos nocivos, tales como la costa de California, son bastante obvias en este mapa mientras que las áreas de bajo riesgo también se muestran claramente en Florida y en partes de Texas.

Los sismos cargan a las estructuras en forma indirecta. El terreno es desplazado y, como las estructuras están conectadas a éste, están sujetas a movimientos repentinos. Estos movimientos generan aceleraciones en el edificio que conducen al movimiento diferencial de los niveles del edificio. Estas deformaciones hacen que se produzcan fuerzas cortantes horizontales. Resulta claro, a partir de la información anterior, que ninguna fuerza externa es aplicada arriba del terreno por los sismos a las estructuras.

El procedimiento acostumbrado para analizar estructuras en cuanto a fuerzas sísmicas es representarlas con conjuntos de cargas supuestamente equivalentes. La magnitud de las cargas seleccionadas se basa en la distribución de la masa en las diferentes estructuras, la aceleración del terreno y las características dinámicas de los sistemas. Otro factor que debe considerarse en el diseño sísmico es la condición del suelo. Casi todo el daño estructural y la pérdida de vidas en el sismo de Loma Prieta ocurrieron en áreas con suelos arcillosos blandos. Aparentemente, esos suelos amplificaron los movimientos de la roca subyacente.

Las Secciones 9.5.3 a 9.5.8 de la ASCE 7-02 presentan seis diferentes procedimientos analíticos sísmicos para estimar las fuerzas sísmicas que deben usarse en el análisis y el diseño estructural. Las situaciones donde puede usarse cada uno de los métodos se listan en la Tabla 9.5.2.5.1 de ASCE 7-02. El primero de los métodos es un análisis estático llamado "análisis de fuerza indizada". El método se considera satisfactorio sólo para ciertas estructuras pequeñas en unas cuantas áreas del país donde el riesgo sísmico es bajo. La siguiente expresión se da para calcular las fuerzas laterales estáticas que deben aplicarse en cada nivel de la estructura.

$$F_x = 0.01w_x$$

Donde

F_x = la fuerza de diseño lateral aplicada en cada nivel.

w_x = la parte de la carga gravitacional total W asignada al nivel x desde arriba.

W = el peso sísmico efectivo de la estructura, que incluye las cargas muertas más alguna parte de las cargas vivas (cuando menos 25% de la carga viva de piso en los edificios de almacenes).

Observe que la fuerza cortante horizontal total para un nivel específico es igual a la suma de todas las cargas F_x que están arriba.

El segundo método listado por la ASCE que se conoce como "análisis simplificado" es otro análisis de carga estática en el cual intervienen fuerzas incrementadas. Como tal, puede usarse para un rango un poco más amplio de estructuras. Prosiguiendo a través de los otros métodos, nos movemos hacia los métodos de análisis más complejos. El tercer método listado por la ASCE 7-02 se denomina el "Procedimiento equivalente de fuerza lateral". Es el método con el cual el diseñador actual necesita estar más familiarizado y es el de uso más común en la práctica en Estados Unidos. En consecuencia, es el único de los seis métodos que se ilustran en este libro y del cual se presenta un ejemplo en la siguiente sección.

El cuarto método llamado "Procedimiento de análisis modal" generalmente se usa en lugar del tercer método cuando algunos pisos de un edificio son bastante diferentes de los otros pisos en cuanto a rigidez, peso, etc. Los dos métodos finales "Análisis histórico de respuesta lineal" y "Análisis histórico de respuesta no lineal" se usan rara vez en la práctica de diseño. Se usan principalmente para diferentes estudios de investigación.

Como el lector verá en el siguiente capítulo, las cargas calculadas en las estructuras y sus componentes debidas a los efectos sísmicos se combinan con otras cargas. Al hacer las combinaciones, el lector debe entender que los métodos aquí mencionados se basan en un estado de límite de resistencia que sobrepasa a la primera fluencia de las estructuras. La necesidad de entender este hecho se hará evidente después de que se estudien las combinaciones de cargas en el siguiente capítulo.

2.14 PROCEDIMIENTO DE FUERZA LATERAL EQUIVALENTE PARA ESTIMAR LAS CARGAS SÍSMICAS

En esta sección el autor introduce brevemente el procedimiento de fuerza lateral equivalente para estimar las fuerzas sísmicas. A medida que el estudiante revise este método, el autor quiere que se reflexione mucho sobre la exactitud obtenida. Con este procedimiento se calculan cargas estáticas equivalentes para estimar el efecto de las fuerzas sísmicas dinámicas. Además se supone que las estructuras consideradas resisten a las cargas de diseño de manera elástica; pero su resistencia es en realidad inelástica durante un evento de diseño.

Con el procedimiento de fuerza lateral equivalente, se estima una fuerza cortante basal total basándose en las propiedades de las estructuras y en el movimiento esperado del terreno en el sitio de la construcción. Se presentan ecuaciones empíricas para estimar la fuerza cortante lateral total aplicada al edificio y para distribuir estas fuerzas cortantes entre los diferentes niveles de piso. Estas ecuaciones contienen varios términos, que se listan y se definen aquí en el orden en que se usarán en los cálculos.

1. El *periodo natural fundamental de un edificio*, que se representa con la letra T, es el tiempo requerido para que el edificio ejecute un ciclo completo de movimiento. Su magnitud depende de la masa de la estructura y su rigidez puede estimarse con la ecuación dada al final de este párrafo. La aplicación de esta ecuación generalmente suministra periodos que son un poco más pequeños que los periodos reales de la estructura estudiada. Esta

situación hace que las fuerzas cortantes calculadas estén un poco sobrestimadas y presuntamente nos sitúan un poco en el lado de la seguridad.

$$T_a = C_t h_n^x$$

En esta expresión C_t es el coeficiente del periodo del edificio. Su valor es 0.035 para marcos resistentes a los momentos de acero estructural y de 0.02 para la mayoría de otras estructuras, tales como marcos arriostrados. El término h_n es la altura del nivel más alto del edificio, mientras que x vale 0.9 para marcos de concreto reforzado resistentes a momentos y de 0.75 para otros sistemas.

2. Las *aceleraciones del espectro de diseño*, representadas por los términos S_{D1} y S_{DS}, pueden determinarse a partir de mapas sísmicos. Éstos proporcionan la intensidad estimada de los terremotos de diseño con T = 1 segundo (S_{D1}) y con T = 0.2 segundos (S_{DS}). Los números obtenidos representan proporciones de g, la aceleración de la gravedad. Para Salt Lake City, los respectivos valores son 0.5 g y 1.2 g. Los valores dados son para cimientos estructurales sustentados en roca moderadamente resistente. Si intervienen materiales de cimentación menos resistentes, S_{D1} y S_{DS} serán mayores.
3. El *factor de modificación de respuesta* se usa para estimar la capacidad de una estructura para resistir las fuerzas sísmicas. Su valor varía de 1.25 hasta 8 con los valores más altos aplicables a estructuras dúctiles y los valores más bajos aplicables a estructuras frágiles. Para estructuras con muros de cortante de concreto reforzado, se usan valores de R de aproximadamente 4 mientras que para marcos de acero estructural y para marcos de concreto reforzado con juntas rígidas, R es aproximadamente igual a 8. En ASCE 7-02 se proporcionan otros valores. Entre mayor sea el valor de R; serán más pequeñas las fuerzas de diseño sísmicas calculadas.
4. El *factor de importancia*, I, de una estructura proporciona una medida de las consecuencias de la falla. Entre mayor sea el número, es más importante la estructura. Por ejemplo, ASCE 7-02 proporciona un valor de 1.5 para hospitales, delegaciones de policía y otros edificios públicos, pero solamente 1.0 para edificios de oficinas.
5. El *peso sísmico efectivo* de un edificio, W, incluye la carga muerta total de la estructura más las partes aplicables de otras cargas. Por ejemplo, debe incluirse un mínimo de 25% de cargas vivas de piso junto con una tolerancia de 10 lb/pie^2 para particiones si las hay. Además, W debe incluir el peso total del equipo permanente. También, si las cargas de nieve para techo plano sobrepasan a 30 lb/pie^2, se incluye 20% de la carga de nieve en el peso sísmico.
6. La especificación ASCE 7-02 en la Sección 9.5.4 proporciona la siguiente expresión para estimar la fuerza total cortante básica lateral estática en una dirección dada para un edificio.

$$V = \frac{S_{D1}}{T(R/I)} W$$

Sin embargo, no es necesario que el valor V calculado sea mayor que el valor obtenido con la siguiente expresión. (Cuando intervienen estructuras muy rígidas con valores pequeños de T, la ecuación anterior arroja valores innecesariamente altos.)

$$V_{máx} = \frac{S_{DS} W}{R/I}$$

La siguiente ecuación nos da un valor mínimo práctico de V que se puede usar.

$$V_{mín} = 0.044 S_{DS} I W$$

7. La parte de la fuerza cortante basal V que va a distribuirse a un piso específico se determina con la siguiente ecuación:

$$F_x = \frac{w_x h_x^k}{\sum_{i=1}^{n} w_i h_i^k} V$$

En donde

F_x = fuerza lateral sísmica que va a aplicarse al nivel x

w_i y w_x = pesos asignados a los niveles i y x. El estudiante entenderá los valores de i y x después de estudiar el ejemplo 2.3.

h_i y h_x = altura de los niveles i y x

n = nivel del piso en cuestión

k = un exponente de distribución relacionado con el periodo natural fundamental de la estructura en cuestión. Si T vale 0.5 segundos o menos, k = 1.0. Si T > 0.5 segundos y ≤ 2.5 segundos, k puede determinarse de la expresión que sigue. Si T > 2.5 segundos, k = 2.0.

$$k = 1 + \frac{T - 0.5}{2}$$

EJEMPLO 2.3

Usando el procedimiento de fuerza lateral equivalente de ASCE 7-02, calcule la fuerza lateral que debe aplicarse al tercer piso del edificio de oficinas de acero estructural propuesto que se muestra en la figura 2.4. El edifico, que se localizará en Salt Lake City, tiene conexiones especiales resistentes al momento. Se han seleccionado valores de S_{DS} = 1.2 g y S_{D1} = 0.5 g. El peso estimado, w, de cada nivel es de 500 klb.

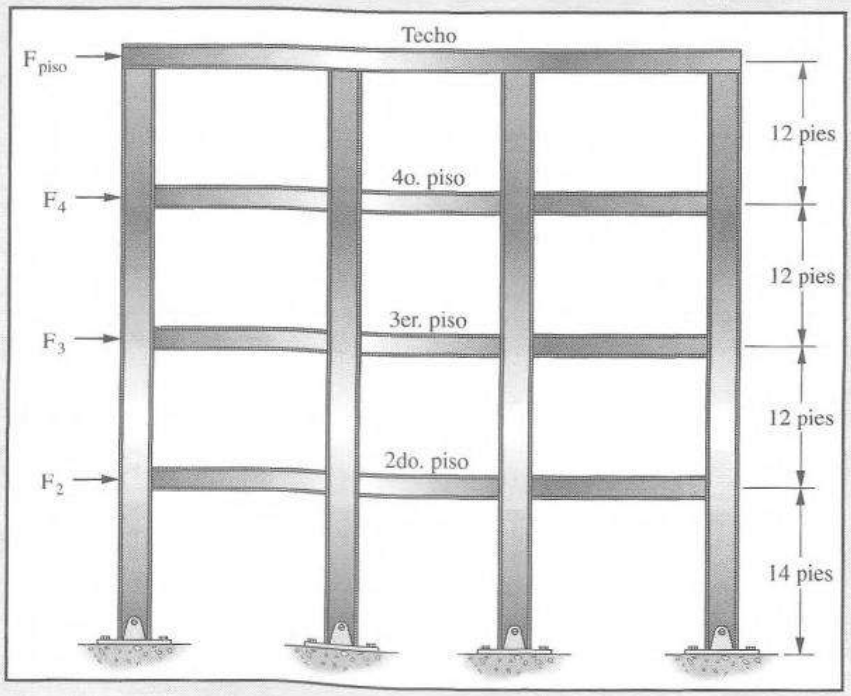


Figura 2.4

Solución.

(1) $T_a = C_t h_n^x = 0.028(50 \text{ pies})^{0.8} = 0.64$ segundos

(2) $S_{DS} = 1.2$ g y $S_{D1} = 0.5$ g (dados)

(3) $R = 8$ (marco especial de acero resistente al momento)

(4) Como el edificio tiene una categoría de ocupación de II, el grupo de uso sísmico se asigna a I con un factor de importancia igual a 1.0.

(5) $W = (4)\,(500) = 2\,000$ klb

(6) $$V = \frac{S_{D1}}{T(R/I)} W = \frac{0.5}{0.64\left(\frac{8}{1.0}\right)}(2\,000) = 195.3 \text{ klb} \leftarrow$$

pero no mayor que

$$V_{máx} = \frac{S_{DS}}{R/I} W = \left(\frac{1.2}{8/1.0}\right)(2\,000) = 300 \text{ klb}$$

y no menor que

$$V_{mín} = 0.044 S_{DS} I W = 0.044(1.2)(1.0)(2\,000) = 105.6 \text{ klb}$$

(7) Se determina la fuerza lateral aplicada al tercer piso

$$k = 1 + \frac{T - 0.5}{2} = 1 + \frac{0.64 - 0.5}{2} = 1.07$$

$$F_3 = \frac{w_3 h_3^k}{\sum_{i=1}^{m} w_i h_i^k}(V)$$

$$= \frac{500\,(26)^{1.07}}{500\,(14)^{1.07} + 500\,(26)^{1.07} + 500\,(38)^{1.07} + 500\,(50)^{1.07}}\,(195.3 \text{ klb})$$

$$= 0.199(195.3 \text{ klb}) = 38.8 \text{ klb}$$

De manera similar, las fuerzas cortantes para los otros pisos se determinan como

$$F_{techo} = 78.2 \text{ klb}$$
$$F_4 = 58.3 \text{ klb}$$
$$F_2 = 20.0 \text{ klb}$$

Observe que la suma de las fuerzas aplicadas es igual a la fuerza cortante basal de diseño de 195.3 klb. ■

2.15 CARGAS DE NIEVE

Las cargas de nieve y de hielo son a menudo muy importantes en los estados más fríos. Una pulgada de nieve equivale a casi 0.5 lb/pie^2, pero puede ser mayor a menores elevaciones, donde la nieve es más densa. Para diseños de techos en general se especifican cargas de nieve de 10 a 40 lb/pie^2. La magnitud depende principalmente de la pendiente del techo y, en menor grado, de la naturaleza de la superficie del mismo. Los valores más grandes se usan para techos planos y los más pequeños para techos inclinados. La nieve tiende a deslizarse de los techos inclinados, en especial de aquéllos con superficies metálicas o de pizarra. Una carga de casi 10 lb/pie^2 podría usarse para pendientes de 45°, mientras que una carga de 40 lb/pie^2 podría usarse para techos planos. El estudio

de registros de nevadas en áreas con inviernos severos puede indicar la ocurrencia de cargas de nieve mucho mayores de 40 lb/pie^2, con valores tan altos como 100 lb/pie^2 en el norte de Maine.

La nieve es una carga variable que puede cubrir un techo entero o sólo parte de éste. Pueden tenerse corrientes contra muros o acumulaciones en valles o entre parapetos. La nieve puede resbalar de un techo a otro más bajo. El viento la puede mover de uno de los lados de un techo inclinado o la nieve puede permanecer en su posición original incluso cuando existen fuertes vientos.

Las cargas de nieve que se aplican a una estructura dependen de muchos factores, incluidos la localidad geográfica, la inclinación del techo, el resguardo y la forma del techo. El análisis que sigue es sólo una introducción a la determinación de las cargas por nieve sobre edificios. Al estimar esas cargas, se aconseja al lector consultar la ASCE 7-02 para obtener una información más amplia.

De acuerdo con la Sección 7.3 de la ASCE 7-02, la carga básica de nieve que ha de aplicarse a las estructuras con techos planos en Estados Unidos puede obtenerse con la expresión

$$p_f = 0.7C_eC_tIp_g$$

Esta expresión es para techos planos sin obstrucciones con pendientes iguales o menores que 5° (una pendiente de 1 plg/pie = 4.76°). En la ecuación, C_e es el índice de exposición que pretende tomar en cuenta la nieve que puede ser barrida del techo por el viento, considerando los alrededores de la localidad. El coeficiente de exposición es mínimo para áreas altamente expuestas y es máximo cuando se tiene considerable protección. Los valores de C_e se dan en la tabla 2.7 (tabla 7.2 de la ASCE 7-02).

TABLA 2.7 COEFICIENTES DE EXPOSICIÓN PARA CARGAS DE NIEVE

Categoría del terreno (Véase Sec. 6.5.6.1, ASCE 7-02)	Exposición del techo		
	Totalmente expuesto	Parcialmente expuesto	Protegido
A: Centro de ciudad grande	N/A	1.1	1.3
B: Áreas urbanas y suburbanas	0.9	1.0	1.2
C: Terreno abierto con obstáculos dispersos	0.9	1.0	1.1
D: Áreas sin obstáculos con viento sobre agua abierta	0.8	0.9	1.0
Arriba de la línea de árboles en áreas montañosas barridas por el viento	0.7	0.8	N/A
En Alaska, en áreas donde no existen árboles dentro de un radio de 2 millas del sitio	0.7	0.8	N/A

La categoría del terreno y la condición de exposición del techo escogidas serán representativas de las condiciones anticipadas durante la vida de la estructura. En esta tabla se usan las siguientes definiciones relativas a la exposición del techo:

- *Parcialmente expuesto:* Todos los techos, excepto las dos definiciones abajo citadas.
- *Totalmente expuesto:* Techos expuestos por todos lados sin protección del terreno, de estructuras más altas o árboles. Los techos que contienen varias piezas grandes de equipo mecánico u otras obstrucciones no están en esta categoría.
- *Protegido:* Techos localizados entre coníferas que califiquen como obstrucciones.

Las obstrucciones dentro de una distancia de $10h_0$ proporcionan "protección". El término h_0 es la altura de la obstrucción arriba del nivel del techo. Si las únicas obstrucciones son unos cuantos árboles caducos sin hojas en el invierno, debe usarse la categoría "totalmente expuesto", excepto en terrenos de categoría A. Advierta que ésas son alturas por encima del techo. La altura usada para establecer la Categoría del Terreno en la Sección 6.5.3 de la ASCE 7-02 es la altura sobre el terreno.

El término C_t es el índice térmico. Los valores de este coeficiente se muestran en la tabla 2.8 (tabla 7-3 en la ASCE 7-02). Como se muestra en la tabla, el coeficiente es igual a 1.0 para

TABLA 2.8 FACTOR TÉRMICO PARA CARGAS DE NIEVE

Condiciones térmicas representativas esperadas durante el invierno	C_t
Todas las estructuras, excepto las indicadas abajo	1.0
Estructuras mantenidas justo arriba del congelamiento con techos fríos ventilados que tengan una resistencia térmica entre el espacio ventilado y el calentado mayor que 25 °Fhpie^2/BTU	1.1
Estructuras sin calefacción y estructuras que se mantienen intencionalmente por debajo del congelamiento	1.2
Invernaderos con calefacción continua con un techo que tenga una resistencia térmica menor que 2.0 °Fhpie^2/BTU	0.85

estructuras con calefacción, 1.1 para estructuras con el mínimo de calefacción que impida el congelamiento, y 1.2 para estructuras sin calefacción.

Los valores de los factores de importancia I para cargas de nieve se muestran en la tabla 2.9 (tabla 7-4 en la ASCE 7-02). Las categorías por uso de edificios son las mismas que las usadas para el cálculo de cargas de viento y se muestran en la tabla C.1 en el Apéndice C.

TABLA 2.9 FACTOR DE IMPORTANCIA I PARA CARGAS DE NIEVE

Categoría por uso del edificio	I
I	0.8
II	1.0
III	1.1
IV	1.2

El último término, p_g, es la carga de nieve en el terreno en libras por pie cuadrado. En la figura C.4 en el Apéndice C se muestran las cargas típicas de nieve en el terreno para Estados Unidos. Estos valores dependen de las condiciones climáticas en cada sitio. Si se dispone de datos que muestren que las condiciones locales son más severas que los valores dados en la figura, deberán usarse siempre las condiciones locales.

El valor mínimo de p_f es $p_g(I)$ en áreas donde la carga de nieve sobre el terreno es menor que o igual a 20 lb/pie^2. En otras áreas, el valor mínimo de p_f es de 20(I) lb/pie^2.

El ejemplo 2.4 ilustra el cálculo de la carga de diseño por nieve para un edificio en Chicago según la especificación ASCE 7-02.

EJEMPLO 2.4

Se va a construir un centro comercial en Chicago. El edificio estará localizado en un área residencial con obstrucciones mínimas debidas a los edificios circundantes y al terreno. El edificio tendrá grandes tiendas y áreas públicas cerradas en las que se podrán congregar más de 300 personas. El techo será plano, pero para proporcionar un drenado adecuado tendrá una pendiente igual a 0.5 plg/pie. ¿Cuál es la carga de nieve por techo que debe usarse en el diseño?

Solución. Como la pendiente del techo es menor que 5°, éste puede diseñarse como un techo plano. De la figura C.6, la carga de nieve sobre el terreno, p_g, para Chicago es de 25 lb/pie^2. El factor de exposición, C_e, puede tomarse igual a 0.9 porque hay obstrucciones mínimas, aunque no necesariamente se tiene una ausencia de obstrucciones. Además, como el edificio está localizado en un área residencial, es poco probable que haya obstrucciones al viento que sople a lo largo del techo. El factor térmico, C_t, es 1.0 porque se trata de una

estructura con calefacción. Finalmente, el factor de importancia I que debe usarse, será de 1.1 porque más de 300 personas pueden congregarse en un área. La carga de diseño por nieve que debe usarse es entonces

$$p_f = 0.7C_eC_tIp_g = 0.7(0.9)(1.0)(1.1)(25) = 17.3 \text{ lb/pie}^2$$

o

$$p_f = 20 \text{ lb/pie}^2 (1.1) = 22 \text{ lb/pie}^2 \qquad \text{(ESTE VALOR RIGE)} \quad \blacksquare$$

En la Sección 7.4 de la ASCE 7-02 se da otra expresión para estimar la carga de nieve sobre techos inclinados. Esta implica la multiplicación de la carga de nieve sobre techos planos por un factor de pendiente de techo C_s. Se dan los valores de C_s e ilustraciones para techos calientes, techos fríos y otras situaciones en las secciones 7.4.1 a la 7.4.4 de la ASCE 7-02.

2.16 OTRAS CARGAS

Existe un buen número de otros tipos de cargas que el ingeniero debe considerar en algunas ocasiones. Entre ellas se cuentan las siguientes:

Cargas de tránsito sobre puentes

Las estructuras de los puentes están sometidas a series de cargas concentradas de magnitud variable causadas por las ruedas de los camiones o los trenes. Esas cargas se verán con todo detalle en las secciones 10.9 y 10.10 de este texto.

Cargas de hielo

El hielo tiene el potencial de aplicar fuerzas extraordinariamente grandes sobre los miembros estructurales. El hielo puede provenir de dos fuentes: (1) hielo superficial sobre lagos congelados, ríos y otros cuerpos de agua, y (2) hielo atmosférico (lluvia congelada y cellisca). Esta última puede formarse aun en climas calientes.

En climas fríos, las cargas de hielo a menudo afectarán el diseño de las estructuras marítimas. Tal situación ocurre cuando las cargas de hielo se aplican a las pilares de puentes. En esas situaciones es necesario considerar las presiones dinámicas causadas por las capas móviles de hielo, las presiones causadas por la trabazón del hielo y las cargas de levantamiento o verticales en el agua de varios niveles que causan la adherencia del hielo.

La ruptura del hielo y su movimiento durante las inundaciones de primavera pueden afectar de manera significativa el diseño de los pilares de puentes. Durante la ruptura, enormes pedazos de hielo pueden ser levantados, y cuando se quiebran, pueden precipitarse aguas abajo, golpeando y generando un efecto abrasivo sobre los pilares. Además, el acuñamiento de los trozos de hielo entre dos pilares puede ser muy serio. Es necesario entonces mantener los pilares fuera de las áreas peligrosas de la corriente o protegerlos de alguna manera. La Sección 3 de las especificaciones AASHTO proporciona fórmulas para estimar las fuerzas dinámicas causadas por el hielo en movimiento.

Los puentes y las torres (en realidad, cualquier estructura) están a veces cubiertos con capas de hielo de 1 a 2 pulgadas de espesor. El peso del hielo llega a ser de casi 10 lb/pie^2. Otro factor por considerar respecto a las cargas de viento es el área de la superficie incrementada de los miembros recubiertos de hielo.

El congelamiento atmosférico se ve en la Sección 10 de la ASCE 7-02. Se proporciona ahí información detallada para la estimación de los espesores y del peso de las acumulaciones de hielo. Este hielo se acumula típicamente sobre miembros estructurales, como se muestra en la figura 10.1 en ASCE 7-02. El espesor del hielo acumulado debe determinarse a partir de los datos históricos para la localidad considerada. También puede determinarse a partir de una investigación meteorológica de las condiciones en esa localidad. La extensión del hielo acumulado es un fenómeno localizado, de modo que no pueden prepararse tablas generales del mismo.

Cargas diversas

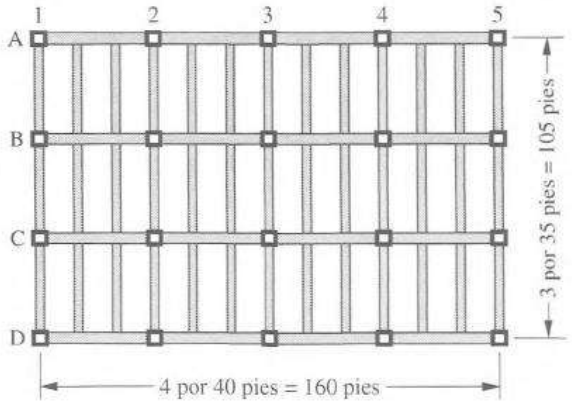
Algunas de las muchas otras cargas que el ingeniero estructural tendrá que considerar son:

- *presiones del suelo:* como las presiones laterales de tierra ejercidas sobre muros, o las presiones hacia arriba sobre cimentaciones;
- *presiones hidrostáticas:* como la presión del agua sobre presas, las fuerzas de inercia de grandes masas de agua durante sismos y las presiones de levantamiento sobre tanques y estructuras de sótanos;
- *inundaciones:* causadas por fuertes lluvias o el derretimiento de nieve y hielo;
- *cargas de explosiones:* causadas por explosiones, estampido sónico y armas militares;
- *fuerzas térmicas:* debidas a cambios de temperatura que generan deformaciones y fuerzas estructurales;
- *fuerzas centrífugas:* como las causadas en los puentes curvos por camiones y trenes, o efectos similares en montañas rusas, etcétera;
- y *cargas longitudinales:* causadas por camiones o trenes al detenerse sobre puentes, el atraque de barcos en los muelles y el movimiento de grúas viajeras soportadas por marcos estructurales.

2.17 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

Use la planta básica que se muestra en la figura para la solución de los Problemas 2.1 al 2.5. Determine las cargas requeridas para su área de residencia, o para un área determinada por su profesor. Use el reglamento de construcción indicado por él. Si no se especifica ningún reglamento, use el de la ASCE 7-02. No necesita determinar el peso de las vigas, trabes y columnas para resolver estos problemas. El autor usó ASCE 7-02 para obtener las respuestas provistas. No se espera que tenga un ejemplar de esta norma; aquí se proporciona suficiente información para resolver estos problemas.

Planta básica del edificio



2.1 El techo del edificio es plano. Está compuesto de una cubierta de fieltro de cuatro hojas y grava sobre 3 plg de concreto reforzado. El plafón bajo el techo es un sistema de canales colgantes de acero. Determine

a. La carga muerta de techo. (*Resp.* 45 lb/pie^2.)

b. La carga viva en lb/pie^2 por aplicarse a la columna B2. (*Resp.* 12 lb/pie^2.)

2.2 El techo del edificio es plano. Está compuesto de 2 plg de concreto reforzado sobre una cubierta metálica de calibre 18 que pesa 3 lb/pie^2. Se usará una lámina simple impermeable de 0.7 lb/pie^2. El plafón bajo el techo es aparente (no acabado), pero deberá tenerse en cuenta la presencia de ductos mecánicos. Determine

a. La carga muerta de techo

b. La carga viva en lb/pie^2 por aplicarse a la columna A1.

2.3 Determine la carga muerta y la carga viva para el segundo piso de una biblioteca en la que cualquier área puede usarse para estibar libros. Suponga que se tendrá un sistema de canales de acero para el plafón (2 lb/pie^2) y losetas de asfalto sobre los pisos. Los pisos son de 6 plg de concreto reforzado. Deberá tenerse en cuenta la presencia de ductos mecánicos. (*Resp.* p_M = carga muerta es 82 lb/pie^2, p_V = carga viva es 150 lb/pie^2)

2.4 Determine la carga muerta y la carga viva para un piso de un edificio que contendrá bodegas de productos ligeros y oficinas y en el que cualquier área podrá usarse para almacenaje. Suponga que no habrá plafones o acabados de pisos y que éstos son de 4 plg de concreto reforzado. Deberá tenerse en cuenta la presencia de ductos mecánicos.

2.5 Determine la carga muerta y la carga viva para un piso típico superior en un edificio de oficinas con muros divisorios movibles. El plafón es un sistema de canales de acero y los pisos tienen un acabado de linóleo. Los pisos son de concreto reforzado de 3 plg. Considere la presencia de ductos mecánicos. (*Resp.*: p_M = carga muerta es 48.5 lb/pie^2, p_V = carga viva es 50 lb/pie^2 en oficinas y 80 lb/pie^2 en pasillos.)

2.6 Determine las cargas para el piso superior de una escuela con muros con montantes de acero (enyesado de ½ plg a cada lado), sistema de canales de acero para el plafón y un piso de concreto reforzado de 3 plg con cubierta de losetas de asfalto. Considere la presencia de ductos mecánicos.

2.7 Determine la carga de diseño por lluvia sobre el techo de un edificio de 250 pies de ancho y 500 pies de longitud. El arquitecto ha decidido usar drenes de 6 plg de diámetro localizados uniformemente alrededor del perímetro del edificio a intervalos de 40 pies para el sistema de drenado secundario. Los drenes están localizados a 1.5 plg por arriba de la superficie del techo. La intensidad de la lluvia en la localidad de este edificio es de 2.5 plg por hora. (*Resp.* 14.72 lb/pie^2.)

Capítulo 3

Sistema de cargas y comportamiento

3.1 INTRODUCCIÓN

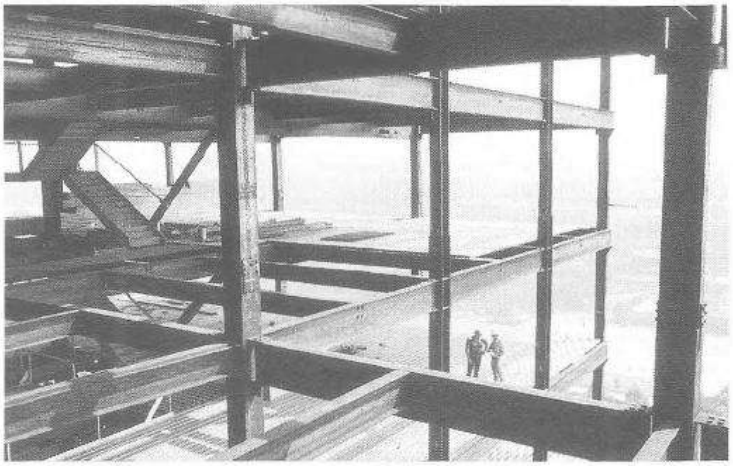
En el capítulo 2 se vieron los diferentes tipos de cargas que pueden aplicarse a los sistemas estructurales, así como los métodos para estimar sus magnitudes individuales. Sin embargo, no se consideró si las cargas actúan de manera simultánea o en tiempos diferentes, ni se vio cómo y dónde colocarlas sobre la estructura para generar una respuesta máxima del sistema.

La expresión genérica "respuesta del sistema", en realidad se refiere a una cantidad particular del comportamiento estructural. La respuesta podría ser el momento flexionante negativo en una viga de piso, el desplazamiento en una posición particular de la estructura, o la fuerza en uno de los soportes estructurales. Por ahora, el estudiante probablemente sabe muy poco acerca de cómo calcular esos aspectos de la respuesta.

Una vez que han sido calculadas las magnitudes de las cargas, el siguiente paso en el análisis de una estructura particular es la colocación de las cargas sobre la estructura y el cálculo de su respuesta a esas cargas. Al colocar las cargas en la estructura, deben efectuarse dos tareas distintas:

1. Se debe decidir de qué cargas puede esperarse razonablemente que actúen de manera concurrente en el tiempo. Como cargas distintas actúan sobre la estructura en diferentes tiempos, habrá diversas condiciones diferentes de carga que deberán evaluarse. Cada una de esas condiciones ocasionará que el sistema estructural responda de manera diferente.
2. Se debe determinar cómo colocar esas cargas sobre la estructura. Después de que las cargas son colocadas en la estructura se calcula la respuesta de ésta. Si las mismas cargas se colocan sobre la estructura en posiciones diferentes, la respuesta del sistema será distinta. Tenemos que determinar cómo colocar las cargas para obtener la respuesta máxima. Por ejemplo, ¿los *momentos flexionantes* en las vigas de piso podrían ser mayores si colocamos las cargas vivas de piso en cada claro, o bien, en un claro sí y en otro no?

La colocación de las cargas vivas para que éstas generen los máximos o los peores efectos sobre cualquier miembro de una estructura es responsabilidad del ingeniero estructural. En teoría, sus cálculos están sometidos a revisión por parte de las autoridades oficiales, pero estas personas rara vez tienen el tiempo y/o la capacidad de hacer revisiones importantes. En consecuencia, esos cálculos siguen siendo la responsabilidad del ingeniero.



Torres Martin, Bethlehem, Pennsylvania. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

3.2 ÁREAS TRIBUTARIAS

En la sección 2.8, se definió brevemente el término *área tributaria*. En esta sección se analizará con mayor amplitud. En la siguiente sección se introducirá el término asociado *área de influencia*.

El área tributaria es el área cargada de una estructura particular que contribuye en forma directa a la carga aplicada a un miembro particular de la estructura. Conviene definirla como el área limitada por líneas trazadas a la mitad de la distancia a la viga o a la columna próximas. En la figura 3.1 se muestran sombreadas las áreas tributarias de varias vigas y columnas para una estructura con flexión en una dirección entre las vigas. La componente asociada con el área tributaria se muestra remarcada en negro.

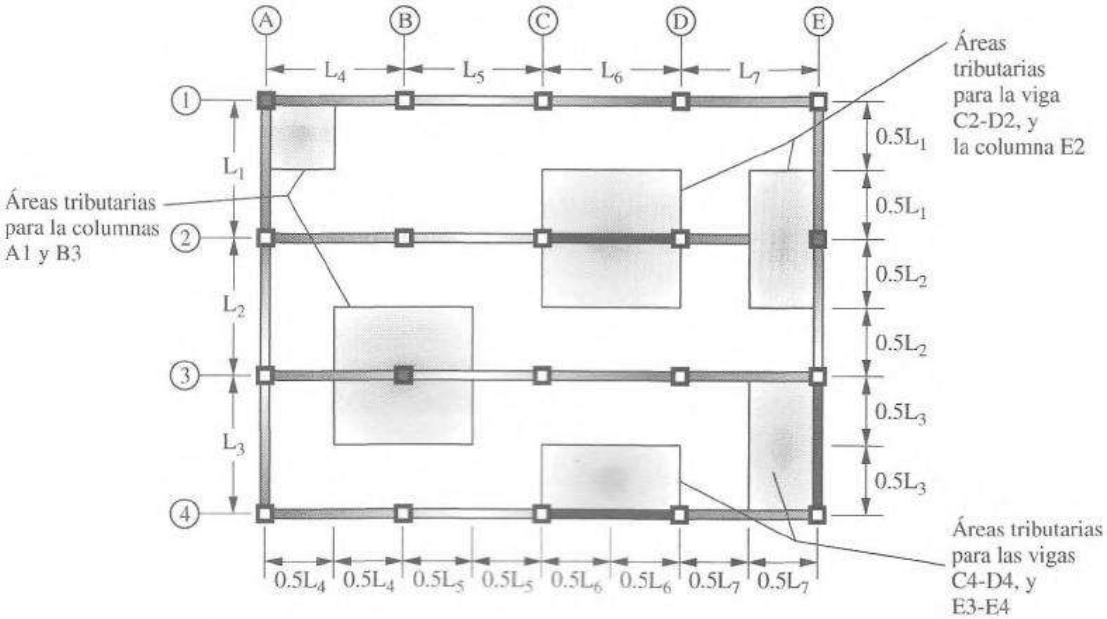


Figura 3.1 Áreas tributarias para columnas y trabes seleccionadas.

Las áreas tributarias mostradas para las vigas en la figura 3.1 son las áreas tributarias usadas comúnmente para la flexión en una o en dos direcciones. Las áreas tributarias teóricas para una viga interior típica y para una viga de borde típica se muestran en la figura 3.2 para una estructura con un sistema de piso con dos direcciones que cubre el claro entre las vigas.

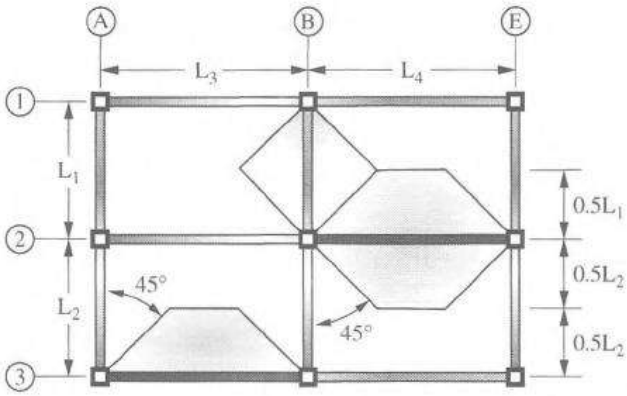


Figura 3.2 Área tributaria teórica para una viga con flexión en dos direcciones.

Las *vigas* son miembros que sustentan cargas transversales. Generalmente se contempla su uso en posición horizontal y sujetas a cargas gravitacionales o verticales, pero hay excepciones frecuentes: los cabios, por ejemplo. El término *trabe* se usa de manera informal, generalmente indicando una viga grande y tal vez aquella que está ensamblada con vigas más pequeñas. Se supone que las cargas son aplicadas por la losa.

Vemos que en la porción central de la mitad de la viga el área tributaria se extiende la mitad de la distancia a la viga próxima en cada dirección. Sin embargo, en los extremos de la viga la carga es soportada parcialmente por las vigas en la dirección perpendicular. Por lo tanto, la frontera del área tributaria estará a la mitad de la distancia entre las dos, es decir, en un ángulo de 45°. Las áreas tributarias para las vigas mostradas en la figura 3.2 rara vez se usan en la práctica debido a la dificultad de tratar con la carga trapezoidal resultante. El uso del área tributaria mostrada en la figura 3.1 en vez de la mostrada en la figura 3.2 es de carácter conservador porque habrá más carga actuando sobre el miembro cuando se le analiza que la que se presentará realmente.

Las cargas de piso son soportadas a menudo por vigas de piso, como se muestra en la figura 3.3(a). Las vigas de piso se extienden de una trabe a otra. Normalmente las vigas de piso se conectan a las trabes con conexiones que pueden idealizarse como soportes simples, o sea sin momentos

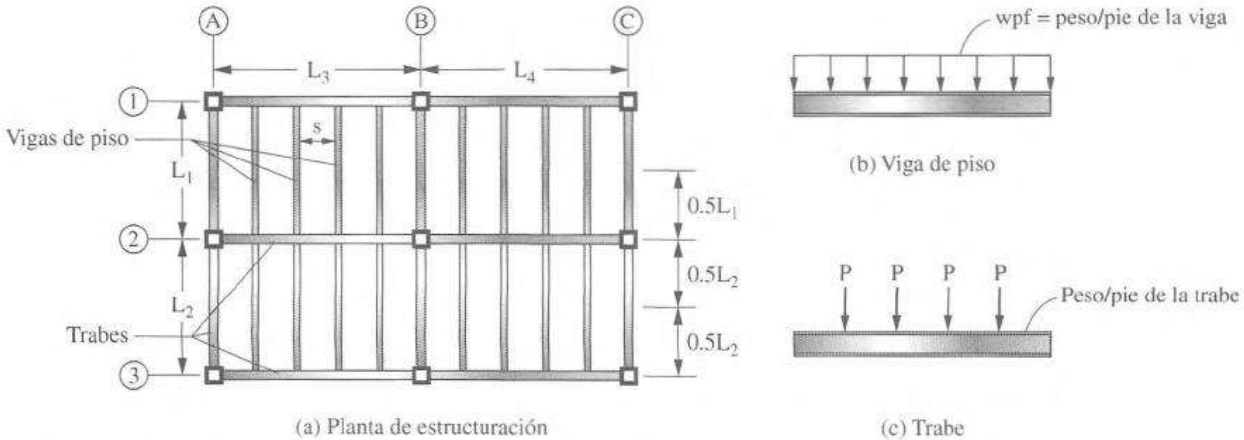


Figura 3.3 Sistema típico de estructuración de un piso.

en los extremos de las vigas de piso. Cuando las vigas de piso se conectan de esta manera, las cargas que actúan sobre ellas se muestran en la figura 3.3(b). El término w representa la carga uniforme que la viga debe sustentar por pie incluyendo su propio peso.

Las trabes deben soportar las reacciones de las vigas conectadas a éstas así como su propio peso. Por lo tanto, las reacciones totales aplicadas a las trabes interiores y exteriores de la figura 3.3 son las siguientes. Observe que además de las reacciones de las vigas, una trabe también debe soportar su propio peso

$$\text{Para una trabe interior} \qquad P = w\left(\frac{L_1 + L_2}{2}\right)s$$

$$\text{Para una trabe exterior} \qquad P = w\left(\frac{L_1 \text{ o } L_2}{2}\right)s$$

Los ejemplos 3.1 y 3.2 ilustran el cálculo de las cargas que actúan sobre columnas, vigas y trabes. Antes de exponer los ejemplos tenemos que hacer un comentario adicional respecto a la estructuración. Las vigas y las trabes en un marco pueden conectarse a las columnas simplemente apoyadas o de manera que se permita la existencia de momentos en los extremos de los miembros. Si se resisten momentos en los extremos de las vigas y de las trabes, al marco se le denomina *marco resistente a momentos*. Si se usan conexiones simples no resistentes a momentos, deberán proporcionarse contravientos diagonales o muros de cortante para garantizar la estabilidad lateral.

EJEMPLO 3.1

El piso del edificio mostrado en la figura 3.4 debe diseñarse para soportar una carga uniformemente distribuida de 50 lb/pie^2 sobre toda su área. Despreciando el peso de los miembros, determine las cargas que deben ser sustentadas por: (a) la columna interior B3, (b) la columna de borde E2, y (c) la columna de esquina A1.

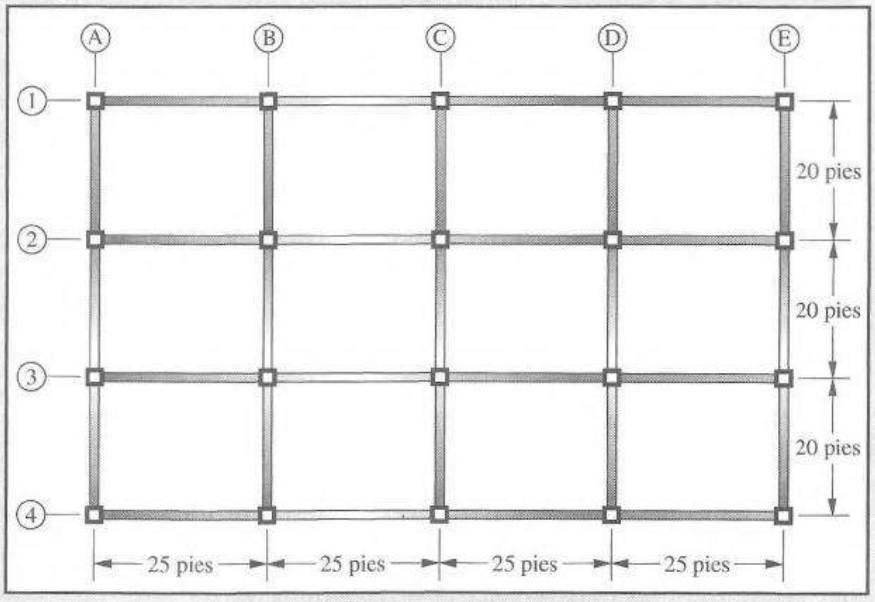


Figura 3.4

Solución.

Columna B3

$$P = (50\,\text{lb/pie}^2)\left(\frac{20\,\text{pies} + 20\,\text{pies}}{2}\right)\left(\frac{25\,\text{pies} + 25\,\text{pies}}{2}\right) = 25\,000\,\text{lbs}$$

Columna E2

$$P = (50\,\text{lb/pie}^2)\left(\frac{20\,\text{pies} + 20\,\text{pies}}{2}\right)\left(\frac{25\,\text{pies}}{2}\right) = 12\,500\,\text{lbs}$$

Columna A1

$$P = (50\,\text{lb/pie}^2)\left(\frac{20\,\text{pies}}{2}\right)\left(\frac{25\,\text{pies}}{2}\right) = 6\,250\,\text{lbs}$$ ■

EJEMPLO 3.2

El piso del edificio mostrado en la figura 3.5 debe diseñarse para soportar una carga uniformemente distribuida de 50 lb/pie^2 sobre toda su área. Despreciando el peso de los miembros, determine lo siguiente:

(a) La carga uniforme por pie que debe sustentar una viga interior típica
(b) Las cargas concentradas, o cargas P, aplicadas a la trabe interior A2-B2
(c) Las cargas concentradas, o cargas P, aplicadas a la trabe exterior A1-B1

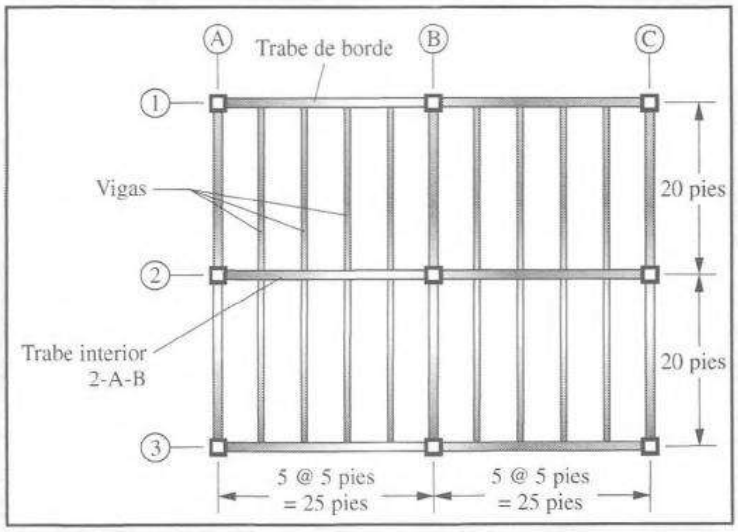


Figura 3.5

Solución

(a) Viga interior de piso

$$w = (50\ \text{lb/pie}^2)\ (5\ \text{pies}) = 250\ \text{lb/pie}$$

(b) Trabe interior A2-B2

$$P = (250\ \text{lb/pie})\left(\frac{20\,\text{pies} + 20\,\text{pies}}{2}\right) = 5\,000\ \text{lbs}$$

cargas concentradas a 5 pies centro a centro

(c) Trabe exterior A1-B1

$$P = (250\ \text{lb/pie})\left(\frac{20\,\text{pies}}{2}\right) = 2\,500\ \text{lbs}$$

cargas concentradas a 5 pies centro a centro ■

3.3 ÁREAS DE INFLUENCIA

Las áreas de influencia son aquellas áreas que cuando están cargadas afectan a las fuerzas de diseño en un miembro particular de una estructura. Como veremos, estas áreas son diferentes de las áreas tributarias previamente descritas. Haciendo referencia al dibujo de la planta de edificio mostrada en la figura 3.6 puede verse que una carga colocada en cualquier parte en el rectángulo superior izquierdo de la planta de edificio afectará directamente a la fuerza aplicada a la columna superior izquierda A1. A este rectángulo completo se le denomina el área de influencia para esa columna específica. El área tributaria para esta misma columna es solamente el cuarto superior izquierdo del mismo rectángulo. Podemos ver que el área de influencia para esta columna es cuatro veces su área tributaria.

En la figura 3.6 se muestran las áreas de influencia para diferentes vigas y columnas en este mismo sistema de piso. En cada caso el miembro en cuestión se muestra sombreado en la figura.

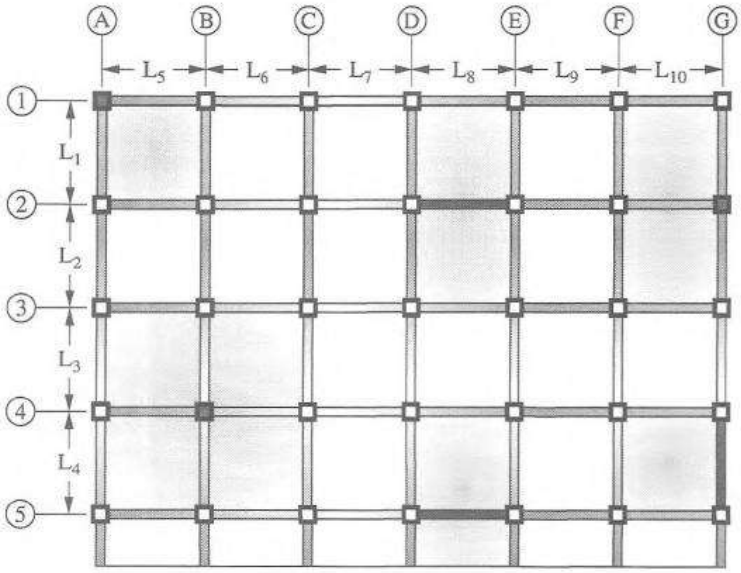


Figura 3.6 Áreas de influencia para una selección de vigas y columnas.

Tanto en ASCE 7-02 como en el IBC-2003, el área de influencia se define como:

$$A_I = K_{LL}A_T$$

El área de influencia es igual al factor de carga viva, K_{LL}, multiplicado por el área tributaria A_T. El factor de carga viva puede calcularse a partir de la geometría del edificio, o puede tomarse de la tabla 3.1.

De la figura 3.6 y de esta tabla puede verse que el área de influencia para una columna interior es cuatro veces tan grande como su área tributaria, mientras que para una viga interior es dos veces tan grande como sus áreas tributarias.

3.4 REDUCCIÓN DE LA CARGA VIVA

En ciertas circunstancias, las cargas vivas para un edificio especificadas por los reglamentos pueden reducirse. Para este estudio, se supone que la carga viva máxima especificada para una planta de piso específica es de 100 lb/pie^2. Si el área de influencia para un miembro específico es de 1 000 pies cuadrados, la probabilidad de tener una carga viva máxima de 100 lb/pie^2 aplicada

TABLA 3.1 FACTOR K_{LL}* POR CARGA VIVA

Tipo de elemento	K_{LL}
Columna interior,	
columnas exteriores sin losas en voladizo.	4
Columnas de borde con losas en voladizo.	3
Columnas de esquina con losas en voladizo,	
Vigas de borde sin losas en voladizo,	
Vigas interiores.	2
Todas las otras vigas no identificadas incluyendo: Vigas de borde con losas en voladizo, vigas en voladizo, losas en dos direcciones y miembros sin preparaciones para la transferencia de cortante continuo normal a sus claros.	1

*Tabla 1607.9.1 del IBC2003.

a un pie cuadrado de esta área parece ser mucho menos factible que si el área fuera de 200 pies cuadrados. Entonces decimos que a medida que crece el área de influencia que contribuye a la carga sobre un miembro particular, la posibilidad de tener la plena carga viva de diseño sobre toda el área decrece al mismo tiempo. En consecuencia, los reglamentos de construcción con frecuencia permiten alguna reducción en las cargas vivas especificadas cuando intervienen áreas grandes. En la Sección 4.8 de la ASCE 7-02 y en la sección 1607.9.1 del IBC-2003 se da el siguiente factor de reducción:

$$L = L_0\left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{K_{LL}A_T}}\right)$$

En esta ecuación, L es la carga viva reducida, L_0 es la carga viva especificada en el reglamento, y el término entre paréntesis es el factor de reducción. Los términos K_{LL} y A_T se definieron en la sección anterior.

En esta ecuación podemos ver que las cargas vivas se reducirán sólo cuando el área de influencia sea mayor que 400 pies cuadrados. Sin embargo, hay límites por lo que se refiere a cuánta carga viva se puede reducir. Si el miembro estructural soporta sólo un piso, entonces la carga viva no puede reducirse en más de 50%. Para miembros que soportan más de un piso, la carga viva no puede reducirse más de 60%. Por lo general, las vigas se usan para soportar un piso. Por otro lado, las columnas soportan a menudo más de un piso, de hecho, soportan todos los pisos que están arriba de ellas. En la figura 3.7 se presenta una gráfica de factores de reducción de carga viva para diferentes áreas de influencia, según se obtienen a partir de la ecuación anterior.

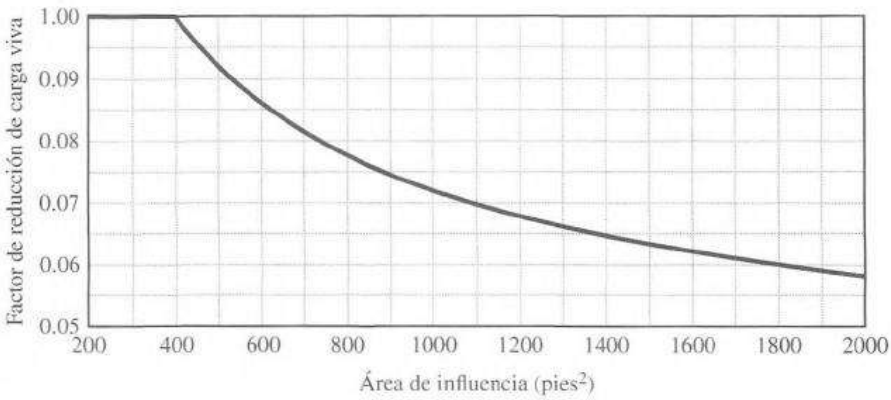


Figura 3.7 Factor de reducción de carga viva contra área de influencia.

Sin embargo, la ASCE 7-02 no permite en todos los casos la reducción de la carga viva. Si la carga viva unitaria es de 100 lb/pie^2 o menor, y el área cargada se usa como lugar de reunión pública, entonces la reducción no debe efectuarse. Además, la reducción tampoco se efectuará si el área cargada es un techo o una losa armada en una sola dirección y la carga viva unitaria es menor o igual a 100 lb/pie^2. Una losa en una sola dirección es una losa soportada principalmente sobre sólo dos bordes opuestos.

Cuando la carga viva unitaria excede de 100 lb/pie^2, puede efectuarse una reducción máxima de 20% para los miembros estructurales que soportan más de un piso. No se permite ninguna reducción para miembros que soportan sólo un piso cuando la carga viva unitaria es mayor que 100 lb/pie^2. El fundamento de esta reducción de 20% es que las cargas vivas unitarias mayores tienden a ocurrir en edificios usados como almacenes o bodegas. En este tipo de edificios, varios claros adyacentes pueden estar cargados de manera simultánea, pero estudios al respecto han indicado que rara vez un piso entero está cargado a más de 80% de la carga de diseño nominal.

La estipulación sobre la reducción de la carga viva y las limitaciones relacionadas con ella tienen dos implicaciones importantes en el análisis estructural. Primero, las cargas usadas para obtener las fuerzas de diseño de columnas y las cargas usadas para obtener las fuerzas de diseño de vigas de piso pueden ser diferentes. Esta situación ocurre porque probablemente son diferentes los factores de reducción de carga viva para cada caso. En segundo lugar, como los techos y los pisos se tratan de distinta manera, la reducción de la carga viva no siempre es permitida en aquellos casos en que las columnas soportan un piso y el techo. Columnas típicas de este tipo son aquellas que soportan el piso superior de un edificio. Cuando una columna soporta un piso y el techo, se debe considerar que soporta sólo un piso para la determinación de la reducción permisible de carga viva.

3.5 CONDICIONES DE CARGA PARA EL DISEÑO POR ESFUERZOS PERMISIBLES

Hay dos métodos generales que se usan para el diseño de estructuras. Éstos son los procedimientos de esfuerzo permisible y de diseño por resistencia. Esta sección trata del método de esfuerzos permisibles y la siguiente del método de resistencia.

Con el método de esfuerzos permisibles se estiman las condiciones de carga más severas y se calculan esfuerzos elásticos en los miembros. Estos esfuerzos se limitan a ciertos máximos que están marcadamente por debajo de los esfuerzos últimos que los materiales pueden resistir.

Para determinar las cargas más severas que la estructura debe ser capaz de sustentar con seguridad, es necesario considerar cuál de las cargas (muerta, viva y ambiental) pueden ocurrir simultáneamente. Para este análisis usaremos la siguiente nomenclatura:

D = cargas muertas

E = efectos de carga sísmica o de terremoto

F = cargas debidas al peso y presión de los fluidos

H = cargas debidas al peso y a la presión lateral del suelo, presión del agua subterránea o presión de materiales a granel

L = cargas vivas

L_r = cargas vivas de techo

R = cargas de lluvia

S = cargas de nieve

T = efectos totales de temperatura, flujo, contracción, asentamiento diferencial y concreto que compensa la contracción

W = cargas de viento

De acuerdo con la Sección 2 de la ASCE 7-02 y la Sección 1605 del IBC-2003, pueden ocurrir las siguientes condiciones posibles de carga simultánea que deben considerarse para determinar las condiciones más severas:

1. $D + F$
2. $D + H + F + L + T$
3. $D + H + F + (L_r \text{ o } S \text{ o } R)$
4. $D + H + F + 0.75(L + T) + 0.75(L_r \text{ o } S \text{ o } R)$
5. $D + H + F + (W \text{ o } 0.7E)$
6. $D + H + F + 0.75(W \text{ o } 0.7E) + 0.75L + 0.75(L_r \text{ o } S \text{ o } R)$
7. $0.6D + W + H$
8. $0.6D + 0.7E + H$

Cuando sea necesario considerar efectos de impacto, deberán incluirse con la carga viva. Estas situaciones se presentan cuando estas cargas se aplican rápidamente, como es el caso de garajes de estacionamiento, elevadores, andenes de carga, y otras.

Notará que todas esas cargas (excepto las cargas muertas), variarán en forma apreciable con el tiempo, por ejemplo, no siempre se tiene nieve sobre la estructura y el viento no siempre está soplando. En la segunda y la sexta condiciones de carga de la ASCE 7-02, la carga muerta ha sido combinada con múltiples cargas variables, pero en las cuarta y octava condiciones de carga la carga muerta se ha combinado con sólo dos cargas variables. Observe también que en la séptima y octava combinaciones de carga no se considera la carga muerta plena. Las dos cargas variables en estas combinaciones, las cargas de viento y sismo, generalmente tienen una componente lateral. Como tales, tienden a ocasionar que la estructura se voltee. Por otra parte, una carga muerta es una carga de gravedad, que tiende a que la estructura se enderece. En consecuencia, puede presentarse una condición más severa si por alguna razón la carga muerta plena no está actuando.

Es muy probable que cuando dos o más cargas estén actuando sobre una estructura además de la carga muerta, no alcancen sus valores máximos absolutos simultáneamente. Los estudios sobre cargas parecen confirmar esta hipótesis. Los reglamentos de la ASCE y del IBC permiten que los efectos de carga en esas condiciones de carga, excepto la carga muerta, se multipliquen por 0.75 siempre que el resultado no sea menor que el producido por la carga muerta y la carga que ocasione el mayor efecto. *Recuerde que el reglamento señala las condiciones mínimas que deben considerarse.* Si el ingeniero de diseño considera que los valores máximos de dos cargas variables (digamos, viento y lluvia) pueden ocurrir al mismo tiempo en el área analizada, entonces no se requiere usar el valor 0.75.

Esas combinaciones de cargas son sólo las combinaciones de cargas mínimas recomendadas que deben considerarse. Al igual que en la determinación de las cargas en sí, el ingeniero debe evaluar la estructura por analizar y determinar si esas combinaciones de cargas comprenden todas las posibles combinaciones para una estructura en particular. En ciertas condiciones, otras cargas y combinaciones de cargas pueden ser apropiadas.

EJEMPLO 3.3

Una plataforma de observación en un aeropuerto tiene trabes configuradas como se muestra en la figura 3.8.

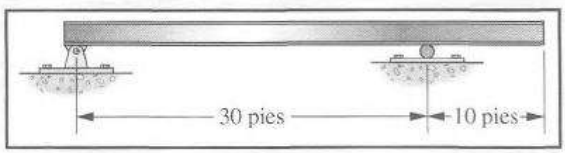


Figura 3.8

Estas trabes están espaciadas entre sí a 15 pies entre centros. Suponga que todas las cargas están uniformemente distribuidas sobre la plataforma y que son las siguientes:

Carga muerta = 32 lb/pie^2

Carga viva = 100 lb/pie^2

Carga de nieve = 24 lb/pie^2

Carga de lluvia = 10 lb/pie^2

Usando las condiciones de carga de la ASCE 7-02 y del IBC-2003, ¿cuáles son las cargas combinadas de las que puede esperarse razonablemente que actúen sobre esta trabe?

Solución. Como las trabes están a 15 pies entre centros, el área tributaria para esta viga tiene un ancho de 15 pies. Las combinaciones de carga aplicables a esta viga son las siguientes:

(1) $w = 15[32 + 0] = 480$ lb/pie
(2) $w = 15[32 + 0 + 0 + 100 + 0] = 1\,980$ lb/pie ←
(3) $w = 15[32 + 0 + 0 + 24] = 840$ lb/pie
(4) $w = 15[32 + 0 + 0(0.75)(100 + 0) + (0.75)(24)] = 1\,875$ lb/pie
(5) $w = 15[32 + 0 + 0 + 0] = 480$ lb/pie
(6) $w = 15[32 + 0 + 0 + 0 + 0 + (0.75)(100) + (0.75)(24)] = 1\,875$ lb/pie
(7) $w = 15[(0.6)(32) + 0 + 0] = 288$ lb/pie
(8) $w = 15[(0.6)(32) + 0 + 0] = 288$ lb/pie

Las trabes deben diseñarse para sustentar una carga máxima de 1 980 lb/pie. ■

3.6 CONDICIONES DE CARGA PARA EL DISEÑO POR RESISTENCIA

Un enfoque de diseño que se ha hecho común en años recientes es el procedimiento de diseño por resistencia. En este método, las cargas estimadas se multiplican por ciertos factores de carga que son casi siempre mayores que 1.0, y las cargas resultantes últimas o "factorizadas" se usan entonces para diseñar la estructura. Ésta se dimensiona para tener una resistencia de diseño última suficiente para soportar las cargas últimas.

El propósito de los factores de carga es incrementar las cargas a fin de considerar las incertidumbres implicadas al estimar las magnitudes de las cargas vivas o muertas. Por ejemplo, ¿con cuánta exactitud podría el lector estimar el porcentaje de las cargas máximas de viento o de nieve que podrían aplicarse al edificio que ocupa actualmente?

Los factores de carga que se usan para las cargas muertas son menores que los usados para las cargas vivas, porque los ingenieros pueden estimar con mayor exactitud la magnitud de las cargas muertas que la de las cargas vivas. Al respecto, el lector notará que las cargas que permanecen en su lugar durante largos periodos serán menos variables en magnitud, mientras que aquellas que se aplican durante periodos breves, como las cargas de viento, tendrán mayores variaciones.

Cuando se va a diseñar una estructura usando procedimientos de resistencia, podrán aplicarse otras combinaciones y factores de carga. Aunque no estamos directamente interesados en el diseño al llevar a cabo el análisis, debemos saber qué método de diseño se empleará, de manera que los resultados del análisis tengan sentido para el ingeniero de diseño.

Las combinaciones recomendadas de carga y los factores de carga para el diseño por resistencia se presentan por lo general en las especificaciones de los diferentes institutos encargados de

redactar los reglamentos, como el International Council of Building Officials, el American Institute of Steel Construction o el American Concrete Institute. Los factores de carga que habrán de usarse con el diseño por resistencia se determinan de manera estadística, y también se considera el tipo de estructura sobre la cual actuarán las cargas. Así, las combinaciones y los factores de carga para un edificio serán diferentes de las que se usen para un puente. Ambos serán también diferentes de los que se empleen para una plataforma petrolera alejada de la costa. Un analista estructural siempre debe remitirse a la guía de diseño o a las recomendaciones apropiadas para el sistema que habrá de analizar.

A continuación se dan las combinaciones de carga recomendadas para estructuras de edificios, según la ASCE 7-02 e IBC-2003.

1. $U = 1.4\,(D + F)$
2. $U = 1.2(D + F + T) + 1.6(L + H) + 0.5(L_r \text{ o } S \text{ o } R)$
3. $U = 1.2D + 1.6(L_r \text{ o } S \text{ o } R) + (1.0L \text{ o } 0.8W)$
4. $U = 1.2D + 1.6W + 1.0L + 0.5(L_r \text{ o } S \text{ o } R)$
5. $U = 1.2D + 1.0E + 1.0L + 0.2S$
6. $U = 0.9D + 1.6W + 1.6H$
7. $U = 0.9D + 1.0E + 1.6H$

Las combinaciones de carga presentadas en las dos últimas expresiones contienen un valor 0.9D. Este factor de 0.9 contempla los casos en donde una carga muerta mayor tiende a reducir los efectos de otras cargas. Un ejemplo obvio de una situación de este tipo puede ocurrir en edificios altos que están sujetos a fuerzas laterales eólicas y sísmicas donde el volteo puede ser una posibilidad. Como resultado, las cargas muertas se reducen en un 10% para considerar las situaciones en donde éstas se han sobrestimado.

El lector debe percatarse de que la magnitud de los factores de carga no varía en relación con la gravedad de la falla. Usted puede pensar que deben usarse factores de carga mayores para hospitales o edificios altos que para establos, pero ése no es el caso. Los factores de carga se desarrollaron con la hipótesis de que los diseñadores considerarían la gravedad de una posible falla al especificar la magnitud de sus cargas de servicio. Además, los factores de carga de la ASCE son valores mínimos, y los diseñadores tienen toda la libertad de usar factores mayores si lo desean.

El ejemplo 3.4 presenta el cálculo de cargas factorizadas para las trabes del ejemplo 3.3 usando las combinaciones de cargas por resistencia. Al valor mayor obtenido se le denomina la combinación de carga crítica o gobernante y es el valor que debe usarse en el diseño.

EJEMPLO 3.4

Repita el ejemplo 3.3, pero esta vez determine las combinaciones de carga para una estructura que será diseñada usando procedimientos de diseño por resistencia.

Solución. Las combinaciones de carga aplicables son las siguientes:

(1) $U = 15[(1.4)(32 + 0)] = 672$ lb/pie
(2) $U = 15[(1.2)(32 + 0 + 0) + (1.6)(100 + 0) + (0.5)(24)] = 3\,156$ lb/pie ←
(3) $U = 15[(1.2)(32) + (1.6)(24) + (1.0)(100)] = 2\,652$ lb/pie
(4) $U = 15[(1.2)(32) + (1.6)(0) + (1.0)(100) + (0.5)(24)] = 2\,256$ lb/pie
(5) $U = 15[(1.2)(32) + (1.0)(0) + (1.0)(100) + (0.2)(24)] = 2\,148$ lb/pie
(6) $U = 15[(0.9)(32) + (1.6)(0) + (1.6)(0)] = 432$ lb/pie
(7) $U = 15[(0.9)(32) + (1.0)(0) + (1.6)(0)] = 432$ lb/pie ■

Para algunas situaciones especiales, los reglamentos permiten reducciones en los factores especificados de carga. Estas situaciones son las siguientes:

(a) En las ecuaciones tercera a quinta, los factores de carga para cargas vivas pueden reducirse a 0.5, excepto para garajes, para áreas de uso público y para todas las áreas donde las cargas vivas sea mayores que 100 libra/pie^2.

(b) En las ecuaciones sexta y séptima, el factor de carga para H es cero si la acción estructural de H contrarresta la debida a W o E. Si la presión lateral de tierra se opone a la acción de otras fuerzas, no deberá incluirse en H sino en la resistencia de diseño.

Frecuentemente, los reglamentos de construcción y las referencias para cargas de diseño proporcionan cargas sísmicas para valores a nivel de resistencia (es decir, de hecho ya han sido multiplicadas por un factor de carga). Ésta es la situación supuesta en las ecuaciones quinta y séptima. Sin embargo, si se especifican fuerzas sísmicas a nivel de servicio, será necesario usar 1.4E en estas dos ecuaciones.

El ejemplo 3.5 presenta el cálculo de cargas factorizadas para una columna que use las combinaciones de resistencia. Al mayor valor obtenido se le denomina la combinación de carga crítica o gobernante y es el valor que debe usarse en el diseño. *Observe que los valores de las cargas eólica y sísmica pueden tener dos valores dependiendo de la dirección de estas fuerzas, y puede ser posible que el signo de estas cargas sea diferente (es decir, compresión o tensión).* Como resultado, tal vez tengamos que utilizar las ecuaciones aplicables dos veces para considerar los valores diferentes. Esta misma situación puede presentarse con las combinaciones de carga requeridas para el diseño de esfuerzos permisibles que se describieron en la sección anterior. La sustitución en todas estas combinaciones de carga es un poco tediosa pero puede manejarse fácilmente con programas de computadora.

EJEMPLO 3.5

Se han estimado las cargas axiales para una columna de un edificio con los siguientes resultados: D = 150 klb, carga viva de techo L_r = 60 klb, L = 300 klb, viento de compresión W = 70 klb, viento de tensión W = 60 klb, carga sísmica de compresión = 50 klb y carga sísmica de tensión = 40 klb. Determine la carga de diseño crítica usando los factores de carga dados en esta sección.

Solución.

(1) $U = (1.4)(150 + 0) = 210$ klb

(2) $U = (1.2)(150 + 0 + 0) + (1.6)(300 + 0) + (0.5)(60) = 690$ klb ←

(3)(a) $U = (1.2)(150) + (1.6)(60) + (1.0)(300) = 576$ klb

(b) $U = (1.2)(150) + (1.6)(60) + (0.8)(70) = 332$ klb

(c) $U = (1.2)(150) + (1.6)(60) + (0.8)(-60) = 228$ klb

(4)(a) $U = (1.2)(150) + (1.6)(70) + (1.0)(300) + (0.5)(60) = 622$ klb

(b) $U = (1.2)(150) + (1.6)(-60) + (1.0)(300) + (0.5)(60) = 414$ klb

(5)(a) $U = (1.2)(150) + (1.0)(50) + (1.0)(300) + (0.2)(0) = 530$ klb

(b) $U = (1.2)(150) + (1.0)(-40) + (1.0)(300) + (0.2)(0) = 440$ klb

(6)(a) $U = (0.9)(150) + (1.6)(70) + (1.6)(0) = 247$ klb

(b) $U = (0.9)(150) + (1.6)(-60) + (1.6)(0) = 39$ klb

(7)(a) $U = (0.9)(150) + (1.0)(50) + (1.6)(0) = 185$ klb

(b) $U = (0.9)(150) + (1.0)(-40) + (1.6)(0) = 95$ klb ■

3.7 CONCEPTO DE ENVOLVENTE DE FUERZAS

Cuando se aplican cargas a una estructura, la estructura responde en reacción a las cargas. Las fuerzas en una componente particular del sistema son causadas por (1) las cargas que actúan sobre la estructura y (2) el lugar en que están aplicadas esas cargas. A partir del análisis de la respuesta a esas fuerzas actuantes diversas podemos determinar las fuerzas máxima y mínima que pueden existir en cualquier componente. Este rango de fuerzas se llama *envolvente de fuerzas.*

En el ejemplo 3.6 se ilustra el concepto de envolvente de fuerzas. Se obtendrá una envolvente de fuerzas para el momento flexionante en una viga simple con los procedimientos que se aprendieron en cursos anteriores.

EJEMPLO 3.6

Durante la vida útil de la viga mostrada en la figura 3.9 estará cargada con una carga muerta uniforme igual a 3 klb/pie en toda su longitud. También estará cargada con una carga viva concentrada en su eje central que puede variar de 0 hasta un valor máximo de 25 klb. Dibuje diagramas de momento sólo para la carga muerta, sólo para la carga viva máxima y luego dibuje un diagrama para la carga muerta más la carga viva plena.

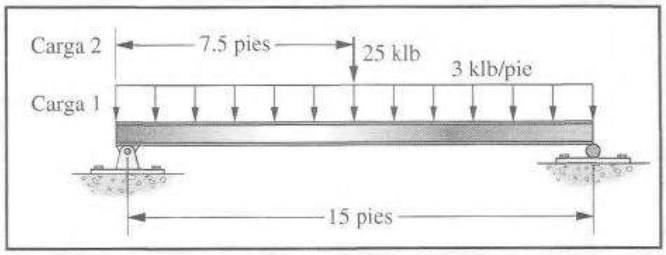
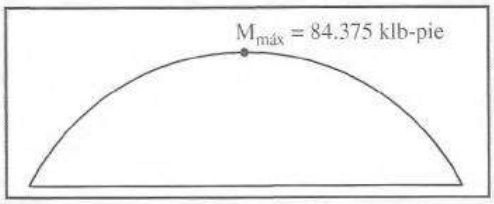


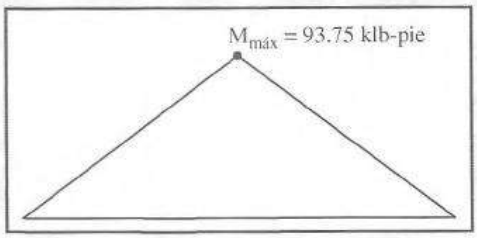
Figura 3.9

Solución. Los momentos se dibujan usando los principios de la mecánica. La preparación de los diagramas de momentos se estudia con mucho detalle en el capítulo 5 de este libro.

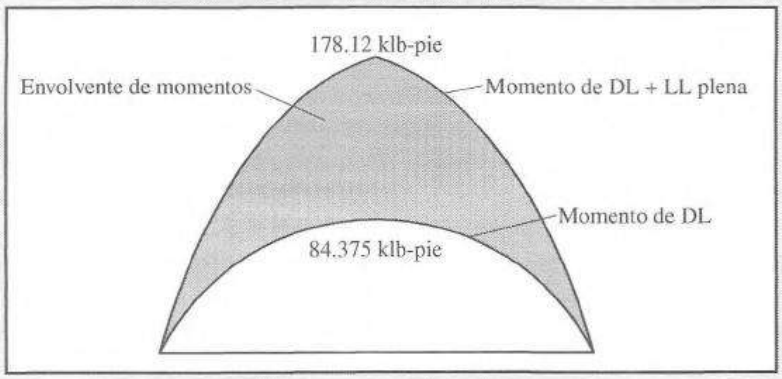
El diagrama de momentos para la carga uniforme de 3 klb/pie se dibuja como se muestra enseguida.



Se prepara de manera similar el diagrama de momentos para la carga concentrada de 25 klb.



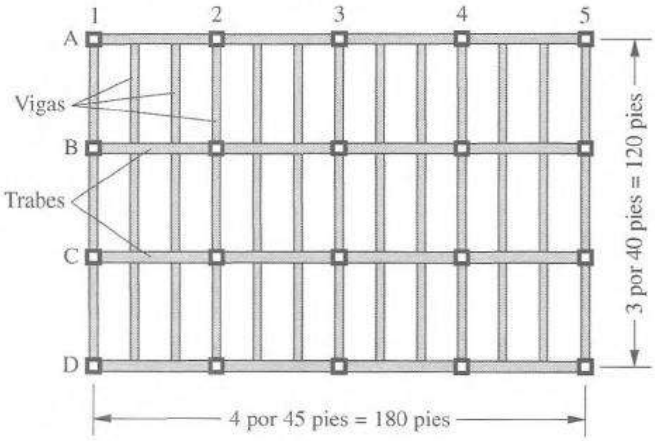
En la siguiente figura se muestran el diagrama de momentos de carga muerta y el diagrama de momentos de carga muerta más carga viva máxima. El área sombreada representa la envolvente de momentos o el rango de posibles valores de los momentos para las cargas dadas.



3.8 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

Para los problemas 3.1 al 3.5, calcule los valores requeridos usando la planta básica de piso que se muestra en la figura adjunta. Considere que es apropiada la reducción de la carga viva de acuerdo con las estipulaciones de la ASCE 7-02. Para los propósitos de estos problemas, suponga que se trata de un piso superior en un edificio de oficinas de múltiples niveles, pero que no se trata del último piso.

Planta básica del edificio



3.1 Carga sobre la columna B3 contribuida por este piso si la carga viva es de 150 lb/pie^2. (*Resp.* 216 000 lbs.)

3.2 Carga sobre la columna A3 contribuida por este piso si la carga viva es de 75 lb/pie^2.

3.3 Carga sobre la columna A1 contribuida por este piso si la carga viva es de 100 lb/pie^2. (*Resp.* 27 160 lbs.)

3.4 Carga sobre una viga interior de piso si la carga viva es de 75 lb/pie^2.

3.5 Carga sobre la trabe B2-B3 si la carga viva es de 50 lb/pie^2. (*Resp.* 16 680 lbs.)

Para los problemas 3.6 al 3.10, dadas las cargas especificadas, calcule la carga combinada máxima con las combinaciones de carga de la ASCE 7-02 para diseño por esfuerzos de trabajo.

3.6 D = 50 lb/pie^2, L_r = 75 lb/pie^2, R = 8 lb/pie^2, S = 20 lb/pie^2.

3.7 D = 45 lb/pie^2, L = 60 lb/pie^2. (*Resp.* 105 lb/pie^2.)

3.8 D = 2 750 lbs, L = 4 500 lbs, L_r = 1 500 lbs, R = 1 250 lbs, S = 1 000 lbs.

3.9 D = 87 lb/pie^2, L = 150 lb/pie^2. (*Resp.* 237 lb/pie^2.)

3.10 D = 75 lb/pie^2, L_r = 35 lb/pie^2, R = 12 lb/pie^2.

Para los problemas 3.11 al 3.15, repita los problemas 3.6 al 3.10 con las combinaciones de carga de la ASCE 7-02 para diseño por resistencia.

3.11 Repita el problema 3.6. (*Resp.* 180 lb/pie^2.)

3.12 Repita el problema 3.7.

3.13 Repita el problema. 3.8 (*Resp.* 11 250 lbs.)

3.14 Repita el problema 3.9.

3.15 Repita el problema 3.10. (*Resp.* 146 lb/pie^2.)

Capítulo 4

Reacciones

4.1 EQUILIBRIO

Se dice que un cuerpo en reposo está en *equilibrio estático*. La resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo (incluyendo las fuerzas de apoyo, que se llaman reacciones) es igual a cero. No sólo deben ser cero la suma de todas las fuerzas (o de sus componentes) que actúan en cualquier dirección posible, sino también la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a cualquier eje.

Para que una estructura, o una parte de ella, estén en equilibrio bajo la acción de un sistema de cargas, debe satisfacer las seis ecuaciones de equilibrio de la estática. Con los ejes cartesianos x, y y z, las ecuaciones de equilibrio de la estática pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$
$$\sum M_x = 0 \qquad \sum M_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

Para fines de análisis y diseño, la mayoría de las estructuras pueden considerarse planas, sin que ello implique pérdida de exactitud. Para estas estructuras, que generalmente se supone están en el plano xy, la suma de las fuerzas en las direcciones x y y, así como la suma de los momentos respecto a un eje perpendicular al plano, debe ser cero. Las ecuaciones de equilibrio se reducen a:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

Comúnmente estas ecuaciones se escriben como

$$\sum F_H = 0 \qquad \sum F_V = 0 \qquad \sum M = 0$$

Estas ecuaciones no se pueden demostrar de manera algebraica; sólo expresan la afirmación de Sir Isaac Newton de que para cada acción sobre un cuerpo en reposo hay una reacción igual y opuesta. Si la estructura en consideración es una viga, una armadura, un marco rígido, o algún otro tipo de ensamblado soportado por diferentes reacciones, las ecuaciones de equilibrio de la estática deben satisfacerse para que esa estructura permanezca en equilibrio.

Las estructuras que se estudian en los siete primeros capítulos de este texto son planas; la estructura completa está situada en un plano y sus cargas están aplicadas en el mismo plano. En el capítulo 8 se estudian las armaduras tridimensionales o espaciales.

4.2 CUERPOS MÓVILES

En la sección anterior se afirmó que un cuerpo en reposo está en un estado de equilibrio estático. Sin embargo, estar en reposo no es una condición necesaria para tener equilibrio estático.

Un cuerpo que se mueve con velocidad constante también puede estar en un estado de equilibrio estático; la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo es igual a cero. Este concepto puede probarse con la relación impulso-cantidad de movimiento:

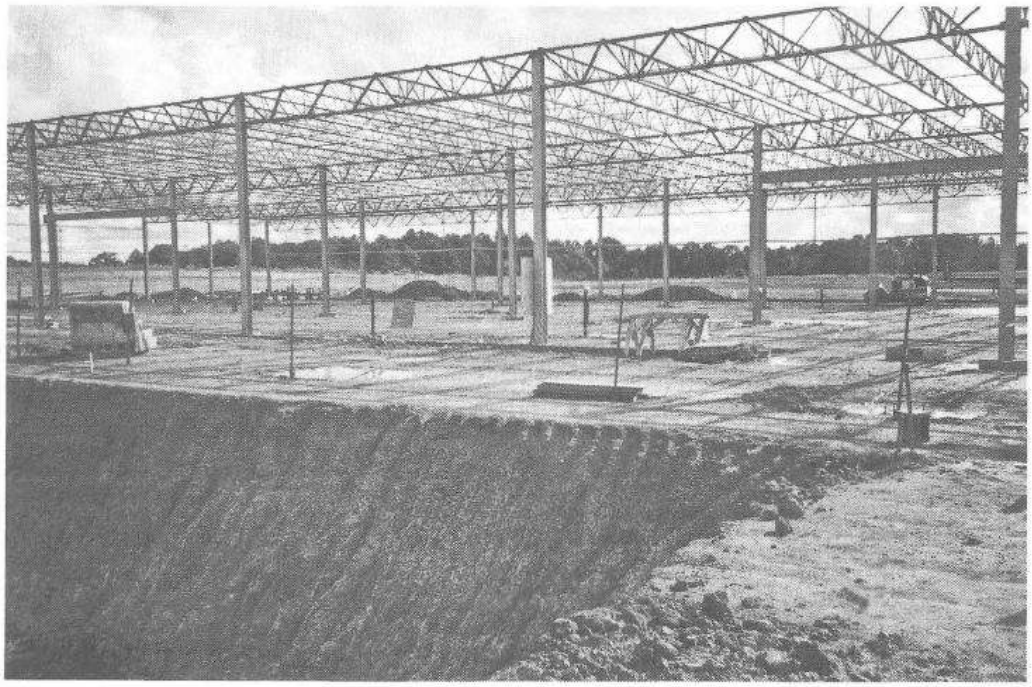
$$F(\Delta T) = m(\Delta v)$$

En esta ecuación, F es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, ΔT es el tiempo que la fuerza actúa, Δv es el cambio en la velocidad del cuerpo, y m es la masa del cuerpo. Si la fuerza neta es igual a cero, el lado izquierdo de las ecuaciones se hace cero, lo que implica que el cambio en velocidad debe ser igual a cero, ya que la masa de cualquier cuerpo real no puede ser igual a cero. Cuando el cambio de velocidad es igual a cero, el cuerpo no está acelerando —sino que se mueve con velocidad constante—. No hay nada en la relación que implique que el cuerpo sea estacionario.

Cuando un cuerpo está acelerando, existen fuerzas adicionales que deben incluirse en los cálculos de equilibrio. Esas fuerzas adicionales son las fuerzas de inercia, que son causadas por la masa del cuerpo. Cuando se incluyen las fuerzas de inercia y la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, incluidas las fuerzas de inercia, es igual a cero, se dice que el cuerpo está en un estado de equilibrio dinámico. En este libro no estudiaremos el equilibrio dinámico.

4.3 CÁLCULO DE LAS INCÓGNITAS

Para definir por completo a una fuerza, deben definirse tres propiedades de ella: su magnitud, su línea de acción y la dirección en la cual actúa a lo largo de la línea de acción. En general se conocen todas estas propiedades para cada una de las cargas aplicadas externamente. Sin embargo, cuando se trata de las reacciones estructurales, solamente se conocen el punto en el cual actúa la fuerza de la reacción y, tal vez, también la dirección. La magnitud de las fuerzas de reacción, y algunas veces las direcciones en las cuales actúan, son cantidades desconocidas que deben determinarse.



Edificio YKK USA, Dublín, Georgia. (Cortesía de Britt, Peters y Asociados.)

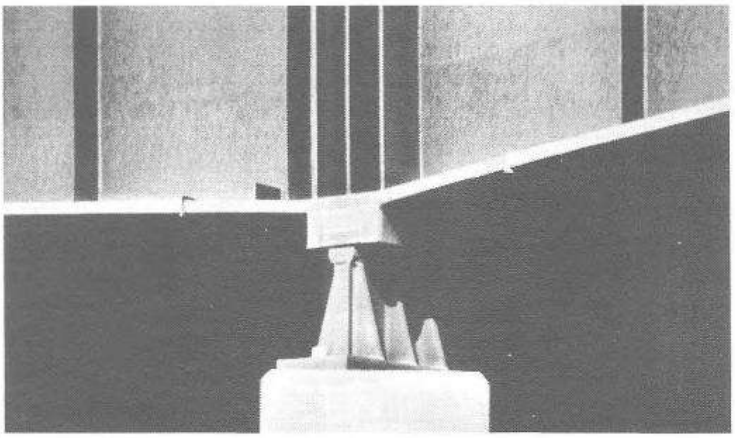
El total de incógnitas que pueden obtenerse con el uso de las ecuaciones del equilibrio estático está limitado por el número de ecuaciones independientes disponibles del equilibrio estático. Para cualquier estructura situada en un plano, existen solamente tres ecuaciones independientes de equilibrio estático. Éstas pueden usarse para determinar cuando mucho tres incógnitas en cada estructura. Para la determinación de más de tres incógnitas es necesario emplear ecuaciones adicionales a las del equilibrio estático. Veremos que en algunos casos, debido a ciertas características especiales de la construcción, se dispone de ecuaciones de condición además de las ecuaciones usuales del equilibrio estático. En capítulos posteriores, se van a introducir algunas otras ecuaciones para usarse en el análisis. Estas ecuaciones contemplan la compatibilidad de desplazamientos en la estructura.

4.4 TIPOS DE SOPORTE

Los marcos estructurales pueden soportarse por medio de articulaciones, rodillos, empotramientos o eslabones. Estos soportes se analizan en los siguientes párrafos.

Una *articulación* o soporte tipo pasador (representada aquí por el símbolo o) se supone que está conectada a la estructura por medio de un pasador sin fricción. Este tipo de soporte impide el movimiento en dirección vertical u horizontal, pero no impide ligeras rotaciones alrededor del pasador. Hay dos fuerzas desconocidas en una articulación: la magnitud de la fuerza necesaria para impedir el movimiento horizontal y la magnitud de la fuerza necesaria para impedir el movimiento vertical. El soporte proporcionado por una articulación también puede considerarse como una fuerza inclinada, que sería la resultante de las fuerzas horizontal y vertical en el soporte. Se tienen de todas maneras dos incógnitas: la magnitud y la dirección de la resultante inclinada.

Un soporte de *rodillo* (representado aquí por el símbolo) ofrece resistencia al movimiento sólo en una dirección perpendicular a la superficie de apoyo bajo el rodillo. No presenta resistencia a ligeras rotaciones respecto al eje del rodillo ni a movimientos paralelos a la superficie de apoyo. La única incógnita es la magnitud de la fuerza necesaria para evitar el movimiento perpendicular a la superficie de apoyo. *Los rodillos pueden instalarse de manera que impidan el movimiento hacia la superficie de apoyo o alejándose de ella.* Si se eleva la temperatura de la viga, la viga se dilata. Sin embargo, como el rodillo o el soporte expansivo no suministran restricción longitudinal, no se desarrolla ningún esfuerzo en la viga o en los muros de carga o en otros miembros estructurales.



Soporte articulado para una trabe de puente. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

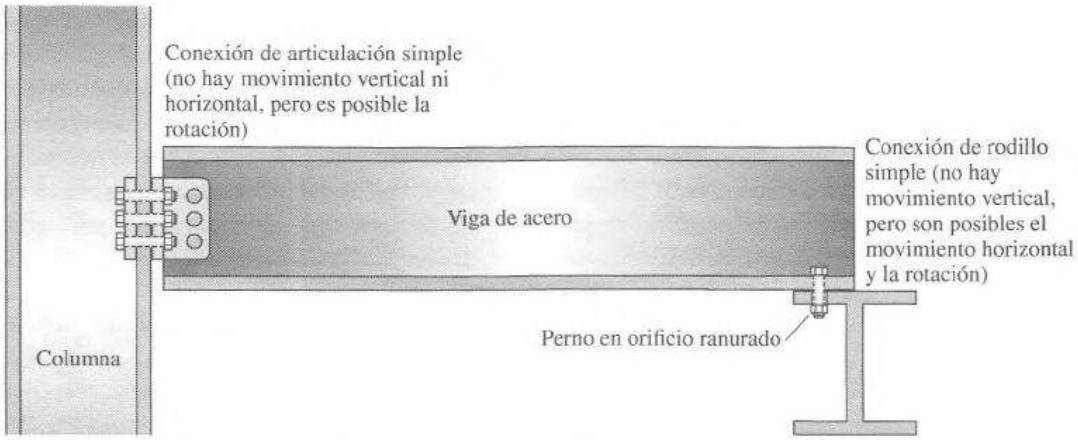


Figura 4.1 Conectores simples para una viga de acero.

Un *empotramiento* (representado aquí por el símbolo) ofrece resistencia a la rotación alrededor del soporte y al movimiento horizontal y vertical. Se tienen aquí tres incógnitas: la magnitud de la fuerza para impedir el movimiento horizontal, la magnitud de la fuerza para impedir el movimiento vertical y la magnitud de la fuerza para impedir la rotación.

Otro tipo de soporte es el *eslabón* (representado aquí por el símbolo). Es similar en su acción al rodillo, ya que los pasadores en cada extremo se suponen sin fricción. La línea de acción de la fuerza de soporte es en la dirección del eslabón y a través de los dos pasadores. Sólo se tiene una incógnita: la magnitud de la fuerza en la dirección del eslabón.

La figura 4.1 muestra conectores de tipo de pasador y de expansión (o de rodillo) que pueden usarse en una viga de acero.

Teóricamente, un conector simple o de pasador debe tener alguna libertad de rotación cuando se apliquen cargas al miembro. Los extremos de la viga de acero estructural mostrada en la figura 4.1 tienen bastante libertad de rotación. En la figura 4.2 se muestran otros dos tipos de conectores de extremo para miembros de acero que tienen una capacidad similar de rotación.

En la figura 4.3 se muestran dos conectores que proporcionan una considerable resistencia al momento y que se aproximan a los empotramientos que se muestran en la figura 4.3. Observe que en cada caso se suministra algún tipo de conector en las partes superior e inferior de los extremos

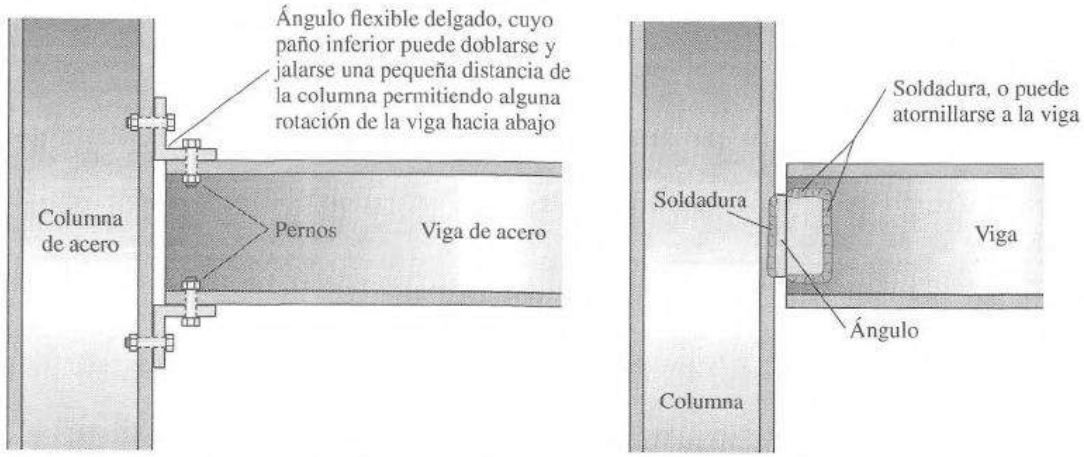


Figura 4.2 Más conectores simples o de pasador.

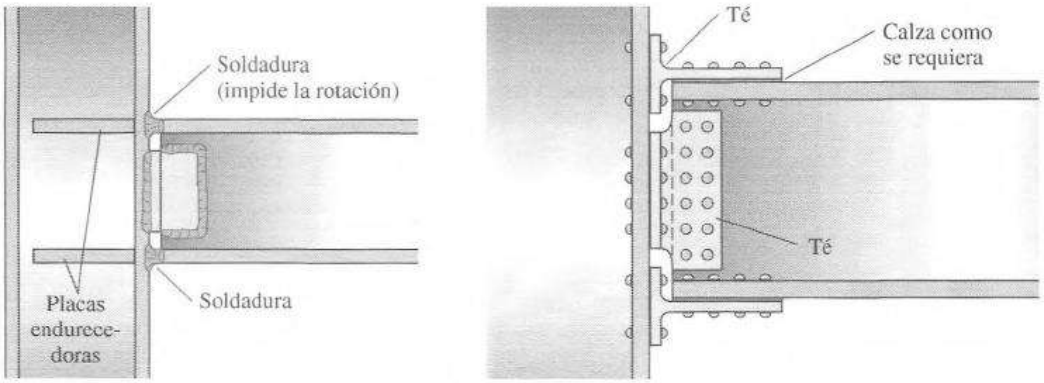


Figura 4.3 Conexiones de momento resistente.

de las vigas para evitar la rotación hacia abajo. En diferentes partes del libro se estudiarán otros conectores conforme sea necesario.

4.5 ESTABILIDAD, DETERMINACIÓN E INDETERMINACIÓN

Al analizar los soportes vimos que en un empotramiento se tienen tres componentes de reacción desconocidas, dos en una articulación y sólo una en un rodillo o eslabón. Si para una estructura en particular el número total de componentes de reacción es igual al número de ecuaciones disponibles de equilibrio estático, las incógnitas pueden calcularse y se dice entonces que la estructura es estáticamente determinada externamente. Si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones disponibles, entonces la estructura es estáticamente indeterminada externamente; si es menor, es inestable externamente. De estas consideraciones, observe que la estabilidad, la determinación y la indeterminación dependen de la configuración de la estructura; éstas no dependen de las cargas aplicadas a la estructura. Los siguientes ejemplos demostrarán la aplicación de estos conceptos a los sistemas estructurales.

EJEMPLO 4.1

Determinar la clasificación estática de la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 4.4. Se ilustran las fuerzas de reacción desconocidas. Hay dos fuerzas de reacción desconocidas en el soporte izquierdo, ya que se trata de un soporte articulado. Se tiene una fuerza de reacción desconocida en el soporte derecho por tratarse de un rodillo.

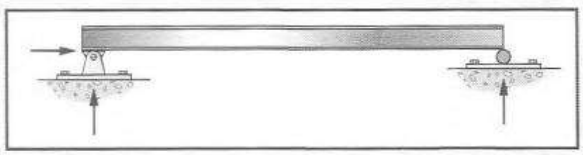


Figura 4.4

Existen tres ecuaciones aplicables de equilibrio estático: suma de fuerzas verticales, suma de fuerzas horizontales y suma de momentos. Debido a que hay tres fuerzas incógnitas de reacción y tres ecuaciones aplicables de equilibrio, la viga es estable y estáticamente determinada externamente —el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones de equilibrio estático. ■

EJEMPLO 4.2

Determinar la clasificación estática de la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 4.5. Se ilustran las fuerzas de reacción desconocidas. Hay sólo una fuerza de reacción desconocida en cada uno de los dos soportes porque éstos son rodillos.

Figura 4.5

Existen tres ecuaciones aplicables de equilibrio estático: suma de fuerzas verticales, suma de fuerzas horizontales y suma de momentos. Debido a que hay dos fuerzas de reacción desconocidas y tres ecuaciones de equilibrio aplicables, la viga es inestable —el número de ecuaciones de equilibrio estático excede al número de incógnitas.

Aunque una estructura puede ser estable bajo un arreglo de cargas, si ésta no es estable bajo cualquier otro conjunto de cargas, es inestable. Esta viga no puede conservar su posición cuando está sujeta a una carga horizontal. Es inestable. ■

EJEMPLO 4.3

Determinar la clasificación estática de la viga continua mostrada en la figura 4.6. Se indican las fuerzas de reacción desconocidas. En el soporte izquierdo se tienen dos fuerzas desconocidas de reacción por tratarse de un apoyo simple fijo con pasador. En los demás soportes se tiene sólo una fuerza de reacción en cada uno por tratarse de rodillos.

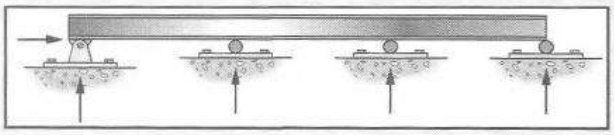


Figura 4.6

Disponemos de tres ecuaciones aplicables de equilibrio estático. Como se tienen cinco reacciones desconocidas y tres ecuaciones aplicables de equilibrio, la viga es estable y estáticamente indeterminada de segundo grado externamente —se tienen entonces dos incógnitas más que ecuaciones de equilibrio estático. ■

EJEMPLO 4.4

Determinar la clasificación estática del voladizo apoyado mostrado en la figura 4.7. Se ilustran las reacciones desconocidas. Se tienen tres reacciones desconocidas en el soporte izquierdo por tratarse de un empotramiento. Hay una reacción desconocida en el soporte derecho por tratarse de un rodillo.

Disponemos de tres ecuaciones aplicables de equilibrio estático. Como hay cuatro reacciones desconocidas y tres ecuaciones aplicables de equilibrio, la viga es estable y estáticamente

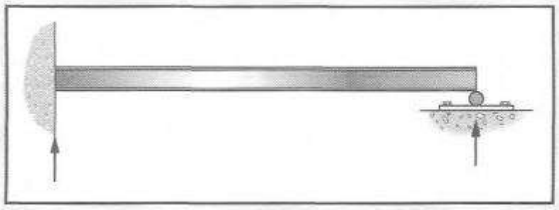


Figura 4.7

indeterminada de primer grado externamente —o sea que hay una incógnita más que ecuaciones de equilibrio estático. ■

El arreglo interno de algunas estructuras es tal que se dispone de una o más ecuaciones de condición. Esto ocurre a menudo cuando hay articulaciones o eslabones en la estructura. Existe una condición especial porque el momento interno en la articulación, o en los extremos del eslabón, debe ser cero independientemente de la carga. El momento interno es cero debido al pasador "sin fricción" usado para efectuar la conexión: no pueden transferirse rotaciones entre las partes adyacentes de la estructura. No puede hacerse un enunciado similar para alguna sección continua de la viga. Si el número de ecuaciones de condición más las tres ecuaciones de equilibrio estático son iguales al número de incógnitas, la estructura está estáticamente determinada; si es mayor, es inestable; y si es menor, es estáticamente indeterminada.

EJEMPLO 4.5

Determinar la clasificación estática de la viga en voladizo apoyada mostrada en la figura 4.8. Se ilustran las fuerzas de reacción desconocidas. Esta viga es la misma que la del ejemplo anterior excepto que en el soporte derecho se tiene un eslabón en vez de un rodillo. Se tienen tres incógnitas en el soporte izquierdo por tratarse de un empotramiento y sólo una en el derecho aunque el eslabón está conectado por un pasador al soporte. Un eslabón sólo puede transmitir una fuerza a lo largo de su eje, por lo que la dirección en que actúa la fuerza es conocida.

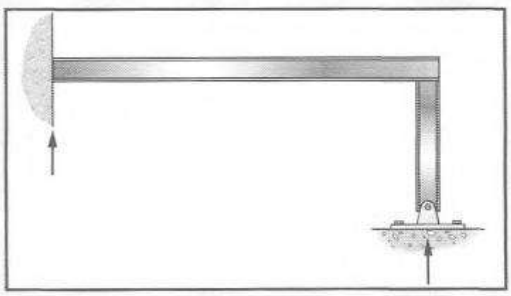


Figura 4.8

Disponemos de tres ecuaciones aplicables de equilibrio estático. Como se tienen cuatro reacciones desconocidas y sólo tres ecuaciones aplicables de equilibrio, la viga es estable y estáticamente indeterminada de primer grado externamente —o sea que hay una fuerza desconocida más que ecuaciones de equilibrio estático. ■

EJEMPLO 4.6

Determinar la clasificación estática del sistema estructural mostrado en la figura 4.9.

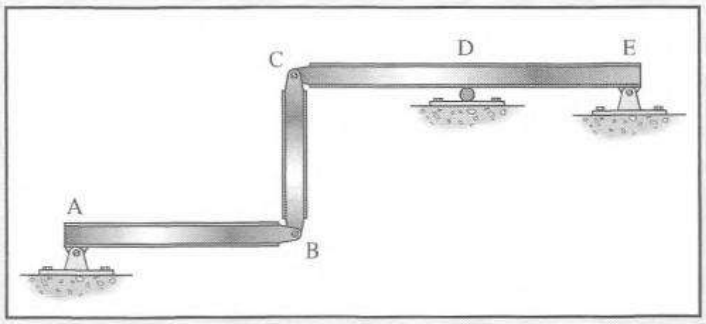
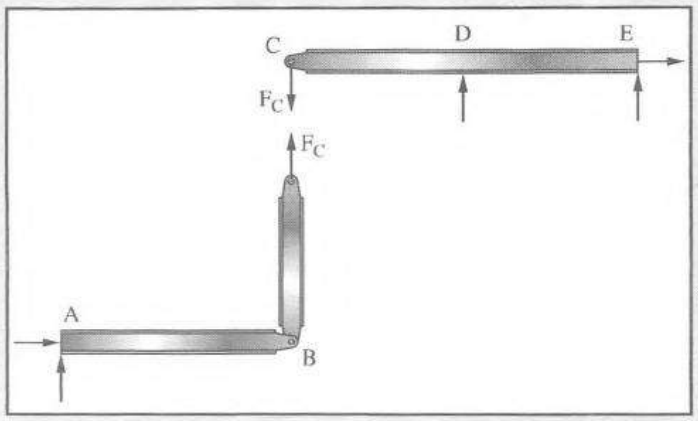


Figura 4.9

En este sistema estructural hay cinco fuerzas de reacción desconocidas: 2 fuerzas en A, 1 fuerza en D y 2 fuerzas en E. A primera vista, esta estructura parece ser estáticamente indeterminada de segundo grado porque hay sólo tres ecuaciones aplicables de equilibrio estático. Sin embargo, debido al eslabón que conecta a los puntos B y C del sistema, puede introducirse una ecuación de condición. Los pasadores en B y C se suponen sin fricción, por lo que los momentos en B y C deben ser iguales a cero. Dada esta condición, pueden dibujarse los dos siguientes diagramas de cuerpo libre.



Observe que hay seis fuerzas desconocidas: las fuerzas de reacción previamente mencionadas y la fuerza en el pasador C. Se tienen tres ecuaciones aplicables de equilibrio estático para cada uno de los cuerpos libres. Tenemos entonces seis ecuaciones de equilibrio estático y seis fuerzas desconocidas. Esta estructura es, por lo tanto, estable y estáticamente determinada. Advierta que los cuerpos libres podrían cortarse en B en vez de en C. ■

4.6 EQUILIBRIO INESTABLE E INESTABILIDAD GEOMÉTRICA

La capacidad de una estructura para soportar de manera adecuada las cargas aplicadas a ella depende no sólo del número de componentes de reacción, sino también de la disposición de éstas. Una estructura puede ser inestable y, sin embargo, ser estable bajo un cierto conjunto de cargas.

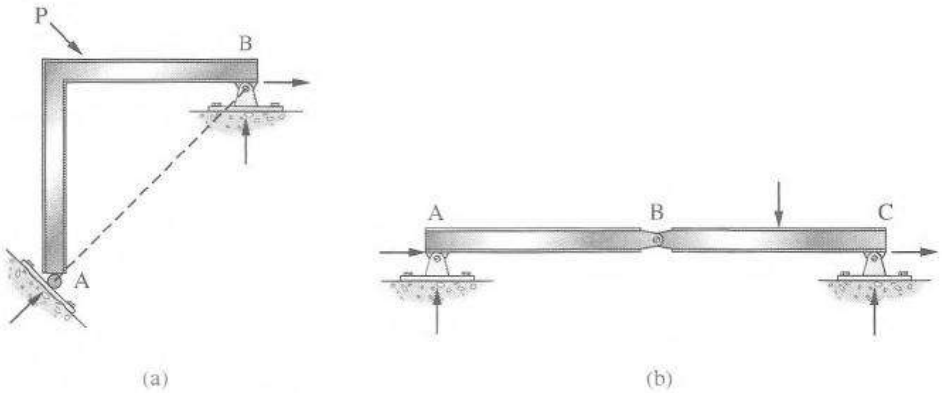


Figura 4.10 Estructuras geométricamente inestables.

La viga mostrada previamente en la figura 4.5 es un ejemplo de una estructura así. Esta viga está soportada en sus extremos solamente con rodillos y es inestable. La viga se deslizará lateralmente si se aplica cualquier fuerza horizontal. Sin embargo, la viga puede soportar cargas verticales y es estable si solamente se aplican cargas verticales. A esta condición se le denomina algunas veces *equilibrio inestable.*

También es posible que una estructura tenga tantas o más componentes de reacción que ecuaciones disponibles y, sin embargo, ser inestable. Esta condición se llama *inestabilidad geométrica.* El marco de la figura 4.10(a) tiene tres componentes de reacción y tres ecuaciones disponibles para su solución. Sin embargo, el estudio del momento en B muestra que la estructura es inestable. La línea de acción de la reacción en A pasa por la reacción en B. A menos que la línea de acción de la fuerza P pase por el mismo punto, la suma de los momentos respecto a B no puede ser igual a cero. No habría resistencia a la rotación alrededor de B, y el marco comenzaría a girar inmediatamente. Éste no se colapsaría, pero giraría hasta que se desarrollara una situación estable, cuando la línea de acción de la reacción en A ya no pasase por B. De capital importancia para el ingeniero es que una estructura mantenga su posición bajo carga (aunque ella se deforme). Una estructura que no lo hace así es inestable.

En la figura 4.10(b) se muestra otra estructura geométricamente inestable. Se dispone de cuatro ecuaciones para calcular las cuatro reacciones desconocidas: tres ecuaciones de equilibrio estático y una ecuación de condición. Sin embargo, se presentará instantáneamente una rotación respecto a la articulación en B. Después de una pequeña deflexión vertical en B, es probable que la estructura adquiera una condición estable.

4.7 CONVENCIÓN DE SIGNOS

La convención particular de signos para tensión, compresión, etc., tiene poca importancia, siempre que se use un sistema consistente. Sin embargo, el uso de una convención estándar de signos facilita la comunicación de los ingenieros. Los autores usan los siguientes signos en sus cálculos.

1. Para *tensión* se usa un signo positivo, considerando que los elementos sujetos a tensión se alargan, o sea que su longitud se incrementa de manera positiva.
2. Para *compresión* se usa un signo negativo, porque los elementos sujetos a compresión se acortan, es decir, ocasionan a su longitud un incremento negativo.

3. La convención de signos para las fuerzas internas (momentos) en una viga se estudia en el capítulo 5. Un momento positivo hace que la parte superior de la viga esté a compresión y la parte inferior a tensión.
4. En muchas ocasiones es posible determinar la dirección de una *reacción* por inspección, pero si no es posible, se supone una dirección y se escriben las ecuaciones adecuadas de la estática. Si al resolver la ecuación el valor numérico para la reacción es positivo, entonces el sentido supuesto fue correcto; si el valor resulta negativo, entonces el sentido supuesto fue incorrecto.

4.8 DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

Para que una estructura esté en equilibrio, todas y cada una de sus partes también deberán estarlo. Las ecuaciones del equilibrio estático son igualmente aplicables a cada pieza de la estructura como lo son a toda la estructura. Es posible, entonces, dibujar un diagrama de cualquier parte de una estructura, incluyendo todas las fuerzas que están actuando en esa parte de la estructura, y aplicar las ecuaciones del equilibrio estático a esa parte. A un diagrama como éste se le denomina *diagrama de cuerpo libre.* Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son las fuerzas externas que actúan sobre esa pieza de la estructura, incluyendo las reacciones estructurales, así como las fuerzas internas aplicadas desde las partes adyacentes de la estructura.

En la figura 4.11(a) se muestra una viga simple que tiene dos soportes y sobre ella actúan dos cargas. Un diagrama de cuerpo libre de toda la viga, figura 4.11(b), muestra todas las fuerzas de reacción. También podemos cortar la viga en el punto A y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las dos partes. El resultado se muestra en la figura 4.11(c). Observe que ahora hemos incluido a las fuerzas internas en la posición del corte sobre los diagramas. Las fuerzas internas son las mismas sobre las dos partes, pero las direcciones en que ellas actúan son opuestas entre sí. En esencia, los efectos del lado derecho de la viga sobre el lado izquierdo se muestran sobre el cuerpo libre izquierdo y viceversa. Por ejemplo, la parte derecha de la viga tiende a empujar al cuerpo libre izquierdo hacia abajo mientras que la parte izquierda está tratando de empujar el cuerpo libre derecho hacia arriba.

Aislar ciertas secciones de las estructuras y considerar las fuerzas aplicadas a esas secciones es la base de todo el análisis estructural. Es dubitativo que este procedimiento pueda enfatizarse

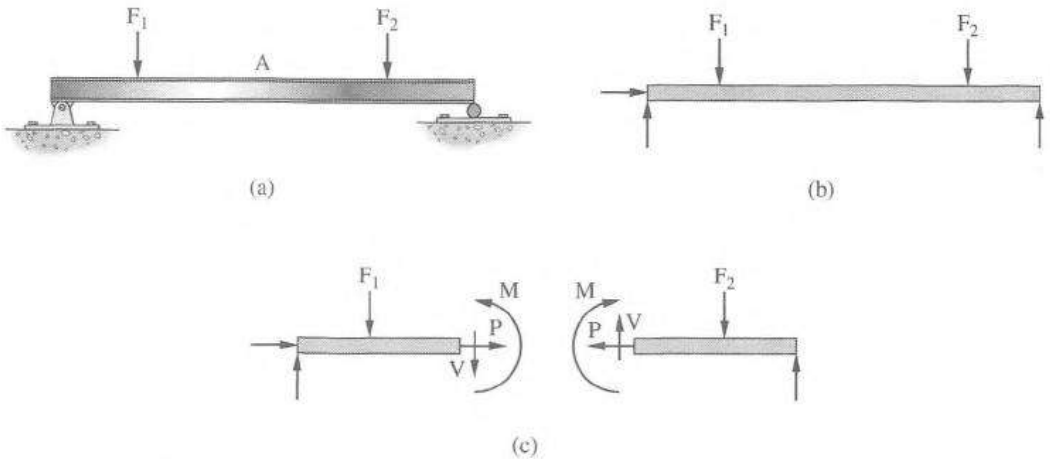


Figura 4.11 Una viga y dos diagramas de cuerpo libre.

demasiado para el lector, quien se espera que descubrirá que el análisis de los cuerpos libres le abre el camino a la solución de los problemas estructurales.

4.9 COMPONENTES HORIZONTALES Y VERTICALES

Es conveniente calcular las componentes horizontal y vertical de fuerzas inclinadas para usarlas así en los cálculos. Si no se hace así, tendrán que encontrarse las distancias perpendiculares de las líneas de acción de las fuerzas inclinadas al punto donde se toma el momento. El cálculo de estas distancias es a menudo difícil y se incrementa la posibilidad de cometer errores al establecer las ecuaciones.

4.10 REACCIONES POR PROPORCIONES

El cálculo de las reacciones es fundamentalmente una cuestión de proporciones. Para ilustrar este punto, se hace referencia a la figura 4.12(a). La carga P está a tres cuartos de la distancia del apoyo A izquierdo al apoyo B derecho. Mediante proporciones, el apoyo derecho va a cargar tres cuartos de la carga y el apoyo izquierdo va a cargar el cuarto restante de la carga.

En forma similar, para la viga de la figura 4.12(b), la carga de 10 klb (klb es la abreviatura de kilolibras [klb]) está a la mitad de la distancia de A a B y cada apoyo va a cargar la mitad de ésta, o sea 5 klb. La carga de 20 klb está a tres cuartos de la distancia de A a B. El apoyo B va a cargar tres cuartos de ésta, o sea 15 klb, y el apoyo A va a cargar un cuarto de 5 klb. De esta manera, se encontró que la reacción total en el apoyo A es de 10 klb y la reacción total en el apoyo B es de 20 klb.

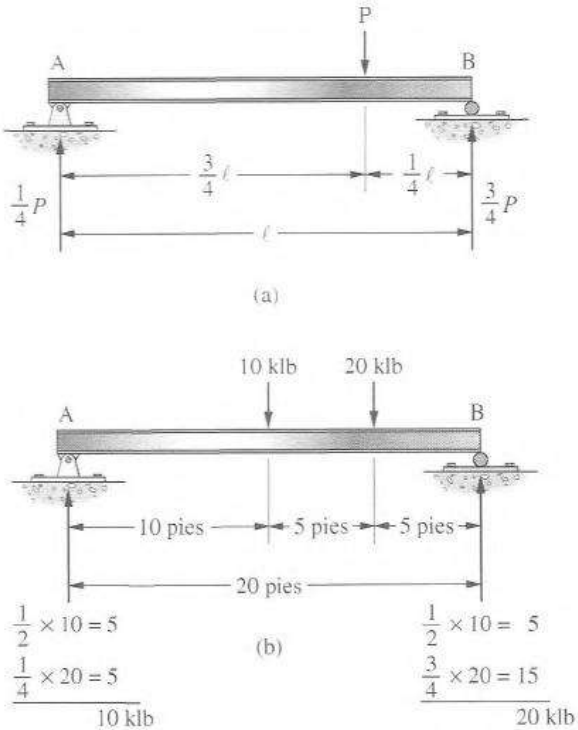


Figura 4.12

4.11 REACCIONES CALCULADAS CON ECUACIONES DE EQUILIBRIO ESTÁTICO

El cálculo de reacciones por medio de las ecuaciones de equilibrio estático se ilustra en los ejemplos 4.7 al 4.9. Al aplicar la ecuación $\sum M = 0$, puede seleccionarse un punto como centro de momentos, tal que las líneas de acción de todas, menos una de las incógnitas, pasen por este punto. La incógnita se determina con la ecuación de momentos, y las otras componentes de reacción se encuentran aplicando las ecuaciones $\sum F_H = 0$ y $\sum F_V = 0$.

La viga del ejemplo 4.7 tiene tres componentes de reacción desconocidas: una vertical y una horizontal en A, y una vertical en B. Se toman momentos respecto a A para encontrar el valor de la componente vertical en B. Se iguala a cero la suma de todas las fuerzas verticales y así es como se encuentra la componente de reacción vertical en A. Se escribe una ecuación similar para las fuerzas horizontales aplicadas a la estructura, y se encuentra que la componente de reacción horizontal en A es igual a cero.

El cálculo de las reacciones puede verificarse tomando momentos respecto a otro punto sobre la estructura, generalmente otro soporte, como se ilustra en este ejemplo. En ejemplos futuros no se presentará la comprobación de los cálculos. *Sin embargo, ningún problema se considerará completo en tanto no se haya efectuado una verificación de esta naturaleza.*

EJEMPLO 4.7

Calcular las componentes de reacción para la viga que se muestra en la figura 4.13.

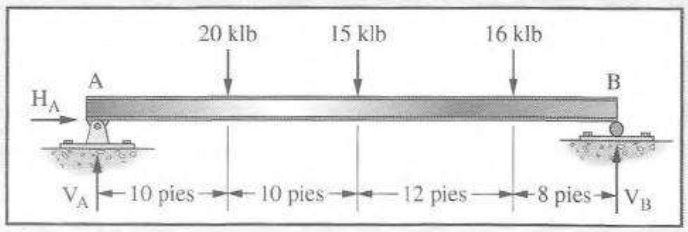


Figura 4.13

Solución. Las fuerzas de reacción y sus sentidos supuestos se muestran en la figura. Comenzamos la solución sumando fuerzas horizontales para determinar H_A.

$$\sum F_H = H_A = 0$$
$$\therefore H_A = 0$$

A continuación sumamos momentos en el sentido de las manecillas del reloj respecto al soporte izquierdo. Después de hacerlo se obtiene la ecuación

$$\sum M_A = 20(10) + 15(20) + 16(32) - V_B(40) = 0$$
$$\therefore V_B = 25.3 \text{ klb} \uparrow$$

El resultado para V_B es positivo, por lo que el sentido supuesto para ella es correcto; la reacción en B actúa hacia arriba. Finalmente, las fuerzas verticales se suman para calcular la reacción restante.

$$\sum F_V = V_A - 20 - 15 - 16 + V_B = 0$$
$$V_A - 20 - 15 - 16 + 25.3 = 0$$
$$\therefore V_A = 25.7 \text{ klb} \uparrow$$

De nuevo, la reacción calculada en A es positiva, por lo que su sentido supuesto es correcto. Podemos sumar momentos respecto a B para verificar nuestros cálculos.

$$\sum M_B = 25.7(40) - 20(30) - 15(20) - 16(8)$$
$$\sum M_B = 0$$

Ya que la suma de momentos es igual a cero, las reacciones calculadas son correctas. ■

EJEMPLO 4.8

Encontrar todas las componentes de reacción en la estructura mostrada en la figura 4.14.

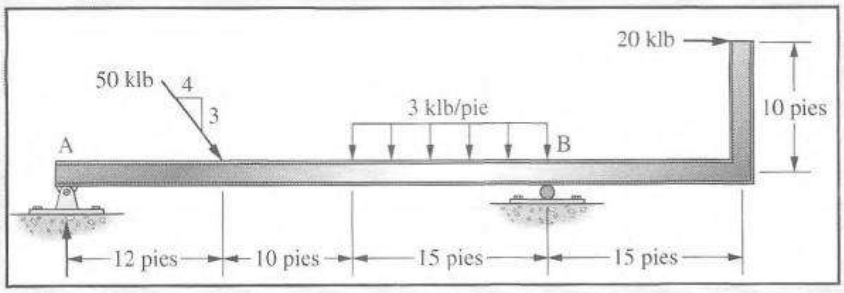
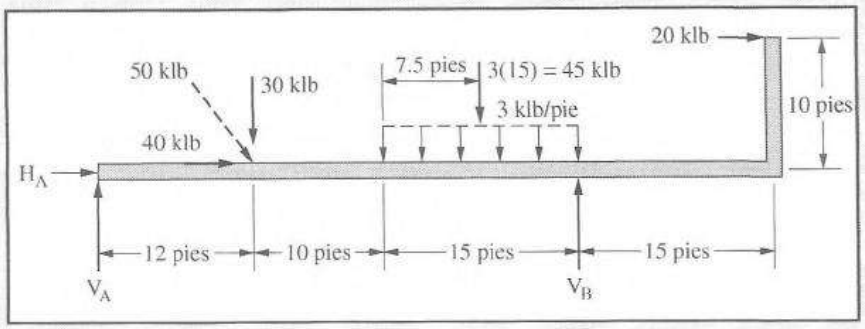


Figura 4.14

Solución. Se muestra a continuación el diagrama de cuerpo libre para esta viga. Observe que la fuerza inclinada ha sido reemplazada por sus componentes horizontal y vertical, y la carga distribuida ha sido reemplazada por una carga concentrada equivalente actuando en su centroide.



Comenzamos sumando fuerzas horizontalmente para calcular la reacción horizontal en A.

$$\sum F_H = 40 + 20 + H_A = 0$$
$$\therefore H_A = -60 \text{ klb} \leftarrow$$

Observe que el valor calculado es negativo, por lo que el sentido real de la reacción es opuesto al supuesto. Luego sumamos momentos en el sentido del reloj respecto a A para determinar la reacción vertical en B.

$$\sum M_A = 30(12) + (3 \times 15)(29.5) - V_B(37) + 20(10) = 0$$
$$\therefore V_B = 51 \text{ klb} \uparrow$$

Como el signo calculado para V_B es positivo, el sentido supuesto es correcto. Sumamos ahora fuerzas verticalmente para calcular la reacción vertical en A.

$$\sum F_V = V_A - 30 - 45 + V_B = 0$$
$$V_A - 30 - 45 + 51 = 0$$
$$\therefore V_A = 24 \text{ klb} \uparrow$$

De nuevo, el sentido supuesto para V_A es correcto. ■

El rodillo del marco de la figura 4.15 está soportado por una superficie inclinada. Se conoce la dirección de la reacción en el rodillo; es perpendicular a la superficie de apoyo. Si se conoce la dirección de la reacción, entonces se conoce la relación entre la componente vertical, la componente horizontal y la reacción en sí. Aquí, la reacción tiene una pendiente de cuatro verticalmente a tres horizontalmente (4:3), que es perpendicular a la pendiente de la superficie de apoyo, que es de tres a cuatro (3:4). Los momentos se toman respecto al soporte izquierdo, lo que da una ecuación que incluye a las componentes horizontal y vertical de la reacción en el rodillo inclinado. Ambas componentes están en términos de esa reacción. Por lo tanto, sólo está presente una incógnita en la ecuación y su valor se obtiene fácilmente.

EJEMPLO 4.9

Calcular las reacciones para el marco mostrado en la figura 4.15.

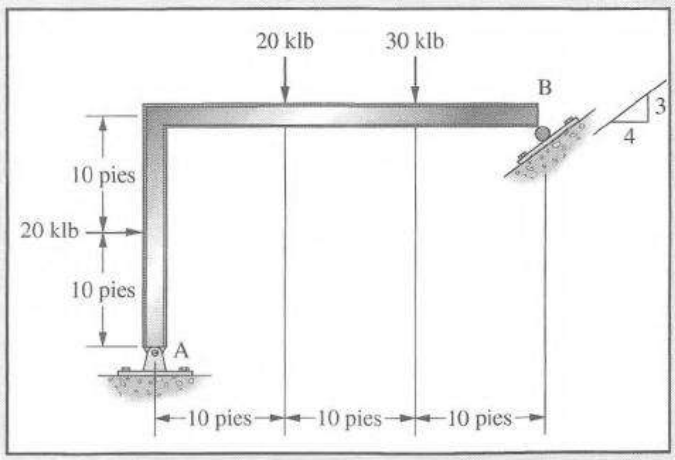
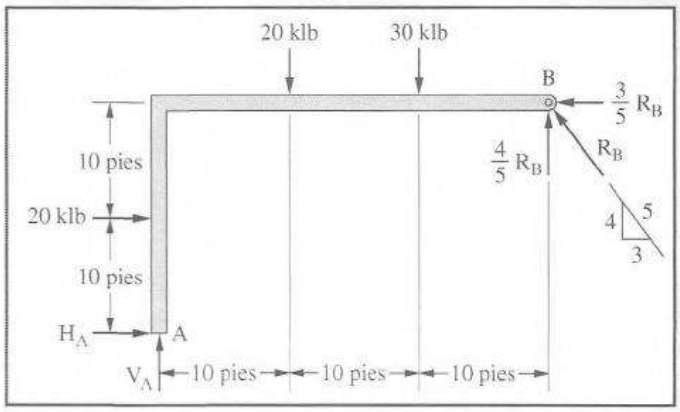


Figura 4.15

Solución. A continuación se muestra el diagrama de cuerpo libre para este marco. Observe que la fuerza inclinada de reacción en B ha sido reemplazada por sus componentes horizontal y vertical. Estas componentes actúan en el mismo punto que la reacción.



Comenzamos sumando momentos acerca de A para determinar la reacción en B. En los cálculos usaremos las componentes de la reacción.

$$\sum M_A = 20(10) + 20(10) + 30(20) - \frac{4}{5}R_B(30) - \frac{3}{5}R_B(20) = 0$$

$$\therefore R_B = 27.8 \text{ klb} \nwarrow$$

El signo de la reacción calculada en B es positivo, por lo que el sentido supuesto es correcto. Ahora sumamos fuerzas verticalmente para obtener la reacción vertical en A.

$$\sum F_V = V_A - 20 - 30 + \frac{4}{5}R_B = 0$$

$$V_A - 20 - 30 + \frac{4}{5}(27.8) = 0$$

$$\therefore V_A = 27.8 \uparrow$$

De nuevo, el signo de la reacción calculada es positivo, por lo que su sentido supuesto es correcto. Al sumar las fuerzas horizontales podemos evaluar la reacción horizontal en A.

$$\sum F_H = H_A + 20 - \frac{3}{5}R_B = 0$$

$$H_A + 20 - \frac{3}{5}(27.8) = 0$$

$$\therefore H_A = -3.3 \text{ klb} \leftarrow$$

El signo de la reacción calculada es negativo, por lo que la fuerza de reacción actúa en realidad hacia la izquierda, opuesta al sentido indicado. ■

4.12 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Al avanzar en el estudio del análisis estructural, se encontrarán estructuras sujetas a un gran número y tipos de fuerzas (concentradas, uniformes, triangulares, muertas, vivas, de impacto, etc.). Para ayudarse en el manejo de tales situaciones se dispone de una herramienta extraordinariamente útil, a la que se denomina *principio de superposición,* el cual puede enunciarse como sigue:

Si el comportamiento estructural es linealmente elástico, las fuerzas que actúan sobre una estructura pueden separarse o dividirse en cualquier forma conveniente para analizar luego la estructura atendiendo a cada caso por separado. Los resultados finales pueden obtenerse

entonces sumando los resultados individuales. Anteriormente el autor hizo uso de este principio en la figura 4.12(b) cuando las reacciones para las dos cargas se determinaron por separado mediante proporciones y luego se sumaron para obtener los valores finales. El principio es aplicable no solamente a las reacciones, sino también a las fuerzas cortantes, momentos, esfuerzos, deformaciones y desplazamientos. Este concepto está gráficamente representado en la figura 4.16.

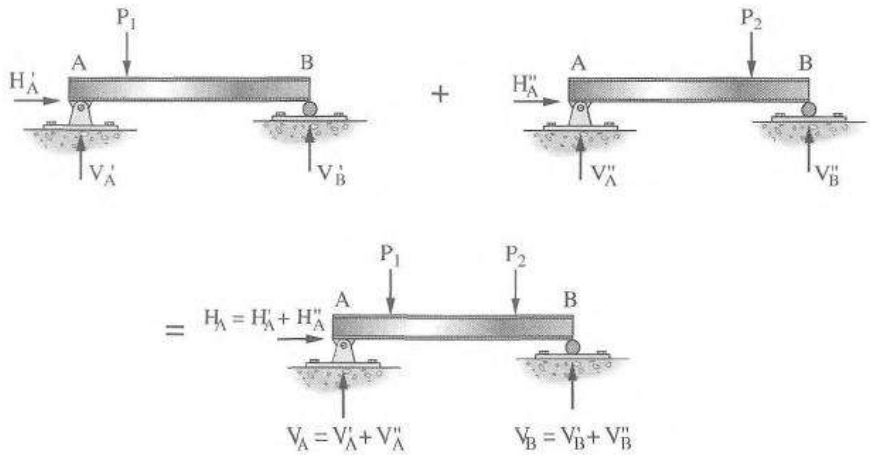
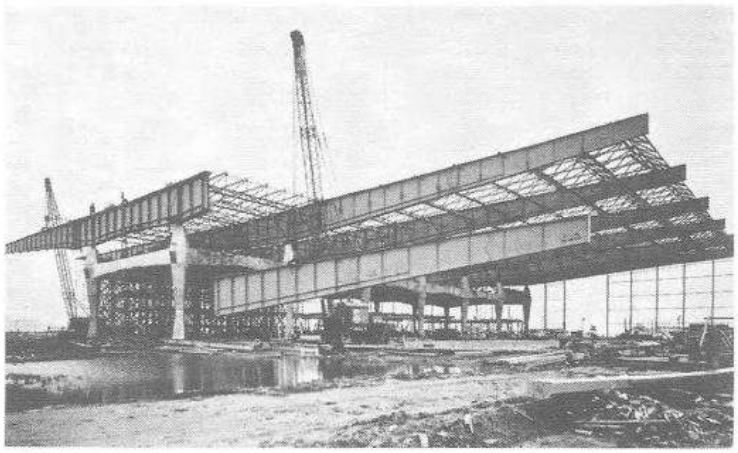


Figura 4.16 Principio de superposición.

Hay dos casos importantes en los que el principio de superposición no es válido. El primero se da cuando la geometría de la estructura cambia considerablemente bajo la acción de las cargas. El segundo ocurre cuando la estructura es de un material para el cual los esfuerzos no son directamente proporcionales a las deformaciones. Este último caso se presenta cuando el esfuerzo está más allá del límite elástico del material, o bien cuando el material no sigue la ley de Hooke en ninguna parte de su curva de esfuerzo contra deformación.



Hangar de la United Airlines, San Francisco, California. (Cortesía de la Lincoln Electric Company.)

4.13 EL VOLADIZO SIMPLE

El voladizo simple del ejemplo 4.10 tiene tres componentes de reacción desconocidas en el empotramiento; éstas son las fuerzas necesarias para impedir los movimientos horizontal, vertical y de

rotación. Las componentes pueden determinarse con las ecuaciones del equilibrio estático, como se ilustra.

EJEMPLO 4.10

Encontrar todas las componentes de reacción para la viga en voladizo que se muestra en la figura 4.17.

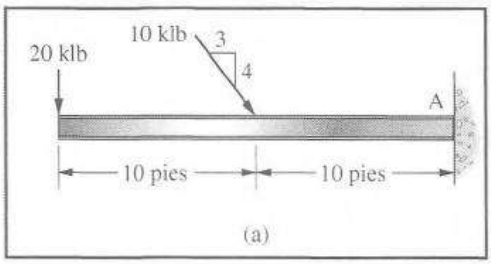
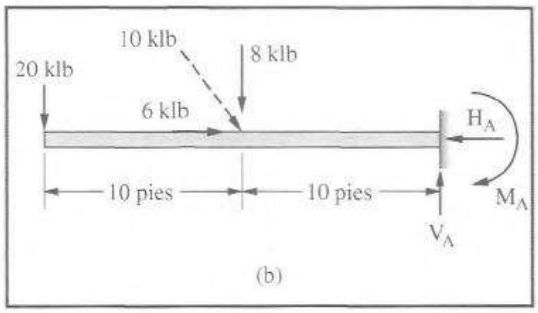


Figura 4.17

Solución. Aquí se ilustra el diagrama de cuerpo libre que se usa para el análisis.



De la suma de fuerzas verticales se obtiene la reacción vertical en A

$$\sum F_V = -20 - 8 + V_A = 0$$
$$\therefore V_A = 28 \text{ klb} \uparrow$$

De la suma de fuerzas horizontales se obtiene la reacción horizontal en A

$$\sum F_H = 6 - H_A = 0$$
$$\therefore H_A = 6 \text{ klb} \leftarrow$$

Finalmente, de la suma de momentos en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de A se obtiene la componente rotacional de la reacción.

$$\sum M_A = -20(20) - 8(10) + M_A = 0$$
$$\therefore M_A = 480 \text{ klb-pie} \circlearrowright \quad \blacksquare$$

4.14 ESTRUCTURAS CON VOLADIZO

Los momentos en estructuras simplemente apoyadas crecen con gran rapidez conforme aumenta el tamaño de los claros. Veremos después que el momento flexionante aumenta aproximadamente en proporción al cuadrado de la longitud del claro. En consecuencia, se necesitan estructuras más

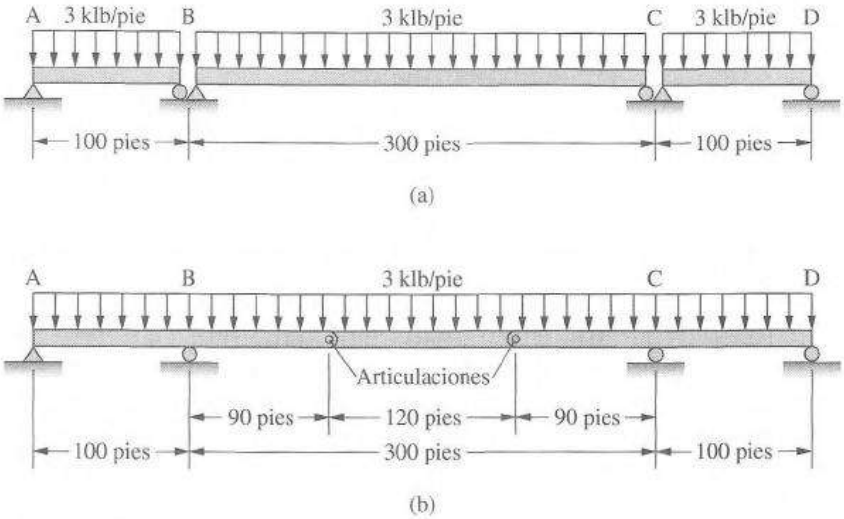


Figura 4.18

fuertes y caras para resistir grandes fuerzas. En claros muy largos, los momentos flexionantes resultan tan grandes que conviene, desde un punto de vista económico, introducir tipos especiales de estructuras que reduzcan la magnitud de esos momentos. Uno de esos tipos de estructura es la construcción con voladizos, como la que se muestra en la figura 4.18(b).

Puede usarse una estructura con voladizos en lugar de las tres vigas simples mostradas en la figura 4.18(a). Esto se logra haciendo continua la viga sobre los apoyos interiores B y C e introduciendo articulaciones en el claro central como se indica en (b). Se dispone de una ecuación de condición ($\Sigma M_{\text{articulación}} = 0$) en cada articulación. Se tienen así cinco ecuaciones y cinco incógnitas. La estructura es estáticamente determinada.

La ventaja de momentos de la construcción con voladizos se ilustra en la figura 4.19. Los diagramas mostrados dan la variación del momento flexionante en cada una de las estructuras de la figura 4.18 debido a una carga uniforme de 3 klb por pie lineal para los claros plenos. Se ve que el momento máximo para el tipo de construcción con voladizos es considerablemente menor que aquel para los claros simples, y esto permite una construcción más ligera y más económica. El trazado de los diagramas de momentos se explica a fondo en el capítulo 5. Para la estructura con voladizos de la figura 4.18(b) es posible balancear de la manera más conveniente los momentos positivos y negativos acercando las articulaciones sin soporte a los apoyos B y C.

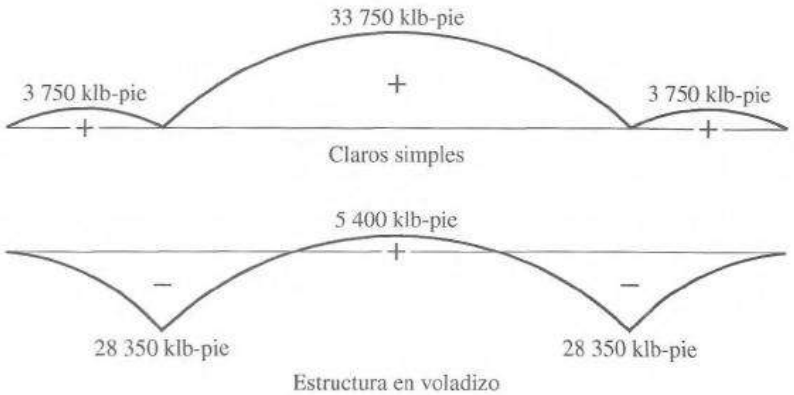


Figura 4.19

4.15 CÁLCULO DE LAS REACCIONES PARA LAS ESTRUCTURAS CON VOLADIZOS

La construcción con voladizos consta esencialmente de dos vigas simples, cada una de las cuales tiene uno de sus extremos en voladizo como sigue:

más una viga simple apoyada en los extremos en voladizo:

El primer paso para determinar las reacciones en estructuras con voladizos es aislar la viga simple central y calcular las fuerzas necesarias para soportarla en cada extremo. El segundo paso es que estas fuerzas se aplican como cargas hacia abajo sobre los voladizos respectivos y como paso final se determinan individualmente las reacciones en las vigas en los extremos. El ejemplo 4.11 ilustra el proceso completo.

EJEMPLO 4.11

Calcular todas las reacciones en la estructura con voladizo mostrada en la figura 4.20.

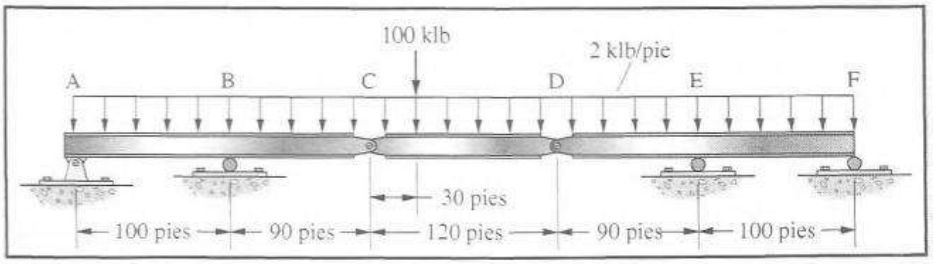
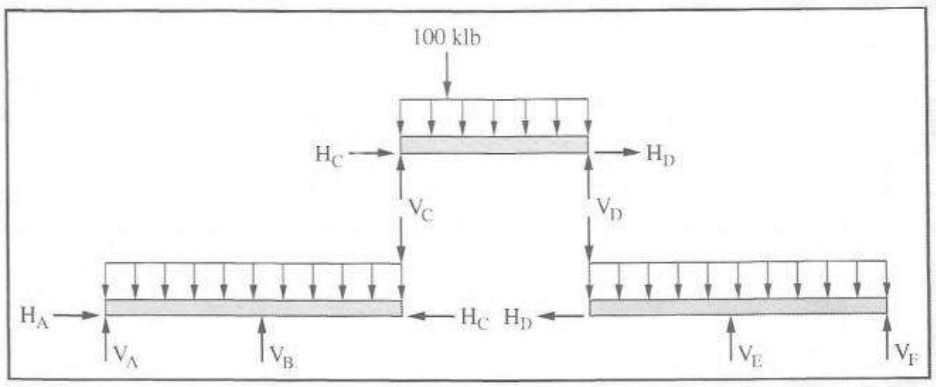


Figura 4.20

Solución. El diagrama de cuerpo libre que usaremos es:



Debido a las ecuaciones de condición que existen en C y D, podemos aislar la sección central de las dos secciones en los extremos con las fuerzas que actúan en la articulación, como se muestra en el cuerpo libre. Podemos entonces usar el cuerpo libre de la sección central para calcular las fuerzas V_C y V_D.

$$\sum M_C = 100(30) + 2(120)\left(\frac{120}{2}\right) - V_D(120) = 0$$

$$\therefore V_D = 145 \text{ klb}$$

y sumando fuerzas verticales en la sección central,

$$\sum F_V = V_C - 100 - 2(120) + V_D = 0$$

$$\therefore V_C = 195 \text{ klb}$$

Por último, sumando fuerzas horizontalmente en la sección central obtenemos una relación entre las fuerzas horizontales.

$$\sum F_H = H_C + H_D = 0$$

$$\therefore H_C = -H_D$$

Ahora que hemos calculado las fuerzas verticales que actúan en la sección central, analizaremos la sección derecha. Primero sumamos momentos en el sentido contrario al de las manecillas del reloj respecto al extremo derecho.

$$\sum M_F = -V_D(190) - 2(190)\left(\frac{190}{2}\right) + V_E(100) = 0$$

$$-(145)(190) - 2(190)\left(\frac{190}{2}\right) + V_E(100) = 0$$

$$\therefore V_E = 636.5 \text{ klb} \uparrow$$

Podemos sumar entonces fuerzas horizontal y verticalmente para obtener las otras componentes de reacción sobre la sección derecha.

$$\sum F_V = -V_D - 2(190) + V_E + V_F = 0$$

$$-145 - 2(190) + 636.5 - V_F = 0$$

$$\therefore V_F = -111.5 \text{ klb} \downarrow$$

El signo negativo indica que la reacción actúa hacia abajo, es decir, opuesta al sentido supuesto.

$$\sum F_H = H_D = 0$$

$$\therefore H_D = 0 = H_C$$

Analizaremos ahora la sección izquierda para calcular las fuerzas de reacción restantes. Comenzamos por sumar momentos en el sentido de las manecillas del reloj con respecto al punto A.

$$\sum M_A = 2(190)\left(\frac{190}{2}\right) + V_C(190) - V_B(100) = 0$$

$$2(190)\left(\frac{190}{2}\right) + 195(190) - V_B(100) = 0$$

$$\therefore V_B = 731.5 \text{ klb} \uparrow$$

La reacción vertical restante se encuentra sumando fuerzas verticalmente.

$$\sum F_V = V_A - 2(190) - V_C + V_B = 0$$

$$V_A - 2(190) - 195 + 731.5$$

$$\therefore V_A = -156.5 \text{ klb} \downarrow$$

De nuevo, el signo negativo indica que la fuerza de reacción está actuando con sentido opuesto al supuesto. Finalmente calculamos la reacción horizontal.

$$\sum F_H = H_A - H_C = 0 = H_A - 0$$

$$\therefore H_A = 0 \quad \blacksquare$$

Si examinamos las reacciones obtenidas para las secciones izquierda y derecha de esta viga, veremos por qué a menudo los puentes con voladizo se llaman "basculantes". Estas estructuras se apoyan principalmente en los primeros soportes interiores en cada extremo, donde las reacciones son bastante grandes. Los soportes en los extremos quizá tengan que proporcionar componentes de reacción hacia abajo. Así, una sección extrema de una estructura con voladizo parece actuar como un balancín sobre el primer soporte interior con cargas hacia abajo en ambos lados.

4.16 ARCOS

Históricamente, los arcos eran las únicas formas factibles que podían usarse para erigir grandes estructuras hechas de materiales con resistencia despreciable a la tensión, como son ladrillos y piedras. Los arcos de mampostería hechos con esos materiales se han usado durante miles de años.

En efecto, un arco toma cargas verticales y las convierte en empujes laterales que van a lo largo del arco y colocan a los elementos del arco en estado de compresión, como se muestra en la figura 4.21. Las partes de un arco de piedra se llaman *dovelas*. Como puede verse en la figura, éstas son piedras en forma de cuña truncada; se empujan entre sí, quedando sujetas a compresión.

Los arcos son estructuras estables muy rígidas que no se ven afectadas apreciablemente por los movimientos de sus cimentaciones. Es interesante advertir que las excavaciones de ruinas antiguas ponen de manifiesto que los arcos son las estructuras que mejor se han conservado.

En teoría, un arco puede diseñarse para un solo conjunto de cargas de gravedad, de manera que sólo los esfuerzos de compresión axial se desarrollan en el arco. Desafortunadamente, en las

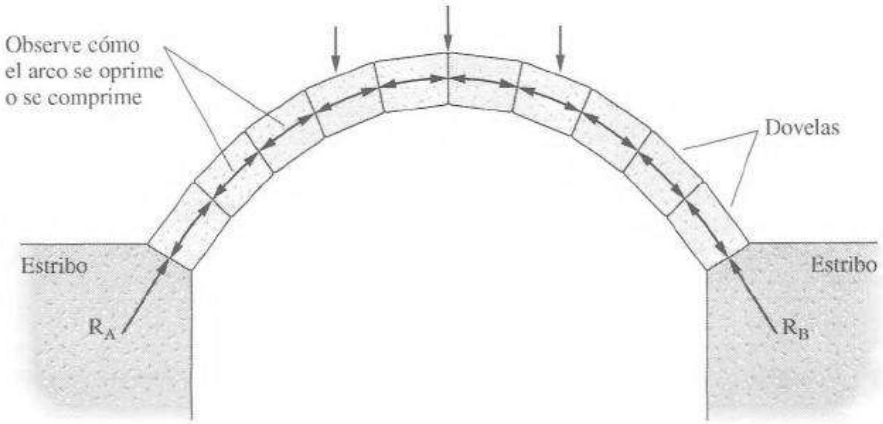
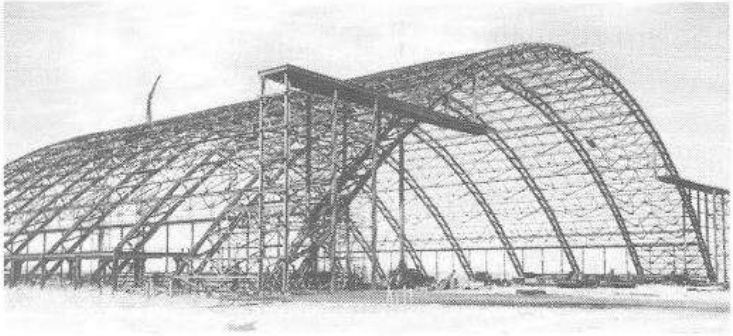


Figura 4.21 Arco de piedra.

estructuras reales las cargas cambian y se mueven de tal modo que se desarrollan esfuerzos de flexión en el arco; no obstante, los arcos por lo general se diseñan de manera que su carga predominante genere en especial esfuerzos de compresión.



Construcción de un arco estructural: hangar de la USAF en la Base Edwards de la Fuerza Aérea. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

4.17 ARCOS DE TRES ARTICULACIONES

Los arcos pueden construirse con dos o tres articulaciones; muy rara vez se construyen con sólo una. En la construcción con concreto reforzado, los arcos se construyen con frecuencia sin articulaciones. Analizaremos aquí el arco con tres articulaciones por ser éste el único estáticamente determinado.

Si examinamos el arco de tres articulaciones en la figura 4.22, vemos que tiene dos componentes de reacción en cada apoyo, es decir, cuatro en total. Disponemos de tres ecuaciones de equilibrio estático y de una ecuación de condición para hallar las incógnitas. La ecuación de condición es la suma de momentos a la izquierda o a la derecha de la articulación en la corona del arco.

El arco en el ejemplo 4.12 se analiza tomando momentos en uno de los apoyos para obtener la componente vertical de reacción en el otro apoyo. Como los apoyos están al mismo nivel, la componente horizontal de reacción en el segundo apoyo pasa por el punto respecto al cual se están tomando momentos. Las componentes horizontales de reacción se obtienen tomando momentos en la articulación de la corona de las fuerzas a la izquierda o a la derecha. La única incógnita que aparece en cada ecuación es la componente horizontal de reacción correspondiente a cada lado y su valor se obtiene despejándolo de la ecuación. Una vez que se han determinado las reacciones, es posible calcular el momento y la fuerza axial en cualquier punto del arco usando las ecuaciones del equilibrio estático.

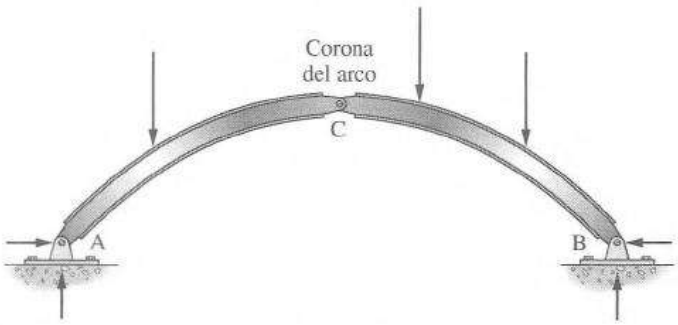
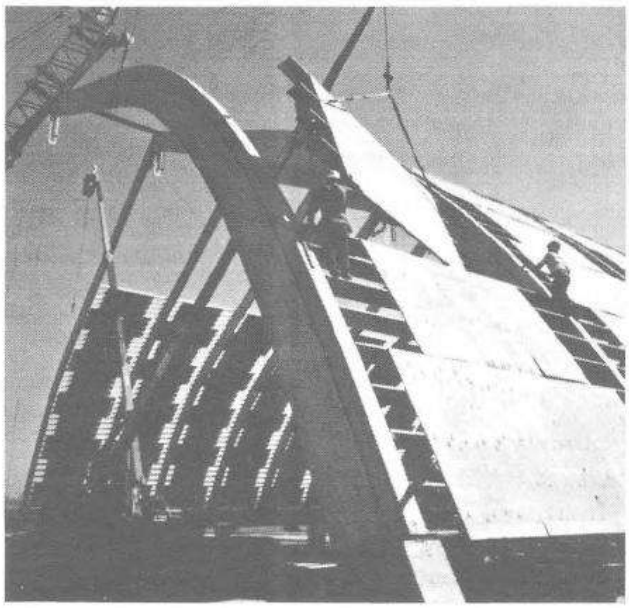


Figura 4.22 Arco de tres articulaciones.



Arcos de madera laminada, Maumee, Ohio. (Cortesía de Unit Structures, Inc.)

EJEMPLO 4.12

Encontrar todas las componentes de reacción para el arco de tres articulaciones mostrado en la figura 4.23.

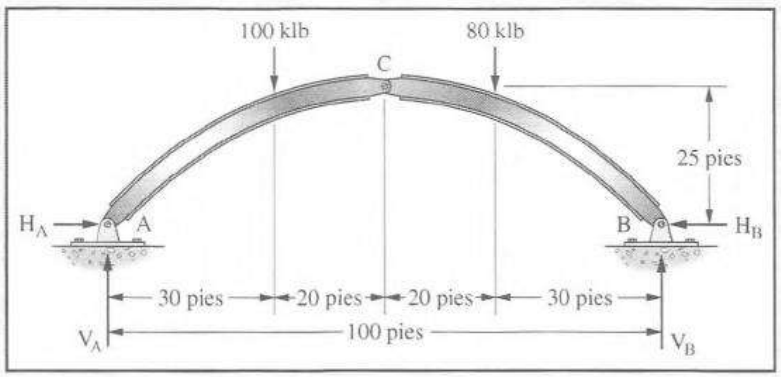


Figura 4.23

Solución. Sumando momentos respecto al soporte izquierdo.

$$\sum M_A = 100(30) + 80(70) - V_B(100) = 0$$

$$\therefore V_B = 86 \text{ klb} \uparrow$$

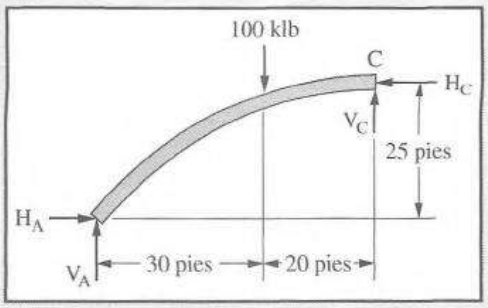
Luego, sumamos fuerzas verticalmente para calcular la componente vertical de reacción en el soporte izquierdo.

$$\sum F_V = V_A - 100 - 80 + V_B = 0$$

$$V_A - 100 - 80 + 86 = 0$$

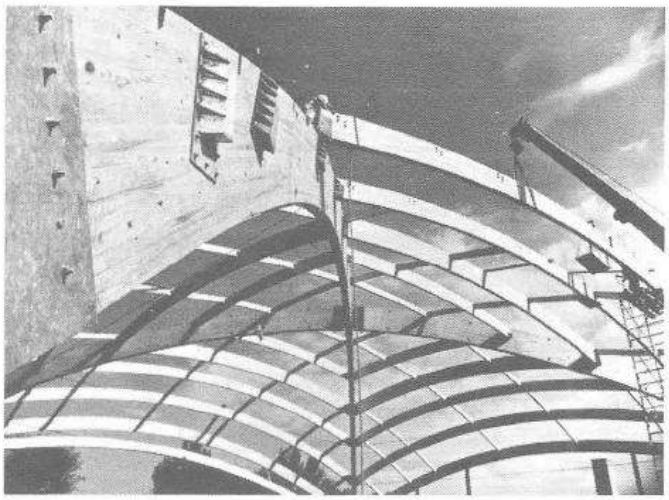
$$\therefore V_A = 94 \text{ klb} \uparrow$$

Para calcular la magnitud de las componentes horizontales de las reacciones tendremos que usar el cuerpo libre mostrado en el siguiente diagrama y sumar momentos con respecto a C, la corona de la articulación. Este cuerpo libre se obtuvo de la ecuación de condición que expresa que el momento flexionante en C es igual a cero.



$$\sum M_C = V_A(50) - H_A(25) - 100(20) = 0$$
$$94(50) - H_A(25) - 100(20) = 0$$
$$\therefore H_A = 108 \text{ klb} = H_B \quad \blacksquare$$

El cálculo de las reacciones del arco del ejemplo 4.13 es algo más complicado porque los apoyos no están al mismo nivel. Si sumamos momentos con respecto a uno de los apoyos obtendremos una ecuación que incluye a las componentes de reacción horizontal y vertical del otro apoyo. Luego pueden tomarse momentos con respecto a la articulación de la corona de las fuerzas situadas en el mismo lado en que se encuentran esas dos incógnitas. La ecuación resultante contiene a las mismas dos incógnitas. Si resolvemos las ecuaciones de manera simultánea, obtendremos la magnitud de estas reacciones y luego, sumando fuerzas vertical y horizontalmente, podemos determinar la magnitud de las otras componentes de reacción restantes.



Casa de campo del North Dakota State Teachers College, Valley City, Dakota del Norte. (Cortesía del American Institute of Timber Construction.)

EJEMPLO 4.13

Determinar las componentes de reacción para la estructura que se muestra en la figura 4.24.

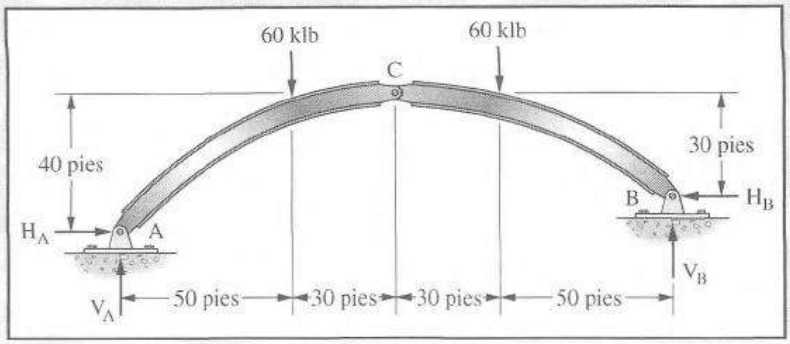


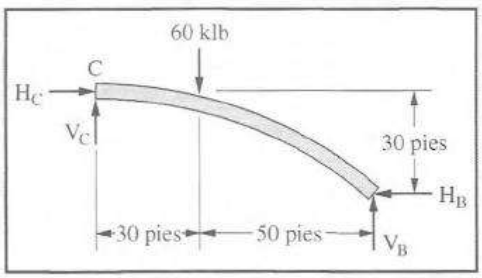
Figura 4.24

Solución. Sumando momentos en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a A.

$$\sum M_A = 60(50) + 60(110) - H_B(10) - V_B(160) = 0$$

$$10H_B + 160V_B = 9\,600 \qquad (1)$$

Entonces utilizamos la ecuación de condición en C para obtener el cuerpo libre que se muestra enseguida. Con el uso de este cuerpo libre, sumamos momentos con respecto a C.



$$\sum M_C = 60(30) + H_B(30) - V_B(80) = 0$$

$$30H_B - 80V_B = -1\,800 \qquad (2)$$

La solución simultánea de las ecuaciones (1) y (2) nos da

$$H_B = 85.7 \text{ klb} \leftarrow$$

$$V_B = 54.6 \text{ klb} \uparrow$$

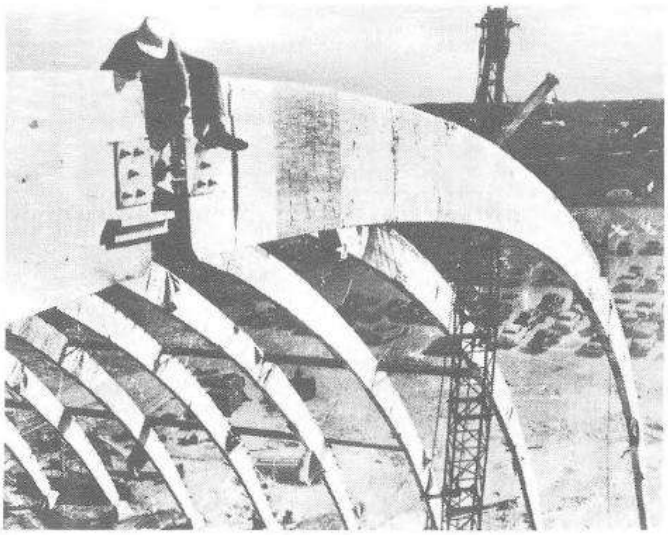
Ahora podemos sumar fuerzas vertical y horizontalmente para calcular las componentes de reacción restantes.

$$\sum F_H = H_A - H_B = H_A - 85.7 = 0$$

$$\therefore H_A = 85.7 \text{ klb} \rightarrow$$

$$\sum F_V = V_A - 60 - 60 + V_B = V_A - 60 - 60 + 54.6 = 0$$

$$\therefore V_A = 65.4 \text{ klb} \uparrow \quad \blacksquare$$



Arcos de tres articulaciones de madera laminada pegada, en el Frontón de Jai Alai de Riviera Beach, Florida. (Cortesía de la Forest Products Association.)

Las reacciones del arco del ejemplo 4.13 pueden calcularse sin usar ecuaciones simultáneas. Los ejes horizontal y vertical (sobre cuya base se escriben las ecuaciones $\sum H = 0$ y $\sum V = 0$) se giran de tal manera que el eje horizontal atraviesa por las dos articulaciones de soporte (figura 4.25). Las componentes de las fuerzas pueden calcularse en sentido paralelo a los ejes X' y Y' y se aplican las ecuaciones $\sum X' = 0$ y $\sum Y' = 0$, pero los cálculos son muy complicados.

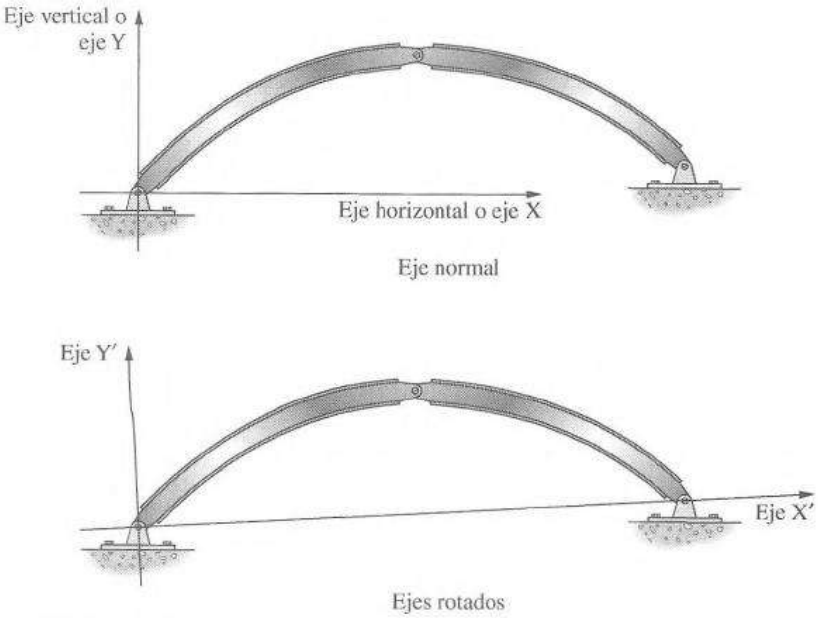


Figura 4.25

4.18 USOS DE ARCOS Y DE ESTRUCTURAS CON VOLADIZOS

Los arcos de tres articulaciones de acero se usan para puentes de claros cortos y medios de hasta 600 pies de longitud, aproximadamente. Se usan también para edificios en los que son necesarios grandes claros libres, como son hangares, gimnasios, arsenales, etc. Los arcos de acero de dos articulaciones por lo general resultan muy económicos para puentes de 600 a 900 pies de longitud; existen algunos con claros excepcionalmente largos de poco más de 1 600 pies de longitud. Los arcos de concreto reforzado sin articulaciones se usan para puentes con claros de 100 a 400 pies de longitud. Los puentes tipo voladizo se utilizan para claros desde 500 pies, aproximadamente, hasta claros muy grandes como el del tramo central de 1 800 pies del puente de Quebec en Canadá.

Un arco es una estructura que necesita cimientos o apoyos capaces de resistir las grandes componentes horizontales de las reacciones, o empujes, sobre los mismos. En los arcos que se emplean en edificaciones es posible tomar los coceos con tirantes de acero, con perfiles estructurales de acero o incluso con pisos especialmente diseñados. A este tipo de arcos se les llama *atirantados*. En algunos lugares con condiciones deficientes del suelo, y por lo tanto con posibilidades de asentamientos, se prefiere el arco de tres articulaciones a los arcos estáticamente indeterminados, debido a que las fuerzas no van a cambiar en un arco de tres articulaciones cuando ocurran los asentamientos. Se verá en capítulos posteriores que los asentamientos de la cimentación pueden generar grandes cambios en los esfuerzos en las estructuras estáticamente indeterminadas. La facilidad del montaje es otra ventaja de los arcos de tres articulaciones. Con frecuencia es conveniente construir y transportar las dos mitades de un arco de concreto precolado, acero estructural o madera laminada en forma separada y armarlas en la obra.

Con anterioridad se demostró el hecho de que con las estructuras con voladizos se reducen enormemente los momentos flexionantes en el caso de grandes claros. En las construcciones con arcos, los momentos flexionantes también se reducen porque las reacciones de sus apoyos tienden a flexionar un arco en sentido contrario al de la flexión que producen las cargas hacia abajo. Debido a la característica de tener momentos flexionantes pequeños, los arcos fueron usados ampliamente por los constructores de obras de mampostería de la antigüedad.

4.19 CABLES

Los cables son tal vez el medio más simple para soportar cargas; se usan para soportar puentes y sistemas de techo, como tirantes en grúas, torres de radio de acero y otras estructuras similares, así como en muchas otras aplicaciones. Para el estudiante, podría ser que el uso más común fuera los sistemas teleféricos en cientos de pistas de esquí alrededor del mundo.

Los cables de acero se fabrican a bajo costo a partir de alambres de acero de alta resistencia, ofreciendo así, probablemente, el más bajo costo y resistencia de cualquier miembro estructural común. Éstos se pueden manipular y montar fácilmente aun en claros muy largos. En el análisis que sigue, se desprecia el peso del cable. Cuando un cable de una longitud dada se suspende entre dos soportes, la forma que toma queda determinada por las cargas aplicadas.

La forma que los cables adoptan al resistir cargas se llama curva *funicular*. Habrá usted notado que los sistemas de cables para carros en Europa se denominan a menudo *funiculares*. Los cables son bastante flexibles y soportan sus cargas en tensión pura, como se muestra en la figura 4.26. Puede verse en esta figura que la carga, P, debe estar equilibrada por las componentes verticales de la tensión en el cable; es decir, el cable debe tener una proyección vertical para poder soportar la carga. Cuanto mayor sea la proyección vertical, tanto más pequeña será la tensión en el cable. Si el cable se mueve o si se aplican otras cargas, el cable cambiará de forma.

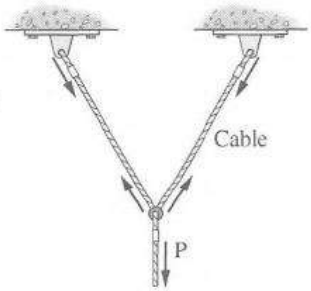


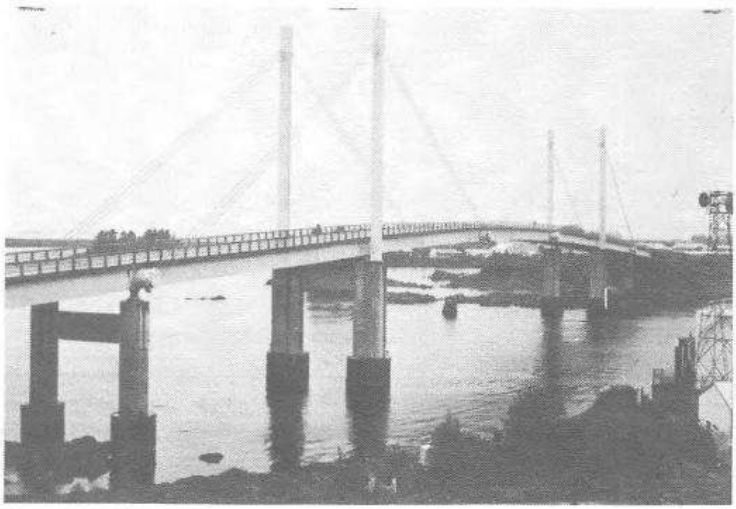
Figura 4.26 Una estructura de cable sencilla.

La tensión resultante en cualquier punto puede obtenerse con la siguiente ecuación:

$$T = \sqrt{H^2 + V^2}$$

En esta ecuación, H y V son, respectivamente, las componentes horizontal y vertical de la fuerza de tensión en el cable en ese punto. Podemos ver en esta ecuación que la tensión varía para diferentes pendientes a lo largo del cable. Sin embargo, si sólo están presentes cargas verticales, el valor de H será constante en todo el cable.

Se supone que los cables son tan flexibles que no pueden resistir flexión o compresión; actúan en tensión directa. Se dispone de una ecuación de condición para el análisis: la suma de momentos a la izquierda o a la derecha de cualquier punto a lo largo del cable es igual a cero. Si se conocen la posición o flecha de un cable en un punto específico, las reacciones en los extremos del cable pueden determinarse con estas ecuaciones. Enseguida se muestra un ejemplo numérico. El peso del cable se considera despreciable en este caso.



Puente atirantado Sitka Harbor, Sitka, Alaska. (Cortesía del Alaska Department of Transportation.)

EJEMPLO 4.14

Determinar las reacciones del cable en la figura 4.27 y la flecha bajo la carga de 40 klb.

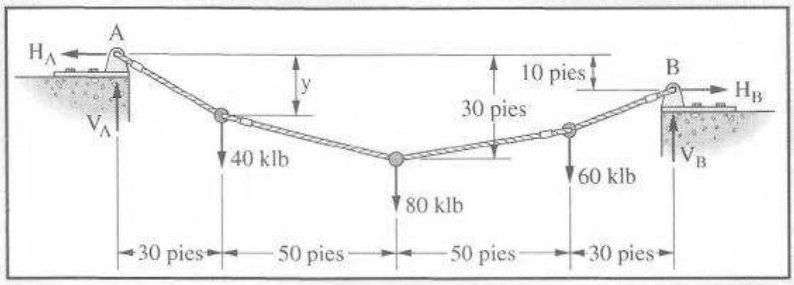


Figura 4.27

Solución. Comience la solución sumando momentos en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a la reacción derecha.

$$\sum M_B = V_A(160) - H_A(10) - 40(130) - 80(80) - 60(30) = 0$$

$$160V_A - 10H_A = 13\,400 \qquad (1)$$

Luego usamos la ecuación de condición y sumamos los momentos de las fuerzas a la izquierda de la carga de 80 klb.

$$\sum M_{80} = V_A(80) - H_A(30) - 40(50) = 0$$

$$80V_A - 30H_A = 2\,000 \qquad (2)$$

La solución simultánea de las ecuaciones (1) y (2) nos da

$$H_A = 188 \text{ klb} \leftarrow$$

$$V_A = 95.5 \text{ klb} \uparrow$$

La reacción vertical en el soporte izquierdo es igual a 95.5 klb y la reacción horizontal en ese apoyo es igual a 188 klb. Para determinar las otras dos componentes de reacción podemos sumar fuerzas vertical y horizontalmente.

$$\sum F_V = V_A - 40 - 80 - 60 + V_B = 0$$

$$95.5 - 40 - 80 - 60 + V_B = 0$$

$$\therefore V_B = 84.5 \text{ klb} \uparrow$$

$$\sum F_H = -H_A + H_B = 0$$

$$-188 + H_B = 0$$

$$\therefore H_B = 188 \text{ klb} \rightarrow$$

Finalmente, podemos usar de nuevo la ecuación de condición y determinar la flecha en la carga de 40 klb sumando momentos a la izquierda de la carga de 40 klb.

$$\sum M_{40} = V_A(30) - H_A(y) = 0$$

$$95.5(30) - 188(y) = 0$$

$$\therefore y = 15.24 \text{ pies}$$

La flecha, y, en la posición de la carga de 40 klb es de 15.24 pies. ■

A menudo, la geometría real de la estructura del cable no se conoce de antemano. Puede suceder que sólo se conozca la longitud del cable y las posiciones en que van a aplicarse las cargas. Con esta información debemos determinar la geometría de la estructura del cable antes de poder determinar las fuerzas que existen en el cable. El siguiente ejemplo muestra tal situación.

EJEMPLO 4.15

Para la estructura del cable mostrada en la figura 4.28, determine las fuerzas de reacción, la tensión en cada segmento del cable, y la flecha en el cable. La longitud total del cable es de 65 pies.

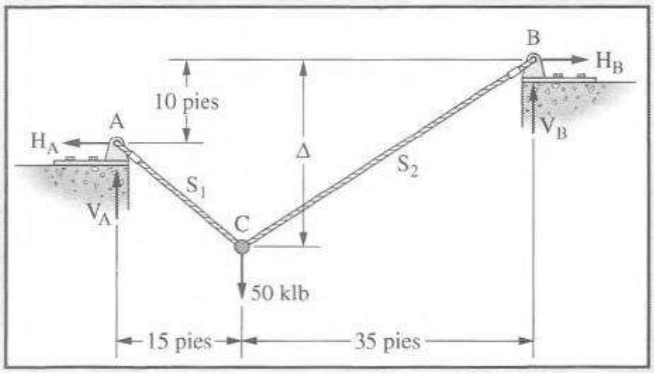


Figura 4.28

Solución. Antes de poder calcular las fuerzas de reacción, es necesario calcular la flecha Δ en el cable. Usando el teorema de Pitágoras, pueden escribirse las ecuaciones para la flecha en términos de los segmentos izquierdo y derecho del cable. Estas ecuaciones son:

$$\Delta = 10 + \sqrt{S_1^2 - 15^2} \quad \text{en términos del segmento izquierdo}$$

$$\Delta = \sqrt{S_2^2 - 35^2} \quad \text{en términos del segmento derecho}$$

Ambas ecuaciones pueden expresarse en términos de las longitudes de los segmentos, S_1 o S_2. Para esto debemos hallar la longitud de un segmento en términos de la longitud del otro. Expresaremos S_1 en términos de S_2:

$$S = S_1 + S_2 = 65 \text{ pies} = \text{longitud del cable}$$

$$\therefore S_1 = 65 - S_2$$

Si sustituimos esta expresión para S_1 en las ecuaciones para la flecha, obtenemos las ecuaciones:

$$\Delta = 10 + \sqrt{(65 - S_2)^2 - 15^2}$$

$$\Delta = \sqrt{S_2^2 - 35^2}$$

Podemos repetir sobre S_2 hasta que la flecha calculada usando ambas ecuaciones sea la misma. Haciendo esto, encontramos

$$S_2 = 43.361 \text{ pies}$$
$$\Delta = 25.596 \text{ pies}$$

Ahora podemos hallar las componentes de las reacciones y la fuerza en cada segmento del cable. Sumando momentos en el sentido de las manecillas del reloj respecto al soporte izquierdo, obtenemos la ecuación

$$\sum M_A = H_B(10) - V_B(15 + 35) + 50(15) = 0$$
$$10H_B - 50V_B = -750$$

al sumar fuerzas horizontales, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\sum F_H = -H_A + H_B = 0$$
$$-H_A + H_B = 0$$

sumando fuerzas verticales, obtenemos:

$$\sum F_V = V_A + V_B - 50 = 0$$
$$V_A + V_B = 50$$

Finalmente, podemos usar la ecuación de condición que existe en C. En ese lugar sobre el cable, el momento flexionante es igual a cero. De este modo, si sumamos momentos en el segmento derecho respecto a C, obtenemos la ecuación

$$\sum M_{C(\text{Derecha})} = H_B(\Delta) - V_B(35) = 0$$
$$25.596H_B - 35V_B = 0$$

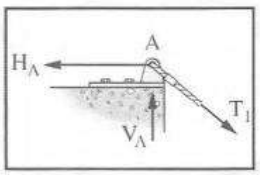
al resolver estas ecuaciones simultáneamente, obtenemos los siguientes valores:

$$V_B = 20.65 \text{ klb} \uparrow$$
$$H_B = 28.23 \text{ klb} \rightarrow$$

luego mediante $\sum F_H = 0$ y $\sum F_V = 0$

$$V_A = 29,35 \text{ klb} \uparrow$$
$$H_A = 28,23 \text{ klb} \leftarrow$$

Usando el diagrama de cuerpo libre mostrado en la siguiente figura, podemos encontrar la tensión en el segmento izquierdo del cable.



$$T_1 = \sqrt{H_A^2 + V_A^2} = \sqrt{28.23^2 + 29.35^2} = 40.73 \text{ klb}$$

Usando un diagrama similar de cuerpo libre, encontramos que la tensión en el segmento derecho del cable es

$$T_2 = \sqrt{H_B^2 + V_B^2} = \sqrt{28.23^2 + 20.65^2} = 34.98 \text{ klb} \quad \blacksquare$$

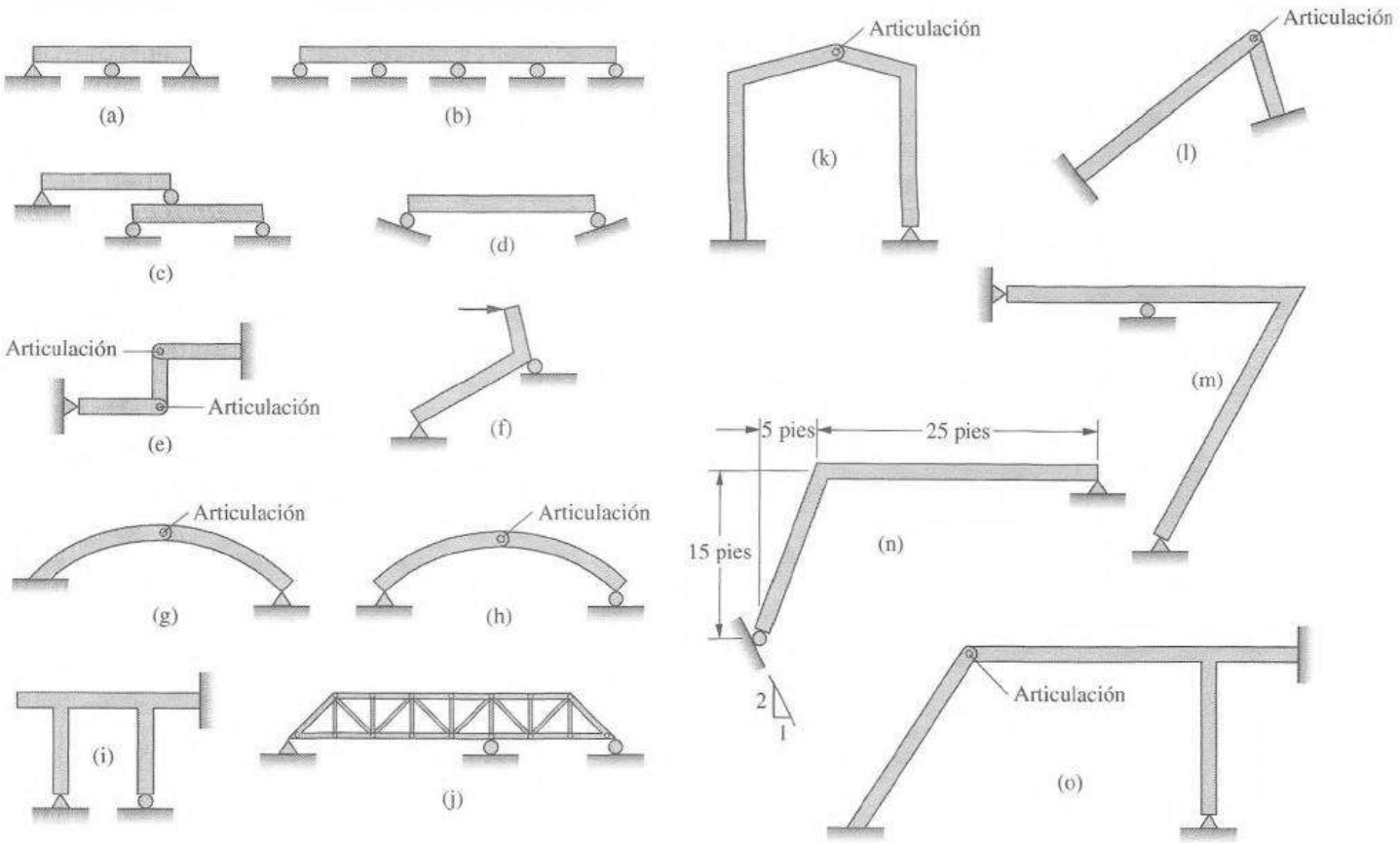
La distorsión o deflexión en la mayoría de las estructuras se supone despreciable al calcular las fuerzas producidas en esas estructuras. Sin embargo, tal suposición no es correcta en muchas estructuras de cable, particularmente en cables planos donde una pequeña flecha puede afectar de manera considerable a las tensiones en el cable. Este tema no se considera aquí, pero se describe muy bien en un libro de Firmage.[1] Los cables planos generan componentes de reacción horizontales muy grandes, por lo que dan lugar a fuerzas de tensión muy grandes.

Un cable que soporta una carga uniforme a lo largo de su longitud, como el caso de un cable cargado solamente por su propio peso, adoptará la forma de una catenaria. En muchas ocasiones, se aplican cargas concentradas a los cables por barras o cables colgantes. Si éstos están estrechamente espaciados, la carga se aproximará a una carga uniforme a lo largo de la proyección horizontal del cable. Los cables que soportan la superficie de rodamiento en los puentes colgantes en general son de este tipo. El análisis de tales cables se presenta en el Apéndice A.

4.20 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

En el problema 4.1 determine cuáles de las estructuras que se muestran en la figura son estáticamente determinadas, estáticamente indeterminadas (incluyendo el grado de indeterminación) e inestables respecto a las fuerzas externas.

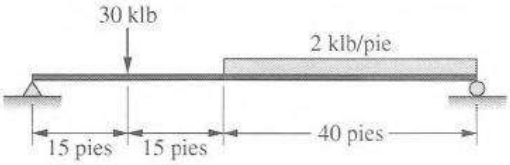
4.1



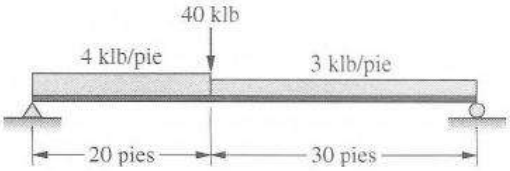
[1] D. A. Firmage, *Fundamental Theory of Structures* (Nueva York: Wiley, 1963), 258-265.

En los problemas 4.2 al 4.45 calcule las reacciones en las estructuras.

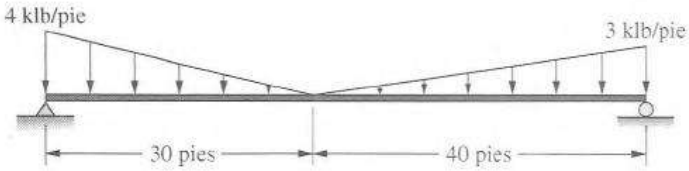
4.2



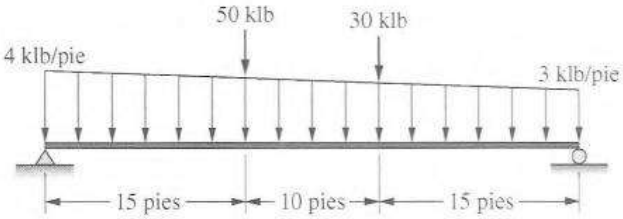
4.3 (*Resp.:* $V_L = 115$ klb ↑, $V_R = 95$ klb ↑)



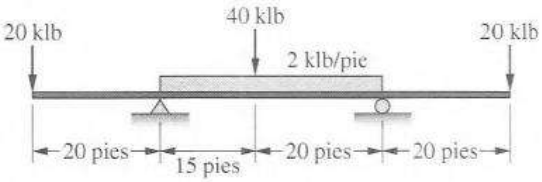
4.4



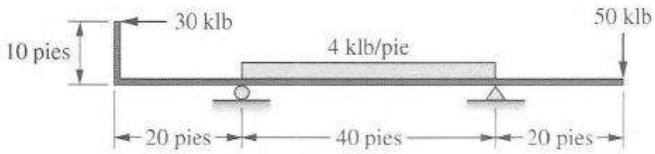
4.5 (*Resp.:* $V_L = 115.83$ klb ↑, $V_R = 104.17$ klb ↑)



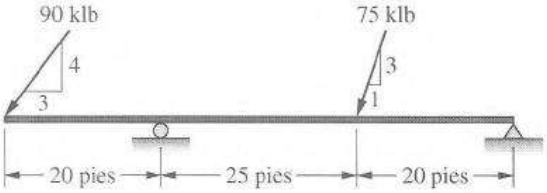
4.6



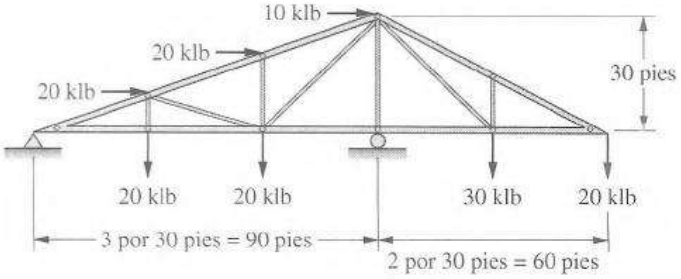
4.7 (*Resp.:* $V_L = 62.5$ klb ↑, $H_R = 30$ klb →)



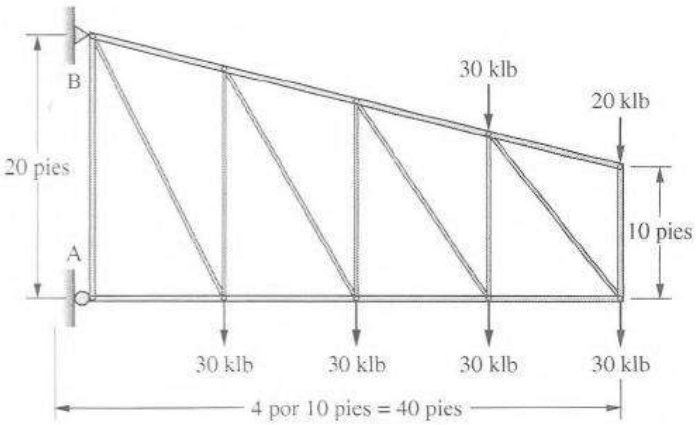
4.8



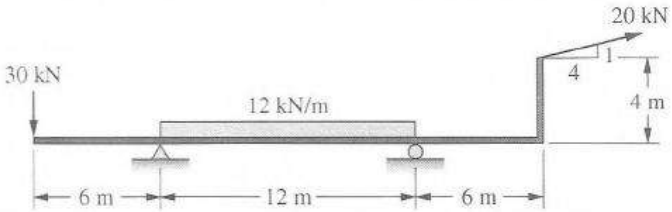
4.9 (*Resp.:* $V_R = 103.33$ klb ↑, $H_L = 50$ klb ←)



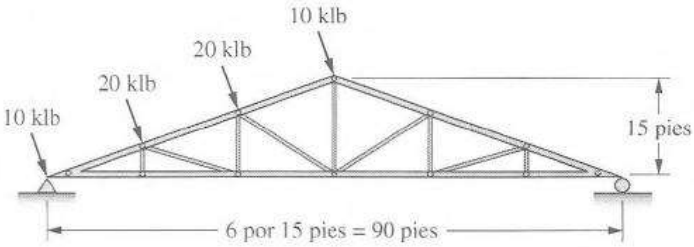
4.10



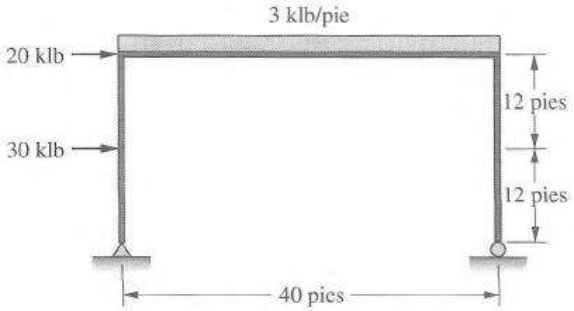
4.11 (*Resp.:* $V_L = 112.96$ kN ↑, $H_L = 19.40$ kN ←)



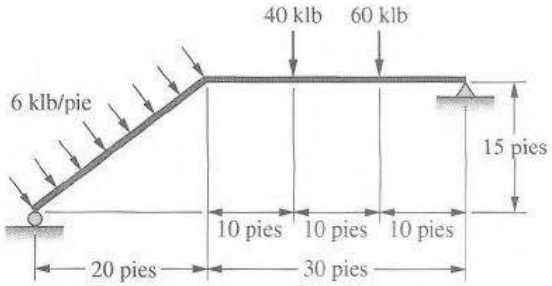
4.12



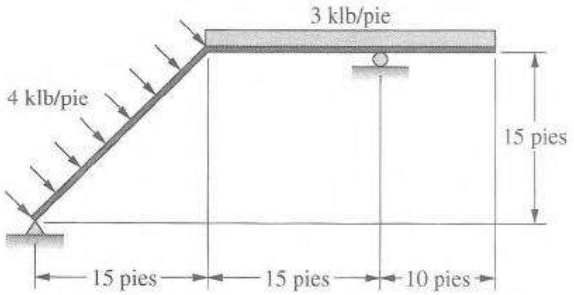
4.13 (*Resp.:* $V_R = 81$ klb ↑, $H_L = 50$ klb ←)



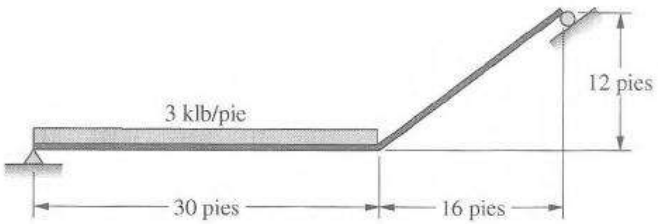
4.14



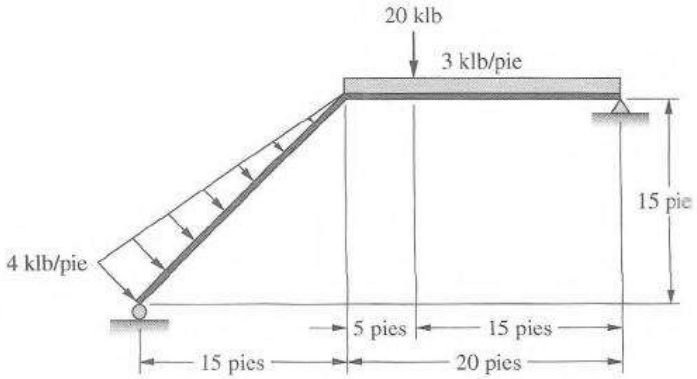
4.15 (*Resp.:* $V_L = 36.25$ klb ↑, $V_R = 98.75$ klb)



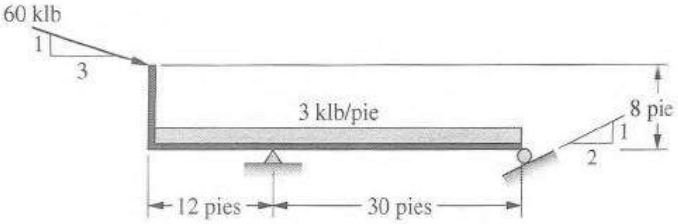
4.16



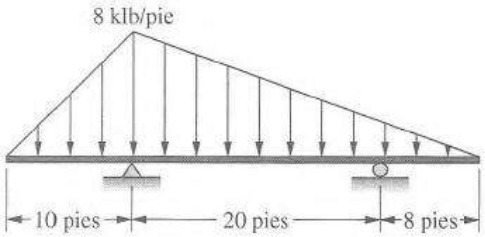
4.17 (*Resp.:* $V_R = 50$ klb ↑, $H_R = 30$ klb ←)



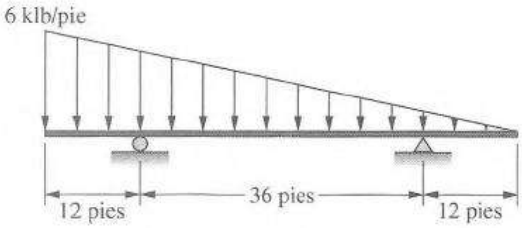
4.18



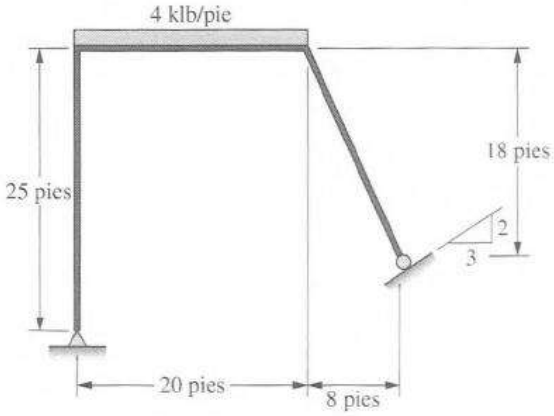
4.19 (*Resp.:* $V_L = 106.41$ klb ↑, $V_R = 45.59$ klb ↑)



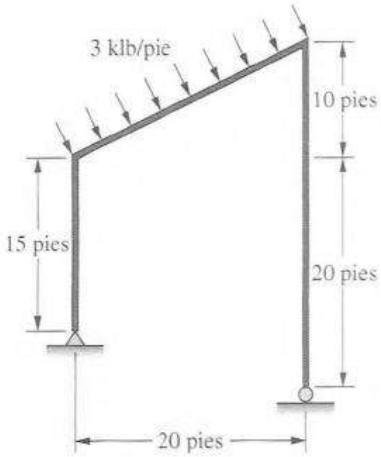
4.20



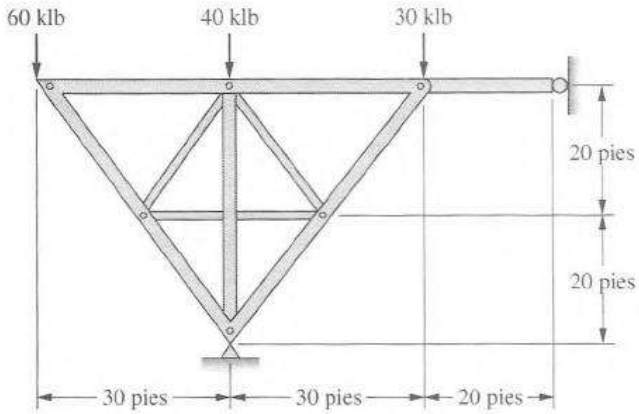
4.21 (*Resp.:* $V_L = 59.22$ klb ↑, $H_L = 31.16$ klb →)



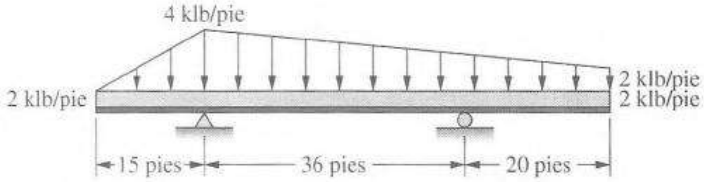
4.22



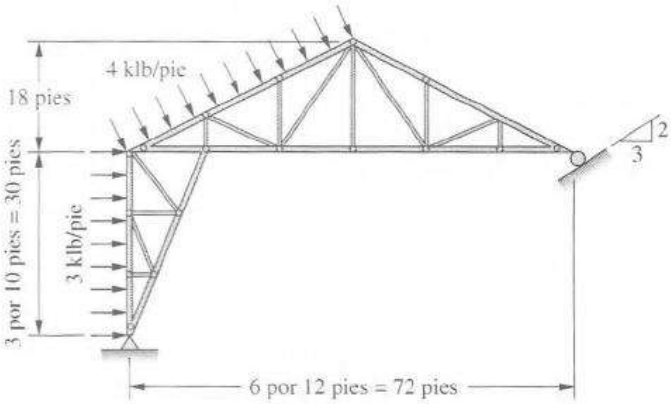
4.23 (*Resp.:* $V_L = 130$ klb, $H_L = 22.5$ klb ←)



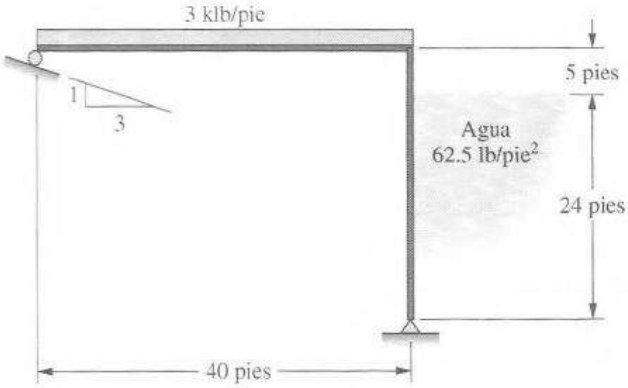
4.24



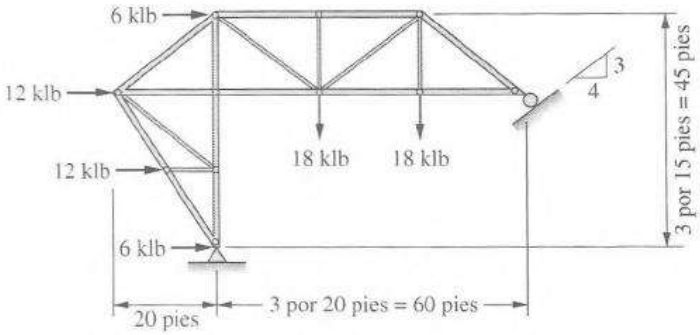
4.25 (*Resp.:* $V_R = 73.36$ klb ↑, $H_R = 48.93$ klb ←)



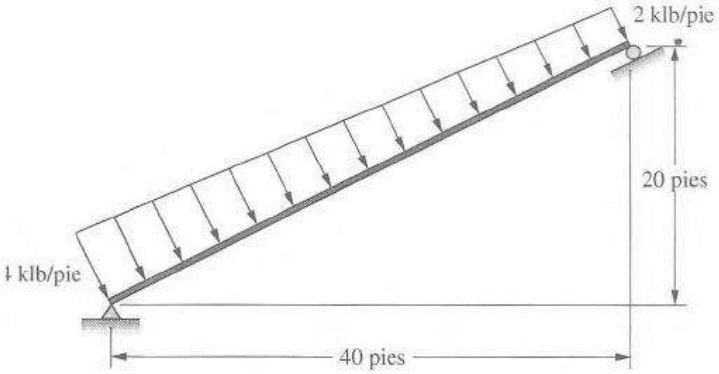
4.26 Considere sólo 1 pie de longitud del marco.



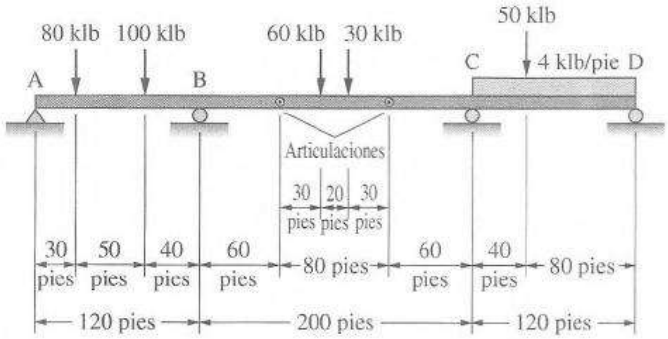
4.27 (*Resp.:* $V_L = 13.09$ klb ↑, $H_L = 18.82$ klb ←, $V_R = 22.91$ klb ↑)



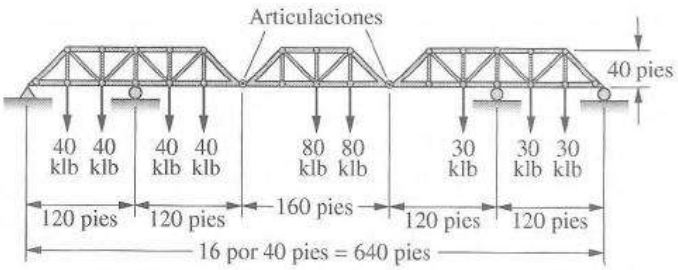
4.28



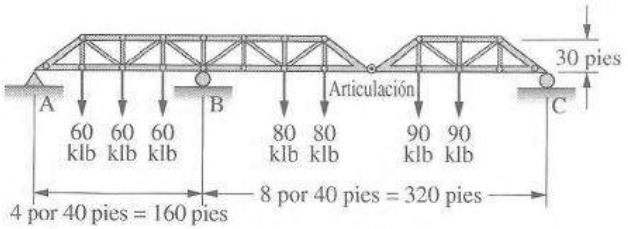
4.29 (*Resp.:* $V_A = 68.96$ klb ↑, $V_B = 157.79$ klb ↑)



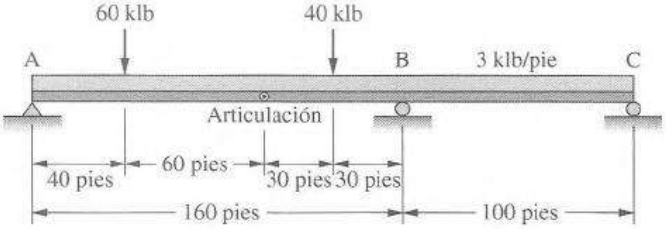
4.30



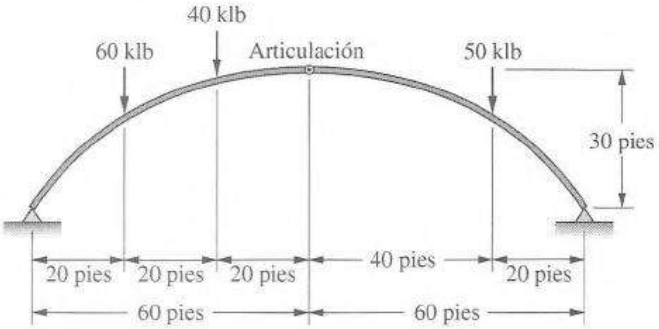
4.31 (*Resp.:* $V_A = 122.5$ klb ↓, $V_B = 575$ klb ↑, $V_C = 67.5$ klb ↑)



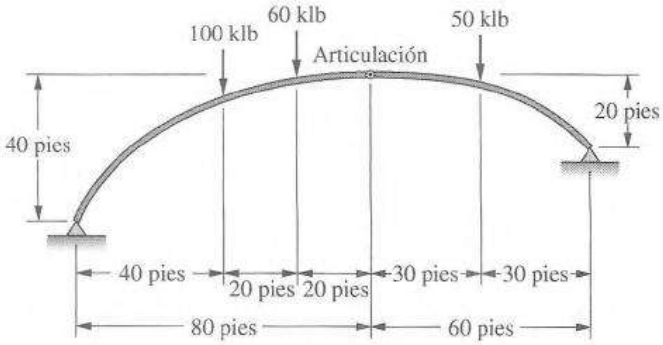
4.32



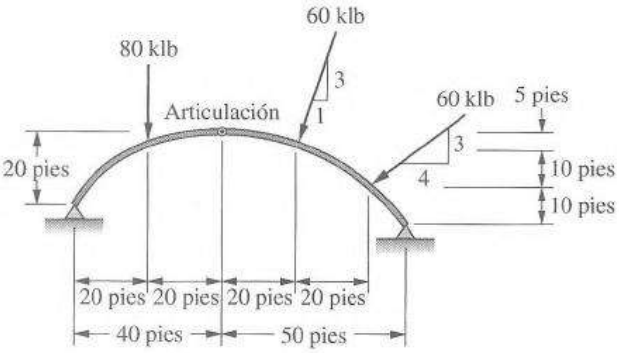
4.33 (*Resp.:* $V_L = 85$ klb ↑, $H_R = 63.33$ klb ←)



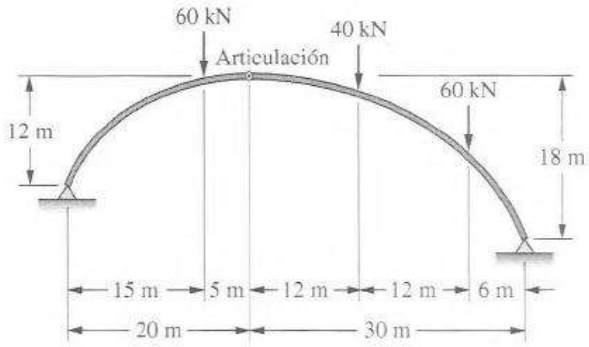
4.34



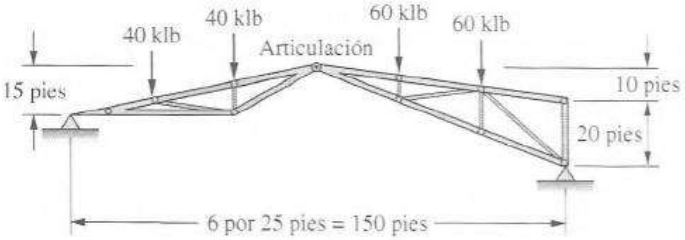
4.35 (*Resp.:* $V_L = 89.27$ klb ↑, $H_L = 98.54$ klb →, $H_R = 31.57$ klb ←)



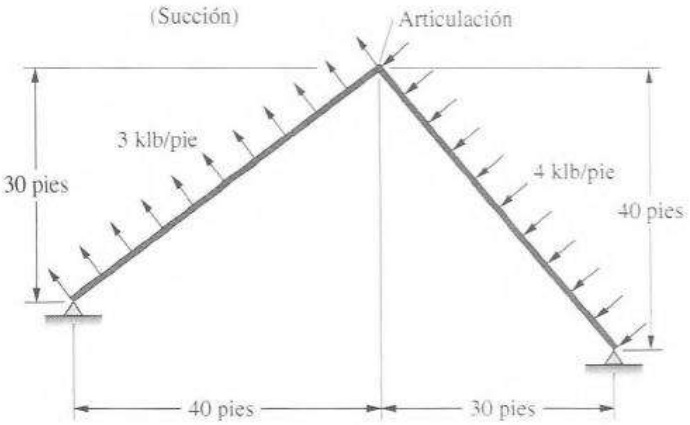
4.36



4.37 (*Resp.:* $V_R = 126.67$ klb ↑, $H_R = 166.67$ klb ←)



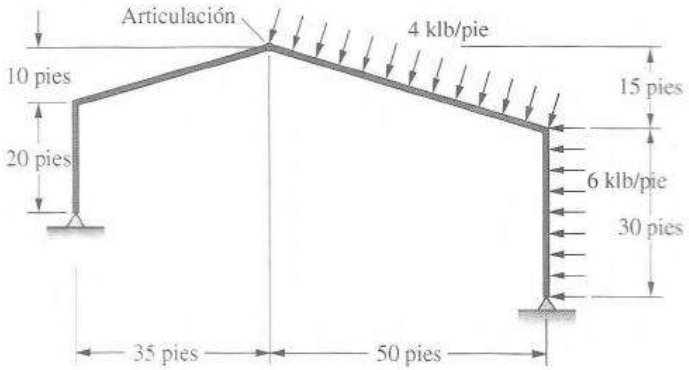
4.38



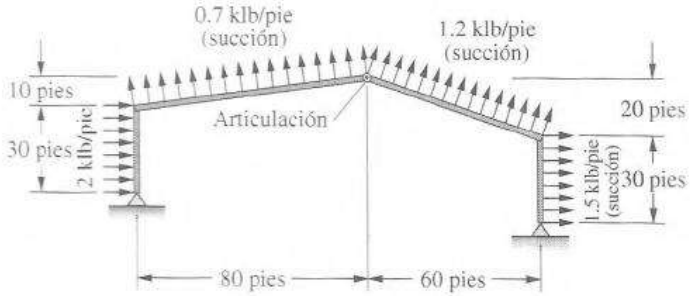
4.39 Repita el problema 4.38 si la carga de 3 klb/pie se incrementa a 4 klb/pie y la de 4 klb/pie se incrementa a 6 klb/pie. (*Resp.:* $V_R = 10$ klb ↑, $H_R = 180$ klb →)

4.40 Repita el problema 4.38 sin la carga de 4 klb/pie.

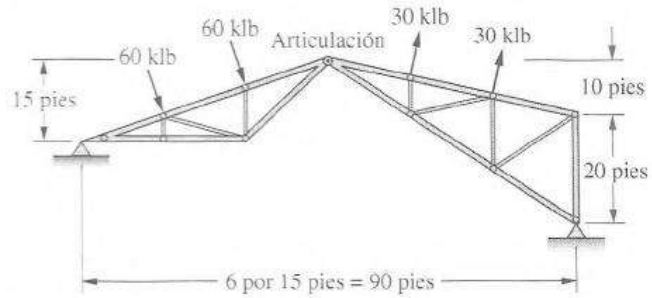
4.41 (*Resp.:* $V_L = 97.07$ klb, $V_R = 102.93$ klb ↑, $H_R = 126.75$ klb →)



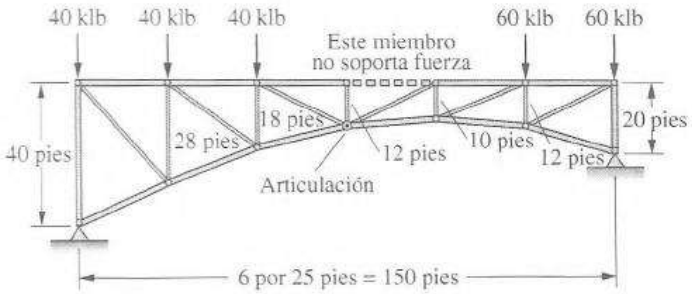
4.42



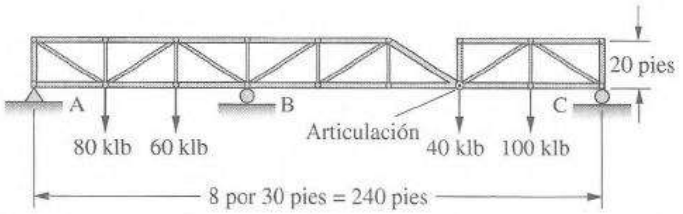
4.43 (*Resp.:* $V_R = -4.23$ klb ↓, $H_L = 11.22$ klb ←)



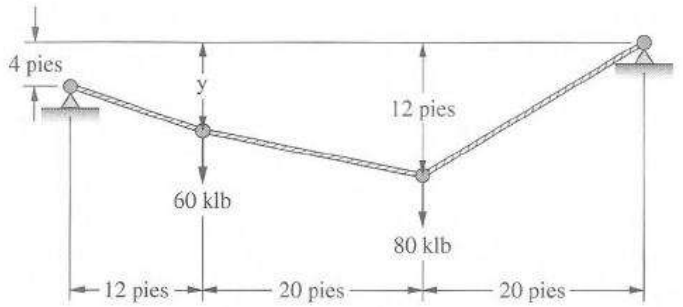
4.44



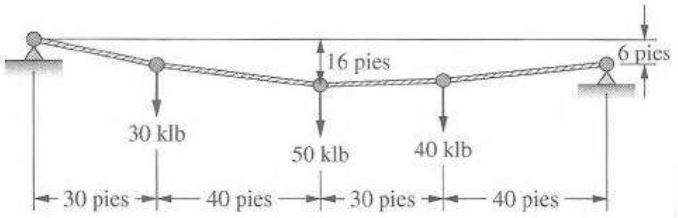
4.45 (*Resp.:* $V_A = -16.67$ klb ↓, $V_B = 246.67$ klb ↑, $V_C = 50$ klb ↑)



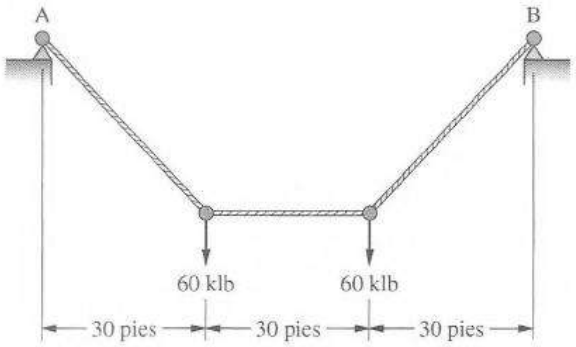
4.46 Determine las componentes de reacción, la flecha del cable bajo la carga de 60 klb, y la fuerza máxima de tensión en el cable.



4.47 Determine las componentes de reacción, la flecha del cable bajo las cargas de 30 y 40 klb y la fuerza máxima de tensión en el cable. (*Resp.:* $V_L = 69.89$ klb ↑, $Y_{30} = 9.09$ pies, $Y_{40} = 14.69$ pies.)



4.48 Determine las componentes de reacción y la flecha en el cable mostrado. El cable tiene 120 pies de longitud.



Capítulo 5

Fuerza cortante y momento flexionante

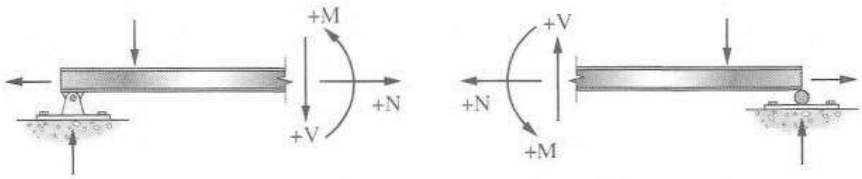
5.1 INTRODUCCIÓN

Una parte importante de la ingeniería de estructuras, así como el entendimiento de cómo se comportan éstas, es la comprensión de las fuerzas cortantes y momentos flexionantes que existen dentro de un sistema de estructuras. Las ecuaciones para la fuerza cortante y el momento flexionante son necesarias para calcular las deflexiones estructurales. Muy a menudo la fuerza cortante y el momento flexionante se representan en diagramas para proporcionar una visualización de la respuesta estructural. Estos diagramas, a partir de los cuales pueden obtenerse inmediatamente los valores de la fuerza cortante y el momento flexionante en cualquier punto de una viga, son muy convenientes en el diseño, ya que proporcionan visualmente la magnitud y localización de las fuerzas máximas de diseño. En este capítulo examinaremos métodos para desarrollar las ecuaciones de la fuerza cortante y del momento flexionante en sistemas estructurales, así como los métodos para construir los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Quizá no exista ningún otro punto cuyo cuidadoso estudio rinda más frutos en el conocimiento de la ingeniería de estructuras.

Para examinar las condiciones internas de una estructura, es preciso considerar y estudiar un cuerpo libre en el que se pongan de manifiesto las fuerzas que deben estar presentes para que ese cuerpo permanezca en equilibrio. La fuerza cortante y el momento flexionante son las dos acciones de las cargas externas sobre una estructura que necesitan ser entendidas para estudiar las fuerzas internas adecuadamente.

La *fuerza cortante* se define como la suma algebraica de las fuerzas que son perpendiculares al eje de la viga situadas a la izquierda, *o* bien, a la derecha de la sección considerada. El *momento flexionante* es la suma algebraica de los momentos causados por todas las fuerzas a la derecha *o* a la izquierda de una sección particular; los momentos se toman respecto a un eje que pase por el centroide de la sección transversal.

La selección de una convención de signos para fuerza cortante (V), momento (M) y fuerza normal o axial (N) es en realidad una cuestión de selección personal. Sin embargo, en la práctica comúnmente se usa la convención mostrada en la figura 5.1. En esta figura el autor ha pasado



Cuerpo libre a la izquierda de la sección Cuerpo libre a la derecha de la sección

Figura 5.1 Convención de signos comúnmente usada para fuerza cortante, momento y fuerzas axiales internos.

una a través de una viga y mostrado los cuerpos libres de esa viga a la izquierda y a la derecha de la sección. Para cada uno de estos cuerpos libres, se dan los valores internos para fuerza cortante positiva, momento positivo y fuerza normal o axial positivas usando esta convención.

En todo este libro, el autor comúnmente usa la convención de signos mostrada en la figura 5.1. Sin embargo, en realidad éste normalmente trabaja con fuerzas externas. Si el autor suma las fuerzas cortantes externas a la izquierda de la sección y el resultado es hacia arriba, la fuerza cortante es positiva. Si suma las fuerzas cortantes externas a la derecha de la sección y el resultado es hacia abajo, la fuerza cortante se considera positiva. De manera similar, si el momento de las fuerzas externas a la izquierda de la sección es en el sentido de las manecillas del reloj, el momento se considera positivo. Lo contrario es verdad para los momentos a la derecha de la sección.

Los cálculos de la fuerza cortante y del momento flexionante en dos secciones en una viga simple se muestran en el ejemplo 5.1.

EJEMPLO 5.1

Encontrar la fuerza cortante en las secciones a-a y b-b, figura 5.2.

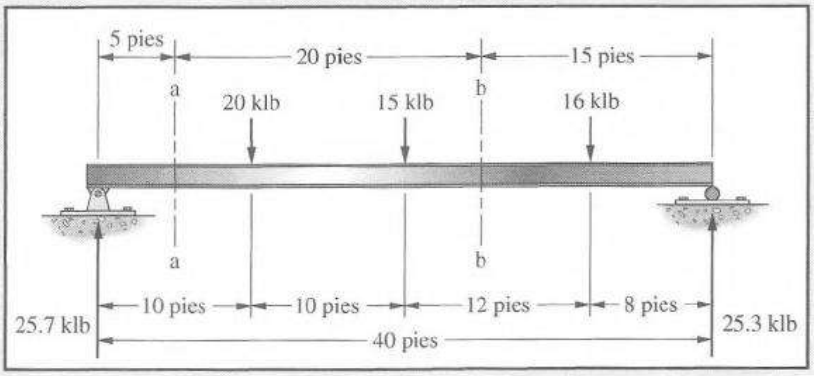


Figura 5.2

Solución. Fuerza cortante en la sección a-a:

$$V_{a\text{-}a} \text{ a la izquierda} = 25.7 \text{ klb} \uparrow, \text{ o } + 25.7 \text{ klb}$$
$$V_{a\text{-}a} \text{ a la derecha} = 20 + 15 + 16 - 25.3 = 25.7 \text{ klb} \downarrow, \text{ o } + 25.7 \text{ klb}$$

Fuerza cortante en la sección b-b:

$$V_{b\text{-}b} \text{ a la izquierda} = 25.7 - 20 - 15 = 9.3 \text{ klb} \downarrow = -9.3 \text{ klb}$$
$$V_{b\text{-}b} \text{ a la derecha} = 16 - 25.3 = -9.3 \text{ klb} \uparrow = -9.3 \text{ klb}$$

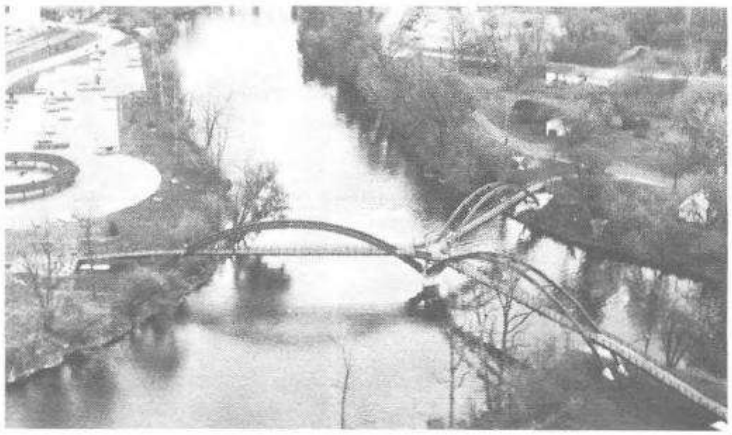
Los momentos flexionantes en las secciones a-a y b-b en la viga del ejemplo 5.1 se calculan como sigue:

Momento en la sección a-a:

$$M_{a\text{-}a} \text{ a la izquierda} = (25.7)(5) = 128.5 \text{ pie-klb} \circlearrowleft, \text{ o } + 128.5 \text{ pie-klb}$$
$$M_{a\text{-}a} \text{ a la derecha} = (25.3)(35) - (16)(27) - (15)(15) - (20)(5)$$
$$= 128.5 \text{ pie-klb} \circlearrowright, \text{ o } + 128.5 \text{ pie-klb} \quad \blacksquare$$

Momento en la sección b-b:

$$M_{b\text{-}b} \text{ a la izquierda} = (25.7)(25) - (20)(15) - (15)(5) = 267.5 \text{ pie-klb} \circlearrowleft, \text{ o } + 267.5 \text{ pie-klb}$$
$$M_{b\text{-}b} \text{ a la derecha} = (25.3)(15) - (16)(7) = 267.5 \text{ pie-klb} \circlearrowright, \text{ o } + 267.5 \text{ pie-klb}$$



El Tridge, puente peatonal de tres claros utilizando armazón de madera laminada pegada, Midland, Michigan. (Cortesía de Unit Structures, Inc.)

Posteriormente en este libro de texto cuando se introduzcan métodos para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas más bien complicadas, se presenta una convención de signos más detallada para las fuerzas axiales, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes. Esto es en particular necesario cuando se hace un análisis usando métodos matriciales. (Véanse los capítulos 22-25.)

5.2 DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE

En la mayoría de los casos, los diagramas de fuerza cortante son bastante fáciles de dibujar. El método estándar es iniciar en el extremo izquierdo de la estructura y trabajar a la derecha. A medida que se encuentra cada una de las cargas concentradas o reacciones, se dibuja una línea vertical para representar la cantidad y dirección de la fuerza contemplada. Entre las fuerzas se dibuja una línea horizontal para indicar que no hay cambio en la fuerza cortante.

Si se encuentran cargas uniformes, la fuerza cortante cambia a una tasa constante por unidad de longitud y puede representarse por una línea recta pero inclinada en el diagrama. Cuando una ordenada en el diagrama de fuerza cortante está por encima de la línea se indica una fuerza cortante positiva porque la suma de las fuerzas a la izquierda de ese punto es hacia arriba. En el ejemplo 5.2 se traza un diagrama de fuerza cortante para una viga simple.

EJEMPLO 5.2

Dibuje un diagrama de fuerza cortante para la viga mostrada en la figura 5.3.

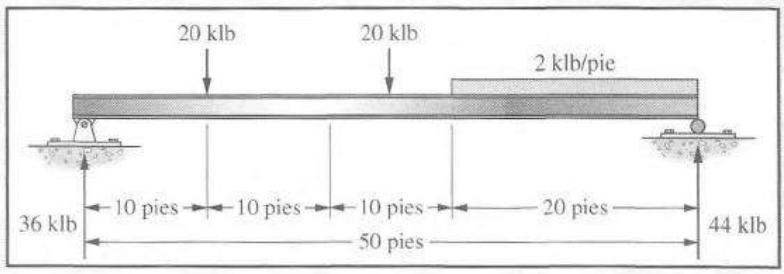
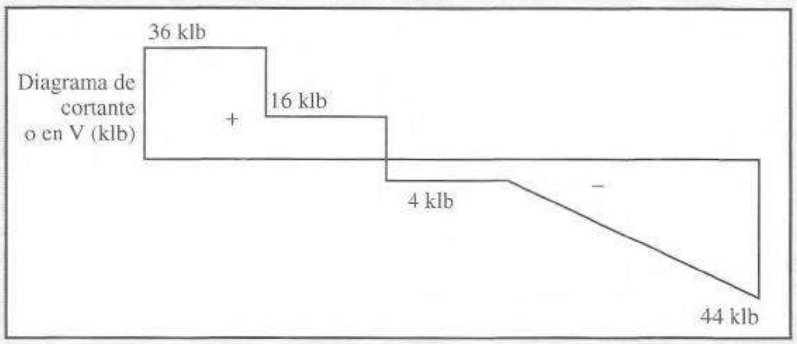


Figura 5.3

Solución.



5.3 DIAGRAMAS DE MOMENTO

Los momentos para diferentes puntos en una estructura necesarios para trazar un diagrama de momento flexionante se pueden obtener algebraicamente tomando momentos en esos puntos, pero el procedimiento es bastante tedioso si hay más de dos o tres cargas aplicadas a la estructura. El método desarrollado en la siguiente sección es mucho más práctico.

5.4 RELACIONES ENTRE CARGAS, FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES

Existen importantes relaciones matemáticas entre las cargas, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en una viga. Estas relaciones se analizan en los siguientes párrafos haciendo referencia a la figura 5.4.

Para esta discusión se considera una viga de longitud dx [Figura 5.4(a)]. Este elemento específico está cargado con una carga uniforme de magnitud w klb/pie lineal (no tiene que ser uniforme). La fuerza cortante y el momento flexionante en el extremo izquierdo de este elemento en la sección 1-1 pueden escribirse como sigue:

$$V_{1-1} = R_A - P - wa$$

$$M_{1-1} = R_A x - P(a + b) - \frac{wa^2}{2}$$

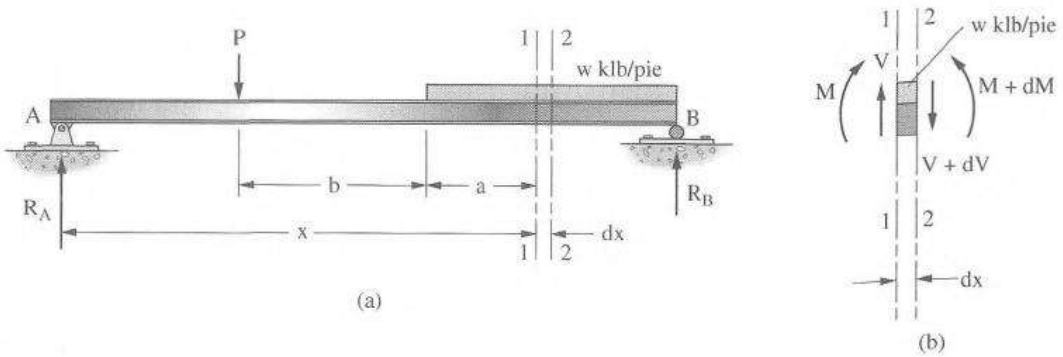


Figura 5.4

Si nos movemos una distancia dx de la sección 1-1 a la sección 2-2 en el extremo derecho del elemento, los nuevos valores de fuerza cortante y momento pueden escribirse como al final de este párrafo. Los cambios de estos valores pueden expresarse como dV y dM respectivamente.

$$V_{2-2} = V_{1-1} + dV = R_A - P - wa - w\,dx$$

$$M_{2-2} = M_{1-1} + dM = R_A x - P(a+b) - \frac{wa^2}{2} + V_{1-1}\,dx - \frac{w\,dx^2}{2}$$

A partir de estas expresiones y con referencia a la parte (b) de la figura 5.3, los cambios de la fuerza cortante y del momento para una distancia dx son los siguientes:

$$\frac{dV}{dX} = -w$$

$$\frac{dM}{dX} = V \text{ despreciando el término infinitesimal de orden superior que incluye a } (dx)^2$$

De las expresiones anteriores el cambio en la fuerza cortante de una sección a otra puede escribirse como sigue (observando que en algunos libros de texto eliminan el signo menos usando una convención de signos en la cual a las cargas hacia arriba se les da un signo menos):

$$\Delta V = -\int_{1-1}^{2-2} w\,dx$$

Y el cambio de momento en la misma distancia es

$$\Delta M = \int_{1-1}^{2-2} V\,dx$$

Estas dos relaciones son muy útiles para el diseñador de estructuras. La primera indica que la razón de cambio de la fuerza cortante en cualquier punto es igual a la carga por unidad de longitud en el punto, lo que significa que la pendiente del diagrama de fuerza cortante en cualquier punto es igual a la carga en ese punto. La segunda ecuación indica que la razón de cambio del momento en cualquier punto es igual a la fuerza cortante. Esta relación implica que la pendiente de la curva de momento flexionante en cualquier punto es igual a la fuerza cortante.

El procedimiento para dibujar los diagramas de fuerza cortante y de momento que se describirá en la sección 5.5, se basa en las ecuaciones anteriores y es aplicable a todas las estructuras independientemente de las cargas o de los claros. Antes de describir el proceso, sería conveniente examinar las ecuaciones con mayor cuidado. Un valor específico de dV/dx o de dM/dx es bueno solamente para la parte de la estructura en la cual la función es continua. Por ejemplo, en la viga del ejemplo 5.4 la razón de cambio de la fuerza cortante de A a B es igual a la carga uniforme, 4 klb/pie. Para la carga de 30 klb, que se supone que actúa en ese punto, la razón de cambio de la fuerza cortante y la pendiente del diagrama de fuerza cortante son infinitos, y se dibuja una línea vertical en el diagrama de fuerza cortante para representar una carga concentrada. La razón de cambio del momento de A a B ha sido constante, pero en B la fuerza cortante cambia definitivamente, tal como lo hace la razón de cambio del momento. En otras palabras, una expresión para la fuerza cortante o para el momento de A a B no es la misma que la expresión de B a C más allá de la carga concentrada. Las ecuaciones de los diagramas no son continuas más allá de este punto.

5.5 DIAGRAMAS DE MOMENTO FLEXIONANTE DIBUJADOS A PARTIR DE DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE

Se ha demostrado que el cambio en momento flexionante entre dos puntos en una estructura es igual a la fuerza cortante entre estos dos puntos multiplicada por la distancia entre ellos ($dM = Vdx$); por lo tanto, el cambio en momento flexionante es igual al área del diagrama de fuerza cortante entre esos dos puntos.

Las relaciones entre fuerza cortante y momento flexionante simplifican considerablemente el dibujo de los diagramas de momento. Para determinar el momento flexionante en una sección específica, sólo tiene que calcularse el área total bajo la curva de fuerza cortante a la izquierda o bien a la derecha de la sección considerada, tomando en cuenta los signos algebraicos de los diferentes segmentos de la curva de cortante. Los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante son autocomprobantes. Si éstos se inician en el extremo de una estructura, generalmente el izquierdo, y cierran al valor apropiado en el otro extremo, el diagrama probablemente está bien hecho.

Generalmente el autor considera conveniente calcular el área de cada parte de un diagrama de fuerza cortante y registrar ese valor sobre la parte en cuestión. Se sigue este procedimiento para los ejemplos de este capítulo, en donde los valores encerrados en los diagramas de cortante son áreas. Estos valores así registrados simplifican considerablemente la construcción de los diagramas de momento flexionante.

Se ha mostrado que la razón de cambio del momento en un punto es igual al cortante en ese punto ($dM/dx = V$). Siempre que la fuerza cortante pase por cero, la razón de cambio del momento debe ser cero ($dM/dx = 0$), y el momento es máximo o mínimo. Si el diagrama de momentos se traza de izquierda a derecha y el diagrama de fuerza cortante cambia de positivo a negativo, el momento alcanzará un máximo positivo en ese punto. Más allá de ese punto comienza a disminuir a medida que se suma el área cortante negativa. Si el diagrama de fuerza cortante cambia de negativo a positivo, el momento alcanza un máximo negativo y luego comienza a disminuir a medida que se suma el área positiva de cortante.

Esta teoría, que indica que el momento máximo ocurre donde la fuerza cortante es cero, no siempre es aplicable. En algunos casos (en el extremo de una viga o en un punto de discontinuidad) el momento máximo puede ocurrir donde la fuerza cortante no es cero. Si una viga en voladizo se carga con cargas gravitacionales, tanto la fuerza cortante máxima como el momento máximo ocurrirán en el extremo empotrado.

Si se trazan diagramas de fuerza cortante y de momento para miembros inclinados, se usan las componentes de las cargas y las reacciones perpendiculares a los ejes centroidales de los miembros y los diagramas se trazan paralelos a los miembros. Los ejemplos 5.3 a 5.5 ilustran el procedimiento para trazar los diagramas de fuerza cortante y de momento para vigas ordinarias. Al estudiar estos diagramas debe darse énfasis especial a su forma bajo las cargas uniformes, entre las cargas concentradas, etcétera.

Usted observará que en la viga del ejemplo 5.4 existe una fuerza axial de tensión de 30 klb para la longitud total del miembro. Sin embargo, la fuerza no afecta a la fuerza cortante y al momento en la viga.

EJEMPLO 5.3

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga mostrada en la figura 5.5.

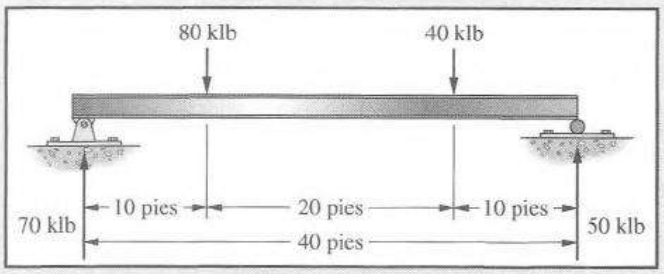
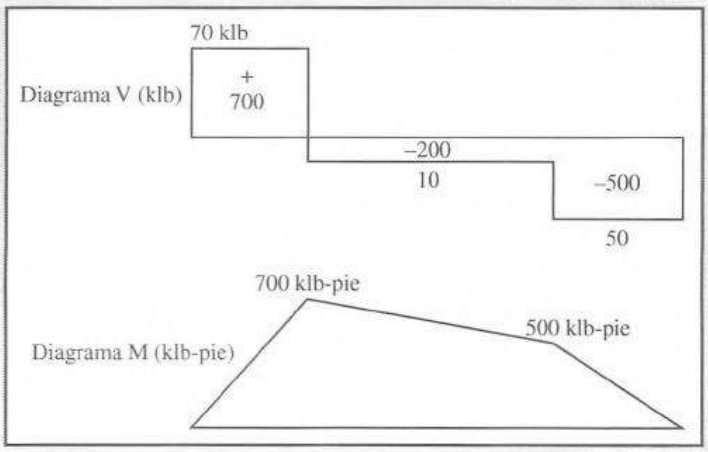


Figura 5.5

Solución.



EJEMPLO 5.4

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la estructura mostrada en la figura 5.6.

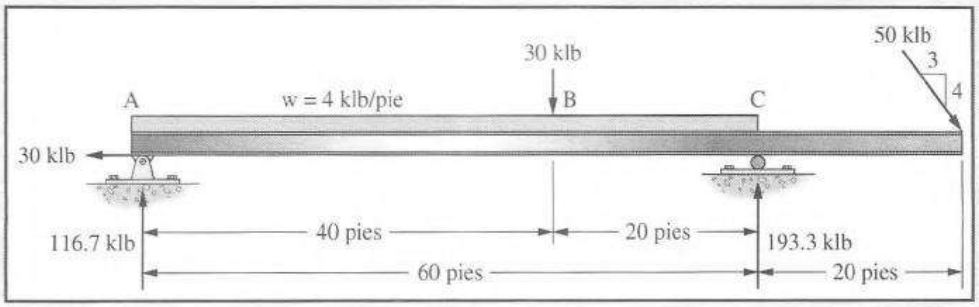
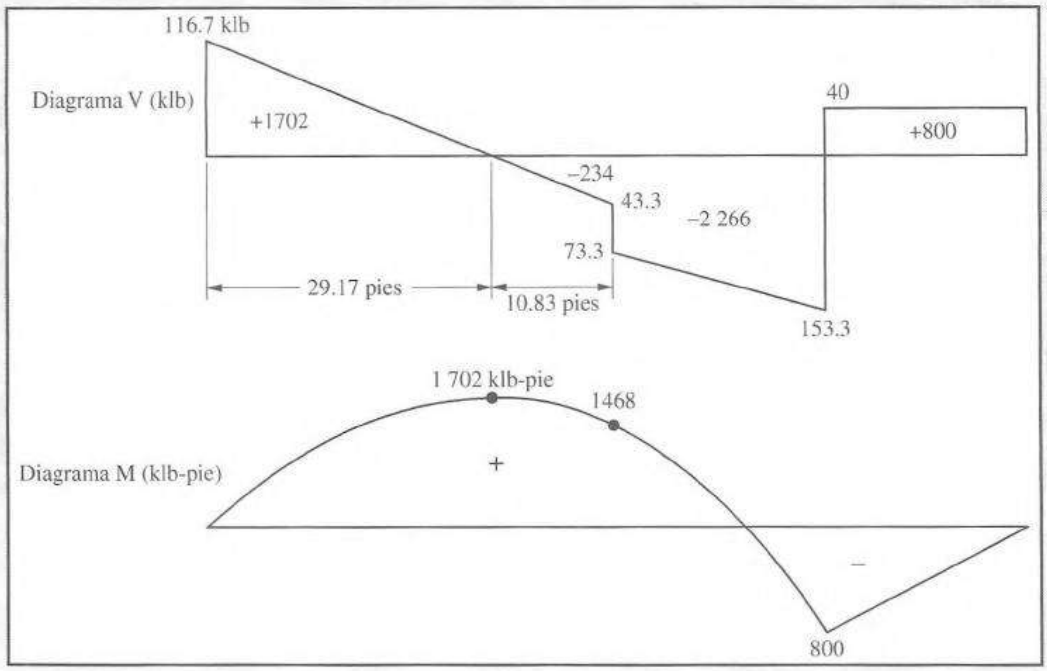


Figura 5.6

Solución.



EJEMPLO 5.5

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la estructura de tipo voladizo mostrada en la figura 5.7.

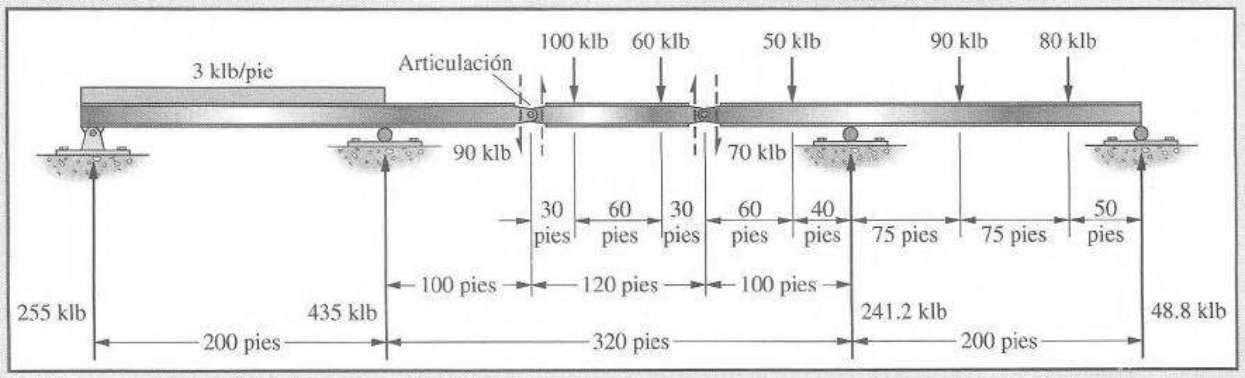
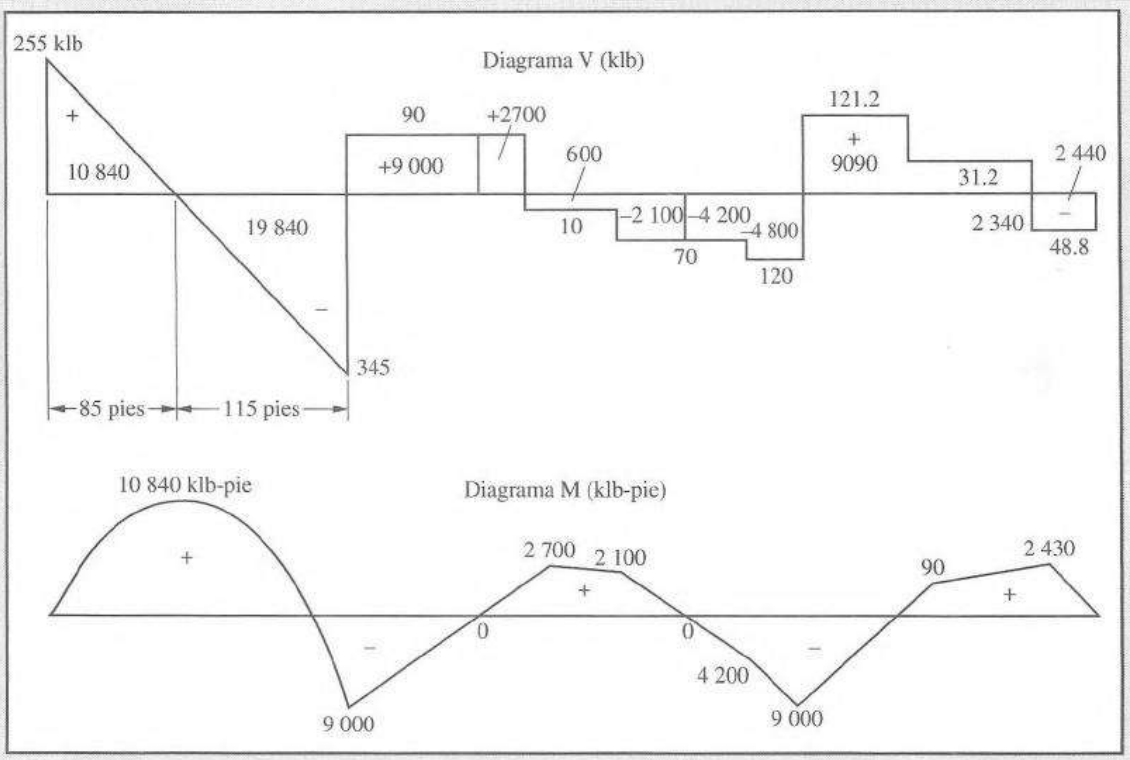
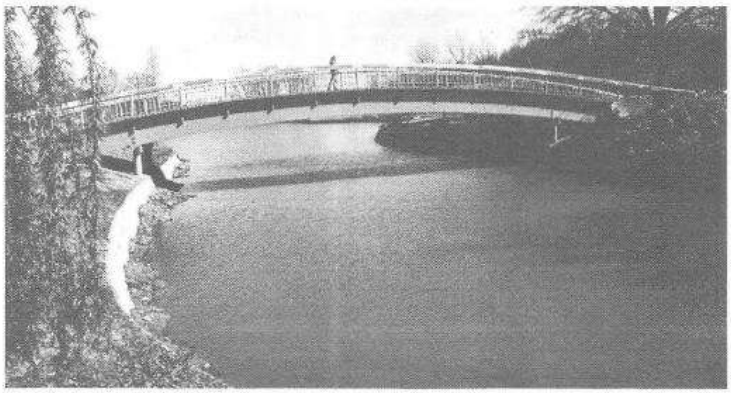


Figura 5.7

Solución.





Puente peatonal en el Pullen Park, Raleigh, Carolina del Norte.
(Cortesía del American Institute of Timber Construction.)

Algunas estructuras (tales como muros) tienen brazos rígidos adheridos a ellas. Si se aplican cargas horizontales o inclinadas a estos brazos, se inducirá en la estructura en el punto de unión un giro o un momento. El hecho de que el momento flexionante se calcula respecto a un eje que pasa por el centroide de la sección resulta importante porque los brazos de palanca de las fuerzas aplicadas deben medirse respecto a ese centroide. Para dibujar el diagrama de momento en el punto de unión, es necesario estimar el momento para una distancia infinitesimal a la izquierda del punto y luego sumar el momento aplicado por el brazo. El momento exactamente en el punto de unión es discontinuo y no puede estimarse, pero está disponible el momento inmediatamente después de ese punto.

Se aplicará la convención de signos acostumbrada para momentos positivos y negativos para decidir si se suma o se resta el momento inducido. Puede verse en la figura 5.8 que las fuerzas a la izquierda de la sección que tienden a causar momentos en el sentido de las manecillas del reloj producen tensión en las fibras inferiores (momento +), mientras que las fuerzas a la izquierda que tienden a causar momentos en el sentido contrario al de las manecillas del reloj producen tensión en las fibras superiores (momento −). Similarmente, un momento en el sentido contrario al de las manecillas del reloj a la derecha de la sección produce tensión en las fibras inferiores; un momento en el sentido de las manecillas del reloj produce tensión en las fibras superiores.

En el ejemplo 5.6 se muestran diagramas de fuerza cortante y de momento para una viga que tiene un momento inducido en un punto por un brazo rígido al cual se aplica un par. El diagrama de momentos se traza de izquierda a derecha. Considerando el momento de las fuerzas a la izquierda de una sección a través de la viga inmediatamente después de alcanzar al brazo rígido, puede verse que el par causa un momento en el sentido de las manecillas del reloj o positivo, y su valor se suma al momento obtenido mediante la suma de las áreas del diagrama de fuerza cortante hasta el brazo unido.

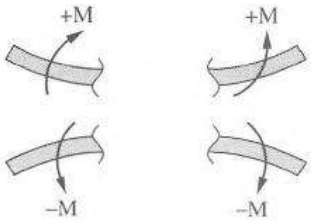


Figura 5.8

EJEMPLO 5.6

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga mostrada en la figura 5.9.

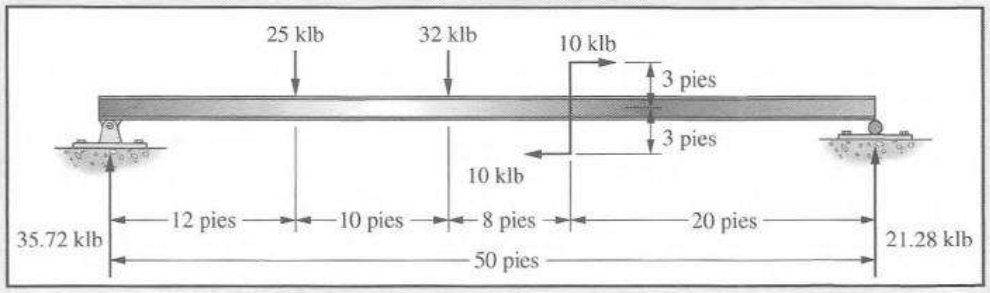
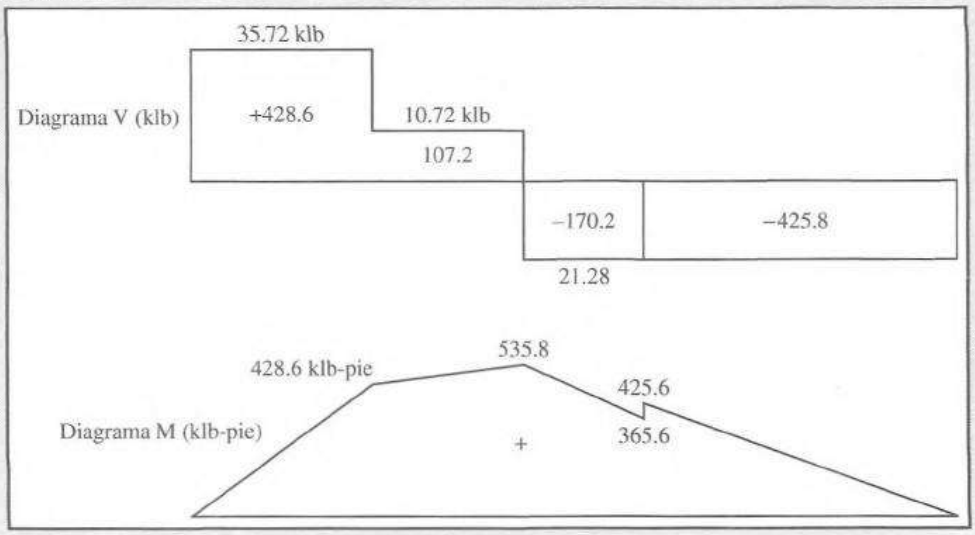


Figura 5.9

Solución.



Al principio los estudiantes pueden tener un poco de dificultad para trazar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para estructuras que están sujetas a cargas triangulares. Se presenta el ejemplo 5.7 para demostrar cómo tratarlas. Las reacciones se calculan para la viga mostrada en la figura 5.10 y se bosqueja el diagrama de fuerza cortante. Observe, sin embargo, que el punto de fuerza cortante cero es desconocido y se muestra en la figura localizado a una distancia x del soporte izquierdo. La ordenada sobre el diagrama de carga en este punto lo llamamos y y puede expresarse en términos de x escribiendo la siguiente expresión:

$$\frac{x}{30} = \frac{y}{2}$$

$$y = \frac{1}{15}x$$

En este punto de cortante cero la suma de las fuerzas verticales a la izquierda puede escribirse como la reacción hacia arriba, 10 klb, menos la carga hacia abajo uniformemente variable a la izquierda.

$$10 - \left(\frac{1}{2}\right)(x)\left(\frac{1}{15}x\right) = 0$$

$$x = 17.32 \text{ pies}$$

Este valor de x también puede determinarse escribiendo una expresión para el momento flexionante en la viga a una distancia x desde el apoyo y luego tomando $dM/dx = 0$ de esa expresión y despejando el valor de x.

Finalmente, el momento en un punto específico se calcula por equilibrio tomando (a la izquierda o a la derecha del punto) la suma de las fuerzas multiplicadas por sus respectivos brazos de palanca. Para este ejemplo, el momento en 17.32 pies es:

$$M = (10)(17.32) - (10)\left(\frac{17.32}{3}\right) = 115.5 \text{ klb-pie}$$

El estudiante podría preguntarse por qué el autor (una vez determinada x) no sumó simplemente el área bajo el diagrama de fuerza cortante desde el soporte izquierdo al punto de cortante cero. Tal procedimiento es correcto, pero el diseñador debe asegurarse de que la determinación del área esté bien hecha. Cuando se tienen tramos de parábolas, puede ser necesario el uso del cálculo para determinar las áreas en lugar de fórmulas parabólicas estándar. En consecuencia, puede ser más simple en algunas ocasiones tomar momentos de las cargas y reacciones respecto a los puntos en que se buscan los momentos.

En el capítulo 11, la figura 11.7 presenta las propiedades (centros de gravedad y áreas) de varias figuras geométricas. Estos valores pueden ser muy útiles para que el estudiante prepare los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para situaciones complicadas de carga.

EJEMPLO 5.7

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga mostrada en la figura 5.10.

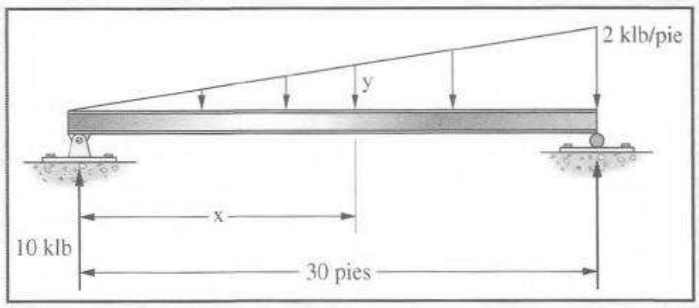
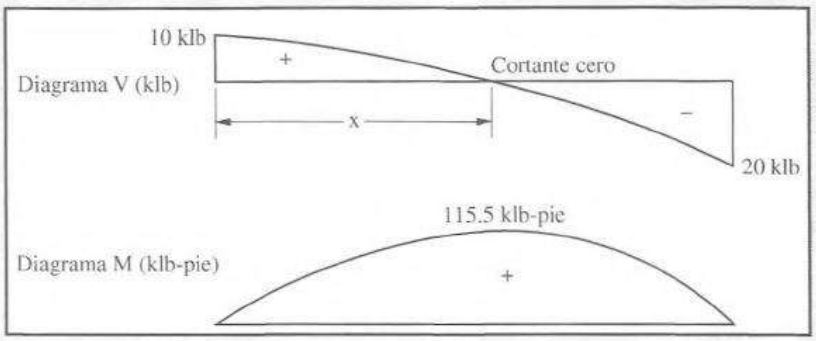


Figura 5.10

Solución.



Las reacciones para la viga del ejemplo 5.8 no pueden obtenerse usando solamente las ecuaciones de equilibrio estático. Ellas han sido calculadas con un método que se verá en un capítulo posterior, y se han trazado los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para mostrar que las relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flexionante son aplicables a todas las estructuras. ■

EJEMPLO 5.8

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga continua mostrada en la figura 5.11 para la cual se dan las reacciones.

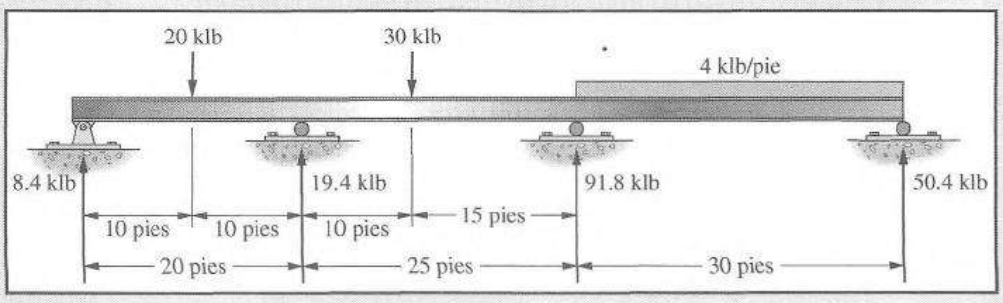
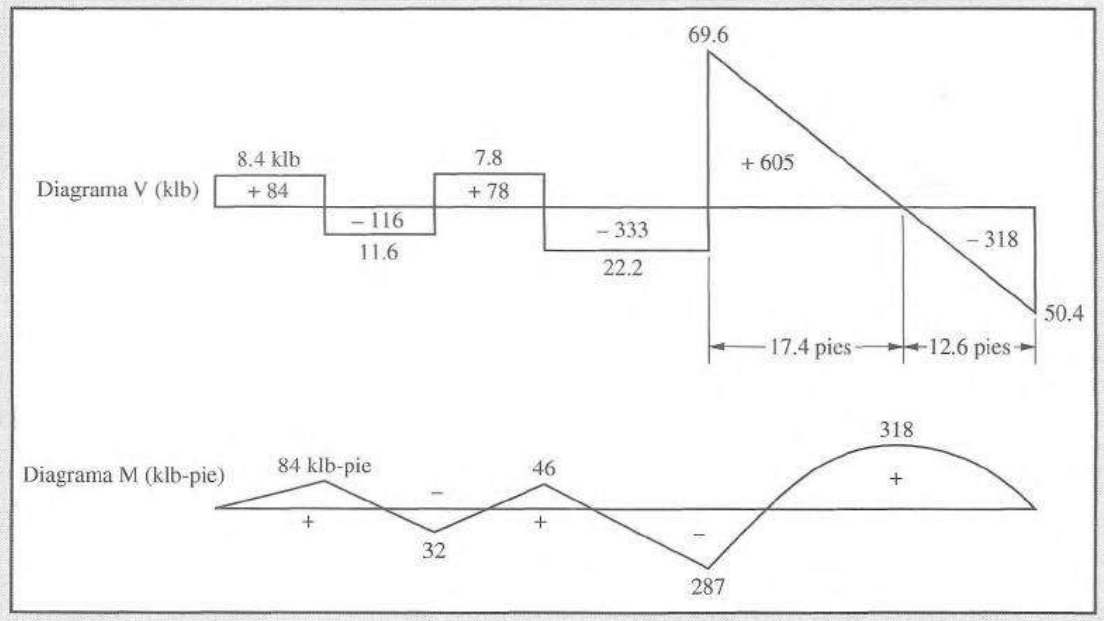


Figura 5.11

Solución.



■

5.6 DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO FLEXIONANTE PARA MARCOS ESTÁTICAMENTE DETERMINADOS

Los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante son útiles tanto para marcos rígidos como para miembros individuales a flexión. Los miembros de un marco rígido no pueden girar

entre sí en sus conexiones. En consecuencia, se transmiten fuerzas axiales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes entre los miembros en los nudos. Esos valores deben considerarse en la preparación de los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.

Como primer caso consideraremos el marco del ejemplo 5.9 mostrado en la figura 5.12. Después de calcular las reacciones se preparan diagramas de cuerpo libre para cada uno de los miembros. Las fuerzas en la base de la columna son claramente las reacciones estructurales. Los valores en la parte superior representan el efecto del resto del marco sobre la parte superior de la columna y pueden obtenerse con gran facilidad con las ecuaciones de equilibrio estático. Finalmente, se dibujan los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.

EJEMPLO 5.9

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para el marco mostrado en la figura 5.12.

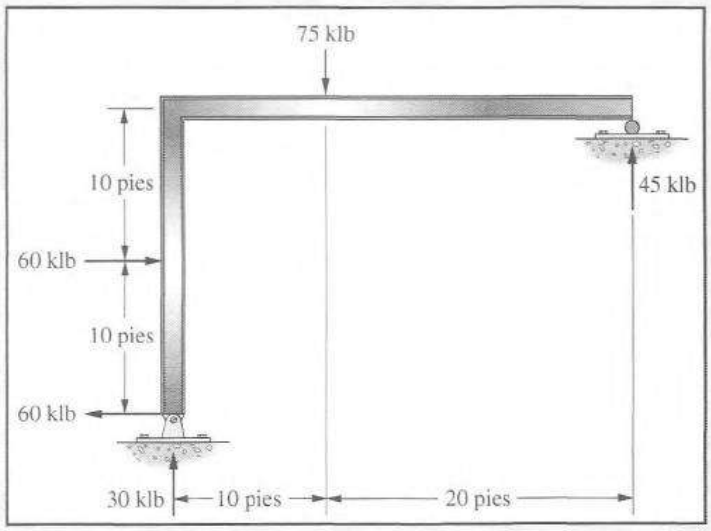
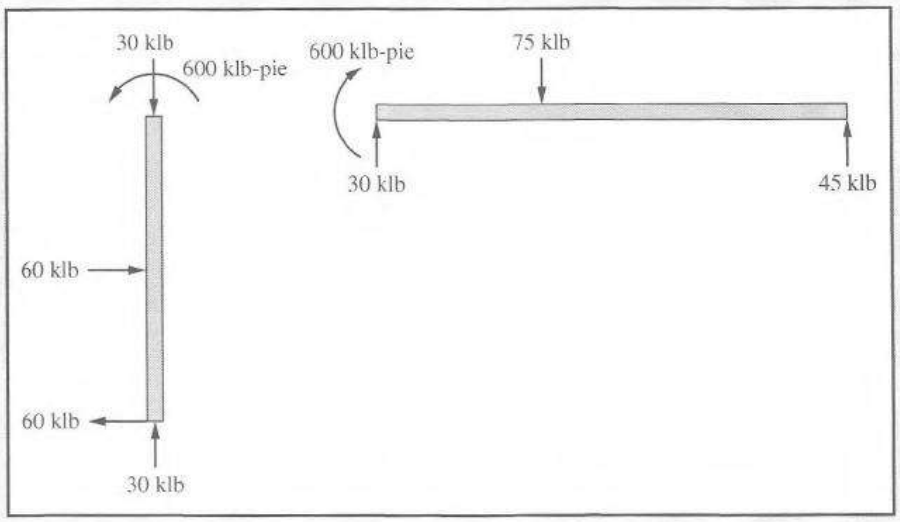


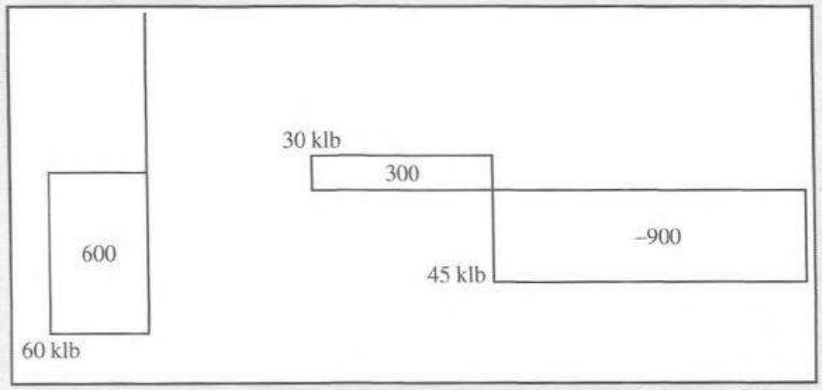
Figura 5.12

Solución.

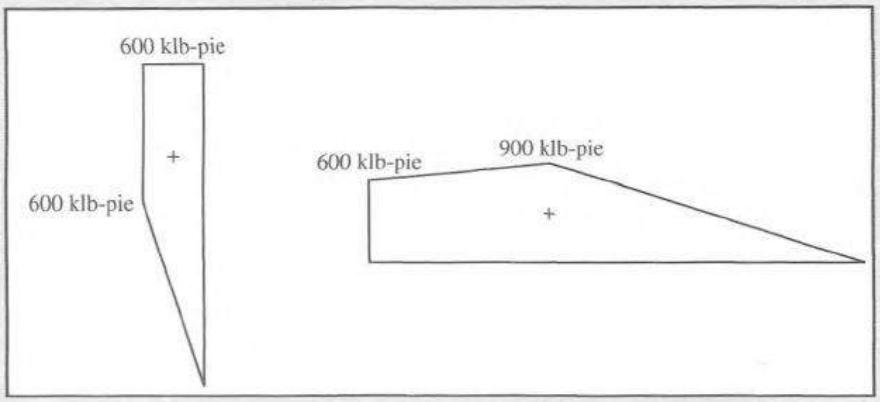
Diagramas de cuerpo libre



Diagramas de fuerza cortante



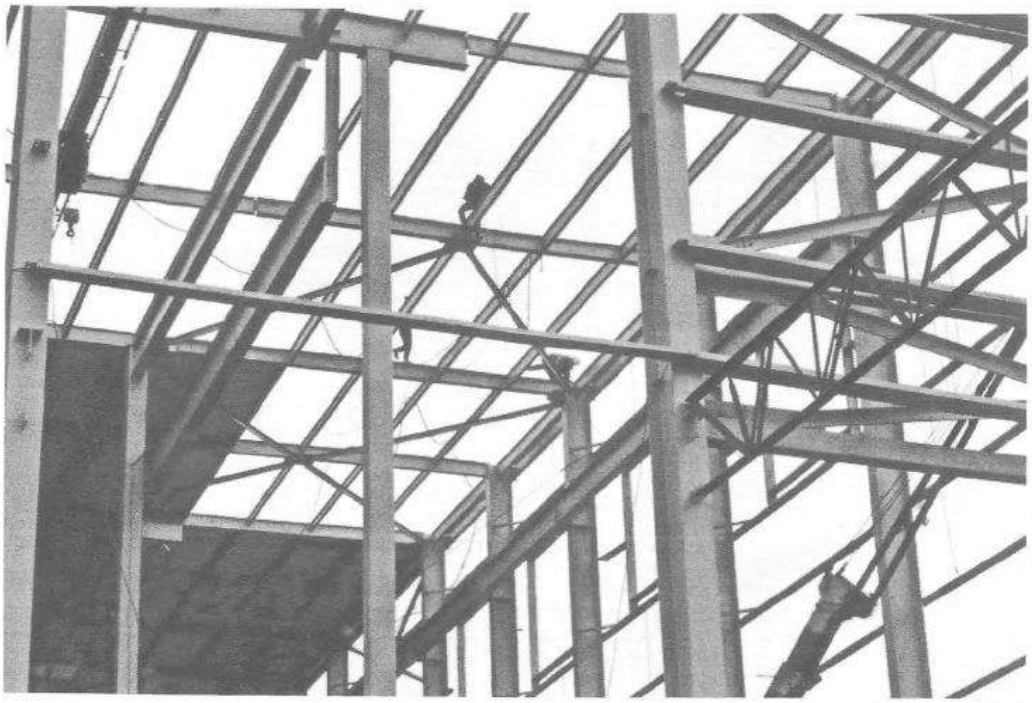
Diagramas de momento flexionante



Como una convención de signos para el primer ejemplo el autor supuso que estaba parado debajo del marco. Así, se supuso que el lado derecho de la columna es el lado inferior. ■

En el ejemplo 5.10 se dibujan los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para un marco con dos columnas. Nuevamente, el autor supuso que estaba parado debajo del marco; por lo tanto, los paños interiores de las columnas son los lados inferiores por lo que toca a la convención de signos.

Si un marco tiene más de dos columnas, la convención de signos que hemos estado empleando hará que nos confundamos al decidir cuál es el lado inferior de las columnas. Para esta situación podemos simplemente suponer que un lado de todas las columnas (por ejemplo el lado derecho) es el lado inferior. Sin embargo, esto hará que tengamos problemas con la convención de signos en las partes superiores de todas las columnas, excepto por la que está más alejada a la izquierda. Es decir, tendremos que cambiar la convención de signos a medida que nos movemos desde la viga en la parte superior de todas las otras columnas. Tal vez un mejor procedimiento para los marcos con columnas múltiples es simplemente eliminar los signos en los diagramas de momentos y dibujar los diagramas de momentos en el lado de compresión de todos los miembros: los resultados para los miembros horizontales serán los mismos que los obtenidos anteriormente.



Edificio YKK USA, Dublin, Georgia. (Cortesía de Britt, Peters y Asociados.)

No se mostraron diagramas de cuerpo libre para los diferentes miembros de este marco, ya que el autor sintió que ahora el lector debe ser capaz de trazar los diagramas de cortante y de momento directamente de las cargas externas y reacciones aplicadas al marco.

EJEMPLO 5.10

Dibujar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para el marco que se muestra en la figura 5.13.

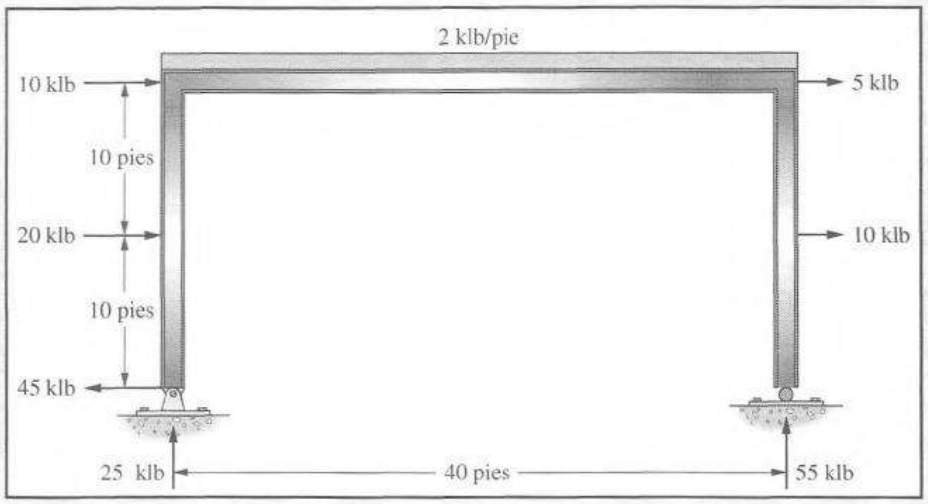
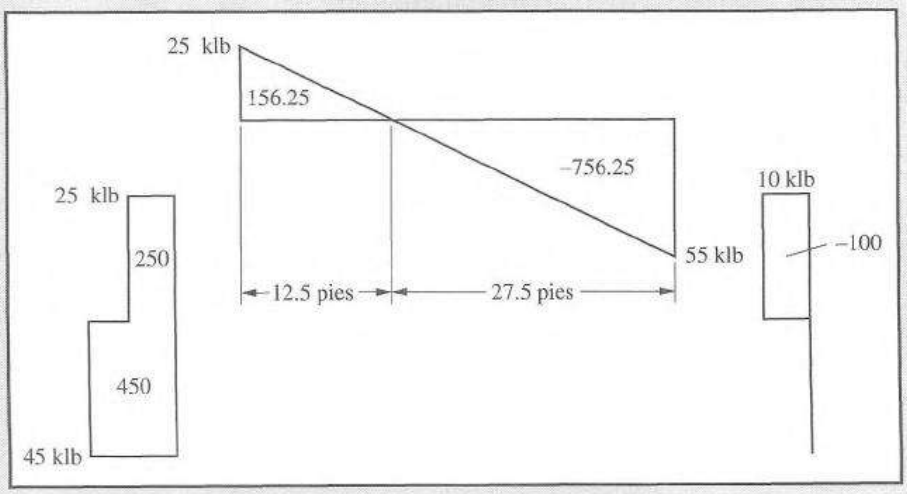


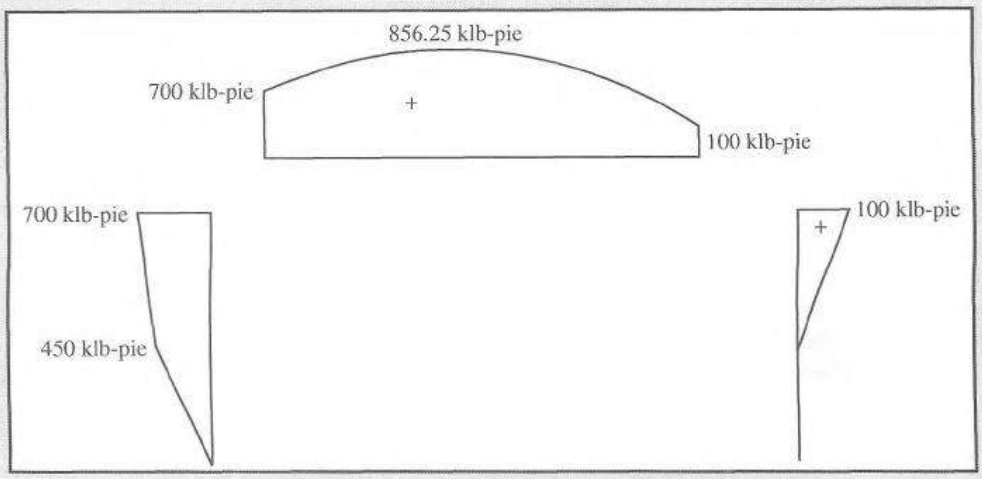
Figura 5.13

Solución. (Suponiendo que los paños interiores de las columnas son los lados inferiores)

Diagramas de fuerza cortante



Diagramas de momento flexionante



5.7 ECUACIONES DE LA FUERZA CORTANTE Y DEL MOMENTO FLEXIONANTE

Una parte importante de la ingeniería estructural es la habilidad para escribir u obtener ecuaciones de la fuerza cortante y momento flexionante en diferentes partes de una estructura. La capacidad *para escribir estas ecuaciones es muy importante para entender mucha de la información analizada* posteriormente en este libro. Por ejemplo, varios de los métodos usados para calcular deflexiones y pendientes en diferentes puntos de las estructuras requieren que tengamos la capacidad de escribir ese tipo de ecuaciones. En esta sección, se preparan expresiones para fuerza cortante y momento para las vigas. Usando el mismo procedimiento, el estudiante verá fácilmente cómo preparar ecuaciones similares para marcos.

En el ejemplo 5.11, se preparan ecuaciones para la fuerza cortante y el momento flexionante para todas las partes de la viga mostrada en la figura 5.14. La posición en la viga se ubica

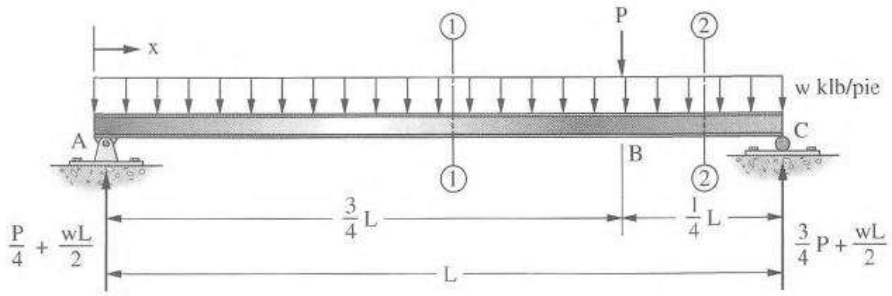


Figura 5.14

mediante la distancia x, que se mide en este ejemplo desde el extremo izquierdo de la viga. En realidad, el origen de x puede moverse como se desee a otros puntos que no sean el extremo izquierdo durante la solución. Las reacciones en los apoyos extremos de la viga ya han sido determinadas.

Para la primera parte de la solución, se ha pasado la sección 1-1 a través de la viga y se ha dibujado un cuerpo libre para la parte de la viga a la izquierda de la sección. Este cuerpo libre se muestra en la figura 5.15.

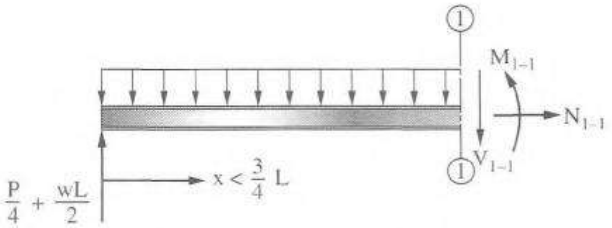


Figura 5.15 Cuerpo libre a la izquierda de la sección 1-1 para la viga de la figura 5.14.

A medida que nos movemos a lo largo de la viga de izquierda a derecha, vemos que las ecuaciones que hemos preparado son buenas hasta que se encuentra una situación de carga diferente. Esto ocurre cuando se llega a la carga concentrada P. Se pasa otra sección 2-2 a través del miembro entre la carga concentrada y el extremo derecho y se preparan ecuaciones para esa región de la viga.

Cada vez que la situación de carga cambia a lo largo de la viga, es necesario escribir nuevas ecuaciones. Así es que será necesario escribir ecuaciones para varias partes de la estructura, pero solamente se requieren dos conjuntos en este ejemplo.

EJEMPLO 5.11

Desarrolle las ecuaciones para la fuerza cortante y el momento flexionante para la viga que se muestra en la figura 5.14. Use el lado izquierdo de la viga como el punto de referencia u origen de x para todas las ecuaciones.

Solución.

Considerando las fuerzas a la izquierda de la sección 1-1 como se muestra en la figura 5.15.

Para $x = 0$ a $\frac{3}{4}$ L (es decir, de A a B).

$$V = +\frac{P}{4} + \frac{wL}{2} - wx$$

$$M = \left(\frac{P}{4} + \frac{wL}{2}\right)(x) - (wx)\left(\frac{x}{2}\right)$$

Considerando las fuerzas a la izquierda de la sección 2-2.
Para $x = \frac{3}{4}L$ a L (o de B a C)

$$V = \frac{P}{4} + \frac{wL}{2} - wx - P$$

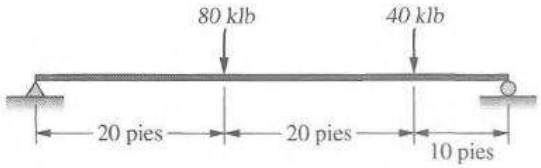
$$M = \left(\frac{P}{4} + \frac{wL}{2}\right)(x) - (wx)\left(\frac{x}{2}\right) - P\left(x - \frac{3}{4}L\right) \quad \blacksquare$$

Otras vigas se tratan exactamente de la misma manera que la viga en este ejemplo. Aislamos un cuerpo libre en cada región después de un cambio de carga, escribimos las ecuaciones de equilibrio para ese cuerpo libre, y despejamos de las ecuaciones de equilibrio la fuerza cortante y el momento flexionante.

5.8 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

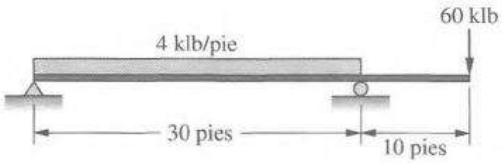
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para las estructuras en los problemas 5.1 al 5.35.

5.1 (*Resp.:* máx V = 64 klb, máx M = 1 120 klb-pie)



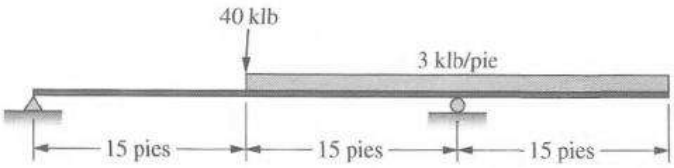
5.2 Repita el problema 5.1 si la carga de 80 klb se cambia a 120 klb.

5.3 (*Resp.:* máx V = 80 klb, máx M = −600 klb-pie)

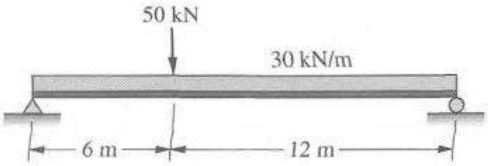


5.4 Repita el problema 5.3 cambiando la carga de 4 klb/pie por otra de 2.5 klb-pie.

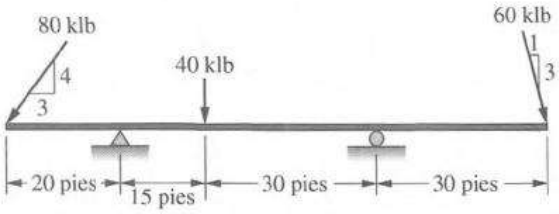
5.5 (*Resp.:* máx V = 65 klb, máx M = −337.5 klb-pie)



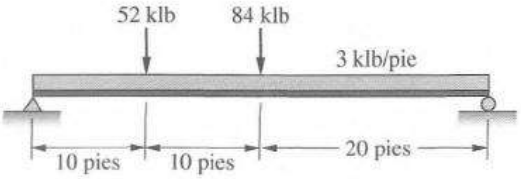
5.6



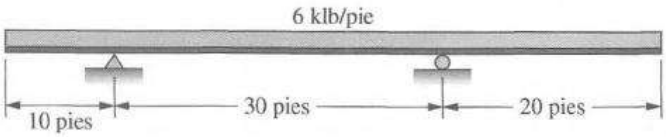
5.7 (*Resp.:* máx V = 64 klb, máx M = −1 706.9 klb-pie)



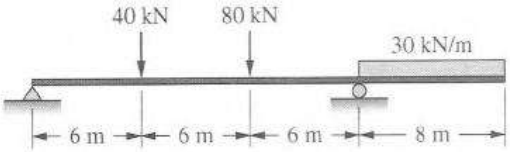
5.8



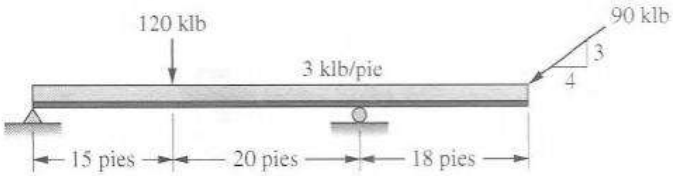
5.9 (*Resp.:* máx V = 120 klb, máx M = −1 200 klb-pie)



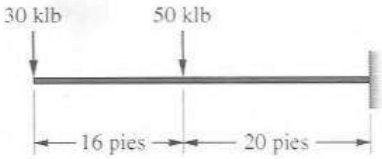
5.10



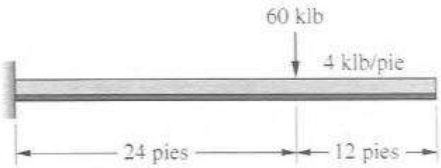
5.11 (*Resp.:* máx V = 145.6 klb-pie, máx M = −1 458.5 klb-pie)



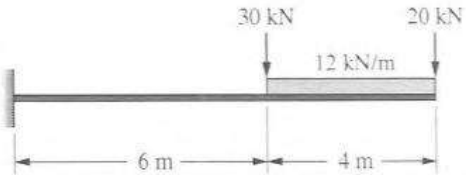
5.12



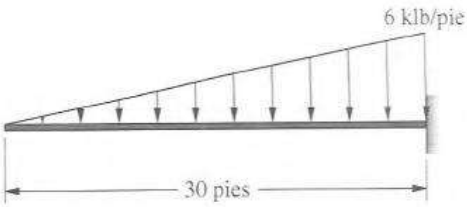
5.13 (*Resp.:* máx V = 204 klb, máx M = −4 032 klb-pie)



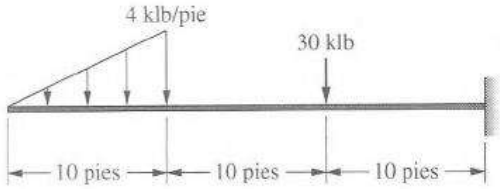
5.14



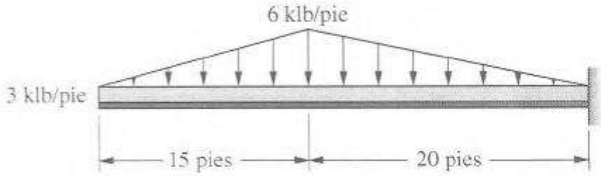
5.15 (*Resp.:* máx V = 90 klb, máx M = −900 klb-pie)



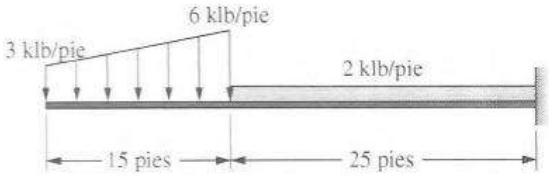
5.16



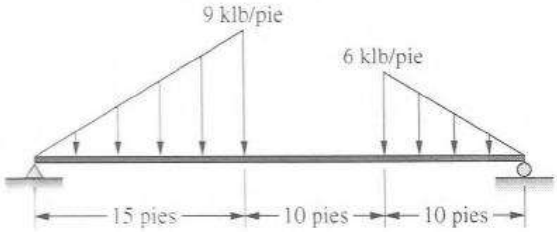
5.17 (*Resp.:* máx V = 210 klb, máx M = −3 762.5 klb-pie)



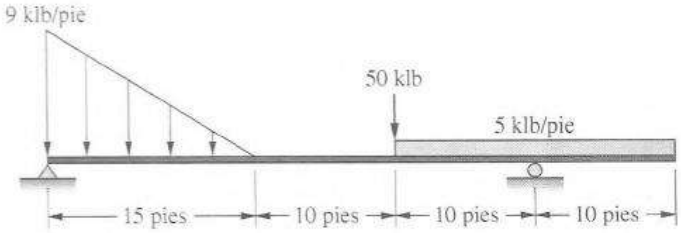
5.18



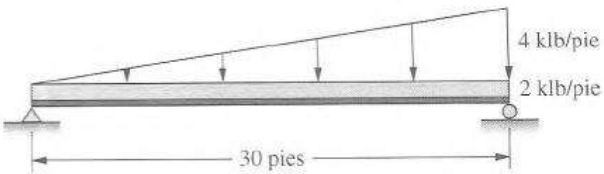
5.19 (*Resp.:* máx V = 53.93 klb, máx M = 482.1 klb-pie)



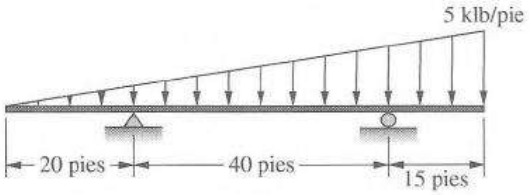
5.20



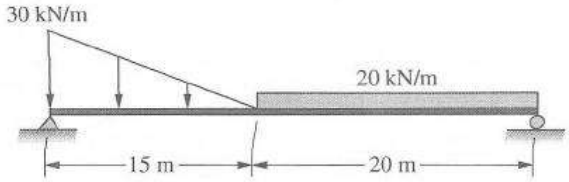
5.21 (*Resp.:* máx V = 70 klb, máx M = 453.1 klb-pie)



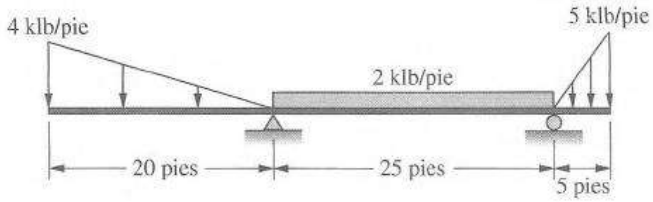
5.22



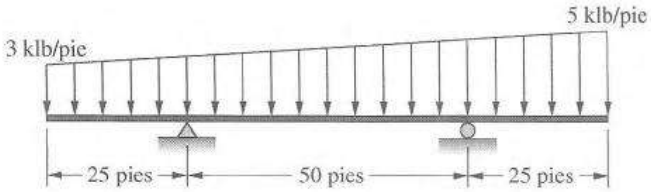
5.23 (*Resp.:* máx V = 317.86 kN, máx M = 2 526 kN·m)



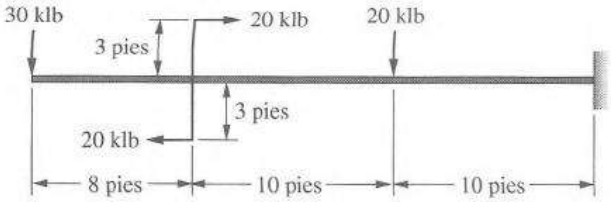
5.24



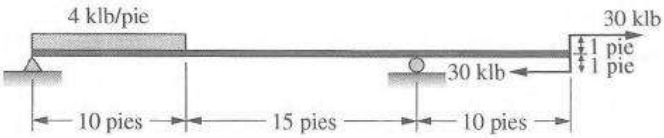
5.25 (*Resp.:* máx V = 118.75 klb, máx M = −1 510.4 klb-pie]



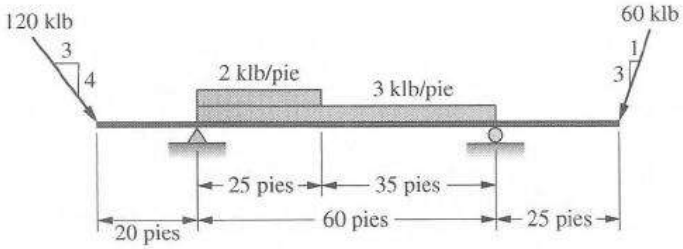
5.26



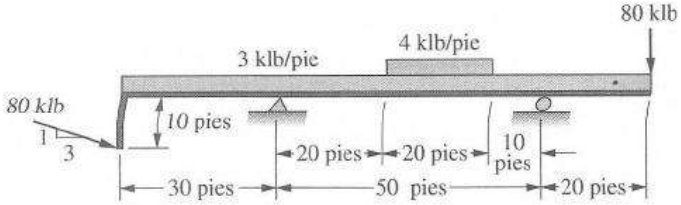
5.27 (*Resp.:* máx V = 29.6 klb, máx M = 109.5 klb-pie)



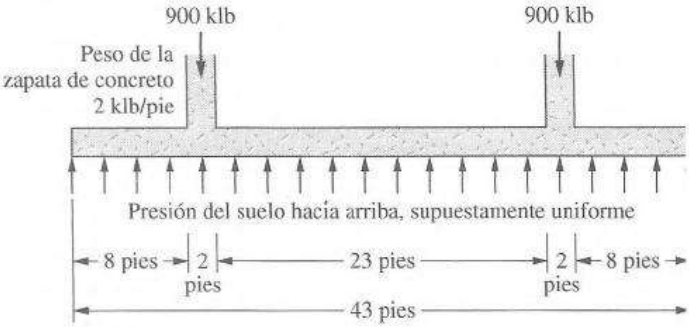
5.28



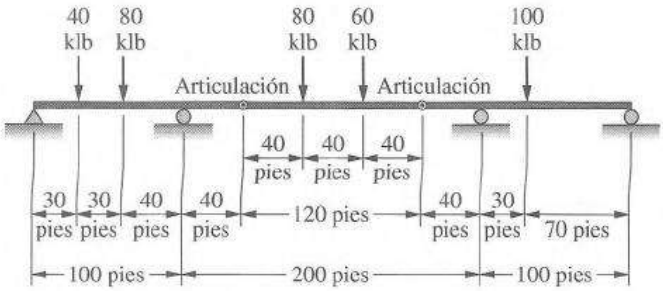
5.29 (*Resp.:* máx V = 140 klb, máx M = −2 867.9 klb-pie)



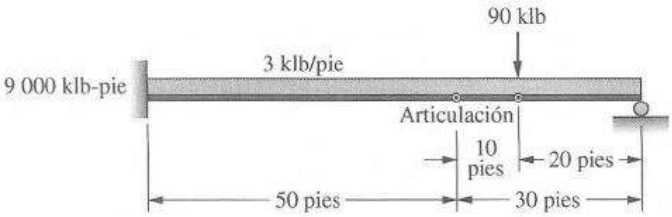
5.30



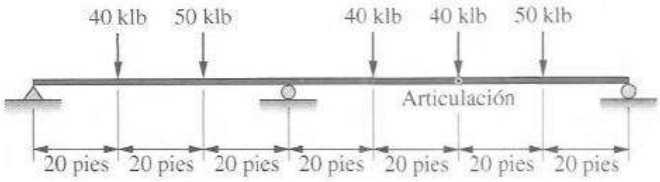
5.31 (*Resp.:* máx V = 96.67 klb, máx M = ±2 933 klb-pie)



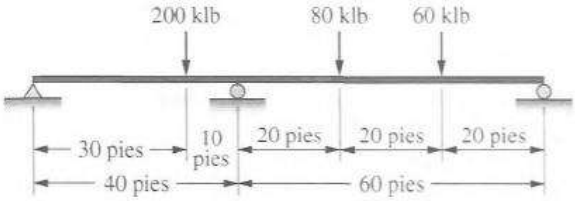
5.32



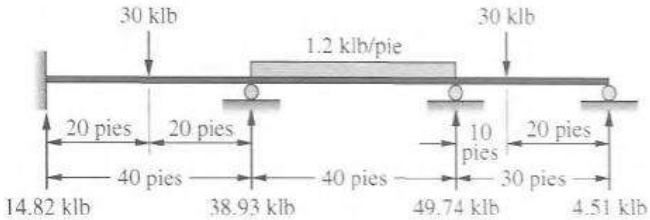
5.33 (*Resp.:* máx V = 105 klb, máx M = −3 400 klb-pie)



5.34 Se da: Momento en el soporte interior = −1 252 klb-pie.

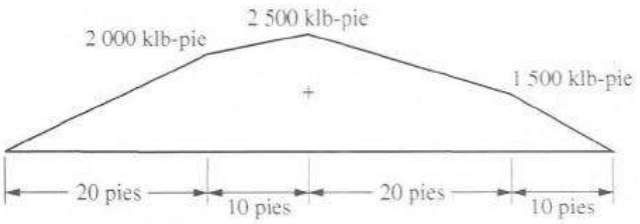


5.35 Se da: Momento en el empotramiento = −147.3 klb-pie; otras reacciones, tal como se muestra en la figura. (*Resp.:* máx V = 25.49 klb, máx M = −164.5 klb-pie) (*Resp.:* máx V = 23.75 klb, máx M = −164.5 klb-pie)

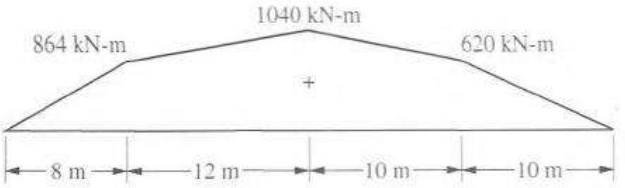


En los problemas 5.36 al 5.38, para los diagramas de momentos y las dimensiones dados, dibuje los diagramas de fuerza cortante y de carga. Suponga que las fuerzas hacia arriba son reacciones.

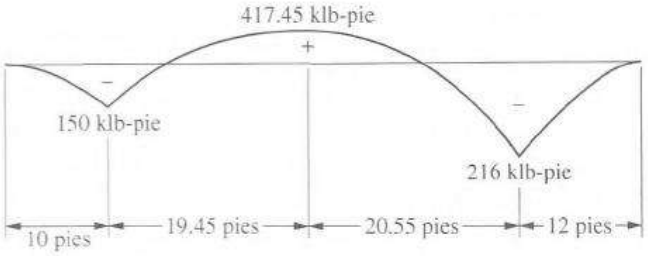
5.36



5.37 (*Resp.:* Reacciones y cargas de izquierda a derecha = 108 klb, 93.33 klb, 56.67 klb, etcétera)

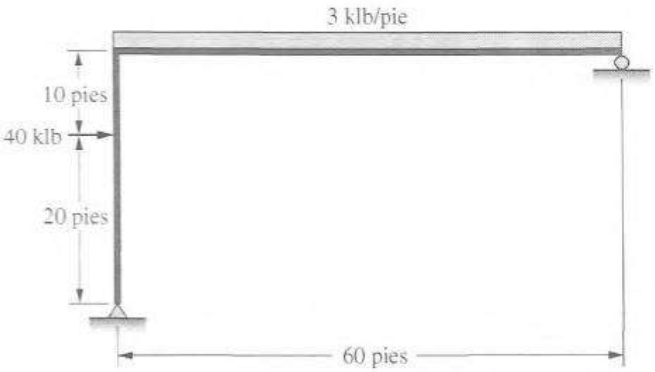


5.38

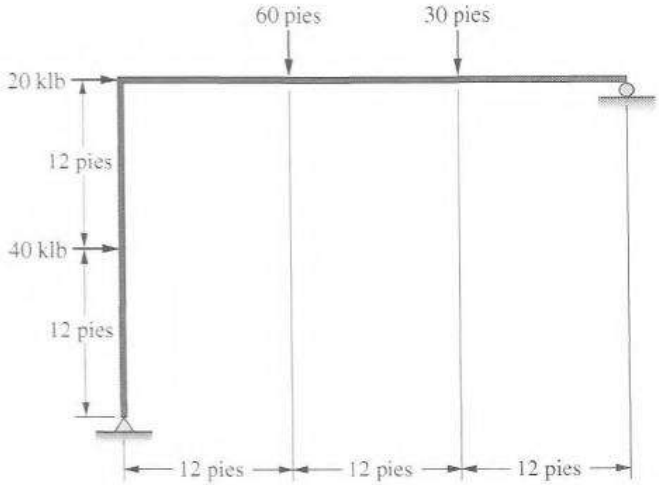


En los problemas 5.39 al 5.47 dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para los marcos.

5.39 (*Resp.:* máx V = 103.33 klb, máx M = 1 779.8 klb-pie)

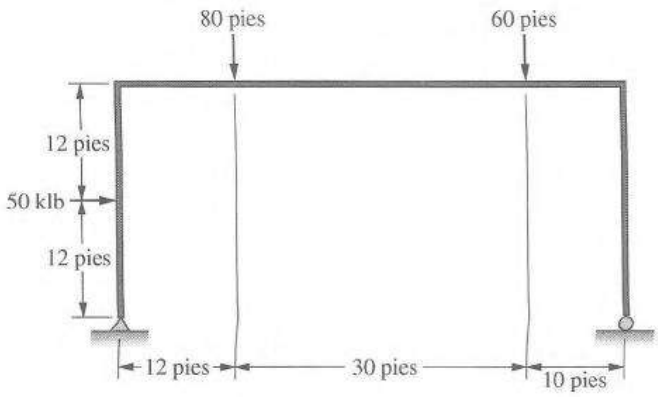


5.40

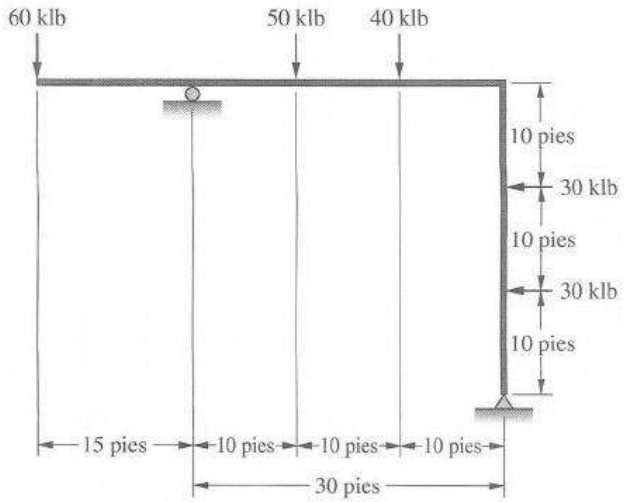


5.41 Repita el problema 5.40 intercambiando el rodillo y la articulación. (*Resp.:* máx V = 63.33 klb, máx M = 480 klb-pie)

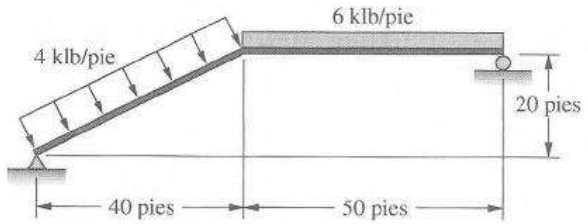
5.42



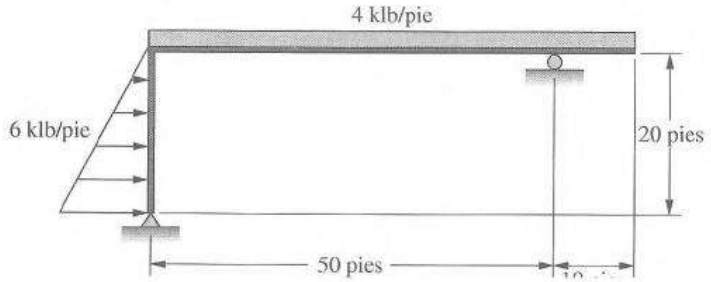
5.43 (*Resp.:* máx V = 106.67 klb, máx M = ±900 klb-pie)



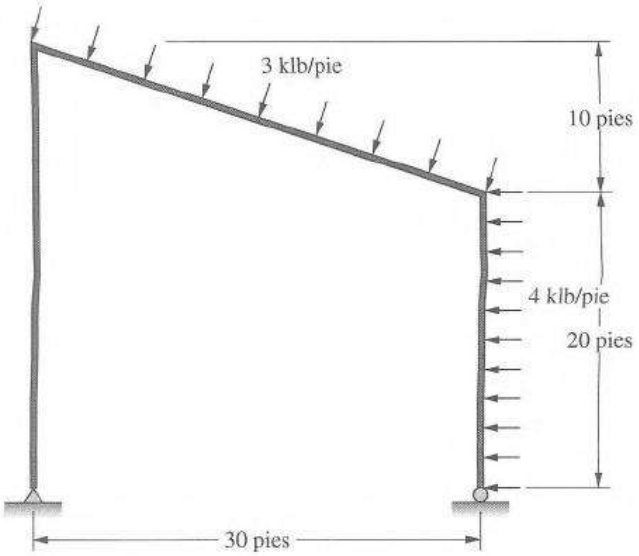
5.44



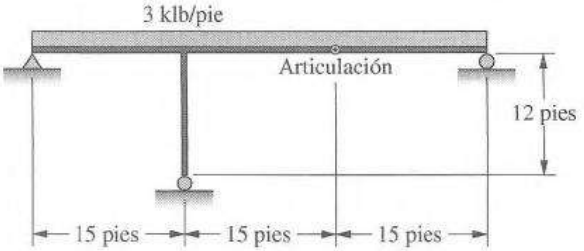
5.45 (*Resp.:* máx V = 112 klb, máx M = 1 768 klb-pie)



5.46



5.47 (*Resp.:* máx V = 67.5 klb-pie, máx M = −675 klb-pie)



Para los problemas 5.48 al 5.52 escriba ecuaciones para fuerza cortante y momento flexionante para las estructuras mostradas.

5.48 Problema 5.1.

5.49 Problema 5.8 (*Resp.:* Para x = 0 a 10 pies @ extremo izquierdo de la viga: $V = -3x + 141$, $M = -1.5x^2 + 141x$)

5.50 Problema 5.12.

5.51 Problema 5.16 (*Resp.:* Para x = 0 a 10 pies @ extremo izquierdo: $V = -0.2x^2$, $M = -0.0667x^3$)

5.52 Problema 5.39.

Capítulo 6

Introducción al estudio de las armaduras planas

6.1 INTRODUCCIÓN

Se cree que fue el arquitecto italiano Andrea Palladio (1508-1580) quien usó primero las armaduras modernas, aunque no se conoce la base de sus diseños. Es probable que haya revivido antiguos diseños romanos y probablemente dimensionó las componentes de las armaduras por medio de reglas empíricas (tal vez de origen romano). Sus extensas notas sobre arquitectura incluyen descripciones detalladas y dibujos de armaduras de madera bastante similares a las que se usan hoy día. Después de su época, las armaduras se olvidaron por 200 años, hasta que fueron reintroducidas por el diseñador suizo Ulric Grubermann.

Una armadura es una estructura formada por un grupo de elementos estructurales dispuestos en forma de uno o más triángulos. Como se supone que los elementos están conectados entre sí por medio de pasadores sin fricción, el triángulo es la única forma estable. Si analizamos la armadura de la figura 6.1(a), veremos que es imposible que el triángulo cambie de forma bajo cargas (excepto por la deformación de las barras) a menos que uno o más lados se flexionen o se quiebren. Las configuraciones de cuatro o más lados no son estables y pueden fallar bajo carga, como se muestra en las figuras 6.1(b) y 6.1(c). Estas estructuras pueden deformarse sin cambiar la longitud de ninguno de sus elementos. Sin embargo, se mostrará que hay muchas estructuras estables que contienen una o más figuras que no son triángulos. Un estudio cuidadoso mostrará que las armaduras constan de grupos separados de triángulos que están conectados entre sí de acuerdo con ciertas reglas, formando entonces figuras no triangulares, pero estables entre ellas.

Los ingenieros de diseño tienen a menudo que seleccionar entre una armadura o una viga para salvar un claro dado. Si no están presentes otros factores, la decisión probablemente se basará en consideraciones de economía. Casi siempre se usará la cantidad más pequeña de material si se usa una armadura para salvar un cierto claro; sin embargo, el costo de fabricación y montaje de las armaduras será apreciablemente mayor que el requerido para vigas. Para claros más cortos, el costo total de las vigas (costo del material más costo de fabricación y montaje) será definitivamente

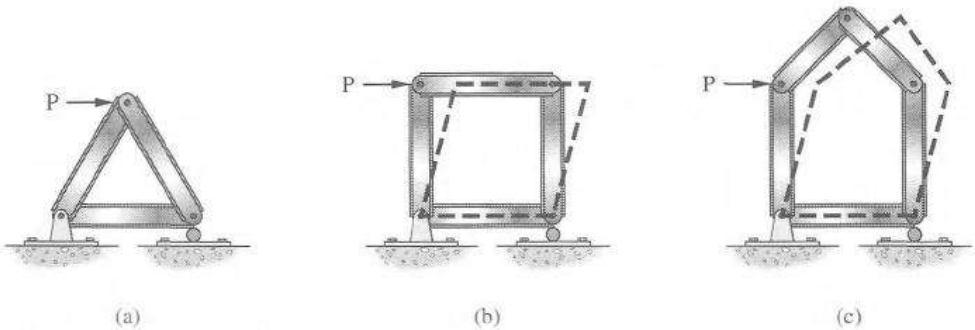


Figura 6.1 Una armadura estable contra figuras inestables.

menor, pero conforme aumentan los claros, los costos mayores de fabricación y montaje de las armaduras, serán más que compensados por la reducción del peso total del material usado. Una ventaja adicional de una armadura es que para la misma cantidad de material, ésta puede tener mayor rigidez que una viga con el mismo claro.

Es imposible dar un límite inferior para el claro económico de las armaduras; éstas pueden usarse para claros que varían entre 30 y 40 pies, y tan grandes como 300 a 400 pies. Las vigas pueden resultar económicas para algunos claros mucho mayores que el límite inferior mencionado para las armaduras.

6.2 HIPÓTESIS PARA EL ANÁLISIS DE ARMADURAS

Para simplificar el análisis de las armaduras se formulan las siguientes hipótesis:

1. *Los elementos de las armaduras están conectados por medio de pasadores sin fricción.* En realidad, las conexiones con pasadores se usan en muy pocas de las estructuras que se fabrican en la actualidad, y no existen pasadores sin fricción. Una conexión vigorosamente atornillada o soldada dista mucho de ser un pasador sin fricción.
2. *Los elementos de la estructura son rectos.* Si no lo fuesen, las fuerzas axiales ocasionarían en ellos momentos flexionantes.
3. *El desplazamiento de la armadura es pequeño.* Las cargas aplicadas ocasionan que las barras cambien de longitud, lo que causa que la armadura se deforme. Las deformaciones de una armadura no son de suficiente magnitud para ocasionar cambios apreciables en la forma y en las dimensiones generales de la armadura. Debe prestarse atención especial a las armaduras muy largas y flexibles.
4. *Las cargas se aplican sólo en los nudos.* Los elementos están dispuestos de manera que las cargas y las reacciones se aplican sólo en los nudos de las armaduras.

La observación de las armaduras de techos y de puentes mostrará que esta última afirmación se cumple las más de las veces. En edificios con armaduras en el techo, las vigas, las columnas y los elementos de arriostramiento se conectan directamente a los nudos de la armadura. Las cargas del techo se transmiten a las armaduras por medio de vigas horizontales, llamadas *largueros*, que salvan los claros entre armaduras. Al techo lo soportan directamente los largueros; también puede estar soportado por cabrios o largueros secundarios, que corren paralelos a las armaduras y se apoyan en los largueros principales. Los largueros se colocan sobre los nudos de la armadura, a menos que la longitud de los tableros de la cuerda superior resulte demasiado larga; en tales casos, a veces resulta económico colocar largueros entre los nudos, aunque entonces la cuerda superior estará sometida también a flexión. Algunos tipos de techos, como las láminas de acero corrugado y las losas de yeso, pueden colocarse directamente sobre los largueros. En este caso, los largueros deben espaciarse con respecto a puntos intermedios a lo largo de la cuerda superior de manera que proporcionen un claro modulado, acorde con el tipo de techo que soportarán. En forma similar, las cargas soportadas por un puente carretero se transmiten a los nudos de las armaduras por medio de vigas y trabes de piso situadas bajo la superficie de rodamiento.

El efecto de las hipótesis anteriores es producir una armadura ideal, cuyos elementos trabajen sólo a fuerzas axiales. Como se ilustra en la figura 6.2(a) y (b), una barra con sólo fuerza axial está sujeta a tensión o a compresión axial; no está presente el momento flexionante como se mues-

(a) Tensión axial (b) Compresión axial (c) Flexión

Figura 6.2 Fuerzas que actúan en una barra.

tra en la figura 6.2(c). Sin embargo, téngase presente que aun en el caso de que todas las hipótesis sobre armaduras se cumplieran exactamente, se tendría algo de flexión en una barra debido a su propio peso. El peso de la barra se distribuye a lo largo de su longitud en vez de concentrarse en sus extremos. Comparadas con las fuerzas causadas por las cargas aplicadas, las fuerzas causadas por el peso propio son pequeñas y generalmente pueden despreciarse al calcular las fuerzas en las componentes.

Las fuerzas componentes que se obtienen con el uso de algunas o de todas estas hipótesis simplificadoras son muy satisfactorias en la mayoría de los casos, y se denominan *fuerzas primarias*. Las fuerzas causadas por condiciones no consideradas en el análisis de fuerzas primarias se denominan *fuerzas secundarias*.

Armadura para banda transportadora de una cantera en Virginia Occidental de la Pennsylvania Glass Sand Corporation. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

6.3 NOTACIÓN PARA LAS ARMADURAS

Un sistema conveniente para designar a los elementos de una armadura es el que se muestra en la figura 6.3. Se numeran los nudos de izquierda a derecha. A los inferiores se les asigna la letra L (*Lower:* inferior). A los nudos superiores se les asigna la letra U (*Upper:* superior). Si existieran nudos intermedios entre los superiores y los inferiores, como sucede en cierto tipo de estructuras más complicadas, se les asignaría la letra M (*Middle:* intermedio).

Los diferentes elementos o barras de una armadura reciben los siguientes nombres, como se muestra en la figura 6.3.

1. *Cuerdas* son las barras que forman el perímetro de la armadura; por ejemplo, las barras U_1U_2 y L_4L_5.
2. *Verticales* son las barras que por su orientación dentro de la armadura reciben este nombre; por ejemplo, las barras U_1L_1 y U_3L_3.
3. *Diagonales* son las barras que por su orientación dentro de la armadura reciben este nombre; por ejemplo, las barras U_1L_2 y L_4U_5.
4. *Postes extremos* son las barras en los extremos de la armadura; por ejemplo, las barras L_0U_1 y U_5L_6.
5. *Elementos de alma* o *celosía* comprenden las barras verticales y las diagonales de una armadura. Algunos ingenieros incluyen entre éstas a los postes extremos.

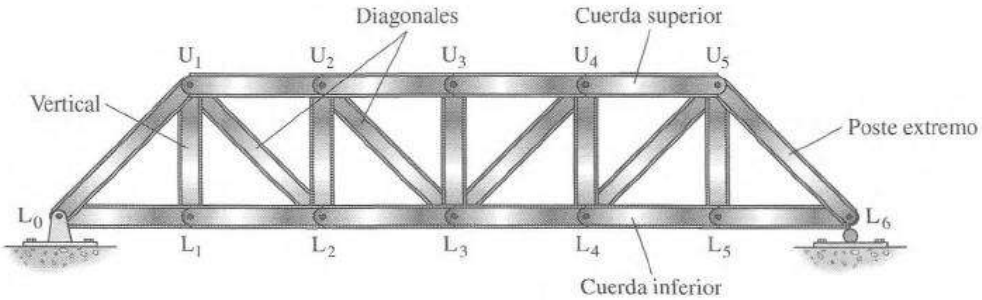


Figura 6.3 Notación común para los nudos de una armadura.

Existen otros sistemas de notación que se usan frecuentemente para armaduras. Por ejemplo, en los programas para computadora es conveniente asignarle un número a cada nudo, y a cada barra de una armadura. Este sistema se expone en la sección 6.11 de este capítulo.

6.4 ARMADURAS PARA TECHOS

El propósito de las armaduras para techos es darle soporte a éstos que nos protegen de los elementos (lluvia, nieve, viento), de las cargas conectadas en el subsuelo (ductos, tuberías, plafón), y de su propio peso.

Las armaduras para techos pueden ser de lomo plano o de lomo en punta. En el pasado, las armaduras de lomo en punta se usaron más en edificios de claros cortos, en tanto que las armaduras de lomo plano se utilizaron para los de claros mayores. Sin embargo, la tendencia actual para claros cortos y largos parece alejarse de las armaduras de lomo en punta y acercarse a las armaduras de lomo plano. El cambio se debe predominantemente a la apariencia deseada del edificio, y tal vez a una construcción más económica de las armaduras para techo. La figura 6.4 ilustra varios tipos de armaduras para techo que se han usado en el pasado.

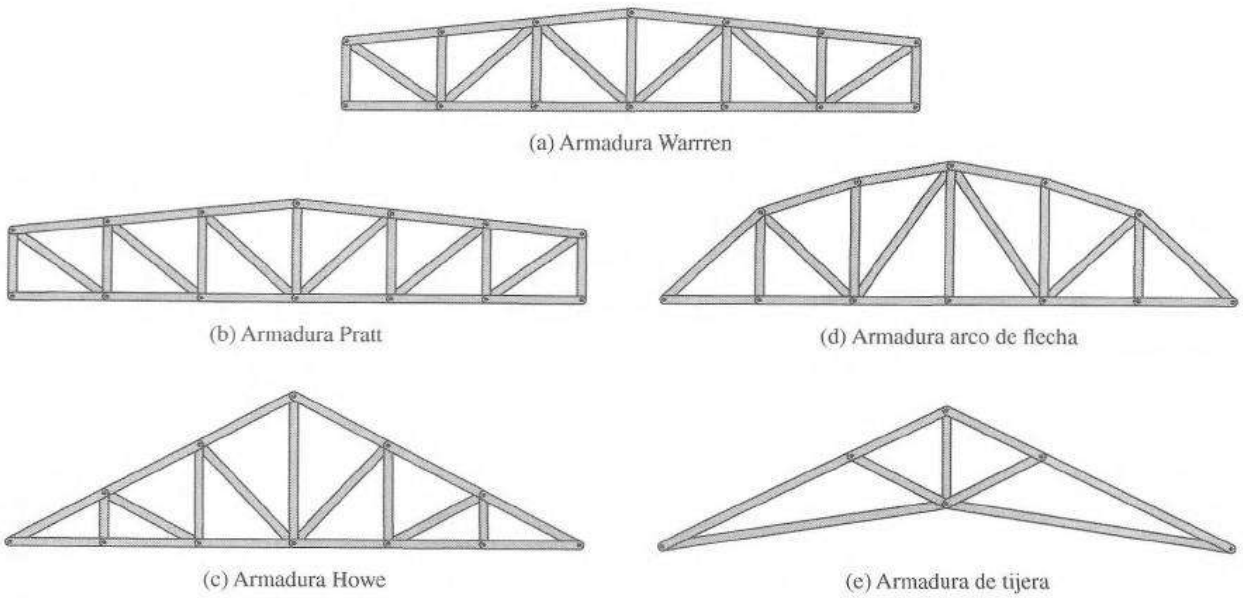
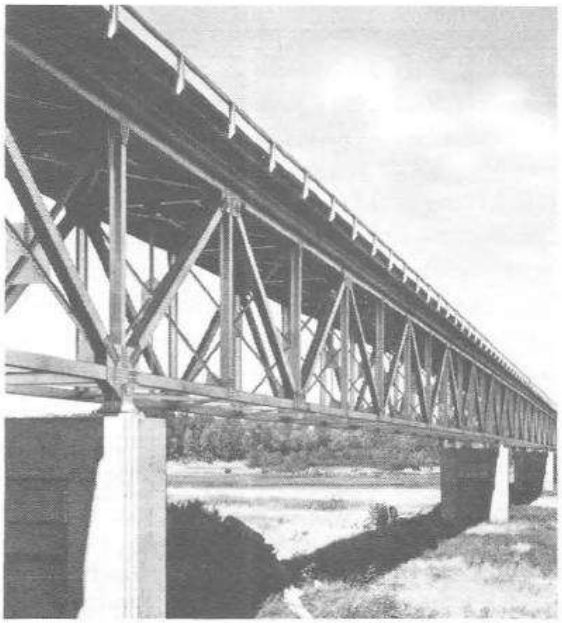


Figura 6.4 Varias armaduras típicas para techos.

6.5 ARMADURAS PARA PUENTES

A medida que los claros por cubrir y las cargas que se habrán de soportar van siendo mayores, las armaduras comienzan a competir económicamente con las vigas. Las primeras armaduras para puentes se construyeron de madera, pero tenían varias desventajas. Primero, estaban sujetas al deterioro por el viento y el agua. Como consecuencia, se introdujeron los puentes cubiertos, cuyas estructuras duraban con frecuencia algunas décadas. Sin embargo, las armaduras para puentes de madera, especialmente en los puentes para ferrocarril, eran muy vulnerables al fuego. Además, el movimiento de las cargas de tránsito de ida y vuelta a través de los claros de puente podría causar un aflojamiento gradual de los pernos de unión.



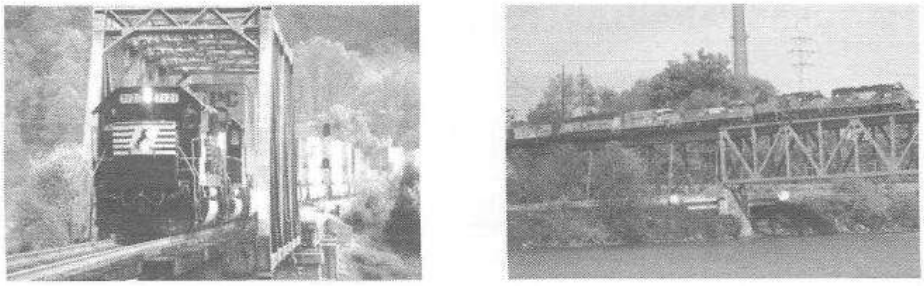
Puente Willard sobre el río Kansas, al norte de Willard, Kansas. (Cortesía del American Institute of Steel Construction, Inc.)

Como resultado de todas esas desventajas, las armaduras de madera para puentes dejaron de usarse hacia fines del siglo XIX. Aunque existieron algunos puentes de armadura de hierro precursores, los puentes de acero estructural se hicieron predominantes. Los puentes de acero no necesitan tanta protección contra los elementos, y sus nudos tienen resistencias más altas a la fatiga.

Actualmente, las armaduras existentes de acero para puentes están siendo reemplazadas por puentes de vigas de acero, de concreto precolado o de concreto preesforzado. Parece ser que ha pasado la edad de las armaduras de acero para puentes, excepto cuando se trata de claros de cientos de pies, lo que constituye un pequeño porcentaje del total. Aun para esos claros más largos, hay mucha competencia de otros tipos de estructuras como los puentes atirantados y los puentes de trabes en caja de concreto preesforzado.

Algunos puentes carreteros tienen armaduras a los lados y arriostramiento lateral por arriba entre las armaduras. A este tipo de puente se le llama de *calzada inferior*. El sistema de piso está soportado por vigas de piso que van a lo largo bajo la calzada y se apoyan en vigas entre los nudos de las cuerdas inferiores de las armaduras. En la figura 6.5(a) se muestra un puente de ferrocarril de paso inferior.

En los puentes de *calzada superior*, la vía de tránsito se coloca sobre las armaduras o sobre trabes. Los puentes de calzada superior tienen muchas ventajas sobre los puentes de calzada in-



(a) (b)

Figura 6.5 Puente de calzada inferior (a) y puente de calzada superior (b).

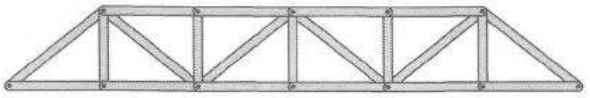
ferior: se tiene espacio libre superior horizontal y vertical ilimitado, la expansión a futuro es más factible, y las armaduras o trabes de apoyo pueden colocarse más juntas, lo que reduce los momentos laterales en el sistema de piso. Otras ventajas de este tipo de puente son los sistemas simplificados de piso y la posible reducción en las dimensiones de las pilas y los estribos de apoyo, todo lo cual se debe a la disminución en sus alturas. Por último, el mejor aspecto que ofrece este tipo de estructuras es otra de las razones de su creciente popularidad. La única desventaja real de un puente de paso superior es la altura libre bajo el puente. Puede ser necesario situar a gran altura al puente de calzada superior para permitir un claro libre adecuado para los barcos y los vehículos que pasan por debajo. En la figura 6.5(b) se muestra un puente de calzada superior para ferrocarril. Los puentes de calzada superior eliminan la sensación de confinamiento exhibida por otros tipos de puentes.

En algunas ocasiones, las armaduras para los puentes de calzada inferior de claro corto eran tan bajas que no se disponía de una altura suficiente para proporcionar arriostramiento por la parte superior y, al mismo tiempo, dejar una altura libre vertical arriba de la superficie de rodamiento suficiente para el tránsito vehicular. Por ello, el arriostramiento se colocaba bajo la superficie de rodamiento. Los puentes de calzada inferior sin arriostramiento en la parte superior se denominan puentes *tipo pony* o *puentes rebajados*. Un problema importante que se presenta en los puentes tipo pony es la dificultad de proporcionar un arriostramiento lateral adecuado para los elementos a compresión de la cuerda superior. Es poco probable que hoy día resulte económico un puente tipo pony, porque las vigas se han impuesto en el mercado de los puentes de claro corto.

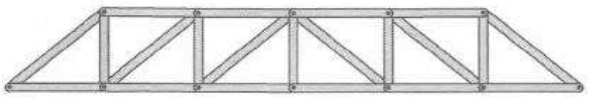
En la figura 6.6 se muestran algunos de los tipos de armaduras para puentes. Las armaduras de cuerdas paralelas se muestran en las partes (a) a la (d) de la figura. Se dice que la armadura tipo Baltimore es una armadura subdividida, ya que las longitudes sin soporte lateral de algunos de sus elementos se han reducido en virtud de la introducción de elementos cortos llamados subdiagonales y subverticales. Cuanto mayor peralte tenga una armadura, con iguales dimensiones de sus cuerdas, tanto mayores serán sus momentos de resistencia. Si se varía el peralte de la armadura a lo largo del claro en proporción a los momentos flexionantes, se obtendrá una estructura más ligera. Sin embargo, el costo de fabricación por libra de acero será mayor que el de una armadura de cuerdas paralelas. A medida que los claros van siendo mayores, el peso que se ahorra al variar el peralte importará más que los costos adicionales de fabricación, y entonces las "armaduras de cuerdas curvas" serán las que resulten más económicas. La armadura Parker mostrada en la figura 6.6(e) es un ejemplo.

6.6 DISPOSICIÓN DE LOS ELEMENTOS DE UNA ARMADURA

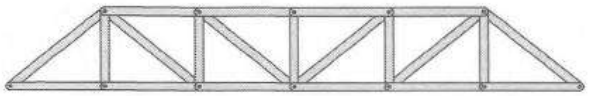
Hemos visto que el triángulo es la forma geométrica básica a partir de la cual se construyen las armaduras, debido a que es la única forma estable. Para el siguiente análisis, recuerde que las barras de las armaduras se suponen conectadas en sus nudos por medio de pasadores sin fricción.



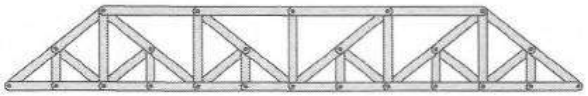
(a) Armadura Warren



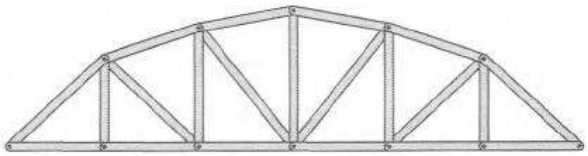
(b) Armadura Howe



(c) Armadura Pratt



(d) Armadura Baltimore



(e) Armadura Parker

Figura 6.6 Algunas armaduras típicas para puentes.

Otras formas, como las que se muestran en las figuras 6.7(a) y (b), obviamente son inestables y pueden fallar bajo carga. Sin embargo, estructuras como ésas pueden volverse estables por medio de alguno de los siguientes procedimientos:

- Añadiendo elementos, de manera que las formas inestables queden subdivididas en triángulos. Las estructuras de las figuras 6.7(a) y (b) se muestran estabilizadas de esta manera en las figuras 6.7(c) y (d), respectivamente.
- Usando un elemento para unir la estructura inestable a un apoyo estable. El elemento AB cumple esta función en la figura 6.7(e).
- Haciendo rígidos uno o todos los nudos de una estructura inestable, de manera que puedan resistir momentos. Sin embargo, una estructura con nudos resistentes a momento no satisface la definición de una armadura, ya que los elementos no están conectados ahora por pasadores sin fricción.

6.7 DETERMINACIÓN ESTÁTICA DE LAS ARMADURAS

En la figura 6.8(a) se muestra la armadura más sencilla posible, es decir, un simple triángulo. Para determinar las fuerzas desconocidas y los componentes de reacción en esta armadura, es posible

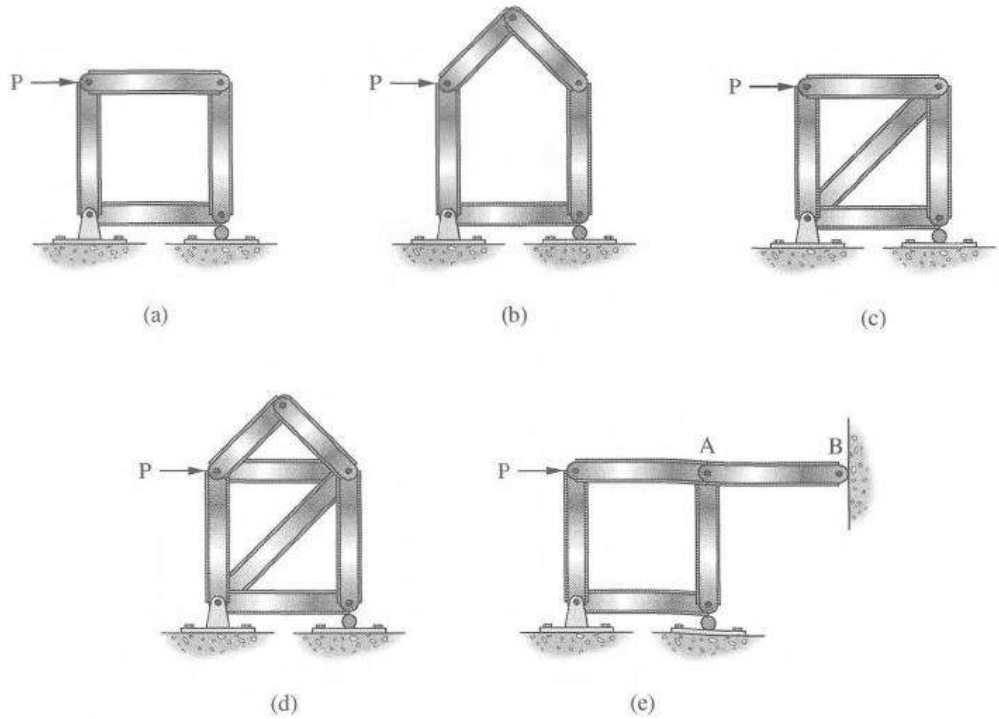


Figura 6.7 Arreglos estable e inestable de barras de armaduras.

aislar los nudos y escribir dos ecuaciones de equilibrio para cada uno de ellos. Estas ecuaciones de equilibrio, que implican la suma de fuerzas verticales y horizontales, son:

$$\sum F_H = 0$$
$$\sum F_V = 0$$

La armadura de un solo triángulo puede ampliarse a una armadura de dos triángulos añadiendo dos nuevos elementos y un nuevo nudo. En la figura 6.8(b), las barras AD y BD unidas en el nuevo nudo D forman el nuevo triángulo ABD. En (c) se forma un nuevo triángulo con la adición de las barras BE y DE unidas en el nudo E. Para cada uno de los nuevos nudos D y E se dispone de un nuevo par de ecuaciones de equilibrio para calcular las fuerzas en los dos elementos adicionales. En tanto se siga este procedimiento para expandir la armadura, ésta será estáticamente determinada internamente. Si se adicionan nuevas barras sin añadir nuevos nudos, como en la barra CE en la figura 6.8(d), la armadura entonces se convertirá en estáticamente indeterminada porque no se dispone de nuevas ecuaciones de equilibrio para calcular las fuerzas en las nuevas barras.

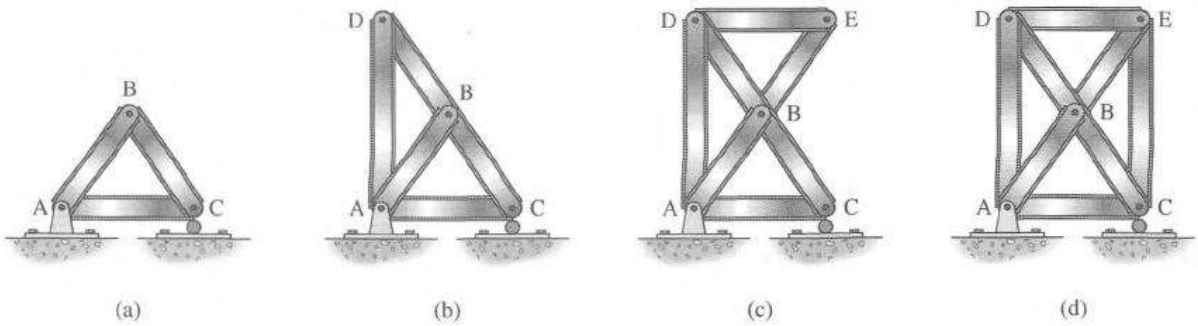
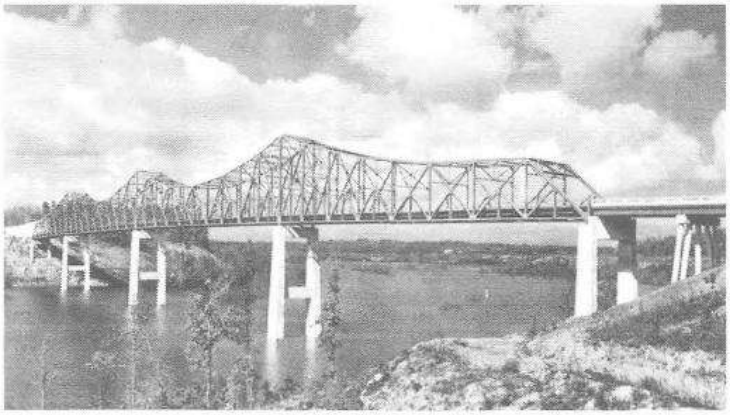


Figura 6.8 Ampliación de una armadura simple.



Puente de Brown en los condados Forsyth y Hall, Gainesville, Georgia. (Cortesía del American Institute of Steel Construction, Inc.)

Con el uso de esta información, es posible escribir una expresión para la relación que debe existir entre el número de nudos, de barras y de componentes de reacción para que una armadura en particular sea estáticamente determinada internamente. La identificación de estructuras determinadas externamente se analizó con anterioridad en el capítulo 4. En el análisis que sigue, m es el número de barras, j es el número de nudos y r es el número de componentes de reacción.

Si el número de ecuaciones disponibles de equilibrio estático, que es 2j, es suficiente para calcular las fuerzas desconocidas, entonces la estructura es estáticamente determinada. Por lo tanto, puede escribirse la siguiente relación:

$$2j = m + r$$

Esta ecuación se escribe más a menudo como:

$$m = 2j - r$$

Antes de tratar de aplicar esa ecuación, es necesario tener una estructura exteriormente estable, pues de lo contrario los resultados carecerán de sentido. Por lo tanto, r es el número mínimo de componentes de reacción necesarias para tener estabilidad externa. Si la estructura tuviese más componentes de reacción externas que las indispensables para lograr la estabilidad y ser, de esa manera, estáticamente indeterminada externamente, el valor de r seguirá siendo el del mínimo número de componentes de reacción necesarias para darle estabilidad externa. Esto significa que r será igual a 3, por las ecuaciones usuales del equilibrio estático, más el número total de cualesquiera ecuaciones adicionales de condición que pudiera haber.

Es posible construir armaduras que tengan más barras de las que puedan ser analizadas usando las ecuaciones del equilibrio estático. Estas armaduras son estáticamente indeterminadas internamente, y m excederá a $2j - r$ porque habrá más barras que las absolutamente necesarias para que haya estabilidad. Las barras adicionales se llaman *miembros redundantes*. Si m es mayor en 3 unidades que $2j - r$, habrá tres miembros redundantes y la armadura será estáticamente indeterminada internamente de tercer grado. Si m es menor que $2j - r$, no se tienen suficientes miembros para garantizar la estabilidad.

Normalmente se puede determinar por inspección si una armadura es estáticamente indeterminada. Las armaduras que tengan miembros o barras que se crucen o que sirvan de lados para más de dos triángulos probablemente serán estáticamente indeterminadas. Sin embargo, en caso de duda sobre la estaticidad de una armadura, deberá recurrirse a la expresión $2j - r$, pues no es raro cometer equivocaciones en este sentido. La figura 6.9 muestra la aplicación de estos conceptos a unas cuantas armaduras comunes. Los círculos pequeños en las armaduras indican los nudos.

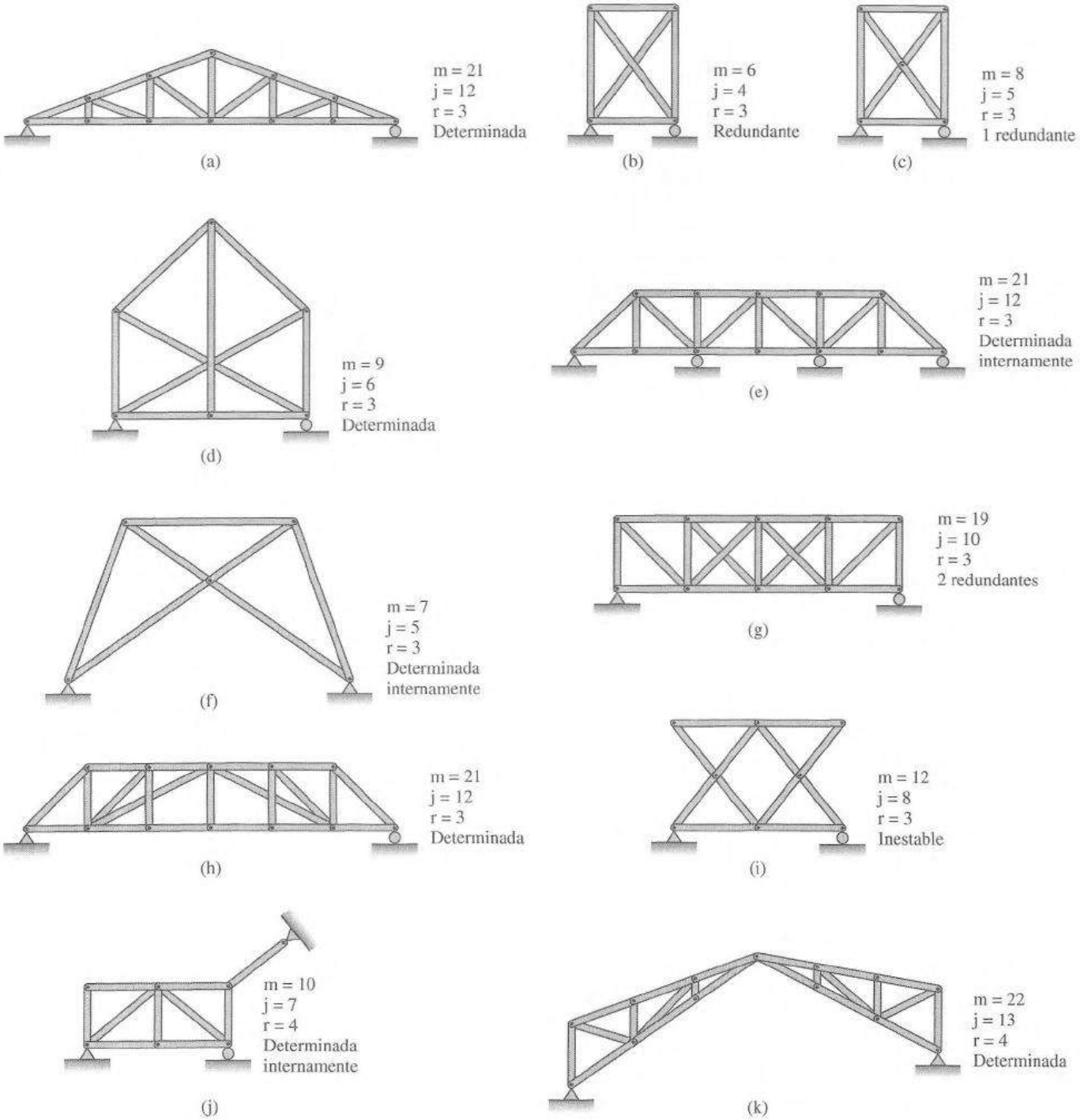


Figura 6.9

Es necesaria poca explicación para la mayoría de las estructuras mostradas, pero ciertos comentarios pueden ser útiles para algunas de ellas. La armadura de la figura 6.9(e) tiene cinco componentes de reacción y es estáticamente indeterminada externamente en segundo grado; sin embargo, dos de las componentes de reacción podrían eliminarse y dejar una estructura con

suficientes reacciones para la estabilidad. El número mínimo de componentes de reacción requeridos para la estabilidad es 3, m vale 21 y j = 12. Aplicando la ecuación obtenemos

$$m = 2j - r$$
$$21 = (2)(12) - 3$$
$$21 = 21 \qquad \therefore \text{ Es estáticamente determinada internamente.}$$

La armadura de la figura 6.9(j) es externamente indeterminada porque hay cinco componentes de reacción y sólo cuatro ecuaciones disponibles. Con r = 4 se muestra que la estructura es estáticamente determinada internamente. El arco de tres articulaciones de la figura 6.9(k) tiene cuatro componentes de reacción, que es el número mínimo de componentes de reacción necesarias por estabilidad; por lo que r = 4. La aplicación de la ecuación muestra que el arco es estáticamente determinado internamente.

En el capítulo 15, en el que se analizan las estructuras estáticamente indeterminadas, se verá que los valores de las redundantes pueden obtenerse resolviendo ciertas ecuaciones simultáneas. El número de ecuaciones simultáneas es igual al número total de redundantes, sean éstas externas, internas o de ambos tipos. Por lo tanto, tal vez parezca absurdo distinguir entre determinación interna y externa. La distinción es particularmente cuestionable para algunos tipos de armaduras con redundantes externas e internas, en las que no es posible encontrar las reacciones independientemente de las fuerzas que actúan en las barras, y viceversa.

Sin embargo, si una armadura es determinada externamente e indeterminada internamente, sus reacciones pueden obtenerse usando las ecuaciones del equilibrio estático. Si la armadura es indeterminada externamente y determinada internamente, las reacciones dependen de las fuerzas en las barras internas y no pueden determinarse independientemente de esas fuerzas. Si la armadura es indeterminada externa e internamente, las fuerzas en las barras y en las reacciones se encuentran de manera simultánea. En cualquiera de estos casos es posible obtener algunas de las fuerzas por estática sin tener que recurrir a los procedimientos del análisis indeterminado que es necesario para efectuar un análisis completo. Este tema se analizará con todo detalle en capítulos posteriores.

6.8 MÉTODOS DE ANÁLISIS Y CONVENCIONES

Una herramienta indispensable y esencial en el análisis de armaduras es la división de la estructura en partes, la construcción de un diagrama de cuerpo libre para cada parte, y luego a partir de estos diagramas de cuerpo libre, determinar las fuerzas en las componentes. Los diagramas de cuerpo libre pueden ser los nudos en la armadura o una sección entera de la misma. Como ejemplo, considere la armadura que se muestra en la figura 6.10. Cortemos una sección alrededor del nudo U_4. Luego se pasa una sección vertical 1-1 a través del segundo tablero de la armadura y se considera el diagrama de cuerpo libre a su izquierda. Estas secciones se muestran en la figura 6.10(a) y los diagramas de cuerpo libre resultantes se muestran en las partes (b) y (c) de la misma figura. Al trabajar con diagramas de cuerpo libre como el mostrado en la figura 6.10(b), se dice que evaluamos las fuerzas en los miembros usando el método de los nudos. Por otra parte, si evaluamos las fuerzas en los miembros usando diagramas de cuerpo libre como el mostrado en la figura 6.10(c), se dice que usamos el método de las secciones. En este capítulo se considerará el método de los nudos y en el siguiente se analizará el método de las secciones.

La aplicación de las ecuaciones del equilibrio estático a cuerpos libres aislados permite determinar las fuerzas en los elementos cortados. Los cuerpos libres deben seleccionarse cuidadosamente de manera que las secciones no pasen a través de demasiados elementos cuyas fuerzas sean desconocidas. Cuando se usa el método de los nudos, sólo hay dos ecuaciones de equilibrio relevantes para cada cuerpo libre: suma de fuerzas verticales y suma de fuerzas horizontales. Cuando se usa el método de las secciones se tienen tres ecuaciones de equilibrio aplicables para

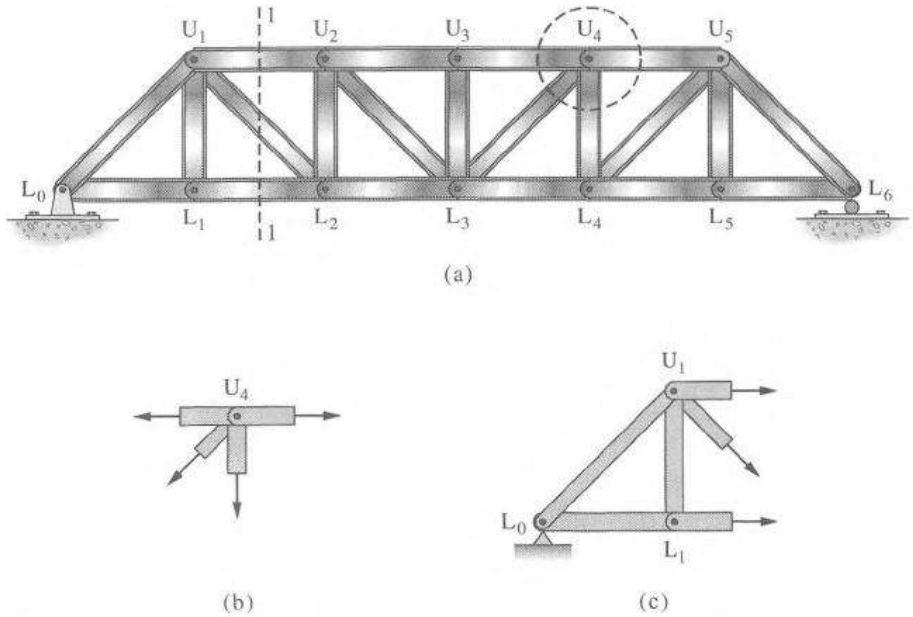


Figura 6.10 Diagramas de cuerpo libre de un nudo y de una sección de armadura.

cada cuerpo libre: suma de fuerzas verticales, suma de fuerzas horizontales y suma de momentos. En cualquier cuerpo libre que se use, no puede haber más fuerzas desconocidas que ecuaciones relevantes de equilibrio estático.

Después de que usted haya analizado unas cuantas armaduras, en la mayoría de los casos tendrá poca dificultad para seleccionar los lugares satisfactorios para las secciones. Se recomienda no tratar de memorizar lugares específicos para las secciones en armaduras específicas, aunque con el paso del tiempo se puede adquirir de manera inconsciente ese hábito. En esta etapa del aprendizaje debe considerarse cada caso uno por uno, sin hacer referencia a otras armaduras similares.

Es aconsejable adoptar una convención de signos al analizar armaduras y usar consistentemente esta convención en todas las armaduras. Al hacerlo así, se eliminan muchos errores inherentes al cambio de convención de signos. El autor ha adoptado la convención de signos de tal manera que todas las fuerzas desconocidas en una armadura son fuerzas de tensión. Además, las fuerzas de tensión y compresión se indican con un signo más o menos (+ y −) respectivamente. Esta convención se usará en todos los problemas de ejemplo.

Las flechas se usan a menudo para representar el carácter de las fuerzas; indican que están haciendo las barras para resistir las fuerzas axiales aplicadas a ellas por el resto de la armadura. Por ejemplo, si una barra específica en una armadura está trabajando a compresión, ésta empuja contra los nudos a los que está conectada. Por el contrario, si una barra está trabajando a tensión, ésta jala sobre los nudos a los que está conectada. Las flechas superpuestas sobre las barras indican la acción de la barra sobre los nudos como se indica en la figura 6.11.

Después de adquirir cierta práctica en el análisis de armaduras, es posible determinar por inspección el carácter de las fuerzas en muchos de los elementos. El lector debe tratar de imaginar si un elemento está trabajando a tensión o a compresión antes de proceder con los cálculos: de esta manera se entenderá mejor el comportamiento de las armaduras sujetas a cargas. Los siguientes párrafos mostrarán que es posible determinar del todo por medios matemáticos tanto el carácter como el valor numérico de las fuerzas.

Este miembro actúa en tensión.
(En los nudos la barra está siendo estirada y tiende a jalar.)

Este miembro actúa en compresión.
(En los nudos la barra está siendo comprimida y tiende a empujar.)

Figura 6.11 Las flechas indican una acción de un miembro sobre sus nudos.

6.9 MÉTODO DE LOS NUDOS

Puede pasarse una sección imaginaria alrededor de un nudo de una armadura, independientemente de su ubicación, aislándolo por completo del resto de la armadura. El nudo se convierte entonces en un cuerpo libre que está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas aplicadas a él. Las ecuaciones de equilibrio aplicables, $\sum F_H = 0$ y $\sum F_V = 0$, pueden aplicarse al nudo para determinar las fuerzas desconocidas en las barras que concurren a él. Es evidente que con esas dos ecuaciones no pueden determinarse más de dos incógnitas en un nudo.

Quien estudia el método de los nudos puede encontrar al principio que es necesario dibujar un cuerpo libre para cada nudo de la armadura que esté analizando. Después de calcular las fuerzas en dos o tres armaduras, sólo le será necesario dibujar los diagramas de unos cuantos nudos, ya que podrá visualizar con facilidad los cuerpos libres implicados. El dibujo de bocetos grandes ayuda a la visualización. El punto más importante que el principiante debe recordar es que se debe resolver nudo por nudo. Las cargas y las fuerzas en los otros nudos no deben considerarse en el nudo en estudio. Su interés debe concentrarse solamente en las fuerzas del nudo en el cual está trabajando. En los ejemplos que siguen se muestra el método de los nudos.

EJEMPLO 6.1

Usando el método de los nudos, encontrar todas las fuerzas en la armadura mostrada en la figura 6.12.

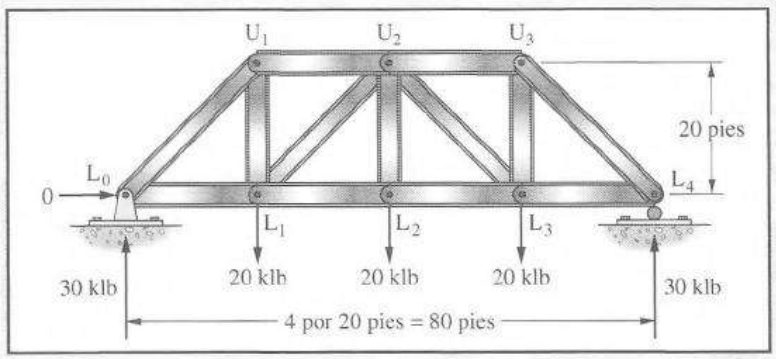
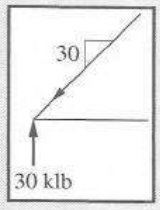


Figura 6.12

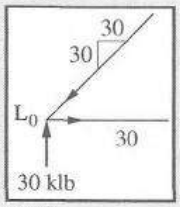
Solución. Al aplicar el método de los nudos, sólo pueden considerarse dos fuerzas incógnitas en las barras, ya que sólo se dispone de dos ecuaciones de equilibrio para cada nudo: suma de fuerzas horizontales y suma de fuerzas verticales. El diagrama de cuerpo libre usado para cada nudo se muestra junto con las ecuaciones de equilibrio. Comenzaremos con el nudo L_0:

$$\sum V = 0$$
$$30 - V_{U_1L_1} = 0$$
$$V_{L_0U_1} = 30 \text{ klb compresión}$$



Un examen del nudo muestra una reacción vertical de 30 klb que actúa hacia arriba. La ecuación $\sum V = 0$ indica que las barras que concurren ahí deben proporcionar 30 klb hacia abajo. Una barra que sea horizontal, tal como L_0L_1, no puede tener una componente vertical de fuerza; por lo tanto, L_0U_1 debe suministrar la cantidad completa y 30 klb será su componente vertical. La convención de flechas muestra que L_0U_1 está a compresión. De su pendiente (20:20, o 1:1) puede verse que la componente horizontal es también 30 klb.

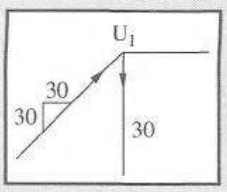
$$\sum H = 0$$
$$-30 + F_{L_0L_1} = 0$$
$$F_{L_0L_1} = 30 \text{ klb tensión}$$



La aplicación de la ecuación $\sum H = 0$ muestra que L_0U_1 empuja horizontalmente a la izquierda contra el nudo con una fuerza de 30 klb. Por equilibrio, L_0L_1 debe jalar a la derecha alejándose del nudo con la misma fuerza. La convención de flechas muestra que la fuerza es de tensión.

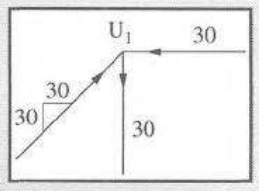
Considerando el nudo U_1,

$$\sum V = 0$$
$$30 - F_{U_1L_1} = 0$$
$$F_{U_1L_1} = 30 \text{ klb tensión}$$



Anteriormente se encontró que la fuerza en L_0U_1 es de compresión con componentes vertical y horizontal de 30 klb cada una. Como empuja hacia arriba en el nudo U_1 con una fuerza de 30 klb, U_1L_1 (la única barra adicional en el nudo que tiene una componente vertical) debe jalar hacia abajo con una fuerza de 30 klb con objeto de satisfacer la ecuación $\sum V = 0$.

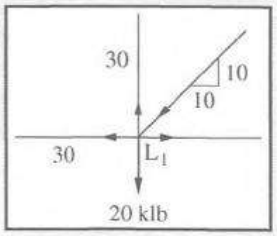
$$\sum H = 0$$
$$30 - F_{U_1U_2} = 0$$
$$F_{U_1U_2} = 30 \text{ klb compresión}$$



La barra L_0U_1 está empujando a la derecha en sentido horizontal con una fuerza de 30 klb. Por equilibrio U_1U_2 está empujando hacia la izquierda con 30 klb.

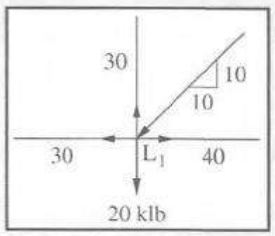
Considerando el nudo L_1,

$$\sum V = 0$$
$$30 - 20 - V_{L_1U_2} = 0$$
$$V_{L_1U_2} = 10 \text{ klb compresión}$$

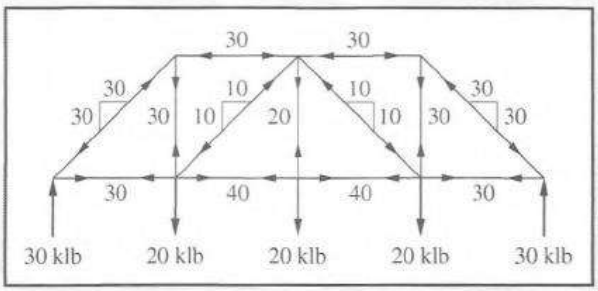


De la pendiente 1:1 $H_{L_1U_2} = 10$ klb compresión

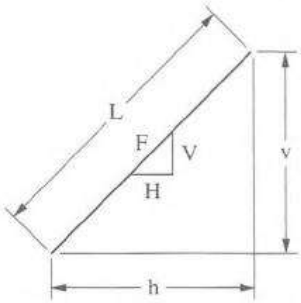
$$\sum H = 0$$
$$-30 - 10 - + F_{L_1L_2} = 0$$
$$F_{L_1L_2} = 40 \text{ klb tensión}$$



Las fuerzas, o sus componentes, para todas las barras de la armadura pueden calcularse de la manera antes descrita con los siguientes resultados.



Las fuerzas resultantes para los miembros inclinados pueden determinarse de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes vertical y horizontal de la fuerza. Un método más sencillo es escribir proporciones que comparen la fuerza axial resultante de una barra y su componente horizontal o vertical con la longitud verdadera de la barra y su componente horizontal o vertical. Si F, H y V representan la fuerza y sus componentes y L, h y v la longitud y sus componentes, se desarrollan las proporciones de la figura 6.13.



$$\frac{F}{H} = \frac{L}{h} \qquad (1)$$

$$\frac{F}{V} = \frac{L}{v} \qquad (2)$$

$$F = \sqrt{H^2 + V^2} \qquad (3)$$

$$\frac{H}{V} = \frac{h}{v} \qquad (4)$$

Figura 6.13

El método de los nudos puede usarse para calcular las fuerzas en todas las barras de muchas armaduras. Las armaduras de los ejemplos 6.2 a 6.4 y de todos los problemas al final de este

capítulo pertenecen a esta categoría. Sin embargo, hay un gran número de armaduras que necesitan ser analizadas por una combinación del método de los nudos y del método de las secciones presentados en el capítulo 7. El autor prefiere calcular tantas fuerzas como sea posible en una armadura con el método de los nudos. En los nudos donde encuentra alguna dificultad toma momentos para obtener una o dos fuerzas, como se describe en el capítulo 7. Luego prosigue los cálculos con el método de los nudos hasta que encuentra una nueva dificultad y de nuevo toma momentos, etcétera.

EJEMPLO 6.2

Encontrar todas las fuerzas en la armadura de la figura 6.14. Sólo se muestran los resultados.

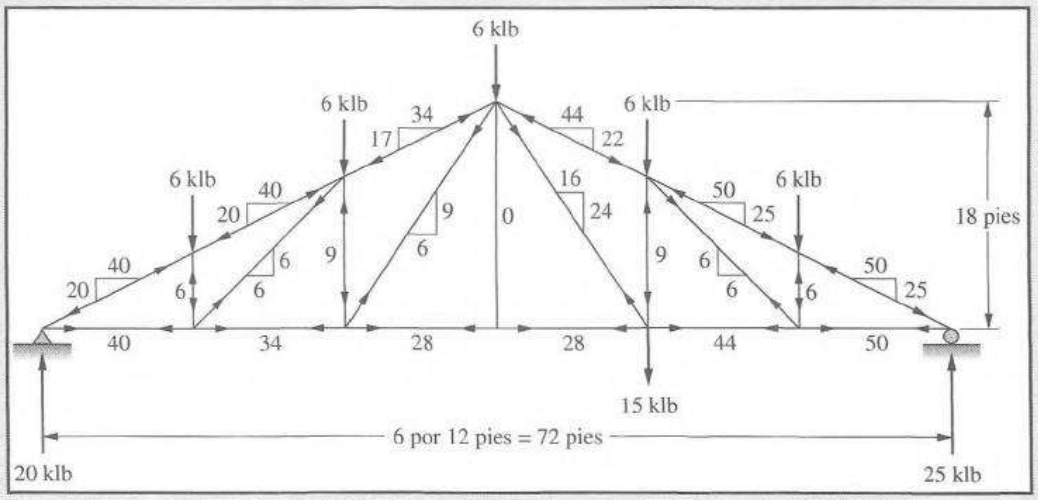


Figura 6.14

EJEMPLO 6.3

Encontrar todas las fuerzas, o sus componentes horizontales y verticales, para las barras de la armadura en la figura 6.15. Use el método de los nudos para la solución. Sólo se dan las respuestas.

Solución.

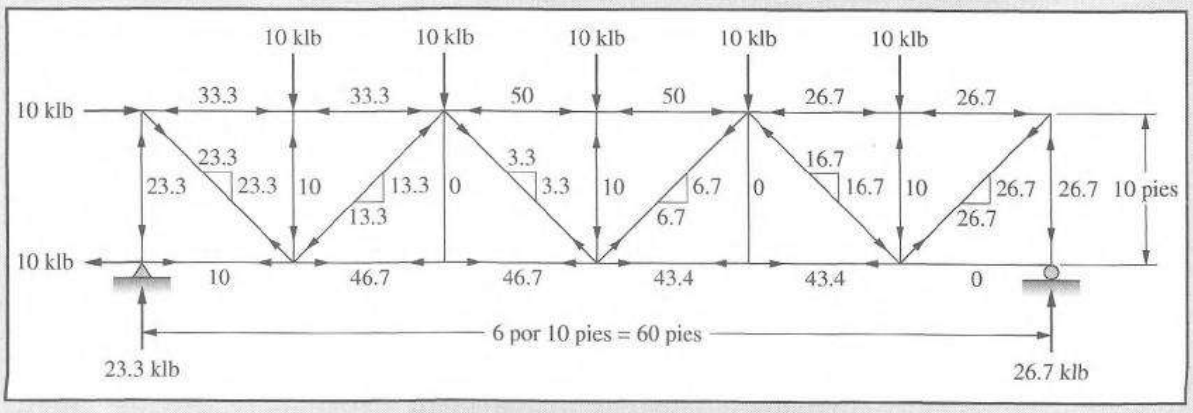


Figura 6.15

Pueden escribirse fácilmente ecuaciones para todos los nudos de una armadura y estas ecuaciones pueden resolverse simultáneamente para las componentes de las reacciones desconocidas y las fuerzas de las barras. Aunque este procedimiento se sigue en el ejemplo 6.4 para una armadura de tres barras, es demasiado fatigoso para armaduras más grandes con sus innumerables nudos y barras. Un procedimiento alterno es escribir las mismas ecuaciones de los nudos en forma matricial y resolver estas ecuaciones mediante un procedimiento matricial como se describe en los capítulos 22 a 25 de este libro.

EJEMPLO 6.4

Encontrar todas las fuerzas en la armadura mostrada en la figura 6.16.

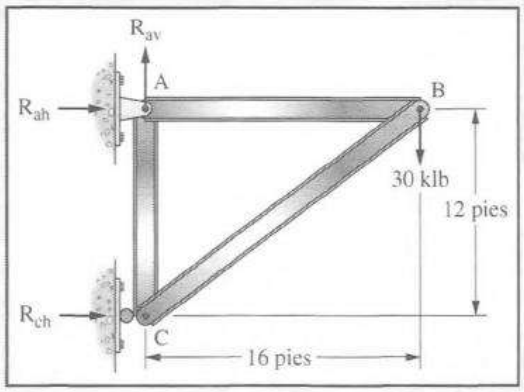


Figura 6.16

Solución.

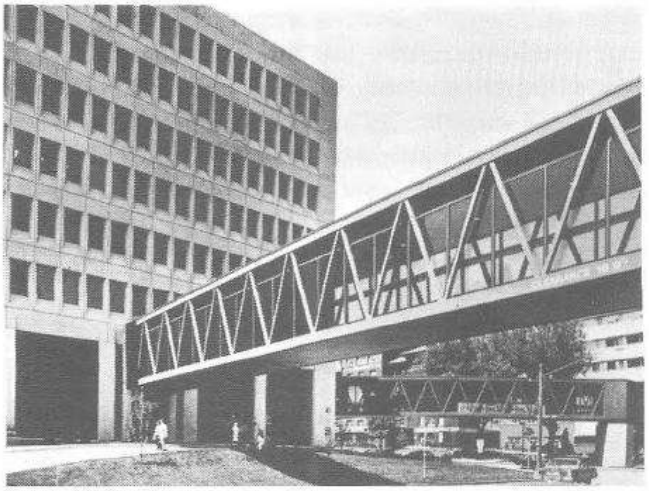
Para el nudo A
$$\sum F_H = R_{ah} + F_{ab} = 0$$
$$\sum F_V = R_{av} - F_{ac} = 0$$

Para el nudo B
$$\sum F_H = -F_{ab} - 0.8F_{cb} = 0$$
$$\sum F_V = -0.6F_{cb} - 30 = 0$$

Para el nudo C
$$\sum F_H = R_{ch} + 0.8F_{cb} = 0$$
$$\sum F_V = F_{ac} + 0.6F_{cb} = 0$$

Resolviendo las ecuaciones

$$R_{ah} = -40.0 \text{ klb} \leftarrow$$
$$R_{av} = +30.0 \text{ klb} \uparrow$$
$$R_{ch} = +40.0 \text{ klb} \rightarrow$$
$$F_{ab} = +40.0 \text{ klb}$$
$$F_{cb} = -50.0 \text{ klb}$$
$$F_{ac} = +30.0 \text{ klb} \quad \blacksquare$$



Puentes peatonales con vista panorámica de Fairview-St. Mary en Minneapolis, Minnesota. (Cortesía del American Institute of Steel Construction.)

6.10 ANÁLISIS POR COMPUTADORA DE ARMADURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

La mayoría del software de análisis estructural emplea métodos matriciales de análisis, que se estudian en los últimos capítulos de este libro. Estos métodos, que se basan en los desplazamientos de la estructura, requieren un conocimiento de las propiedades de la sección transversal y de las características materiales de las barras. En este punto de nuestro estudio del análisis estructural, nos conformaremos con usar el software como una "caja negra" que puede usarse para obtener respuestas. A través de un estudio posterior en este libro, desarrollaremos una comprensión de la base teórica del software.

Sistema coordenado

Cuando se ejecuta el análisis estructural por computadora, tenemos que considerar dos sistemas coordenados. El primero de éstos es el sistema coordenado global, que es un sistema coordenado cartesiano derecho con el que especificamos la geometría de la estructura. También lo usamos para tomar en cuenta los desplazamientos estructurales y las fuerzas de reacción. El origen del sistema coordenado global se especifica para alguna posición conveniente de la estructura, a menudo en el extremo inferior izquierdo de ésta. Normalmente los ejes coordenados globales están alineados con los ejes principales de la estructura.

El segundo es el sistema coordenado local. Éste se relaciona con las fuerzas y las deformaciones que actúan sobre y en los miembros individuales de la estructura. El sistema coordenado local usado depende del tipo de miembro que se use, y se establece al desarrollar el software. Los sentidos de las fuerzas en los miembros obtenidos a partir del análisis se interpretan según el sistema coordenado local.

Nudos y conectividad de los miembros

Al comenzar un análisis, debemos definir la geometría de la estructura. Esto se logra especificando primero la ubicación de los nudos y luego cómo los miembros se conectan a ellos. El elemento usado para los miembros debe ser apropiado para el análisis que se está efectuando. Al analizar armaduras debemos seleccionar un elemento que pueda tomar sólo fuerzas axiales, ya que ésta es la única fuerza teóricamente resistida por los miembros de una armadura. Una representación gráfica de la geometría, que está disponible en casi todo software, es muy útil para asegurarse que hemos especificado la geometría correctamente.

Restricciones de los nudos

Un grado de libertad en un nudo es un desplazamiento posible del nudo en una dirección específica. Los soportes estructurales se definen restringiendo los grados de libertad apropiados. Las restricciones especifican que el desplazamiento en la dirección de ese grado de libertad es cero. Por tanto, existe un soporte estructural en esa dirección. Además, los grados de libertad que no se consideran en el análisis se restringen a un desplazamiento cero con objeto de retirarlos del análisis. Al analizar armaduras, se restringen todos los grados de libertad rotacionales, ya que todos los miembros de una armadura están conectados por pasadores: un miembro no puede transferir momento a otro miembro o a un nudo.

Propiedades de los miembros

El ingeniero puede pensar que todos estos datos no son necesarios para una armadura estáticamente determinada. Sin embargo, los programas de computadora son generales y aplicables tanto a estructuras estáticamente determinadas como a estructuras estáticamente indeterminadas. Al analizar armaduras debemos por lo menos especificar el área transversal, el momento de inercia y el módulo de elasticidad para cada miembro.

6.11 PROBLEMA DE EJEMPLO EN COMPUTADORA

El ejemplo 6.5 presenta el análisis de una armadura estáticamente determinada de tres barras usando SABLE32. El procedimiento usado para las armaduras planas es el mismo, independientemente de si se consideran armaduras estáticamente determinadas o indeterminadas. Este programa se limita a armaduras con no más de 70 nudos y 70 barras.

Si el estudiante estudia cuidadosamente el material HELP proporcionado con SABLE32, deberá tener muy pocos problemas para analizar armaduras planas, ya sean determinadas o indeterminadas estáticamente. Sin embargo, el autor va a introducir al estudiante en los pasos sencillos que intervienen en la aplicación del programa a la armadura presentada en el ejemplo 6.5.

EJEMPLO 6.5

Usando SABLE32, determine las fuerzas en todos los miembros de la armadura de la figura 6.17 suponiendo que las unidades usadas son pulgadas y kilolibras. Para cada barra, se suponen las siguientes propiedades: $A = 10\ \text{plg}^2$, $I = 100\ \text{plg}^4$ y $E = 29 \times 10^3\ \text{klb/plg}^2$.

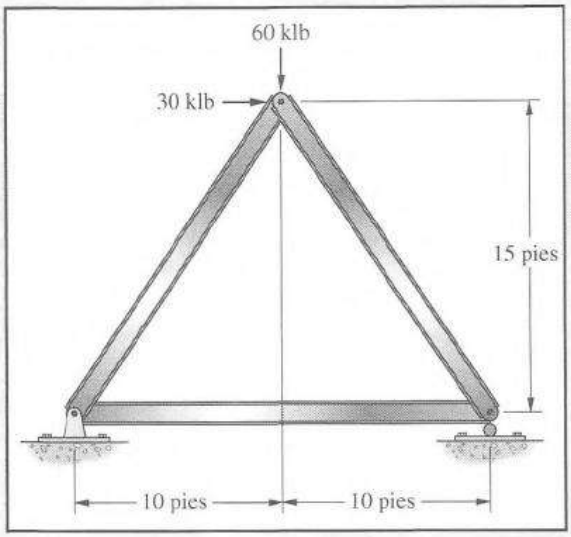


Figura 6.17

Solución.
Los nudos y las barras de la armadura se numeran con un sistema conveniente como se muestra en la figura 6.18.

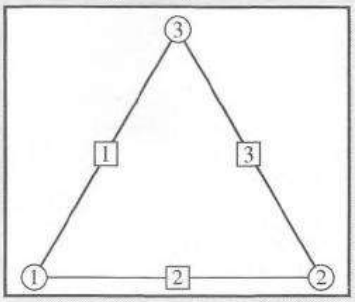


Figura 6.18

Después de abrir SABLE32, el usuario ingresa las coordenadas y las condiciones de los apoyos para cada nudo de la armadura. El origen seleccionado por el autor para esta armadura está en el nudo izquierdo extremo y como resultado, las coordenadas de los nudos serán todas positivas. El primer paso es dar un clic en los botones de datos EDIT y JOINT en la pantalla. Para cada nudo, el usuario da un clic en el botón NEW e ingresa las coordenadas de ese nudo. Después de hacer esto, es necesario dar un clic en los botones UPDATE, SELECT y OK, en este orden.

A medida que se introducen las coordenadas para cada nudo, también es necesario proporcionar información relacionada con la restricción proporcionada para cada nudo. Por ejemplo, un apoyo de articulación proporciona restricción en ambas direcciones x y y. Además, para una armadura plana no se supone ningún grado de libertad en la dirección z para cualquiera de los nudos. Así, es necesario dar un clic en la restricción z para cada nudo en la armadura. Después de haber ingresado todos los datos de los nudos, dé un clic en el botón CLOSE.

Para ver si los datos de los nudos han sido insertados correctamente, el usuario puede dar un clic en el botón DISPLAY seguido de los botones GEOMETRY y JOINT DATA. (Un procedimiento similar puede usarse para exhibir todos los demás datos que se ingresen.)

En seguida el usuario ingresa los números de los nudos en el extremo de cada barra, haciendo referencia aquí a los números de barras previamente seleccionados en la figura 6.18. Al proporcionar las propiedades de las barras, el usuario debe estar seguro de dar un clic en el botón ACTIVE en el lado izquierdo de la pantalla. Además de los números de los nudos, se especifican las condiciones de extremo de estas barras. Para armaduras planas, las condiciones de extremo siempre serán PIN PIN. Éstas se muestran en el lado derecho de la pantalla. Nuevamente el usuario continúa con NEW, UPDATE, SELECT y después de especificar todos los datos de las barras, el usuario da un clic en el botón CLOSE.

Ahora se ingresan las cargas aplicadas a la armadura. La convención de signos que se usa es más para la dirección x si las cargas van a la derecha y más para la dirección y si las cargas actúan hacia arriba.

Finalmente el usuario da un clic en los botones ANALYSIS y luego en STATIC ANALYSIS para esta armadura. La pantalla mostrará que el análisis está terminado, y es necesario dar un clic en OK. Para ver los resultados, dé un clic en DISPLAY, RESULTS, JOINT FORCES, o BEAM FORCES como se desee. Una impresión de los resultados se muestra en seguida.

ENTRADA

Posición del nudo y datos de las restricciones

	Coordenadas			Restricciones		
Nudo	X	Y	Z	X	Y	Rotación
1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	S	S	S
2	2.000E+01	0.000E+00	0.000E+00	N	S	S
3	1.000E+01	1.500E+01	0.000E+00	N	N	S

Posición de la viga y datos de las propiedades

Propiedades de las vigas							
Viga	i	j	Tipo	Estado	Área	Izz	E
1	1	3	P-P	A	1.000E+01	1.000E+02	2.900E+04
2	1	2	P-P	A	1.000E+01	1.000E+02	2.900E+04
3	2	3	P-P	A	1.000E+01	1.000E+02	2.900E+04

Cargas aplicadas en los nudos

Nudo	Caso	Fuerza-X	Fuerza-Y	Momento-Z
1	1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
2	1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
3	1	3.000E+01	−6.000E+01	0.000E+00

SALIDA

Viga	Caso	Extremo	Axial	Cortante-Y	Momento-Z
1	1	i	9.014E+00	0.000E+00	0.000E+00
		j	−9.014E+00	0.000E+00	0.000E+00
2	1	i	−3.500E+01	0.000E+00	0.000E+00
		j	3.500E+01	0.000E+00	0.000E+00
3	1	i	6.310E+01	0.000E+00	0.000E+00
		j	−6.310E+01	0.000E+00	0.000E+00

Observe que la fuerza cortante y el momento flexionante en cada extremo de cada barra son iguales a cero. Esto es como se espera y es consistente con nuestra hipótesis acerca del comportamiento. También observe de los resultados calculados que la fuerza axial en un extremo de cada barra es positiva mientras que la fuerza axial en el otro extremo es negativa. Para determinar si una barra está en tensión axial o en compresión axial debemos referirnos al sistema local de coordenadas especificado para la barra. De la información de HELP en SABLE32, podemos ver que el sistema local de coordenadas es como se muestra en la figura 6.19. Éstas son las direcciones de las fuerzas positivas en cada extremo de una barra.

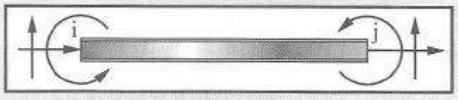


Figura 6.19

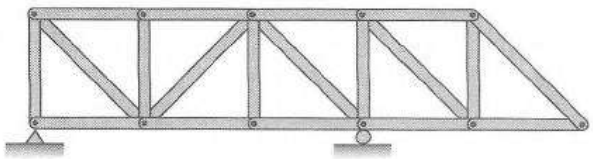
A partir de este croquis del sistema local de coordenadas, podemos ver que una fuerza axial positiva en el extremo izquierdo de la barra indica compresión axial, mientras que una fuerza axial positiva en el extremo derecho indica tensión axial. Usaremos los resultados indicados en el extremo derecho de la barra, el extremo j, para interpretar la magnitud y el sentido (tensión o compresión) de las fuerzas axiales en las barras.

SABLE32 no incluye el peso de los barras de la armadura en los cálculos. Sin embargo, algunas veces puede usted tener una barra de armadura que esté seguro que tiene una fuerza 0 si se desprecia el peso de la barra y aun así la computadora muestra una fuerza mucho muy pequeña. Se imprime un número muy pequeño para la barra. En realidad debería ser cero pero el redondeo de los números en la matriz frecuentemente dejará este pequeño valor y debe despreciarse. ■

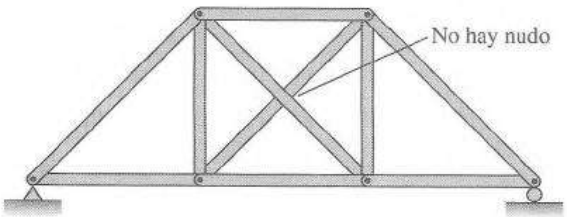
6.12 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

En los problemas 6.1 al 6.22, clasifique las estructuras respecto a su estabilidad interna y externa, así como a su determinación. En las estructuras estáticamente indeterminadas incluya el grado de redundancia interna o externa. (Los pequeños círculos colocados sobre las armaduras indican los nudos.)

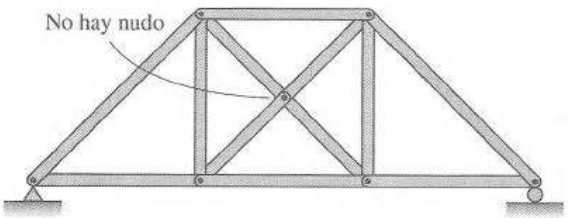
6.1 (*Resp.:* Estáticamente determinada interna y externamente.)



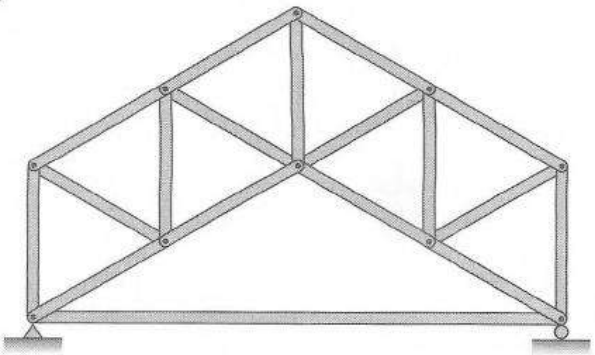
6.2



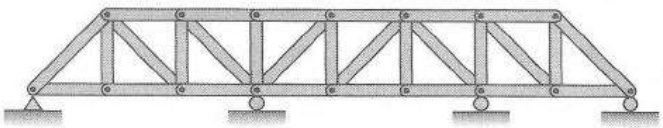
6.3 (*Resp.:* Estáticamente indeterminada internamente de primer grado.)



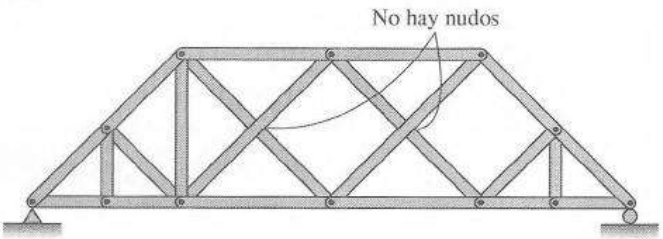
6.4



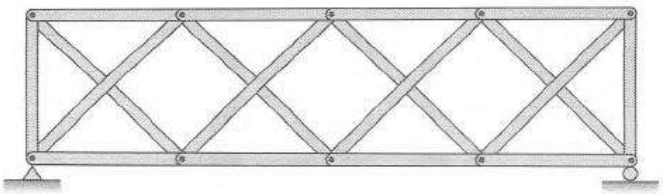
6.5 (*Resp.:* Estáticamente indeterminada externamente de segundo grado.)



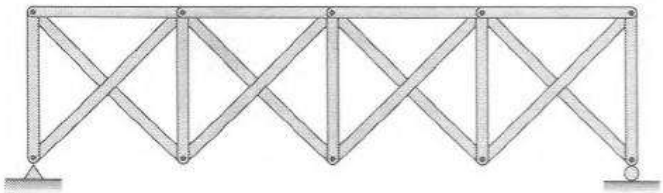
6.6



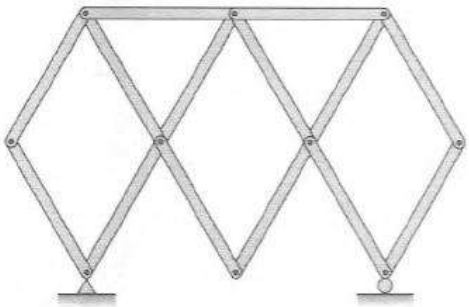
6.7 (*Resp.:* Estáticamente indeterminada internamente de primer grado.)



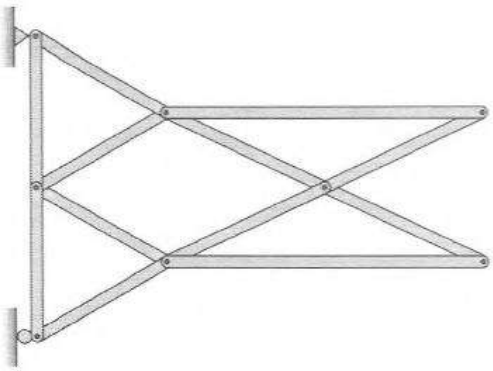
6.8



6.9 (*Resp.:* Inestable.)

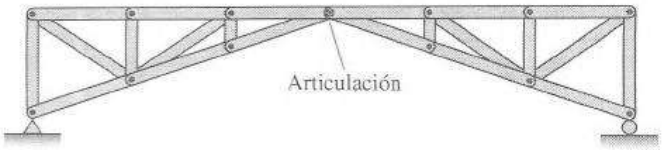


6.10

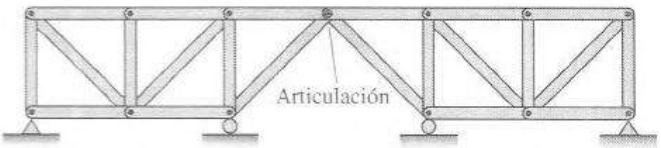


6.11 (*Resp.:* Estáticamente determinada interna y externamente.)

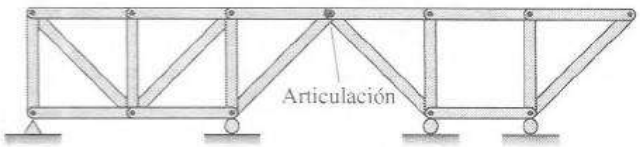
6.12



6.13 (*Resp.:* Estáticamente indeterminada externamente de segundo grado.)

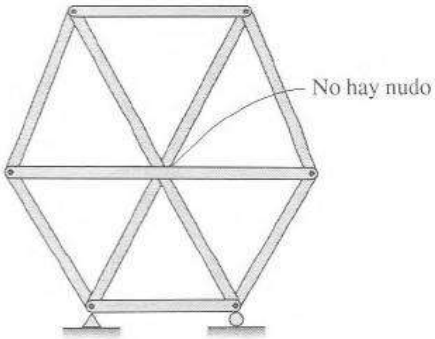


6.14

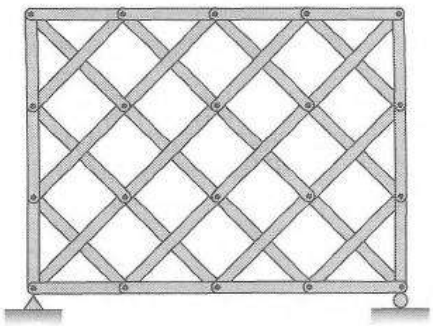


6.15 (*Resp.:* Estáticamente determinada interna y externamente.)

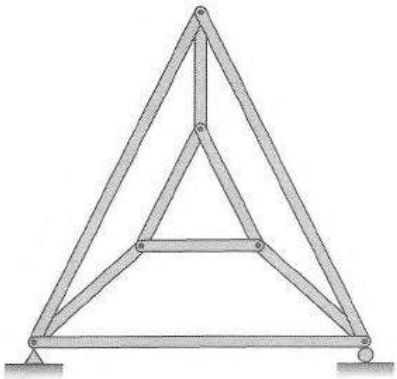
6.16



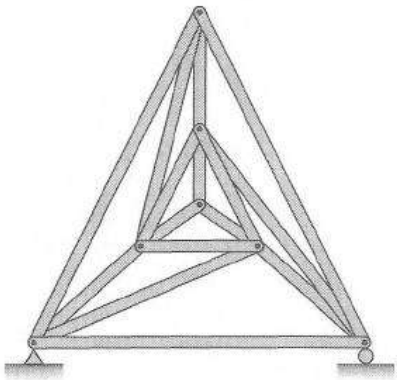
6.17 (*Resp.:* Estáticamente indeterminada internamente de primer grado.)



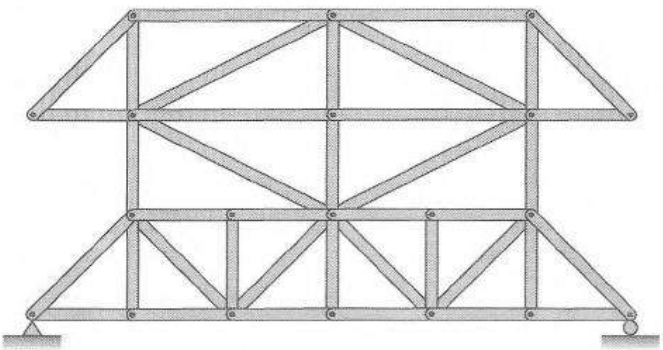
6.18



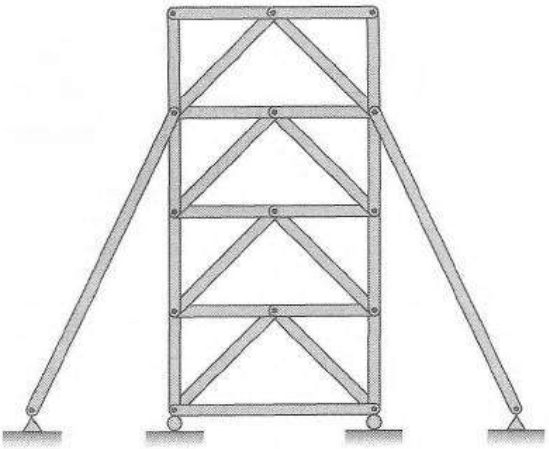
6.19 (*Resp.:* Estáticamente indeterminada internamente de cuarto grado.)



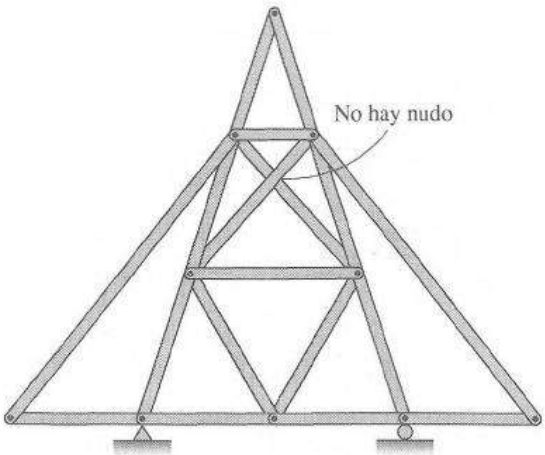
6.20



6.21 (*Resp.:* Estáticamente indeterminada internamente de primer grado.)

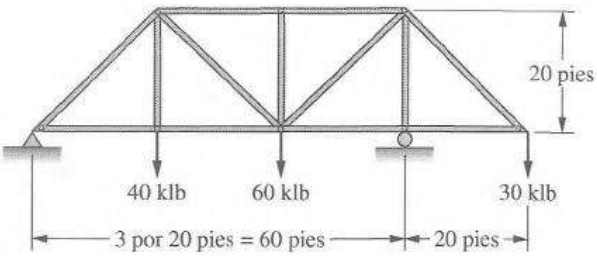


6.22



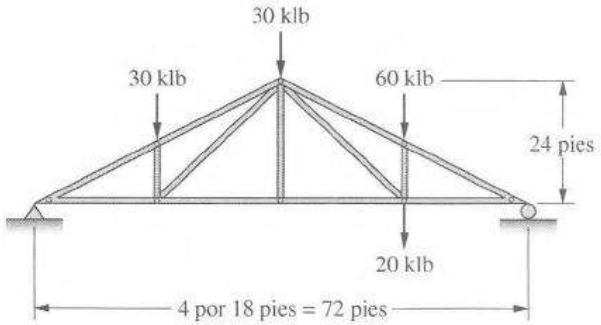
En los problemas 6.23 al 6.39, calcule las fuerzas en todos los miembros de las armaduras con el método de los nudos.

6.23 (*Resp.:* $F_{L_1L_2} = +36.67$ klb, $F_{U_2U_3} = -33.33$ klb, $F_{U_1L_2} = -4.71$ klb.)

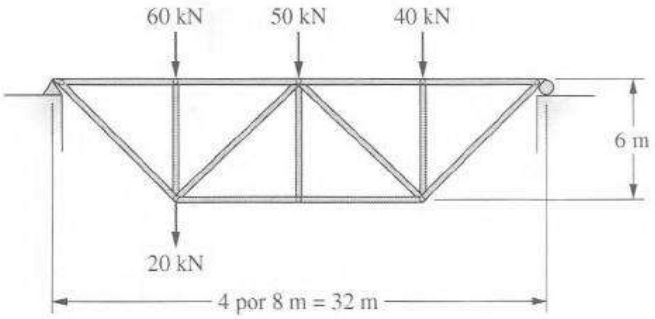


6.24 Resuelva el problema 6.23 con la altura de la armadura reducida a 15 pies y con las cargas duplicadas.

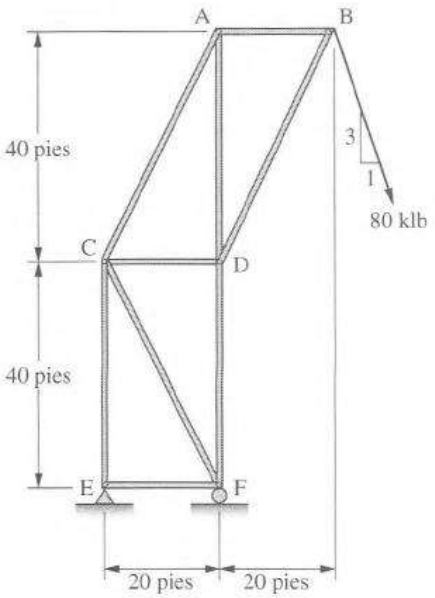
6.25 (*Resp.:* $F_{U_1U_2} = -103.66$ klb, $F_{U_2U_3} = -148.73$ klb, $F_{L_2L_3} = +63.75$ klb.)



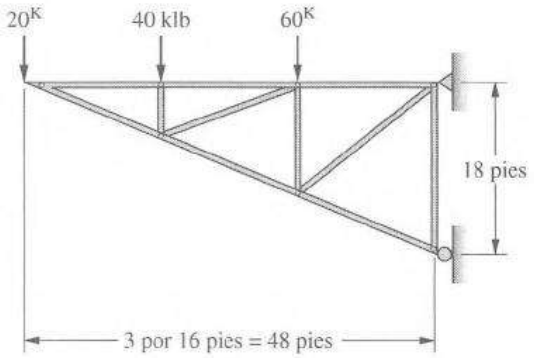
6.26



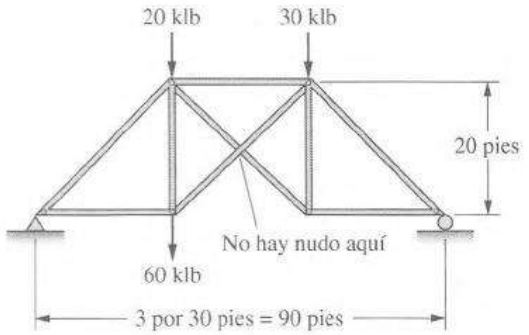
6.27 (*Resp.:* $F_{CD} = +37.94$ klb, $F_{CA} = +141.42$ klb, $F_{BD} = -84.85$ klb.)



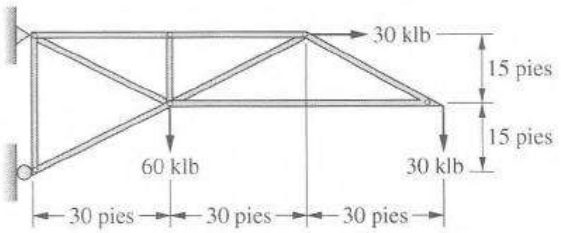
6.28



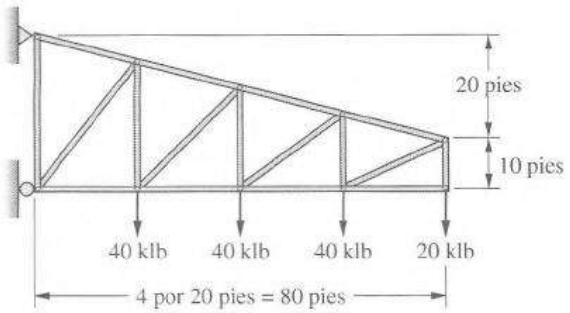
6.29 (*Resp.:* $F_{L_0L_1} = +95$ klb, $F_{U_1U_2} = -165$ klb, $F_{U_1L_3} = +84.13$ klb.)



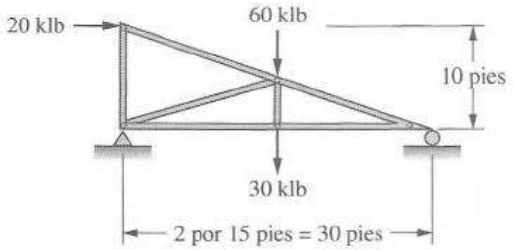
6.30



6.31 (*Resp.:* $F_{L_1L_2} = -80$ klb, $F_{U_2U_3} = +82.46$ klb, $F_{U_3L_3} = +53.33$ klb.)

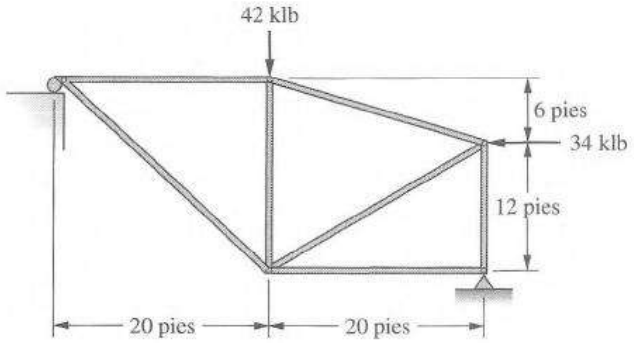


6.32

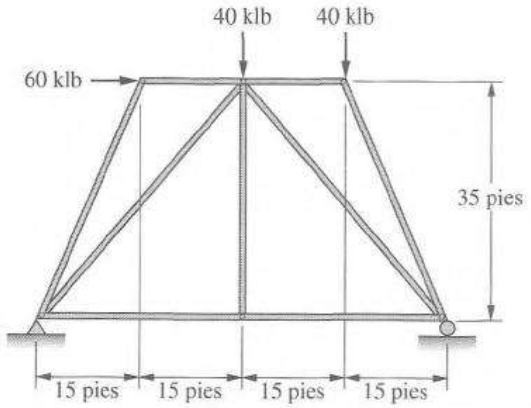


6.33 Resuelva el problema 6.32 suponiendo que el rodillo de soporte proporciona un tercio de la fuerza horizontal total resistente (debido a fricción, corrosión, etc.) necesaria, y los otros dos tercios son proporcionados por el soporte de pasador.
(*Resp.:* $F_{L_0L_1} = +148.33$ klb, $F_{U_1L_2} = -163.38$ klb.)

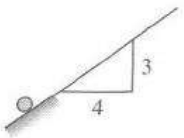
6.34



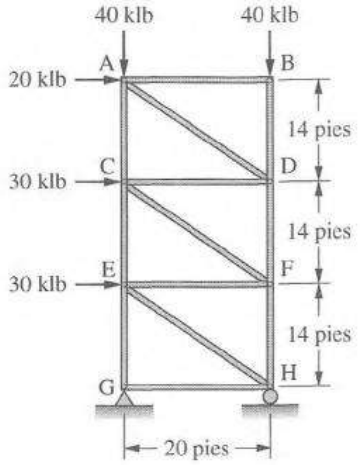
6.35 (*Resp.:* $F_{U_1U_2} = -60$ klb, $F_{L_0L_1} = +55.71$ klb, $F_{U_3L_4} = -43.52$ klb.)



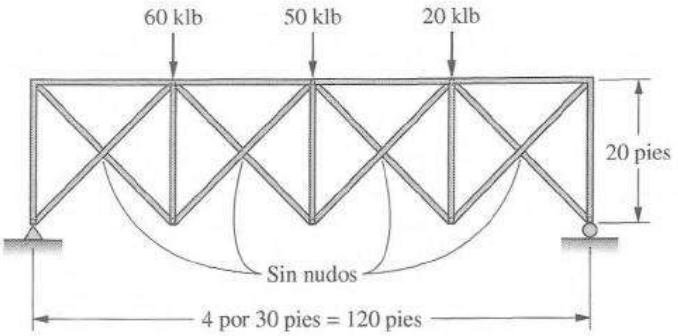
6.36 Resuelva el problema 6.35 si la superficie de soporte bajo el rodillo se cambia como se indica a continuación.



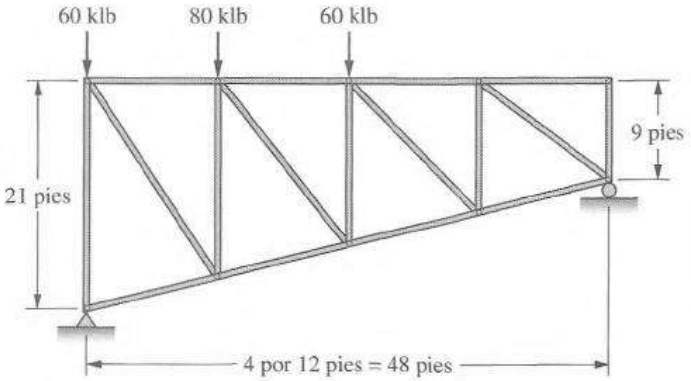
6.37 (*Resp.:* $F_{EF} = +50$ klb, $F_{AC} = -26$ klb, $F_{AD} = -24.41$ klb.)



6.38



6.39 (*Resp.:* $F_{U_0U_1} = -60$ klb, $F_{U_1L_1} = -105$ klb, $F_{L_2L_3} = +82.46$ klb.)



Para los problemas 6.40 y 6.41, analice las armaduras usando SABLE32 si A = 0.05 pie, I = 1 pie^4 y E = 29 000 klb/plg^2 para todas las barras.

6.40 Problema 6.32.

6.41 Problema 6.35. (*Resp.:* $F_{L_0L_1} = +55.71$ klb, $F_{U_2L_2} = 0$, $F_{U_2L_4} = -59.27$ klb.)

Capítulo 7

Armaduras planas (continuación)

7.1 ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LAS SECCIONES

La aplicación de las ecuaciones de equilibrio a diagramas de cuerpo libre de secciones de una armadura es la base del cálculo de fuerzas por el método de las secciones, así como lo es también al usar el método de los nudos en el capítulo anterior. Al usar el método de las secciones para determinar la fuerza en un miembro específico, se pasa un plano imaginario por la armadura, que la corta en dos secciones como se muestra en la figura 7.1(a). Los diagramas de cuerpo libre resultantes se muestran en la figura 7.1(b) y (c). La posición en que se pasa el plano imaginario se elige de manera que haya por lo menos tantas ecuaciones de equilibrio como fuerzas incógnitas.

Las ecuaciones de equilibrio estático se aplican a cada una de las secciones para determinar la magnitud de las fuerzas desconocidas. Debe darse atención especial al punto respecto al cual se suman los momentos al aplicar las ecuaciones. A menudo se toman los momentos de las fuerzas respecto a un punto tal que sólo una fuerza desconocida aparece en la ecuación. De esta manera puede determinarse el valor de esa fuerza. Generalmente puede alcanzarse este objetivo seleccionando un punto a lo largo de la línea de acción de una o más de las otras fuerzas en los miembros y

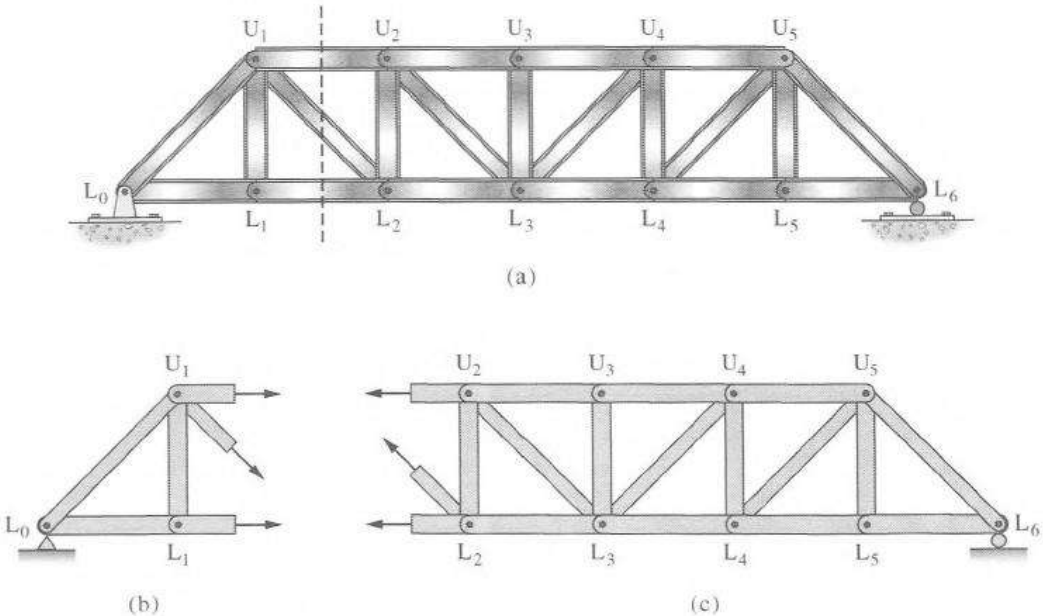
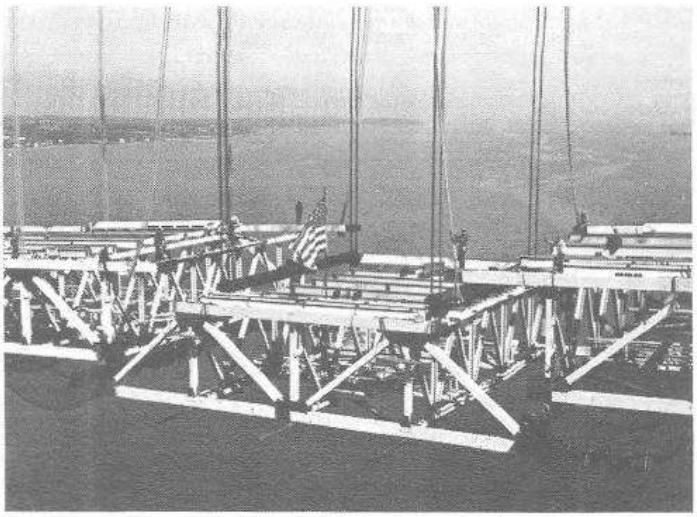


Figura 7.1 Una armadura y las fuerzas internas en una sección.

tomándolo como el punto respecto al cual se suman los momentos. Este punto no necesariamente tiene que estar sobre la sección cortada. Algunas armaduras comunes tienen lugares especiales para colocar las secciones, lo que simplifica mucho el trabajo requerido. Estos casos se analizarán en las siguientes páginas.

La principal ventaja del método de las secciones es que la fuerza en un miembro de una armadura puede calcularse en la mayoría de los casos sin tener que calcular las fuerzas en otros miembros de la armadura. Si se usara el método de los nudos, entonces sería necesario calcular las fuerzas en otros miembros, nudo por nudo desde el extremo de la armadura hasta alcanzar el miembro en cuestión. Sin embargo, se usan ambos métodos en el análisis de las armaduras. De hecho, con frecuencia se usan ambos métodos al mismo tiempo. Dependiendo de la geometría de la armadura, algunas fuerzas de los miembros se calculan más fácilmente con el método de las secciones que otras que se calculan con más facilidad usando el método de los nudos.



Montaje del tramo final de la armadura del puente Newport entre Jamestown y Newport, Rhode Island. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

7.2 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LAS SECCIONES

Al usar el método de las secciones tenemos que establecer una convención de signos para el sentido de las fuerzas en los miembros cortados tal como lo hicimos al usar el método de los nudos. Igual que en el método de los nudos, se supone que todas las fuerzas desconocidas en los miembros están actuando en tensión. Esta convención de signos se ilustra en la figura 7.1. En el análisis, los resultados positivos indican miembros en tensión y los resultados negativos indican miembros en compresión. Si usamos esta convención de signos, obtendremos resultados *consistentes con todos* los métodos de análisis de armaduras. Los errores que resultan de confundir el sentido de las fuerzas en los miembros se reducirán considerablemente.

Los ejemplos 7.1 y 7.2 ilustran el cálculo de fuerzas en miembros usando el método de las secciones. Para demostrar los principios, sólo se calculan las fuerzas en miembros seleccionados. Las fuerzas en los otros miembros podrían calcularse cortando secciones adicionales o con el método de los nudos.

EJEMPLO 7.1

Encontrar las fuerzas en las barras L_1L_2 y U_2U_3 de la armadura que se muestra en la figura 7.2 usando el método de las secciones.

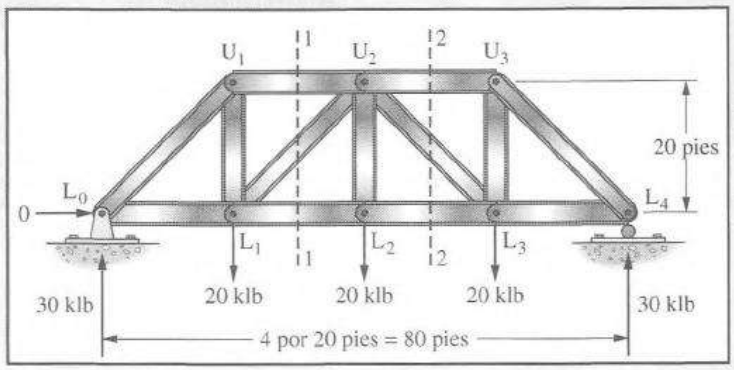


Figura 7.2

Solución. Barra L_1L_2. Pasamos la sección 1-1 por la armadura cortando L_1L_2 y tan pocas barras como sea posible. Se considera que la parte de la armadura a la izquierda de la sección es el cuerpo libre y se muestra en la figura 7.3.

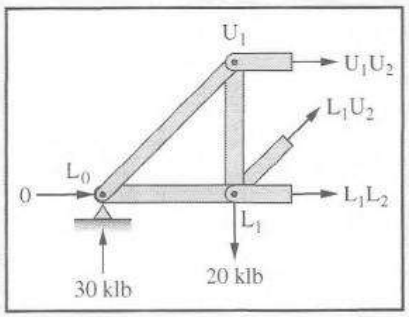


Figura 7.3

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son la reacción de 30 klb, la carga de 20 klb en L_1, y las fuerzas axiales en las barras cortadas por la sección (U_1U_2, L_1U_2 y L_1L_2). Se toma momentos de estas fuerzas alrededor de U_2, el cual es el punto de intersección de L_1U_2 y U_1U_2. La ecuación de momentos contiene una fuerza incógnita, L_1L_2, y su valor puede encontrarse resolviendo la ecuación.

$$\sum M_{U_2} = 0$$

$$(30)(40) - (20)(20) - 20F_{L_1L_2} = 0$$

$$F_{L_1L_2} = +40 \text{ klb tensión}$$

Barra U_2U_3. Pasamos la sección 2-2 por la armadura, y se considera que la parte de la armadura a la derecha de la sección es el cuerpo libre como se muestra en la figura 7.4. (Pudimos haber usado la parte de la armadura a la izquierda de la sección pero parecía un poco más sencillo trabajar a la derecha, ya que intervienen menos fuerzas en ese lado.) Las barras U_2U_3, U_2L_3 y L_2L_3 son cortadas por la sección. El tomar momentos en la intersección de L_2L_3 y U_2L_3 elimina a esas dos barras de la ecuación debido a que las líneas de acción de sus fuerzas pasan por el centro de momentos. La fuerza en U_2U_3 es la única incógnita que aparece en la ecuación y su valor puede determinarse.

$$\sum M_{L_3} = 0$$
$$-(30)(20) - 20F_{U_2U_3} = 0$$
$$F_{U_2U_3} = -30 \text{ klb compresión}$$

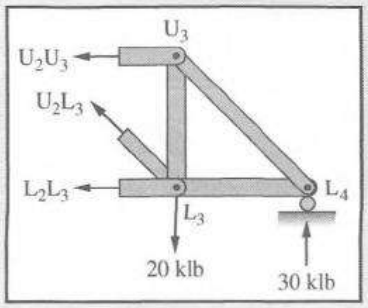


Figura 7.4 ■

EJEMPLO 7.2

Encontrar las fuerzas (o sus componentes horizontales y verticales) para todas las barras de la armadura que se muestra en la figura 7.5. Use tanto el método de los nudos como de las secciones como sea más conveniente.

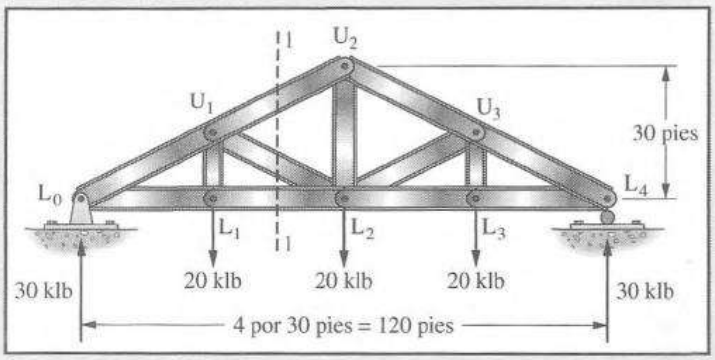


Figura 7.5

Solución. Las fuerzas de las barras que concurren en L_0 y L_1 se determinan rápidamente por el método de los nudos. Para calcular la fuerza en U_1U_2, se pasa la sección 1-1 y se toman momentos en L_2. Como U_1U_2 es una barra inclinada, la fuerza se descompone en sus componentes vertical y horizontal. Puede suponerse que las componentes de una fuerza actúan en cualquier parte a lo largo de su línea de acción. Es conveniente en este caso descomponer la fuerza en sus componentes en el nudo U_2, ya que la componente vertical pasará por el centro de momentos y la ecuación de momentos puede resolverse para la componente horizontal de la fuerza.

$$\sum M_{L_2} = 0$$
$$(30)(60) - (20)(30) + 30H_{U_1U_2} = 0$$
$$H_{U_1U_2} = -40 \text{ klb}$$
$$V_{U_1U_2} = \left(\frac{15}{30}\right)(-40) = -20 \text{ klb}$$

Las fuerzas, o sus compontes, pueden ahora obtenerse fácilmente mediante el método de los nudos para todos los demás miembros de la armadura. Los resultados se muestran en la figura 7.6.

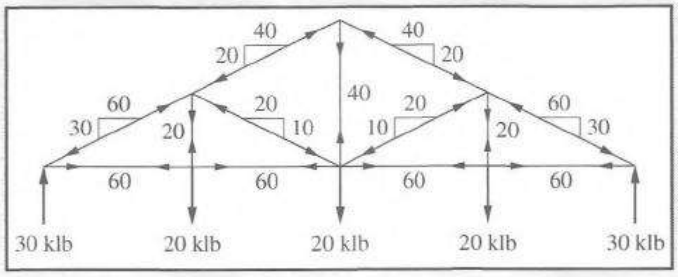


Figura 7.6

Los ejemplos 7.3, 7.4 y 7.5 presentan el análisis de algunas otras estructuras usando los métodos de los nudos y de sección.

EJEMPLO 7.3

Determine las fuerzas en todos los miembros de la armadura mostrada en la figura 7.7.

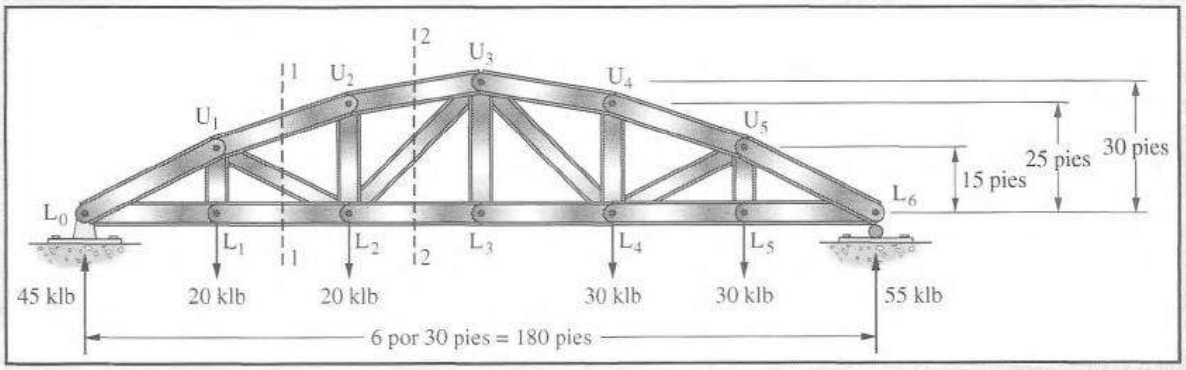


Figura 7.7

Solución. Las fuerzas que concurren en los nudos L_0 y L_1 están determinadas por los nudos. Entonces pasamos la sección 1-1 por la armadura, se considera el cuerpo libre a la izquierda, y se toman momentos en L_2 para determinar $H_{U_1U_2}$.

$$\sum M_{L_2} = 0; \text{ cuerpo libre a la izquierda de la sección 1-1}$$

$$(45)(60) - (20)(30) + 25H_{U_1U_2} = 0$$

$$H_{U_1U_2} = -84 \text{ klb compresión}$$

Las fuerzas restantes en los nudos U_1 y U_2 están determinadas por los nudos. Pasamos la sección 2-2 por la armadura y con respecto al cuerpo libre izquierdo, se toman momentos en U_3 para determinar L_2L_3.

$$\sum M_{U_3} = 0; \text{ cuerpo libre a la izquierda de la sección 2-2}$$

$$(45)(90) - (20)(30) - (20)(60) - 30F_{L_2L_3} = 0$$

$$F_{L_2L_3} = +75 \text{ klb tensión}$$

Se continúa el mismo procedimiento para el resto de la armadura y los resultados se muestran en la figura 7.8.

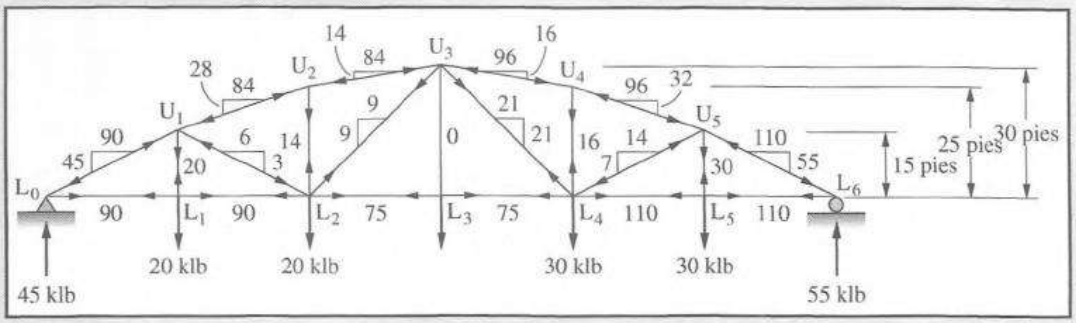


Figura 7.8

EJEMPLO 7.4

Calcule la fuerza en la barra cg de la armadura de la figura 7.9.

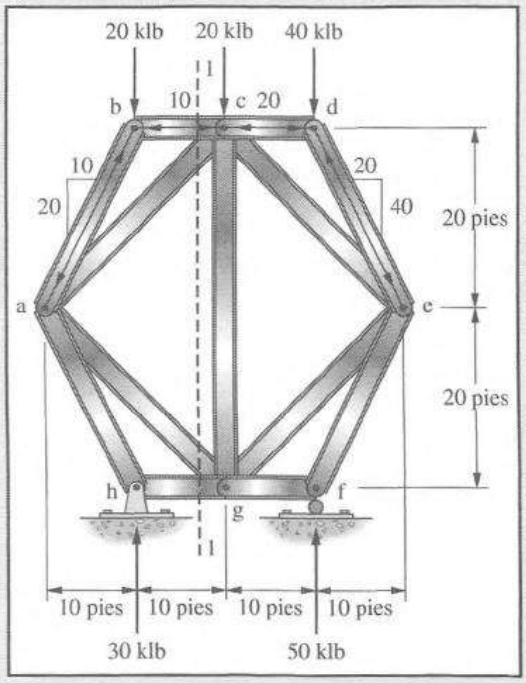


Figura 7.9

Solución. La fuerza en la barra en cuestión no puede determinarse inmediatamente mediante nudos o momentos. Es necesario conocer los valores de las fuerzas para varias barras antes de encontrar el valor para cg. Las fuerzas en las barras ba, bc, dc y de pueden encontrarse mediante nudos como se muestra, y la fuerza en la barra ac puede encontrarse mediante momentos. Considerando la sección 1-1 y el cuerpo libre a la izquierda, pueden tomarse momentos alrededor de g. Si observamos que la fuerza en bc es de compresión y empuja contra el cuerpo libre desde el exterior, y suponiendo que la barra ac está a tensión, puede escribirse la siguiente ecuación. La fuerza incógnita se descompone en sus componentes vertical y horizontal en c.

$$\sum M_g = 0$$

$$(30)(10) - (20)(10) - (10)(40) + (H_{ac})(40) = 0$$

$$H_{ac} = +7.5 \text{ klb tensión}$$

Teniendo la fuerza en ac, las fuerzas en ce y cg pueden determinarse mediante nudos como se muestra en la figura 7.10.

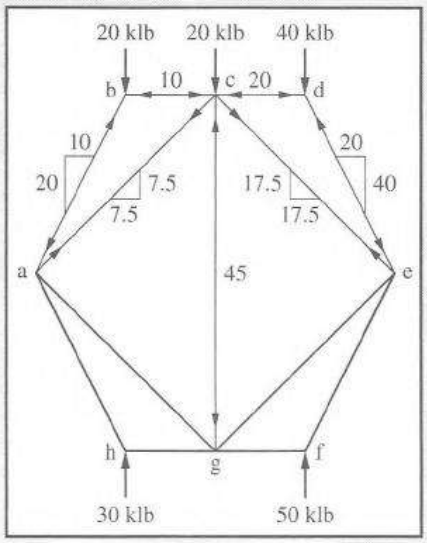


Figura 7.10

EJEMPLO 7.5

Determine las fuerzas en todas las barras de la armadura Fink mostrada en la figura 7.11.

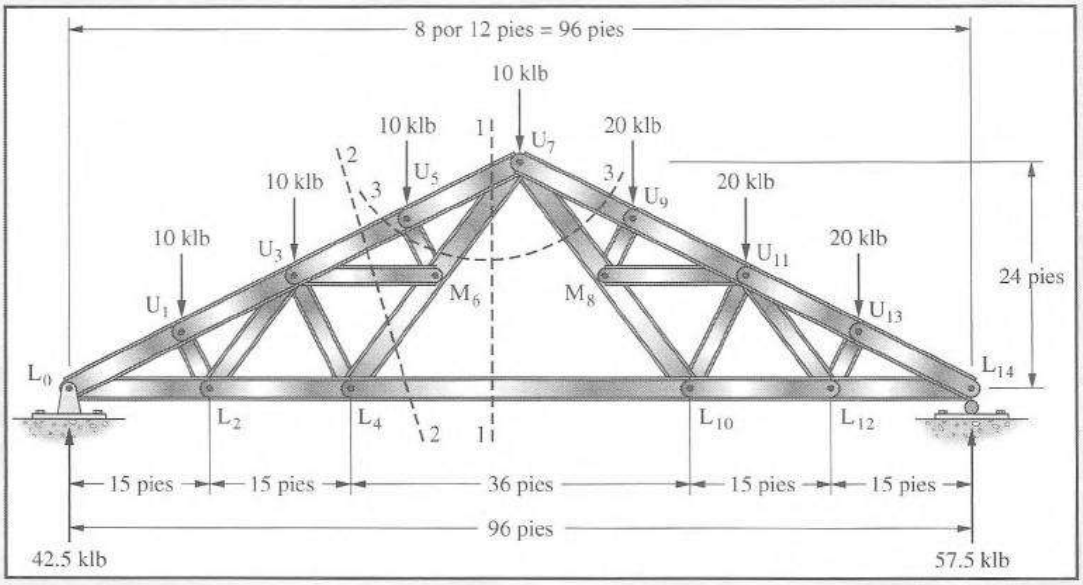


Figura 7.11

Solución. Las fuerzas en las barras que concurren en los nudos L_0, L_2 y U_1 pueden encontrarse por los métodos de los nudos y de las secciones sin ninguna dificultad. En cada uno de los dos siguientes nudos, U_3 y L_4, hay tres fuerzas incógnitas que no pueden determinarse directamente con secciones. Es conveniente calcular las fuerzas en algunas barras más allá en la armadura y luego calcular regresando a estos nudos. Pueden usarse con ventaja las secciones numeradas 1-1, 2-2 y 3-3. A partir de la primera de estas secciones pueden obtenerse mediante momentos las fuerzas en cualquiera de las tres barras cortadas. Usando la sección 2-2 (véase la figura 7.12) y tomando momentos en U_3, puede encontrarse la fuerza en L_4M_6. Es importante observar que la sección ha cortado cuatro barras y que solamente dos de ellas pasan por el punto con respecto al cual se toman momentos; sin embargo, la fuerza en una de estas barras, L_4L_{10}, se encontró previamente con la sección 1-1, y solamente se deja una incógnita en la ecuación. Las fuerzas restantes en la armadura pueden calcularse con los métodos acostumbrados.

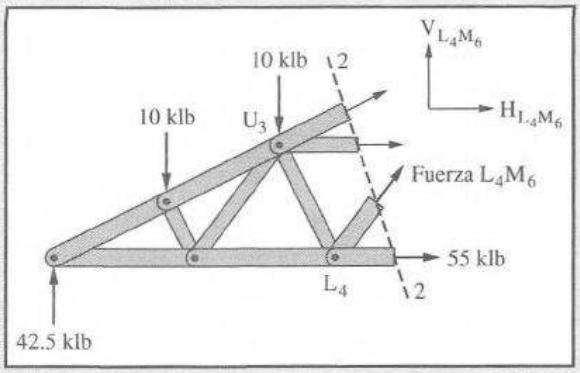


Figura 7.12

Estas dos secciones así consideradas (1-1 y 2-2) son suficientes para analizar la armadura, pero si se desea otro enfoque, puede considerarse una sección tal como la 3-3. A partir de esta sección puede encontrarse la fuerza en U_5M_6 tomando momentos en U_7 porque todas las demás barras cortadas por la sección pasan por U_7.

Las fuerzas en todas las barras de esta armadura se muestran en la figura 7.13.

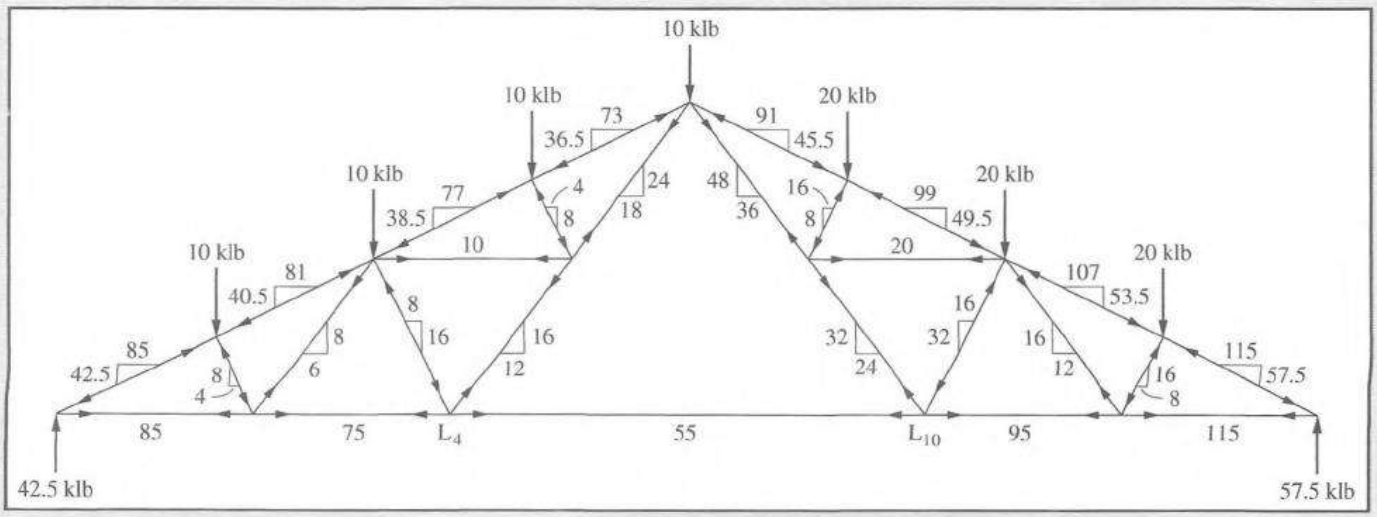
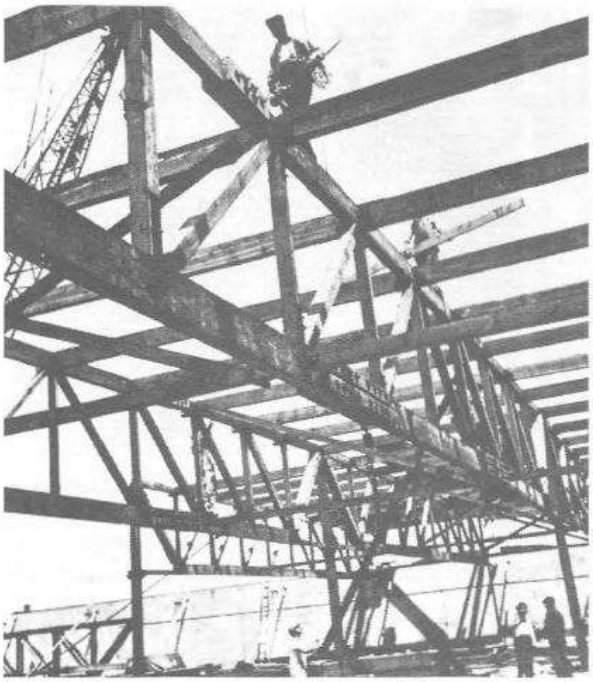


Figura 7.13



Armaduras de madera para tenería en South Paris, Maine. (Cortesía del American Wood Preservers Institute.)

7.3 MÉTODO DE LOS CORTANTES

Ahora debería ser obvio que si pasamos una sección vertical por una armadura y si la dividimos en dos cuerpos libres separados, la suma de las fuerzas verticales a la izquierda de la sección debe ser igual y de dirección opuesta a la suma de las fuerzas verticales a la derecha de la sección. A la sumatoria de estas fuerzas a la izquierda o a la derecha de una sección se le define como el *cortante*.

Las barras inclinadas cortadas por una sección deben tener componentes verticales de fuerzas iguales y opuestas al cortante a lo largo de la sección, ya que las barras horizontales no pueden tener componentes verticales de fuerza. Para la mayoría de las armaduras de cuerdas paralelas hay solamente una barra inclinada en cada tablero, y la componente vertical de fuerza en esa barra inclinada debe ser igual y opuesta al cortante en el tablero. Las componentes verticales de fuerza se calculan mediante cortantes para las diagonales de la armadura de cuerdas paralelas del ejemplo 7.6.

EJEMPLO 7.6

Determine las componentes verticales de fuerza en las diagonales de la armadura mostrada en la figura 7.14. Use el método de los cortantes.

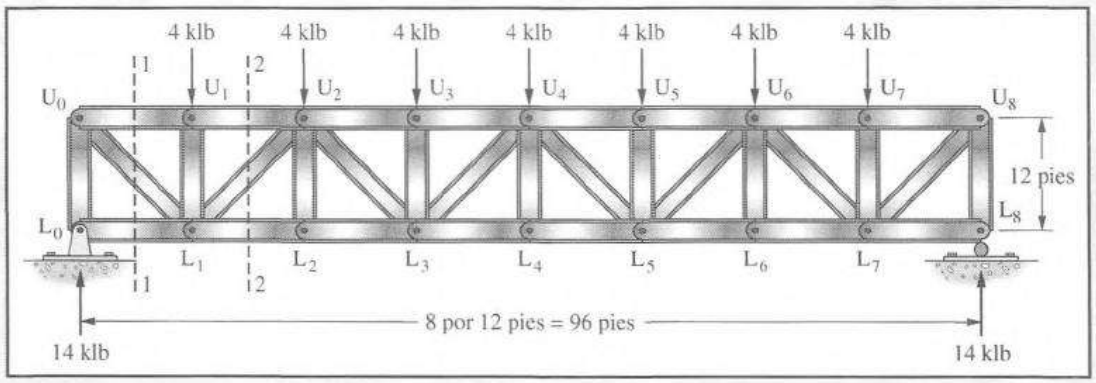
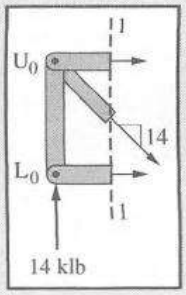


Figura 7.14

Solución. Considerando la sección 1-1 y el cuerpo libre a la izquierda,

cortante a la izquierda = 14 klb ↑

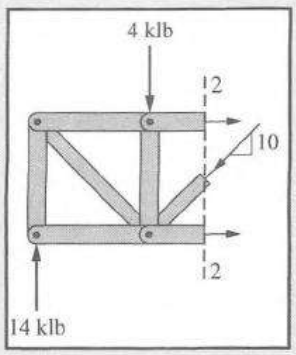
$V_{U_0L_1}$ = 14 klb ↓ tensión (jalón desde el cuerpo libre)



Considerando la sección 2-2 y el cuerpo libre a la izquierda,

cortante a la izquierda = 14 − 4 = 10 klb ↑

$V_{L_1U_2}$ = 10 klb ↓ compresión (empujón contra el cuerpo libre)



Las componentes verticales de fuerza en todas las diagonales son como se muestran en la figura 7.15.

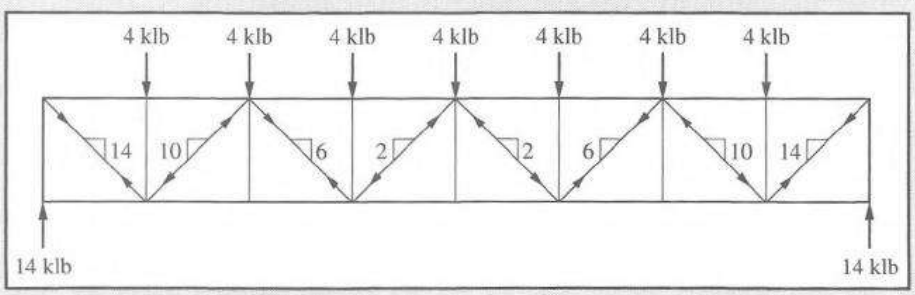


Figura 7.15

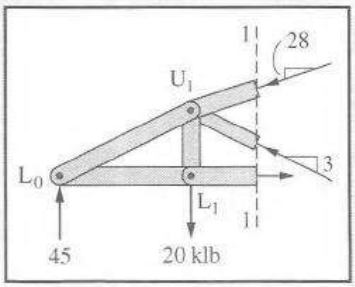
Las armaduras con cuerdas no paralelas tienen dos o más diagonales en cada tablero, y todas ellas pueden tener componentes verticales de fuerza; sin embargo, su suma debe ser igual y opuesta al cortante en el tablero. Si se conocen todas excepto una de las fuerzas diagonales en un tablero, la restante puede determinarse por cortantes, como se ilustra en el ejemplo 7.7. ■

EJEMPLO 7.7

Haciendo referencia a las secciones 1-1 y 2-2 de la armadura de la figura 7.7 y suponiendo que las fuerzas en las cuerdas U_1U_2 y U_2U_3 se conocen, encuentre las componentes verticales de fuerza en U_1L_2 y L_2U_3 por el método de cortantes.

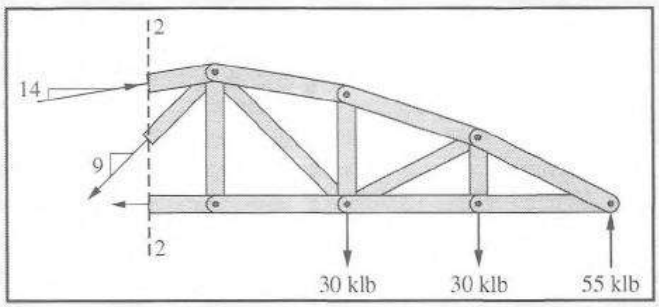
Solución. Considerando la sección 1-1 y el cuerpo libre a la izquierda,

$$\text{cortante a la izquierda} = 25 \text{ klb} \uparrow$$
$$V_{U_1U_2} = 28 \text{ klb} \downarrow$$
$$\text{Entonces } V_{U_1L_2} = 3 \text{ klb} \uparrow \text{ compresión}$$



Considerando la sección 2-2 y el cuerpo libre a la derecha,

$$\text{cortante a la derecha} = 5 \text{ klb} \downarrow$$
$$V_{U_2U_3} = 14 \text{ klb} \uparrow$$
$$\text{Entonces } V_{L_2U_3} = 9 \text{ klb} \downarrow \text{ tensión}$$



7.4 MIEMBROS CON FUERZA CERO

A menudo, algunos miembros de armadura fácilmente identificables tienen fuerza cero (suponiendo que se desprecian las fuerzas secundarias debidas al peso de los miembros, a excentricidades de la carga, etc.). La habilidad para detectar esos miembros hará que en algunas ocasiones resulte más rápido el análisis de una armadura. Los miembros de fuerza cero pueden identificarse a menudo por medio de un breve examen de los nudos de la armadura. Varias ilustraciones se presentan aquí, haciéndose referencia a las armaduras de la figura 7.16.

1. *Si sólo un miembro en un nudo tiene una fuerza posible en una dirección específica, y ninguna carga externa aplicada al nudo tiene una componente en la dirección del miembro, la fuerza en el miembro debe ser cero.* Un examen del nudo L_3 de la armadura de la parte

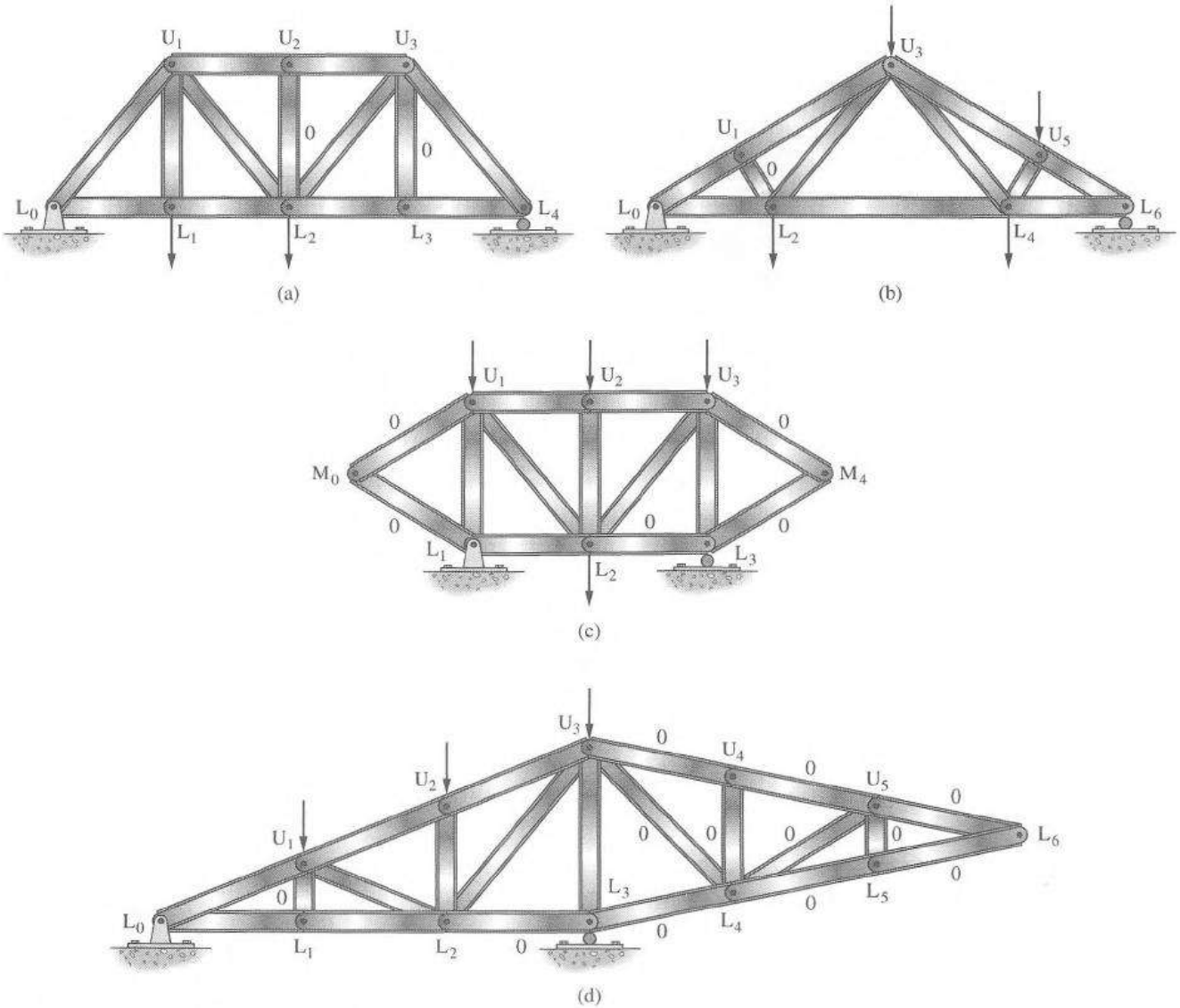
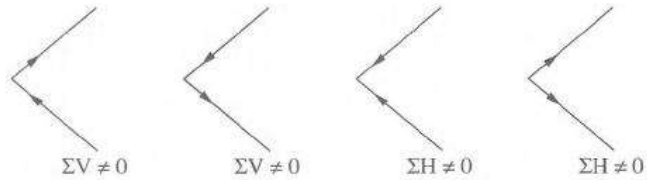


Figura 7.16 Miembros con fuerza cero.

(a) en la figura 7.16 pone de manifiesto que el miembro U_3L_3 tiene fuerza cero porque no hay una carga externa aplicada con una componente vertical en el nudo. Si el miembro tuviese una fuerza, la suma de las fuerzas verticales en L_3 no podría ser cero. Un examen similar del nudo U_2 muestra que el miembro U_2L_2 tiene fuerza cero.

2. *No sólo debe la suma de las fuerzas en las direcciones x y y en un nudo particular ser cero, sino también la suma de las fuerzas en cualquier dirección en el nudo debe ser igual a cero.* Por lo tanto, la fuerza en el miembro U_1L_2 de la armadura de la parte (b) en la figura debe ser cero, ya que no hay otras fuerzas en el nudo U_1 con componentes perpendiculares a los miembros L_0U_1 y U_1U_3.
3. *Dos miembros que están unidos pero no son colineales entre sí, tendrán fuerzas cero en ellos a menos que una carga externa esté aplicada en el nudo en el plano de los miembros.* En la armadura de la parte (c) en la figura 7.16, los miembros M_0U_1 y M_0L_1, son miembros de fuerza cero. Si uno de los miembros tuviera una fuerza, sería imposible

tener una fuerza en el otro miembro tal que $\sum H = 0$ y $\sum V = 0$. Véanse los siguientes bocetos.



4. Basándose en las ilustraciones anteriores es fácil identificar doce miembros de fuerza cero en la armadura de la parte (d) de la figura 7.16. Estos miembros pueden identificarse examinando los siguientes nudos en el orden dado: L_6, L_5, U_5, U_4, L_4, L_3 y L_1.

7.5 CUANDO LAS HIPÓTESIS NO SON CORRECTAS

El ingeniero proyectista debe darse cuenta de que a menudo sus hipótesis relativas al comportamiento de una estructura (nudos articulados, cargas aplicadas sólo en los nudos, rodillos sin fricción, etc.) no son del todo válidas. En consecuencia, debe considerar qué puede pasarle a una estructura si las hipótesis que utilizó en el análisis son erróneas en alguna medida. Tal vez un mecanismo de expansión o un rodillo resistirá (debido a la fricción) una gran proporción de las fuerzas horizontales presentes. ¿Cómo afectará esto a las fuerzas en las barras de una armadura en particular? Por esto se incluyó al final del capítulo 6 la armadura del problema 6.33, donde se supuso que un tercio de la carga horizontal era resistida por el rodillo.

Los tipos de soportes en los extremos que se usen pueden tener un efecto considerable en la magnitud de las fuerzas causadas por cargas laterales.

En las armaduras para techos muy cortas, por lo general no se toman medidas para la expansión y la contracción ocasionadas por la temperatura, y ambos extremos de las armaduras se anclan firmemente a sus soportes. Las armaduras así construidas son estáticamente indeterminadas, pero la práctica acostumbrada es suponer que las cargas horizontales se dividen en partes iguales en ambos soportes.

En armaduras de techo muy largas se considera necesario tomar medidas para la expansión y la contracción de éstas. Por lo general, los pernos en uno de los extremos se colocan en agujeros ovalados que proporcionan espacio para los cambios de longitud previsibles. Se dota también a este extremo con una placa de base sobre la cual la armadura puede deslizarse.

En realidad, es imposible proporcionar un apoyo sin fricción. Desde un punto de vista práctico, el valor máximo de la reacción horizontal en el extremo de expansión es igual a la reacción vertical multiplicada por el coeficiente de fricción (siendo un tercio una estimación razonable). Si se presenta corrosión, impidiéndose así el movimiento (lo cual es muy probable), una división en partes iguales de las cargas laterales entre los dos extremos de la armadura tal vez sea la mejor solución.

El autor una vez leyó de un caso interesante en el cual los propietarios de un edifico con un techo sustentado por una serie de armaduras Fink decidieron que la barra de la cuerda inferior media (L_4L_{10} en la figura 7.17) les estorbaba. Por lo tanto, ellos retiraron la barra de algunas de las armaduras y para sorpresa del diseñador el techo no se colapsó. Evidentemente el rodillo o el dispositivo de expansión en un extremo de las armaduras (tal vez pernos en una ranura) no permitieron el movimiento o muy poco. Como resultado, las armaduras evidentemente se comportaron como un arco de tres articulaciones, como se muestra en la figura 7.17. Sin embargo, en muchas situaciones en las cuales las hipótesis no resultan ser correctas, los resultados son más desagradables que lo que fueron para estas armaduras Fink.

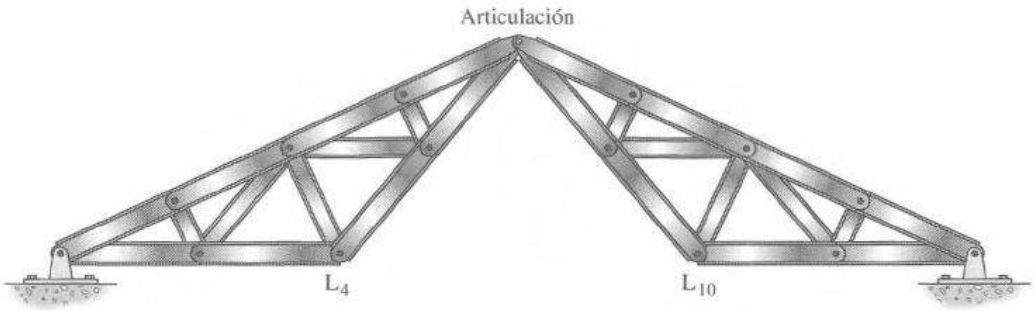


Figura 7.17

7.6 ARMADURAS SIMPLES, COMPUESTAS Y COMPLEJAS

A menudo se clasifica a una armadura como simple o compuesta, de acuerdo con su forma geométrica, es decir, los "bloques constructivos" que la forman. Estas no son referencias a la complejidad del análisis para determinar las fuerzas en las barras. Para una discusión completa, veremos brevemente las categorías de armaduras de las que surgen estas referencias. Veremos también algunos aspectos relativos al análisis de armaduras de cada categoría.

Armaduras simples

Hemos visto que el primer paso para formar una armadura es conectar tres barras en sus extremos para formar un triángulo. Se forman figuras subsecuentes añadiendo dos barras en un nudo; las nuevas barras se juntan en el nuevo nudo y cada una se articula en sus extremos opuestos a uno de los nudos existentes. Las armaduras formadas de esta manera se denominan *armaduras simples.* Sin embargo, el autor no está sugiriendo que todas las armaduras formadas de esta manera sean "simples" de analizar.

Armaduras compuestas

Una *armadura compuesta* es una armadura formada al conectar dos o más armaduras simples. Las armaduras simples pueden conectarse mediante tres eslabones no paralelos y no concurrentes, por un nudo y un eslabón, por una armadura de conexión, por dos o más nudos, etc. Puede formarse de esta manera un número casi ilimitado de armaduras. La armadura Fink mostrada en la figura 7.18(a) consiste en las dos armaduras simples sombreadas que están conectadas por un nudo y un eslabón. Todos los métodos para revisar la estabilidad y el análisis pueden usarse en armaduras compuestas con igual éxito.

Armaduras complejas

Hay unas cuantas armaduras que son estáticamente determinadas, pero que no cumplen con los requisitos necesarios para ser clasificadas como simples o compuestas. Una armadura de este tipo se muestra en la figura 7.18(b). A estas armaduras se les llama *complejas.*

Las barras de las armaduras simples y compuestas suelen disponerse de manera que pueden pasarse secciones a través de tres barras simultáneamente, tomarse momentos en la intersección de dos de éstas y encontrarse la fuerza en la tercera. Las armaduras complejas no pueden analizarse de esta manera. No solamente falla el método de las secciones para simplificar el análisis, el método de los nudos tampoco sirve. La dificultad reside en que hay tres barras concurriendo a casi cada nudo. Por lo tanto, se tienen demasiadas incógnitas en todo lugar de la armadura para que sea

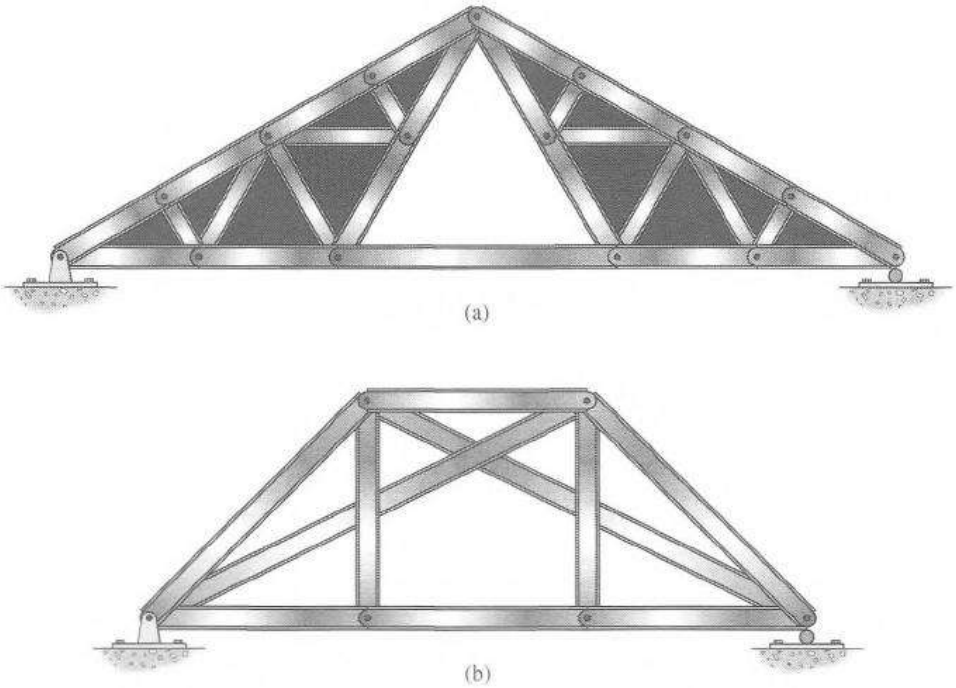


Figura 7.18 Una armadura compuesta (a) y una armadura compleja (b).

posible pasar una sección y obtener de manera directa la fuerza en cualquier barra por medio de las ecuaciones de equilibrio estático.

Un método para calcular las fuerzas en las armaduras complejas es escribir las ecuaciones de equilibrio estático en cada nudo, obteniéndose 2j ecuaciones. Éstas pueden resolverse de manera simultánea para las fuerzas en las barras y para las reacciones externas. Con frecuencia es posible calcular inicialmente las reacciones externas y usar sus valores como una comprobación de los resultados obtenidos a partir de la solución de las ecuaciones simultáneas. Este método funciona para cualquier armadura compleja estáticamente determinada, pero la solución de las ecuaciones es muy tediosa, a menos que se disponga de una computadora digital. Observe que el software al final del libro puede usarse fácilmente para analizar armaduras complejas, así como otros tipos de armaduras. Si una armadura es inestable, la computadora lo indicará y no se efectuará ningún análisis.

En general, puede decirse que hay poca justificación para el uso de armaduras complejas, ya que es posible utilizar armaduras simples o compuestas que cumplan el mismo propósito satisfactoriamente. Sin embargo, para un análisis más completo de las armaduras complejas, remítase al método de los miembros sustitutos en el texto *Theory of Structures,* de S. P. Timoshenko y D. H. Young.[1]

7.7 PRUEBA DE LA CARGA CERO

Basándose en la información presentada hasta este punto, el lector encontrará que es muy difícil determinar si las estructuras complejas son estables o inestables sin realizar un análisis completo. Si se hace este análisis y todos los nudos de la armadura están en equilibrio, la armadura será estable. Si todos los nudos de la armadura no están en equilibrio, la armadura es inestable. Sin embargo, el procedimiento de análisis puede ocupar mucho tiempo y puede ser desalentador si

[1] S. P. Timoshenko y D. H. Young, *Theory of Structures.* 2a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill, 1965), 92-103.

los cálculos muestran que la estructura es inestable. Ciertamente que nos gustaría saberlo antes de realizar un análisis. Como resultado, en esta sección se presenta un método sencillo para revisar la estabilidad de cualquier tipo de armadura.

Una armadura estáticamente determinada tiene sólo un conjunto posible de fuerzas para una carga dada y entonces se dice que tiene una *solución única*. Por lo tanto, si es posible mostrar que puede obtenerse más de una solución para una estructura para un conjunto dado de condiciones, la estructura es inestable.

Esta discusión conduce a la idea de la así llamada *prueba de la carga cero*. Si no hay cargas externas aplicadas a una armadura, es lógico suponer que todos sus miembros tendrán fuerzas cero. Si se asigna una fuerza supuesta diferente de cero a uno de los miembros de una armadura que no tiene cargas externas y se calculan las fuerzas en los otros miembros, los resultados deben ser incompatibles si la armadura es estable. Si las fuerzas calculadas son compatibles, la armadura es inestable.

Para ilustrar este procedimiento, se supone que el miembro horizontal superior de cada una de las tres armaduras de la figura 7.19 tiene una fuerza de tensión de X y se calculan las otras fuerzas de las barras calculando los nudos de arriba hacia abajo. Se verá que los tres nudos inferiores de las armaduras de las partes (a) y (b) de la figura no pueden equilibrarse, mientras que sí se puede para la armadura de la parte (c). Una estructura que tiene cero cargas externas también deberá tener cero fuerzas internas. Por lo tanto la armadura (c) debe ser inestable o tener *forma crítica*. Para las

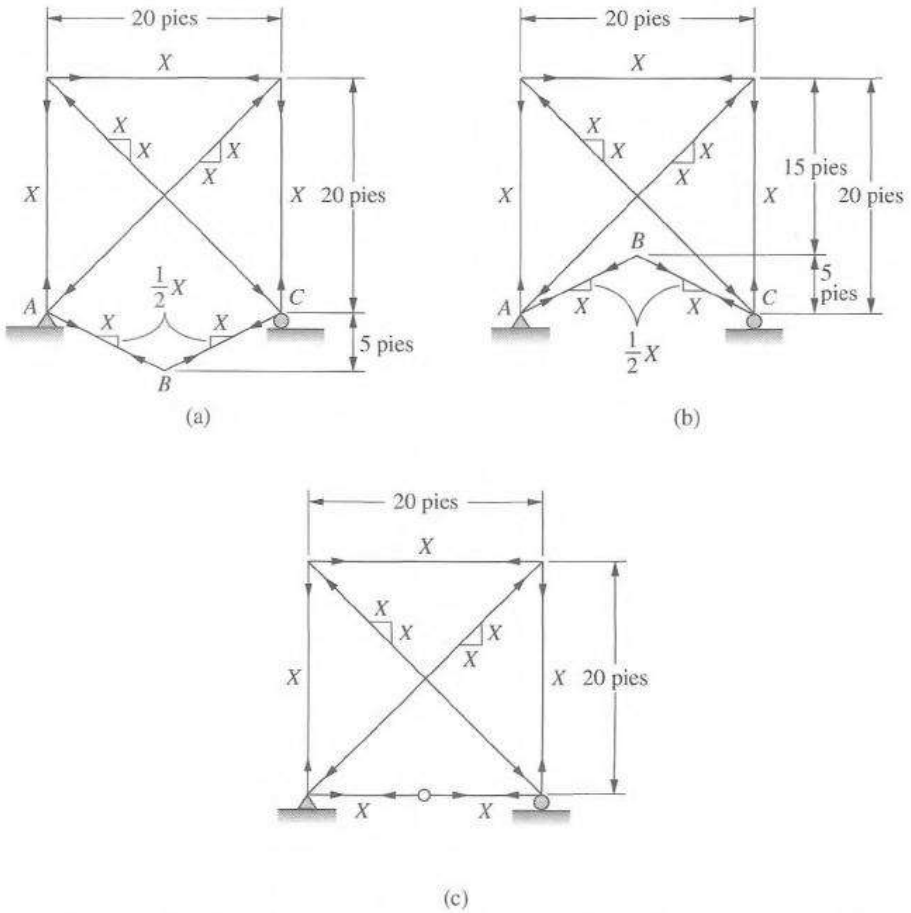


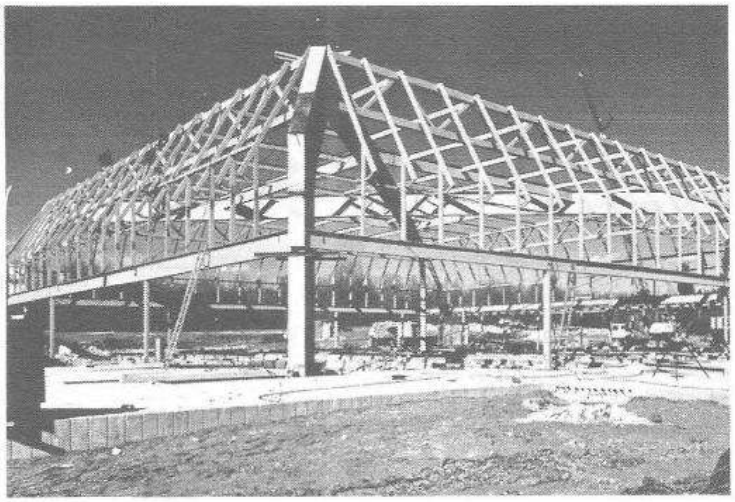
Figura 7.19 (a) Los nudos *A*, *B* y *C* no están en equilibrio. La armadura es estable. (b) Los nudos *A*, *B* y *C* no están en equilibrio. La armadura es estable. (c) Todos los nudos están en equilibrio. La armadura es inestable.

dos primeras disposiciones, (a) y (b), es imposible suponer un conjunto de fuerzas en las barras diferentes de cero para las cuales los nudos estén en equilibrio, y por lo tanto debe ser estable.[2]

7.8 ESTABILIDAD

El tema de la estabilidad de armaduras se vio brevemente en el capítulo 6 y en la última sección. Conforme desarrollemos armaduras más complicadas como las examinadas posteriormente en este capítulo, el asunto de la estabilidad y nuestra habilidad para reconocer armaduras inestables se hace más importante. Por esta razón, analizaremos de nuevo la estabilidad de las armaduras.

La estabilidad de una armadura siempre puede determinarse mediante el análisis estructural. Los miembros de una armadura deben disponerse para soportar las cargas externas. ¿Qué es lo que soportará a las cargas externas satisfactoriamente?, es una pregunta difícil de contestar si nos limitamos a observar superficialmente a la armadura en cuestión, pero un análisis de la estructura siempre dará la respuesta. Si la estructura es estable, el análisis dará resultados razonables y el equilibrio será satisfecho en todos los nudos de la armadura. Por otra parte, si una armadura es inestable, el equilibrio no puede satisfacerse concurrentemente en todos los nudos de la armadura.



Casa de campo de la universidad en Largo, Maryland. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

Los diversos medios para identificar rápidamente las estructuras inestables son muy valiosos para el analista. El análisis y revisión cuidadosos del trabajo para una armadura puede ocupar tanto tiempo y puede ser frustrante si finalmente se descubre que la armadura es inestable y todo el tiempo que se desperdició. En los siguientes párrafos se identifican varios métodos para identificar rápidamente a este tipo de estructuras, sin necesidad de tratar de analizar la estructura primero. Estos métodos son adicionales a la prueba de la carga cero que se describió en la última sección.

Menos de 2j – r barras

Es obvio que una armadura con menos de 2j − r barras es inestable internamente. Sin embargo, una armadura puede tener 2j − r o más barras y ser, con todo, inestable. La armadura de la figura 7.20 (a) satisface la relación 2j – r. Es estáticamente determinada y estable. Sin embargo, si se

[2] G. L. Rogers y M. L. Causey, *Mechanics of Engineering Structures* (Nueva York: John Wiley and Sons, Inc., 1962), 19-20.

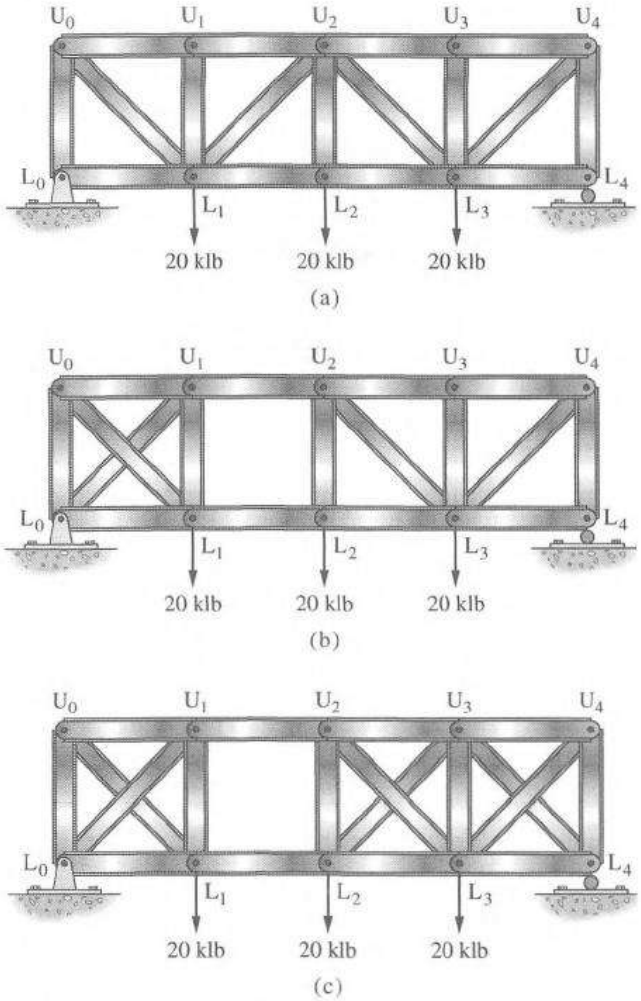


Figura 7.20 Geometrías (a) estable y (b y c) inestable de armaduras.

retira la diagonal en el segundo tablero y se coloca en el primero, como se muestra en la figura 7.20(b), la armadura se volverá inestable aunque el número de barras permanezca igual a 2j – r. La parte de la armadura a la izquierda del segundo tablero puede moverse con respecto a la parte de la armadura a la derecha del segundo tablero porque éste es un rectángulo. Como se indicó antes, una forma rectangular es inestable, a menos que se restrinja de alguna manera.

De manera semejante, la adición de diagonales al tercero y al cuarto tableros, como se muestra en la figura 7.20(c), no impedirá que la armadura continúe siendo inestable. Hay dos barras más que 2j – r y la armadura es, al parecer, estáticamente indeterminada de grado 2, pero en realidad es inestable por serlo así el segundo tablero.

Armaduras que consisten en formas que no son todas triángulos

Conforme el lector vaya conociendo las armaduras le será más fácil, con un solo vistazo, determinar si son estables o inestables. Por ahora le sería más conveniente estudiar con todo detalle las armaduras en las que sospeche la posibilidad de inestabilidades. Cabe esperar semejante posibilidad cuando una armadura no consiste enteramente en triángulos. Las armaduras mostradas en la figura 7.20(b) y (c) son de este tipo.

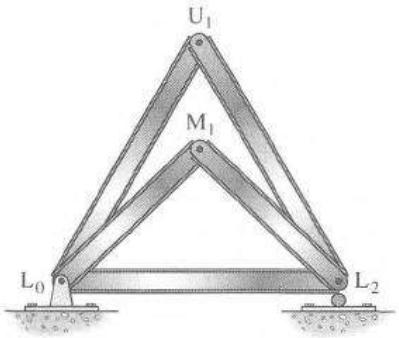


Figura 7.21 Una armadura estable que no consiste enteramente en triángulos.

La falacia de esta idea acerca de las formas triangulares es que, en realidad, el número de armaduras perfectamente estables que pueden formarse sin constar enteramente de triángulos es infinito. Como ejemplo, consideremos la armadura de la figura 7.21. El triángulo básico $L_0U_1L_2$ ha sido ampliado con la adición del nudo M_1 y de las barras L_0M_1 y M_1L_2. La armadura permanece estable aunque la forma $L_0M_1L_2U_1$ no es un triángulo. El nudo M_1 se mantiene firme en su posición y no puede moverse sin cambiar la longitud de una o más barras. Por lo tanto, la armadura es estable.

Las armaduras compuestas y las complejas frecuentemente contienen formas no triangulares pero son estables. El principio fundamental es que si una armadura consta de figuras que no son triangulares, deberá examinarse con cuidado para ver si alguno de los nudos puede moverse en cualquier dirección sin ocasionar cambios de longitud en una o más barras de la armadura.

Soportes inestables

Una estructura no puede ser estable si sus soportes son inestables. Para ser estable, la estructura deberá estar soportada por lo menos por tres fuerzas no paralelas y no concurrentes. Este tema se vio en el capítulo 4.

7.9 ECUACIONES DE CONDICIÓN

En algunas ocasiones, dos o más estructuras separadas están conectadas entre sí de manera que sólo un tipo de fuerza puede transmitirse a través de la conexión. Vimos que el arco de tres articulaciones y las estructuras con voladizos del capítulo 4 pertenecen a este tipo por estar conectadas por medio de articulaciones internas que no transmiten rotaciones.

Tal vez la manera más sencilla de producir una articulación en una armadura sea omitir la barra de una de las cuerdas en uno de los tableros, como se muestra en la figura 7.22(a). Es claro que el momento de todas las fuerzas externas que actúan sobre la armadura, a la izquierda o a la derecha del pasador de conexión en el nudo L_3 debe ser cero. La armadura es estáticamente determinada porque disponemos de tres ecuaciones de la estática más una ecuación de condición para calcular las cuatro componentes de reacción.

La omisión de barras en algunas otras situaciones puede producir ecuaciones de condición. Se ha omitido una diagonal de la armadura de la figura 7.22(b) entre los dos apoyos interiores. Sin barras en el tablero que tengan capacidad de tener una componente vertical de fuerza, no puede transmitirse cortante a través del tablero, y se dispone de una ecuación de condición. Los apoyos en cada lado de la forma rectangular generalmente inestable evitan que se desplome.

Hablando desde un punto de vista práctico, las barras mencionadas como omitidas probablemente no se omitirán porque su eliminación desmerecería la apariencia de la estructura y podría atemorizar a algunos usuarios. Además, la presencia de estas barras podría ser útil durante

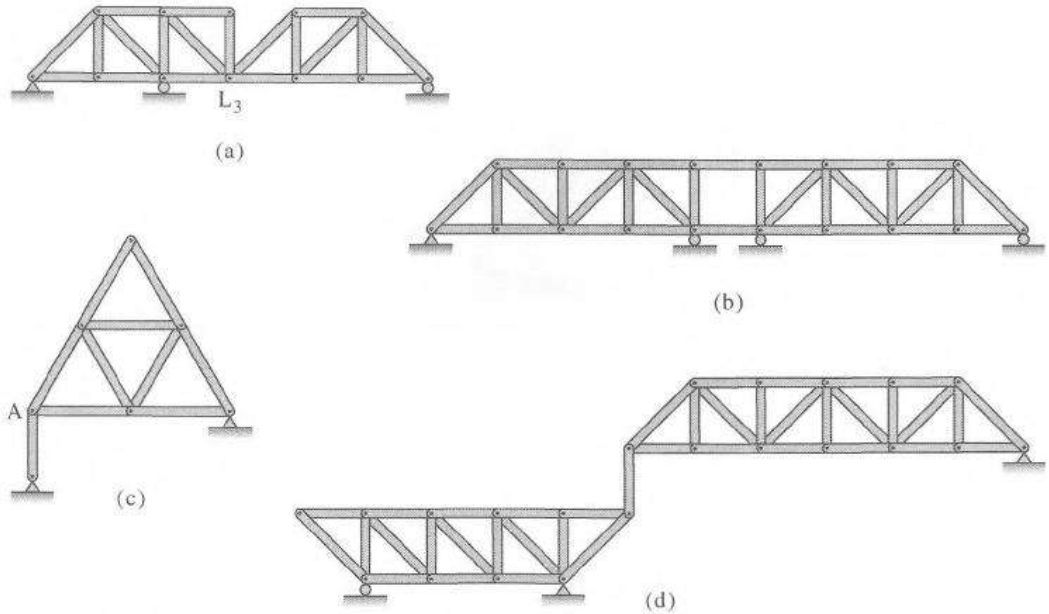


Figura 7.22

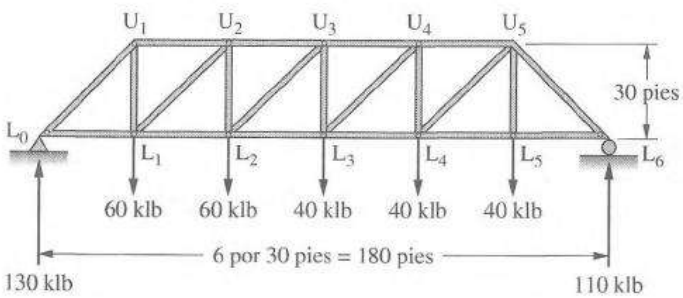
el montaje. Frecuentemente se ensamblan de modo que puedan ajustarse para que sean inactivas en la armadura terminada.

La figura 7.22(c) y (d) presenta dos situaciones adicionales en las que se producen ecuaciones de condición. En la primera de éstas hay cuatro componentes de reacción y la estructura parece ser estáticamente indeterminada externamente. Sin embargo, el nudo en A tiene conexión de pasador y no puede transmitir rotación. Esta ecuación de condición hace que la estructura sea estáticamente determinada externamente. La figura 7.22(d) muestra dos armaduras separadas que están conectadas por un eslabón. El eslabón hace disponibles dos ecuaciones de condición, ya que no puede transmitirse rotación a ninguno de los dos extremos.

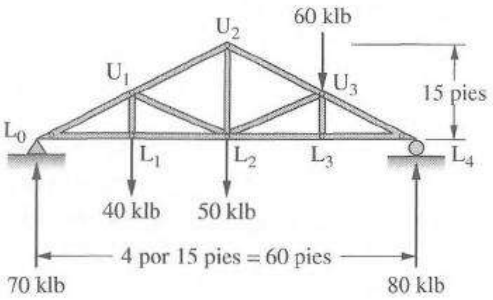
7.10 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

En los problemas 7.1 al 7.6, determine las fuerzas, o sus componentes verticales y horizontales, para las barras indicadas usando una sola ecuación de momento en cada caso. Las reacciones están dadas para todas las armaduras. Indique si las barras están a compresión o a tensión.

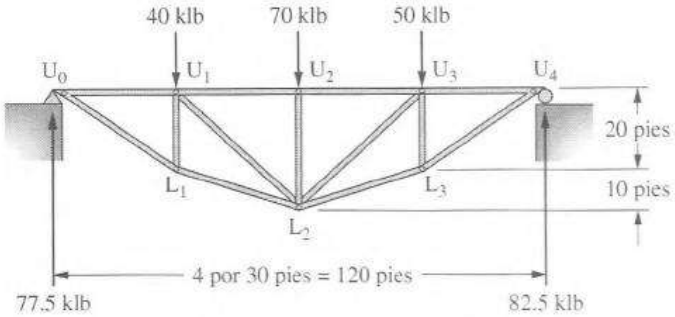
7.1 Barras L_1L_2 y U_4U_5. (*Resp.:* $F_{L_1L_2} = +200$ klb, $F_{U_4U_5} = -180$ klb.)



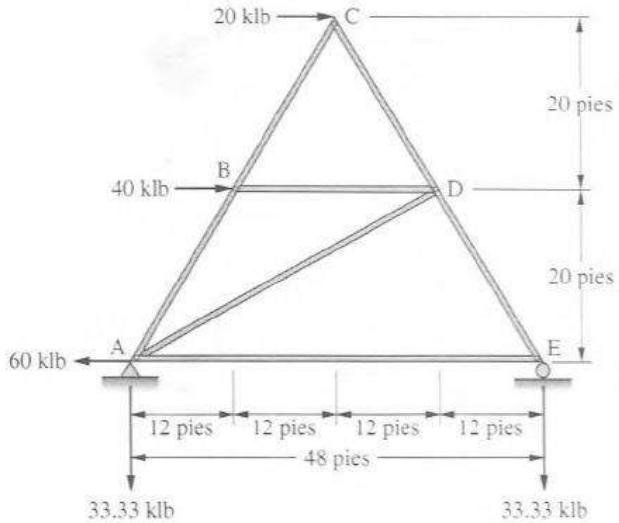
7.2 Barras U_1U_2 y L_2U_3.



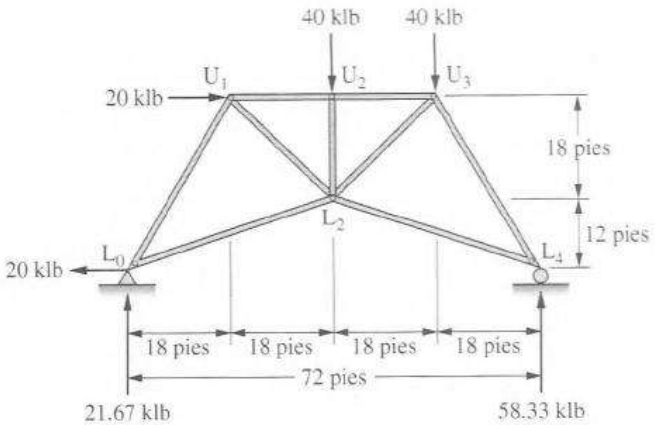
7.3 Barras U_1U_2 y L_2U_3. (*Resp.:* $F_{U_1U_2} = -115$ klb, $V_{L_2U_3} = -8.75$ klb.)



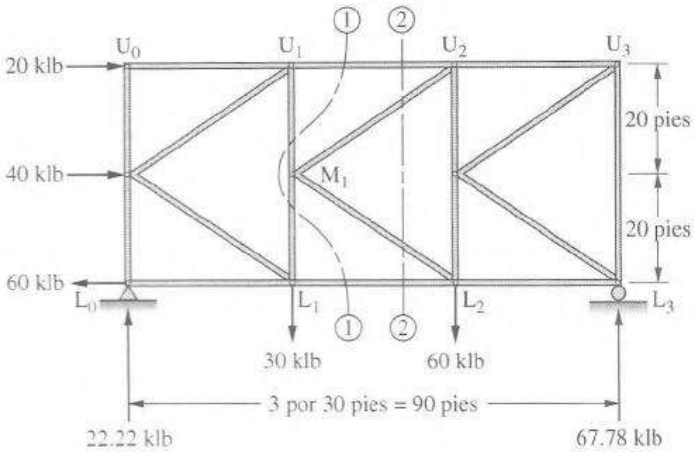
7.4 Barras AB y CD.



7.5 Barras U_1U_2 y L_2L_4. (*Resp.:* $F_{U_1U_2} = -76.67$ klb, $H_{L_2L_4} = +43.75$ klb.)

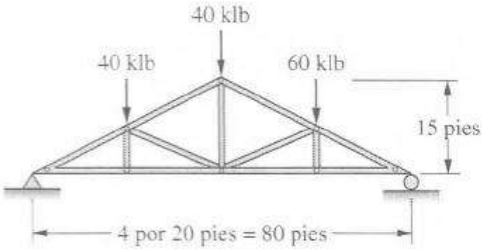


7.6 Determine la fuerza en U_1U_2 usando la sección 1-1. Teniendo ese valor, calcule la fuerza en M_1U_2 haciendo uso de la sección 2-2.

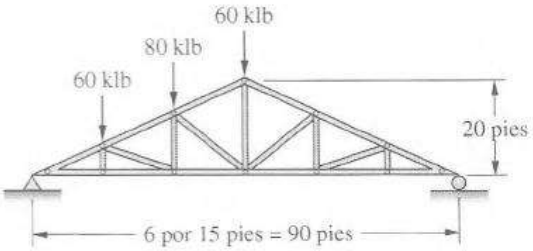


En los problemas 7.7 al 7.31, determine las fuerzas en todos los miembros de esas armaduras usando el método de las secciones o el método de los nudos, según sea más conveniente. (Para los problemas 7.27 y 7.28, sólo debe determinarse la mitad de las fuerzas en las barras.)

7.7 (*Resp.:* $F_{U_2L_2} = +50$ klb, $V_{U_2U_3} = -45$ klb.)



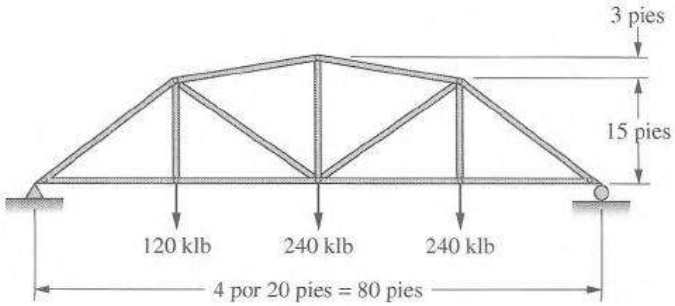
7.8



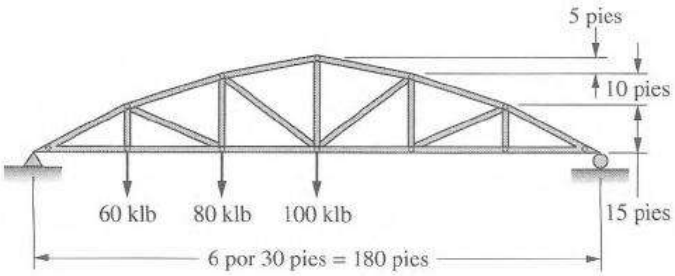
7.9 Resuelva el problema 7.7 si los tableros se cambian de 4 @ 20 pies a 4 @ 15 pies, la altura de la armadura cambia de 15 a 20 pies, y las cargas de 40 klb se duplican. (*Resp.:* $F_{L_1L_2} = +172.5$ klb, $V_{U_2U_3} = -75$ klb.)

7.10 Resuelva el problema 7.7 si se aplica una carga uniforme de 3 klb/pie en todo el claro en adición a las cargas mostradas. Esta carga adicional debe aplicarse en los nudos de la cuerda inferior.

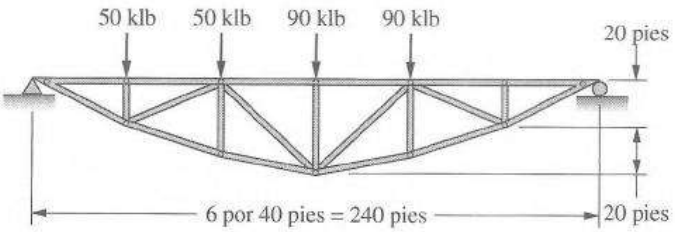
7.11 (*Resp.:* $V_{U_1L_2} = +80.0$ klb, $H_{U_2U_3} = -466.7$ klb.)



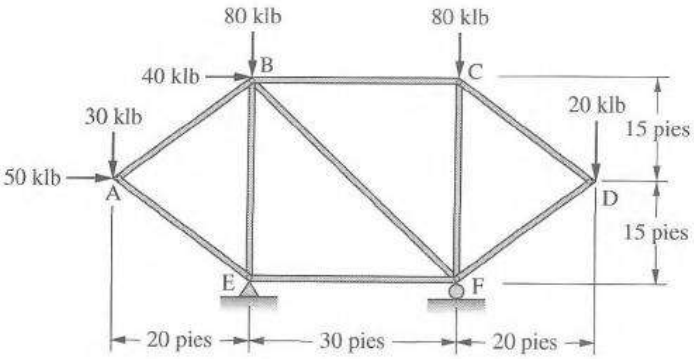
7.12



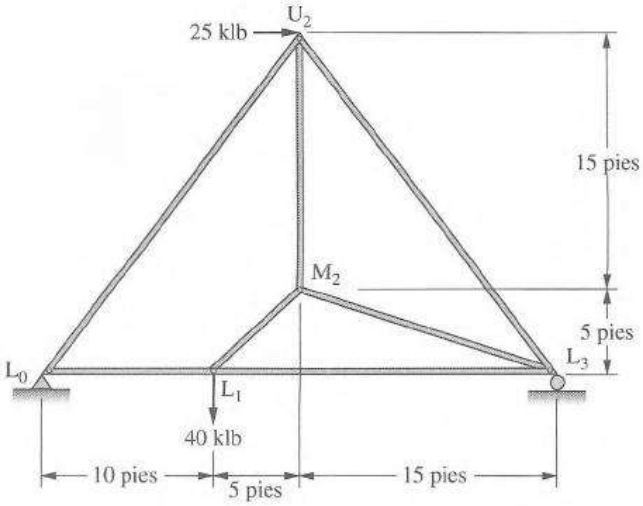
7.13 (*Resp.:* $V_{U_2L_3} = -33.33$ klb, $F_{U_3U_4} = -300$ klb.)



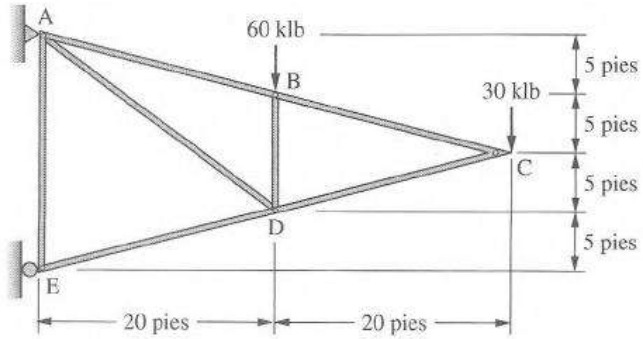
7.14



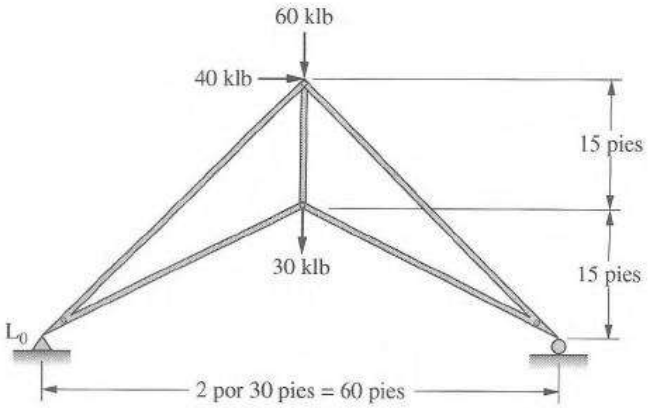
7.15 (*Resp.:* $F_{L_1L_3} = -7.5$ klb, $V_{U_2L_3} = -43.33$ klb.)



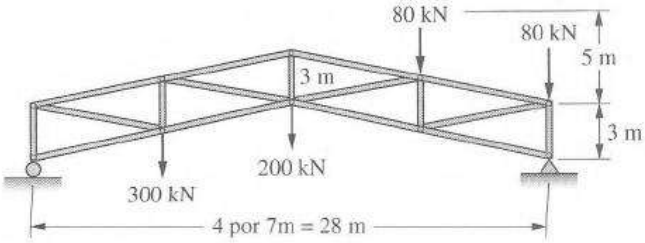
7.16



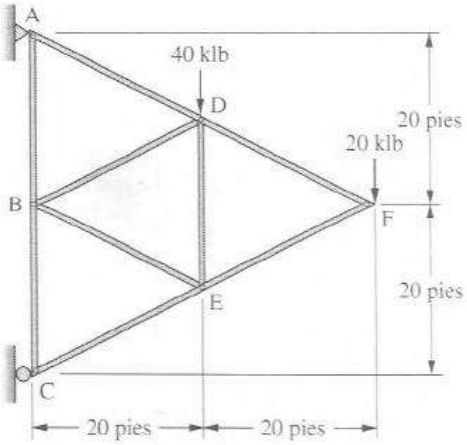
7.17 (*Resp.:* $F_{U_1L_1} = +160$ klb, $V_{L_1L_2} = +65$ klb.)



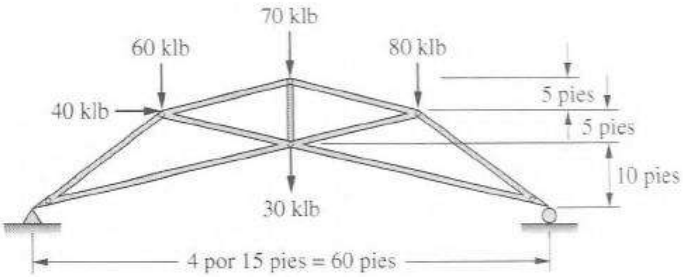
7.18



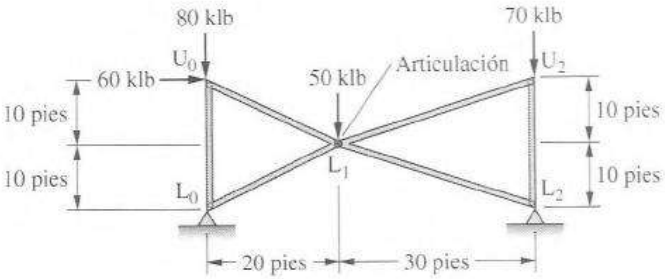
7.19 (*Resp.:* $H_{BE} = +20$ klb, $F_{DE} = -20$ klb.)



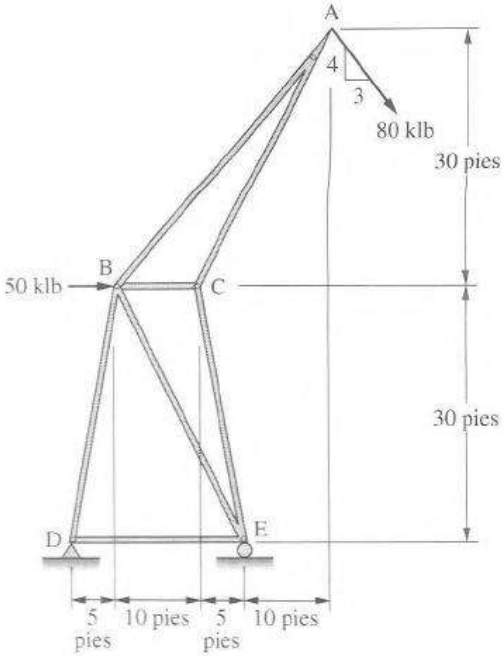
7.20



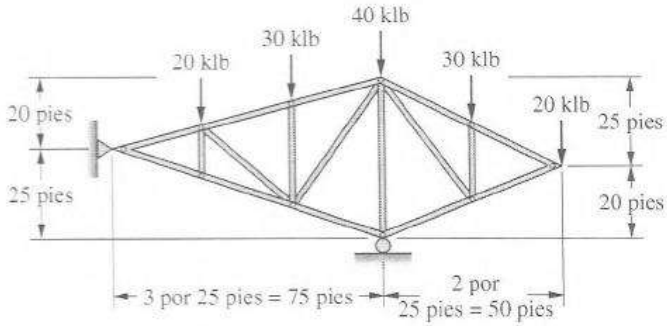
7.21 (*Resp.:* $H_{U_0L_1} = -60$ klb, $F_{U_2L_2} = -70$ klb.)



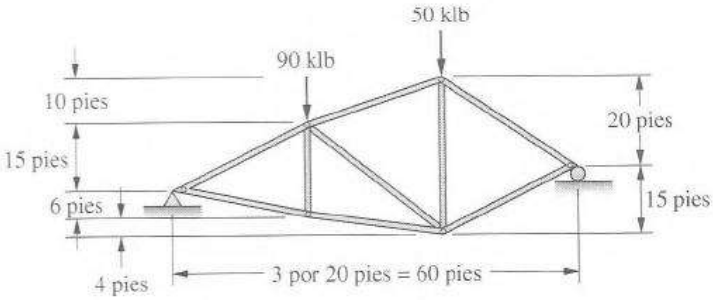
7.22



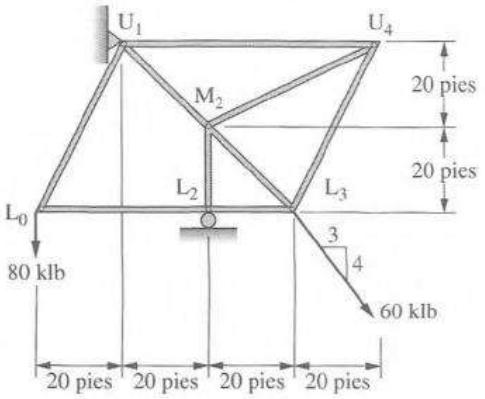
7.23 (*Resp.:* $V_{U_1U_2} = -15.56$ klb, $H_{U_3U_4} = +22.22$ klb.)



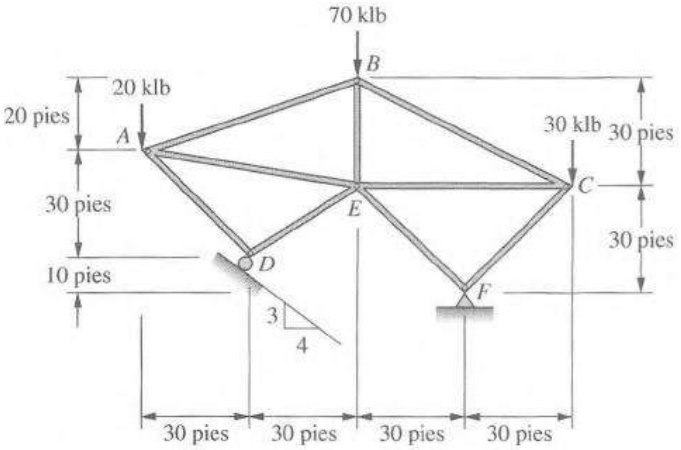
7.24



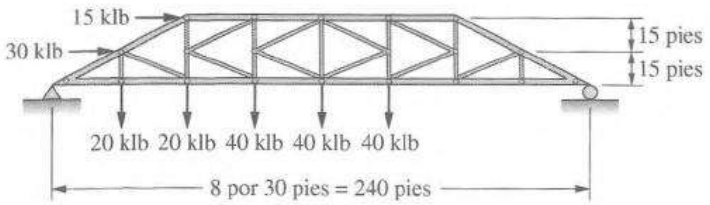
7.25 (*Resp.:* $F_{U_1U_4} = -28$ klb, $V_{M_2L_3} = +66.67$ klb.)



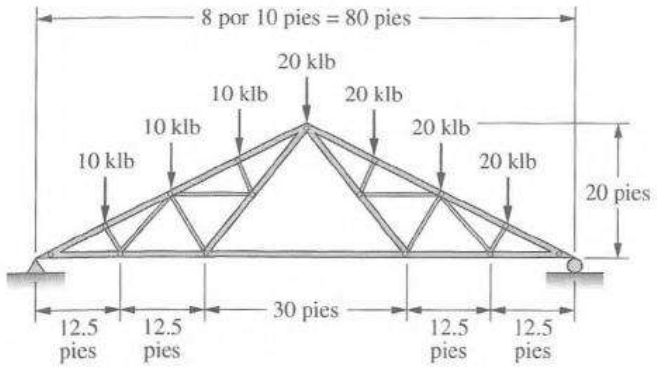
7.26



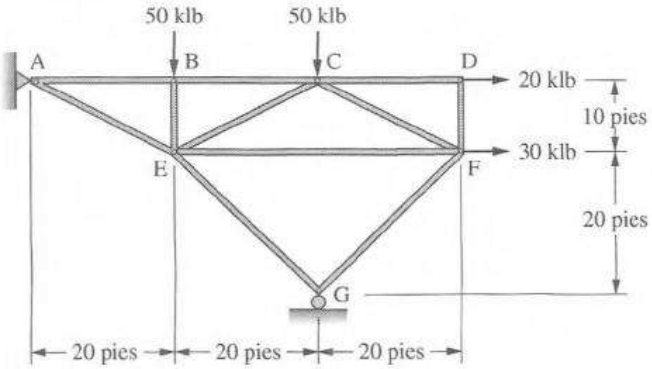
7.27 Determine las fuerzas en la mitad izquierda de la armadura incluyendo la vertical media. (*Resp.:* $F_{U_2U_3} = -187.5$ klb, $F_{L_3L_4} = +236.25$ klb.)



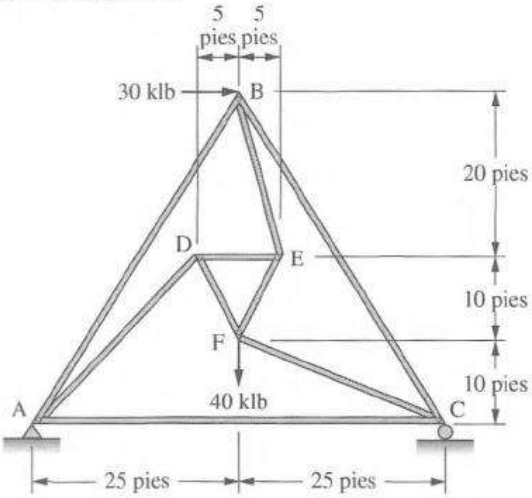
7.28 Determine las fuerzas en la mitad izquierda de la armadura.



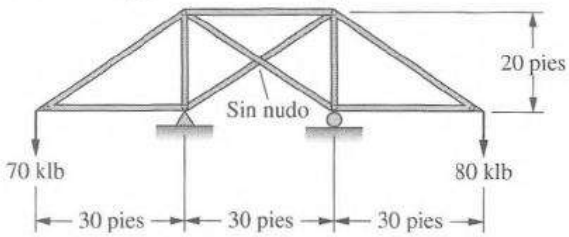
7.29 (*Resp.:* $F_{AB} = -15$ klb, $F_{EF} = +131.25$ klb, $F_{FG} = -47.73$ klb.)



7.30 (Sugerencia: usted puede dibujar una sección alrededor del triángulo DEF, tomar momentos en la intersección de dos de las diagonales cortadas para determinarla fuerza en la tercera diagonal.)

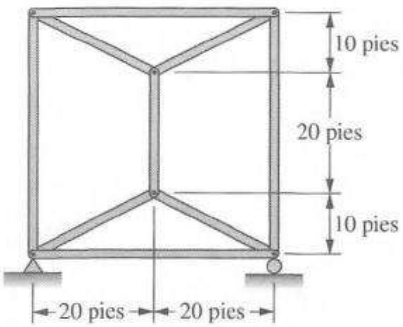


7.31 (*Resp.:* $F_{U_1U_2} = +225$ klb, $F_{L_2L_3} = -120$ klb.)

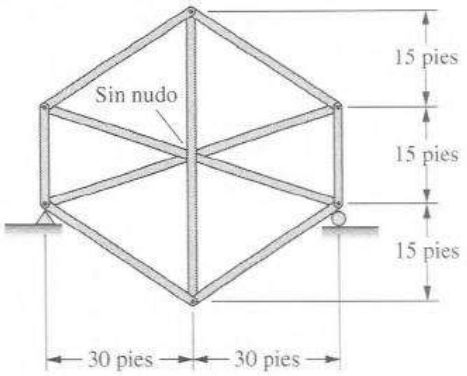


En los problemas 7.32 al 7.39 use la prueba de la carga cero para determinar si los miembros tienen forma crítica.

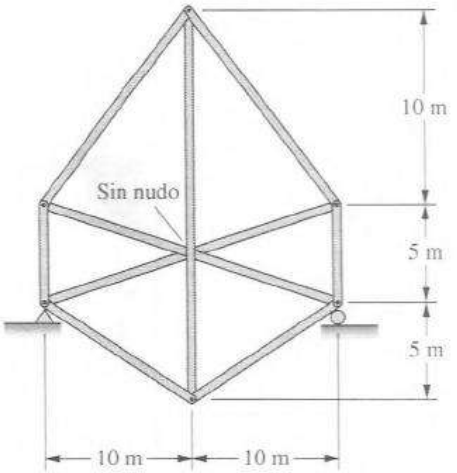
7.32



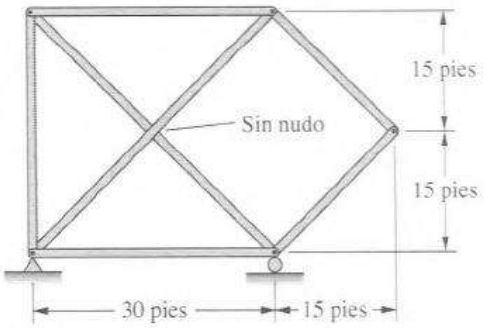
7.33 (*Resp.:* Inestable.)



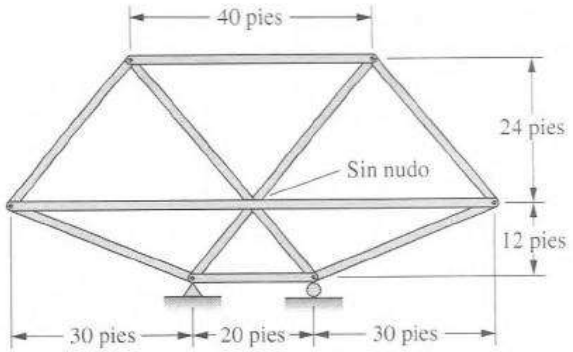
7.34



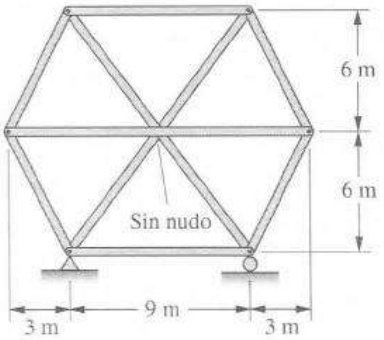
7.35 (*Resp.:* Estable.)



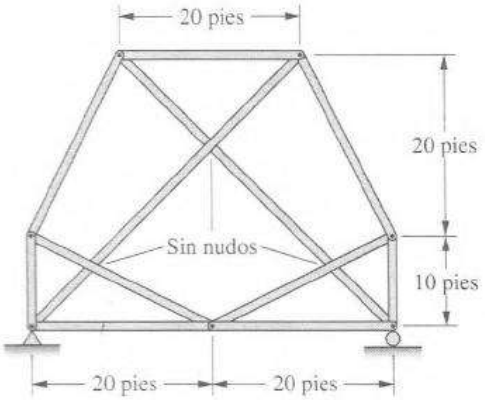
7.36



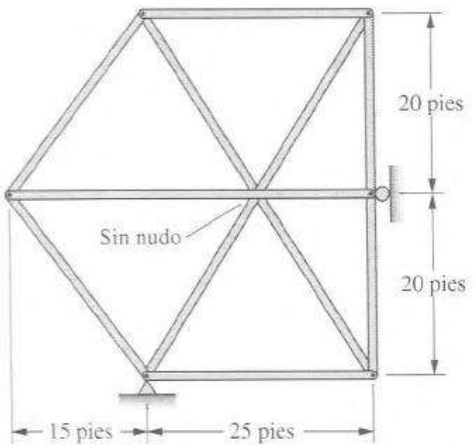
7.37 (*Resp.:* Inestable.)



7.38



7.39 (*Resp.:* Estable.)



Para los problemas 7.40 a 7.42 use ya sea SABLE32 o SAP2000 para repetir el análisis de las armaduras dadas.

7.40 Problema 7.4.

7.41 Problema 7.24 (*Resp.:* $F_{L_0U_1} = -91.27$ klb, $F_{U_1L_2} = -58.95$ klb.)

7.42 Problema 7.25.

Capítulo 8

Armaduras espaciales o tridimensionales

8.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta un muy breve y elemental análisis de pequeñas armaduras tridimensionales. Se espera que este material ayude al lector a entender el comportamiento de las estructuras tridimensionales y a reconocer que las ecuaciones de la estática son aplicables en tres dimensiones así como lo son en dos.

Para todas, excepto para las estructuras tridimensionales muy pequeñas, el análisis por los métodos de los nudos y de los momentos descritos aquí es sumamente tedioso. Por ello, un gran porcentaje de las escuelas de ingeniería no presenta este tema sino hasta que los estudiantes han tomado un curso de análisis matricial.

Casi todas las estructuras son por naturaleza tridimensionales. Sin embargo, pueden descomponerse en otros sistemas de armaduras independientes alojadas en planos perpendiculares. Como son perpendiculares entre sí, las fuerzas en un sistema no tienen efecto sobre las fuerzas en los otros sistemas. El miembro que une dos sistemas entre sí sirve como miembro de ambos y su fuerza total se obtiene combinando las fuerzas desarrolladas como parte de cada uno de esos sistemas.

Muchas torres, cúpulas y grúas son estructuras tridimensionales formadas por elementos que están dispuestos de manera que es imposible separarlos en sistemas diferentes, cada uno situado en un plano individual, con el fin de analizarlos en forma individual. Estos sistemas están situados en planos que son oblicuos entre sí. Las fuerzas en una armadura unida a otra con un ángulo distinto de 90° afectan a las fuerzas en esa segunda armadura. En armaduras de este tipo es necesario analizar toda la estructura como una unidad, en vez de considerar los diferentes sistemas en varios planos individuales. Este capítulo se dedica a estos tipos de armaduras.

El ingeniero estructural está muy acostumbrado a visualizar las estructuras en un solo plano, de manera que cuando es necesario analizar armaduras espaciales comete errores porque su mente suele considerar todo sobre la base de un solo plano. Si la disposición general de una armadura espacial no es completamente clara, la construcción de un pequeño modelo quizá contribuya a aclarar la situación. Incluso modelos sencillos de papel, cartón o alambre pueden resultar útiles en estos casos.

8.2 PRINCIPIOS BÁSICOS

Antes de presentar un método para analizar armaduras espaciales es necesario considerar algunos principios básicos relativos a estas estructuras. Se supone que las armaduras tridimensionales, así

como las planas, están formadas por elementos sujetos sólo a fuerza axial. En otras palabras, se supone que las armaduras

- Están formadas por elementos rectos entre sus nudos,
- Las cargas están aplicadas sólo en los nudos, y
- Los extremos de los elementos pueden girar libremente. (Observe que para que esta situación ocurriera en efecto, los elementos tendrían que estar conectados mediante nudos universales o, por lo menos, con pasadores sin fricción.)

Los análisis basados en estas hipótesis suelen ser bastante satisfactorios, a pesar de que las conexiones usadas en la práctica se basan en pernos o soldadura.

Un sistema de fuerzas concurrentes en un punto puede combinarse en una fuerza resultante equivalente. Las fuerzas combinadas de esta manera no necesariamente tienen que estar en el mismo plano. De manera semejante, una fuerza individual puede descomponerse en fuerzas componentes en cada una de las tres direcciones coordenadas. Las direcciones coordenadas consideradas aquí son las coordenadas X, Y y Z que constituyen el sistema coordenado cartesiano. Recuerde que el sistema coordenado cartesiano es un sistema coordenado ortogonal derecho. Esto significa que los ejes coordenados están en ángulos rectos entre sí. Cuando una fuerza se descompone en sus componentes coordenadas, como se muestra en la figura 8.1, la magnitud de las componentes es proporcional a la proyección de su longitud sobre los ejes.

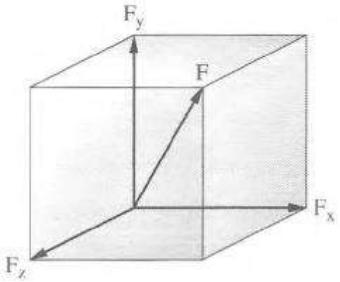


Figura 8.1 Descomposición de una fuerza en sus componentes.

Los valores de las fuerzas componentes pueden calcularse algebraicamente a partir de la siguiente relación:

> La fuerza en un miembro es a la longitud del miembro como las componentes X, Y o Z de fuerza son a las correspondientes componentes X, Y o Z de longitud.

Esta relación puede expresarse matemáticamente como:

$$\frac{F}{L} = \frac{F_x}{L_x} = \frac{F_y}{L_y} = \frac{F_z}{L_z}$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$$

Las armaduras espaciales pueden ser estáticamente determinadas o estáticamente indeterminadas; consideraremos aquí sólo las primeras. Los métodos desarrollados en capítulos posteriores para estructuras estáticamente indeterminadas se aplican también a las armaduras tridimensionales y a las planas.

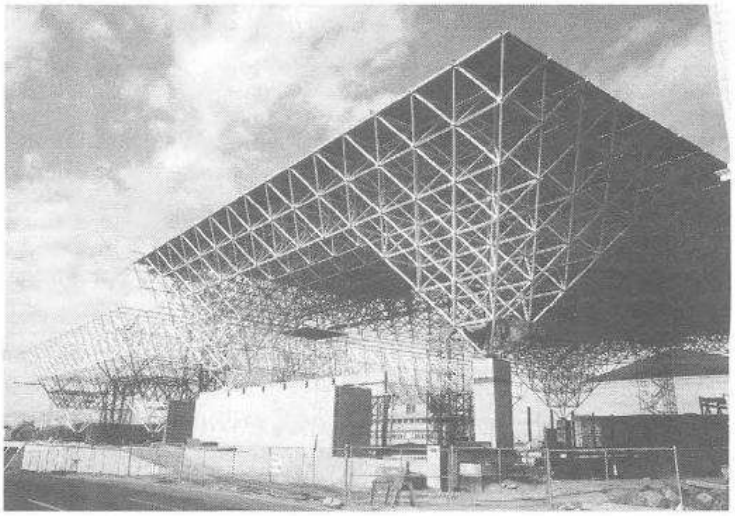
8.3 ECUACIONES DEL EQUILIBRIO ESTÁTICO

Existen más ecuaciones del equilibrio estático para determinar las reacciones de estructuras tridimensionales porque se tienen dos ejes más para tomar momentos y un nuevo eje para sumar

fuerzas. Por equilibrio, la suma de las fuerzas a lo largo de cada uno de los tres ejes de referencia *es igual a cero, así como la suma de los momentos de todas las fuerzas alrededor de cada uno de los ejes. Se dispone de un total de seis ecuaciones de equilibrio. Éstas son:*

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum M_x = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad \sum M_y = 0$$
$$\sum F_z = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

Las seis componentes de reacción pueden determinarse directamente a partir de estas ecuaciones.



Centro de convenciones en Denver, Colorado. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

Si una estructura tiene más de seis componentes de reacción, será estáticamente indeterminada externamente. Si existen menos de seis componentes de reacción, la armadura será inestable. Si el número de componentes de reacción es igual a seis, la armadura será estáticamente determinada externamente. Sin embargo, muchas armaduras espaciales tienen más de seis componentes de reacción y son estáticamente determinadas en su conjunto. El ejemplo 8.2 muestra que las reacciones para este tipo de estructuras pueden determinarse resolviéndolas conjuntamente con las fuerzas en las barras usando sólo ecuaciones del equilibrio estático.

Al igual que con las armaduras planas, la figura geométrica básica de una armadura espacial es el triángulo. Un triángulo puede ampliarse para formar una armadura espacial añadiéndole tres barras y un nudo. Cada una de las nuevas barras se conecta a un nudo del triángulo básico y los otros extremos se juntan para formar un nuevo nudo. La armadura espacial elemental así formada tiene seis barras y cuatro nudos. Se le denomina tetraedro, que es una figura con cuatro superficies triangulares. Esta armadura espacial fundamental puede ampliarse con la adición de tres barras y un nudo. En cada nudo de una armadura espacial se dispone de tres ecuaciones de equilibrio estático para el cálculo de las incógnitas ($\sum F_X = 0$, $\sum F_Y = 0$ y $\sum F_Z = 0$). Si j es el número de nudos en la armadura, m el número de barras y r el número de componentes de reacción, entonces puede verse que para que una armadura espacial sea estáticamente determinada debe cumplirse la siguiente relación:

$$3j = m - r$$

En el caso de que hubiera nudos en la armadura donde todas las barras estuviesen en un mismo plano, sólo se dispondría de dos ecuaciones en cada uno de los nudos y sería necesario restar una unidad del lado izquierdo de la ecuación por cada nudo. La omisión de una barra para cada

componente de reacción en exceso de seis hará que se satisfaga esta ecuación y la estructura será estáticamente determinada internamente. Cuando se presenta esta situación, es posible calcular por equilibrio estático tridimensional las fuerzas y las reacciones de la armadura, aunque ésta sea estáticamente indeterminada externamente.

8.4 ESTABILIDAD DE LAS ARMADURAS ESPACIALES

La regla general para que exista estabilidad, por lo que respecta a fuerzas externas, es que la proyección de la estructura sobre cualquiera de los tres planos coordenados sea también estable. Por lo tanto, al igual que para las estructuras planas, debe haber por lo menos tres componentes de reacción no concurrentes en cualquier plano. Los resultados del cálculo de las reacciones serán inconsistentes para cualquier otro caso.

En los párrafos anteriores, tanto la estabilidad y la determinación externas como la estabilidad y la determinación internas han sido tratadas como si fueran conceptos totalmente independientes. Los dos han sido separados para que los comprenda mejor el lector que no se ha encontrado antes con armaduras espaciales. Sin embargo, el lector verá en los ejemplos siguientes que es imposible, en la mayoría de los casos, considerar los dos conceptos por separado. Por ejemplo, muchas armaduras son estáticamente indeterminadas externamente y estáticamente determinadas internamente y, no obstante, pueden analizarse por completo utilizando las ecuaciones del equilibrio estático. Pocas estructuras planas son de este tipo.

En la sección 8.3 se estableció que para que una armadura tridimensional sea estáticamente determinada tiene que satisfacerse la ecuación $3j = m - r$.

Sin embargo, esta ecuación no basta para mostrar si una armadura tridimensional en particular es estable. Externamente, las reacciones deben disponerse de modo que los movimientos de la estructura queden impedidos; internamente, los miembros deben colocarse de manera que los nudos no se muevan entre sí.

Para la estabilidad externa, las reacciones deben colocarse de modo que puedan resistir traslaciones y rotaciones respecto a cada uno de los tres ejes coordenados. Para lograr este objetivo, debe haber por lo menos seis reacciones no paralelas y ellas no deben intersecar un eje común.

La estabilidad interna puede lograrse si la geometría de la armadura se forma basándose en tetraedros, es decir, agregando sucesivamente un nudo y tres miembros. En una armadura espacial grande puede ser bastante difícil ver si esta condición se ha cumplido. Sin embargo, con un análisis de la armadura se podrá ver si ésta es estable. Si podemos obtener una *solución única*, la armadura será estable. Si no, la armadura será inestable. La prueba de la carga cero que se estudió en la sección 7.7 también puede usarse para verificar la estabilidad.

8.5 TEOREMAS ESPECIALES APLICABLES A LAS ARMADURAS TRIDIMENSIONALES

De los principios de la estática elemental pueden deducirse dos teoremas útiles para el análisis de las armaduras tridimensionales. Éstos se discuten en los siguientes párrafos.

1. La componente de una fuerza sobre un eje a 90° con respecto a la dirección del miembro es cero, porque, por grande que sea la fuerza, al multiplicarse ésta por el coseno de 90° el resultado será cero. Una fuerza en un plano no puede tener componentes en un plano normal al que la contiene. Además, una fuerza en un plano no puede causar momentos respecto a ningún eje en su plano, porque o interseca al eje, o bien, es paralela a él.

De lo anterior resulta evidente que si varias barras de una armadura concurren en un nudo, de las cuales todas, excepto una, se encuentran en el mismo plano, la componente de la fuerza en esta barra, normal al plano de las otras barras, debe ser igual a la suma de las componentes de las

fuerzas externas en el nudo, normales al mismo plano. Si no hay fuerzas externas presentes, la barra no tiene fuerza.

2. Si hay un nudo en una armadura que no contiene cargas externas y en la que se ha visto que todas, excepto dos barras, no tienen fuerza, entonces esas dos barras también deben tener fuerza nula, a menos que sean colineales.

8.6 TIPOS DE APOYO

En los capítulos 6 y 7, las armaduras planas se apoyaban en rodillos y articulaciones que proporcionan una o dos fuerzas de reacción. En las armaduras tridimensionales se usan los mismos tipos de apoyos, pero el número de fuerzas de reacción puede variar entre uno y tres. Estos soportes se describen en los siguientes párrafos, y se muestran en la figura 8.2.

1. El soporte de *rodillo plano* o de *soporte esférico de acero* o de *placa plana* proporciona resistencia a un movimiento perpendicular a la superficie de soporte. Se tiene entonces una componente de reacción que puede ser hacia la superficie o alejándose de ella.

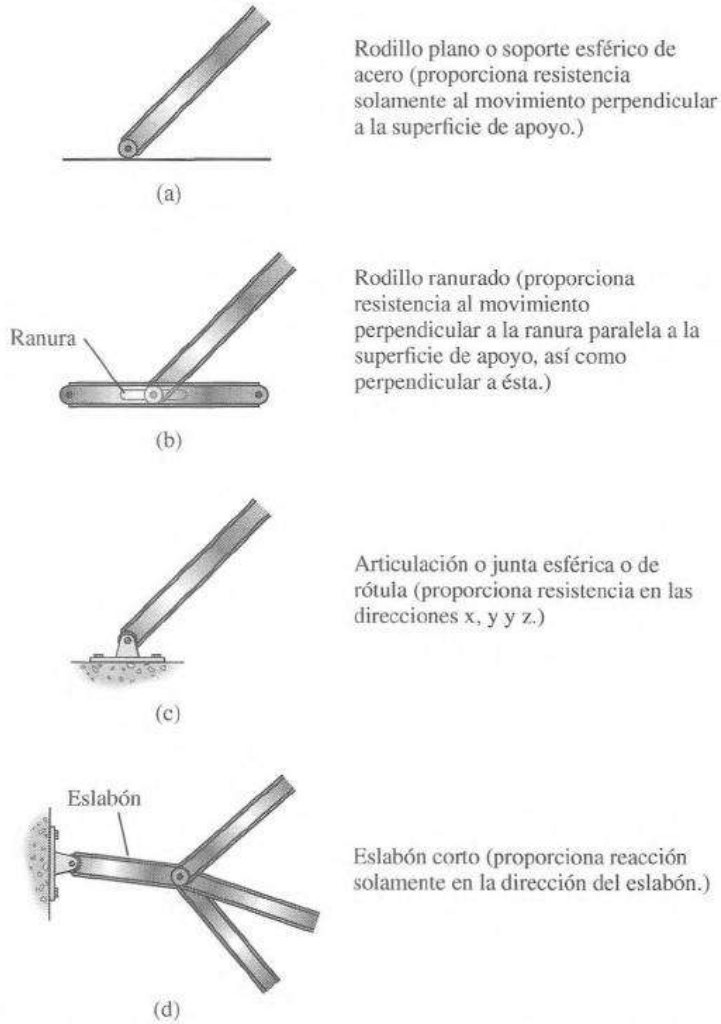
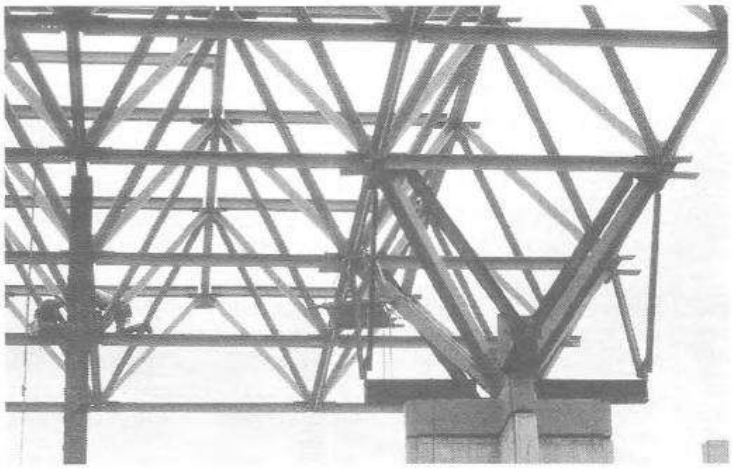


Figura 8.2 Tipos de soportes para armaduras tridimensionales.

2. El *rodillo ranurado* tiene libertad de moverse en una dirección paralela a la superficie de soporte. El movimiento es impedido en la otra dirección paralela a la superficie de soporte, así como perpendicular a ella, dando un total de dos componentes de reacción.
3. La *articulación* o *junta esférica o de rótula* proporciona resistencia al movimiento en las tres direcciones coordenadas. Se tiene entonces un total de tres componentes de reacción.
4. El *eslabón corto* proporciona resistencia sólo en la dirección del eslabón. Por ello, resulta una sola componente de reacción y esa fuerza es paralela al eslabón.

Lo anterior indica que es posible seleccionar un tipo de apoyo que proporcione tres componentes de reacción, o bien, uno en el que se tenga sólo una o dos componentes. Si reflexionamos un poco sobre el tema, podremos ver la ventaja de limitar el número de componentes de reacción en una armadura espacial. Una armadura que sea estáticamente indeterminada externamente puede hacerse determinada externamente si se limitan a seis sus componentes de reacción en total. Las ventajas de las estructuras estáticamente determinadas y de las estáticamente indeterminadas se analizan en el capítulo 14. En algunas estructuras es conveniente eliminar las componentes de reacción en ciertas direcciones para un buen diseño. El caso más obvio se presenta cuando una armadura está apoyada sobre muros a los cuales no se quieren transmitir empujes normales a ellos.



Arena Veterans Memorial en el condado Broome, Binghamton, Nueva York. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

8.7 EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Los ejemplos 8.1 y 8.2 muestran la aplicación de los principios anteriores a las armaduras espaciales elementales. El ejemplo 8.1 considera una estructura apoyada en tres puntos, con seis componentes de reacción que pueden calcularse directamente. El segundo ejemplo presenta una armadura espacial apoyada en cuatro puntos con siete componentes de reacción que no pueden resolverse de manera directa. En lo sucesivo, las direcciones de las componentes de reacción posibles se indican por medio de líneas de trazo grueso, como se muestra en los diagramas de las estructuras analizadas en los ejemplos 8.1 al 8.3.

EJEMPLO 8.1

Determinar las reacciones y las fuerzas en las barras de la armadura espacial que se muestra en la figura 8.3.

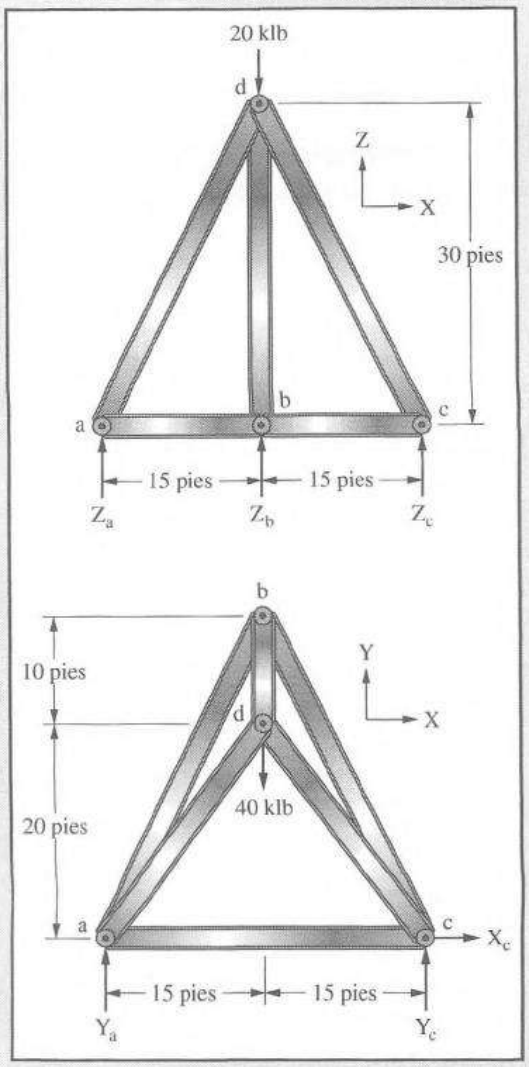


Figura 8.3

Solución. La armadura es estáticamente determinada y estable externamente porque hay un total de seis componentes de reacción con tres fuerzas de reacción no concurrentes en cada plano. Internamente es estáticamente determinada, como se prueba con la ecuación de nudo.

$$3j = m + r$$
$$(3)(4) = 6 + 6$$
$$12 = 12$$

Para una armadura con tres componentes verticales de reacción se pueden tomar momentos con respecto a un eje que pase por dos cualesquier de las componentes para encontrar la tercera.

$$\sum M_x = 0 \quad \text{respecto a la línea ac}$$
$$0 = 40(30) - 20(20) + 30Z_b$$
$$\therefore Z_b = -26.7 \text{ klb} \downarrow$$

$$\sum M_y = 0 \quad \text{respecto a la línea de acción de } Y_a$$
$$0 = 20(15) + 26.7(15) - 30Z_c$$
$$\therefore Z_c = 23.3 \text{ klb } \uparrow$$
$$\sum F_z = 0$$
$$0 = -20 - 26.7 + 23.3 = Z_a$$
$$\therefore Z_a = 23.4 \text{ klb } \uparrow$$

De manera semejante, cuando se tienen tres componentes de reacción horizontales desconocidas pueden tomarse momentos respecto a un eje vertical que pase por el punto de intersección de dos de las componentes.

$$\sum M_z = 0 \quad \text{respecto a la línea de acción de } Z_c$$
$$0 = -40(15) + 30Y_a$$
$$\therefore Y_a = 20.0 \text{ klb } \uparrow$$
$$\sum F_y = 0$$
$$0 = 20 - 40.0 + Y_c$$
$$\therefore Y_c = 20.0 \text{ klb } \uparrow$$
$$\sum F_x = 0$$
$$0 = 0 + X_c$$
$$\therefore X_c = 0$$

Una vez que se han encontrado las reacciones, las fuerzas en las barras pueden calcularse fácilmente con el método de los nudos. En el nudo a, la barra ad es la única que tiene una componente Z de longitud; por ello su componente Z debe ser igual y opuesta a Z_a, o sea de 23.4 klb en compresión. Las componentes X y Y de ad son proporcionales a sus componentes de longitud en esas direcciones. Si se elabora una tabla como la que se muestra, se simplifican los cálculos de las componentes y de las fuerzas resultantes.

Si consideramos el nudo a, la componente Y de fuerza en la barra ab puede determinarse por el método de los nudos, ya que se conoce la componente Y de ad:

$$\sum F_y = 0 \quad \text{en el nudo a}$$
$$0 = 20 - 15.6 - Y_{ab}$$
$$\therefore Y_{ab} = -4.4 \text{ klb } \downarrow$$

Las fuerzas en las otras barras se calculan similarmente usando el método de los nudos. Los resultados se muestran en la tabla siguiente:

	Proyección (pies)				Fuerzas componentes (klb)			
Barra	X	Y	Z	Longitud (pies)	X	Y	Z	Fuerza (klb)
ab	15	30	0	33.5	−2.2	−4.4	0	−4.92
ac	30	0	0	30.0	13.9	0	0	13.9
ad	15	20	30	39.1	−11.7	−15.6	−23.4	−30.5
bc	15	30	0	33.5	−2.2	−4.5	0	−5.02
bd	0	10	30	31.6	0	8.9	26.7	28.1
cd	15	20	30	39.1	−11.7	−15.5	−23.3	−30.3

■

EJEMPLO 8.2

Encontrar todas las reacciones y las fuerzas en las barras de la armadura espacial que se muestra en la figura 8.4.

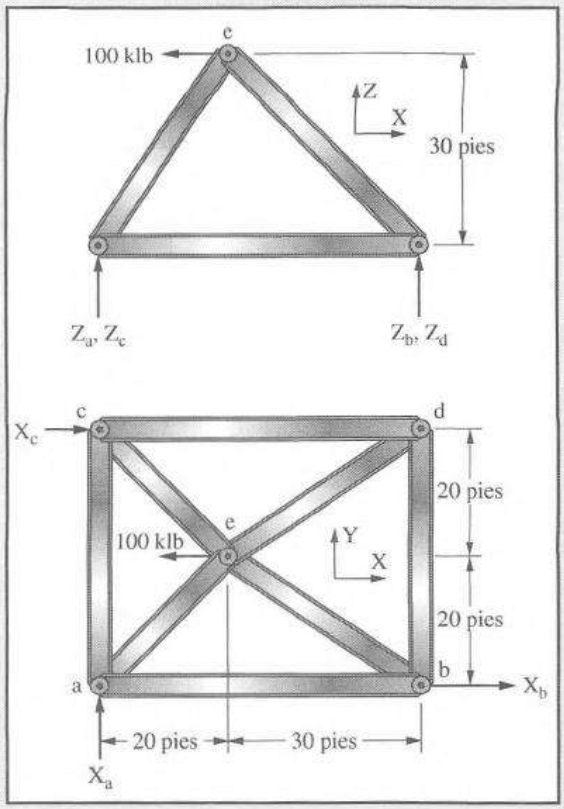


Figura 8.4

Solución. Esta armadura resulta ser estáticamente indeterminada externamente porque hay siete fuerzas definidas de reacción y sólo seis ecuaciones de equilibrio estático. Sin embargo, es estáticamente determinada internamente, como se demuestra y el análisis puede realizarse usando solamente las ecuaciones del equilibrio estático.

$$3j = m + r$$
$$3(5) = 8 + 7$$
$$15 = 15$$

Aunque la armadura es estáticamente indeterminada externamente, hay sólo tres componentes de reacción desconocidas en el plano XY, y estas fuerzas pueden determinarse de inmediato. Las otras cuatro componentes se calcularán junto con las fuerzas en las barras.

$$\sum M_z = 0 \quad \text{respecto a la línea de acción de } Z_a$$
$$0 = -100(20) + 40X_c$$
$$\therefore X_c = 50.0 \text{ klb}$$
$$\sum F_x = 0$$
$$0 = 50 - 100.0 + X_b$$
$$\therefore X_b = 50.0 \text{ klb}$$

$$\sum F_y = 0$$
$$0 = 0 + Y_a$$
$$\therefore Y_a = 0.0$$

Si se conociese el valor de una de las componentes de reacción en Z, los valores de las otras tres componentes se podrían determinar por equilibrio estático. Suponemos que Z_d tiene un valor S hacia abajo, por lo que las componentes de reacción se calculan en términos de S.

$$\sum M_y = 0 \quad \text{respecto a la línea ac}$$
$$0 = -100(30) + 50S + 50Z_b$$
$$\therefore Z_b = 60 - S$$
$$\sum M_x = 0 \quad \text{respecto a la línea ab}$$
$$0 = 40S - 40Z_c$$
$$\therefore Z_c = S$$
$$\sum F_z = 0$$
$$0 = S - S - (60 - S) + Z_a$$
$$\therefore Z_a = 60 - S$$

Verificando mediante $\sum M_x = 0$ respecto a la línea cd

$$0 = (60 - S)(40) - 40Z_a$$
$$\therefore Z_a = 60 - S$$

El cálculo de las fuerzas en las barras puede efectuarse ahora en términos de S a partir de las fuerzas de reacción. Estos cálculos se prosiguen hasta que las fuerzas en ambos extremos de una barra se determinan en términos de S. Los dos valores deben ser iguales, y de esta condición se obtiene el valor correcto de S.

La componente de fuerza en Z en el miembro de, es de tensión e igual a S, mientras que la componente de fuerza en Z en el miembro be es igual a 60 – S, y también es de tensión. La componente de fuerza en Y en el miembro de es igual a

$$Y_{be} = \frac{20}{30}(60 - S) = 40 - \frac{2}{3}S$$

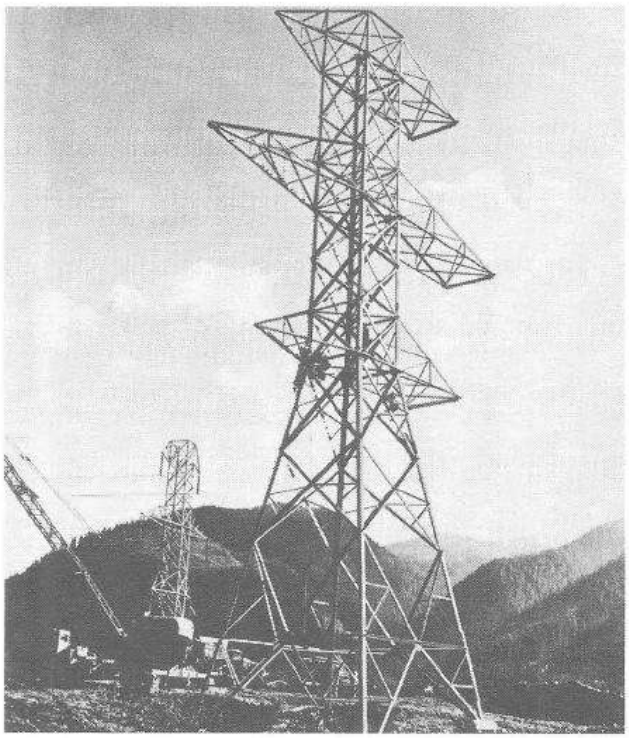
Sumando fuerzas en la dirección Y en el nudo d, vemos que el miembro bd trabaja a compresión con una fuerza de $2S/3$. Igualmente, sumando fuerzas en la dirección Y en el nudo b, vemos que el miembro bd trabaja a compresión con una fuerza de $40 - 2S/3$. Debido a que estos dos valores son la fuerza en el miembro bd, pueden igualarse y puede calcularse el valor de S.

$$\frac{2}{3}S = 40 - \frac{2}{3}S$$
$$\therefore S = 30 \text{ klb}$$

Los valores numéricos de las componentes de reacción en Z ahora pueden encontrarse a partir de S, y las fuerzas en las barras de la armadura se determinan con el método de los nudos. Conviene elaborar una tabla que contenga las componentes de longitud y de fuerza. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

	Proyección (pies)				Fuerzas componentes (klb)			
Barra	X	Y	Z	Longitud (pies)	X	Y	Z	Fuerza (klb)
ab	50	0	0	50.0	+20	0	0	+20.0
ae	20	20	30	41.2	−20	−20	−30	−41.2
ac	0	40	0	40.0	0	+20	0	+20.0
be	30	20	30	46.9	+30	+20	+30	+46.9
bd	0	40	0	40.0	0	−20	0	−20.0
de	30	20	30	46.9	+30	+20	+30	+46.9
cd	50	0	0	50.0	−30	0	0	−30.0
ce	20	20	30	41.2	−20	−20	−30	−41.2

■



Torres de transmisión para la primera línea de transmisión de 345 000 volts en Estados Unidos en la presa Jefe Joseph-Snohomish, Washington. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

8.8 SOLUCIÓN USANDO ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Tres ecuaciones simultáneas:

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$

pueden escribirse para las fuerzas que concurren a cada nudo de una armadura espacial. Esto conduce a 3j ecuaciones simultáneas. Si la armadura es estáticamente determinada, pueden resolverse

las ecuaciones para encontrar las fuerzas en las barras y las componentes de reacción, que son las incógnitas en las ecuaciones simultáneas. A pesar del gran número de ecuaciones que pueden resultar, este método de solución puede ser bastante rápido para armaduras espaciales pequeñas, debido al pequeño número de incógnitas que aparecen en cada ecuación.

La preparación y solución de ecuaciones simultáneas para armaduras espaciales puede simplificarse usando coeficientes de tensión.[1] El coeficiente de tensión para un miembro es igual a la fuerza en el miembro dividida entre su longitud. En cada una de las siguientes expresiones para las componentes de fuerza, el valor F/L es reemplazado por T, el coeficiente de tensión.

$$F_x = \frac{L_x}{L}F = \frac{F}{L}L_x = TL_x$$

$$F_y = \frac{L_y}{L}F = \frac{F}{L}L_y = TL_y$$

$$F_z = \frac{L_z}{L}F = \frac{F}{L}L_z = TL_z$$

Cuando se usan los coeficientes de tensión, las ecuaciones simultáneas resultantes están entonces en términos del coeficiente de tensión de cada miembro. Las ecuaciones se resuelven para los coeficientes de tensión, que entonces se multiplican por la longitud apropiada del miembro para obtener las fuerzas finales en éste. El análisis de una armadura espacial por medio de los coeficientes de tensión y de ecuaciones simultáneas se muestra en el ejemplo 8.3.

EJEMPLO 8.3

Usando ecuaciones simultáneas, determine las fuerzas de reacción y las fuerzas en los miembros de la armadura mostrada en la figura 8.5. Ésta es la misma armadura analizada en el ejemplo 8.1.

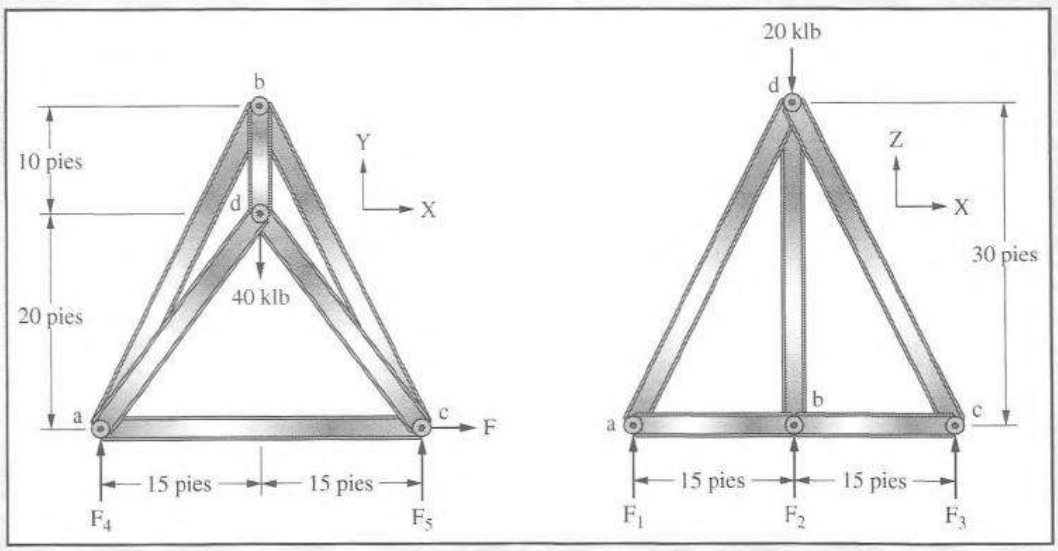


Figura 8.5

Solución. Comenzamos el análisis escribiendo las ecuaciones de equilibrio para cada nudo de la armadura. Las fuerzas desconocidas en las barras se suponen en tensión y las reacciones positivas tienen la misma dirección que los ejes coordenados.

[1] R.V. Southwell, "Primary Stress Determination in Space Frames", *Engineering 109* (1920): 165.

$$\text{Nudo a}\begin{cases} 30T_{ac} + 15T_{ab} + 15T_{ad} = 0 \\ F_4 + 30T_{ab} + 20T_{ad} = 0 \\ F_1 + 30T_{ad} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nudo b}\begin{cases} -15T_{ab} + 15T_{bc} = 0 \\ -30T_{ab} - 30T_{bc} - 10T_{bd} = 0 \\ F_2 + 30T_{bd} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nudo c}\begin{cases} F_6 - 30T_{ac} - 15T_{bc} - 15T_{cd} = 0 \\ F_5 + 30T_{bc} + 20T_{cd} = 0 \\ F_3 + 30T_{cd} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nudo d}\begin{cases} -15T_{ad} + 15T_{cd} = 0 \\ -20T_{ad} + 10T_{bd} - 20T_{cd} = 40 \\ -30T_{ad} - 30T_{bd} - 30T_{cd} = 20 \end{cases}$$

Al resolver estas 12 ecuaciones simultáneamente, podemos determinar primero los valores de los coeficientes de tensión y luego las reacciones y las fuerzas en cada miembro. Los resultados son los siguientes:

Miembro	Coeficiente de tensión (T)	Longitud de la barra (L)	Fuerza final (T·L)
ab	−0.148	33.54 pies	−4.97
ac	0.463	30.00 pies	13.89
ad	−0.778	39.05 pies	−30.37
bc	−0.148	33.54 pies	−4.97
bd	0.889	31.62 pies	28.11
cd	−0.778	39.05 pies	−30.37

■

8.9 PROBLEMA DE EJEMPLO CON SABLE32

De los problemas de ejemplo anteriormente presentados en este capítulo, es bastante evidente que el análisis de una armadura espacial de tamaño mediano a grande, con una calculadora de bolsillo sería un proceso muy demorado y laborioso. Como resultado todas las armaduras espaciales con excepción de las más sencillas se desarrollarán con computadoras.

El procedimiento para analizar las armaduras espaciales con SABLE32 es muy similar al usado para las armaduras planas en el capítulo 6. Después de dar un clic en la parte tridimensional del programa, sólo se consideran necesarios unos cuantos comentarios de explicación para capacitarlo para que desarrolle el análisis. Éstos son los siguientes:

1. Las coordenadas de los nudos de la armadura se ingresan como se hizo en el caso de las armaduras planas, observando que cada nudo tiene valores x, y y z.

2. Se supone que los miembros de la armadura son barras que embonan en nudos de articulación esférica en sus extremos. Como resultado, hay una resistencia a la rotación en las direcciones x, y y z en esos puntos. A menos que se muestren estas restricciones, SABLE32 reconocerá a la estructura como inestable. Las razones para mostrar esta restricción se aclarará cuando comencemos el estudio de los métodos de análisis matricial en los capítulos 22-25.
3. Nuevamente, es necesario dar un clic en el estado activo cuando se proporcionen los datos de las cargas en los nudos.

EJEMPLO 8.4

Usando SABLE32 repita el análisis de la armadura espacial del ejemplo 8.1.

Solución.

Se repite un boceto de la armadura en la figura 8.6 y se numeran los nudos y los miembros de la armadura. En esta figura, los números dentro de un círculo son nudos y los números de los miembros están dentro de un cuadrado.

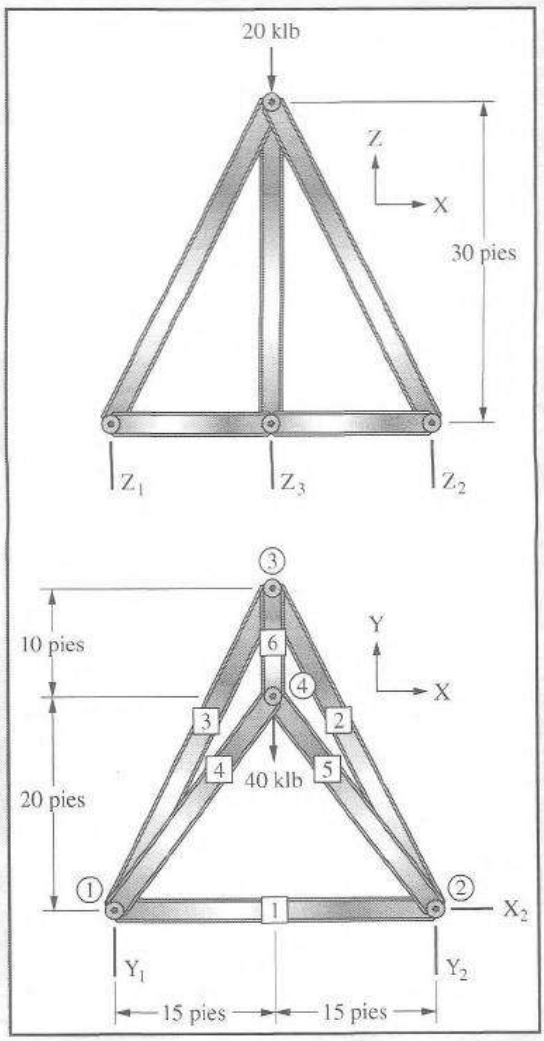


Figura 8.6

Fuerzas calculadas en los extremos de las vigas

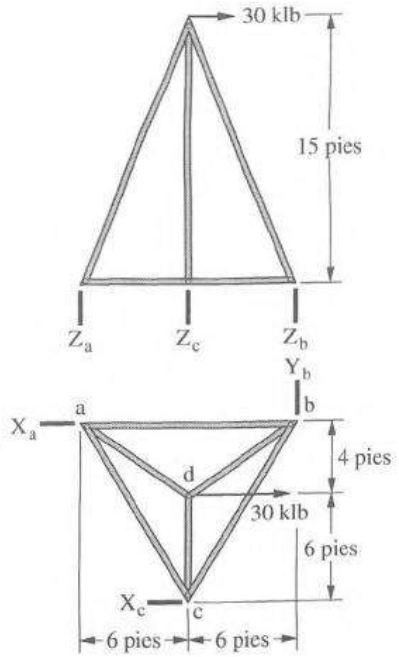
Viga	Caso	Torsión en el extremo	Fuerza cortante axial-Z	Fuerza cortante-Y Momento-Y	Momento-Z
1	1	i	−1.389E+01	0.000E+00	0.000E+00
			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
		j	1.389E+01	0.000E+00	0.000E+00
			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
2	1	i	4.969E+00	0.000E+00	0.000E+00
			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
		j	−4.969E+00	0.000E+00	0.000E+00
			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
3	1	i	4.969E+00	0.000E+00	0.000E+00
			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
		j	−4.969E+00	0.000E+00	0.000E+00
			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
4	1	i	3.037E+01	0.000E+00	0.000E+00
			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
		j	−3.037E+01	0.000E+00	0.000E+00
			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
5	1	i	−2.811E+01	0.000E+00	0.000E+00
			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
		j	2.811E+01	0.000E+00	0.000E+00
			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
6	1	i	3.037E+01	0.000E+00	0.000E+00
			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
		j	−3.037E+01	0.000E+00	0.000E+00
			0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

■

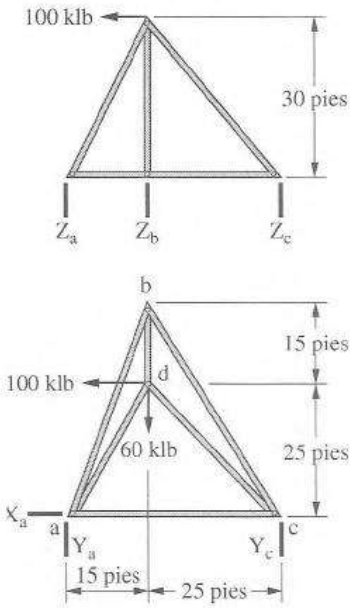
8.10 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

En los problemas 8.1 al 8.7, calcular las componentes de reacción y las fuerzas en las barras de las armaduras espaciales.

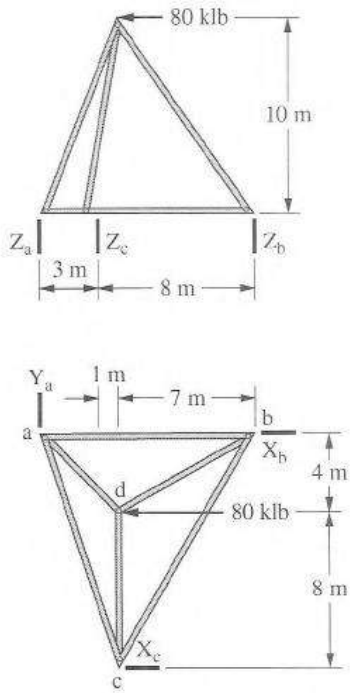
8.1 (*Resp.:* $F_{ab} = +9$ klb, $F_{ac} = -11.62$ klb, $F_{bd} = -41.62$ klb.)



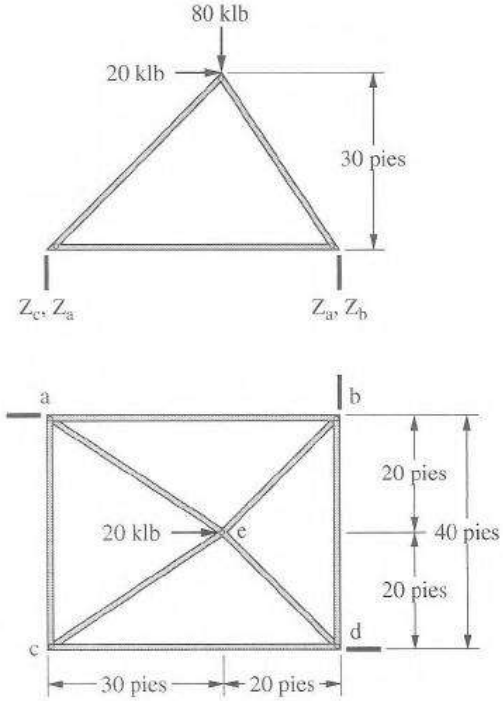
8.2



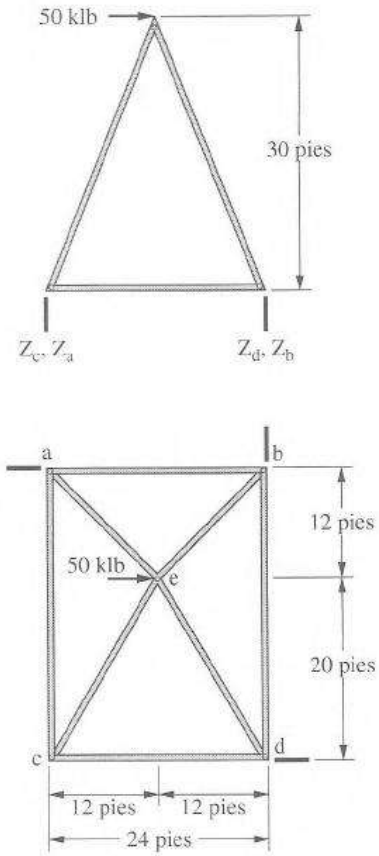
8.3 (*Resp.*: $F_{ac} = +29.98$ kN, $F_{bc} = -34.96$ kN, cd = 0.)



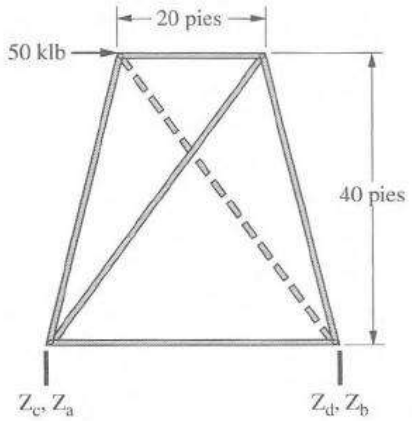
8.4

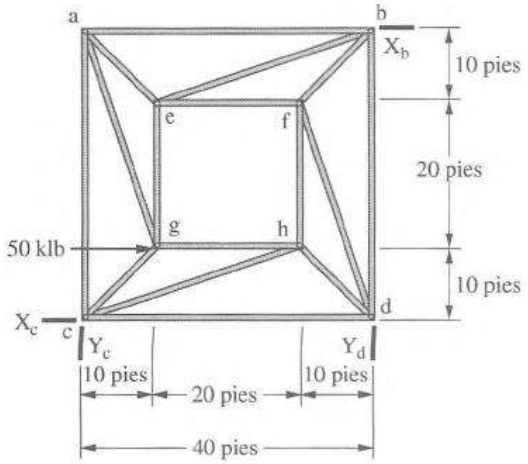


8.5 (*Resp.*: $F_{ae} = +71.8$ klb, $F_{ac} = -25$ klb, ce = 0.)

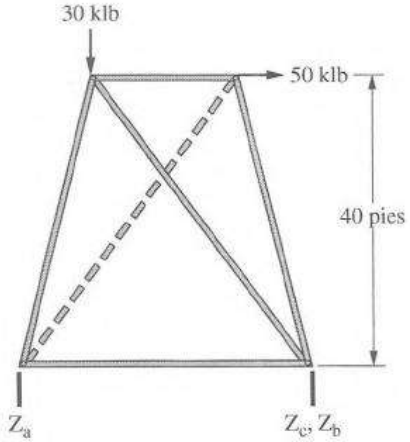


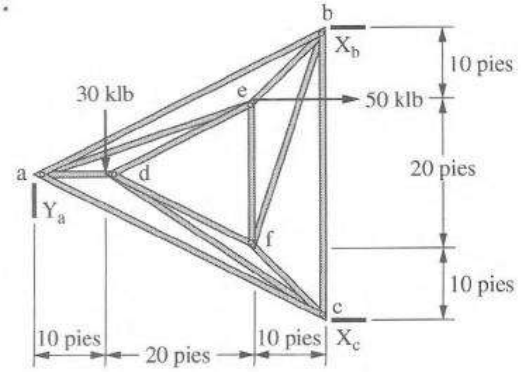
8.6





8.7 (*Resp.:* bc = +9.82 klb, bf = +31.8 klb, de = +29.3 klb.)





Resuelva los problemas 8.8 a 8.9 usando SABLE32 o SAP2000.

8.8 Problema 8.2.

8.9 Problema 8.4. (*Resp.:* $F_{ae} = -15.63$ klb, $F_{cd} = +10$ klb, $F_{bc} = -41.23$ klb.)

Capítulo 9

Líneas de influencia para vigas

9.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores analizamos estructuras que soportaban grupos de cargas fijas en un lugar. Ya se tratase de vigas, marcos o armaduras, o si las funciones buscadas eran cortantes, reacciones, fuerzas en los elementos etc., las cargas eran siempre estacionarias. Sin embargo, el ingeniero en la práctica rara vez tiene que tratar con estructuras que soportan únicamente cargas fijas. Casi todas las estructuras están sujetas a cargas que se mueven a lo largo de sus claros. Tal vez el ejemplo más evidente sea el de los puentes sujetos al tránsito vehicular, pero los edificios industriales con grúas viajeras, los edificios de oficinas con cargas de mobiliario y humanas, las estructuras que soportan bandas transportadoras, etc., se clasifican en la misma categoría.

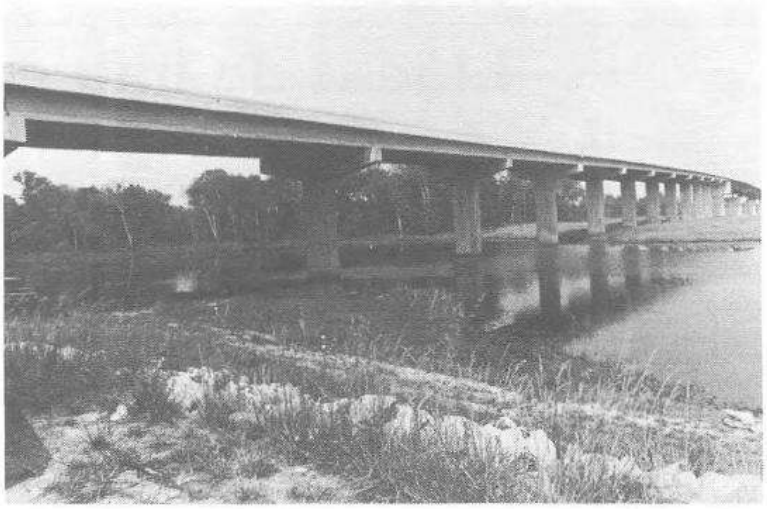
Todo elemento de una estructura debe diseñarse para las condiciones más severas que puedan desarrollarse en él. El ingeniero coloca las cargas vivas en las posiciones donde producirán esas condiciones. Las posiciones críticas para colocar las cargas vivas no son las mismas en todos los elementos. Por ejemplo, la carga máxima en una barra de una armadura de puente puede ocurrir cuando se tenga una línea de camiones de extremo a extremo del puente. Sin embargo, la fuerza máxima en alguna otra barra puede ocurrir cuando los camiones se encuentren situados solamente desde ese elemento hasta un extremo del puente. Las fuerzas máximas en ciertas vigas y columnas de un edificio ocurrirán cuando las cargas vivas se concentren en ciertas partes del edificio. Las fuerzas máximas en otras vigas y columnas ocurrirán cuando las cargas estén colocadas en algún otro lugar.

En algunas ocasiones, es posible determinar por inspección dónde colocar las cargas para obtener las fuerzas críticas. Sin embargo, en muchas otras ocasiones es necesario recurrir a ciertos criterios y diagramas para encontrar esas posiciones. El más útil de esos recursos es la línea de influencia.

9.2 DEFINICIÓN DE LA LÍNEA DE INFLUENCIA

La línea de influencia, usada por primera vez en Berlín en 1867 por el profesor E. Winkler, muestra de manera gráfica cómo el movimiento de una carga unitaria a lo largo de una estructura afecta a alguna función en ésta.[1] Las funciones que pueden representarse incluyen reacciones, fuerzas cortantes, momentos flexionantes y deflexiones.

[1] J. S. Kinney, *Indeterminate Structural Analysis*. (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957), cap. 1.



Puente Tennessee-Tombigbee sobre vía fluvial en Mississippi. (Cortesía del Departamento de Caminos del estado de Mississippi.)

Una línea de influencia puede definirse como un diagrama cuyas ordenadas muestran la magnitud y el carácter de alguna función de una estructura cuando una carga unitaria se mueve a lo largo de ésta. Cada ordenada del diagrama da el valor de la función cuando la carga está situada en la posición asociada a esa ordenada.

Las líneas de influencia se usan sobre todo para determinar dónde colocar las cargas vivas para que éstas causen fuerzas máximas. También pueden usarse para calcular esas fuerzas. El procedimiento para dibujar los diagramas consiste sólo en graficar los valores de la función en estudio como ordenadas para varias posiciones de la carga unitaria a lo largo del claro, y luego conectar esas ordenadas. El lector debe tratar de representarse mentalmente la carga móvil en el claro e imaginar qué le sucede a la función en estudio durante el movimiento. El estudio de las líneas de influencia puede incrementar de manera considerable el conocimiento de lo que le pasa a una estructura en diferentes condiciones de carga.

El estudio de las siguientes secciones debe aclarar con precisión qué cosa es una línea de influencia. La parte mecánica del desarrollo de los diagramas resulta muy sencilla una vez que se ha entendido perfectamente la definición. No se introducirá aquí ningún principio básico nuevo: más bien se presenta un método para procesar información en una forma útil y conveniente.

9.3 LÍNEAS DE INFLUENCIA PARA LAS REACCIONES DE UNA VIGA SIMPLE

En la figura 9.1 se muestran las líneas de influencia para las reacciones de una viga simple. Se considera primero la variación de la reacción izquierda V_L al moverse una carga unitaria de izquierda a derecha a lo largo de la viga. Cuando la carga está directamente sobre el apoyo izquierdo, $V_L = 1$. Cuando la carga está a 2 pies a la derecha del apoyo izquierdo, $V_L = 18/20$, o sea 0.9. Cuando la carga está a 4 pies a la derecha, $V_L = 16/20$, o sea 0.8, etcétera.

Los valores de V_L se muestran a intervalos de 2 pies al moverse la carga unitaria a lo largo del claro. Estos valores se encuentran sobre una línea recta debido a que éstos cambian uniformemente para intervalos iguales de la carga. Para cada intervalo de 2 pies, las ordenadas cambian en 0.1. Los valores de V_R, de la reacción derecha, están graficados de la misma manera a intervalos de 2 pies para la carga unitaria móvil. Para cada posición de la carga unitaria, la suma de las ordenadas de los dos diagramas en cualquier punto es igual a la carga unitaria (y por equilibrio ciertamente debe ser igual a ésta).

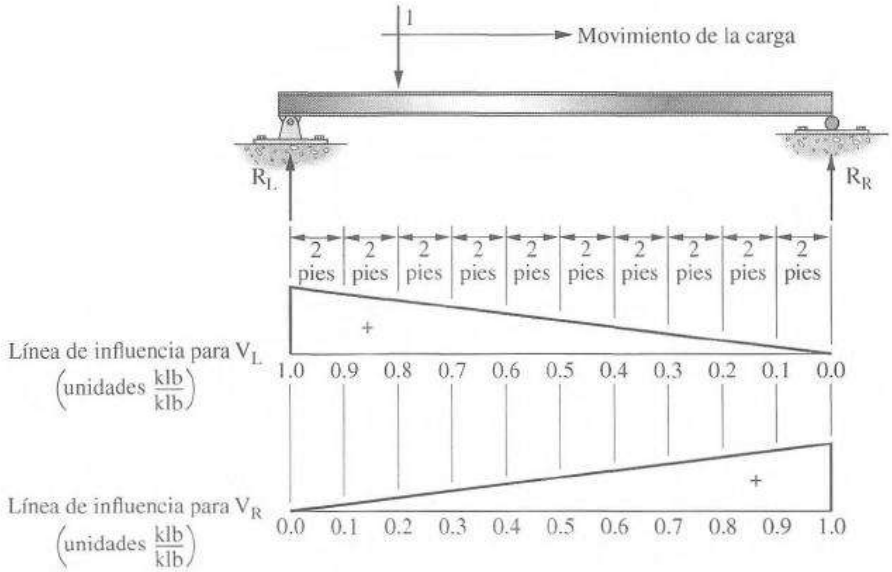


Figura 9.1 Línea de influencia para las reacciones en una viga simple.

9.4 LÍNEAS DE INFLUENCIA PARA FUERZAS CORTANTES EN VIGAS SIMPLES

En la figura 9.2 se muestran las líneas de influencia para la fuerza cortante en dos secciones de una viga simple. La siguiente convención de signos se usará aquí para la fuerza cortante:

> Se tendrá una fuerza cortante positiva cuando la suma de las fuerzas transversales a la izquierda de una sección esté dirigida hacia arriba, o bien, cuando la suma de las fuerzas a la derecha de la sección esté dirigida hacia abajo.

Esta misma convención de signos se usó para la fuerza cortante en el capítulo 5. Con frecuencia se le llama convención de signos de viga.

Puente Kalihiwai de concreto prevaciado cerca de Kilauea, Kauai, Hawaii. (Cortesía del Departamento de Transporte de Hawaii.)

Al colocar la carga unitaria sobre el apoyo izquierdo no se genera fuerza cortante en ninguna de las dos secciones. Al mover la carga unitaria 2 pies hacia la derecha del apoyo izquierdo resulta una reacción en este apoyo de 0.9. La suma de las fuerzas a la izquierda de la sección 1-1 = 0.9 −

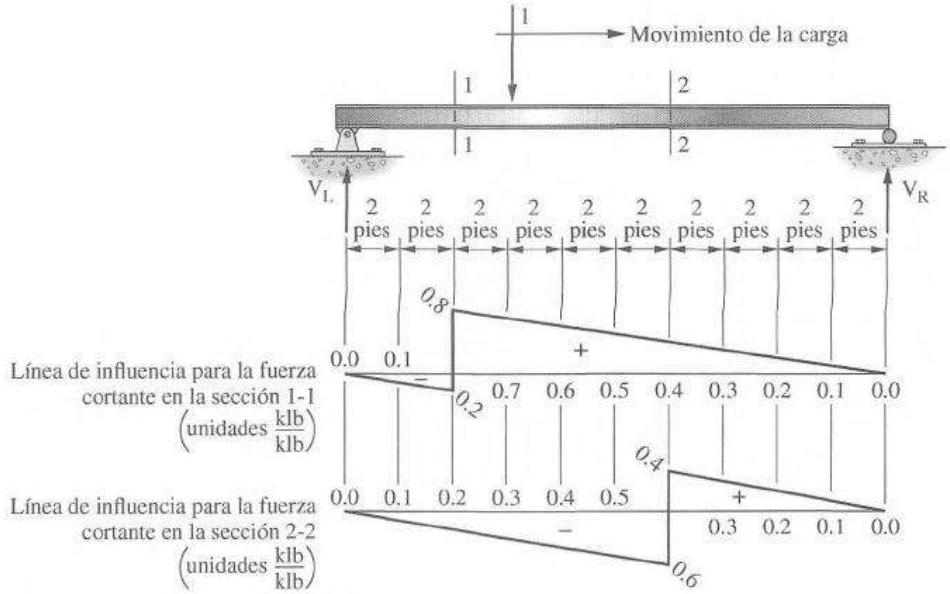


Figura 9.2 Dos líneas de influencia para fuerza cortante en una viga simple.

$1.0 = 0.1$ hacia abajo, por lo que la fuerza cortante es de -0.1. Cuando la carga está a 4 pies a la derecha del apoyo izquierdo y a una distancia infinitesimal a la izquierda de la sección 1-1, la fuerza cortante a la izquierda es $+0.8 - 1.0 = -0.2$. Si la carga se mueve una distancia muy pequeña a la derecha de la sección 1-1, la resultante de las fuerzas a la izquierda de la sección será de 0.8 dirigida hacia arriba, por lo que la fuerza cortante es de $+0.8$. Si continuamos moviendo la carga a través del claro hacia el apoyo derecho, los valores de la fuerza cortante en la sección 1-1 disminuirán. Estos valores están graficados a intervalos de 2 pies para la carga unitaria. La línea de influencia para la fuerza cortante en la sección 2-2 se desarrolla de la misma manera.

Obsérvese que la pendiente de la línea de influencia de la fuerza cortante, a la izquierda de la sección considerada, debe ser igual a la pendiente de la línea de influencia a la derecha de la sección. Por ejemplo, en la figura 9.2, para la línea de influencia en la sección 1-1, la pendiente a la izquierda es de $0.2/4 = 0.05$, mientras que la pendiente a la derecha es de $0.8/16 = 0.05$. Esta información es muy útil al dibujar otras líneas de influencia de fuerza cortante.

9.5 LÍNEAS DE INFLUENCIA PARA MOMENTOS EN VIGAS SIMPLES

En la figura 9.3 se grafican las líneas de influencia para el momento flexionante en las mismas secciones de la viga que utilizamos en la figura 9.2 para las líneas de influencia de la fuerza cortante. A manera de repaso, recordemos que un momento positivo causa tensión en las fibras inferiores de una viga. Éste ocurre en una sección específica cuando la suma de los momentos externos de todas las fuerzas a la izquierda tienen el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, o cuando la suma a la derecha tiene sentido opuesto. Los momentos se consideran en cada sección para intervalos de 2 pies de la carga unitaria.

Para ilustrar cómo se realizaron los cálculos para las líneas de influencia para el momento flexionante de esta figura, se presentan las siguientes ilustraciones. Si la carga unitaria está a 2 pies del extremo izquierdo de la viga, la reacción izquierda será $+0.9$ y la reacción derecha $+0.1$. El momento en la sección 1-1 puede determinarse tomando momentos a la izquierda o a la derecha de la sección como sigue:

$$M_{\text{a la izquierda}} = +(0.9)(4) - (1.0)(2) = +1.6$$
$$M_{\text{a la derecha}} = +(0.1)(16) = +1.6$$

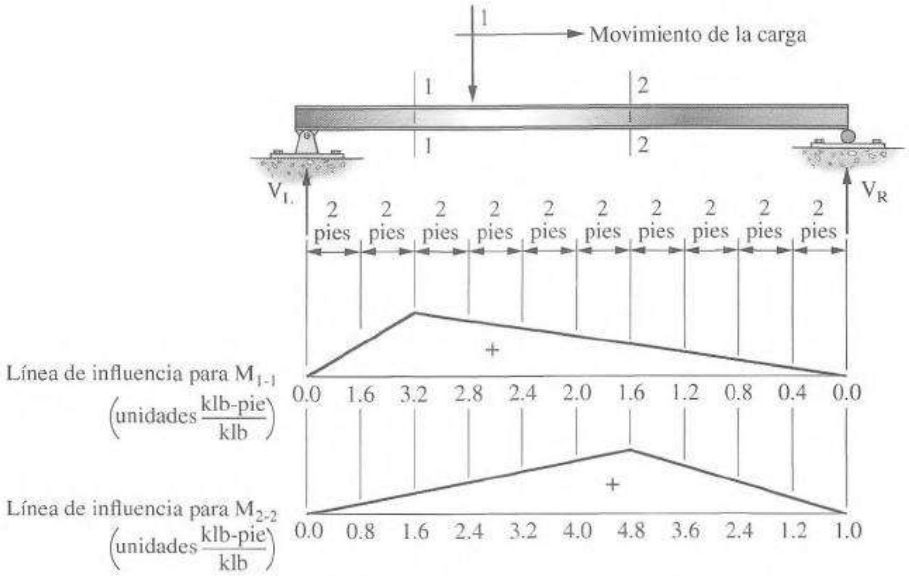


Figura 9.3 Dos líneas de influencia para el momento flexionante en una viga simple.

Si la carga está en la sección 1-1, la reacción izquierda será +0.8 y la derecha será +0.2. Entonces los momentos serán

$$M_{\text{a la izquierda}} = +(0.8)(4) = +3.2$$
$$M_{\text{a la derecha}} = +(0.2)(16) = +3.2$$

En la figura 9.4 están graficadas varias líneas de influencia de momentos flexionantes, de fuerza cortante y de reacciones para una viga con voladizos.

La diferencia principal entre los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante comparados con las líneas de influencia debe ser ahora clara. Un diagrama de fuerza cortante o de momento flexionante muestra la variación de estos elementos mecánicos a lo largo de toda la estructura para cargas fijas en una posición. Una línea de influencia para la fuerza cortante o para el momento flexionante, por otro lado, muestra la variación de esa función en una sección de la estructura, variación causada por el movimiento de una carga unitaria de un extremo al otro de la estructura.

Las líneas de influencia para las funciones de estructuras estáticamente determinadas consisten en un conjunto de líneas rectas. Un ingeniero experimentado será capaz de calcular los valores de la función en estudio en unas cuantas posiciones críticas, y conectar los valores graficados con líneas rectas. Sin embargo, un estudiante que comienza su carrera debe ser muy cuidadoso y debe calcular el valor de la función para suficientes posiciones de la carga unitaria. Las formas de las líneas de influencia para las fuerzas en las barras de una armadura, como se describe en el capítulo 10, con frecuencia son engañosas en su aparente simplicidad. Es mejor graficar ordenadas para varias posiciones adicionales de la carga que no hacerlo con un valor esencial.

9.6 LÍNEAS DE INFLUENCIA CUALITATIVAS

Los estudiantes promedio experimentan al principio una gran dificultad para dibujar líneas de influencia a pesar de la simplicidad de los cálculos matemáticos. La razón de esta dificultad frecuentemente deja perplejos a sus profesores. Tal vez la dificultad ocurre debido a una falta de entendimiento completo de la definición de las líneas de influencia. Se dispone de un procedimiento

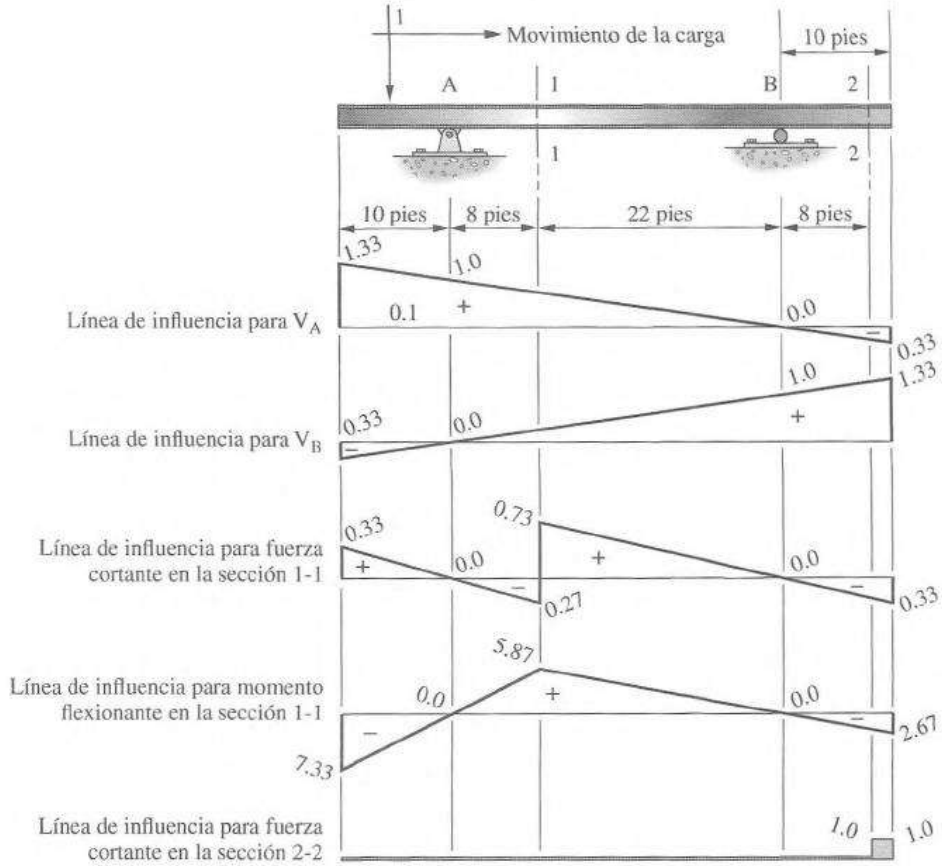


Figura 9.4 Diferentes líneas de influencia para una viga simple con voladizos.

muy sencillo que puede ayudar mucho a los estudiantes en la comprensión y la preparación de los diagramas. Incluye el uso de figuras llamadas líneas de influencia cualitativas. Estos diagramas permiten al estudiante obtener de inmediato la forma correcta de las líneas de influencia sin necesidad de ningún cálculo.

Las líneas de influencia trazadas en las secciones anteriores con ayuda de ciertos valores numéricos se denominan *líneas de influencia cuantitativas*. Sin embargo, es posible bosquejar esos diagramas con suficiente precisión para muchos fines prácticos sin tener que calcular ningún valor numérico. Estos diagramas se denominan *líneas de influencia cualitativas*.

Un análisis detallado de los principios en que se basan estos bosquejos se presenta en el capítulo 17, junto con algunas consideraciones sobre su utilidad. Este análisis se difiere hasta que se aprenda algo sobre el cálculo de deflexiones. Las líneas de influencia cualitativas están basadas en un principio propuesto por el profesor alemán Heinrich Müller-Breslau. Este principio dice lo siguiente: **La línea elástica de una estructura representa, a cierta escala, la línea de influencia de una función, como puede ser una reacción, una fuerza cortante, un momento flexionante, si se permite que la función considerada actúe a través de un desplazamiento unitario.** En otras palabras, la estructura traza su propia línea de influencia cuando se le aplica el desplazamiento apropiado. Este principio se obtiene en la sección 17.2.

Como primer ejemplo consideraremos la línea de influencia cualitativa para la reacción izquierda de la viga que se muestra en la figura 9.5(a). Se remueve la restricción en el apoyo izquierdo y se le da a la viga en ese lugar un desplazamiento en la dirección de la reacción, como se muestra

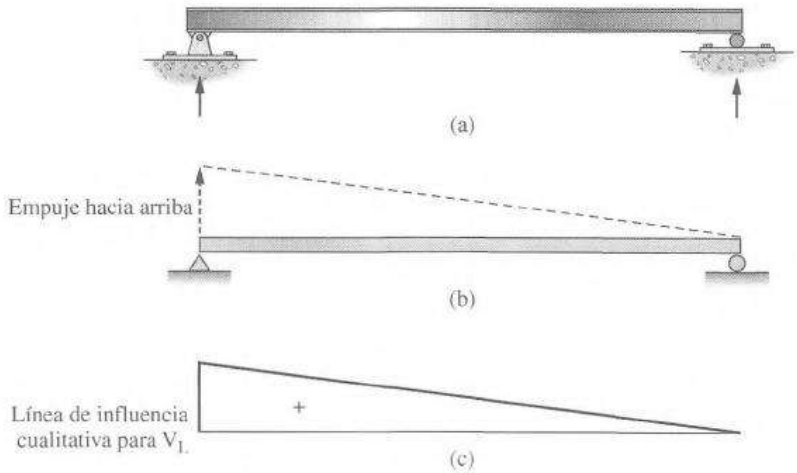


Figura 9.5 Línea de influencia cualitativa para la reacción en el apoyo izquierdo.

en la parte (b) de la figura. Cuando el extremo izquierdo de la viga se empuja hacia arriba, el área entre las posiciones original y final de la viga es la línea de influencia a cierta escala para V_L.

De manera similar, se bosquejan las líneas de influencia para las reacciones izquierda y derecha de la viga en la figura 9.6.

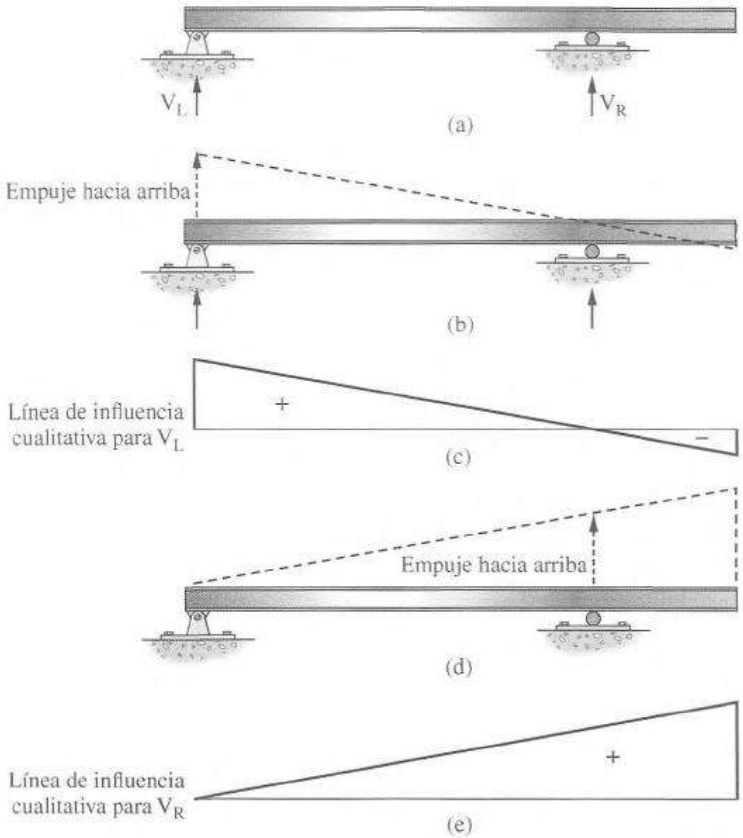


Figura 9.6 Líneas de influencia cualitativas para las reacciones en una viga con un voladizo.

Como tercer ejemplo se considera a la línea de influencia para el momento flexionante en la sección 1-1 de la viga de la figura 9.7. Este diagrama puede obtenerse cortando la viga en la sección considerada y aplicando momentos justo a la izquierda y justo a la derecha de la sección cortada, como se muestra. Puede verse en la figura que el momento en cada lado de la sección es positivo con respecto al segmento de la viga en ese lado de la sección. La línea elástica resultante es la línea de influencia cualitativa para el momento flexionante en la sección 1-1.

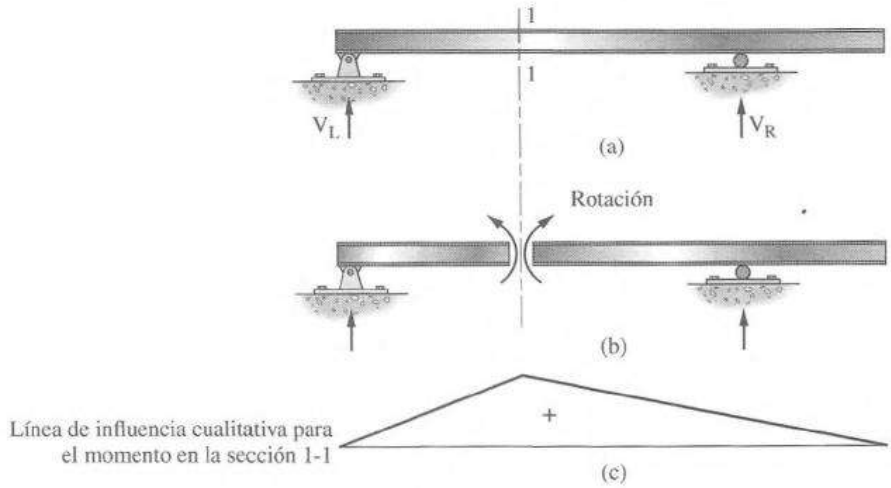


Figura 9.7 Línea de influencia cualitativa para un momento en una viga simple.

Para trazar una línea de influencia cualitativa para la fuerza cortante se supone a la viga cortada en la sección en consideración. Se aplican fuerzas verticales a cada lado de la sección cortada, de la naturaleza necesaria para generar una fuerza cortante positiva, como se muestra en la figura 9.8(b). Para entender la dirección usada para esas fuerzas, obsérvese que éstas se aplican

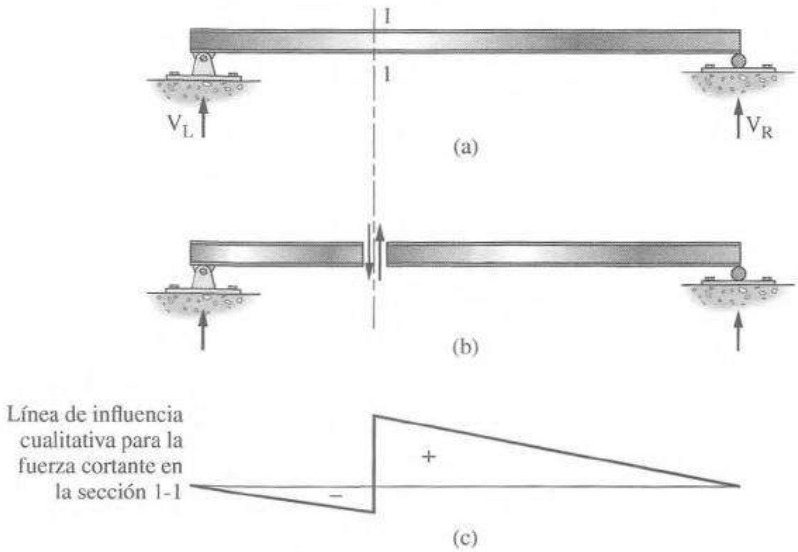


Figura 9.8 Línea de influencia cualitativa para una fuerza cortante en una viga simple.

a la izquierda y a la derecha de la sección cortada, de manera que produzcan un cortante positivo en cada segmento. En otras palabras, la fuerza en el segmento izquierdo tiene la dirección de una fuerza cortante positiva aplicada desde el lado derecho y viceversa.

En la figura 9.9 se presentan ejemplos adicionales de líneas de influencia cualitativas.

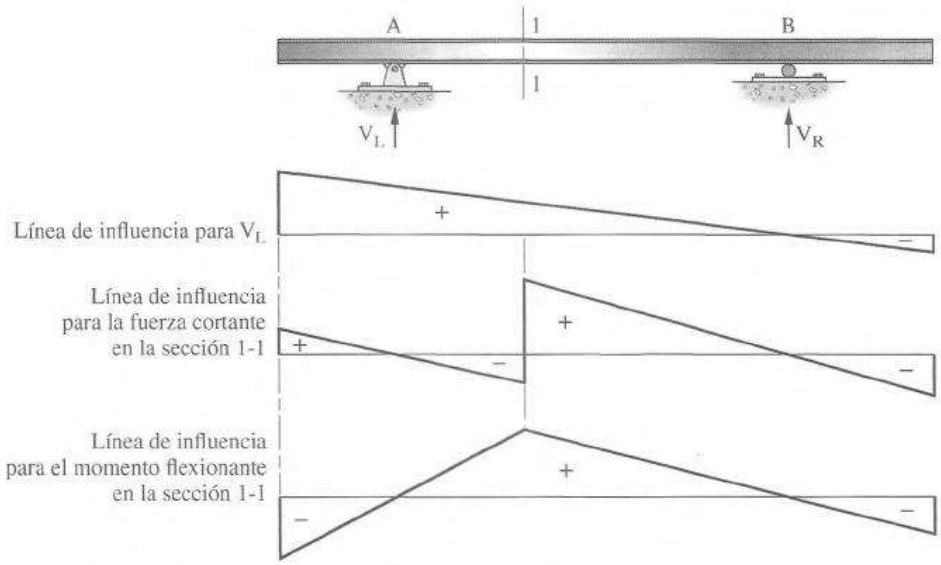


Figura 9.9 Diferentes líneas de influencia cualitativas para una viga simple con voladizos.

Paso a desnivel en Boise, Idaho. (Cortesía del American Concrete Institute.)

El principio de Müller-Breslau es útil para bosquejar líneas de influencia de estructuras estáticamente determinadas, pero su mayor utilidad se manifiesta en las estructuras estáticamente indeterminadas. Aunque los diagramas se trazan exactamente igual que antes, debe observarse que en la figura 9.10 éstas ahora constan de líneas curvas en vez de rectas, como sucede con las estructuras estáticamente determinadas.

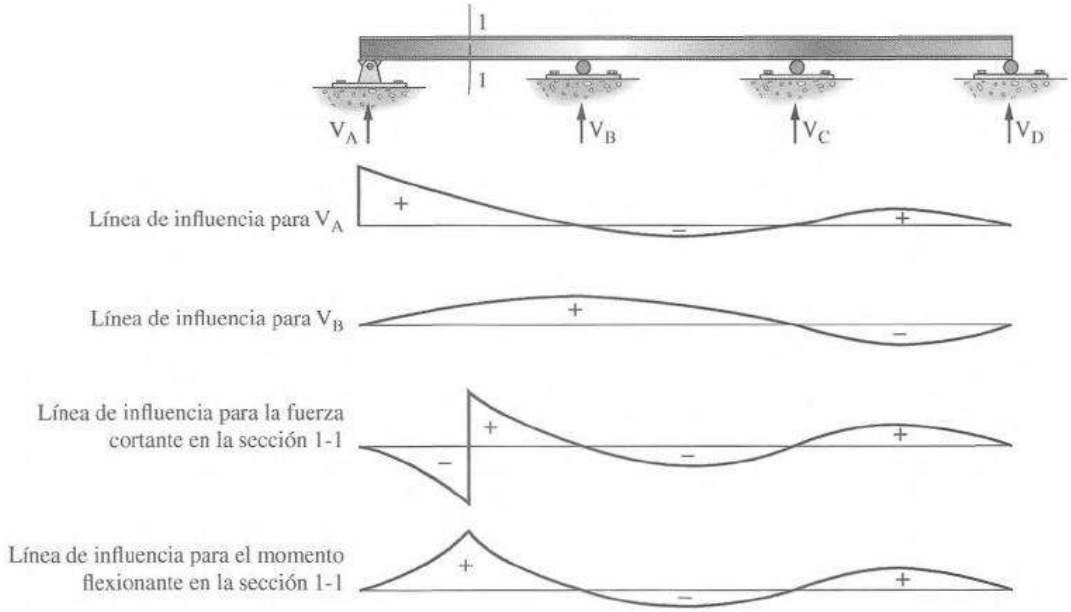


Figura 9.10 Diferentes líneas de influencia cualitativas en una viga estáticamente indeterminada de 3 claros.

9.7 USOS DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA; CARGAS CONCENTRADAS

Las líneas de influencia son los valores graficados de funciones estructurales para diferentes posiciones de una carga unitaria. Si se tiene la línea de influencia para una función en particular de una estructura, puede obtenerse inmediatamente el valor de la función para una carga concentrada en cualquier punto de la estructura. La viga de la figura 9.1 y la línea de influencia para su reacción izquierda se usan para ilustrar esta afirmación. Una carga concentrada de 1 klb a 4 pies a la derecha del apoyo izquierdo ocasiona una V_L igual a 0.8 klb. Si se colocase una carga concentrada de 175 klb en el mismo lugar, V_L sería 175 veces el valor de 0.8 o 140 klb.

El valor de una función debido a una serie de cargas concentradas se obtiene rápidamente multiplicando cada carga concentrada por la correspondiente ordenada de la línea de influencia para esa función. Una carga de 150 klb colocada a 6 pies del apoyo izquierdo en la figura 9.1, y otra de 200 klb colocada a 16 pies del apoyo izquierdo, ocasionan una V_L igual a (150)(0.7) + (200)(0.2), o 145 klb.

EJEMPLO 9.1

Las líneas de influencia para la reacción izquierda y el momento en el centro del claro se muestran para una viga simple en la figura 9.11. Determine los valores de estas funciones para las diferentes cargas soportadas por la viga.

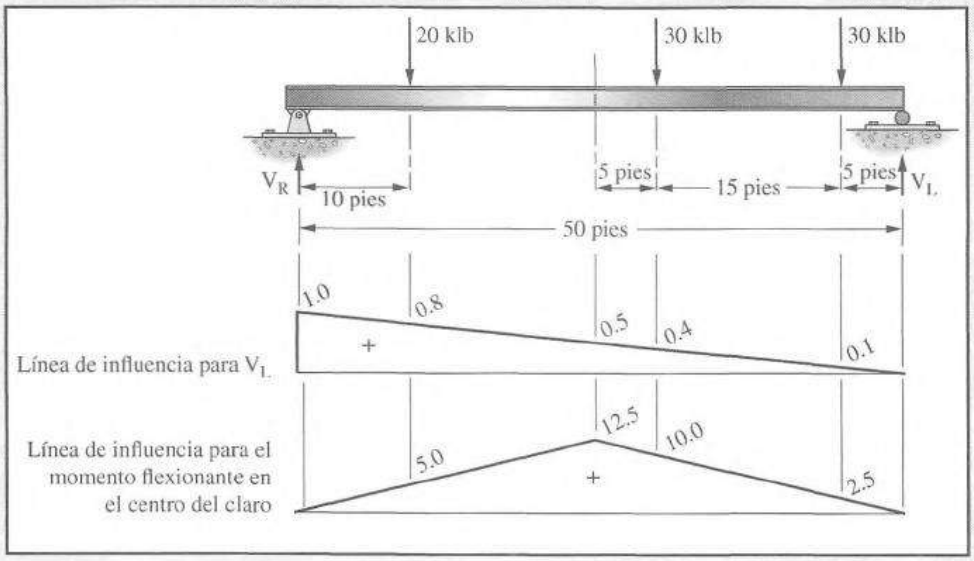


Figura 9.11

Solución. Calcule la magnitud de la reacción izquierda. Ese valor es igual a la suma de cada carga multiplicada por la ordenada del diagrama de influencia en la posición de la carga.

$$V_L = 20(0.8) + 30(0.4) + 30(0.1) = 31 \text{ klb}$$

Luego calcule la magnitud del momento en el centro de la viga. Se calcula de la misma manera que la reacción izquierda.

$$M_{\text{centro del claro}} = 20(5.0) + 30(10.0) + 30(2.5) = 475 \text{ klb-pie} \quad \blacksquare$$

9.8 USOS DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA; CARGAS UNIFORMES

El valor de cierta función de una estructura puede obtenerse a partir de la línea de influencia, cuando la estructura está cargada uniformemente, multiplicando el área de la parte de la línea de influencia que está opuesta a la parte cargada del miembro por la intensidad de la carga uniforme. El siguiente análisis mostrará que esto es correcto.

Una carga uniforme de intensidad w lb/pie es equivalente a una serie continua de cargas más pequeñas de (w)(0.1) lb sobre cada 0.1 pie de la viga, o w dx lb sobre cada dx de longitud de la viga. Considere cada longitud de dx cargada con una carga concentrada igual a w dx. El valor de la función en estudio para una de esas pequeñas cargas es (w dx)(y), donde y es la ordenada de la línea de influencia en ese punto. El efecto de todas esas cargas concentradas es igual a $\int wy\,dx$. Esta expresión muestra que el efecto de una carga uniforme es igual a la intensidad de la carga uniforme, w, por el área de la línea de influencia, $\int y\,dx$, a lo largo de la sección de la estructura cargada con la carga uniforme.

EJEMPLO 9.2

Suponga que la viga en la figura 9.11 está cargada con una carga uniforme de 3 klb/pie. Determine la magnitud de la reacción izquierda y el momento en el centro del claro si la carga distribuida actúa sobre toda la viga, y si actúa sólo sobre la mitad izquierda de la viga.

Solución. Calcule primero los valores para la carga actuando sobre todo el claro de la viga.

$$V_L = (3\ \text{klb/pie})\frac{(1\,\frac{\text{klb}}{\text{klb}})(50\ \text{pies})}{2} = 75\ \text{klb}$$

$$M_{\text{centro del claro}} = (3\ \text{klb/pie})\frac{(12.5\,\frac{\text{pie-klb}}{\text{klb}})(50\ \text{pies})}{2} = 937.5\ \text{klb-pie}$$

Ahora calcule los mismos valores para la carga uniforme cuando ésta actúa sólo sobre la mitad izquierda de la viga.

$$V_L = (3\ \text{klb/pie})\frac{\left(1\,\frac{\text{klb}}{\text{klb}} + 0.5\,\frac{\text{klb}}{\text{klb}}\right)}{2}(25\ \text{pies}) = 56.25\ \text{klb}$$

$$M_{\text{centro del claro}} = (3\ \text{klb/pie})\frac{\left(12.5\,\frac{\text{klb-pie}}{\text{klb}}\right)(25\ \text{pies})}{2} = 468.75\ \text{klb-pie}$$ ■

Si una estructura soporta cargas uniformes y cargas concentradas, el valor de la función en estudio puede encontrarse multiplicando cada carga concentrada por su respectiva ordenada en la línea de influencia y la carga uniforme multiplicada por el área de la línea de influencia opuesta a la sección cubierta por la carga uniforme.

9.9 FÓRMULAS COMUNES PARA VIGAS SIMPLES A PARTIR DE LÍNEAS DE INFLUENCIA

Varias expresiones útiles para los momentos flexionantes en vigas pueden determinarse con las líneas de influencia. Pueden desarrollarse fórmulas para el momento flexionante en el centro del claro de una viga simple en la figura 9.12(a), estando cargada la viga primero con una carga uniforme y segundo con una carga concentrada al centro del claro. De la figura 9.12(b), pueden desarrollarse fórmulas para el momento flexionante en cualquier punto de una viga simple cargada con una carga uniforme y para el momento flexionante en cualquier punto donde se localice una carga concentrada. Estas fórmulas son las siguientes:

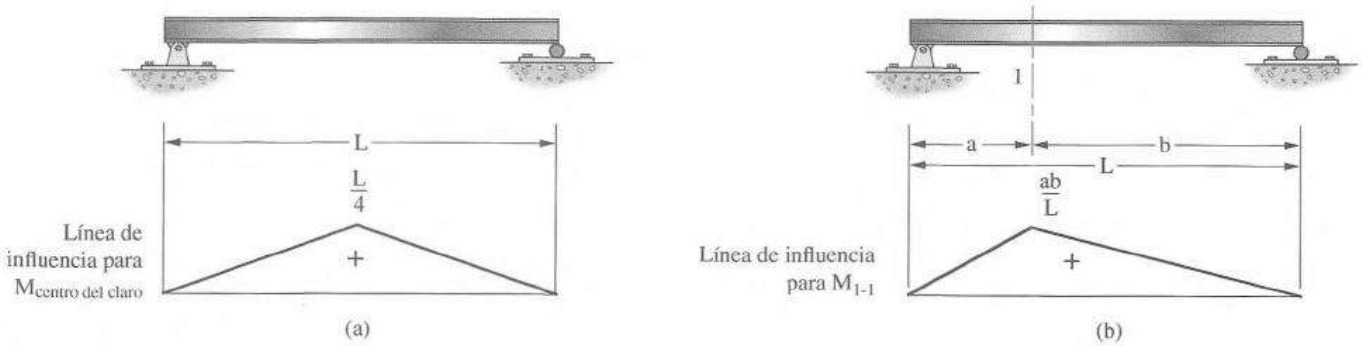


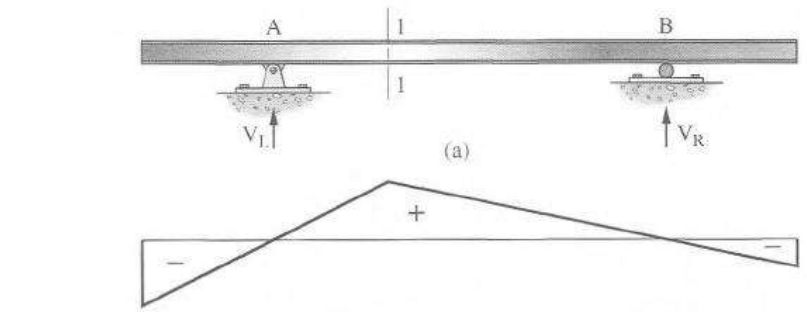
Figura 9.12

(a) Cargada con una carga uniforme	(b) Cargada con una carga uniforme
$M_{\text{centro del claro}} = (w)\left(\frac{1}{2} \times L \times \frac{L}{4}\right) = \frac{wL^2}{8}$	$M_{1\text{-}1} = (w)\left(\frac{1}{2} \times \frac{ab}{L} \times L\right) = \frac{wab}{2}$
Cargada con una carga concentrada P en el centro del claro:	Cargada con una carga concentrada P en la sección 1-1:
$M_{\text{centro del claro}} = \frac{PL}{4}$	$M_{1\text{-}1} = \frac{Pab}{L}$

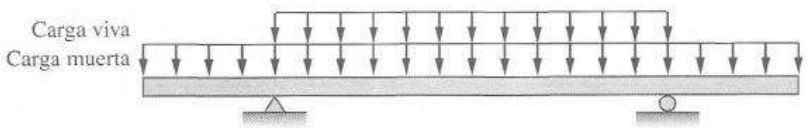
9.10 DETERMINACIÓN DE LOS EFECTOS MÁXIMOS DE LA CARGA USANDO LÍNEAS DE INFLUENCIA

Las vigas deben diseñarse para soportar satisfactoriamente las máximas fuerzas cortantes y máximos momentos flexionantes que pueden ser causados por las cargas a las que están sometidas. Por ejemplo, considere la viga mostrada en la figura 9.13(a) y la línea de influencia para el momento flexionante en la sección 1-1 en la figura 9.13(b). Ésta es la misma viga mostrada en la figura 9.9. Queremos ahora determinar los momentos flexionantes máximos posibles en la sección 1-1 para una carga muerta uniforme y una carga viva uniforme.

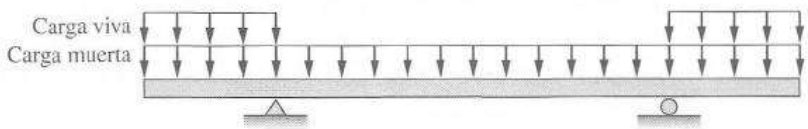
Primero determinaremos la carga que causa un momento flexionante máximo positivo. La carga muerta uniforme, que es el peso de la estructura, se aplicará de un extremo de la viga al otro



(b) Línea de influencia para momento flexionante en la sección 1-1



(c) Cargas colocadas para causar momento máximo positivo en la sección 1-1

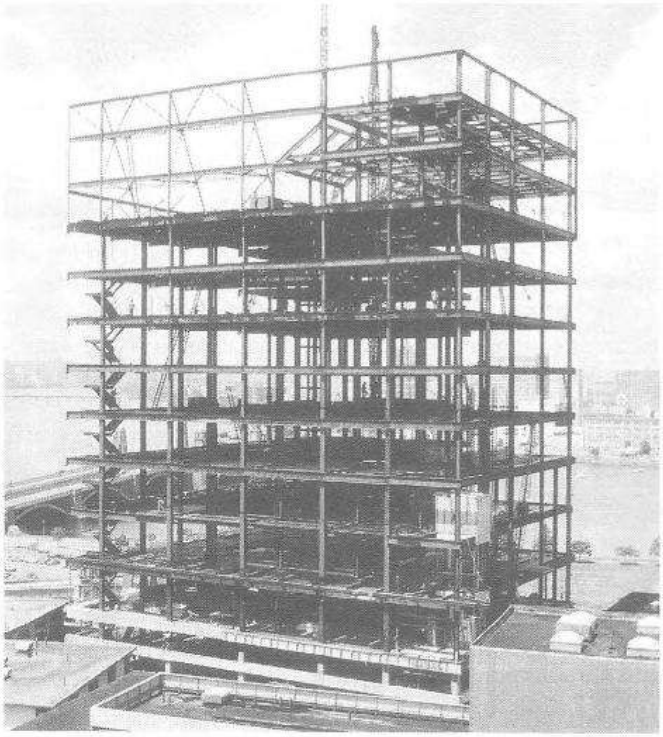


(d) Cargas colocadas para causar momento máximo negativo en la sección 1-1

Figura 9.13 Colocación de las cargas para generar fuerzas máximas.

como se muestra en la figura 9.13(c). La carga muerta actúa siempre sobre toda la estructura. De la línea de influencia vemos que la carga unitaria causa un momento positivo en la sección 1-1 sólo cuando está ubicada entre los soportes A y B. Por ello, la carga viva uniforme se coloca de A a B para determinar el momento flexionante positivo máximo, como se muestra en la figura 9.13(c). Si hubiese existido una carga viva concentrada actuando con la carga viva uniforme, se habría colocado en la sección 1-1, ya que la carga unitaria causa el momento positivo máximo cuando se coloca ahí. El momento flexionante causado por estas cargas puede calcularse usando las ordenadas de la línea de influencia o usando las ecuaciones de equilibrio estático.

El momento flexionante máximo negativo que ocurre en la sección 1-1 puede determinarse de manera similar. Para este caso, las cargas se colocarían como se muestra en la figura 9.13(d). Cuando la carga unitaria se colocó sobre las partes en voladizo de la viga, se presentó un momento flexionante negativo en la sección 1-1. Por esto, la carga viva distribuida se coloca en esas posiciones. Si hubiese existido una carga viva concentrada, se habría colocado en el extremo izquierdo o derecho de la viga, es decir, donde se tuviese la mayor ordenada negativa sobre la línea de influencia.



Hospital Massachusetts para ojos y oídos en Boston. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

9.11 EFECTOS MÁXIMOS DE LAS CARGAS USANDO LA CURVATURA DE LA VIGA

En la sección anterior se usó una línea de influencia para determinar las posiciones críticas para colocar las cargas vivas para generar momentos flexionantes máximos. Los mismos resultados pueden obtenerse y tal vez más fácilmente en muchos casos, considerando la línea elástica o curvatura de un elemento bajo carga. Si las cargas vivas se colocan de manera que causen la máxima curvatura en un punto específico, éstas flexionarán al elemento al máximo en ese punto. Esto significa que habrán generado ahí el mayor momento posible.

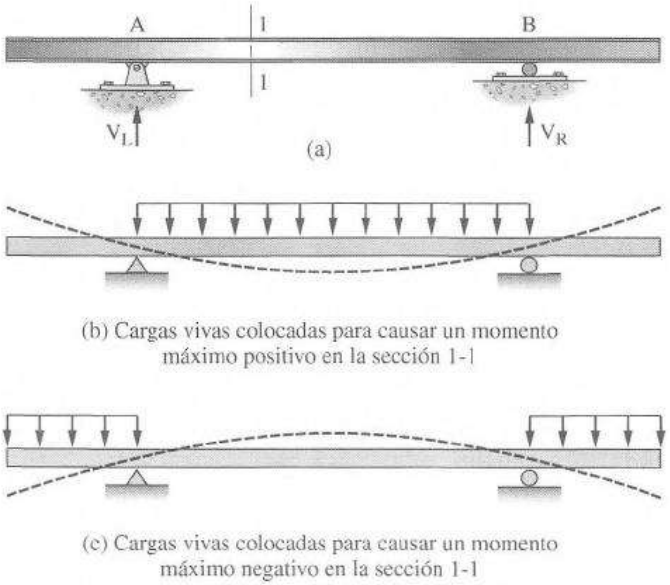


Figura 9.14 Obtención de las fuerzas máximas usando curvatura.

Para ilustrar este concepto, determinemos el momento flexionante positivo máximo en la sección 1-1 de la viga mostrada en la figura 9.14(a) debido a las mismas cargas que se consideraron en la sección anterior. En la figura 9.14(b) está dibujada la forma deflexionada de la viga en la sección 1-1 cuando ocurre ahí un momento positivo. Esta forma deflexionada se muestra con la línea punteada. La carga muerta se coloca a lo largo de toda la viga, mientras que la carga viva se coloca de nuevo entre A y B; esta posición de la carga viva amplificará la forma deflexionada en la sección 1-1.

Una situación similar se muestra en la figura 9.14(c), donde se desea obtener el máximo momento flexionante negativo en la sección 1-1. Se dibuja la forma deflexionada de la viga, mostrada por la línea punteada, cuando se presenta un momento flexionante negativo en la sección 1-1. Para amplificar esta deflexión negativa o hacia arriba en la sección 1-1, las cargas vivas deben colocarse en los voladizos de la viga, que son las partes fuera de los apoyos.

9.12 CARGAS DE IMPACTO

La aplicación de las cargas dinámicas producidas por camiones y trenes a los puentes carreteros y ferroviarios no se efectúa de manera suave y gradual, sino violenta, lo cual produce incrementos notables en las fuerzas de la estructura. Por esta razón se deben considerar cargas adicionales, denominadas *cargas de impacto*. Las cargas de impacto se toman en cuenta incrementando las cargas vivas en algún porcentaje, el cual se obtiene a partir de expresiones puramente empíricas. Se han propuesto numerosas fórmulas para estimar el impacto. Una de éstas es la siguiente fórmula AASHTO para puentes carreteros, en la que I es el porcentaje de impacto y L es la longitud del claro, en pies, sobre la que se coloca la carga viva para obtener un esfuerzo máximo. La AASHTO considera que no es necesario usar un porcentaje de impacto mayor de 30%, independientemente del valor dado por la fórmula. Obsérvese que cuanto más grande es el claro, menor resulta el impacto.

$$I = \frac{50}{L + 125}$$

Los factores de impacto para puentes ferroviarios son mayores que para los puentes carreteros. Ello se debe a las vibraciones causadas por las ruedas de un tren, las cuales son mucho

mayores en comparación con la relativa suavidad de rodamiento de los neumáticos. Sólo se necesita estar cerca de un puente ferroviario unos cuantos segundos, mientras pasa un tren rápido y pesadamente cargado, para apreciar la diferencia. Algunas pruebas han demostrado que el impacto en puentes ferroviarios puede ser hasta de 100% o mayor. Un tren no sólo ocasiona un impacto directo u oscilatorio en dirección vertical, también produce cargas de choque a lo largo de la vía por su movimiento de vaivén en dirección horizontal. Para el impacto vertical sobre vigas, trabes y vigas de piso, la AREA proporciona el siguiente factor de impacto:

$$I = 60 - \frac{L^2}{500} \qquad L < 100 \text{ pies}$$

$$I = \frac{1\,800}{L - 40} + 10 \qquad L \geq 100 \text{ pies}$$

EJEMPLO 9.3

Dibuje la línea de influencia para momento positivo en la sección 1-1 de la viga de la figura 9.15. Suponiendo una carga muerta uniforme de 2 klb/pie, una carga viva uniforme de 3 klb/pie, una carga viva concentrada (algunas veces denominada carga flotante) de 40 klb, y un factor de impacto de 30%, determine el momento máximo positivo en la sección 1-1 de la viga.

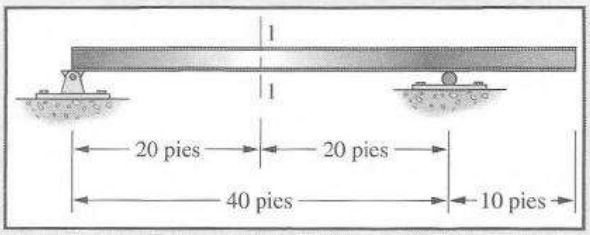
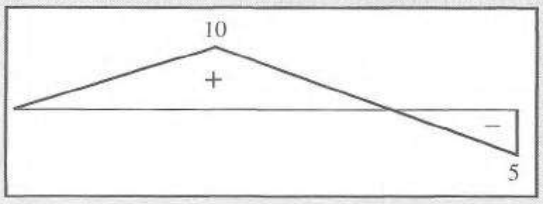
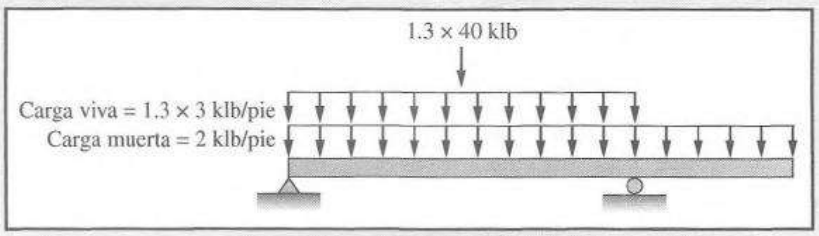


Figura 9.15

Solución. Se dibuja la línea de influencia para el momento positivo en la sección 1-1.



Se carga la viga para un momento máximo positivo que incremente las cargas vivas en un 30%.



Momento máximo + en la sección 1-1

$$\text{DL} = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)(10)(40) + \left(\frac{1}{2}\right)(10)(-5)\right] = +350 \text{ klb-pie}$$

$$+\text{LL uniforme} = (1.3 \times 3)\left[\left(\frac{1}{2}\right)(10)(40)\right] = +780$$

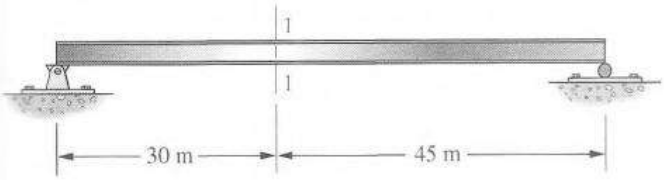
$$+\text{LL flotante} = (1.3 \times 40)[10] = +520$$

Resp.: $= +1\,650$ klb-pie ■

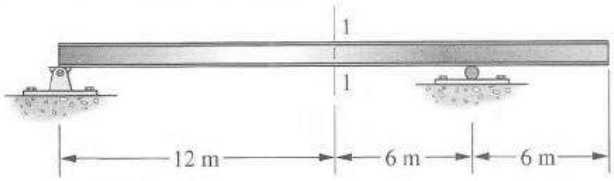
9.13 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

En los problemas 9.1 al 9.6, dibújense líneas de influencia cualitativas para todas las reacciones, para la fuerza cortante y para el momento en la sección 1-1 de cada viga que ahí se muestra.

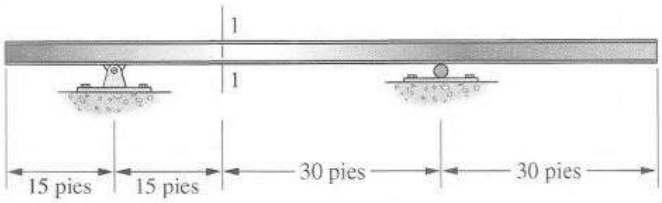
9.1



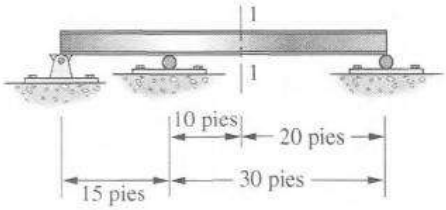
9.2



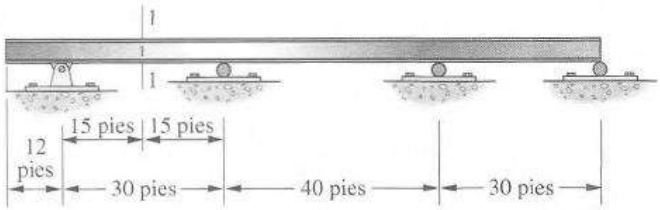
9.3



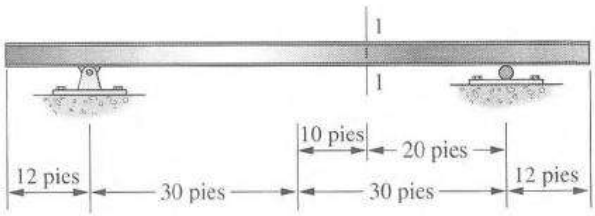
9.4



9.5

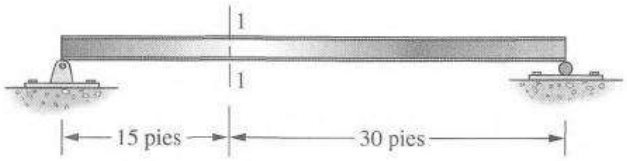


9.6

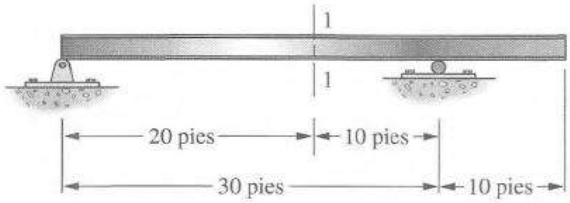


En los problemas 9.7 al 9.18, dibújense líneas de influencia cuantitativas para las situaciones indicadas.

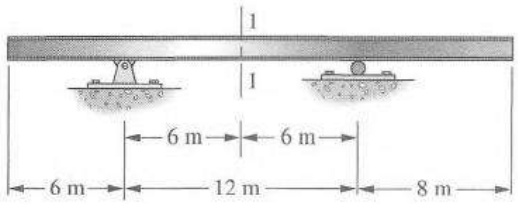
9.7 Ambas reacciones, y también fuerza cortante y momento flexionante en la sección 1-1. (*Resp.:* Carga @ 1-1: $V_L = 0.667$, $M_{1\text{-}1} = 10$.)



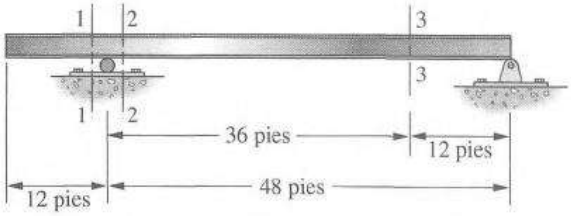
9.8 Ambas reacciones, y también fuerza cortante y momento flexionante en la sección 1-1.



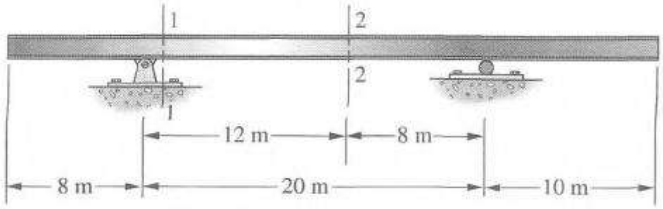
9.9 Ambas reacciones, y también fuerza cortante y momento flexionante en la sección 1-1. (*Resp.:* Carga @ en el extremo libre izquierdo: $V_A = 1.50$, $V_B = -0.50$, $V_{1\text{-}1}$ @ 1-1 = ± 0.50, $M_{1\text{-}1} = +3.0$.)



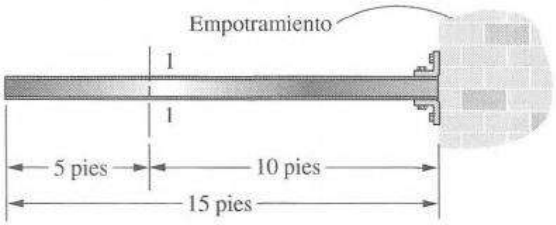
9.10 Ambas reacciones y fuerza cortante en las secciones 1-1, 2-2 (justo a la izquierda y a la derecha del soporte izquierdo) y 3-3.



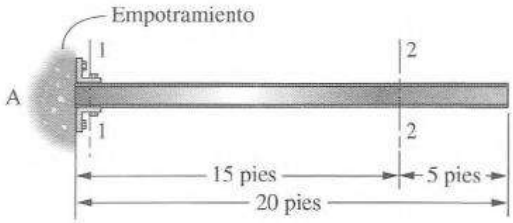
9.11 Ambas reacciones, fuerza cortante en las secciones 1-1 y 2-2, y momento en la sección 2-2. (*Resp.:* Carga @ en el extremo libre derecho: $V_B = 1.50$, fuerza cortante @ 2-2 = -0.50. $M_{2\text{-}2} = -6.00$.)



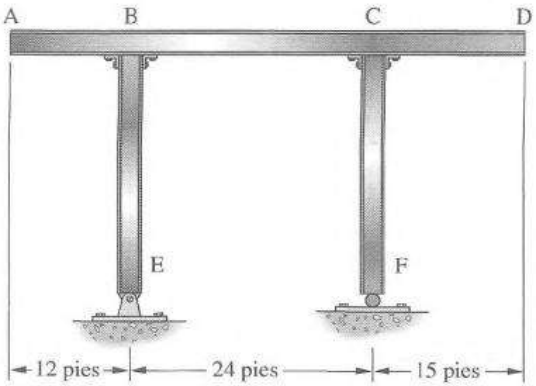
9.12 Reacción vertical y momento en el empotramiento; fuerza cortante y momento en la sección 1-1.



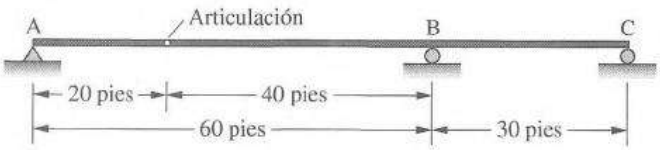
9.13 Fuerza cortante y momento flexionante en las secciones 1-1 y 2-2. (*Resp.:* Carga @ extremo libre: $M_A = -20.0$, V @ 1-1 = 1.00, $M_{2\text{-}2} = -5.00$.)



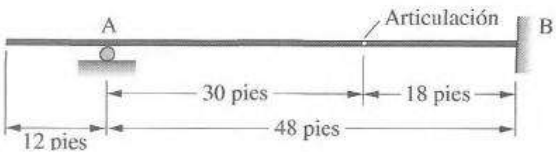
9.14 Ambas reacciones al moverse la carga de A a D. También M_B y M_C.



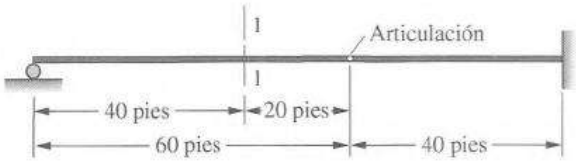
9.15 Todas las reacciones. (*Resp.:* Carga @ articulación: $V_A = 0$, $V_B = 2.33$, $V_C = -1.33$.)



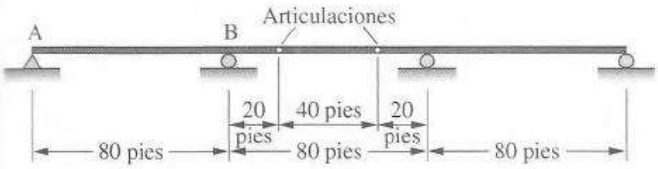
9.16 Reacciones verticales en los soportes A y B y momento @ B.



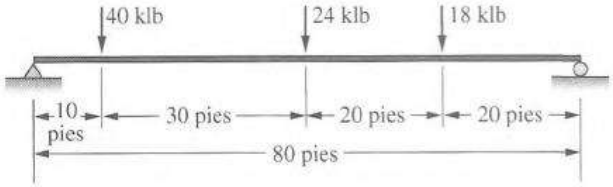
9.17 Todas las reacciones verticales y momentos flexionantes y fuerzas cortantes en la sección 1-1. (*Resp.:* Carga @ 1-1: $V_R = 0.667$, $M_{1\text{-}1} = 13.3$, $V_{1\text{-}1(\text{izquierda})} = -0.67$.)



9.18 Reacciones en los soportes A y B.

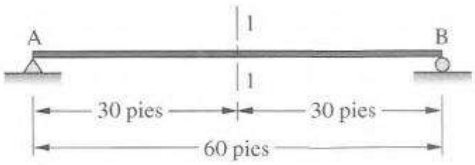


9.19 Dibuje las líneas de influencia para ambas reacciones y para la fuerza cortante justo a la izquierda de la carga de 18 klb, y para el momento bajo la carga de 18 klb. Determine la magnitud de cada una de esas funciones usando las líneas de influencia para las cargas fijas en las posiciones que se muestran en la figura. (*Resp.:* $V_A = 51.5$ klb, fuerza cortante justo a la izquierda de la carga de 18 klb $= -12.5$ klb, M @ carga de 18 klb $= 610$ klb-pie.)

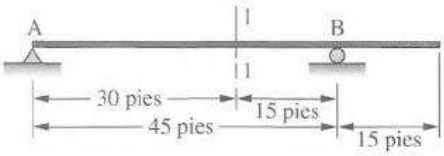


Para los problemas 9.20 al 9.26 determine, con líneas de influencia, las cantidades requeridas para una carga muerta uniforme de 2 klb/pie, para una carga viva uniforme móvil de 3 klb/pie y para una carga viva concentrada móvil o flotante de 20 klb. Suponga impacto = 25% en cada caso de carga viva.

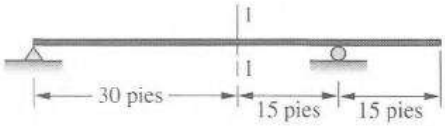
9.20 Reacción izquierda máxima, fuerza cortante positiva máxima y momento positivo máximo en la sección 1-1.



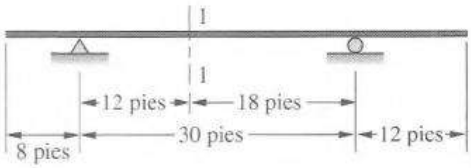
9.21 Valores positivos máximos de la reacción izquierda, de la fuerza cortante y del momento en la sección 1-1. (*Resp.:* $V_A = 149.37$ klb, $+V$ @ 1-1 $= -2.37$ klb, $M_{1\text{-}1} = 1\,393.7$ klb-pie.)



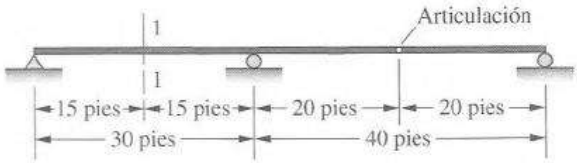
9.22 Valores negativos máximos de la fuerza cortante y del momento en la sección 1-1; de la fuerza cortante máxima negativa justo a la derecha del soporte, y del momento flexionante en el soporte derecho para la viga mostrada.



9.23 Fuerza cortante y momento negativos máximos en la sección 1-1. (*Resp.:* Fuerza cortante máxima negativa = −24.664 klb, momento negativo máximo = −180 klb-pie.)



9.24 Valor máximo hacia arriba de las reacciones en A y B, y fuerza cortante y momento negativos máximos en la sección 1-1.



9.25 Valores máximos positivos y negativos de la fuerza cortante y del momento flexionante en la sección 3-3 en la viga del problema 9.10. (*Resp.:* Fuerza cortante máxima negativa = −90.375 klb, momento positivo máximo = +1 431 klb-pie.)

9.26 Fuerza cortante positiva máxima en la articulación no soportada, momento negativo máximo en el soporte B, y valor máximo hacia abajo de la reacción en el soporte A para la viga del problema 9.24.

Capítulo 10

Líneas de influencia y cargas móviles en armaduras

10.1 LÍNEAS DE INFLUENCIA EN ARMADURAS

Los puentes tipo viga de acero estructural, concreto reforzado precolado, o concreto preesforzado, se han apoderado casi completamente del mercado de puentes de claro corto. Sin embargo, en este capítulo se presenta el trazo de líneas de influencia en armaduras por dos razones. Primero, el autor piensa que la comprensión de estos diagramas da al estudiante un mejor entendimiento del análisis de armaduras y de la acción de las cargas móviles. Segundo, la información presentada aquí sirve como antecedente para la construcción de líneas de influencia para las armaduras de puentes estáticamente indeterminadas de claro mayor que todavía son económicamente competitivas. Estas últimas líneas de influencia se estudian en el capítulo 17 de este libro.

Las líneas de influencia para armaduras pueden trazarse y usarse para hacer cálculos de fuerzas, o pueden esbozarse preliminarmente sin calcular los valores de las ordenadas y usarse solamente para colocar las cargas móviles para causar fuerzas máximas o mínimas.

El procedimiento usado para preparar las líneas de influencia para armaduras está muy relacionado con el que se usa para vigas. La manera exacta de aplicación de las cargas a una armadura de puente desde el piso del puente se describe en la siguiente sección. Podría hacerse un estudio similar para la aplicación de cargas a armaduras de techo.

10.2 DISPOSICIÓN DE LOS SISTEMAS DE PISO DE PUENTES

La disposición de los elementos de un sistema de piso de puente debe estudiarse cuidadosamente de modo que se entienda completamente la manera de aplicación de las cargas a la armadura. Probablemente el tipo más común de sistema de piso consiste en una losa de concreto sustentada por largueros de acero que van paralelos a la armadura. Los largueros cubren la longitud de cada panel y están sustentados en sus extremos por vigas de piso que van transversales a la pista de rodamiento y se ensamblan en los puntos o nudos del panel de la armadura (figura 10.1).

La discusión anterior evidentemente indica que los largueros descansan sobre las vigas de piso y éstas sobre las armaduras. Este método de explicación se ha usado para enfatizar la manera en que las cargas se transfieren del pavimento a las armaduras, pero en general los elementos se conectan directamente entre sí al mismo nivel. Conservadoramente se supone que los largueros están simplemente apoyados, pero en realidad hay alguna continuidad en su construcción.

Se aplica una carga de 100 klb a la losa del piso en el quinto panel de la armadura de la figura 10.1. La carga se transfiere de la losa del piso a los largueros, de ahí a las vigas de piso, y finalmente a los nudos L_4 y L_5 de las armaduras de apoyo. La cantidad de carga que va a cada larguero depende de la posición de la carga entre los largueros: si están a la mitad, cada larguero

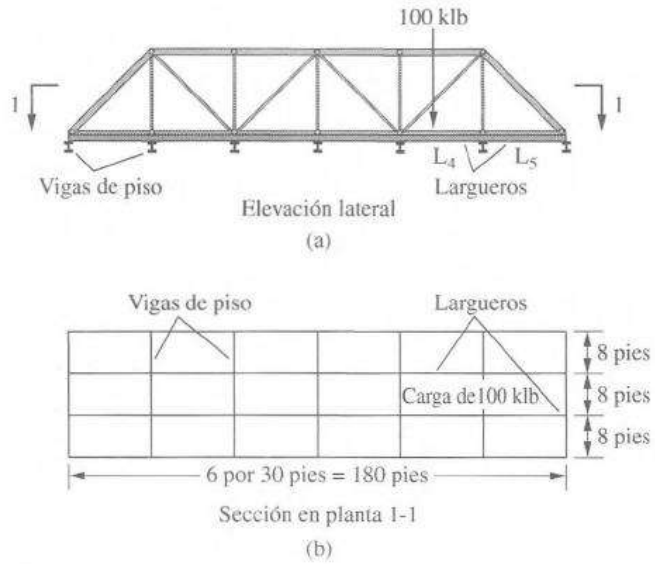
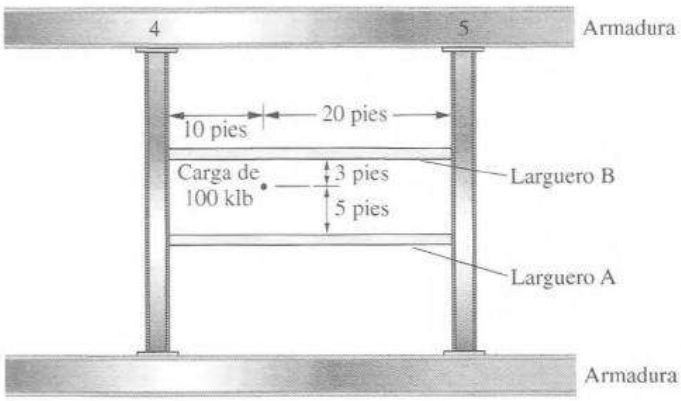


Figura 10.1

cargaría la mitad. En forma similar, la cantidad de carga transferida de los largueros a las vigas de piso depende de la posición longitudinal de la carga.

La figura 10.2 muestra los cálculos que intervienen en la estimación de la transferencia de una carga de 100 klb a las armaduras. Las reacciones finales mostradas para las vigas de piso representan las cargas hacia abajo aplicadas a los puntos del panel de la armadura. El cálculo de las cargas de la armadura generalmente es un proceso mucho más simple que el descrito aquí.



Carga transferida a cada larguero,

$$R_A = \frac{3}{8} \times 100 = 37.5\,\text{klb}$$

$$R_B = \frac{5}{8} \times 100 = 62.5\,\text{klb}$$

Carga transferida del larguero A a las vigas de piso,

$$R_{4\text{-}4} = \frac{20}{30} \times 37.5 = 25\,\text{klb}$$

$$R_{5\text{-}5} = \frac{10}{30} \times 37.5 = 12.5\,\text{klb}$$

Carga transferida del larguero B a las vigas de piso,

$$R_{4\text{-}4} = \frac{20}{30} \times 62.5 = 41.67 \text{ klb}$$

$$R_{5\text{-}5} = \frac{10}{30} \times 62.5 = 20\ 83 \text{ klb}$$

Las vigas de piso se cargan como sigue:

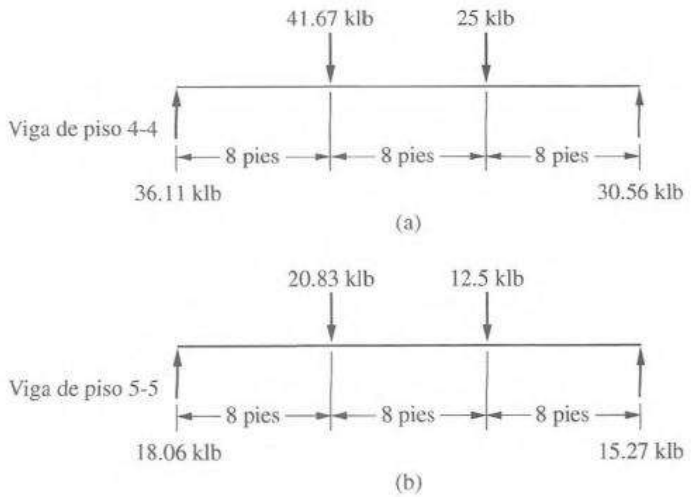


Figura 10.2

10.3 LÍNEAS DE INFLUENCIA PARA LAS REACCIONES DE UNA ARMADURA

Las líneas de influencia para las reacciones de armaduras simplemente apoyadas se usan para determinar las cargas máximas que pueden aplicarse a los apoyos. Aunque su preparación es elemental, ofrecen un buen problema introductorio para aprender la construcción de las líneas de influencia para los miembros de una armadura.

Las líneas de influencia para las reacciones en ambos apoyos de una armadura con voladizo se dan en la figura 10.3. Las cargas pueden aplicarse a la armadura solamente mediante las vigas de piso en los puntos del panel, y se supone que las vigas de piso están presentes en cada uno de los puntos del panel, incluyendo los de los extremos. Una carga aplicada en el extremo mismo de la armadura, opuesto al punto terminal del panel, se transferirá a ese punto del panel por el extremo de la viga de piso.

10.4 LÍNEAS DE INFLUENCIA PARA LAS FUERZAS DE LOS MIEMBROS DE ARMADURAS DE CUERDA PARALELA

Las líneas de influencia para las fuerzas en los miembros, o elementos, de las armaduras pueden construirse de la misma manera que aquéllas para las diferentes funciones de viga. La carga unitaria se mueve a través de la armadura, y las ordenadas para la fuerza en el miembro considerado pueden calcularse para la carga en cada punto del panel. En la mayoría de los casos no es necesario colocar la carga en cada punto del panel y calcular el valor resultante de la fuerza, ya que puede verse inmediatamente que ciertas partes de las líneas de influencia consisten en líneas rectas para varios paneles.

Un método que se usa para calcular las fuerzas en un miembro de la cuerda de una armadura consiste en pasar una sección imaginaria a través de la armadura, que corte al elemento en cuestión

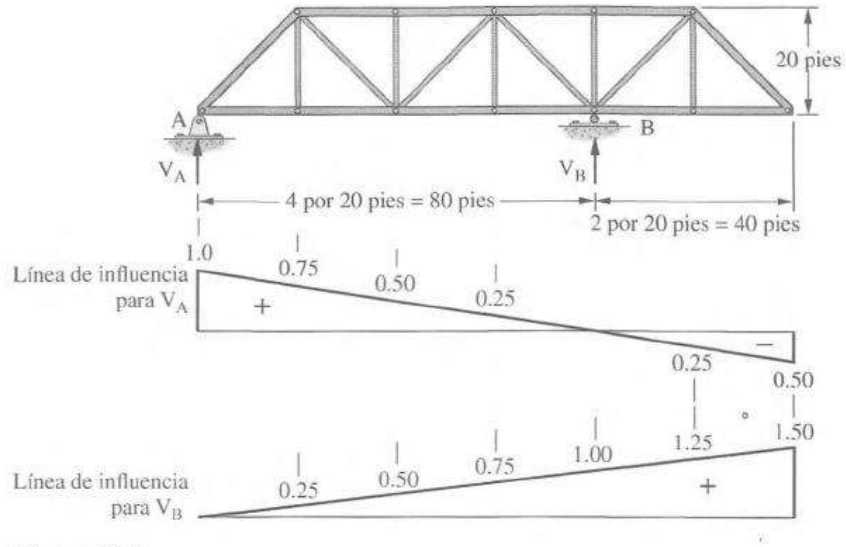


Figura 10.3

y tomar momentos en la intersección de los otros elementos cortados por la sección. La fuerza resultante en el elemento es igual al momento dividido por el brazo de palanca; por lo tanto, la línea de influencia para un miembro de la cuerda tiene la misma forma que la línea de influencia para el momento en el punto donde se toman momentos.

La armadura de la figura 10.4 se usa para mostrar este punto. La fuerza en el miembro L_1L_2 se determina al pasar la sección 1-1 y tomar momentos en U_1. Se muestra una línea de influencia

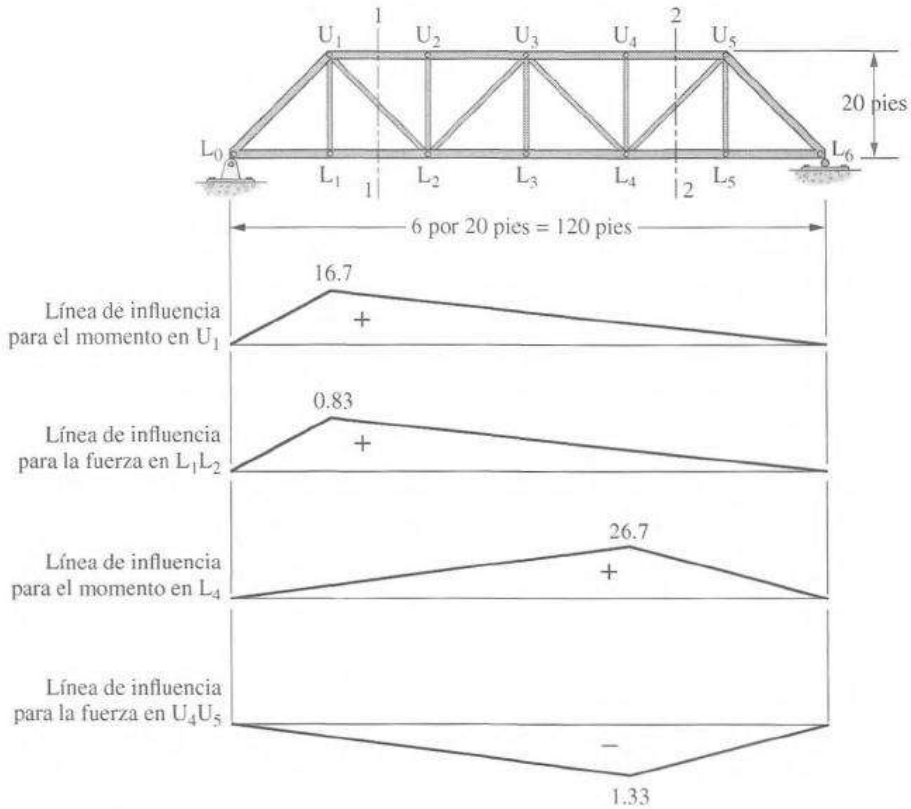


Figura 10.4

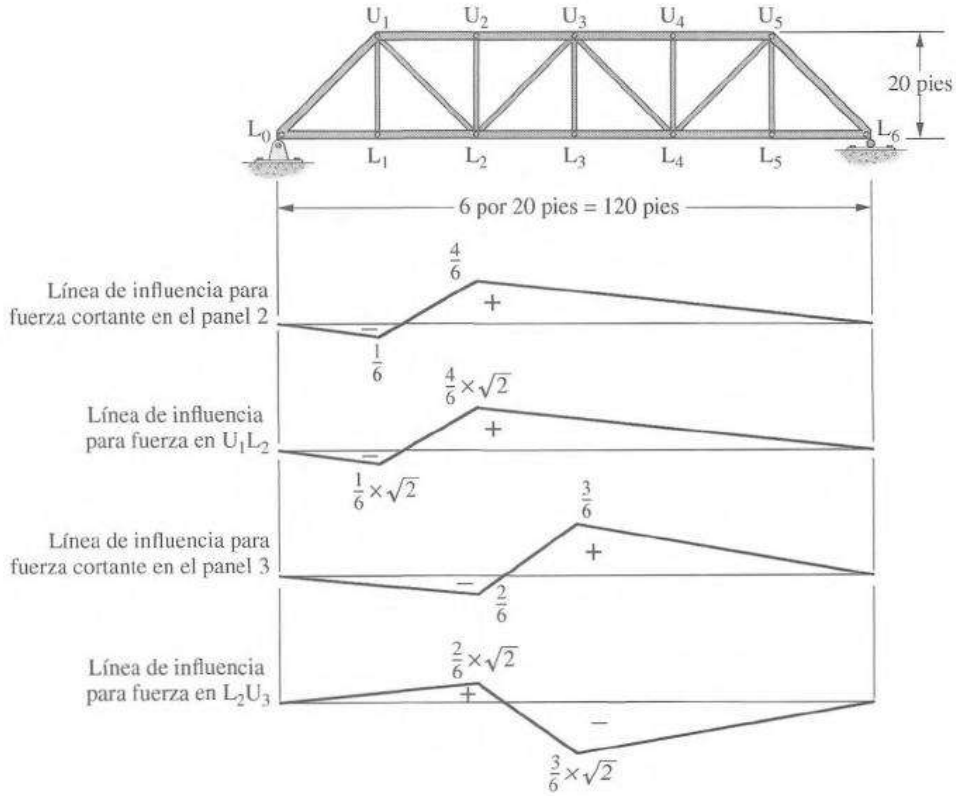


Figura 10.5

para el momento en U_1 y para la fuerza en L_1L_2, siendo las ordenadas de esta última figura aquéllas de la anterior divididas por el brazo de palanca. Similarmente, se pasa la sección 2-2 para calcular la fuerza en U_4U_5, y se muestran las líneas de influencia para el momento en L_4 y para la fuerza en U_4U_5.

Las fuerzas en las diagonales de las armaduras de cuerda paralela pueden calcularse a partir de la fuerza cortante en cada panel. La línea de influencia para la fuerza cortante en un panel tiene la misma forma que la línea de influencia para la fuerza en la diagonal, ya que la componente vertical de la fuerza en la diagonal es igual numéricamente a la fuerza cortante en el panel. La figura 10.5 ilustra este hecho para dos de las diagonales de la misma armadura considerada en la figura 10.4. Para algunas posiciones de las cargas unitarias, las diagonales están a compresión y para otras están a tensión.

Las componentes verticales de la fuerza en las diagonales pueden convertirse fácilmente en las fuerzas resultantes reales a partir de sus inclinaciones como se muestra en la figura 10.5. La convención de signos para las fuerzas cortantes positiva y negativa es la misma que se usó anteriormente.

10.5 LÍNEAS DE INFLUENCIA PARA FUERZAS DE MIEMBROS DE ARMADURAS DE CUERDA NO PARALELA

Las ordenadas de la línea de influencia para la fuerza en un miembro de cuerda de una armadura de "cuerda curva" se pueden determinar pasando una sección vertical a través del panel y tomando momentos en la intersección de la diagonal y la otra cuerda. Algunas líneas de influencia se trazan para las cuerdas de una así llamada armadura Parker, como se muestra en la figura 10.6.

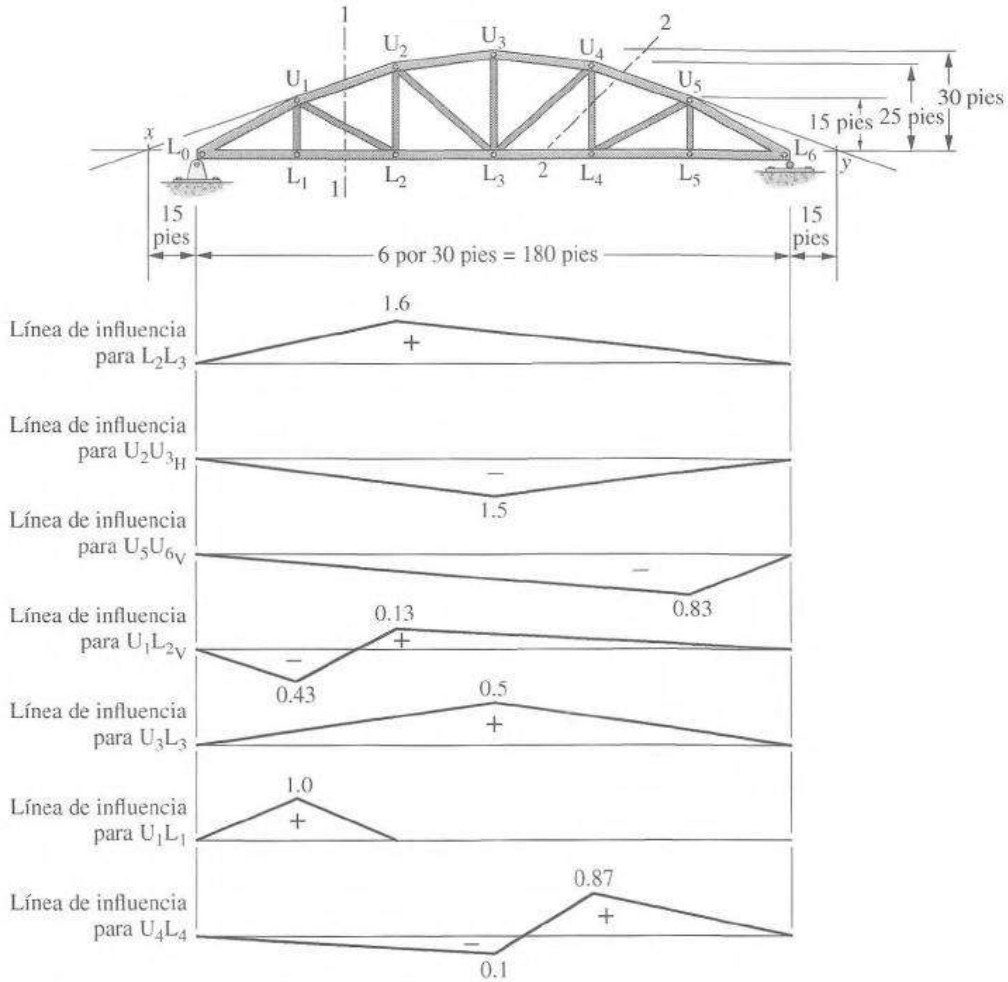


Figura 10.6

Las ordenadas de la línea de influencia para la fuerza en una diagonal puede obtenerse pasando una sección vertical a través del panel y tomando momentos en la intersección de los dos miembros de la cuerda, como se muestra en la figura 10.6, donde la fuerza en U_1L_2 se obtiene pasando la sección 1-1 y tomando momentos en la intersección de las cuerdas U_1U_2 y L_1L_2 en el punto x. La línea de influencia se traza para la componente vertical de la fuerza en el miembro inclinado. En las siguientes páginas se trazan otras líneas de influencia adicionales para las componentes vertical y horizontal de la fuerza para los miembros inclinados.

Las línea de influencia para la vertical media U_3L_3 se obtiene indirectamente calculando las componentes verticales de la fuerza en U_2U_3 y U_3U_4. Las ordenadas para U_3L_3 se encuentran sumando estas componentes. Las líneas de influencia para las otras verticales se trazan con más facilidad. El miembro U_1L_1 puede tener una fuerza solamente cuando la carga unitaria se sitúa entre L_0 y L_2. No tiene fuerza si la carga está en algunos de los dos nudos, pero ocurre una tensión de la unidad cuando la carga está en L_1. Las líneas de influencia para las verticales tales como U_4L_4 pueden trazarse mediante dos métodos. Puede pasarse una sección tal como la 2.2 a través de la armadura y tomarse momentos en la intersección de las cuerdas en el punto y, o si se dispone del diagrama de influencia para L_4U_5, pueden usarse sus componentes verticales para calcular las ordenadas para U_4L_4.

10.6 LÍNEAS DE INFLUENCIA PARA ARMADURAS K

La figura 10.7 muestra líneas de influencia para varios miembros de una armadura K. Los cálculos necesarios para preparar los diagramas para los miembros de la cuerda son equivalentes a aquellos que se usan para las cuerdas de las armaduras previamente consideradas. Las ordenadas para la fuerza en el miembro U_3U_4 pueden obtenerse pasando la sección 1-1 a través del miembro en cuestión y otros tres miembros (U_3M_3, M_3L_3 y L_3L_4). Como las líneas de acción de estas tres fuerzas se intersecan en L_3, pueden tomarse momentos ahí para obtener la fuerza deseada en U_3U_4.

Las fuerzas en las dos diagonales de cada panel pueden obtenerse de la fuerza cortante en el panel. Si sabemos que las componentes horizontales son iguales y opuestas, la relación entre sus componentes verticales puede encontrarse a partir de sus inclinaciones. Si las inclinaciones son iguales, la fuerza cortante que debe sustentarse se divide igualmente entre las dos. Las líneas de influencia para las verticales, tal como U_5M_5, pueden determinarse a partir de las líneas de influencia para las diagonales adyacentes, si están disponibles. Por otro lado, las ordenadas pueden calcularse independientemente para diferentes posiciones de la carga unitaria. El lector deberá hacer una cuidadosa comparación de las líneas de influencia para las verticales superiores e inferiores, tales como aquéllas dadas para M_3L_3 y U_3M_3 en la figura.

La líneas de influencia para la vertical media U_4L_4 puede desarrollarse calculando las componentes verticales de fuerza en M_3L_4 y L_4M_5, o en M_3U_4 y U_4M_5, para cada posición de la carga unitaria. Las componentes verticales de fuerza en cada uno de estos pares de miembros se cancelan

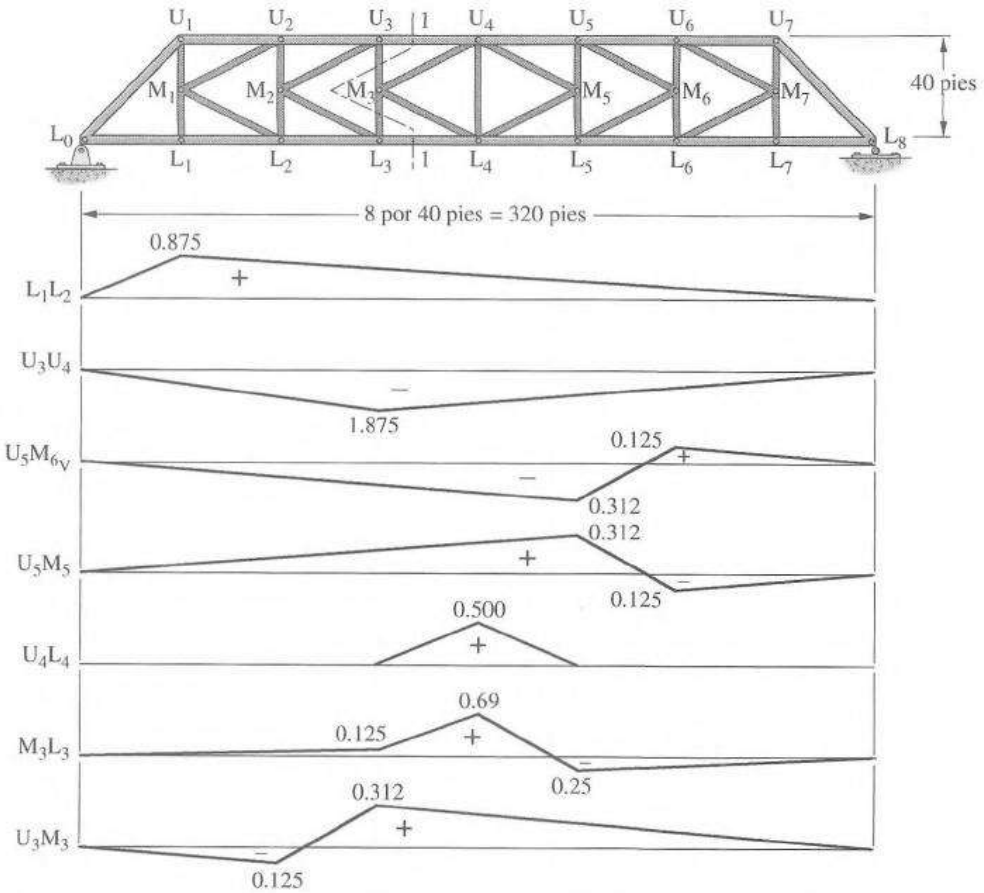


Figura 10.7

entre sí, a menos que la fuerza cortante en el panel 4 sea desigual a la fuerza cortante en el panel 5, lo que es posible solamente cuando la carga unitaria esté en L_4.

10.7 DETERMINACIÓN DE LAS FUERZAS MÁXIMAS

Los miembros de armaduras están diseñados para resistir las fuerzas máximas que puedan ser causadas por cualquier combinación de las cargas muerta, viva y de impacto, a las cuales la armadura puede estar sometida. La carga viva probablemente consiste de una serie de cargas concentradas móviles que representan a las cargas de las ruedas de los vehículos que usan la estructura, pero por conveniencia en el análisis frecuentemente se usa en su lugar una carga viva uniforme aproximadamente equivalente con sólo una o dos cargas concentradas. Las cargas vivas para las cuales se diseñan los puentes de carretera y de ferrocarril, así como las expresiones comunes de impacto, se estudian con detalle en la secciones 10.9 y 10.10.

La carga muerta, que representa el peso de la estructura y los aditamentos permanentes, se prolongan para la longitud total de la armadura, pero las cargas vivas uniformes y concentradas se colocan en los puntos en la línea de influencia que causan la fuerza máxima del tipo que se está estudiando. Si se está estudiando la tensión, la carga viva uniforme se coloca a lo largo de la sección de la armadura que corresponde a la sección positiva o de tensión de la línea de influencia, y las cargas vivas concentradas se colocan en las ordenadas de tensión máximas positivas en el diagrama.

Los miembros cuyas líneas de influencia tienen ordenadas positivas y negativas posiblemente puedan estar a tensión para una combinación de cargas y a compresión para otra. Un miembro sujeto a una *inversión de fuerzas* debe diseñarse para resistir tanto a las fuerzas máximas de compresión como máximas de tensión.

En los pocos párrafos siguientes las fuerzas máximas posibles en varios miembros de la armadura de la figura 10.8 se determinan debido a las siguientes cargas:

1. Carga muerta uniforme de 1.5 klb/pie
2. Carga viva uniforme de 2 klb/pie
3. Carga móvil concentrada de 20 klb
4. Impacto de 24.4%

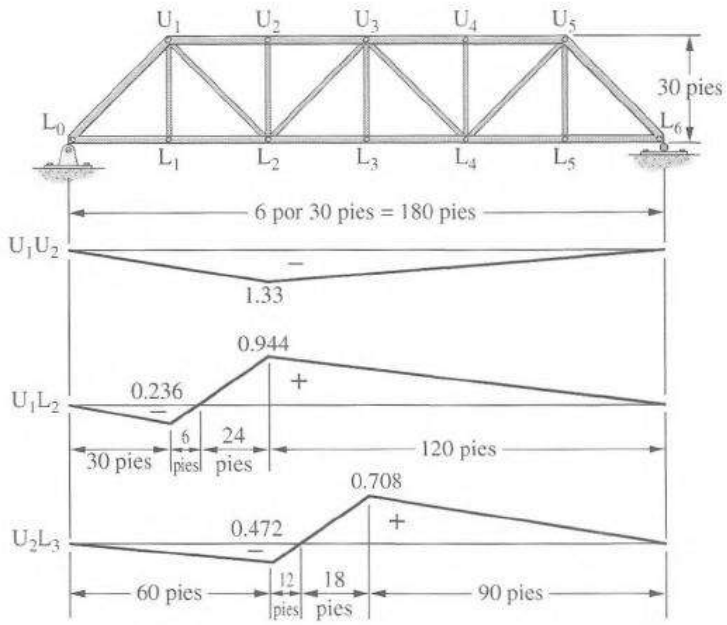


Figura 10.8

Se trazan las líneas de influencia, y se calculan las fuerzas por el método exacto que se describe en los siguientes párrafos.

U_1U_2

El miembro está a compresión para cada posición de la carga unitaria; por lo tanto, la carga muerta uniforme y la carga viva uniforme se colocan en todo el claro. La carga móvil concentrada de 20 klb se coloca en la ordenada máxima de compresión en la línea de influencia. El factor de impacto se multiplica por las fuerzas de la carga viva y se suman al total.

$$\begin{aligned}
\text{DL} &= (1.5)(180)(-1.33)\left(\tfrac{1}{2}\right) &&= -180.0\\
\text{LL} &= (2)(180)(-1.33)\left(\tfrac{1}{2}\right) &&= -240.0\\
&= (20)(-1.33) &&= -26.7\\
\text{I} &= (0.244)(-240.0 - 26.7) &&= \underline{-65.1}\\
&\text{fuerza total} &&= -511.8 \text{ klb a compresión}
\end{aligned}$$

U_1L_2

Un examen de la línea de influencia para U_1L_2 muestra que para algunas posiciones de la carga unitaria el miembro está a compresión, mientras que para otras está a tensión. Las cargas vivas deben colocarse sobre la parte positiva del diagrama y las cargas muertas a través de la estructura completa para obtener la fuerza de tensión más grande posible. Similarmente, las cargas vivas deberán colocarse sobre la parte negativa del diagrama y las cargas muertas sobre la estructura completa para obtener la fuerza de compresión más grande posible.

Tensión máxima:

$$\begin{aligned}
\text{DL} &= (1.5)(144)(+0.944)\left(\tfrac{1}{2}\right) &&= +102.0\\
&+ (1.5)(36)(-0.236)\left(\tfrac{1}{2}\right) &&= -6.4\\
\text{LL} &= (2)(144)(+0.944)\left(\tfrac{1}{2}\right) &&= +136.0\\
&+ (20)(+0.944) &&= +18.9\\
\text{I} &= (0.244)(+136.0 + 18.9) &&= \underline{+37.8}\\
&\text{fuerza total} &&= +288.3 \text{ klb a tensión}
\end{aligned}$$

Compresión máxima:

$$\begin{aligned}
\text{DL} &+ (1.5)(144)(+0.944)\left(\tfrac{1}{2}\right) &&= +102.0\\
&+ (1.5)(36)(-0.236)\left(\tfrac{1}{2}\right) &&= -6.4\\
\text{LL} &= (2)(36)(-0.236)\left(\tfrac{1}{2}\right) &&= -8.5\\
&+ (20)(-0.236) &&= -4.7\\
\text{I} &= (0.244)(-8.5 - 4.7) &&= \underline{-3.2}\\
&\text{fuerza total} &&= +79.2 \text{ klb a tensión } (\therefore \text{ no es posible la compresión})
\end{aligned}$$

U_2L_3

Los cálculos para U_1L_2 probaron que podría tener sólo fuerzas de tensión, independientemente del posicionamiento dado de las cargas vivas. Los siguientes cálculos muestran que la inversión de fuerzas puede ocurrir en el miembro U_2L_3.

Tensión máxima

$$
\begin{aligned}
\text{DL} &= (1.5)(108)(+0.708)\left(\tfrac{1}{2}\right) &&= +57.3\\
&\quad + (1.5)(72)(-0.472)\left(\tfrac{1}{2}\right) &&= -25.5\\
\text{LL} &= (2)(108)(+0.708)\left(\tfrac{1}{2}\right) &&= +76.4\\
&\quad + (20)(+0.708) &&= +14.2\\
\text{I} &= (0.244)(+76.4 + 14.2) &&= \underline{+22.1}\\
&\text{fuerza total} &&= +144.5 \text{ klb a tensión}
\end{aligned}
$$

Compresión máxima:

$$
\begin{aligned}
\text{DL} &= (1.5)(108)(+0.708)\left(\tfrac{1}{2}\right) &&= +57.3\\
&\quad + (1.5)(72)(-0.472)\left(\tfrac{1}{2}\right) &&= -25.5\\
\text{LL} &= (2.0)(72)(-0.472)\left(\tfrac{1}{2}\right) &&= -34.0\\
&\quad + (20)(-0.472) &&= -9.4\\
\text{I} &= (0.244)(-34.0 - 9.4) &&= \underline{-10.6}\\
&\text{fuerza total} &&= -22.2 \text{ klb a compresión}
\end{aligned}
$$

10.8 BARRAS DE CONTRATENSIÓN EN LAS ARMADURAS DE PUENTES

El hecho de que un miembro a compresión esté en peligro de flexionarse o de pandearse reduce su resistencia y hace que su diseño sea algo problemático. El diseño de un miembro de 20 pies para una fuerza de tensión de 100 klb generalmente conducirá a una sección más pequeña que la que se requiere para un miembro de la misma longitud sujeto a una fuerza de compresión de la misma magnitud. La capacidad de un miembro para resistir cargas de compresión depende de su rigidez, que se mide mediante la *relación de esbeltez*, la cual es el cociente de la longitud de un miembro entre su radio de giro mínimo. A medida que una sección se hace más grande, o aumenta su relación de esbeltez, aumenta el peligro de pandeo, y se requiere una sección más grande para resistir la misma carga.

Esta discusión muestra que hay una ventaja considerable en mantener las diagonales de una armadura a tensión si es posible. Si una armadura sustentara solamente carga muerta, sería una cosa simple arreglar las diagonales de modo que todas estén a tensión. Todas las diagonales de la armadura Pratt de la figura 10.9(a) estarían a tensión para una carga muerta uniforme que se extendiera sobre el claro completo. Sin embargo, los cálculos en la sección 10.8 han mostrado que las cargas vivas pueden hacer que las fuerzas en algunas de las diagonales de una armadura de puente se alternen entre la tensión y la compresión. El paso constante de trenes o camiones de ida y vuelta a través de un puente probablemente causará que las fuerzas en algunas de las diagonales cambien continuamente de tensión a compresión y nuevamente a tensión.

Las posibilidades de inversión de fuerza son mucho mayores en las diagonales cerca del centro de una armadura. La razón de esta situación puede verse haciendo referencia a la armadura de la figura 10.9, donde una fuerza cortante positiva obviamente causa tensión en los miembros U_1L_2 y U_2L_3. La fuerza cortante positiva de la carga muerta es mucho más pequeña en el panel 3 que en el panel, 2 y es más probable que la carga viva esté en una posición que cause una cortante negativa suficientemente grande para vencer a la fuerza cortante positiva y producir compresión en la diagonal.

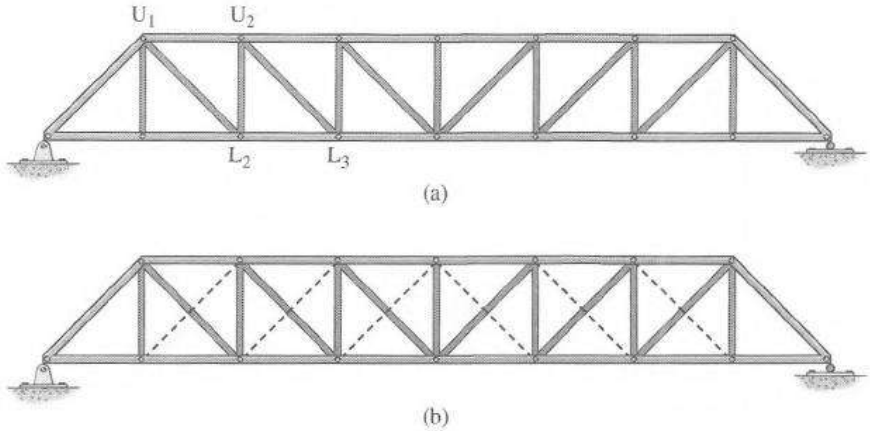


Figura 10.9

Hace algunas décadas, cuando era común que los miembros de las armaduras estuvieran conectados con pasadores, las diagonales eran en realidad barras de argolla que tenían capacidad de resistir poca compresión. Existe la misma condición de fuerza en las armaduras que se montan actualmente, las cuales tienen diagonales que consisten en un par de ángulos pequeños de acero u otros perfiles de poca rigidez. Anteriormente era común añadir otra diagonal resistente a la tensión a los paneles donde pudiera ocurrir la inversión de fuerzas, la nueva diagonal sobrepuesta sobre la primera y en las esquinas previamente sin conexión del panel. Estos miembros, llamados *barras de contratensión* o *diagonales de contratensión*, pueden verse en muchos puentes viejos en el campo, pero rara vez en los nuevos.

La figura 10.9(b) muestra una armadura Pratt a la cual se han añadido barras de contratensión en los seis paneles intermedios, representándose a las barras de contratensión con líneas punteadas. Cuando se han añadido barras de contratensión a un panel, ambas diagonales pueden consistir en miembros relativamente esbeltos y ligeros, que no tienen capacidad de resistir una compresión significativa. Con diagonales ligeras y esbeltas se supone que la fuerza cortante completa en el panel es resistida por la diagonal que estaría a tensión para ese tipo de fuerza cortante, mientas que la otra diagonal se relaja o no tiene esfuerzo. Pueden considerarse a las dos diagonales en un panel como cables que no pueden resistir ninguna compresión. Si se aplicara compresión a uno de los cables, se debilitaría, mientras que el otro sería estirado. Una armadura con barras de contratensión es en realidad estáticamente indeterminada a menos que la barra de contratensión tenga fuerza cero bajo la carga muerta.

Si las columnas y las vigas de un edificio reticular de acero se conectan con conexiones estándares o de "viga simple", los marcos tendrán poca resistencia a las cargas laterales. El método más simple para proporcionar esta resistencia es con "barras de contratensión" o arriostramiento diagonal, tal como el que se muestra en la figura 10.10.

Obviamente el lector puede ver que en los edificios típicos de la actualidad el uso de contravientos diagonales completos frecuentemente será en los vanos de las puertas, en las ventanas y en otras aberturas en la pared. Además, se planean tantos edificios modernos con particiones interiores móviles que la presencia de un arriostramiento cruzado reducirá en gran medida esta flexibilidad. Como resultado, el arrostramiento diagonal para estos edificios se coloca tanto como sea posible alrededor de los cubos de elevadores, pozos de escaleras y en otros muros donde se planean pocas aberturas.

Los puentes de armadura de la actualidad se diseñan con diagonales que tengan la capacidad de resistir la inversión de fuerzas. De hecho, todos los miembros de la armadura de un puente, independientemente de que estén sujetos a la inversión de fuerzas o no, deben tener capacidad para resistir los cambios grandes de fuerzas que ocurren cuando los vehículos se mueven de ida y vuelta a través de esas estructuras. Un miembro que está sujeto a cambios frecuentes de fuerza aun

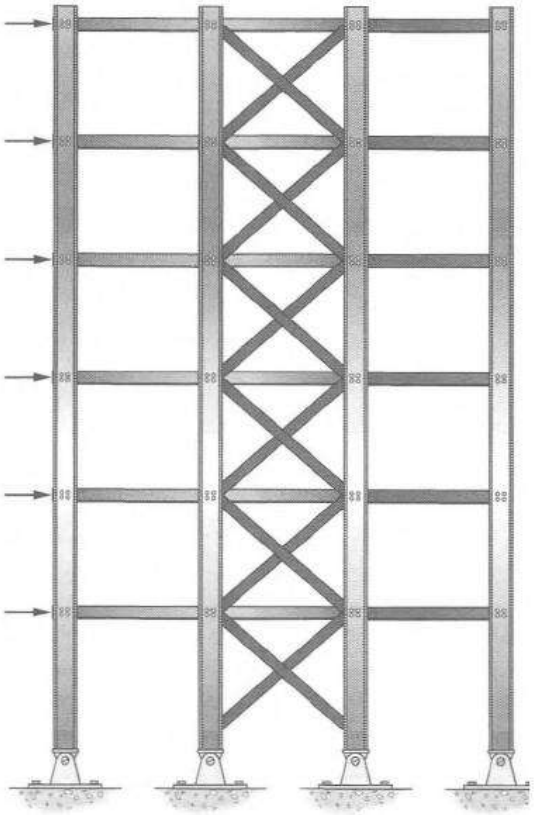


Figura 10.10

cuando el carácter de la fuerza no cambie (tal como +50 a +10 a +50 klb, etc.), está en peligro de una falla de fatiga, a menos que se diseñe específicamente para esa situación. Para los miembros de acero estructural, la tensión debe estar involucrada para que la fatiga sea un problema.

Las especificaciones modernas de acero proporcionan un rango máximo permisible de esfuerzos (de altos a bajos) para cada miembro de la armadura. El rango de esfuerzos se define como la diferencia algebraica entre los esfuerzos máximo y mínimo. Para este cálculo al esfuerzo de tensión se le da un signo algebraico que sea opuesto al del esfuerzo de compresión. Las especificaciones de la AASHTO y de AISC proporcionan un rango permisible de esfuerzos que depende del número estimado de ciclos de esfuerzo, para un miembro específico, y del tipo de conexión. Obviamente, entre más critica sea la situación, es más pequeño el rango permisible de esfuerzos.

10.9 CARGAS VIVAS PARA PUENTES CARRETEROS

Hasta cerca del año 1900, los puentes en Estados Unidos se "probaban" antes de ser considerados aceptables para usarse. Los puentes carreteros se cargaban con carros llenos con piedras o lingotes de hierro, mientras que los puentes ferrocarrileros se cargaban con dos locomotoras en tándem. Esos procedimientos eran tal vez muy útiles en la identificación de diseños deficientes y/o mano de obra defectuosa, pero no eran garantía contra sobrecargas y situaciones de esfuerzos por fatiga.[1]

Como se menciona en *America's Highways 1776-1976*, durante gran parte del siglo XIX los puentes carreteros se diseñaron para soportar cargas vivas de unas 80 a 100 lb/pie^2 aplicadas a las

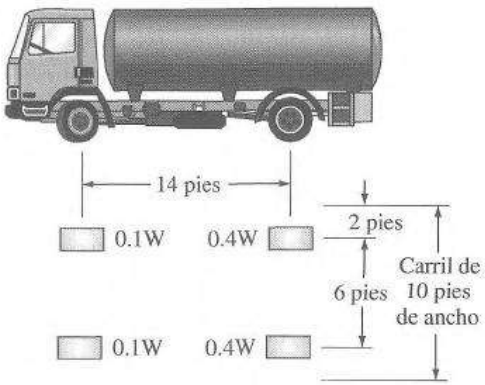
[1] U.S. Department of Transportation, Federal Highway Administration, *America's Highways 1776-1976* (Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, 1976), 429-432.

cubiertas de los puentes. Esas cargas supuestamente representaban a gente apiñada caminando a través de los puentes. En 1875, la ASCE recomendó que los puentes carreteros fuesen diseñados para soportar cargas vivas de 40 a 100 lb/pie^2 —los valores menores se usaron para claros muy largos—. En 1913, la Office of Public Roads publicó una circular recomendando que los puentes carreteros fuesen diseñados para una carga viva consistente en: (a) una serie de carros eléctricos o (b) una carga rodante de 15 toneladas más una carga viva uniforme sobre el resto de la cubierta del puente.

Aunque los puentes carreteros deben soportar tipos diferentes de vehículos, las cargas más pesadas posibles son las causadas por una serie de camiones. En 1931, el AASHTO (*American Association of State Highway and Transportation Officials*) Bridge Committee publicó su primera edición de la AASHTO Standard Specification for Highway Bridges. Una parte muy importante de esas especificaciones fue el uso del sistema de camiones para las cargas vivas. Las cargas de camiones se designaron como H20, H15 y H10, representando así camiones de diseño de dos ejes de 20, 15 y 10 toneladas, respectivamente. Cada carril de un puente debía tener un camión H colocado sobre él y seguido por una serie de camiones con peso igual a las ¾ partes del camión básico.[2]

Actualmente la AASHTO especifica que los puentes carreteros deben diseñarse para líneas de camiones que ocupen carriles de 10 pies de ancho. Sólo se coloca un camión en cada claro para cada carril. Las cargas de camión especificadas se designan con un prefijo H (o M si se usan unidades SI) seguido por un número que indica el peso total del camión en toneladas (10^4 Newtons). El peso puede ser seguido por otro número que indique el año de las especificaciones. Por ejemplo, una carga H20-44 indica un camión de 20 toneladas y la especificación de 1944. En la figura 10.11 se muestran un croquis del camión y las dimensiones pertinentes.

La selección de la carga particular de camión que se usará en el diseño depende de la ubicación del puente, del tránsito esperado, etc. Estas cargas pueden clasificarse en los tres grupos siguientes.



Camión	Peso (toneladas)	Delantero		Trasero	
		Eje (klb)	Rueda (klb)	Eje (klb)	Rueda (klb)
H25-44	25	10 000	5 000	40 000	20 000
H20-44	20	8 000	4 000	32 000	16 000
H15-44	15	6 000	3 000	24 000	12 000
H10-44	10	4 000	2 000	16 000	8 000

Figura 10.11 Cargas de camión H de la AASHTO.

[2] *Ibid.*

Camiones de dos ejes: H10, H15, H20 y H25

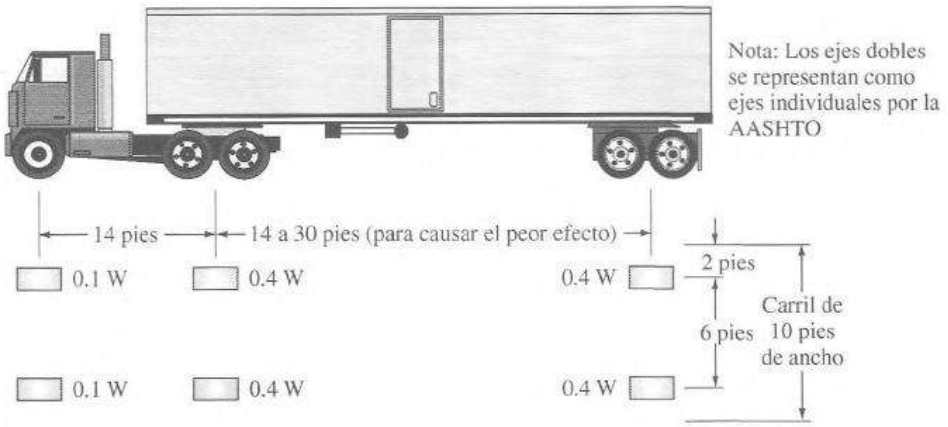
Se supone que el peso de un camión H se reparte según dos décimos al eje delantero (por ejemplo, 4 toneladas, u 8 klb, para un H20) y ocho décimos al eje trasero. Los ejes están separados 14 pies entre centros, y la separación lateral centro a centro de las ruedas es de 6 pies. Si se tratara de un camión con diferente carga, podría utilizarse uno que tuviera cargas sobre ejes en proporción directa a los estándares anteriores. Una carga tan pequeña como la del H10 puede usarse sólo para puentes con un tránsito muy ligero.

Camiones de dos ejes más un semirremolque de un eje: HS15-44, HS20-44 y HS25-44

Para los actuales puentes carreteros que soportan una gran cantidad de tránsito de camiones, la carga del camión de dos ejes con un semirremolque cuyo eje pesa 80% de la carga del camión principal, es lo que suele especificarse para el diseño (figura 10.12). El Departamento de Transporte (DOT: *Departments of Transportation*) de muchos estados requiere que sus puentes se diseñen para los camiones HS25-44. Este camión tiene 5 toneladas en el eje frontal, 20 toneladas en el eje trasero y 20 toneladas en el eje del remolque. La distancia del eje trasero del camión al eje del semirremolque varía de 14 a 30 pies, dependiendo de qué espaciamiento causarán las condiciones más críticas.

Carga uniforme de carril (control para puentes más largos)

El cálculo de las fuerzas originadas por una fila de cargas concentradas es un trabajo tedioso si se usa una calculadora de bolsillo. Esto es verdad, independientemente de que representen camiones de dos ejes, o bien, camiones de dos ejes con remolque de un eje. Por lo tanto, con frecuencia se emplea una carga de carril que produzca en forma aproximada las mismas fuerzas. La carga de carril consta de una carga uniformemente distribuida más una sola carga concentrada móvil. Este



Camión	Peso (toneladas)	Delantero		Trasero		Trailer	
		Eje (klb)	Rueda (klb)	Eje (klb)	Rueda (klb)	Eje (klb)	Rueda (klb)
HS25-44	25	10 000	5 000	40 000	20 000	40 000	20 000
HS20-44	20	8 000	4 000	32 000	16 000	32 000	16 000
HS15-44	15	6 000	3 000	24 000	12 000	24 000	12 000
HS10-44	10	4 000	2 000	16 000	8 000	16 000	8 000

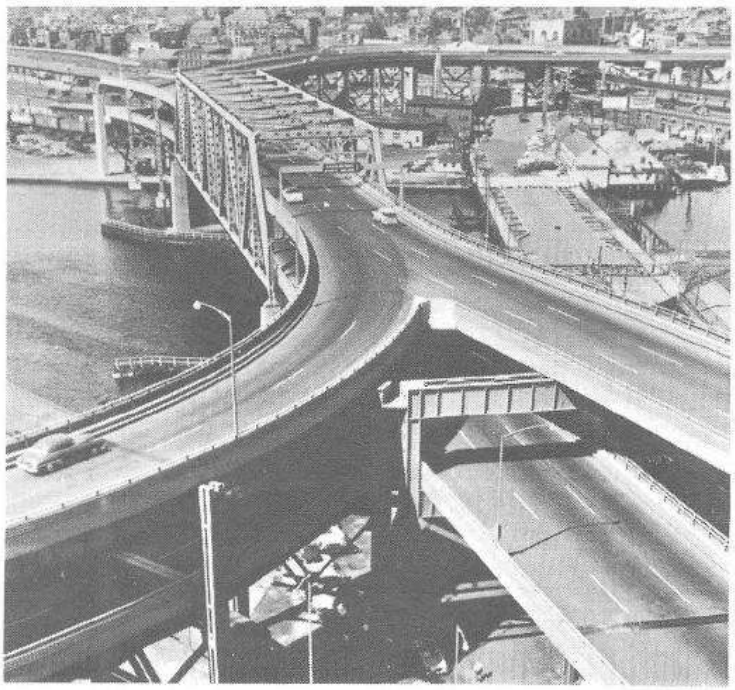
Figura 10.12 Cargas de camión HS de la AASHTO.

sistema de cargas representa una línea de tránsito semipesado, con un camión de gran peso en algún punto de dicha línea. La carga uniformemente distribuida por pie de carril de tránsito, es igual a 0.016 veces el peso total del camión al cual equivale aproximadamente la carga. La carga concentrada móvil es igual a 0.45 veces el peso del camión para el cálculo de momentos flexionantes, y 0.65 veces el peso del camión para el cálculo de fuerzas cortantes. Estos valores para una carga H20 serían los siguientes:

Carga de carril	0.016(20 ton) = 640 lb/pie de carril
Carga concentrada para momento	0.45(20 ton) = 18 klb
Carga concentrada para fuerza cortante	0.65(20 ton) = 26 klb

En claros continuos, otra carga concentrada de igual peso debe colocarse en uno de los otros claros en posición tal que produzca un momento de flexión máximo negativo. Para el momento positivo, sólo debe usarse una carga concentrada por carril, con la carga uniforme colocada en tantos claros como sea necesario para producir el momento flexionante máximo positivo.

La carga de carril se maneja más cómodamente, pero no debe utilizarse a menos que produzca momentos flexionantes o fuerzas cortantes iguales o mayores que las producidas por la carga H correspondiente. Con base en la información que se presentará más adelante en este capítulo, pueden realizarse cálculos que demuestren que la carga equivalente de carril para un camión HS20-44 producirá mayores momentos en claros simples de 145 pies o más, y fuerzas cortantes mayores en claros simples de 128 pies o más. El apéndice A de las especificaciones AASHTO contiene tablas que dan los momentos y los cortantes máximos en claros simples para diferentes cargas de camión H o para sus cargas equivalentes de carril, según la que domine.



Puente Mystic River de la autopista John F. Fitzgerald, Boston, Massachusetts. (Cortesía del American Institute of Steel Construction, Inc.)

La probabilidad de tener una serie continua de camiones muy pesados en cada carril de un puente con más de dos carriles no parece tan grande como para un puente que sólo tenga dos carri-

les. Por esto la AASHTO permite que los valores producidos por cargas completas en cada carril se reduzcan con un cierto factor en el caso de que el puente tenga más de dos carriles.

Sistema de cargas en las carreteras interestatales de Estados Unidos

Puede usarse otro sistema de carga en vez del HS20-44 para el diseño de estructuras del sistema de carreteras interestatales de Estados Unidos. Este sistema alternativo, que consta de un par de ejes cargados con 24 klb cada uno y espaciados a 4 pies centro a centro, es crítico sólo en claros cortos. Se puede demostrar que esta carga producirá momentos flexionantes máximos en claros simples de 11.5 a 37 pies de longitud y fuerzas cortantes máximas en claros simples de 6 a 22 pies de longitud. Para otros claros, la carga HS20-44 o su carga de carril equivalente será la carga más crítica.

10.10 CARGAS VIVAS PARA PUENTES FERROVIARIOS

Los puentes de ferrocarril suelen analizarse para una serie de cargas ideadas por Theodore Cooper en 1894. Sus cargas, denominadas cargas E, representan dos locomotoras con sus ténders seguidos por una línea de carros de carga como se muestra en la figura 10.13(a). Para las locomotoras se usa una serie de cargas concentradas, y una carga uniforme representa los carros de carga, como se muestra en la figura 10.13(c). El tren E-40 tiene una carga de 40 klb en el eje motor de la máquina. En la actualidad los puentes se diseñan con base en la carga E-80 o mayor.[3]

Si se dispone de la información para una carga E, la información para cualquier otra carga E puede obtenerse por proporción directa. Las cargas de eje para una E-75 son 75/40 veces mayores que las de una E-40; las de una E-60 son 60/72 veces menores que las de una E-72, y así en forma sucesiva. Empero, las cargas de eje para una carga E-80 son el doble de las mostradas en la figura 10.13.

La American Railway Engineering Association también especifica una carga alternativa. Esa carga se muestra en la figura 10.14. Esta carga o la carga E-80 será la que debe usarse (la que cause el mayor esfuerzo en las componentes).

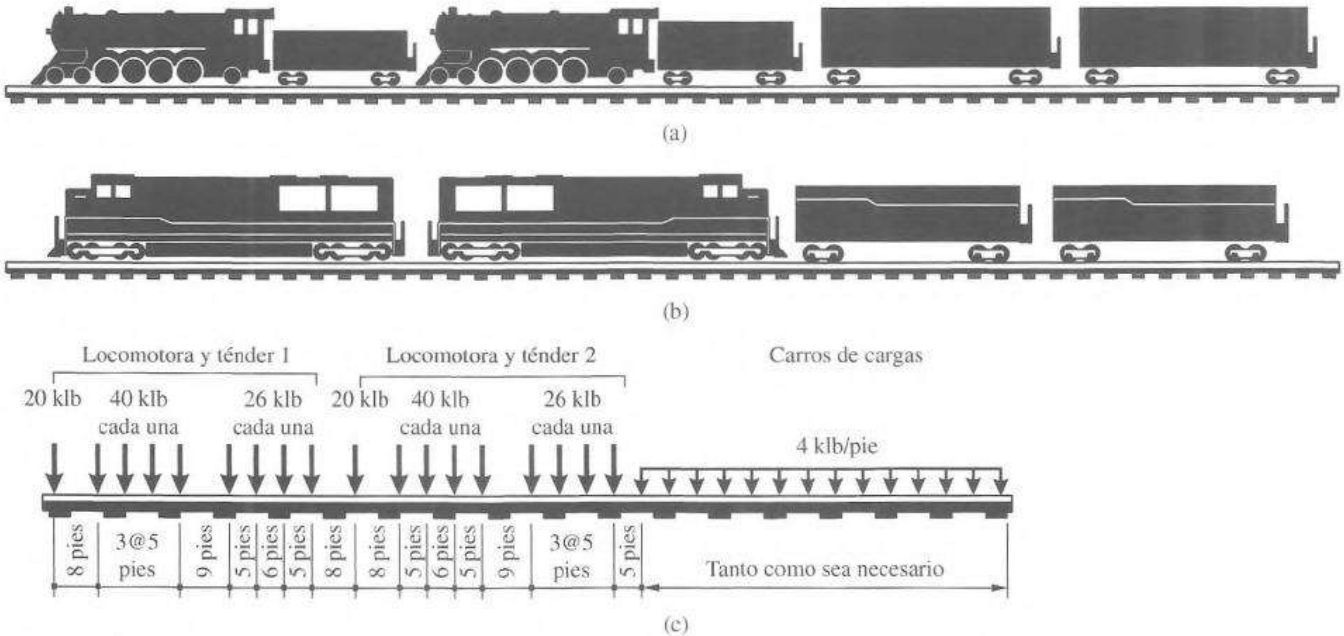


Figura 10.13 Carga ferroviaria E-40 de Cooper.

[3]American Railway Engineering Association, *AREA Manual*, 1996.

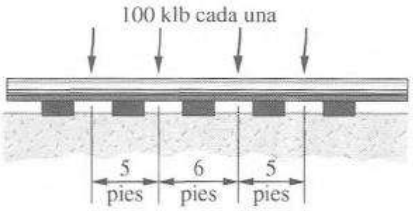


Figura 10.14 Carga alternativa de ferrocarril.

Como puede observarse en las locomotoras modernas en la figura 10.13(b), las cargas Cooper no describen con exactitud aquéllas de los trenes modernos. Sin embargo, todavía son de uso general, no obstante la disponibilidad de sistemas de cargas más modernos y realistas, como el llamado M-60 del doctor D. B. Steinman.[4]

10.11 VALORES MÁXIMOS PARA CARGAS MÓVILES

En las páginas anteriores de este capítulo se indicó repetidas veces que para diseñar una estructura que soporte cargas móviles, el ingeniero debe ser capaz de determinar en qué posiciones esas cargas causan las mayores fuerzas en diferentes puntos de la estructura. Si uno puede colocar las cargas en esas posiciones de fuerzas máximas, no será necesario preocuparse por cualesquier otras posiciones que puedan tomar las cargas sobre la estructura.

Si una estructura va a estar cargada con una carga uniforme viva y no más de una o dos cargas concentradas móviles, las posiciones críticas para las cargas serán obvias en las líneas de influencia. Sin embargo, si la estructura va a soportar una serie de cargas concentradas de diversas magnitudes, como son grupos de ruedas de trenes o de camiones, el problema ya no será tan sencillo. Por supuesto, la línea de influencia indicará los lugares aproximados en que deberán colocarse las cargas, porque es razonable suponer que las cargas más pesadas deberán agruparse en la vecindad de las mayores ordenadas del diagrama.

No se considerarán aquí todas las situaciones que pueden surgir en el análisis de estructuras. Sin embargo, pensamos que la determinación del momento flexionante máximo absoluto causado en una viga por una serie de cargas concentradas se encuentra con tanta frecuencia, que la discusión de este tema debe incluirse en este texto.

Se considera que el momento flexionante máximo absoluto en una viga simplemente apoyada aparece en el centro de la misma. Ese momento flexionante máximo se produce en el punto medio si la viga está sometida a una carga uniforme o a una sola carga concentrada localizada en el centro. Sin embargo, puede ser necesario que una viga trabaje con una serie de cargas móviles concentradas, como son las que aplican las ruedas de un tren; en ese caso, entonces, el momento máximo absoluto aparecerá, con toda seguridad, en cualquier ubicación distinta de la central. Para calcular dicho momento, es necesario determinar el punto donde se produce y la ubicación de las cargas que lo originan. Es razonable suponer que el mayor momento flexionante ocurrirá en el punto medio en vigas de grandes claros; pero esta suposición podría ser muy errónea en vigas de claros pequeños. Por lo tanto, es necesario contar con un procedimiento definido para determinar el momento máximo absoluto.

El diagrama de momentos flexionantes para una viga simplemente apoyada, sujeta a la acción de un grupo de cargas concentradas, estará formado por un conjunto de líneas rectas, independientemente de la colocación de las cargas. Por lo tanto, el momento máximo absoluto que se produce durante el movimiento de esas cargas a lo largo del claro ocurrirá en el punto de aplicación de una de las cargas, la cual suele ser la más cercana al centro de gravedad del grupo. La viga mostrada en la figura 10.15 y la serie de cargas P_1, P_2, P_3, etc., se analizarán en los siguientes párrafos.

[4] "Locomotive Loadings for Railway Bridges", *Transactions of the American Society of Civil Engineers 86* (1923): 606-636.

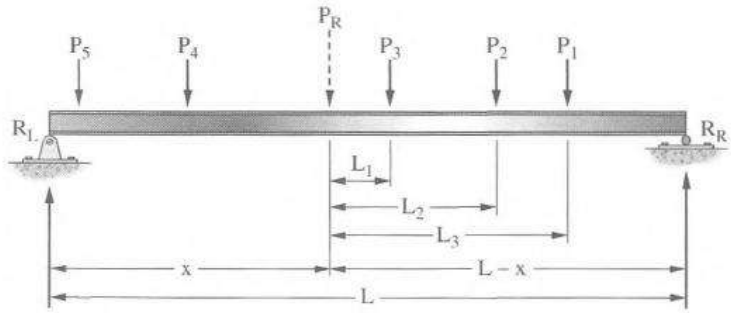


Figura 10.15 Una viga simple con numerosas cargas aplicadas.

Se supone que la carga P_3 es la más cercana al centro de gravedad de las cargas sobre el claro. Está ubicada a la distancia L_1 de P_R, que es la resultante de todas las cargas sobre el claro. La reacción izquierda, R_L, está a una distancia x de P_R. En los siguientes párrafos, se supone que el momento máximo flexionante ocurre en P_3, y se desarrollará un método preciso para localizar la carga que da origen al máximo.

El momento flexionante en P_3 puede expresarse de la siguiente manera:

$$M = V_R(L - x - L_1) - P_2(L_2 - L_1) - P_1(L_3 - L_1)$$

Si sustituimos el valor de V_R, o sea $P_R x/L$, obtendremos la siguiente ecuación:

$$M = \left(\frac{P_R x}{L}\right)(L - x - L_1) - P_2(L_2 - L_1) - P_1(L_3 - L_1)$$

Se desea encontrar el valor de x para el cual el momento en P_3 será máximo. El momento flexionante máximo en P_3, que ocurre cuando la fuerza cortante es nula, puede encontrarse diferenciando la ecuación para el momento flexionante respecto a x, igualando el resultado a cero y despejando x.

$$\frac{dM}{dx} = L - 2x - L_1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{L}{2} - \frac{L_1}{2} = \frac{1}{2}(L - L_1)$$

De la deducción anterior puede establecerse una regla general para el momento máximo absoluto:

El momento máximo en una viga cargada con una serie de cargas concentradas móviles generalmente ocurrirá bajo la carga más cercana al centro de gravedad de las cargas sobre la viga, cuando la distancia del centro de gravedad de las cargas al centro de la viga y la distancia del centro de la viga a la carga más cercana al centro de gravedad de las cargas es la misma.

Si la carga más cercana al centro de gravedad de las cargas fuese relativamente pequeña, el momento máximo absoluto podría ocurrir en alguna otra carga cercana. En algunas ocasiones se tienen que considerar otras dos o tres cargas para encontrar el valor mayor. Sin embargo, el problema no es difícil porque debe cumplirse otra condición de momento no descrita aquí (la carga promedio a la izquierda debe ser igual a la carga promedio a la derecha). No será gran problema determinar cuál de las cargas cercanas será la que domine. Se puede demostrar que el momento máximo absoluto ocurrirá bajo la carga que se colocaría en el centro de la viga para ocasionar ahí el máximo momento flexionante, cuando esa rueda se encuentre tan distante a un lado del centro como lo esté el centro de gravedad de todas las cargas al otro lado del centro.[5]

[5] A. Jakkula y H. K. Stephenson, *Fundamentals of Structural Analysis* (Nueva York, Van Nostrand, 1953), 241-242.

EJEMPLO 10.1

Determine el momento máximo absoluto que puede ocurrir en la viga simple de 50 pies mostrada en la figura 10.16, cuando la serie de cargas concentradas se mueve a lo largo del claro.

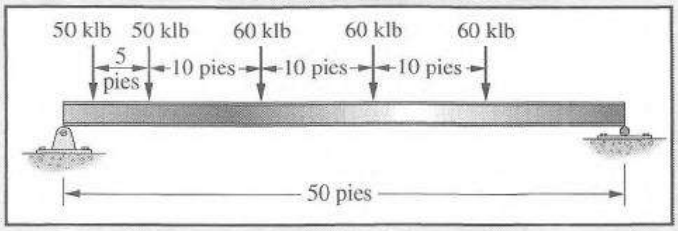
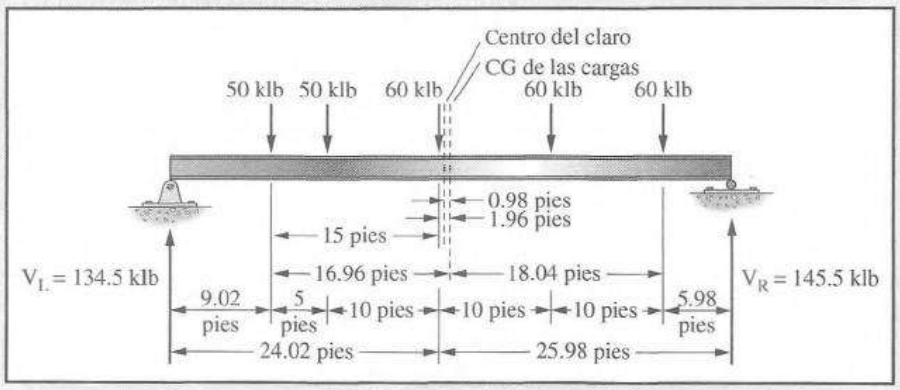


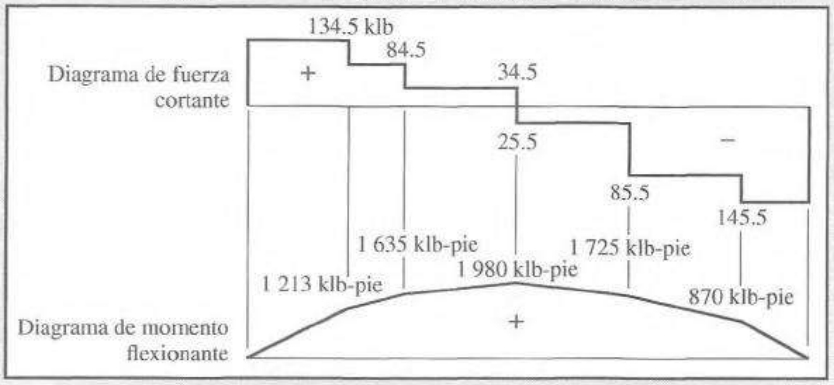
Figura 10.16

Solución. El centro de gravedad de las cargas se determina a partir de:

$$\frac{50(5) + 60(15) + 60(25) + 60(35)}{50 + 50 + 60 + 60 + 60} = 16.96 \text{ pies desde la carga izquierda}$$

Entonces las cargas se colocan como sigue y se trazan los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. El momento máximo absoluto que puede ocurrir para estas cargas es 1 980 klb-pie.

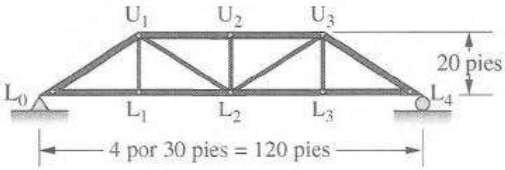




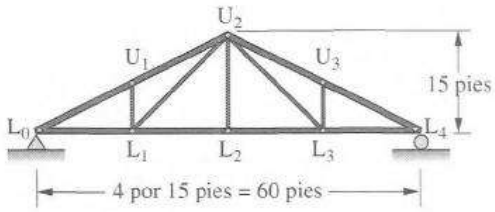
10.12 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

Para los problemas 10.1 a 10.18, dibuje las líneas de influencia para los miembros indicados. Las componentes verticales u horizontales son satisfactorias.

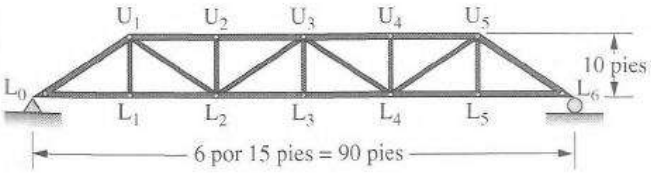
10.1 L_0U_1, L_0L_1, U_1L_1, U_1U_2. (*Resp.:* L_0L_1 + 1.125 en L_1, U_1L_1 + 1.00 en L_1, U_1U_2 − 1.50 en L_2.)



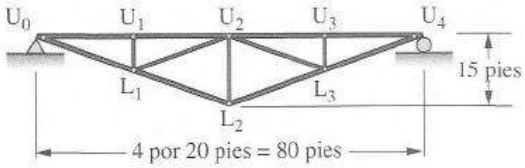
10.2 L_0L_1, U_2U_3, U_2L_3



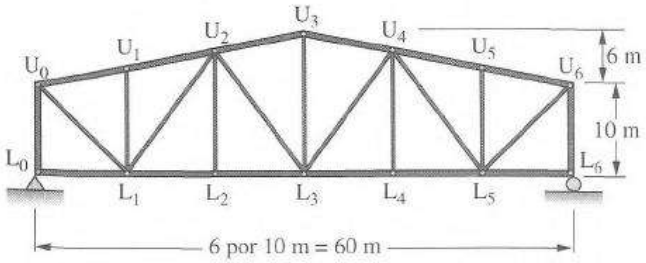
10.3 U_2U_3, L_2L_3, L_2L_3 y L_4U_5. (*Resp.:* U_2U_3 − 2.00 en L_2, L_2U_{3V} + 0.333 en L_2, L_4U_5 + 0.667 en L_4.)



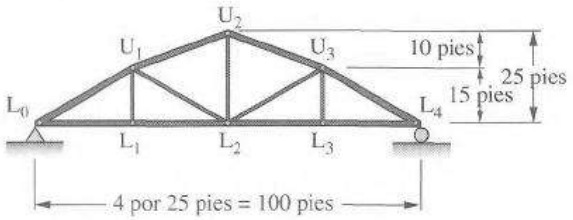
10.4 U_0L_1, L_1U_2 y U_2L_2 a medida que una carga unitaria se mueve por la parte superior de la armadura.



10.5 U_2U_3, L_3U_4, U_3L_3 y L_4L_5. (*Resp.:* U_2U_{3H} − 0.938 en L_3, L_3U_{4V} + 0.3125 en L_3, L_4L_5 + 0.952 en L_4)

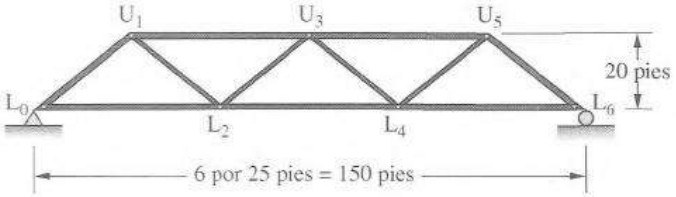


10.6 U_1L_2, U_2U_3, y L_2L_3.

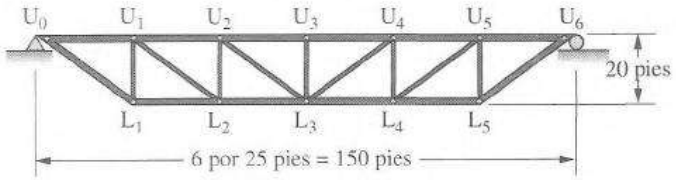


10.7 Miembros L_3L_4, U_1U_2 y U_2L_2 de la armadura del problema 10.6. (*Resp.:* L_3L_4 + 1.25 en L_3, U_1U_{2H} − 1.00 en L_2, U_2L_2 + 0.80 en L_2.)

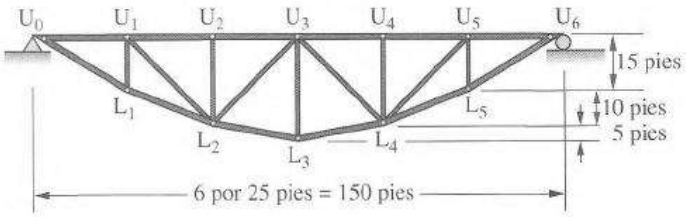
10.8 U_1U_3, L_2L_4, L_2U_3, L_4U_5.



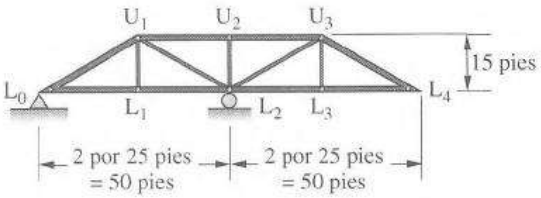
10.9 U_0L_1, U_1U_2, U_2L_3, L_3U_4 a medida que una carga unitaria se mueve por la parte superior de la armadura. (*Resp.:* U_0L_{1H} + 1.042 en U_1, U_1U_2 − 1.67 en U_2, L_3U_{4V} − 0.333 en U_4.)



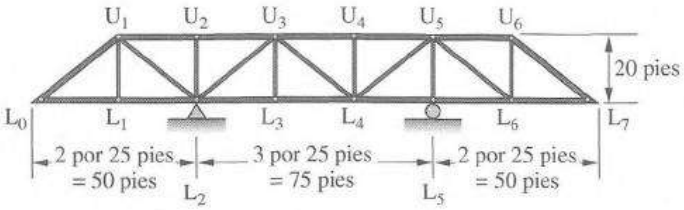
10.10 U_1U_2, U_1L_1, U_1L_2, U_3L_4 a medida que una carga unitaria se mueve por la parte superior de la armadura.



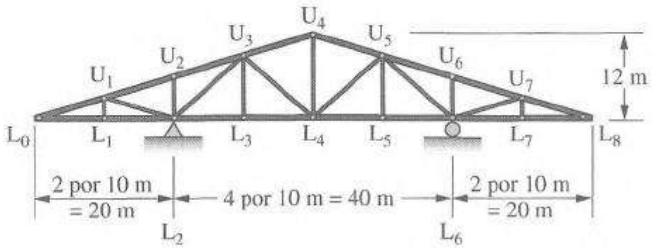
10.11 L_0U_1, U_1L_2, U_2U_3. (*Resp.:* L_0U_{1V} − 0.50 en L_1, U_1L_{2V} − 1.00 en L_4, U_2U_3 + 3.33 en L_4.)



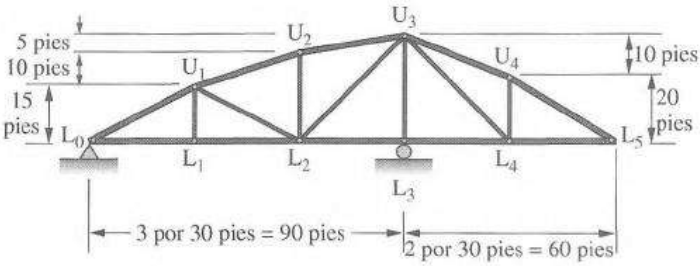
10.12 L_0U_1, U_1L_2, U_3L_4, U_5U_6.



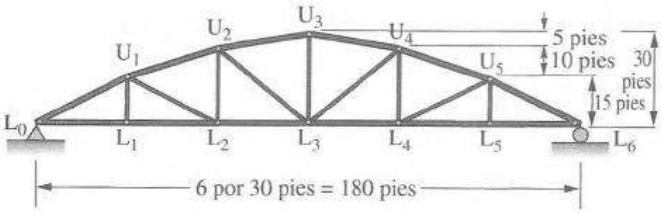
10.13 L_0U_1, U_1L_2, U_3L_4, U_5U_6. (*Resp.:* U_1L_2 − 0.5 en L_1, U_3L_{4V} − 0.375 en L_3, U_5U_{6H} + 3.33 en L_8.)



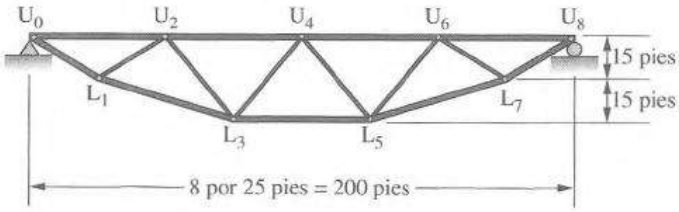
10.14 U_1L_2, L_2L_3, U_3L_4.



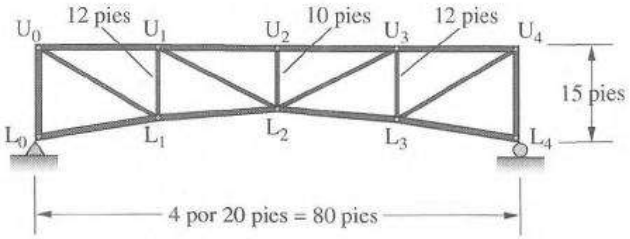
10.15 U_1U_2, U_2L_3, U_3L_3. (*Resp.:* U_1U_{2H} − 1.60 en L_2, U_2L_{3V} + 0.25 en L_3, U_3L_3 + 0.500 en L_3.)



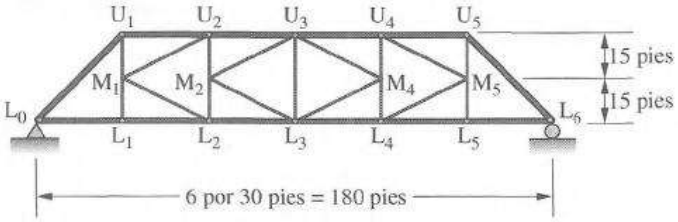
10.16 U_2U_4, L_3L_5, U_4L_5, L_5U_6 a medida que una carga unitaria se mueve por la parte superior de la armadura.



10.17 U_1U_2, U_1L_1, L_2U_3. Suponga una carga unitaria que se mueve por la parte superior de la armadura. (*Resp.:* U_1U_2 − 2.00 en U_2, U_1L_1 − 0.875 en U_1, L_2L_{3V} + 0.583 en U_2.)



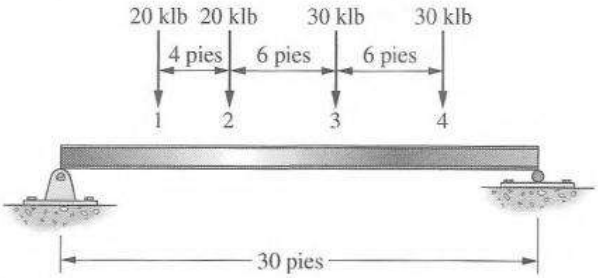
10.18 U_2U_3, M_1L_2, M_2L_2, U_3L_3.



10.19 Determinar las fuerzas resultantes máximas y mínimas en el miembro L_2U_3 de la armadura del problema 10.3 para una carga muerta uniforme de 1 klb/pie, una carga uniforme móvil de 2 klb/pie, una carga concentrada móvil de 20 klb y un factor de impacto de 30%. (*Resp.:* +30.16 klb, −100.25 klb.)

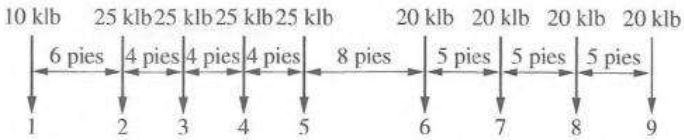
10.20 ¿Es posible la inversión de fuerzas en el miembro U_1L_2 de la armadura del problema 10.15 para las cargas y el factor de impacto usados en el problema 10.19? Muestre las fuerzas resultantes.

10.21 Determinar la fuerza cortante y el momento máximos absolutos posibles en una viga simple de 30 pies debidos al sistema de cargas mostrado. Se espera que el lector determine la fuerza cortante máxima mediante un procedimiento de prueba y error y el momento máximo usando la regla general desarrollada en la sección 10.11 de este capítulo. (*Resp.:* 75.33 klb, 501.5 klb-pie.)



10.22 Una viga simple con un claro de 20 m sustenta un par de cargas concentradas móviles de 60 kN separadas 4 m. Calcule el momento máximo posible al centro de la viga y el momento máximo absoluto en la viga.

10.23 ¿Cuál es el momento máximo posible que puede ocurrir en una viga simple de 80 pies a medida que el sistema de cargas mostrado se mueve a través del claro? (*Resp.:* 2 792.6 klb-pie.)



Capítulo 11

Deflexiones y cambios angulares usando métodos geométricos

11.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo y en los dos siguientes se tratan las deformaciones elásticas de las estructuras. Se consideran tanto los desplazamientos lineales de puntos (deflexiones) como los desplazamientos rotacionales de líneas (pendientes). La palabra *elásticas* se usa para significar lo siguiente:

1. Que los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones;
2. Que se tiene una variación lineal del esfuerzo desde el eje neutro de una viga hasta sus fibras extremas, y;
3. Que los miembros regresarán a su geometría original después de que las cargas hayan sido retiradas.

Las deformaciones de las estructuras son causadas por momentos flexionantes, por fuerzas axiales y por fuerzas cortantes. En vigas y en marcos, los valores máximos son causados por momentos flexionantes, mientras que en armaduras los valores máximos son causados por fuerzas axiales. Las deflexiones por fuerzas cortantes no se consideran en este texto, ya que son muy pequeñas en casi todas las estructuras tipo viga. Las deflexiones por fuerzas cortantes, como un porcentaje de las deflexiones de una viga, crecen conforme aumenta la razón del peralte al claro de la viga. Para la razón común de peralte a claro de 1/12 a 1/6, los porcentajes de las deflexiones por cortante a las deflexiones por flexión varían aproximadamente de 1% a 8%. Para una razón de peralte/claro de un cuarto, los porcentajes pueden ser tan altos como 15% a 18%.[1]

En este capítulo se calculan los desplazamientos empleando el método de área-momento. Con frecuencia se denomina a este método como método geométrico porque las deflexiones se obtienen directamente de las deformaciones en la estructura. El capítulo 12 proporciona una continuación de los métodos geométricos mediante la presentación de los métodos de los pesos elásticos y de la viga conjugada. En el capítulo 13 los desplazamientos se determinan con los *métodos de energía*, basados en el principio de la conservación de la energía. Tanto el procedimiento geométrico como el de energía darán resultados idénticos.

11.2 CROQUIS DE LAS DEFORMACIONES DE LAS ESTRUCTURAS

Antes de aprender los métodos para calcular los desplazamientos estructurales, es conveniente aprender a esbozar la forma esperada deformada de las estructuras sometidas a carga. Entender el comportamiento de los desplazamientos en los sistemas estructurales es una parte muy importante

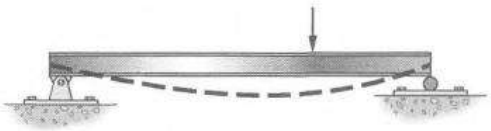
[1] C. K. Wang, *Intermediate Structural Analysis* (Nueva York, McGraw-Hill Book Company, 1983), 750.

para comprender cómo se comportan las estructuras. El ingeniero estructural debe tratar de esbozar las formas anticipadas deformadas de las estructuras bajo carga antes de efectuar los cálculos reales. De esta manera, el ingeniero obtendrá una percepción del comportamiento de la estructura, así como una verificación cualitativa de las magnitudes y las direcciones de los desplazamientos calculados.

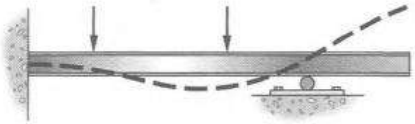
Para esbozar la forma anticipada deformada de un sistema estructural, existen solamente unas cuantas reglas generales. Algunas de estas reglas se aplican a las vigas y columnas y otras se aplican a los nudos entre las componentes. Mediante la aplicación de estas reglas simples podemos obtener indicaciones cualitativas razonables de la respuesta de deflexión de vigas y marcos. Sólo aplicando los métodos cuantitativos estudiados en éste y capítulos posteriores podemos obtener las deflexiones reales.

Reglas para miembros

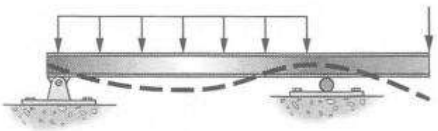
1. Un miembro se deforma en la dirección de la carga aplicada a él.
2. Las deflexiones de los miembros cargados se esbozan primero. Las deflexiones de los miembros no cargados se esbozan después que se esbozan las deflexiones de los nudos.



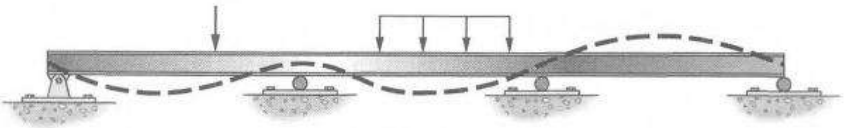
(a) El punto de deflexión máxima está en algún lugar a la izquierda de esta carga fuera del centro del claro.



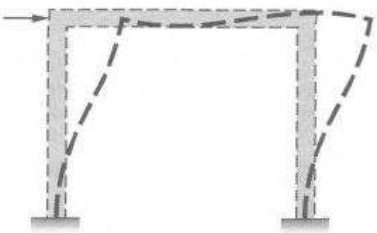
(b) La tangente en el extremo empotrado es horizontal y el extremo derecho se deflexiona hacia arriba.



(c) Sin cálculos no sabemos si la deflexión en el extremo derecho es hacia arriba o hacia abajo. La carga concentrada tiende a empujar el extremo derecho hacia abajo mientras que la carga uniforme tiende a empujarlo hacia arriba.



(d) Observe la deflexión hacia arriba en el tercer claro.



(e) El marco se desplaza hacia la derecha.

Figura 11.1 Formas deformadas cualitativas de algunas estructuras bajo carga.

3. A menos que se tenga una articulación entre un miembro y un nudo, el extremo del miembro y el nudo se desplazan de la misma manera.
4. Los miembros con menor rigidez (EI/L) tienden a deformarse más que los miembros con mayor rigidez. Es decir, los miembros largos y esbeltos se deforman más que los miembros cortos robustos.
5. Al esbozar la forma deformada cualitativa, se supone que las vigas y columnas conservan su misma magnitud.

Reglas para los nudos

1. Se supone que un nudo en una estructura es rígido. Un nudo rígido puede desplazarse pero no puede deformarse, es decir, el nudo no cambia de tamaño o forma al desplazarse. La orientación relativa de los extremos de los miembros conectados a un nudo es la misma antes y después del desplazamiento del nudo.
2. Un nudo sólo puede desplazarse de acuerdo con los soportes externos que actúan sobre él. Un nudo en un soporte fijo o empotramiento no puede ni trasladarse ni girar. Un nudo en un soporte de pasador puede girar pero no puede trasladarse. Un nudo en un rodillo puede girar, no puede trasladarse perpendicularmente a la superficie sobre la cual se apoya el rodillo, y puede trasladarse paralelamente a la superficie sobre la que se apoya el rodillo.

En la figura 11.1 se muestran las formas deflexionadas aproximadas de varias estructuras cargadas mediante la aplicación de estas reglas. En cada caso, se desprecia el peso del miembro. Debe observar que las esquinas del marco de la parte (e) de la figura tienen libertad de giro, pero los ángulos entre los miembros que llegan al nudo se mantienen constantes. Si se dibujan previamente los diagramas de momentos, éstos pueden ayudar a elaborar los croquis teniendo en cuenta en dónde se tienen momentos positivos y negativos.

En seguida se tienen varios ejemplos de dibujos de las formas deformadas cualitativas de las estructuras. En estos ejemplos, se discute el proceso de pensamiento para la preparación de los dibujos.

EJEMPLO 11.1

Considere la viga continua con tres claros de la figura 11.2, sujeta a una fuerza concentrada sobre un claro y a una fuerza distribuida sobre otro claro. Esboce la forma deflexionada cualitativa de esta viga.

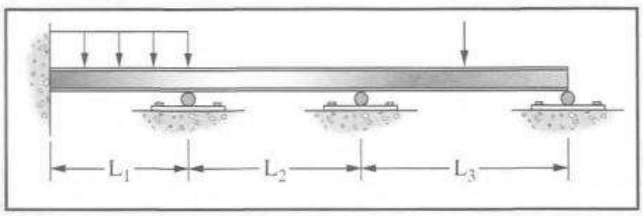
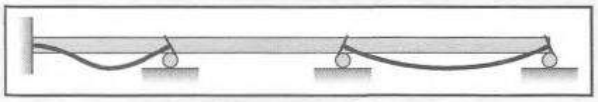
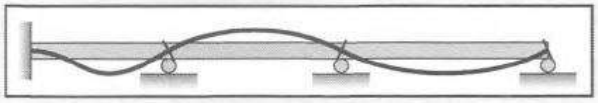


Figura 11.2

Solución. Esboce primero el claro izquierdo. El lado izquierdo no puede girar por estar conectado a un empotramiento. La carga actúa hacia abajo por lo que el claro tiende a deflexionarse hacia abajo. El extremo derecho puede girar, pero ni el extremo izquierdo ni el derecho pueden trasladarse verticalmente. Al esbozar la deformación del miembro, esboce el desplazamiento de los nudos. Luego esboce la deformación del claro derecho. Ambos extremos del claro derecho pueden girar pero ninguno puede trasladarse. El resultado hasta ahora se muestra en la siguiente figura.



Ahora esboce la forma deformada del claro medio. Como el miembro no tiene carga externa actuando sobre él, se deforma solamente como respuesta al desplazamiento de los nudos a los que está conectado. La pendiente de los miembros conectados a un nudo particular debe ser la misma.



Ésta es la forma deflexionada cualitativa de la viga. ■

EJEMPLO 11.2

Esboce la forma deflexionada cualitativa de la viga con voladizo de la figura 11.3, sometida a una carga uniformemente distribuida como se muestra en la figura.

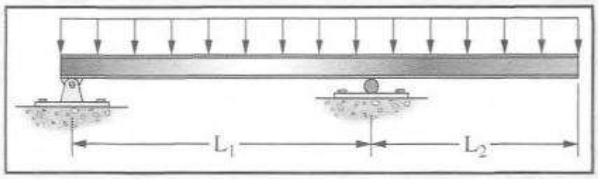
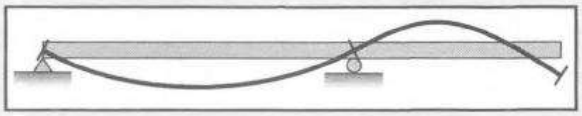


Figura 11.3

Solución. Esbozar la forma deflexionada de esta viga es un poco más complicado. La carga sobre el claro izquierdo ocasiona que el nudo en el soporte derecho gire en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, mientras que la carga en el claro derecho ocasiona que el mismo nudo gire en el sentido de las manecillas del reloj. El claro más largo dominará la rotación; podemos esbozar la deformación de acuerdo con esto.

Esboce primero el claro izquierdo y muestre la rotación resultante de los nudos. La carga actúa hacia abajo, por lo que el claro tenderá a deflexionarse hacia abajo. Ambos extremos pueden girar, pero ninguno puede trasladarse verticalmente. Al esbozar la deformación del miembro, esboce el desplazamiento de los nudos.

A continuación, esboce la deformación del claro derecho o claro en voladizo. No se tiene un soporte en el lado derecho del claro, de modo que ese extremo se desplazará como respuesta a la carga aplicada. Recuerde que la geometría de los nudos no cambia, de manera que las tangentes de las formas deflexionadas de los dos claros en el soporte derecho deben ser iguales.



Ésta es la forma deflexionada cualitativa de la viga. Si el extremo derecho se mueve hacia arriba o hacia abajo dependerá de la magnitud de las cargas y de las longitudes relativas de los dos claros. ■

EJEMPLO 11.3

Esboce la forma deformada cualitativa del marco arriostrado mostrado en la figura 11.4. Como el marco está arriostrado, sus nudos no se trasladan entre sí.

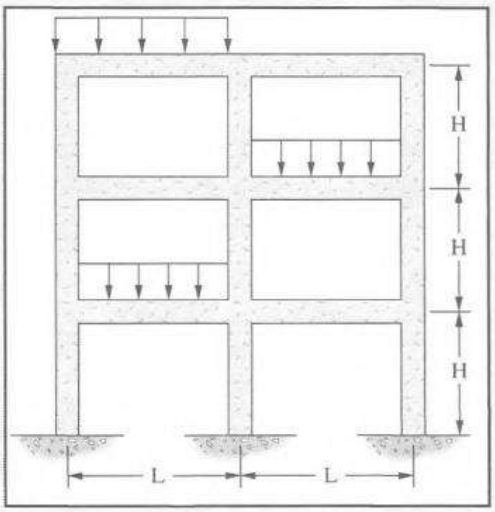
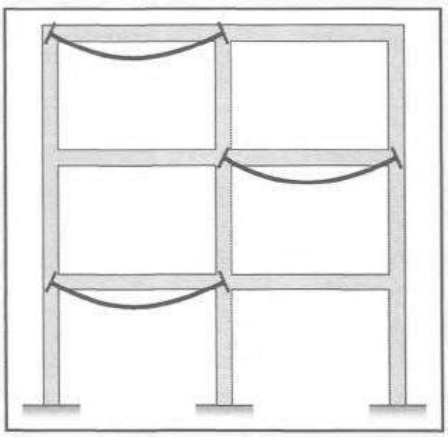
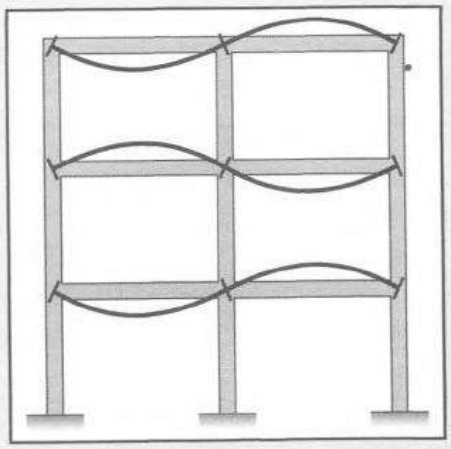


Figura 11.4

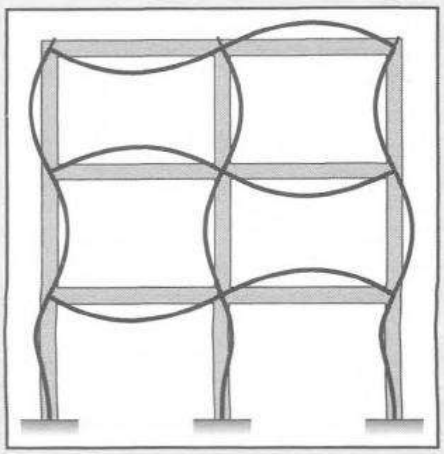
Solución. Esboce primero la forma deformada de los miembros cargados. Al mismo tiempo, indique la rotación de los nudos. Los miembros cargados tenderán a deformarse en la dirección de las cargas aplicadas.



Ahora esboce la forma deformada de las otras vigas tomando en cuenta los desplazamientos de los nudos a los cuales se conectan. Como las vigas están rígidamente conectadas a los nudos, las tangentes de la forma deformada de las vigas conectadas a un nudo deben ser iguales.



Ahora esboce las deformaciones de las columnas. Recuerde que los nudos no se deforman, por lo que los ángulos rectos entre las vigas y las columnas deben mantenerse.



El resultado es la forma deformada cualitativa del marco arriostrado. ■

11.3 RAZONES PARA CALCULAR LAS DEFLEXIONES

Los elementos que forman una estructura están hechos de materiales que se deforman al cargarlos. Si sus deflexiones exceden los valores permisibles, ello puede repercutir en la apariencia estética de las estructuras y los materiales fijados a esos elementos pueden resultar dañados. Por ejemplo, una vigueta de piso que se deflexione en exceso puede causar grietas en el plafón situado bajo ella, o si soporta pisos de concreto o de losetas, la superficie de éstas puede agrietarse. Además, un piso apoyado sobre vigas que "ceden" en forma considerable no inspirará confianza alguna, aunque las vigas sean del todo seguras. En pisos de este tipo pueden ocurrir vibraciones excesivas, en particular si soportan maquinaria.

La práctica normal en Estados Unidos es limitar las deflexiones causadas por carga viva a 1/360 del claro. Esta cifra se originó probablemente en vigas que servían de sostén a plafones de yeso y se consideró suficiente para evitar grietas en el aplanado. El lector debe percatarse de que una gran parte de las deflexiones en un edificio se deben a cargas muertas; esas deflexiones ocurren antes de la colocación de los acabados.

La deflexión de 1/360 es sólo uno de los muchos valores de deflexión máxima en uso; esto se debe a las diferentes situaciones de carga, a los distintos proyectistas y a las diversas especificaciones. Para los casos en que se soporta maquinaria delicada y de precisión, las deflexiones máximas pueden limitarse a 1/1500 o 1/2000 de la longitud del claro. Las especificaciones AASHTO de 2002 limitan las deflexiones en vigas y en trabes de acero debidas a carga viva e impacto a 1/800 del claro. Este valor, que es aplicable tanto a claros simples como a claros continuos, se reduce en ocasiones a 1/1000 en los puentes de zonas urbanas que son usados parcialmente por peatones. Los valores correspondientes de la AASHTO para voladizos son 1/300 y 1/375.

Los elementos estructurales sujetos a grandes deflexiones verticales dan con frecuencia un mal aspecto e incluso pueden llegar a alarmar a los usuarios de la estructura. A esos elementos se les puede dar cierta *curvatura* para que sus deflexiones no resulten tan grandes. Los elementos se construyen con una forma tal que toman su forma teórica bajo alguna condición de carga (generalmente de carga muerta). Una viga simple podría construirse con una ligera convexidad, de manera que bajo cargas por gravedad tomase una configuración recta, como se supone en los cálculos. Algunos proyectistas tienen en cuenta tanto la carga viva como la carga muerta para estimar la magnitud de la curvatura.

Puente para canal de embarcaciones en Houston, Texas. (Cortesía del Departamento de Caminos y Transporte Público del Estado de Texas.)

A pesar de la importancia del cálculo de las deflexiones, rara vez deben calcularse las deformaciones estructurales (aun en estructuras estáticamente determinadas) para modificar las dimensiones originales en que se basan los cálculos. Las deformaciones de los materiales usados en la construcción ordinaria son muy pequeñas comparadas con las dimensiones globales de la estructura. Por ejemplo, la deformación unitaria (ε) que ocurre en una sección de acero con módulo de elasticidad (E) de 29×10^6 lb/plg^2 cuando el esfuerzo (σ) es de 20 000 lb/plg^2, es sólo de

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{20 \times 10^3}{29 \times 10^6} = 0.000690$$

Este valor es sólo 0.0690 por ciento de la longitud del elemento o miembro.

Históricamente, existe un gran número de métodos para calcular deflexiones. Es conveniente que el ingeniero estructural esté familiarizado con varios de éstos. En algunas estructuras será más fácil aplicar determinado método, pero en otras será más satisfactorio utilizar algún otro. Además, la capacidad de resolver cualquier problema estructural empleando más de un método es muy importante para comprobar los resultados.

En este capítulo y en los dos siguientes se presentan los siguientes métodos para el cálculo de deflexiones y de pendientes: (a) teoremas del área del diagrama de momento, (b) pesos elásticos, (c) viga conjugada, (d) trabajo virtual y (e) segundo teorema de Castigliano. Estos métodos pueden usarse para calcular las reacciones de vigas, marcos y armaduras estáticamente indeterminadas, como se muestra en capítulos posteriores.

11.4 TEOREMAS DEL ÁREA DEL DIAGRAMA DE MOMENTO

Charles E. Greene, de la Universidad de Michigan, presentó el método del área del diagrama de momento flexionante para el cálculo de deflexiones en 1873. Bajo cargas variables, el eje neutro de un elemento cambia de forma de acuerdo con las posiciones y las magnitudes de las cargas. La *curva elástica* de un elemento es la forma que adquiere su eje neutro al someterlo a cargas temporales. Los teoremas del profesor Greene se basan en la forma de la curva elástica del miembro y en la relación entre el momento flexionante y la tasa de cambio de la pendiente en un punto de la curva.

Para deducir los teoremas consideraremos la viga simple de la figura 11.5. Bajo las cargas P_1 a P_4, la viga se deflexiona hacia abajo, como se muestra en la figura.

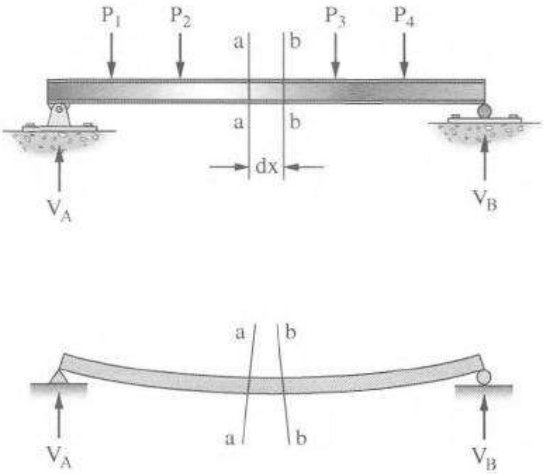


Figura 11.5

En la figura 11.6 se muestra la sección dx, limitada en sus extremos por las secciones a-a y b-b. El tamaño, el grado de curvatura y la distorsión del segmento se muestran muy exagerados, de manera que puedan observarse fácilmente las pendientes y las deflexiones que se van a analizar. En la figura 11.6(a), la línea ac a lo largo del eje neutro de la viga no cambia de longitud. Se traza la línea ce paralela a la ab. Por lo tanto, be es igual a ac y de representa el alargamiento de la fibra inferior be de la sección dx. La figura 11.6(b) muestra a mayor escala el triángulo cde y el ángulo $d\theta$, el cual es el cambio en pendiente de la tangente a la curva elástica en el extremo izquierdo del segmento respecto a la tangente en el extremo derecho. Se dispone de información suficiente

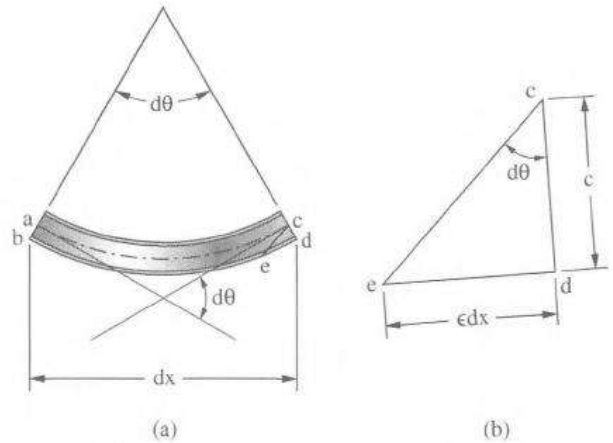


Figura 11.6

para determinar dθ. Debe recordarse en la deducción que sigue que el ángulo dθ es muy pequeño. Para un ángulo muy pequeño, el seno, la tangente y ese ángulo en radianes se pueden considerar iguales en magnitud, lo que permite que sus valores se usen indistintamente. Es muy aleccionador comprobar en unas tablas trigonométricas de valores naturales la amplia variedad de ángulos para los cuales coinciden esas funciones.

Los momentos flexionantes ocasionados por las cargas externas son positivos y producen acortamientos en las fibras superiores de la viga, así como alargamientos en las inferiores. Los cambios en las longitudes de las fibras ocasionan el cambio dθ en la pendiente. El módulo de elasticidad del material de la viga es conocido, y el esfuerzo en cualquier punto puede determinarse con la fórmula de la flexión. Por lo tanto, la deformación unitaria en cualquier fibra puede encontrarse dividiendo el esfuerzo entre el módulo de elasticidad. El valor de dθ puede expresarse como sigue:

$$\tan(d\theta) = \frac{\text{deformación}}{c} = \frac{ed}{cd} = d\theta \text{ en radianes (rad)}$$

$$d\theta = \frac{\varepsilon\, dx}{c}$$

Sustituyendo ε por σ/E, encontramos que:

$$d\theta = \frac{(\sigma/E)\, dx}{c}$$

Sin embargo, el esfuerzo puede calcularse usando la ecuación de la flexión elástica, por lo que esta ecuación puede expresarse como:

$$d\theta = \frac{\left(\dfrac{Mc}{EI}\right) dx}{c} = \frac{M\, dx}{EI}$$

Esta ecuación representa el cambio en la pendiente de la curva elástica entre los dos extremos de un segmento que tiene una longitud dx. El cambio total en la pendiente de un punto A en la viga a otro punto B puede expresarse como la integral de dθ sobre la longitud AB, es decir:

$$\theta_{AB} = \int_A^B \frac{M\, dx}{EI}$$

Esta ecuación representa el área del diagrama M/EI entre los puntos A y B. El diagrama M/EI es simplemente el diagrama de momento flexionante dividido por EI. De este análisis, el primer teorema del área del diagrama de momento flexionante puede expresarse como sigue:

El cambio de pendiente entre las tangentes en dos puntos de la curva elástica en un miembro es igual al área del diagrama M/EI entre los dos puntos.

Una vez que se tiene un método para calcular el cambio de pendiente entre las tangentes en diferentes puntos de la curva elástica, sólo se necesita una pequeña extensión para desarrollar un procedimiento para calcular deflexiones entre las tangentes. En una distancia dx, el eje neutro cambia de dirección en una magnitud $d\theta$. La deflexión $d\delta$, de un punto sobre la viga con respecto a la tangente en otro punto debido a este cambio angular es igual a:

$$d\Delta = x\, d\theta$$

En esta ecuación, x es la distancia desde el punto cuya deflexión se busca al punto para el cual se calcula la tangente. El valor de $d\theta$ obtenido de la ecuación 10.4 puede sustituirse en esta expresión para obtener:

$$d\Delta = x\frac{M\,dx}{EI} = \frac{Mx\,dx}{EI}$$

Para determinar la deflexión total desde la tangente en un punto, A, hasta la tangente en otro punto, B, sobre la viga, puede integrarse la ecuación anterior sobre la distancia AB, es decir:

$$\Delta_{AB} = \int_A^B \frac{Mx\,dx}{EI}$$

La ecuación anterior constituye un enunciado matemático del segundo teorema del área del diagrama de momento flexionante, que es:

La deflexión de una tangente a la curva elástica de una viga en un punto con respecto a una tangente en otro punto es igual al momento del diagrama M/EI entre los dos puntos respecto al punto donde se busca la deflexión.

Cubierta soldada por puntos de un centro comercial en Charlotte, Carolina del Norte. (Cortesía de la Lincoln Electric Company.)

11.5 APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS DEL ÁREA DEL DIAGRAMA DE MOMENTO

En los párrafos que siguen se mostrará que el método del área del diagrama de momento encuentra su utilización más conveniente en la determinación de pendientes y de deflexiones en vigas para las que se conoce la tangente a la curva elástica en uno o más puntos. Tal es el caso de las vigas en voladizo, en las que la tangente en el extremo empotrado no cambia de posición. El método se

aplica con facilidad a vigas sujetas a cargas concentradas, porque el diagrama de momento consta sólo de líneas rectas. Estos diagramas pueden descomponerse en triángulos y rectángulos, facilitándose así el trabajo matemático. Pueden también analizarse vigas con cargas uniformes o que varíen uniformemente, pero el álgebra resulta aquí un poco más complicada.

Las propiedades de algunas figuras mostradas en la figura 11.7 son útiles para solucionar los problemas en este capítulo y el siguiente.

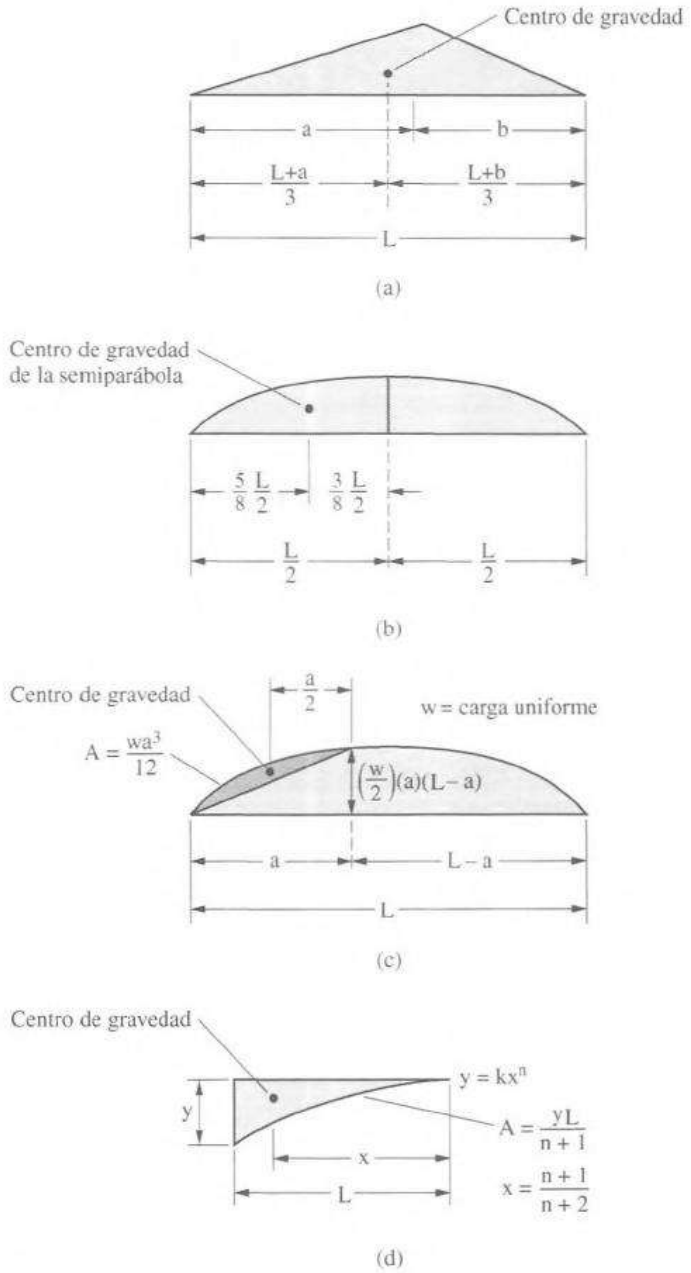


Figura 11.7 Propiedades de área de uso muy frecuente.

Los ejemplos 11.4 al 11.9 muestran la aplicación de los teoremas del área del diagrama de momento. En algunas ocasiones es posible simplificar la matemática dibujando el diagrama de momento y efectuando los cálculos en función de símbolos. Estos símbolos podrían ser P para una carga concentrada, w para una carga uniforme, y L para la longitud de un claro. Este concepto

se ilustra en los ejemplos 11.4 y 11.6. Los valores numéricos de cada símbolo se sustituyen en el paso final para obtener la pendiente o deflexión deseada.

En la resolución de los problemas, debe tenerse cuidado de usar unidades consistentes en los cálculos. Para evitar errores en la aplicación de los teoremas del área de momento, *debe tenerse presente que las pendientes y las deflexiones se obtienen respecto a tangentes a la curva elástica en los puntos considerados. Los teoremas no dan directamente la pendiente o la deflexión en un punto de la viga respecto a la horizontal (excepto en uno o dos casos especiales). En lugar de ello, los teoremas dan el cambio de pendiente de la curva elástica de un punto a otro, o la deflexión de la tangente en un punto con respecto a la tangente en otro.*

Si una viga o una estructura tiene varias cargas aplicadas, puede complicarse el manejo del diagrama M/EI. Esto es especialmente cierto para vigas y marcos que sustentan tanto cargas concentradas como cargas uniformes. Cuando se aplican en forma concurrente cargas distribuidas y cargas concentradas, el diagrama M/EI se hace muy complejo, lo que hace difícil el cálculo de las propiedades necesarias de las áreas que intervienen. Los cálculos pueden simplificarse dibujando diagramas M/EI separados para cada una de las cargas y determinando las pendientes y las deflexiones para cada uno de ellos. Los resultados finales para un punto en particular pueden encontrarse sumando los resultados para todas las cargas. El principio de superposición, que se presentó en la sección 4.12 del capítulo 4 de este libro, es aplicable al método del área del diagrama de momento, así como a los demás métodos usados para determinar deflexiones siempre que estemos en el rango elástico.

EJEMPLO 11.4

Determinar la pendiente y la deflexión del extremo derecho en la viga en voladizo que se muestra en la figura 11.8.

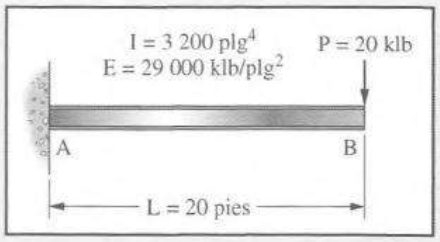
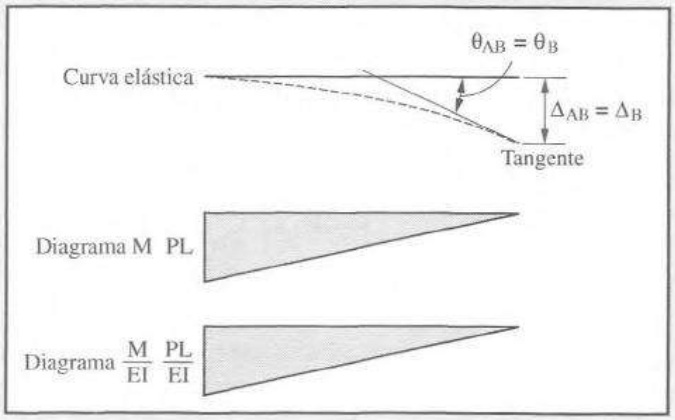


Figura 11.8

Solución. Una tangente a la curva elástica en el extremo empotrado es horizontal. Por lo tanto, los cambios en pendiente y en deflexión de una tangente en el extremo libre con respecto a una tangente en el extremo empotrado son la pendiente y la deflexión del extremo libre. En la siguiente figura se muestran el diagrama de momento flexionante y el diagrama M/EI asociado para la viga.



La pendiente en B es igual al área bajo el diagrama M/EI entre A y B.

$$\theta_B = \left(\frac{1}{2}\right)L\left(\frac{PL}{EI}\right) = \frac{PL^2}{2EI} = \frac{(20)(1\,000)[20(12)]^2}{2(3\,200)(29 \times 10^6)}$$

$$\theta_B = 0.00621 \text{ rad} = 0.36° \ \backslash$$

La deflexión en B es igual al momento del diagrama M/EI entre A y B respecto a B donde se desea la deflexión.

$$\Delta_B = \left(\frac{1}{2}\right)L\left(\frac{PL}{EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{(20)(1\,000)[20(12)]^3}{3(3\,200)(29 \times 10^6)}$$

$$\Delta_B = 0.99 \text{ pulgadas} \downarrow \ \blacksquare$$

EJEMPLO 11.5

Determinar la pendiente y la deflexión de la viga en el punto B, situado a 10 pies del extremo izquierdo de la viga de la figura 11.9.

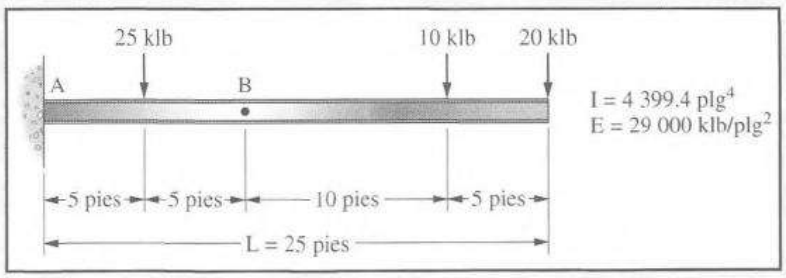
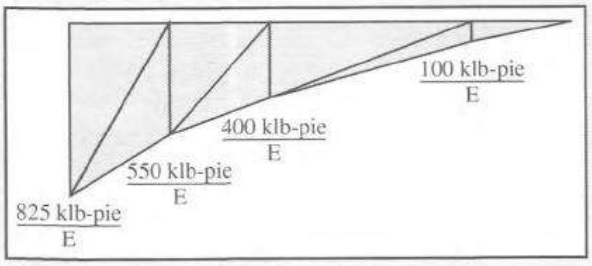


Figura 11.9

Solución. El extremo izquierdo de la viga está nuevamente empotrado. Entonces, la pendiente en B es igual al área del diagrama de M/EI entre A y B. El diagrama M/EI se ha subdividido en cómodos triángulos, como se muestra, para facilitar los cálculos.



$$\theta_B = \frac{\frac{1}{2}(825)(5) + \frac{1}{2}(550)(5) + \frac{1}{2}(550)(5) + \frac{1}{2}(400)(5)}{EI} = \frac{5\,812.5 \text{ klb-pie}^2}{E}$$

$$\theta_B = \frac{5\,812.5(12)^2(1\,000)}{(29 \times 10^6)(4\,399.4)} = 0.00656 \text{ rad} = 0.38° \ \backslash$$

La deflexión en B es igual al primer momento del diagrama de M/EI entre A y B respecto a B.

$$\Delta_B = \frac{\frac{1}{2}(825)(5)(8.33) + \frac{1}{2}(550)(5)(6.67) + \frac{1}{2}(550)(5)(3.33) + \frac{1}{2}(400)(5)(1.67)}{EI}$$

$$= \frac{32\,600 \text{ klb-pie}^3}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{32\,600(12)^3(1\,000)}{(29 \times 10^6)(4\,399.4)} = 0.442 \text{ pulgadas} \downarrow \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 11.6

Determinar la pendiente y la deflexión en el extremo libre de la viga en voladizo mostrada en la figura 11.10.

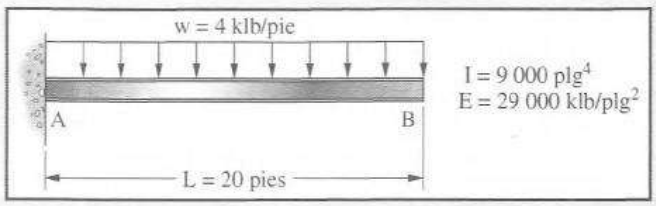
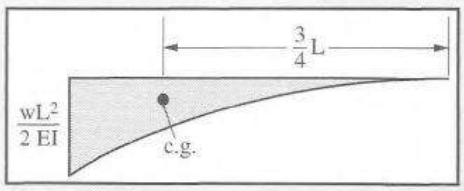


Figura 11.10

Solución. El diagrama M/EI usado para la viga se muestra aquí.



Observe con cuidado las unidades usadas para resolver las ecuaciones desarrolladas para la pendiente y la deflexión. En estas ecuaciones se usan pulgadas y libras. Entonces el valor de w es 4 000/12 lb/plg y no sólo 4 000 lb/pie. Tenga cuidado con las unidades para la carga distribuida, ya que fácilmente pueden cometerse errores en el cálculo de la pendiente o la deflexión por un múltiplo de 12.

Igual que en el ejemplo anterior, la pendiente en el lado izquierdo es horizontal, ya que ese extremo es un empotramiento. Entonces, la pendiente de la curva elástica en el extremo libre B, es igual al área del diagrama M/EI entre el extremo izquierdo y B.

$$\theta_B = \left(\frac{1}{3}\right)L\left(\frac{wL^2}{2EI}\right) = \frac{wL^3}{6EI}$$

$$\theta_B = \frac{\left(\frac{4\,000}{12}\right)[20(12)]^3}{(6)(29 \times 10^6)(9\,000)} = 0.00294 \text{ rad} = 0.17°$$

La deflexión en A es igual al momento del diagrama M/EI entre el extremo izquierdo y A respecto a A.

$$\Delta_B = \left(\frac{1}{3}\right)L\left(\frac{wL^2}{2EI}\right)\left(\frac{3L}{4}\right) = \frac{wL^4}{8EI}$$

$$\Delta_B = \frac{\left(\frac{4\,000}{12}\right)[20(12)]^4}{(8)(29 \times 10^6)(9\,000)} = 0.0530 \text{ pulgadas} \downarrow \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 11.7

Calcular la pendiente y la deflexión en el extremo libre de la viga en voladizo que se muestra en la figura 11.1. El tamaño de la viga y por tanto su momento de inercia han sido aumentados cerca del soporte donde el momento flexionante es mucho mayor que lo que vale cerca del extremo libre.

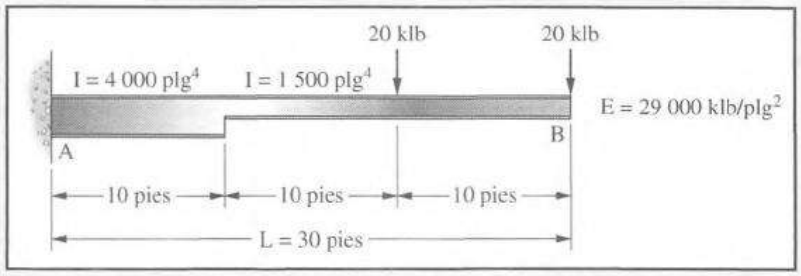
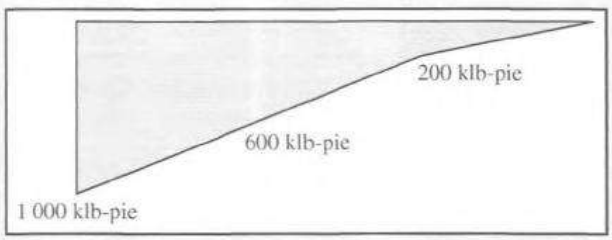
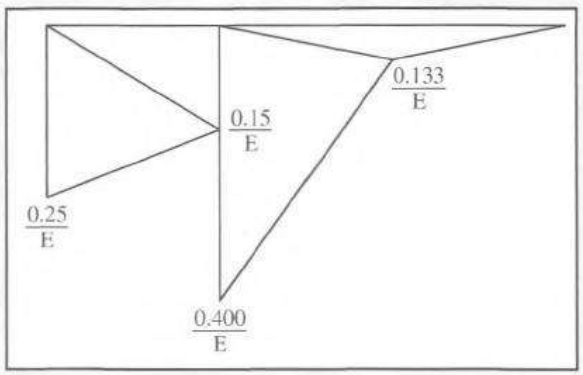


Figura 11.11

Solución. El diagrama de momento y el correspondiente diagrama M/EI se muestran abajo. El diagrama de M/EI se dibuja manteniendo la constante E como símbolo, pero con las ordenadas divididas por los correspondientes momentos de inercia. La figura resultante se subdivide en triángulos y los cálculos se efectúan como antes.





La pendiente en el extremo izquierdo de la viga es horizontal porque ese extremo es un empotramiento. Entonces, la pendiente de la curva elástica en B es igual al área del diagrama M/EI entre el extremo izquierdo y B.

$$\theta_B = \frac{\frac{1}{2}(10)(0.25) + \frac{1}{2}(10)(0.15) + \frac{1}{2}(10)(0.40) + \frac{1}{2}(20)(0.133)}{E} = \frac{5.333 \text{ klb-pie}^2}{E}$$

$$\theta_B = \frac{5.333(12)^2(1\,000)}{(29 \times 10^6)} = 0.0265 \text{ rad} = 1.52°$$

Nuevamente, la deflexión en B es igual al primer momento del diagrama M/EI respecto a B.

$$\Delta_B = \frac{\frac{1}{2}(10)(0.25)(26.67) + \frac{1}{2}(10)(0.15)(23.33) + \frac{1}{2}(10)(0.40)(16.67) + \frac{1}{2}(20)(0.133)(10)}{E}$$

$$= \frac{97.47 \text{ klb-pie}^3}{E} = \frac{97.47(12)^3(1\,000)}{(29 \times 10^6)} = 5.81 \text{ pulgadas } \downarrow \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 11.8

Calcular la deflexión en el centro del claro de la viga simplemente apoyada y uniformemente cargada mostrada en la figura 11.12.

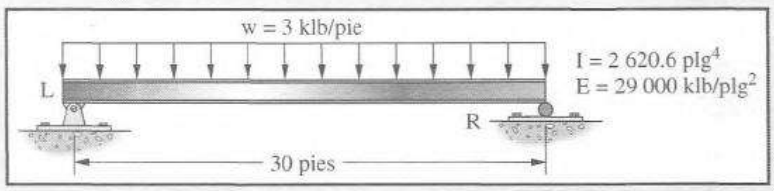
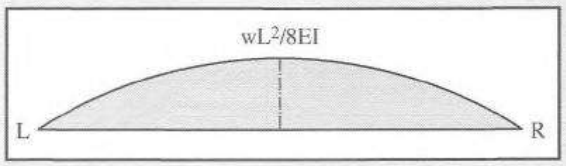
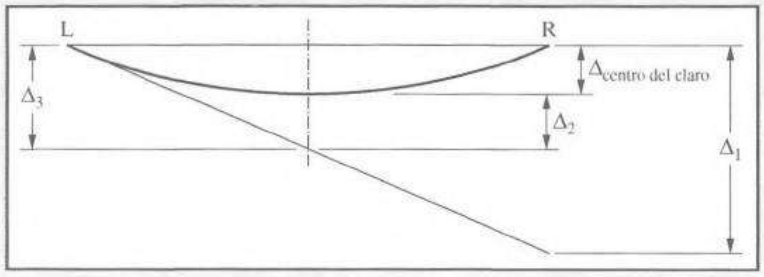


Figura 11.12

Solución. El diagrama M/EI usado en la solución se muestra a continuación.



Las tangentes a la curva elástica en cada extremo de la viga son inclinadas. Es fácil determinar la deflexión entre una tangente en el centro del claro y una tangente en un extremo, pero el resultado no es la deflexión verdadera en el centro de la viga. Para obtener la deflexión correcta es necesario proceder en forma indirecta. Ese procedimiento indirecto se describe y se demuestra en los siguientes párrafos. No es tan práctico como los otros métodos que se presentan para estas situaciones en los dos siguientes capítulos.



Primero, encontramos la deflexión de la tangente en el extremo derecho respecto a la tangente en el extremo izquierdo, Δ_1.

$$\Delta_1 = \left(\frac{2}{3}\right)L\left(\frac{wL^2}{8EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^4}{24EI}$$

Luego, encontramos la deflexión Δ_2 de una tangente en el centro del claro respecto a una tangente en L:

$$\Delta_2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{wL^2}{8EI}\right)\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^4}{128EI}$$

Entonces, por proporciones, es posible calcular la distancia de la cuerda original entre L y R a la tangente en $\frac{L}{2}$, Δ_3:

$$\Delta_3 = \frac{1}{2}\delta_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{wL^4}{24EI}\right) = \frac{wL^4}{48EI}$$

La diferencia entre Δ_3 y Δ_2 es la deflexión en el centro del claro.

$$\Delta_{\text{centro del claro}} = \Delta_3 - \Delta_2 = \frac{wL^4}{48EI} - \frac{wL^4}{128EI} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

$$\Delta_{\text{centro del claro}} = \frac{5\left(\frac{3\,000}{12}\right)[30(12)]^4}{384(2\,620.6)(29 \times 10^6)} = 0.719 \text{ pulgadas} \downarrow \quad \blacksquare$$

11.6 ANÁLISIS DE VIGAS DOBLEMENTE EMPOTRADAS

El ejemplo 11.9 muestra que los teoremas del área del diagrama del momento pueden usarse para determinar los momentos en los extremos de una viga doblemente empotrada. Un miembro de este tipo, cuyo ejemplo se muestra en la figura 11.13, es estáticamente indeterminado en tercer grado. Este tipo de cálculo es útil para nosotros cuando estamos usando el método de distribución de momentos de los capítulos 20 y 21 de este texto para analizar vigas y marcos estáticamente indeterminados. Es especialmente útil para manejar situaciones en las cuales los momentos de inercia varían a lo largo de los miembros, cuando las cargas varían uniformemente y para otras situaciones similares.

EJEMPLO 11.9

Determine los momentos en los extremos de la viga doblemente empotrada mostrada en la figura 11.13 para la cual E e I son constantes.

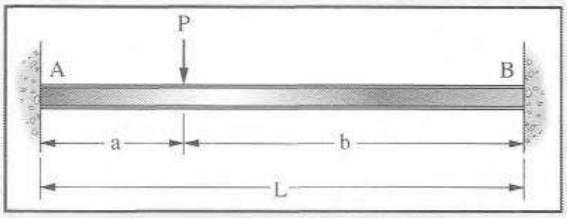
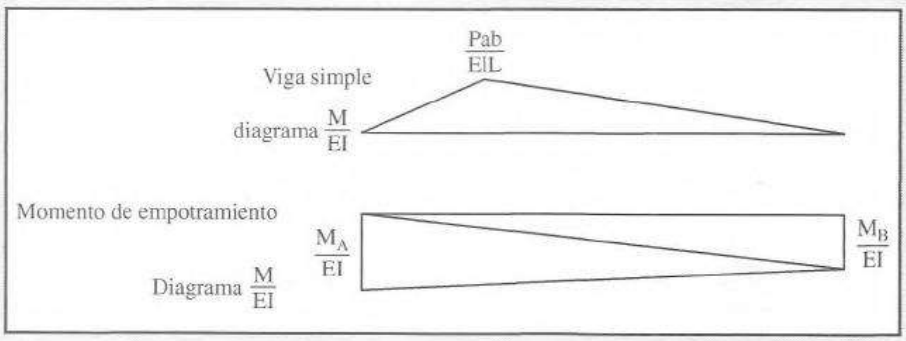


Figura 11.13

Solución. Un examen de la viga revela que no hay cambio de pendiente ni deflexión de la tangente en A desde la tangente en B; por lo tanto, el área total del diagrama M/EI de A a B es cero, y el momento del diagrama M/EI con respecto a cualquiera de los dos extremos es cero.

El diagrama M/EI puede dibujarse en dos partes: el diagrama de momentos de la viga simple, cuyas ordenadas se conocen, y el diagrama de momentos debido a los momentos de los extremos M_A y M_B que no se conocen. Para cada uno de estos momentos, puede trazarse un diagrama con forma triangular y los dos pueden combinarse en un trapezoide. Los teoremas de área del diagrama de momento están escritos para expresar el cambio en la pendiente y en la deflexión de B a A. Cada una de las dos ecuaciones contiene las dos incógnitas M_A y M_B, y las ecuaciones se resuelven simultáneamente.



Teorema 1:

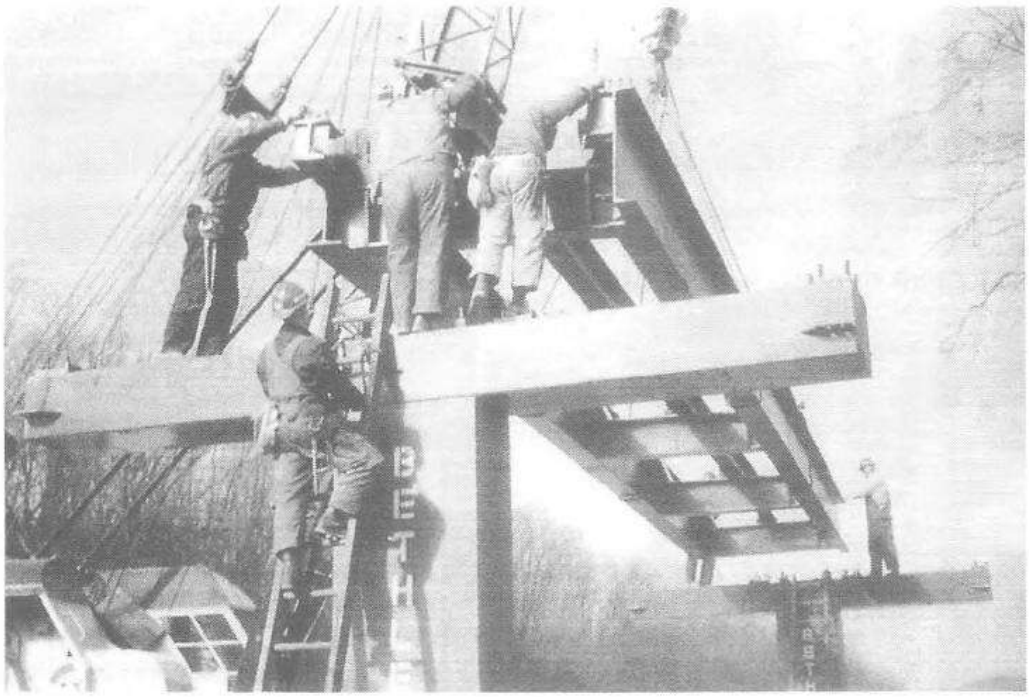
$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{Pab}{EIL}\right)(L) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M_A}{EI}\right)(L) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M_b}{EI}\right)(L) = 0$$
$$\frac{Pab}{2EI} + \frac{M_A L}{2EI} + \frac{M_B L}{2EI} = 0 \qquad (1)$$

Teorema 2 (tomando momentos con respecto al extremo izquierdo A):

$$\left(\frac{Pab}{2EI}\right)\left(\frac{L+a}{3}\right) + \left(\frac{M_A L}{2EI}\right)\left(\frac{1}{3}L\right) + \left(\frac{M_B L}{2EI}\right)\left(\frac{2}{3}L\right) = 0$$
$$\frac{Pabl + Pa^2b}{6EI} + \frac{M_A L^2}{6EI} + \frac{M_B L^2}{3EI} = 0 \qquad (2)$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) simultáneamente para M_A y M_B,

$$M_A = -\frac{Pab^2}{L^2} \quad M_B = -\frac{Pa^2b}{L^2} \quad \blacksquare$$



Sistema de transporte rápido Westinghouse, Pittsburg, Pennsylvania. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

11.7 TEOREMA DE MAXWELL SOBRE LAS DEFLEXIONES RECÍPROCAS

Existe una sorprendente relación entre las deflexiones de dos puntos en una viga. Esta relación fue publicada por primera vez por James Clerk Maxwell en 1864. El teorema de Maxwell puede enunciarse de la siguiente manera:

La deflexión en un punto A de una estructura debida a una carga aplicada en otro punto B es exactamente la misma que la deflexión que se obtendría en B si la misma carga se aplicara en A.

Este teorema es perfectamente general y se aplica a cualquier tipo de estructura, ya sea armadura, viga o marco, que esté hecha de material elástico que obedezca la ley de Hooke. Los desplazamientos pueden ser causados por flexión, cortante o torsión. Este teorema tiene frecuente aplicación en la preparación de líneas de influencia de estructuras continuas, en el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas y en el análisis de modelos.

El teorema no sólo es aplicable a las deflexiones de todos estos tipos de estructuras, sino también a rotaciones. Por ejemplo, un par unitario en A producirá una rotación en B igual a la rotación producida en A si el mismo par se aplicara en B.

En el ejemplo 11.10 se demuestra que la ley es correcta para una viga simple en voladizo cuyas deflexiones en dos puntos se determinan usando el método del área del diagrama de momento.

EJEMPLO 11.10

Demuestre la ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas comparando la deflexión en el punto A causada por una carga de 10 klb aplicada primero en B con la deflexión en B causada por una carga de 10 klb en A. La viga en voladizo usada en este ejemplo y la primera condición de carga se muestran en la figura 11.14.

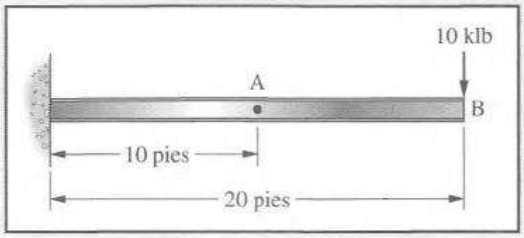
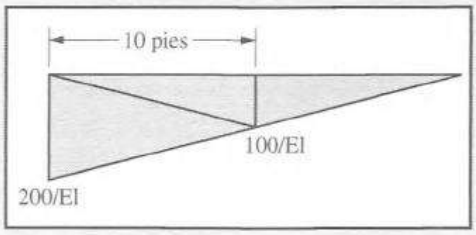


Figura 11.14

Solución. El diagrama M/EI para esta viga con una carga de 10 klb aplicada en B se muestra a continuación. El diagrama M/EI se ha dividido en triángulos simples para facilitar los cálculos.



Como el lado izquierdo es un empotramiento, la deflexión en A es igual al primer momento del área bajo el diagrama M/EI entre el soporte izquierdo y A con respecto a A.

$$\Delta_A = \frac{200(10)(6.667)}{2EI} + \frac{100(10)(3.333)}{2EI} = \frac{8\,332 \text{ klb-pie}^3}{EI}$$

Cuando la carga de 10 klb se aplica en A, la viga cargada y el diagrama correspondiente M/EI son como se muestran en la figura 11.15.

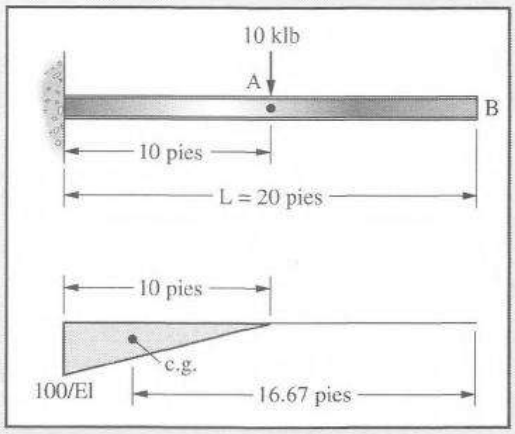


Figura 11.15

La deflexión causada en B por esta carga es el primer momento del diagrama M/EI respecto a B.

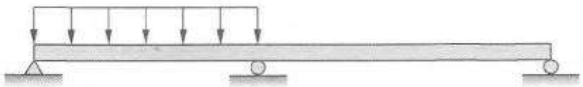
$$\Delta_B = \frac{100(10)(16.667)}{2EI} = \frac{8\ 335\ \text{klb-pie}^3}{E}$$

Estas dos deflexiones calculadas son iguales, lo que evidencia la ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas: *La deflexión en A causada por una carga en B es igual a la deflexión en B causada por la misma carga en A.* ■

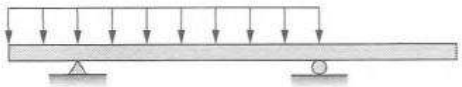
11.8 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

Para los problemas 11.1 a 11.7, esboce cualitativamente la forma deformada de las estructuras para las cargas dadas.

11.1



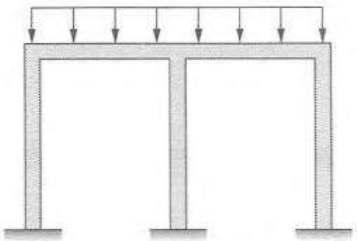
11.2



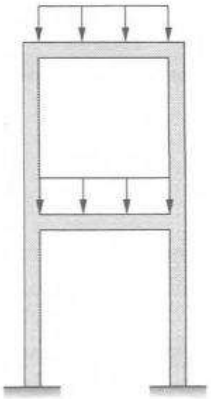
11.3

11.4

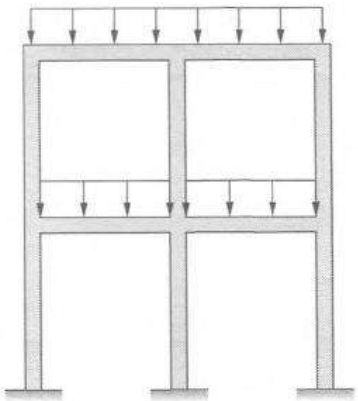
11.5



11.6

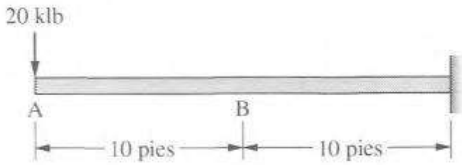


11.7

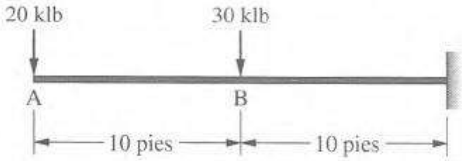


En los problemas 11.8 a 11.22, determine las cantidades pedidas usando el método del área del diagrama de momento.

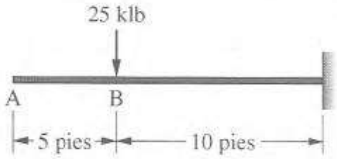
11.8 θ_A, θ_B, Δ_A, Δ_B. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 1\ 200$ plg^4.



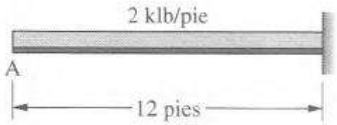
11.9 θ_A, θ_B, Δ_A, Δ_B. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 2\,500$ plg^4. (*Resp.:* $\theta_A = 0.0109$ rad /, $\Delta_A = 1.87$ plg ↓, $\Delta_B = 0.636$ plg ↓.)



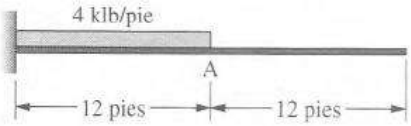
11.10 θ_A, θ_B, Δ_A, Δ_B. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 1\,500$ plg^4.



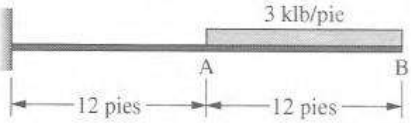
11.11 θ_A, Δ_A. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 1\,140$ plg^4. (*Resp.:* $\theta_A = 0.002509$ rads /, $\Delta_A = 0.271$ plg ↓)



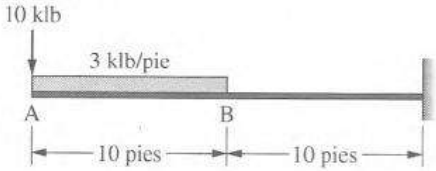
11.12 θ_A, Δ_A. $E = 29 \times 10^6$. $I = 1000$ plg^4.



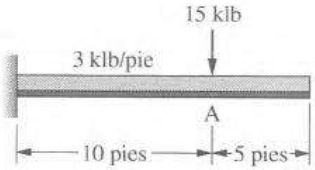
11.13 θ_A, θ_B, Δ_A, Δ_B. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 2\,100$ plg^4. (*Resp.:* $\theta_B = 0.01430$ rad \, $\Delta_A = 1.03$ plg ↓, $\Delta_B = 3.02$ plg ↓.)



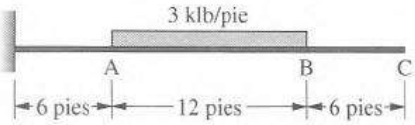
11.14 θ_A, θ_B, Δ_A, Δ_B. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 5\,200$ plg^4.



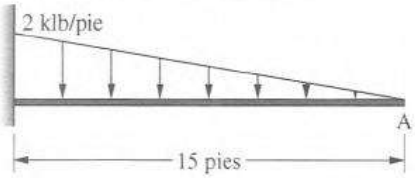
11.15 θ_A, Δ_A. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 3\,000$ plg^4. (*Resp.:* $\theta_A = 0.00393$ rads \, $\Delta_A = 0.310$ plg ↓.)



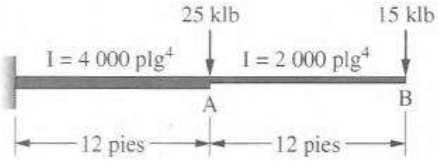
11.16 θ_A, θ_B, θ_C, Δ_C. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 1\,320$ plg^4.



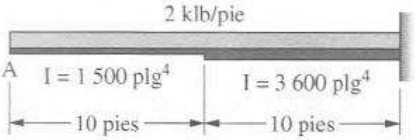
11.17 θ_A, Δ_A, $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 600$ plg^4. (*Resp.:* $\theta_A = 0.00233$ rad \, $\Delta_A = 0.335$ plg ↓.)



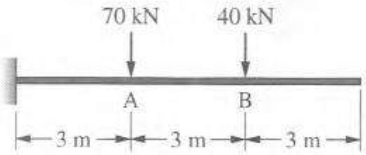
11.18 θ_A, θ_B, Δ_A, Δ_B. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2.



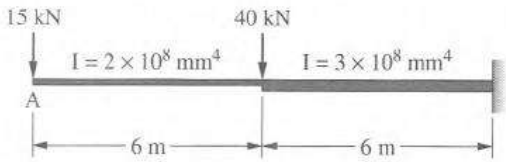
11.19 θ_A, Δ_A. $E = 29 \times 10^6$. (*Resp.:* $\theta_A = 0.00432$ rad /, $\Delta_A = 0.720$ plg ↓.)



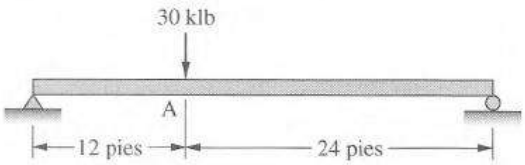
11.20 θ_A, Δ_B. $E = 200\,000$ MPa. $I = 3 \times 10^8$ mm^4.



11.21 θ_A, Δ_A. $E = 200\,000$ MPa. (*Resp.:* $\theta_A = 0.0322$ rad /, $\Delta_A = 273$ mm ↓.)

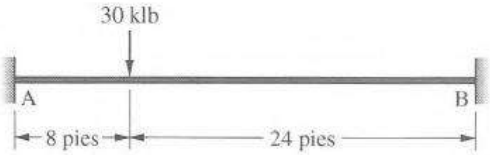


11.22 Δ_A. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 1\,500$ plg^4.

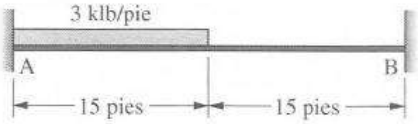


En los problemas 11.23 a 11.27, calcule los momentos de empotramiento para las vigas. E e I son constantes excepto cuando se indique otra cosa.

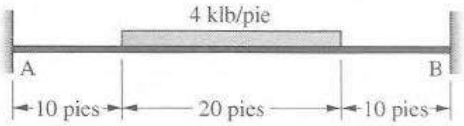
11.23 (*Resp.:* $M_A = -135$ klb-pie, $M_B = -45$ klb-pie.)



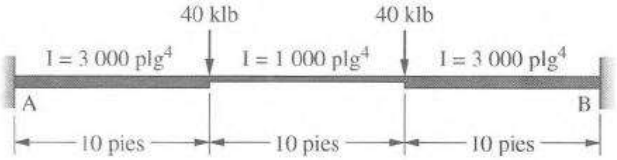
11.24



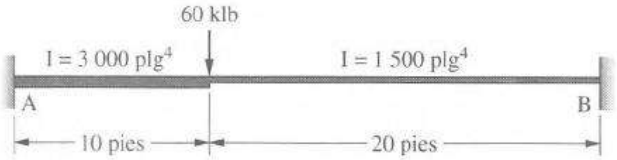
11.25 (*Resp.:* $M_A = M_B = -366.8$ klb-pie.)



11.26



11.27 (*Resp.:* $M_A = -323.5$ klb-pie, $M_B = -105.6$ klb-pie.)



Capítulo 12

Deflexiones y cambios angulares usando métodos geométricos (continuación)

12.1 EL MÉTODO DE LOS PESOS ELÁSTICOS

Un estudio cuidadoso del procedimiento usado al aplicar los teoremas del área del diagrama de momentos revelará un método más simple y práctico para calcular las pendientes y deflexiones en la mayoría de las vigas. Para la revisión de este procedimiento se consideran la viga y el diagrama M/EI de la figura 12.1.

Si A es igual al área del diagrama M/EI, la deflexión de la tangente en R desde la tangente en L es igual a Ay, y el cambio de pendiente entre las dos tangentes es A.

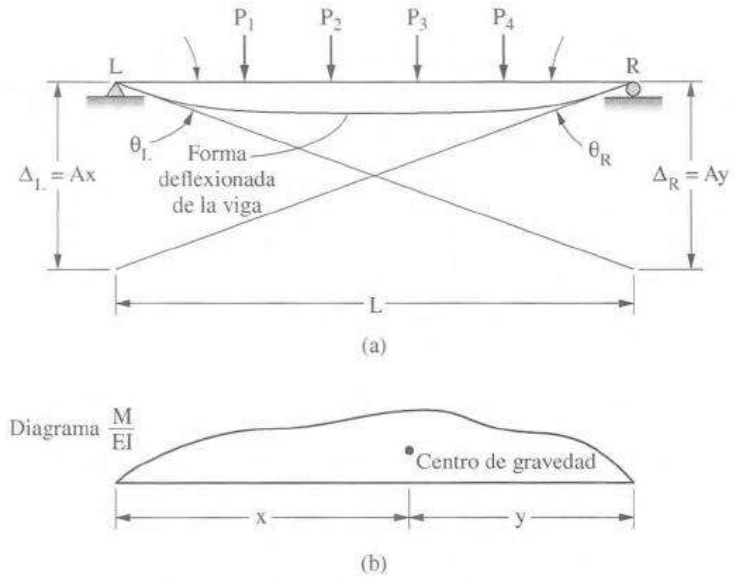


Figura 12.1 Viga para analizar el método de los pesos elásticos.

Se carga una viga imaginaria con el diagrama M/EI, como se muestra en la figura 12.2, y se determinan las reacciones R_L y R_R, que son iguales a Ay/L y Ax/L, respectivamente.

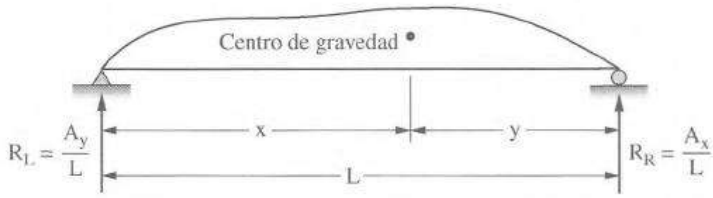


Figura 12.2 Reacciones de la viga cargada con el diagrama M/EI.

En la figura 12.2 las pendientes de las tangentes a la curva elástica en cada extremo de la viga (θ_L y θ_R) son iguales a las deflexiones entre las tangentes en cada extremo divididas por la longitud del claro, o sea:

$$\theta_L = \frac{\Delta_R}{L} \quad \theta_R = \frac{\Delta_L}{L}$$

Se encontró antes que los valores de Δ_L y Δ_R son iguales a A_y y A_x, respectivamente, y al sustituirlas en las expresiones anteriores obtenemos:

$$\theta_L = \frac{A_y}{L} \quad \theta_R = \frac{A_x}{L}$$

Las pendientes de extremo son exactamente las mismas que las reacciones para la viga en la figura 12.2. En cualquiera de los dos extremos de la viga ficticia la fuerza cortante es igual a la reacción, y por ello a la pendiente en la viga real. Experimentos adicionales mostrarán que la fuerza cortante en cualquier punto de la viga cargada con el diagrama M/EI es igual a la pendiente en ese punto de la viga real.

Un razonamiento similar puede hacerse respecto al cálculo de deflexiones, y se encontrará que la deflexión en cualquier punto de la viga real es igual al momento en ese punto de la viga ficticia. En detalle, los dos teoremas de los pesos elásticos pueden enunciarse como sigue:

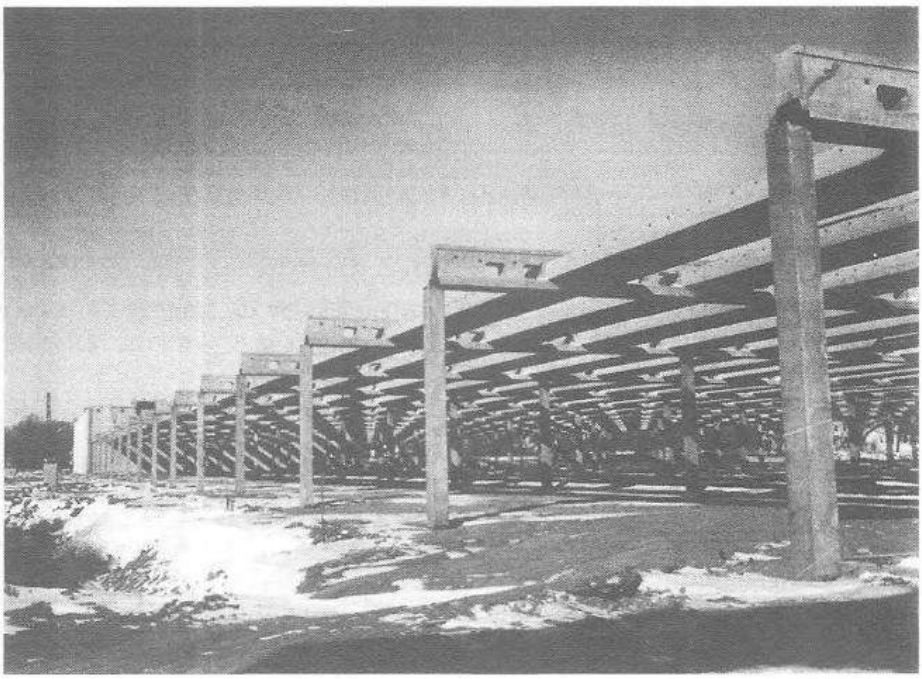
1. *La pendiente de la curva elástica de una viga simple en un punto, medida con respecto a una cuerda entre los apoyos, es igual a la fuerza cortante en ese punto si la viga se carga con el diagrama M/EI.*
2. *La deflexión de la curva elástica de una viga simple en un punto, medida con respecto a una cuerda entre los apoyos, es igual al momento en ese punto si la viga se carga con el diagrama M/EI.*

12.2 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS PESOS ELÁSTICOS

El método de los pesos elásticos en su forma presente es aplicable sólo a vigas simplemente apoyadas en cada extremo. Se encontrará al usar el método que las deflexiones máximas en la viga real ocurren en puntos de fuerza cortante cero en la viga imaginaria. El razonamiento es el mismo que se presentó para los diagramas de fuerza cortante y momento en el capítulo 5, donde se encontró que los momentos máximos ocurren en puntos de fuerza cortante cero.

No hemos considerado el tema de la convención de signos en los métodos de los pesos elásticos. El estudio de las fuerzas cortantes y momentos en la viga ficticia revela las direcciones de

las pendientes y deflexiones. Una fuerza cortante positiva en la viga ficticia muestra que el lado izquierdo está siendo empujado hacia arriba respecto al lado derecho, o que la viga cae de izquierda a derecha. En forma similar, un momento positivo indica una deflexión hacia abajo.



Concreto precolado, Cocinas de Sara Lee, Inc. Deerfield, Illinois. (Cortesía de la Portland Cement Association.)

Los ejemplos 12.1 a 12.3 ilustran la aplicación de los pesos elásticos.

EJEMPLO 12.1

Determine la pendiente y la deflexión bajo la carga de 30 klb en la viga de la figura 12.3 si $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2 e $I = 1\,500$ plg^4.

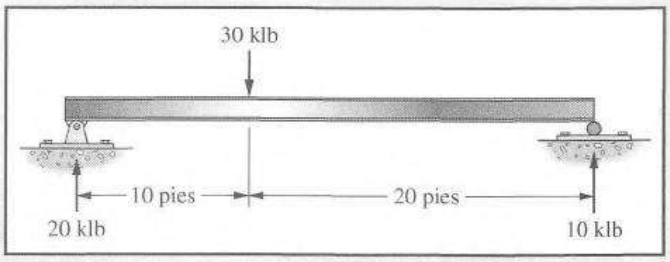
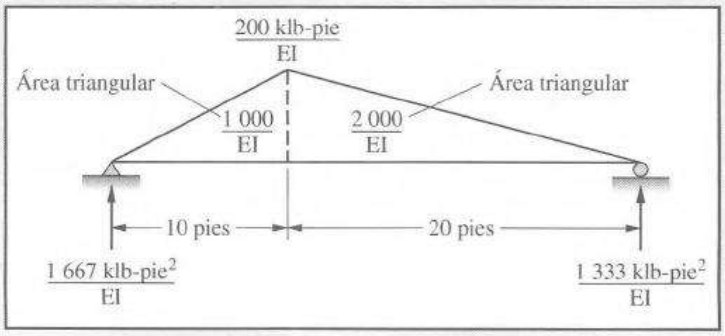


Figura 12.3

Solución. Dibujamos el diagrama M/EI y lo cargamos en la viga real y calculamos las reacciones de la viga para esa carga.



$$\theta_{30} = \text{"fuerza cortante" bajo la carga de 30 klb} = \frac{1\,667 - 1\,000}{EI}$$

$$= \frac{667\,\text{klb-pie}^2}{EI} = \frac{(667)(144)(1\,000)}{(29 \times 10^6)(1\,500)} = 0.00221\,\text{radianes} \setminus$$

$$\Delta_{30} = \text{"momento" bajo la carga de 30 klb} = \frac{(1\,667)(10) - (1\,000)(3.33)}{EI}$$

$$= \frac{13.333\,\text{klb-pie}^3}{EI} = \frac{(13.333)(1\,728)(1\,000)}{(29 \times 10^6)(1\,500)} = 0.477\,\text{plg} \downarrow \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 12.2

Determine la deflexión en el centro de la viga mostrada en la figura 12.4.

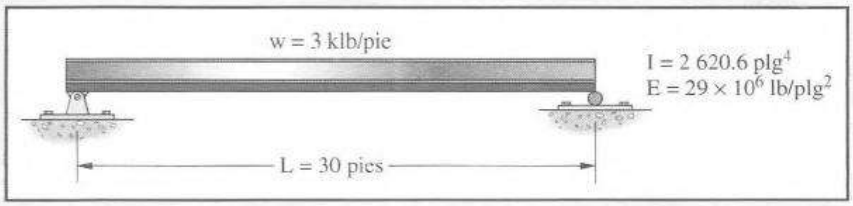
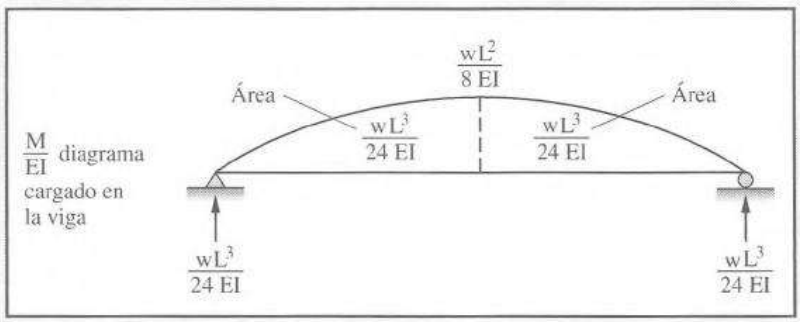


Figura 12.4

Solución.



Deflexión en el centro de la viga:

$$= \text{momento}_{\text{centro del claro}} = \left(\frac{wL^3}{24EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{wL^3}{24EI}\right)\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\Delta_{\text{centro del claro}} = \frac{5wL^4}{384EI} = \frac{(5)(3000/12)(30 \times 12)}{(384)(29 \times 10^6)(2\,620.6)} = 0.719\,\text{plg} \downarrow \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 12.3

Determine la deflexión máxima en la viga de la figura 12.3 que se repite en la figura 12.5 y está cargada con su diagrama M/EI.

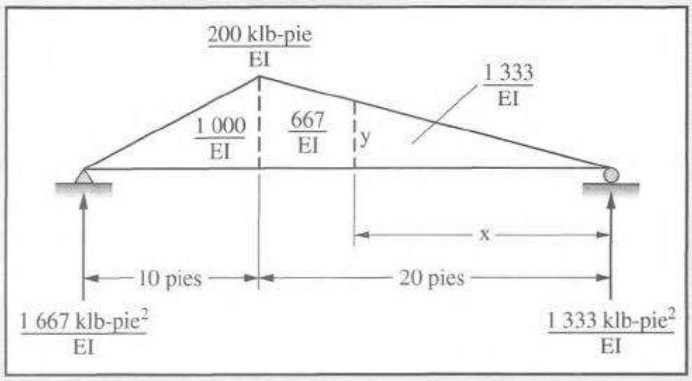


Figura 12.5

Solución. La deflexión máxima ocurre cuando la "fuerza cortante" en la viga real cargada con el diagrama M/EI es igual a cero. Obviamente este punto está situado en algún lado a mano derecha a 20 pies de la viga a una distancia x desde el apoyo derecho. El valor de x puede determinarse como sigue observando que la ordenada y, mostrada en la figura 12.5, puede determinarse por proporciones en términos de x.

$$\frac{y}{200} = \frac{x}{20}$$
$$y = 10x$$

El área del diagrama M/EI a la derecha

$$= \left(\frac{1}{2}y\right)(x) = \left(\frac{1}{2}\right)(10x)(x) = 1\,333$$
$$5x^2 = 1\,333$$
$$x = 16.33 \text{ pies}$$

Tomando momentos a la derecha de y (podríamos trabajar a la izquierda pero es ligeramente más complicado).

$$= \frac{(1\,333)(16.33) - (1\,333)\left(\frac{16.33}{3}\right)}{EI}$$
$$= \frac{14.512 \text{ klb-pie}^3}{EI} = \frac{(14.512)(1\,728)(1\,000)}{(29 \times 10^6)(1\,500)}$$
$$\Delta_{máx} = 0.576 \text{ plg} \downarrow \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 12.4

Calcule la deflexión en el centro del claro para la viga simple mostrada en la figura 12.6.

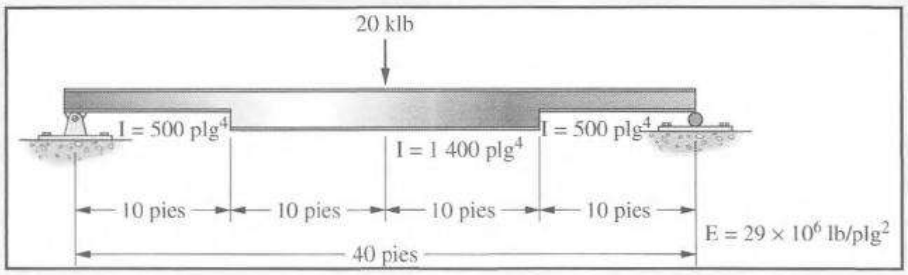
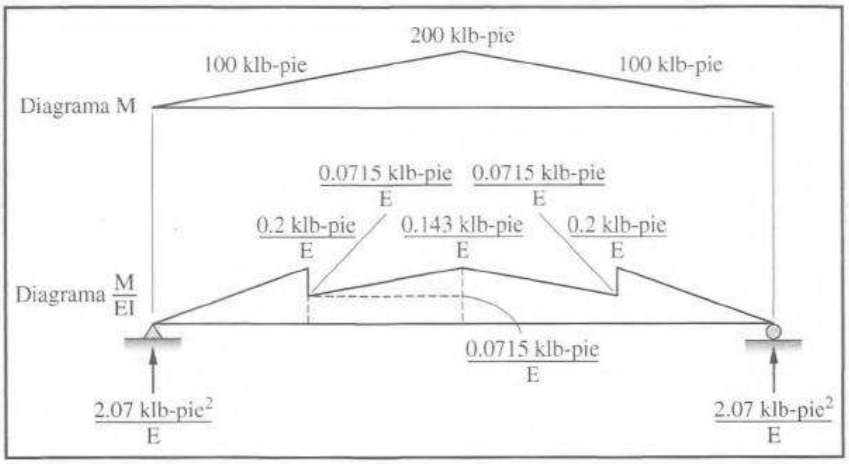


Figura 12.6

Solución. El momento de inercia es mayor a la mitad de esta viga, donde los momentos flexionantes son mayores que lo que son más cerca de los extremos de la viga. En consecuencia el diagrama M/EI debe reflejar este hecho. Por lo tanto, en la solución el valor numérico de I de 1 400 plg^4 se divide entre los momentos a lo largo de la parte de 20 pies de la viga y la I de 500 plg^4 se divide entre los momentos a lo largo de las secciones en los extremos de 10 pies. El resto de los cálculos se manejan exactamente como se hizo para los miembros antes considerados.



$$\Delta_{\text{centro del claro}} = \left(\frac{2.07}{E}\right)(20) - \left(\frac{1}{2}\right)(10)\left(\frac{0.2}{E}\right)(13.33) - (10)\left(\frac{0.0715}{E}\right)(5)$$
$$- \left(\frac{1}{2}\right)(10)\left(\frac{0.0715}{E}\right)(3.33)$$
$$= \frac{23.3}{E} = \frac{(23.3)(1\,728)(1\,000)}{29 \times 10^6} = 1.39 \text{ plg} \downarrow \quad \blacksquare$$

12.3 LIMITACIONES DEL MÉTODO DEL PESO ELÁSTICO

El método de los pesos elásticos fue desarrollado para vigas simples, y en su forma presente no funcionará para vigas en voladizo, vigas con voladizos, vigas empotradas y vigas continuas. Sin embargo, aprenderemos en las siguientes pocas páginas, que al hacer cambios muy sencillos a los apoyos de los miembros, sin incluir aquéllos para vigas simplemente apoyadas, podemos hacer que el método trabaje para esas otras vigas tan bien como lo hace para las vigas simplemente apoyadas.

Para mostrar los cambios en los apoyos que deben hacerse en una viga en voladizo para hacer que trabaje este método revisado, los teoremas del área de momentos se usan para determinar la pendiente y deflexión correctas en la viga uniformemente cargada en voladizo de la figura 12.7.

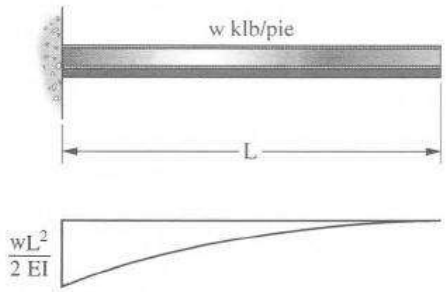


Figura 12.7 Viga en voladizo cargada con el diagrama M/EI para una carga uniforme

$$\theta_B = \left(\frac{1}{3}\right)(L)\left(\frac{wL^2}{2EI}\right) = \frac{wL^3}{6EI}$$

$$\Delta_B = \left(\frac{1}{3}\right)(L)\left(\frac{wL^2}{2EI}\right)\left(\frac{3}{4}L\right) = \frac{wL^4}{8EI}$$

Si se usara el método del peso elástico para encontrar la pendiente y la deflexión en los extremos de la misma viga, el resultado serían pendientes y deflexiones de cero en el extremo libre y $wl^3/6EI$ y $wl^4/24EI$ en el empotramiento, como se muestra en la figura 12.8.

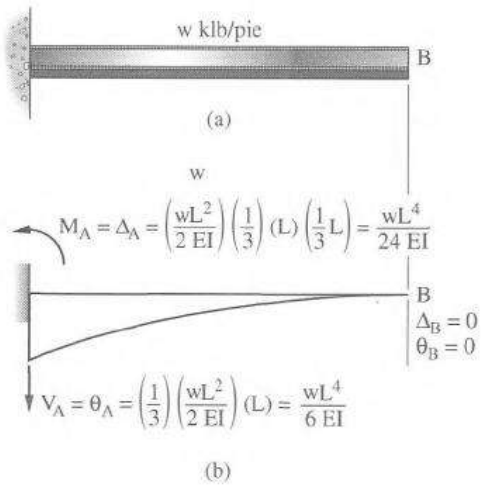


Figura 12.8 Pendiente y deflexión usando el método de los pesos elásticos.

La pendiente y la deflexión en el empotramiento en A deben ser cero; sin embargo, la aplicación de los pesos elásticos a la viga da fuerza cortante y momento, indicando falsamente pendiente y deflexión.

Si el empotramiento de la viga se mueve al extremo libre y la viga resultante se carga con el diagrama M/EI, las fuerzas cortantes y los momentos corresponderían exactamente a las pendientes y deflexiones sobre la viga real calculadas con el método del área de momentos.

12.4 MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA

Este método revisado, que se llama el método de la viga conjugada, hace uso de una viga análoga o "conjugada" para ser tratada por pesos elásticos en vez de la viga real, a la cual no se le puede aplicar correctamente. La fuerza cortante y el momento en la viga imaginaria, cargada con el diagrama M/EI, deben corresponder exactamente con la pendiente y la deflexión de la viga real.

La relación matemática correcta se obtiene para una viga simplemente apoyada si se carga con el diagrama de M/EI "tal como es". Si se aplica el método del peso elástico a otro tipo de vigas, los momentos máximos debidos a la carga M/EI ocurren en los apoyos, indicando incorrectamente que las deflexiones máximas ocurren en esos puntos. Para que los pesos elásticos sean aplicados correctamente, se debe hacer uso de vigas sustitutas, o vigas conjugadas, cuyos apoyos estén cambiados para obtener las relaciones correctas.

Las cargas y propiedades de la viga real no tienen efecto sobre la manera en que la viga conjugada está sustentada. Los únicos factores que afectan a los apoyos de la viga imaginaria son los apoyos de la viga real. Las longitudes de las dos vigas son iguales. Los siguientes párrafos presentan una discusión de cómo deben transformarse los diversos tipos de soporte de vigas en la viga conjugada para poder aplicar el método de los pesos elásticos. La prueba matemática de esas relaciones se explica en detalle en libros sobre resistencia de materiales.

Extremo libre

El extremo libre de una viga gira y se deflexiona cuando se carga la viga. La viga conjugada debe tener fuerza cortante y momento cuando ésta está cargada con el diagrama M/EI. El único tipo de soporte extremo que tiene fuerza cortante y momento es el empotramiento. *Un extremo libre en la viga real se convierte en un extremo empotrado en la viga conjugada.*

Extremo empotrado

Puede hacerse un análisis similar en orden inverso para un extremo empotrado. Ni pendiente ni deflexión pueden ocurrir en un empotramiento, por lo que no debe haber ni fuerza cortante ni momento en la viga conjugada en ese punto. *Un empotramiento en la viga real se convierte en un extremo libre en la viga conjugada.*

Apoyo simple de extremo

Un extremo simple gira pero no se deflexiona cuando la viga está cargada. La viga imaginaria tendrá fuerza cortante pero no momento en ese punto; esta situación puede ocurrir sólo en un apoyo simple. *Un apoyo simple de extremo en la viga real permanece como un apoyo simple de extremo en la viga conjugada.*

Apoyo simple interior

No hay deflexión en un soporte simple interior o en un soporte simple de extremo. Ambos pueden girar cuando se carga la viga, pero las situaciones son algo diferentes. La pendiente en un soporte simple interior es continua sobre el soporte; es decir, no ocurre un cambio súbito de pendiente. Esta

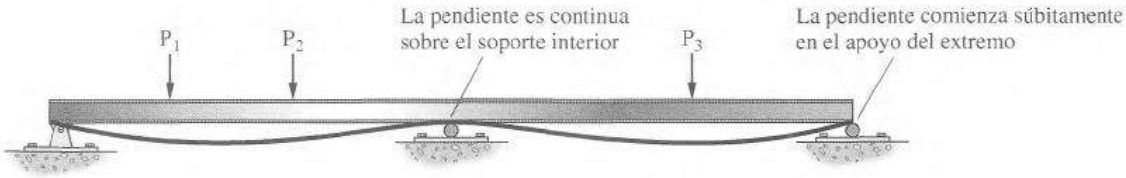


Figura 12.9 Deflexiones cualitativas para una viga continua sobre un soporte.

condición no se presenta en un soporte simple de extremo donde la pendiente aparece repentinamente, como se muestra en la curva de deflexión para la viga de la figura 12.9. Si no hay cambio de pendiente en un soporte simple interior, no podrá haber cambio de fuerza cortante en el soporte

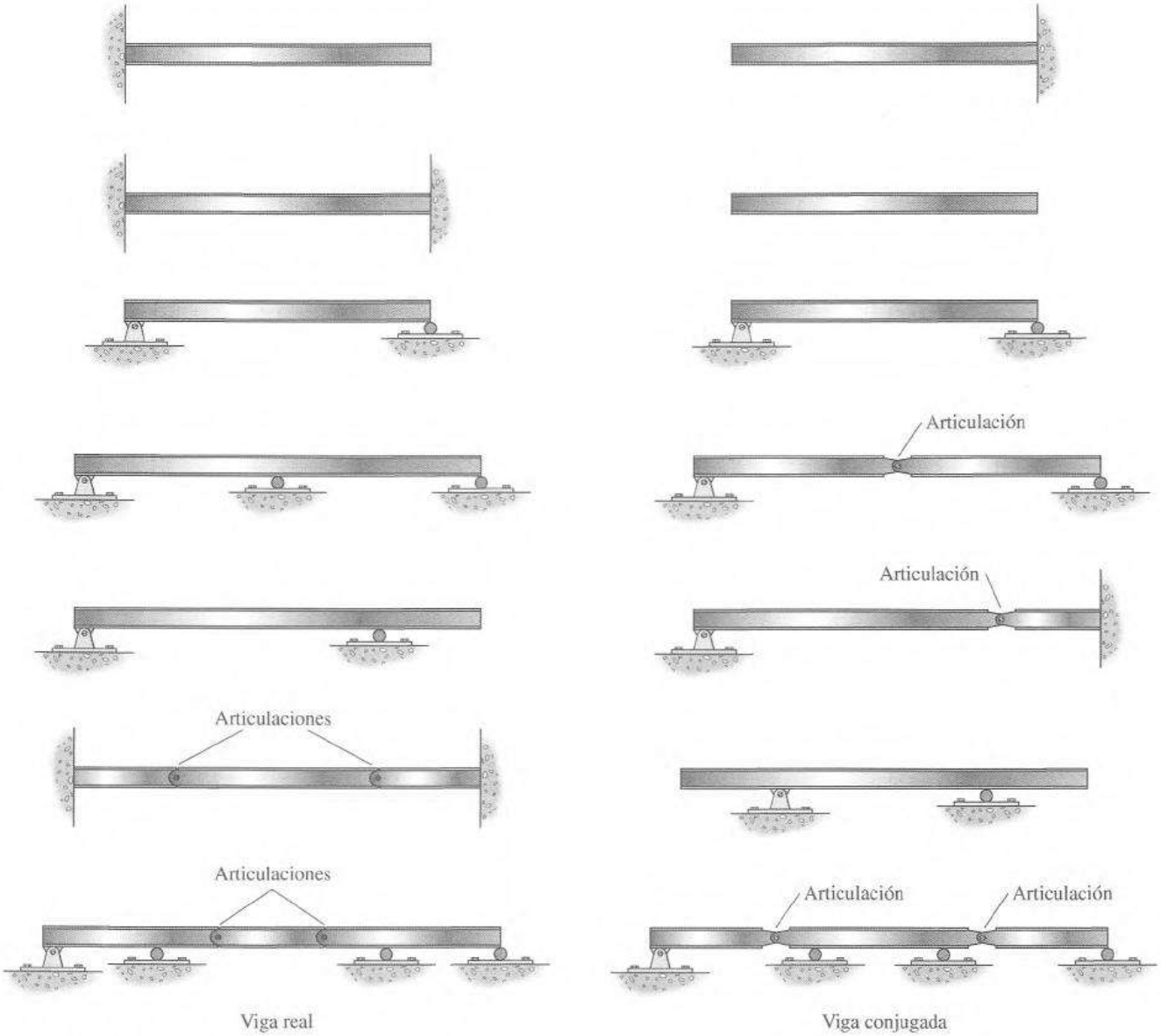


Figura 12.10 Vigas típicas y sus conjugadas.

correspondiente de la viga conjugada. Cualquier tipo de soporte externo en este punto causará un cambio en la fuerza cortante; por lo tanto, se requiere un pasador interno (o articulación sin apoyo). *Un apoyo simple interior en la viga real se vuelve una articulación interna sin apoyo en la viga conjugada.*

Articulación interna

En una articulación interna sin apoyo se tiene tanto pendiente como deflexión, lo que significa que el soporte correspondiente en la viga conjugada debe tener fuerza cortante y momento. *Una articulación interna en la viga real se convierte en un apoyo simple en la viga conjugada.*

12.5 RESUMEN DE VIGAS CONJUGADAS

La figura 12.10 muestra varios tipos de vigas comunes y sus correspondientes vigas conjugadas.

12.6 EQUILIBRIO

Las reacciones, momentos y fuerzas cortantes de la viga conjugada se calculan fácilmente por estática, ya que la viga conjugada siempre es estáticamente determinada, aun cuando la viga real sea estáticamente indeterminada. En ocasiones, la viga conjugada puede parecer completamente inestable. El ejemplo más conspicuo es la viga conjugada de la viga doblemente empotrada mostrada en la figura 12.11, que no tiene ningún soporte. Con un examen más minucioso, se ve que las áreas del diagrama M/EI están precisamente balanceadas entre cargas hacia abajo y cargas hacia arriba (áreas positivas y áreas negativas del diagrama, respectivamente) de manera que no se requiere ningún soporte. Cualesquier soportes aparentemente requeridos tendrían cero reacciones, y se proporcionan las fuerzas cortantes y momentos apropiados para coincidir con las pendientes y deflexiones verdaderas. Incluso una viga real continua sobre varios apoyos simples tiene una viga conjugada que está simplemente apoyada en sus extremos.

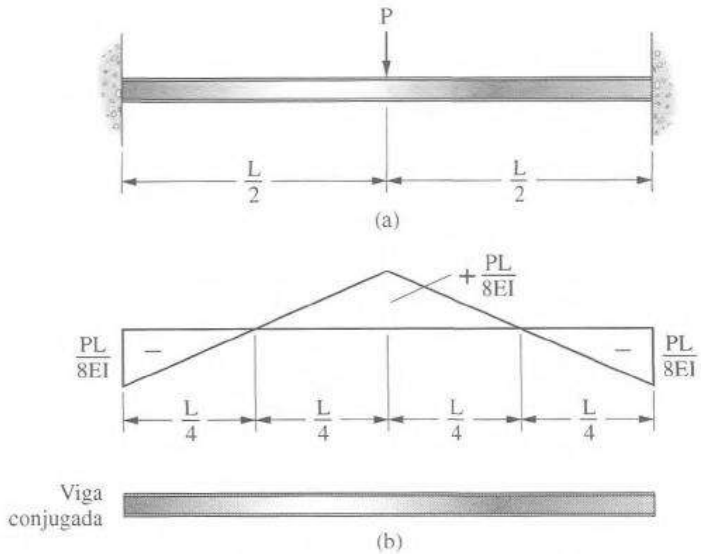


Figura 12.11 Una viga doblemente empotrada cuya conjugada parece ser inestable, pero es geométricamente estable.

12.7 RESUMEN DE RELACIONES EN VIGAS

En la figura 12.12 se presenta un resumen de las relaciones que existen entre cargas, fuerzas cortantes, momentos, cambios de pendiente, pendientes y deflexiones. Las relaciones se muestran para una viga uniformemente cargada, pero son aplicables a cualquier otro tipo de carga. Para los dos conjuntos de curvas mostradas, la ordenada de una curva es igual a la pendiente en ese punto sobre la curva siguiente. A partir de esas figuras es obvio que las mismas relaciones matemáticas que existen entra carga, fuerza cortante y momento existen también para la carga M/EI, pendiente y deflexión.

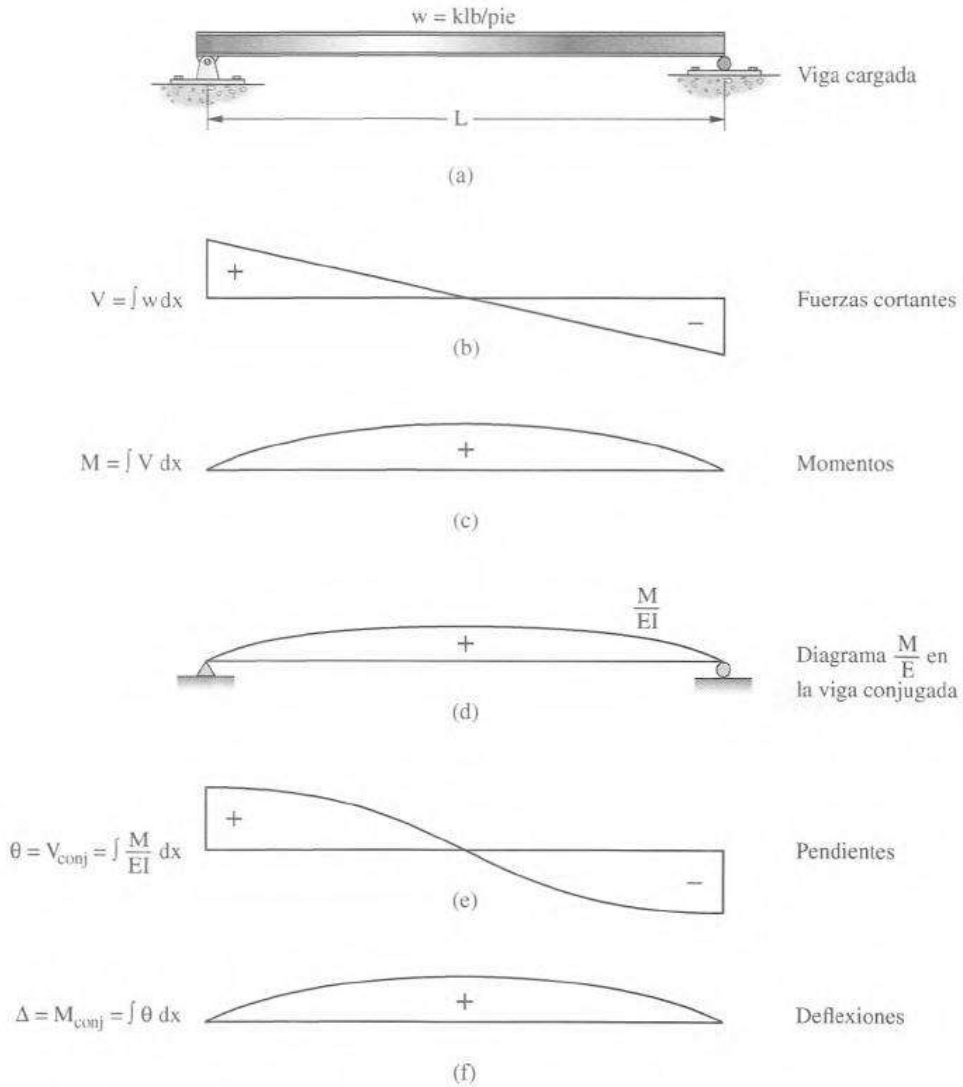


Figura 12.12 Resumen de las relaciones para el método de la viga conjugada.

12.8 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA A VIGAS

Los ejemplos 12.5 y 12.6 ilustran el cálculo de pendientes y deflexiones en vigas mediante el método de la viga conjugada. Los símbolos y unidades usadas al aplicar este método son en general los mismos que los usados en los métodos del área de momentos y de peso elástico. Las deflexiones

máximas ocurren en puntos de cero fuerza cortante sobre la estructura conjugada. Por ejemplo, el punto de cero fuerza cortante en la viga de la figura 12.11 es el centro del claro. La deflexión es la siguiente:

$$\Delta_{\text{centro del claro}} = \text{momento}_{\text{centro del claro}}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{5}{12}L\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{12}\right)$$
$$= \frac{PL^3}{192EI} \downarrow$$

EJEMPLO 12.5

Determine la pendiente y la deflexión del punto A en la viga de la figura 12.13.

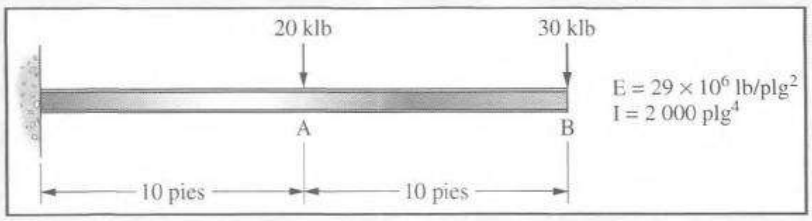
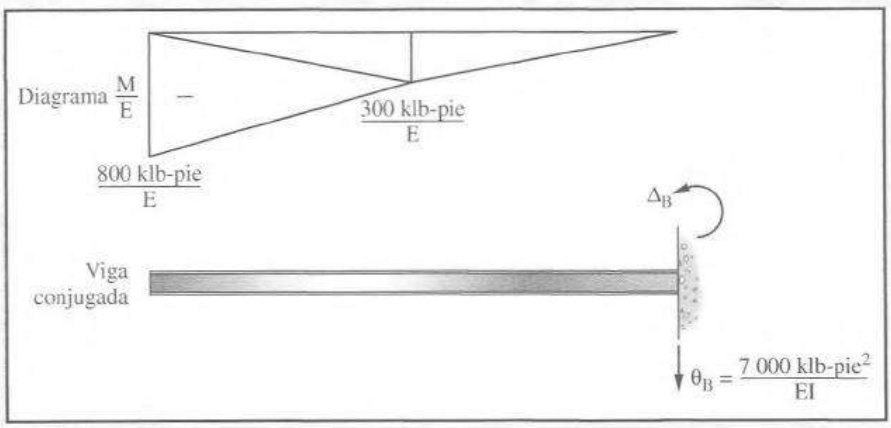


Figura 12.13

Solución.



Pendiente

$$\theta_A = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(300)(10) + \left(\frac{1}{2}\right)(800)(10)}{EI} = \frac{5\,500\ \text{klb-pie}^2}{EI}$$
$$= \frac{(5\,500)(144)(1\,000)}{(29 \times 10^6)(2\,000)} = 0.0136\ \text{rad} = 0.78° \circlearrowleft$$

Deflexión

$$\Delta_A = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(300)(10)(3.33) + \left(\frac{1}{2}\right)(800)(10)(6.67)}{EI} = \frac{31\,667\ \text{klb-pie}^2}{EI}$$
$$= \frac{(31\,667)(1\,728)(1\,000)}{(29 \times 10^6)(2\,000)} = 0.943\ \text{plg} \downarrow \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 12.6

Determine las deflexiones en los puntos A y B en la viga con voladizo mostrada en la figura 12.14.

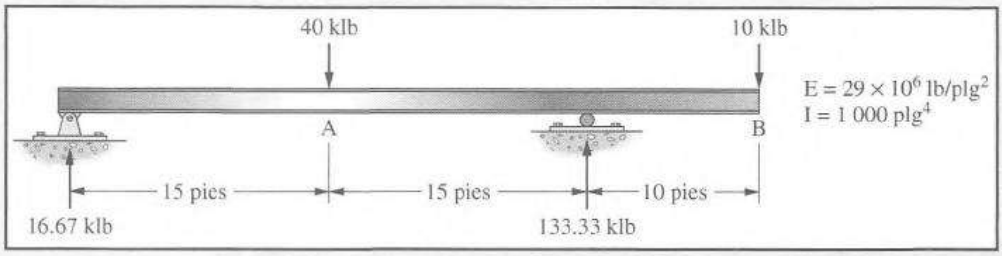
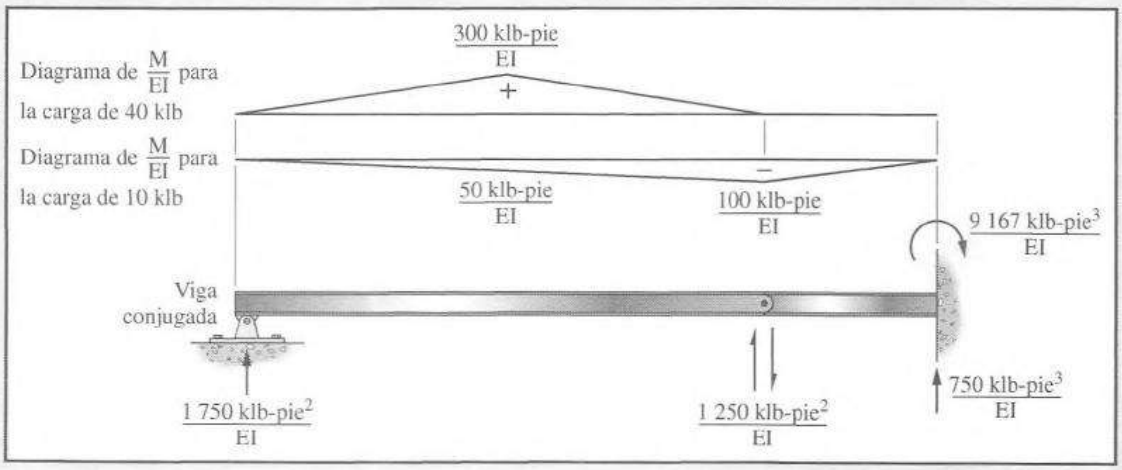


Figura 12.14

Solución. El diagrama de M/EI se traza y se coloca sobre la viga conjugada, que tiene una articulación interior. Las reacciones se determinan como lo fueron para las estructuras tipo voladizo del capítulo 4. La porción de la viga a la izquierda de la articulación se considera como una viga simple y se determinan sus reacciones. La reacción en la articulación se aplica como una carga concentrada actuando en el extremo del voladizo a la derecha de la articulación en sentido opuesto, y se determinan las reacciones en el extremo empotrado. Para simplificar las operaciones matemáticas, se dibuja un diagrama separado de momentos para cada una de las cargas concentradas.



$$\Delta_A = \frac{(1\,750)(15) - \left(\frac{1}{2}\right)(15)(300)(5) + \left(\frac{1}{2}\right)(15)(50)(5)}{EI} = \frac{16\,875 \text{ klb-pie}^3}{EI} = 1.01 \text{ plg} \downarrow$$

$$\Delta_B = \frac{-(1\,250)(10) + \left(\frac{1}{2}\right)(10)(100)(6.67)}{EI} = -\frac{9\,167 \text{ klb-pie}^3}{EI} = 0.546 \text{ plg} \uparrow \quad \blacksquare$$

12.9 DEFLEXIONES A LARGO PLAZO

Bajo cargas sostenidas el concreto seguirá deformándose por periodos prolongados. A esta deformación adicional se le llama *flujo*, o *flujo plástico*. Si se aplica una carga de compresión a

un miembro de concreto, ocurre un acortamiento inmediato o elástico. Si la carga se deja en su lugar por mucho tiempo, el miembro seguirá acortándose durante un periodo de varios años y la deformación final puede ser tanto como dos o tres veces (o más) la deformación inicial. El flujo depende de aspectos tales como humedad, temperatura, condiciones de curado, edad del concreto al momento de la carga, la relación de esfuerzo a resistencia, y otros aspectos.

Cuando se aplican cargas sostenidas a vigas de concreto reforzado, sus lados a compresión se acortarán más y más con el tiempo y el resultado será deflexiones mayores. El Instituto Estadounidense del Concreto establece que la deflexión total a largo plazo en un miembro específico debe estimarse mediante: (1) el cálculo de la deflexión instantánea causada por todas las cargas; (2) el cálculo de la parte de la deflexión instantánea que es causada por las cargas sostenidas; (3) la multiplicación de este valor por un factor empírico proveniente del Código ACI, que depende del tiempo transcurrido, y (4) la suma de este valor a la deflexión instantánea.[1]

Las cargas sostenidas para un edificio incluyen la carga muerta más algún porcentaje de la carga viva. Para un edificio de departamentos o para un edificio de oficinas tal vez sólo del 20 al 25% de la carga viva debe considerarse como que está sustentada, mientras que tanto como 70 a 80% de la carga viva de un almacén podría situarse en esta categoría.

Una discusión similar es posible para las estructuras de madera. Los miembros de madera curada sometidos a cargas a largo plazo desarrollan una deformación permanente o flecha aproximadamente igual a dos veces la deflexión calculada para cargas a corto plazo de la misma magnitud.

12.10 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA A MARCOS

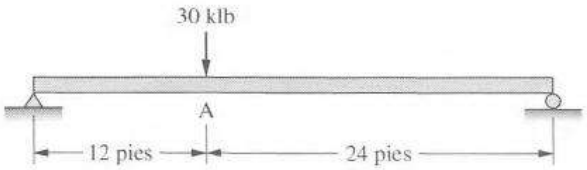
Las pendientes y las deflexiones de los marcos pueden calcularse con el método de la viga conjugada de la misma manera que se hacía con las vigas. Sin embargo, el procedimiento es más bien confuso y no se recomienda para el marco habitual. El método del trabajo virtual, que se describe en el siguiente capítulo, le parece al autor mucho más lógico y simple de aplicar.

Si el método de la viga conjugada debe aplicarse a marcos, hay varios factores que deben considerarse que no surgen en los cálculos de vigas. Éstos incluyen aspectos tales como: los efectos de los apoyos conjugados en las esquinas del marco, el desplazamiento posible del marco y el efecto de las rotaciones de los nudos del marco en las pendientes y las deflexiones en otros puntos. Como resultado de estas complicaciones, no se hace mayor referencia aquí al tema.

12.11 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

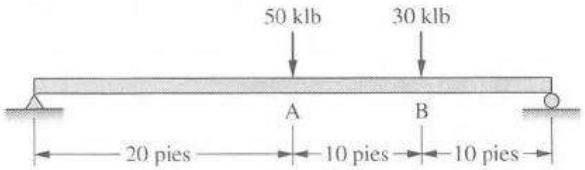
Para los problemas 12.1 al 12.21 use el método de la viga conjugada para determinar la información requerida para cada viga. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2, a menos que se diga otra cosa como en el problema 12.12.

12.1 θ_A y Δ_A. $I = 1\,500$ plg^4. (*Resp.:* $\theta_A = 0.00318$ rads \, $\Delta_A = 0.915$ plg ↓.)



12.2 Deflexión máxima en la viga del problema 12.1.

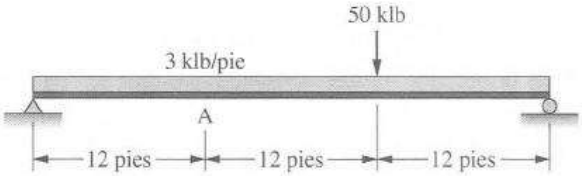
12.3 θ_A, θ_B, Δ_A y Δ_B. $I = 1\,870$ plg^4. (*Resp.:* $\theta_B = 0.0139$ rads /, $\Delta_A = 3.00$ plg ↓.)



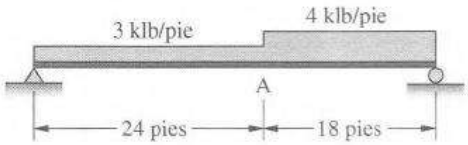
[1] Building Code Requirements for Reinforced Concrete, ACI 318-05 (Farmington Hills, Michigan: American Concrete Institute), Sect. 9.5, pp 112-113.

12.4 Deflexión máxima en la viga del problema 12.3.

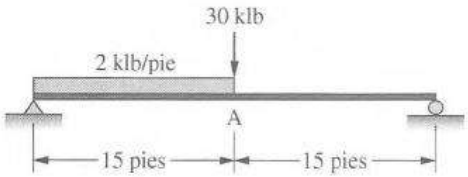
12.5 θ_A y Δ_A. I = 1 870 plg^4. (*Resp.:* θ_A = 0.0128 rads \, Δ_A = 2.89 plg ↓.)



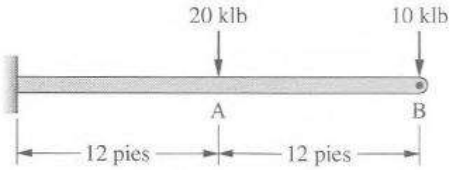
12.6 θ_A y Δ_A. I = 2 170 plg^4.



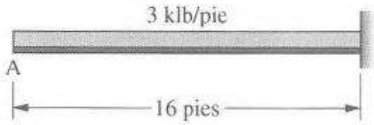
12.7 θ_A y Δ_A. I = 1 750 plg^4. (*Resp.:* θ_A = 0.000399 rads /, Δ_A = 0.934 plg ↓.)



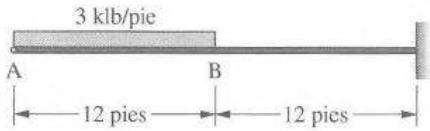
12.8 Δ_A y Δ_B. I = 1 600 plg^4.



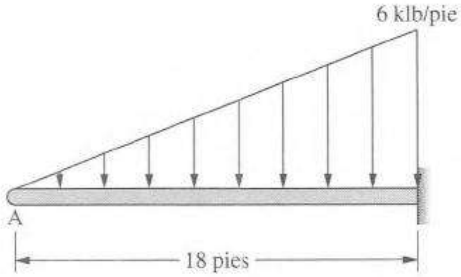
12.9 θ_A y Δ_A. I = 1 250 plg^4. (*Resp.:* θ_A = 0.00814 rads /, Δ_A = 1.17 plg ↓.)



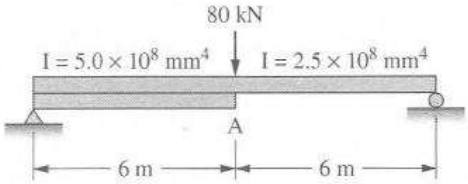
12.10 θ_A, θ_B, Δ_A y Δ_B. I = 1 100 plg^4.



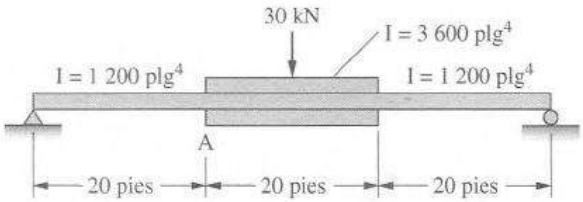
12.11 θ_A y Δ_A. I = 513 plg^4. (*Resp.:* θ_A = 0.0141 rads /, Δ_A = 2.44 plg ↓.)



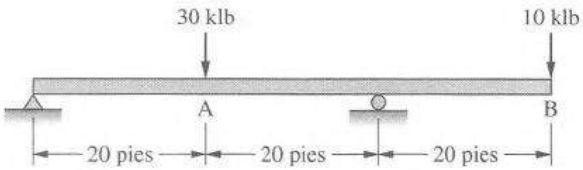
12.12 θ_A y Δ_A. E = 200 000 MPa. Los valores de I se muestran en la figura.



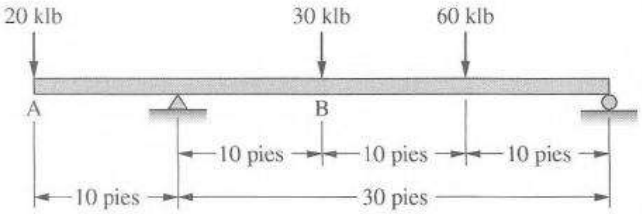
12.13 θ_A y Δ_A. Los valores de I se muestran en la figura. (*Resp.:* θ_A = 0.00517 rads \, Δ_A = 3.56 plg ↓.)



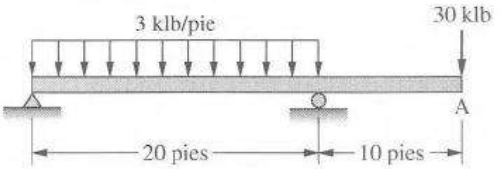
12.14 θ_A y Δ_B. I = 1 650 plg^4.



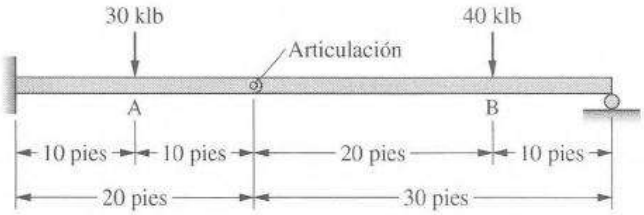
12.15 θ_A, θ_B, Δ_A y Δ_B. I = 2 250 plg^4. (*Resp.:* θ_A = 0.00294 rads \, Δ_B = 0.677 plg ↓.)



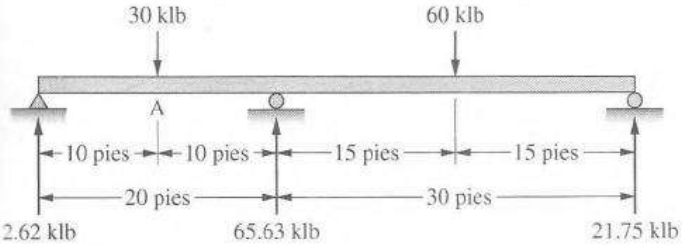
12.16 θ_A y Δ_B. $I = 1\,800$ plg^4.



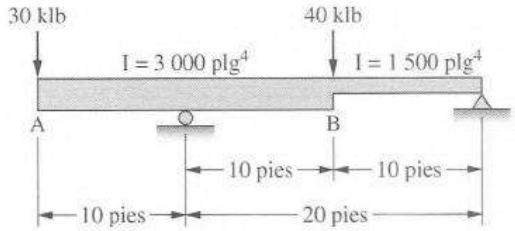
12.17 θ_A, θ_B, Δ_A y Δ_B. $I = 1\,650$ plg^4. (*Resp.:* $\theta_B = -0.00875$ rads /, $\Delta_A = 0.763$ plg ↓.)



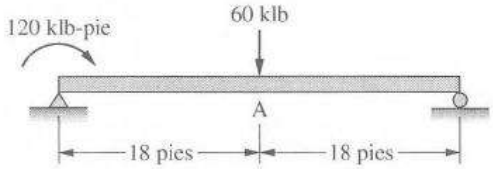
12.18 θ_A y Δ_B. Reacciones dadas. $I = 2\,690$ plg^4.



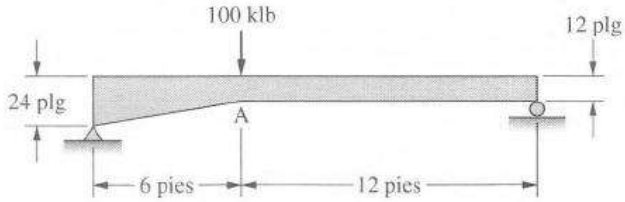
12.19 θ_A, θ_B, Δ_A y Δ_B. (*Resp.:* $\theta_A = -0.00400$ rads /, $\Delta_A = 0.381$ plg ↓.)



12.20 θ_A y Δ_A. $I = 2\,650$ plg^4.



12.21 θ_A y Δ_A. (*Resp.:* $\theta_A = 0.0248$ rad \, $\Delta_A = 2.57$ plg ↓.) (Sugerencia al preparar el diagrama M/EI: Tome la parte de la viga para la cual el peralte varía y divídalo en secciones de 2 pies. Luego calcule el valor de I al centro de esas secciones y use los valores calculados para dibujar el diagrama M/EI. El ancho del miembro es de 12 plg.)



Capítulo 13

Deflexiones y cambios angulares usando métodos de energía

13.1 INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS DE ENERGÍA

En los capítulos 11 y 12 se calcularon las deflexiones y los cambios angulares usando métodos geométricos (el método del área del diagrama de momento y el de la viga conjugada). Estos procedimientos son satisfactorios para muchas estructuras, incluidas algunas que son bastante complicadas.

En este capítulo se mostrará que las mismas deflexiones y los mismos cambios angulares pueden determinarse usando el principio de la conservación de la energía. Se presentarán dos métodos de energía: el de trabajo virtual y el teorema de Castigliano. Estos métodos pueden resultar más convenientes que los métodos geométricos para algunas estructuras complicadas, debido a la sencillez con que pueden establecerse las expresiones que nos permiten resolver el problema. Además, los métodos de energía son aplicables a un mayor número de tipos de estructuras.

13.2 PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Antes de presentar el principio de la conservación de la energía, haremos algunos comentarios referentes al concepto de trabajo. Para esta discusión, el *trabajo* se define como el producto de una fuerza y su desplazamiento en la dirección en la que la fuerza está actuando. Si la fuerza es constante y actúa solamente en la dirección del desplazamiento, el trabajo será igual a la fuerza multiplicada por el desplazamiento total, es decir:

$$W = F\Delta$$

En muchas ocasiones prácticas, la fuerza y la deformación cambian en magnitud. En una situación semejante es necesario acumular todos los pequeños incrementos de trabajo para los que la fuerza puede suponerse constante, es decir:

$$W = \int F\, d\Delta$$

El *principio de la conservación de la energía* es la base de todos los métodos de energía. Cuando un conjunto de cargas externas se aplica a una estructura deformable, los puntos de aplicación de las cargas se mueven. El resultado es que los miembros o elementos de que consta la estructura resultan deformados. De acuerdo con el principio de la conservación de la energía, el trabajo, W_e, realizado por las cargas externas es igual al trabajo W_i realizado por las fuerzas internas que actúan sobre los elementos de la estructura. Se tiene entonces

$$W_e = W_i$$

Conforme tiene lugar la deformación de una estructura, el trabajo interno (llamado en general energía de deformación) queda almacenado dentro de la estructura como energía potencial. Si el límite elástico del material no se excede, la energía de deformación elástica será suficiente para que la estructura recupere su estado original no deformado cuando las cargas se retiren. Si una estructura está sometida a más de una carga, la energía total almacenada en la estructura será igual a la suma de las energías almacenadas en la estructura por cada una de las cargas.

Debe aclararse que el principio de la conservación de la energía es aplicable sólo cuando se aplican cargas estáticas a sistemas elásticos. Si las cargas no se aplican en forma gradual, se tendrán aceleraciones, y parte del trabajo externo será transformado en energía cinética. Si se tienen deformaciones inelásticas, parte de la energía se perderá en forma de calor.

13.3 TRABAJO VIRTUAL O MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL COMPLEMENTARIO

El principio del trabajo virtual relaciona un sistema de fuerzas en equilibrio con un sistema compatible de desplazamientos en una estructura. La palabra *virtual* significa no de hecho, sino equivalente. Por lo tanto, las cantidades virtuales que se consideran en este capítulo no existen, en un sentido real. Cuando hablamos de un desplazamiento virtual nos referimos a un desplazamiento ficticio impuesto sobre una estructura. *El trabajo efectuado por un conjunto de fuerzas reales durante un desplazamiento virtual se llama trabajo virtual.*

Veremos en el análisis siguiente que para cada teorema de trabajo virtual existe un teorema correspondiente basado en el trabajo virtual complementario. Por esto, al método se le llama a veces método del trabajo virtual complementario.

El trabajo virtual se basa en el principio de las velocidades virtuales que fue presentado por Johann Bernoulli, de Suiza, en 1717. El teorema del trabajo virtual puede enunciarse como sigue:

> *Si se aplica un desplazamiento a un cuerpo deformable que está en equilibrio bajo una carga o cargas conocidas, el trabajo externo efectuado por la carga o cargas existentes debido a este nuevo desplazamiento será igual al trabajo interno efectuado por los esfuerzos que existen en el cuerpo y que fueron causados por la carga o cargas originales.*

El método del trabajo virtual o método del trabajo complementario se llama a veces *método de la carga unitaria ficticia o simulada*. Ello se debe a que en su utilización para la solución se usa una carga unitaria ficticia.

El trabajo virtual se basa en la ley de la conservación de la energía. Para emplear esta ley en las derivaciones que siguen, es necesario hacer las siguientes suposiciones:

1. Las fuerzas internas y externas están en equilibrio.
2. El límite elástico del material no se excede.
3. Los apoyos no tienen movimiento.

Si una carga F_1 se aplica gradualmente a la barra mostrada en la figura 13.1, de manera que la carga y la deformación (o incremento en longitud) de la barra se incrementen desde cero hasta sus valores totales (F_1 y Δ_1), el trabajo externo realizado será igual a la carga promedio $F_1/2$ multiplicada por el desplazamiento total Δ_1.

$$W_e = \frac{F_1}{2}\Delta_1$$

Si una fuerza F_1, se aplica de manera gradual a la barra, ésta se alargará una cantidad Δ_1. Por lo tanto, las fuerzas que experimentan desplazamiento durante este alargamiento realizarán un trabajo externo igual a $W_e = 1/2F_1\Delta_1$, como lo muestra el área triangular sombreada con líneas diagonales en la figura 13.2.

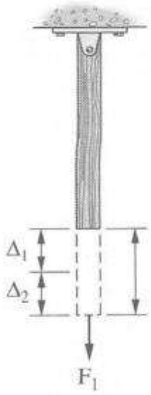


Figura 13.1 Barra recta con carga axial.

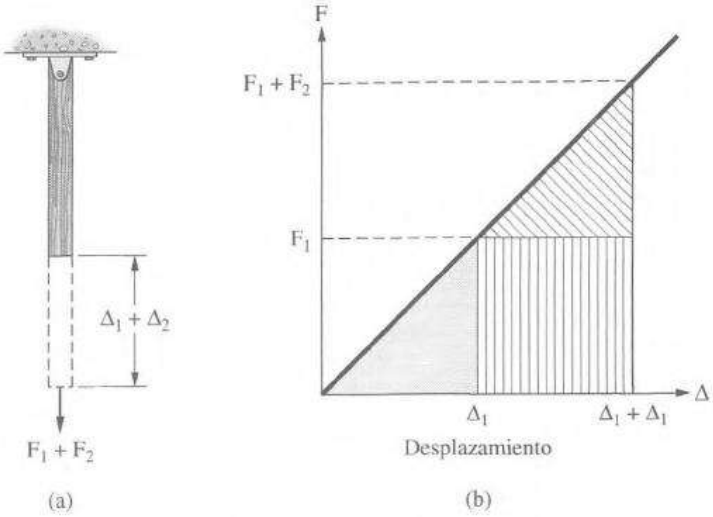


Figura 13.2 Relación fuerza-desplazamiento para una barra elástica con cargas múltiples.

Si se añade a la barra otra fuerza F_2 gradualmente aplicada causando un desplazamiento adicional Δ_2, se realizará un trabajo externo adicional. La fuerza F_1 estará presente para la totalidad del desplazamiento Δ_2 y el trabajo será $F_1\Delta_2$. Este trabajo se representa en la figura 13.2 con el rectángulo con líneas verticales. La fuerza F_2 gradualmente aplicada realizará una cantidad adicional de trabajo igual a $1/2F_2\Delta_2$. Así, el trabajo externo total es

$$W_e = \frac{1}{2}F_1\Delta_1 + F_1\Delta_2 + \frac{1}{2}F_2\Delta_2$$

Otro tipo de trabajo es el trabajo complementario W*. Está representado por el área arriba de la curva. El trabajo complementario no tiene realmente un significado físico como lo tiene el trabajo externo W_e, pero podemos ver que para una carga gradualmente aplicada

$$We + W^* = F\Delta$$

Así, W* es el complemento del trabajo W_e porque completa el rectángulo, y siempre que sea aplicable la ley de Hooke, $W_e = W^*$. Sin embargo, si el comportamiento del material de la barra no es lineal, el diagrama de carga-deformación será una curva y W_e así como W* serán desiguales, como se ve en la figura 13.3.

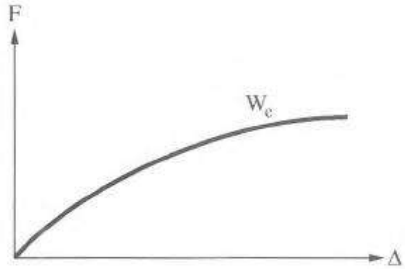


Figura 13.3 Curva carga-deformación para un miembro no lineal.

13.4 DEFLEXIONES EN ARMADURAS POR TRABAJO VIRTUAL

En esta sección se usa el método del trabajo virtual para determinar las deflexiones de la armadura, haciendo uso del procedimiento de la carga unitaria ficticia. Para determinar los desplazamientos mediante este procedimiento se consideran dos sistemas de carga. El primer sistema consiste en la estructura sometida a la fuerza o fuerzas para las cuales deben calcularse las deflexiones. El segundo sistema consiste en la estructura sometida sólo a la fuerza virtual actuando en el punto y en la dirección en que se desea el desplazamiento.

La estructura ficticia con la carga unitaria en su lugar se sujeta ahora a las deformaciones de la armadura real cuando esté sujeta a las fuerzas reales, después de lo cual se igualan el trabajo interno y el trabajo externo resultantes. Para este cálculo la única carga externa que realiza trabajo es la carga unitaria, y siempre que permanezca constante, el trabajo externo es igual a $1 \times \Delta$ en la posición y en la dirección de la carga unitaria.

En seguida necesitamos escribir una expresión para el trabajo interno. Se considerará a la armadura de la figura 13.4 para esta discusión. Las cargas P_1 a P_3 se aplican a la armadura como se muestra y generan fuerzas en las barras de la armadura. Cada barra de la armadura se acorta o se alarga dependiendo del carácter de la fuerza que actúa en ella. Estas deformaciones internas causan deflexiones externas, y cada carga externa se desplaza una corta distancia. Ahora puede enunciarse con detalle la ley de la conservación de la energía tal como se aplica a la armadura. El trabajo externo realizado por las cargas P_1 a P_3 a medida que recorren sus respectivas deflexiones de la armadura es igual al trabajo interno realizado por las fuerzas en los miembros a medida que recorren sus respectivos cambios de longitud.

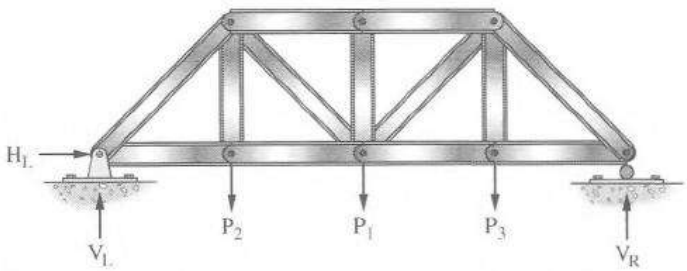


Figura 13.4 Armadura típica para la cual se calculan deflexiones.

Para escribir una expresión para el trabajo interno realizado por un miembro de la armadura, es necesario desarrollar una expresión para la deformación del miembro. Para este propósito se considera la barra de la figura 13.5.

La fuerza aplicada a la barra hace que se alargue una cantidad ΔL. EL alargamiento puede calcularse a partir de las propiedades de la barra. La deformación unitaria o alargamiento por uni-

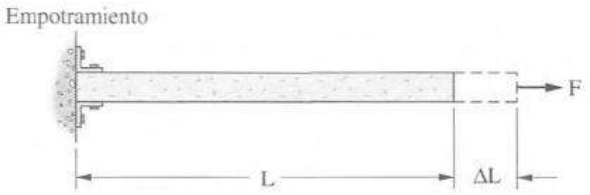


Figura 13.5

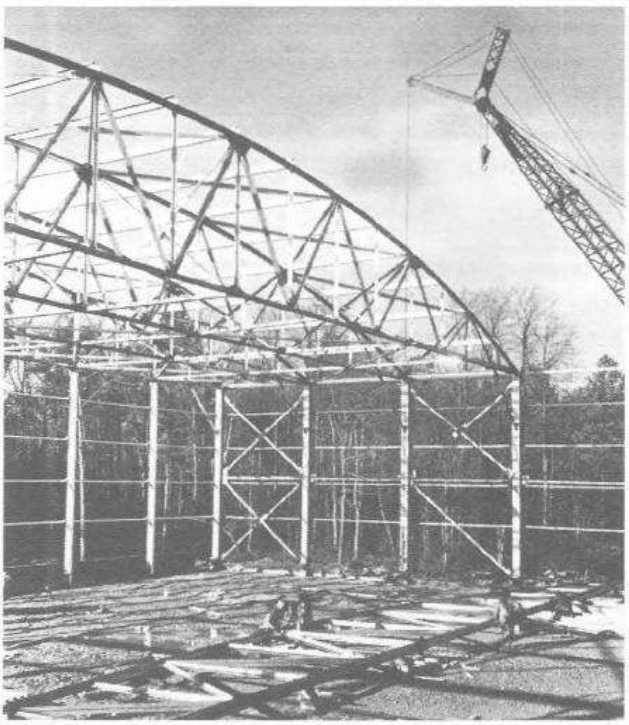
dad de longitud, ϵ, es igual al alargamiento total dividido por la longitud de la barra y también es igual a la intensidad del esfuerzo dividido por el módulo de elasticidad. Puede desarrollarse una expresión para ΔL como sigue:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

$$\Delta L = \frac{FL}{AE}$$

De acuerdo con las suposiciones anteriores, los miembros de una armadura tienen solamente fuerza axial. Estas fuerzas se denominan fuerzas F, y cada miembro cambiará en su longitud por una cantidad igual a su valor FL/AE.

Se desea desarrollar una expresión para la deflexión en un nudo en la armadura de la figura 13.4. Un medio conveniente de desarrollar una expresión de este tipo es retirar las cargas externas de la armadura, colocar una carga unitaria en la dirección deseada de la deflexión en el nudo donde se desea la deflexión, reemplazar las cargas externas, y escribir una expresión para el trabajo interno y externo realizado por la carga unitaria y la fuerza que causa cuando se reemplazan las cargas externas.



Armaduras de aluminio del hangar Reynolds en Byrd Field, Richmond, Virginia. (Cortesía de la Reynolds Metals Company.)

Las fuerzas causadas en los miembros de la armadura por la carga unitaria se llaman fuerzas μ. Éstas causan pequeñas deformaciones de los miembros y pequeñas deformaciones externas de la armadura. Cuando las cargas externas regresan a la armadura, la fuerza en cada uno de los miembros cambia por la fuerza apropiada F, y la deformación de cada miembro cambia por su valor FL/AE. La armadura se deflexiona y la carga unitaria recorre una distancia Δ. El trabajo externo realizado por la carga unitaria cuando las cargas externas regresan a la estructura pueden expresarse como sigue:

$$W_e = 1 \times \Delta$$

Internamente la fuerza μ en cada miembro recorre una distancia $\Delta L = FL/AE$. El trabajo interno realizado por todas las fuerzas μ a medida que recorren estas distancias es

$$W_i = \sum \mu \frac{FL}{AE}$$

Al igualar el trabajo interno con el externo, la deflexión en un nudo de la armadura puede expresarse como sigue:

$$\Delta = \sum \frac{F\mu L}{AE}$$

Los valores μ son en realidad adimensionales, ya que se supone que la carga unitaria es adimensional.

13.5 APLICACIÓN DEL TRABAJO VIRTUAL EN LAS ARMADURAS

Los ejemplos 13.1 y 13.2 muestran las aplicaciones del trabajo virtual en las armaduras. En cada caso se calculan inicialmente las fuerzas debidas a las cargas externas. A continuación se retiran las cargas externas y se coloca una carga unitaria en el punto y en la dirección en donde se quiere tener la deflexión (no necesariamente horizontal o vertical). Se determinan las fuerzas debidas a la carga unitaria y, por último, se encuentran los valores de $F\mu L/AE$ para cada barra de la armadura. Para simplificar el análisis, el cálculo se efectúa en forma tabular. El módulo de elasticidad se maneja como una constante hasta que se hace la suma sobre todas las barras; sólo en esa etapa del cálculo se introduce su valor numérico. Si algunas barras tienen diferentes valores de E, es necesario considerar sus valores reales o relativos en las multiplicaciones individuales. Un valor positivo de $\Sigma(F\mu L/AE)$ indica que la deflexión tiene el sentido de la carga unitaria.

EJEMPLO 13.1

Determinar las componentes horizontal y vertical de deflexión en el nudo L_2 de la armadura que se muestra en la figura 13.6. Los números en círculos son áreas, en pulgadas cuadradas. $E = 29 \times 10^3$ klb/plg^2.

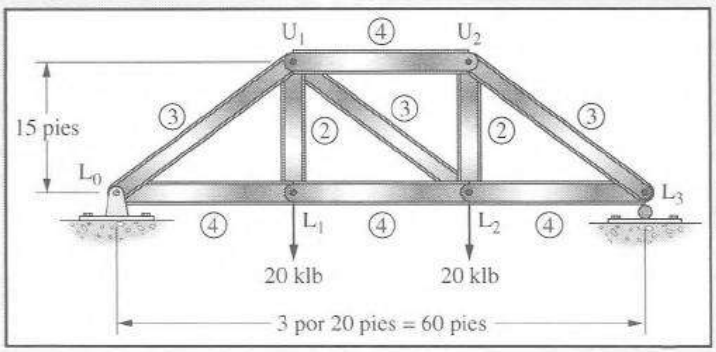
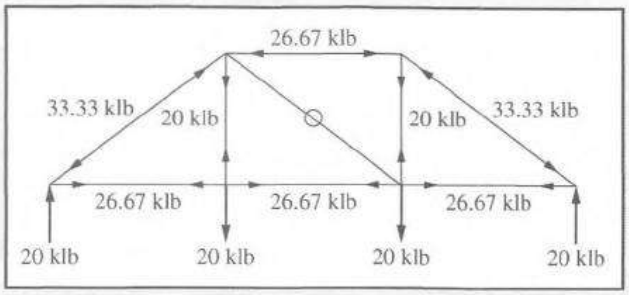


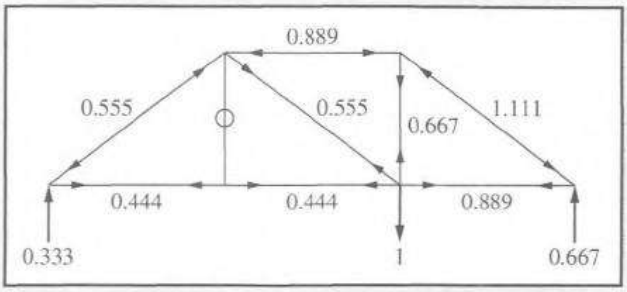
Figura 13.6

Solución.

Fuerzas debidas a cargas externas (fuerzas F)



Fuerzas debidas a una carga vertical unitaria colocada en el nudo L_2 (fuerzas μ_v)



Fuerzas debidas a una carga horizontal unitaria colocada en el nudo L_2 (fuerzas μ_H)

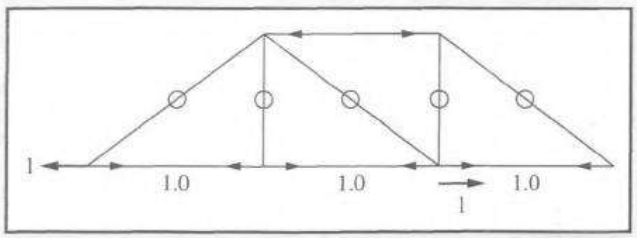


TABLA 13.1 CÁLCULO DE LOS VALORES DE $\frac{F\mu L}{A}$. (OBSÉRVESE QUE E NO SE INCLUYE HASTA EL ÚLTIMO PASO, PORQUE ES CONSTANTE PARA TODOS LOS MIEMBROS.)

Barra	L(plg)	A(plg^2)	$\frac{L}{A}$	F (klb)	μ_v	$\frac{F\mu_v L}{A}$ klb/plg)	μ_H	$\frac{F\mu_H L}{A}$ (klb/plg)
L_0L_1	240	4	60	+26.67	+0.444	+710	+1.0	+1 600
L_1L_2	240	4	60	+26.67	+0.494	+710	+1.0	+1 600
L_2L_3	240	4	60	+26.67	+0.889	+1423	+1.0	+1 600
L_0U_1	300	3	100	−33.33	−0.555	+1850	0	0
U_1U_2	240	4	60	−26.67	−0.889	+1423	0	0
U_2L_3	300	3	100	−33.33	−1.111	+3703	0	0
U_1L_1	180	2	90	+20.00	0	0	0	0
U_1L_2	300	3	100	0	+0.555	0	0	0
U_2L_2	180	2	90	+20.00	+0.667	+1201	0	0
						$\sum = +11\,020$ (klb/plg)		$\sum = +1\,600$ (klb/plg)

$$(\Delta_{L_2})_V = +\frac{11\,020}{E} = +\frac{11\,020}{29 \times 10^3} = +0.38 \text{ plg} \downarrow$$

$$(\Delta_{L_2})_H = +\frac{1\,600}{E} = +\frac{1\,600}{29 \times 10^3} = +0.055 \text{ plg} \rightarrow$$

Como ambos desplazamientos son positivos, tienen la dirección de las cargas unitarias aplicadas. ■

Centro recreativo, Colegio Lander, Greenwood, Carolina del sur. (Cortesía de Britt, Peters and Associates.)

EJEMPLO 13.2

Determinar la componente vertical de deflexión del nudo L_4 en la armadura de la figura 13.7 con el método del trabajo virtual. El número encerrado en círculo junto a cada barra es el área de la barra en pulgadas cuadradas; $E = 29 \times 10^3$ klb/plg^2.

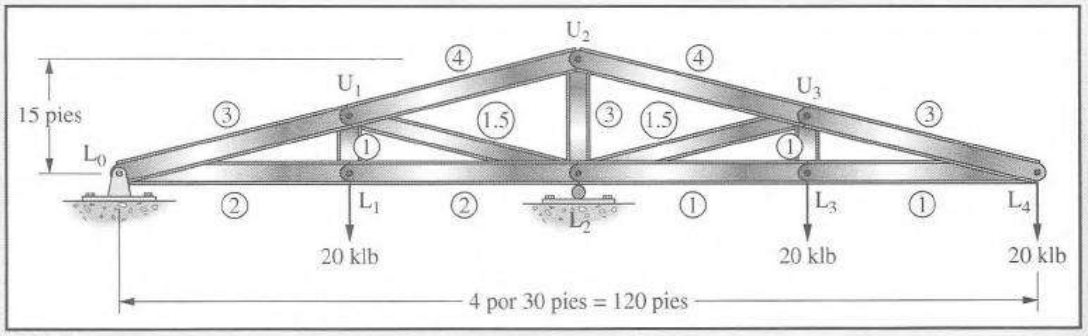
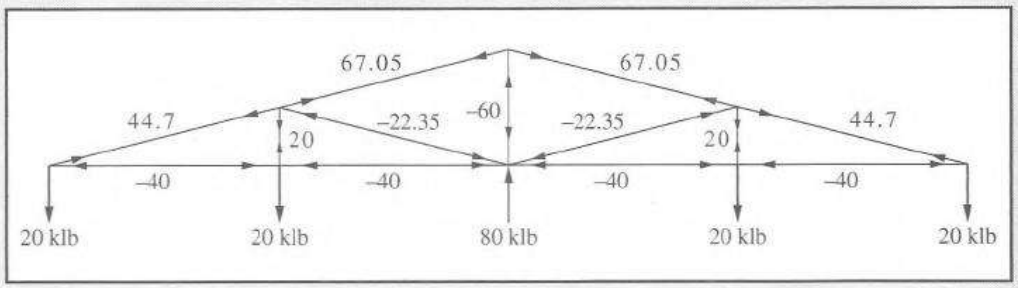


Figura 13.7

Solución. Fuerzas debidas a cargas externas (fuerzas F).



Fuerzas debidas a una carga unitaria vertical colocada en L_4 (fuerzas μ_v).

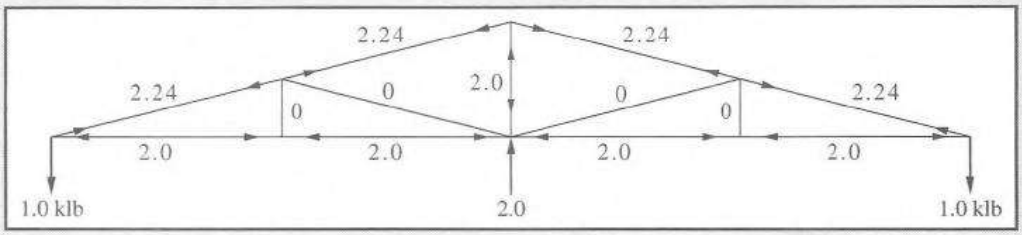


TABLA 13.2 CÁLCULO DE LOS VALORES $\frac{F\mu_v L}{A}$

Barra	L (plg)	A (plg^2)	L/A	F(klb)	μ_v (klb)	$\frac{F\mu_v L}{A}$ (klb/plg)
L_0L_1	180	2.0	90.0	−40.0	−2.0	+7 200
L_1L_2	180	2.0	90.0	−40	−2.0	+7 200
L_2L_3	180	1.0	180.0	−40	−2.0	+14 400
L_3L_4	180	1.0	180.0	−40	−2.0	+14 400
L_0U_1	202	3.0	67.3	44.7	+2.24	+6 730
U_1U_2	202	4.0	50.5	67.05	+2.24	+7 575
U_2U_3	202	4.0	50.5	67.05	+2.24	+7 575
U_3U_4	202	3.0	67.3	44.7	+2.24	+6 730
U_1L_1	90	1.0	90.0	20.0	0	0
U_1L_2	202	1.5	134.5	−22.35	0	0
U_2L_2	180	3.0	60.0	−60.0	−2.0	+7 200
L_2U_3	202	1.5	134.5	−22.35	0	0
U_3L_3	90	1.0	90.0	20.0	0	0
						+79 010

$$(\Delta_{L_4})_V = +\frac{79\,010}{E} = +2.72 \text{ plg} \downarrow \quad \blacksquare$$

13.6 CÁLCULO DE DEFLEXIONES EN VIGAS Y EN MARCOS MEDIANTE EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

La ley de la conservación de la energía se puede emplear a fin de determinar una expresión para la deflexión en un punto cualquiera de una viga o de un marco. En la siguiente derivación cada fibra de la estructura puede considerarse como una "barra" o un miembro similar a los miembros de las armaduras consideradas en las secciones precedentes. La sumatoria del trabajo interno realizado por la fuerza en cada una de las "barras" debe ser igual al trabajo externo realizado por las cargas.

Para el análisis siguiente consideraremos la viga de la figura 13.8(a). La parte (b) de la figura muestra la sección transversal de la viga. Se desea determinar la deflexión vertical Δ en el punto A de la viga, producida por las cargas externas P_1 a P_3. Si las cargas se retiraran de la viga y se colocara una carga unitaria vertical en A, se desarrollarían fuerzas y deformaciones pequeñas en las "barras", y ocurriría una pequeña deflexión en A. El reemplazo con las cargas externas causaría incrementos en las fuerzas y deformaciones de las "barras", y la carga unitaria en A se deflexionaría una cantidad adicional Δ. El trabajo interno realizado por las fuerzas de las cargas unitarias, a medida que recorren las deformaciones adicionales de la "barra", es igual al trabajo externo realizado por la carga unitaria a medida que recorre la deflexión adicional Δ.

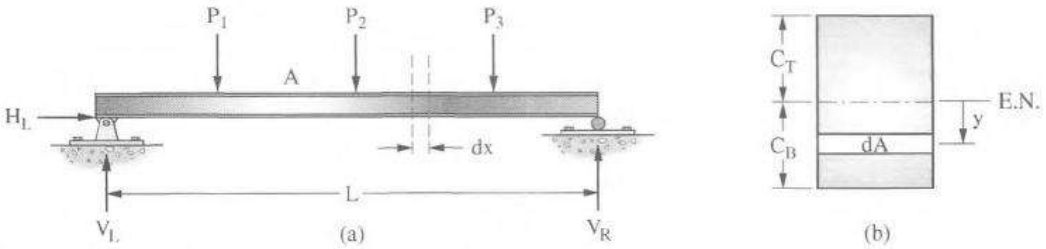


Figura 13.8 Sistema para el desarrollo del trabajo virtual de una viga.

Usamos los siguientes símbolos para escribir una expresión para el trabajo interno realizado en una longitud dx de la viga: M es el momento en cualquier sección en la viga causado por las cargas externas y m es el momento en cualquier sección en la viga causado por la carga unitaria. El esfuerzo en un área diferencial de la sección transversal de la viga, causado por la carga unitaria, puede encontrarse a partir de la ecuación de la flexión de la siguiente manera:

$$\text{fuerza en dA} = \frac{my}{I}$$

$$\text{fuerza total en dA} = \frac{my}{I}\,dA$$

El área dA tiene un espesor o longitud de dx que se deforma por ϵ dx cuando las cargas externas regresen a la estructura. La deformación es como sigue:

$$\text{esfuerzo debido a las cargas externas} = \sigma = \frac{My}{I}$$

$$\text{deformación de la longitud dx} = \epsilon\ dx = \frac{\sigma}{E}dx = \frac{My}{EI}dx$$

La fuerza total en dA debida a la carga unitaria (my/I) dA recorre esta deformación, y el trabajo que realiza es como sigue:

$$\text{trabajo en dA} = \left(\frac{my}{I}\ dA\right)\left(\frac{My}{EI}dx\right) = \frac{Mmy^2}{EI^2}\ dA\ dx$$

El trabajo total realizado en la sección transversal es igual a la sumatoria del trabajo en cada área dA en la sección transversal.

$$\text{Trabajo en una longitud dx} = \int_{C_b}^{C_t} \frac{Mmy^2}{EI^2}\, dA\, dx = \frac{Mm}{EI^2}\left(\int_{C_b}^{C_t} y^2\, dA\right) dx$$

La expresión $\int y^2\, dA$ es familiar, siendo el momento de inercia de la sección, y la ecuación se transforma en

$$\text{trabajo} = \frac{Mm}{EI}\, dx$$

Ahora es posible determinar el trabajo interno realizado en la viga completa porque es igual a la integral de 0 a L de la expresión precedente.

$$W_i = \int_0^L \frac{Mm}{EI}\, dx$$

El trabajo externo realizado por la carga unitaria a medida que recorre la distancia Δ es $1 \times \Delta$. Al igualar el trabajo externo con el trabajo interno, se obtiene una expresión para la deflexión en cualquier punto de la viga.

$$W_e = W_i$$

$$1 \times \Delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI}\, dx$$

$$\Delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI}\, dx$$

13.7 PROBLEMAS DE EJEMPLO PARA VIGAS Y MARCOS

Los ejemplos 13.3 al 13.8 muestran la aplicación del trabajo virtual a vigas y a marcos. Para aplicar el método se coloca una carga unitaria en el punto y en la dirección en que se busca la deflexión. Se escriben expresiones para M y m en toda la estructura, y los resultados se integran de 0 a L. Raramente es posible escribir una expresión para M o una expresión para m que sea correcta para todas las partes de la estructura. Como ejemplo, considere la viga de la figura 13.9 y busquemos la deflexión debajo de P_2. Se coloca una carga unitaria en este punto de la figura. Las reacciones V_L y V_R se deben a las cargas P_1 y P_2, mientras que V_L y V_R se deben a la carga unitaria.

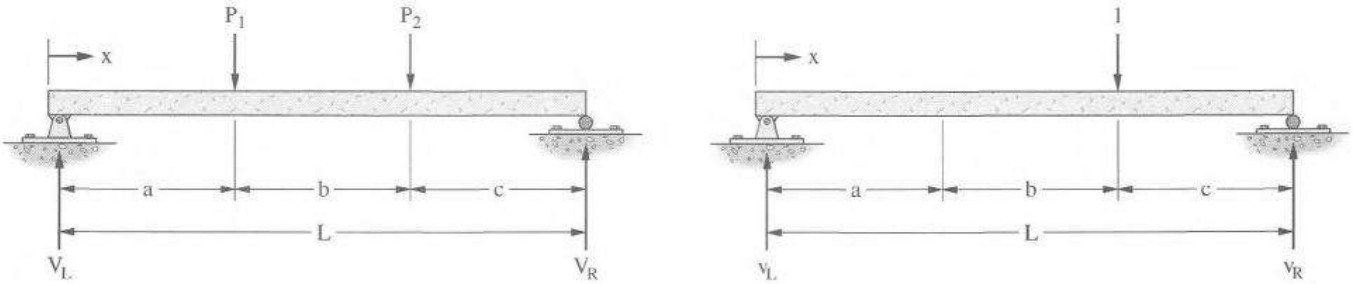


Figura 13.9

Los valores de M y m *se escriben con respecto a la distancia* x desde el apoyo izquierdo. Desde el apoyo izquierdo a la carga unitaria m puede representarse con una expresión, $v_L x$, pero la expresión para M no es constante para la distancia total. Su valor es $V_L x$ desde el apoyo izquierdo a P_1 y $V_L x - P_1(x - a)$ de P_1 a P_2. La integración se hará de 0 a a para $V_L x$ y $v_L x$, y de a a a + b para $V_L x - P_1(x - a)$ y $v_L x$. Las expresiones para momentos para todas las partes de la viga se muestran en seguida. Se usa el apoyo izquierdo como el origen de x.

Para x = 0 a a:

$$M = V_L x$$
$$m = v_L x$$

Para x = a a a + b

$$M = V_L x - P_1(x - a)$$
$$m = v_L x$$

Para x = a + b a L

$$M = V_L x - P_1(x - a) - P_2(x - a - b)$$

$$m = v_L x - 1(x - a - b)$$

$$\Delta = \int_0^a \frac{Mm}{EI}\,dx + \int_a^{a+b} \frac{Mm}{EI}\,dx + \int_{a+b}^{L} \frac{Mm}{EI}\,dx$$

Se usa un signo positivo para un momento que causa tensión en las fibras inferiores de la viga. Si el resultado de la integración es positivo, la dirección usada para la carga unitaria es la dirección de la deflexión.

EJEMPLO 13.3

Determinar la deflexión en el punto A para la viga mostrada en la figura 13.10 mediante trabajo virtual. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 5\,000$ plg^4.

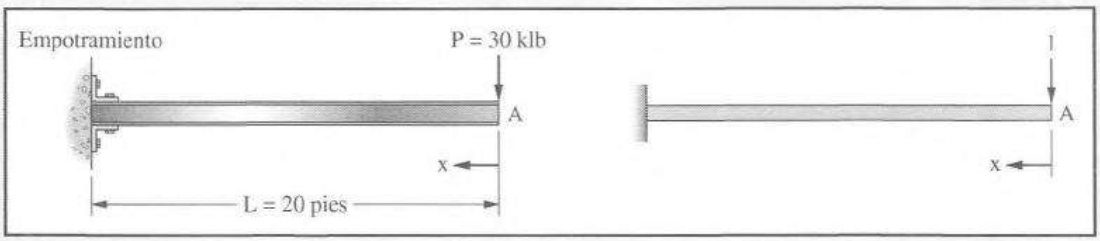


Figura 13.10

Solución. Se escribe una expresión para M (el momento debido a la carga de 30 klb) en cualquier punto a una distancia x desde el extremo libre. Se coloca una carga unitaria en el extremo libre y se escribe una expresión para el momento m que causa en cualquier punto.

El origen de x puede seleccionarse en cualquier punto siempre que se use el mismo punto para escribir M y m para esa parte de la viga.

Para x 0 = 0 a 20 pies

$$M = -Px$$

$$m = -1x$$

$$\Delta_A = \int_0^L \frac{Mm}{EI}\,dx = \int_0^L \frac{(-Px)(-1x)}{EI}\,dx = \int_0^L \frac{Px^2}{EI}\,dx$$

$$= \frac{P}{EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$= \frac{(30\,000)(20 \times 12)^3}{(3)(29 \times 10^6)(5\,000)} = 0.955 \text{ plg} \downarrow \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 13.4

Determinar la deflexión en el punto A de la viga mostrada en la figura 13.11. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 5\,000$ plg^4.

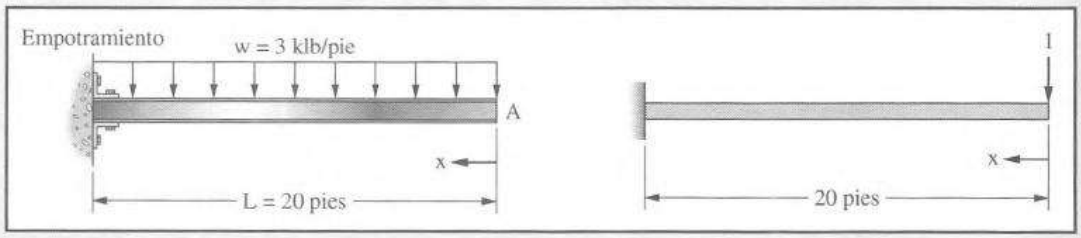


Figura 13.11

Solución.

Para x = 0 a 20 pies

$$M = -(w)(x)\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{wx^2}{2}$$

$$m = -1x$$

$$Mm = +\frac{wx^3}{2}$$

$$\Delta_A = \int_0^L \frac{Mm}{EI}\,dx = \int_0^L \frac{wx^3}{2EI}\,dx$$

$$= \frac{w}{2EI}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^L = \frac{wL^4}{8EI}$$

$$= \frac{(3\,000/12)(20 \times 12)^4}{(8)(29 \times 10^6)(5\,000)} = 0.714 \text{ plg} \downarrow \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 13.5

Determinar la deflexión en el punto B en la viga mostrada en la figura 13.12. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 1\,000$ plg^4.

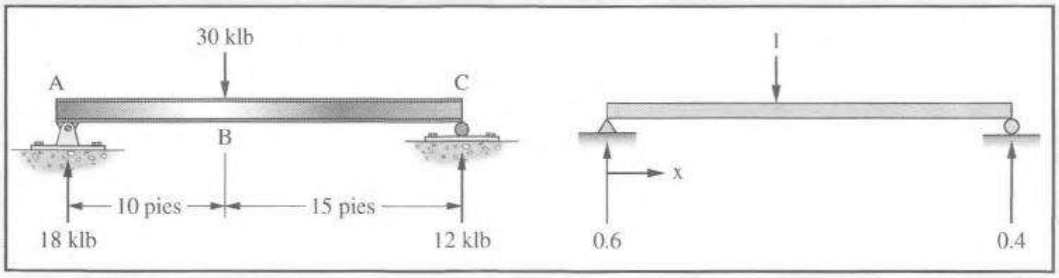


Figura 13.12

Solución. Es necesario escribir una expresión para M de A a B y otra de B a C. Lo mismo ocurre para m. Frecuentemente es posible simplificar las matemáticas usando distintos orígenes de x para diferentes secciones de la viga. Se habrían obtenido los mismos resultados finales si para las expresiones M y m de B a C se hubiera tomado el origen en C.

Para x = 0 a 10 pies:

$$M = 18x$$
$$m = 0.6x$$
$$Mm = 10.8x^2$$

Para x = 10 pies a 25 pies:

$$M = 18x - (30)(x - 10) = -12x + 300$$

$$m = 0.6x - 1(x - 10) = -0.4x + 10$$

$$Mm = +4.8x^2 - 240x + 3\,000$$

$$\Delta_B = \int_0^{10} \frac{10.8x^2}{EI}\,dx + \int_{10}^{25} \frac{(4.8x^2 - 240x + 3\,000)}{EI}\,dx$$

$$= \frac{1}{EI}[3.6x^3]_0^{10} + \frac{1}{EI}[1.6x^3 - 120x^2 + 3\,000x]_{10}^{25}$$

$$= \frac{3\,600}{EI} + \frac{25\,000 - 19\,600}{EI}$$

$$= \frac{9\,000 \text{ klb-pie}^3}{EI} = \frac{(9\,000)(1\,728)(1\,000)}{(29 \times 10^6)(1\,000)} = 0.536 \text{ plg} \downarrow \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 13.6

Determinar la deflexión en el punto B en la viga de la figura 13.13. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 1\,000$ plg^4.

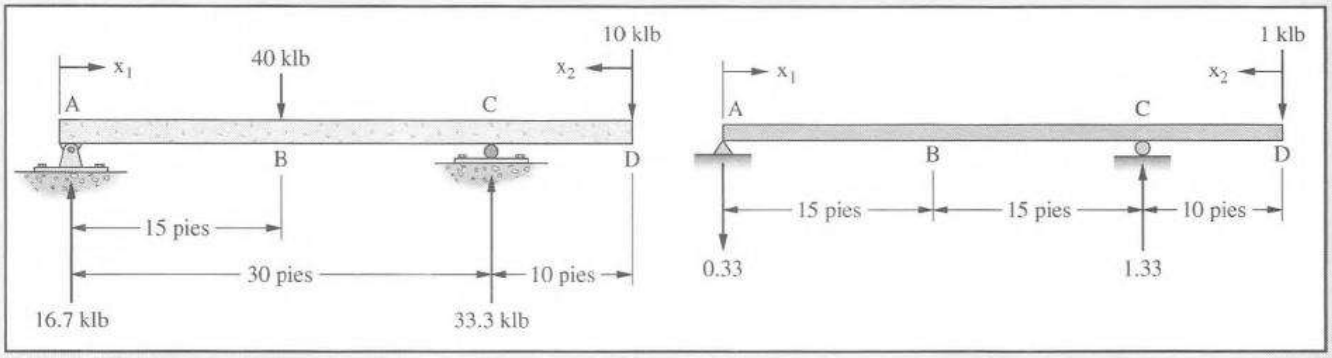


Figura 13.13

Solución. Para escribir las expresiones de momento desde el apoyo izquierdo al apoyo derecho, el apoyo izquierdo se usa para el origen de x. Para la parte en voladizo de la viga, se usa el extremo derecho como el origen.

Para $x_1 = 0$ a 15:

$$M = 16.7x$$
$$m = -0.33x$$
$$Mm = -5.56x^2$$

Para $x_1 = 15$ a 30:

$$M = 16.7x - (40)(x - 15)$$
$$= -23.3x + 600$$
$$m = -0.33x$$
$$Mm = +7.77x^2 - 200x$$

Para $x_2 = 0$ a 10 regresando desde el extremo derecho

$$M = -10x$$
$$m = -x$$
$$Mm = +10x^2$$

$$\Delta_D = \frac{1}{EI}\int_0^{15}(-5.56x^2)dx_1 + \frac{1}{EI}\int_{15}^{30}(7.77x_1^2 - 200x_1)dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^{10}(10x_2^2)\,dx_2$$
$$= \frac{1}{EI}[-1.85x_1^3]_0^{15} + \frac{1}{EI}[2.59x_1^3 - 100x_1^2]_{15}^{30} + \frac{1}{EI}[3.33x_2^3]_0^{10}$$
$$= \frac{-6\,250}{EI} + \frac{-20\,000 + 13\,750}{EI} + \frac{3\,330}{EI}$$
$$= -\frac{9\,170\,\text{klb-pie}^3}{EI} = -0.546\text{ plg} \downarrow \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 13.7

Determinar la deflexión horizontal en D en el marco mostrado en la figura 13.14. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2.

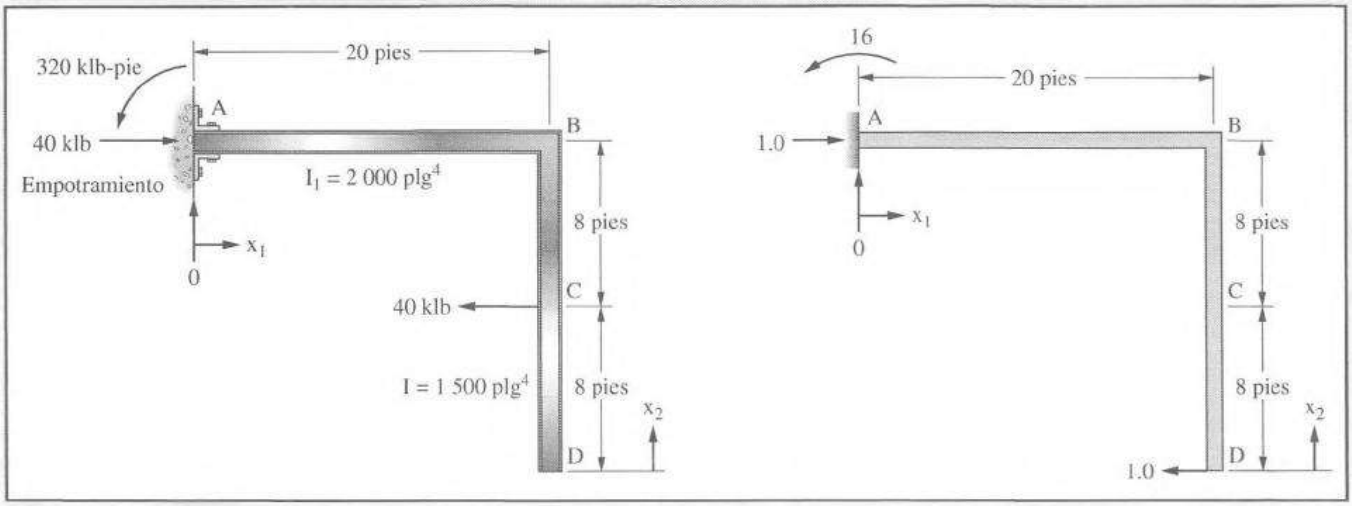


Figura 13.14

Solución. Se coloca en D una carga unitaria que actúa horizontalmente a la izquierda. Con A como el origen para x_1, se escriben expresiones de momento para el miembro AB. Para el miembro vertical, el origen se toma en D, se escribe un par de expresiones M y m para la porción del miembro de D a C, y se escribe otro par para la porción de la viga de C a B. Los miembros AB y BD no tienen los mismos momentos de inercia, y es necesario procesarlos por separado como se muestra en los cálculos.

Para $x_1 = 0$ a 20 pies:

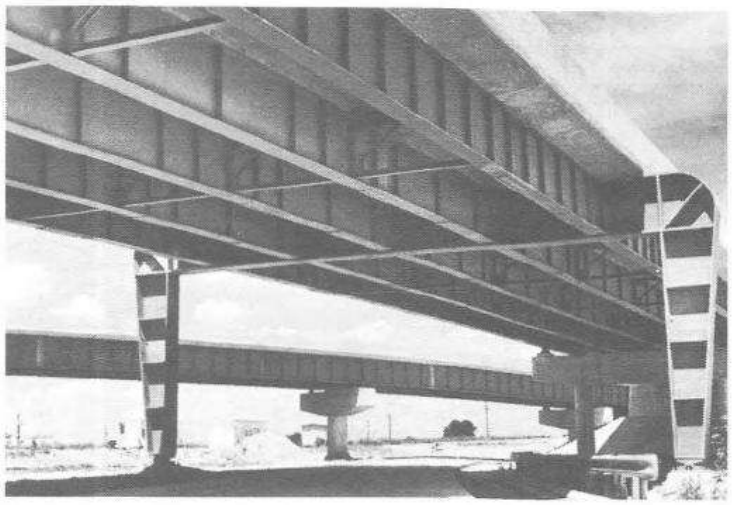
$$M = -320$$
$$m = -16$$
$$Mm = +5\,120$$

Para $x_2 = 0$ a 8 pies:

$$M = 0$$
$$m = -x$$
$$Mm = 0$$

Para $x_2 = 8$ a 16:

$$M = -40(x_2 - 8) = -40x_2 + 320$$
$$m = -x_2$$
$$Mm = 40x_2^2 - 320x_2$$
$$\Delta_D = \int_0^{20} \left(\frac{5\,120}{EI_1}\right) dx_1 + \int_8^{16} \left(\frac{40x_2^2 - 320x_2}{EI_2}\right) dx_2$$
$$= \frac{1}{EI_1}[5\,120x_1]_0^{20} + \frac{1}{EI_2}\left(\frac{40}{3}x_2^3 - 160x_2^2\right)_8^{16}$$
$$= \frac{102\,400 \text{ klb-pie}^3}{EI_1} + \frac{17\,066 \text{ klb-pie}^3}{EI_2} = +3.73 \text{ plg} \downarrow \quad \blacksquare$$



Paso a desnivel I-40, I-240, Oklahoma City, Oklahoma. (Cortesía del Departamento de Transporte del estado de Oklahoma.)

El ejemplo 13.8 presenta una muestra más de los cálculos de deflexiones usando el procedimiento del trabajo virtual. Su objetivo es proporcionar al lector un poco de práctica adicional para escribir las expresiones M y m. Por conveniencia, la carga inclinada de 60 klb aplicada a la estructura se descompone en sus componentes vertical y horizontal, como se muestra en la figura 13.15. También deberá observar que las expresiones de momento se escriben por separado para cada una de las direcciones x_1, x_2 y x_3 mostradas en la figura.

EJEMPLO 13.8

Determine la deflexión horizontal para la carga de 60 klb para el marco mostrado en la figura 13.15. Suponga que cada uno de los miembros tiene un I = 1 250 plg^4 y un E = 29×10^6 lb/plg^2.

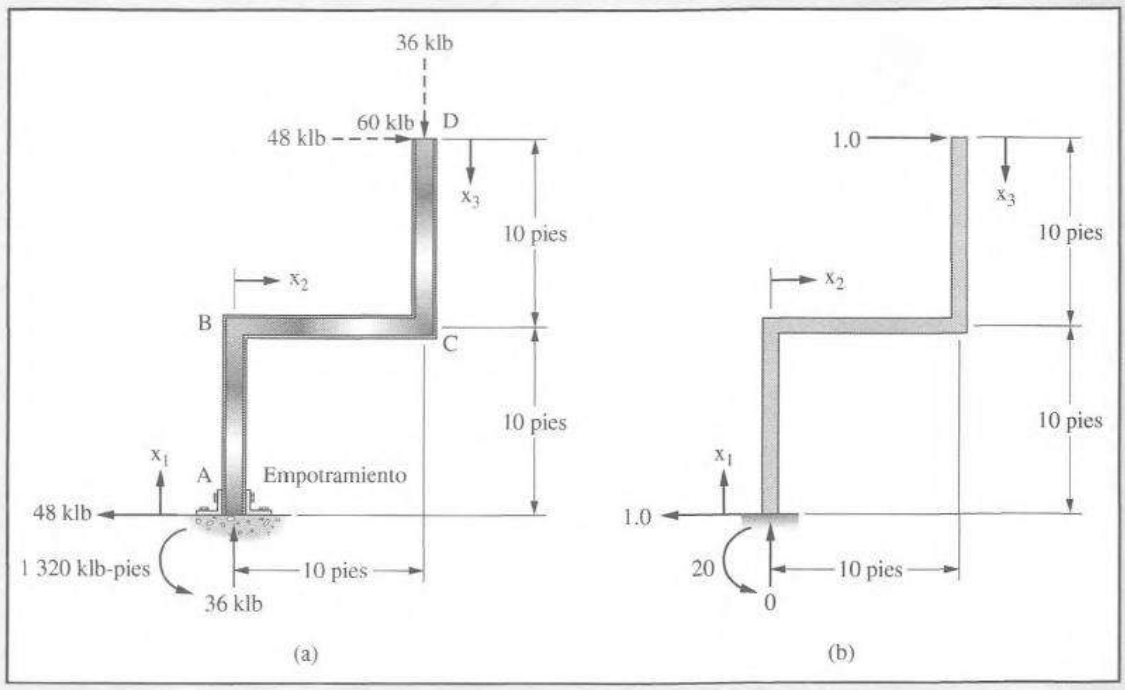


Figura 13.15

Solución.

Para $x_1 = 0$ a 10 pies:

$$M = 48x_1 - 1\,320$$
$$m = 1x_1 - 20$$
$$Mm = 48x_1^2 - 2\,280x_1 + 26\,400$$

Para $x_2 = 0$ a 10 pies:

$$M = 36x_2 + 480 - 1\,320 = 36x_2 - 840$$
$$m = 10 - 20 = -10$$
$$Mm = -360x_2 + 8\,400$$

Para $x_3 = 0$ a 10 pies:

$$M = 48x$$
$$m = 1x$$
$$Mm = 48x_3^2$$

Después de la integración

$$\Delta_{\text{horiz.}} = (16x_1^3 - 1\,140x_1^2 + 26\,400)_0^{10} + (-180x_2^2 = 8\,400x_2)_0^{10} + (16x_3^3)_0^{10}$$
$$= 248\,000 \text{ klb-pie}^3$$
$$= \frac{(248\,000)(1\,728)(1\,000)}{(29 \times 10^6)(1\,250)} = 11.82 \text{ plg} \downarrow \quad \blacksquare$$

13.8 CÁLCULO DE ROTACIONES O CAMBIOS ANGULARES POR MEDIO DEL TRABAJO VIRTUAL

El trabajo virtual puede usarse para determinar las rotaciones o las pendientes en los diferentes puntos de una estructura. Para encontrar la pendiente en el punto A en la viga de la figura 13.16 se aplica un par unitario en A, retirando las cargas externas de la estructura. El valor del momento para cualquier punto de la viga causado por el par es m. El reemplazo de las cargas externas causará un momento adicional, en cualquier punto, de M.

Si la aplicación de las cargas causa que la viga gire un ángulo θ en A, el trabajo externo realizado por el par es igual a $1 \times \theta$. El trabajo interno o la energía elástica interna almacenada es $\int (Mm/EI)\,dx$.

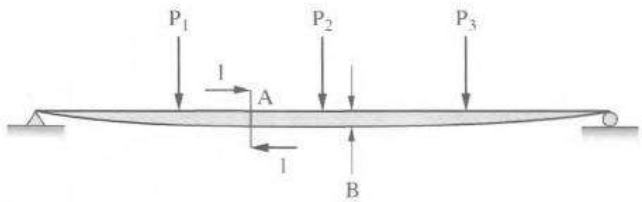


Figura 13.16

$$\theta = \int \frac{Mm}{EI}\, dx$$

Si se supone un par en el sentido de las manecillas del reloj en la posición donde se desea la pendiente y el resultado de la integración es positivo, la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj. Los ejemplos 13.9 y 13.10 muestran la determinación de las pendientes mediante el trabajo virtual. Las pendientes obtenidas están en radianes.

EJEMPLO 13.9

Encuentre la pendiente en el extremo libre de A de la viga mostrada en la figura 13.17. E e I son constantes.

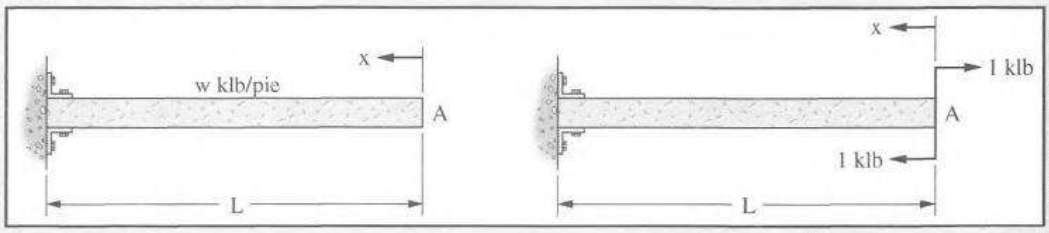


Figura 13.17

Solución.

Para x = 0 a L

$$M = -\frac{wx^2}{2}$$

$$m = -1$$

$$Mm = \frac{wx^2}{2}$$

$$\theta_A = \int_0^L \frac{wx^2}{2EI}\, dx$$

$$\theta_A = \left[\frac{wx^3}{6EI}\right]_0^L = +\frac{wL^3}{6EI} \text{ en el sentido de las manecillas del reloj} \circlearrowright$$

■

EJEMPLO 13.10

Encuentre la pendiente bajo la carga de 30 klb en la viga de la figura 13.18. E e I son constantes.

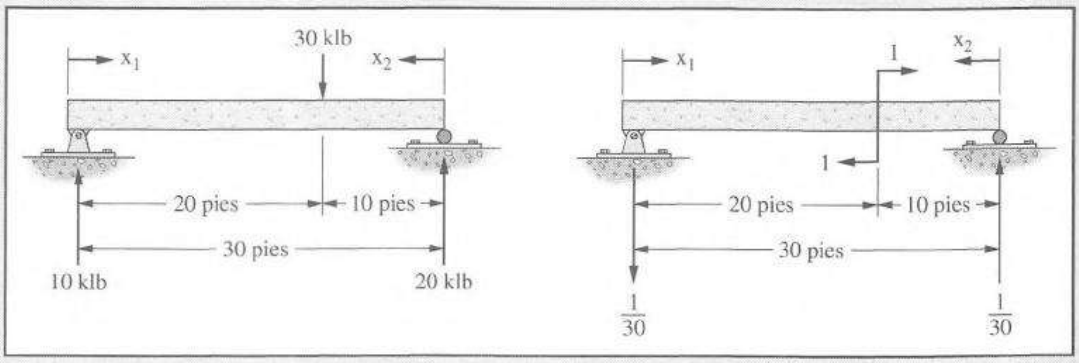


Figura 13.18

Para $x_1 = 0$ a 20 pies:

$$M = 10x_1$$

$$m = -\frac{1}{30}x_1$$

$$Mm = -\frac{1}{3}x_1^2$$

Para $x_2 = 0$ a 10 pies:

$$M = 20x_2$$

$$m = -\frac{1}{30}x_2$$

$$Mm = \frac{2}{3}x_2^2$$

$$\Delta = \int_0^{20}\left(-\frac{1x_1^2}{3EI}\right)dx_1 + \int_0^{10}\left(\frac{2x_2^2}{3EI}\right)dx_2$$

$$= \left[-\frac{x_1^3}{9EI}\right]_0^{20} + \left[\frac{2x_2^3}{9EI}\right]_0^{10} = -\frac{888 \text{ klb-pie}^2}{EI} + \frac{222 \text{ klb-pie}^2}{EI}$$

$$= -\frac{666 \text{ klb-pie}^2}{EI} \text{ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj}$$ ■

13.9 INTRODUCCIÓN A LOS TEOREMAS DE CASTIGLIANO

Alberto Castigliano, ingeniero de los ferrocarriles italianos, publicó en 1879 un original y elaborado tratado sobre las estructuras estáticamente indeterminadas.[1] En este libro estaban incluidos los dos teoremas que hoy día se conocen como el primero y segundo teoremas de Castigliano. El primer teorema, al que por lo común se conoce como *el método de trabajo mínimo*, se analiza en el capítulo 16. Este teorema, históricamente hablando, ha desempeñado un papel muy importante en el desarrollo del análisis de las estructuras estáticamente indeterminadas.

El segundo teorema de Castigliano, que proporciona un método muy valioso para el cálculo de deflexiones, se expondrá en esta sección y en la siguiente. Su aplicación implica igualar la deflexión con la primera derivada parcial del trabajo interno total de la estructura con respecto a la carga que se encuentra en el punto cuya deflexión se busca. En concreto, el teorema se enuncia como sigue:

Teorema

Para toda estructura elástica lineal sujeta a un conjunto determinado de cargas, temperatura constante y apoyos sin desplazamiento, la primera derivada parcial de la energía de deformación con respecto a una fuerza en particular, será igual al desplazamiento de esa fuerza en la dirección de su aplicación.

Al presentar el método del trabajo virtual para vigas y marcos en la sección 13.6, se obtuvo la siguiente ecuación.

$$W = \int \frac{Mm}{EI}\,dx$$

[1] A. Castigliano, *Théorie de l'equilibre des systèmes élastique et ses applications*, Turín, 1879. (E. S. Andrews tradujo esta obra al inglés con el título: *Elastic Stresses in Structures*, la cual publicó en Londres, en 1919, la editorial Scott, Greenwood & Son. Esta versión al inglés fue reimpresa en Estados Unidos por Dover Publications, Inc., de Nueva York, con el título *The Theory of Equilibrium of Elastic Systems and Its Application.*)

para expresar el trabajo interno total alcanzado por los esfuerzos causados por una carga unitaria colocada en el punto y en la dirección de la deflexión buscada, después de que las cargas externas se han vuelto a colocar sobre la estructura.

El trabajo interno de los esfuerzos reales causado por la aplicación gradual de las cargas externas puede determinarse de manera análoga. El trabajo en cada fibra es igual al esfuerzo promedio, (My/2I) (dA) (al variar las cargas externas de cero a su valor total), multiplicado por la deformación total en la fibra, (My/EI) dx. Al integrar el producto de estas dos expresiones para la sección transversal del elemento sobre toda la estructura se tiene el trabajo interno total o energía de deformación almacenada para la estructura completa.

$$W = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

De manera similar, el trabajo interno en las barras de una armadura, debido a un conjunto de cargas aplicadas en forma gradual, puede expresarse como:

$$W = \sum \frac{F^2L}{2AE}$$

Estas expresiones se usarán con frecuencia en la próxima sección, en la que se analiza con todo detalle el segundo teorema de Castigliano.

13.10 SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO

En general, los otros métodos para el cálculo de deflexiones (momento del área o trabajo virtual) son un poco más sencillos en su aplicación y más populares que el segundo teorema de Castigliano. Sin embargo, para ciertas estructuras este método es muy útil y su estudio sirve de base al lector para el primer teorema, de gran importancia.

La derivación del segundo teorema (presentada en esta sección) es muy parecida a la realizada por Kinney.[2] La figura 13.19 muestra una viga sujeta a las cargas gradualmente aplicadas P_1 y P_2. Estas cargas producen las deflexiones Δ_1 y Δ_2. Se desea encontrar la magnitud de la deflexión Δ_1 bajo la carga P_1.

El trabajo externo realizado durante la aplicación de las cargas es igual a la carga promedio multiplicada por la deflexión. Esto es también igual a la energía de deformación de la viga.

$$W = \frac{P_1\Delta_1}{2} + \frac{P_2\Delta_2}{2} \tag{13.1}$$

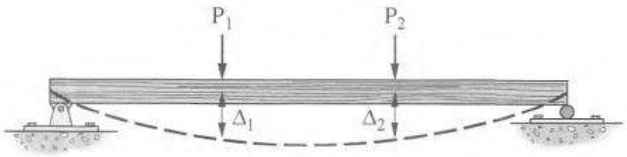


Figura 13.19 Viga para el desarrollo del segundo teorema de Castigliano.

Si la carga P_1 se incrementa una pequeña cantidad dP_1, la viga sufrirá una deflexión adicional. La figura 13.20 muestra las deflexiones adicionales $d\Delta_1$ y $d\Delta_2$ bajo cada una de las cargas.

[2] J. S. Kinney, *Indeterminate Structural Analysis* (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1957), 84-86.

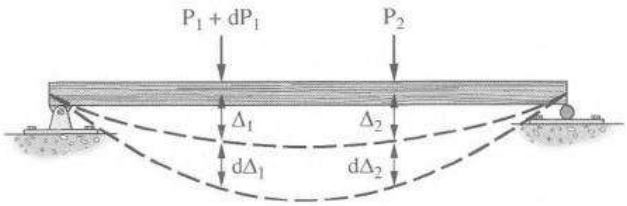


Figura 13.20 Deflexión adicional causada por dP_1.

El trabajo adicional realizado o energía de deformación almacenada durante la aplicación de dP_1, es el que sigue:

$$dW = \left(P_1 + \frac{dP_1}{2}\right)d\Delta_1 + P_2 d\Delta_2$$

Esta ecuación representa la variación en el trabajo causada por una pequeña variación en la carga. Al efectuar las multiplicaciones indicadas e ignorar el producto de los diferenciales, que son despreciables, encontramos que:

$$dW = P_1 d\Delta_1 + P_2 d\Delta_2 \tag{13.2}$$

Ahora, en vez de agregar dP_1 a las cargas P_1 y P_2, coloquemos las tres cargas sobre la viga al mismo tiempo. Al hacerlo así, el trabajo hecho por las cargas puede representarse por

$$W = \left(\frac{P_1 + dP_1}{2}\right)(\Delta_1 + d\Delta_1) + \left(\frac{P_2}{2}\right)(\Delta_2 + d\Delta_2)$$

De nuevo, al efectuar las multiplicaciones indicadas e ignorar el producto de los diferenciales, obtenemos la ecuación:

$$W = \frac{P_1\Delta_1}{2} + \frac{P_1 d\Delta_1}{2} + \frac{dP_1\Delta_1}{2} + \frac{P_2\Delta_2}{2} + \frac{P_2 d\Delta_2}{2} \tag{13.3}$$

El cambio en el trabajo hecho en este caso se puede obtener restando la ecuación 13.1 de la ecuación 13.3. Al hacerlo encontramos que:

$$\begin{aligned} dW &= \frac{P_1\Delta_1}{2} + \frac{P_1 d\Delta_1}{2} + \frac{dP_1\Delta_1}{2} + \frac{P_2\Delta_2}{2} + \frac{P_2 d\Delta_2}{2} - \frac{P_1\Delta_1}{2} - \frac{P_2\Delta_2}{2} \\ dW &= \frac{P_1 d\Delta_1}{2} + \frac{dP_1\Delta_1}{2} + \frac{P_2 d\Delta_2}{2} \end{aligned} \tag{13.4}$$

De la ecuación 13.2, encontramos que $P_2 d\Delta_2$ es

$$P_2 d\Delta_2 = dW - P d\Delta_1$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 13.4, y despejando la deflexión Δ_1, la deflexión que queríamos calcular, encontramos que

$$\Delta_1 = \frac{dW}{dP_1}$$

Como el trabajo hecho por las cargas externas es igual a la energía de deformación en la estructura causada por las cargas, y como generalmente se aplica más de una carga a una estructura, esta

deflexión se escribe por lo común como una derivada parcial en términos de energía de deformación como sigue:

$$\Delta = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{\partial U}{\partial P}$$

Éste es un enunciado matemático del segundo teorema de Castigliano. Sustituyendo en esta expresión el trabajo interno o la energía de deformación totales $W = \int \frac{M^2}{2EI}\,dx$, la deflexión en un punto en una viga o marco usando el segundo teorema de Castigliano, puede escribirse como

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P}\int \frac{M^2}{2EI}\,dx$$

Al aplicar el método representado por esta ecuación, M debe elevarse al cuadrado, integrarse y calcular luego la primera derivada parcial. Sin embargo, si M tiene una forma algebraica complicada, como es frecuente, el proceso puede resultar muy tedioso. Por esta razón, en general es más sencillo diferenciar bajo el signo de integral, con el siguiente resultado:

$$\Delta = \int \frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)dx$$

Para una armadura, las relaciones correspondientes son:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P}\sum \frac{F^2 l}{2AE}$$

$$\Delta = \sum \frac{Fl}{AE}\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)$$

Los ejemplos 13.11 al 13.13 muestran la aplicación del segundo teorema de Castigliano. Al aplicar el teorema, a la carga situada en el punto donde se busca la deflexión se le llama P. Después de efectuar las operaciones algebraicas en las expresiones correspondientes se reemplaza en éstas el valor numérico de P. Si no se tiene una carga en el punto o en la dirección de la deflexión buscada, se coloca una fuerza P imaginaria en la dirección deseada. Después de terminar las operaciones, el valor correcto de P (cero) se sustituye en la expresión. Este principio se demuestra en el ejemplo 13.11.

Si lo que se busca es una rotación o una pendiente en una estructura, la derivada parcial se toma respecto a un supuesto momento M que actúa en el punto donde se quiere lograr el giro. Un signo positivo en la respuesta indica que la rotación es en la dirección supuesta para el momento P.

Puente Burro Creek en Wickieup, condado Mohave, Arizona.
(Cortesía del American Institute of Steel Construction, Inc.)

EJEMPLO 13.11

Determinar la deflexión vertical en la carga de 10 klb en la viga mostrada en la figura 13.21.

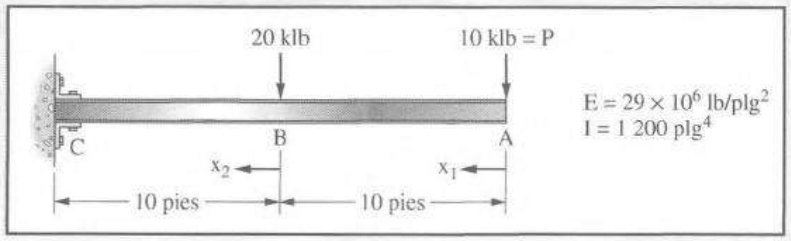


Figura 13.21

Solución. Haciendo que la carga de 10 klb sea P.

TABLA 13.3

Sección	M	$\frac{\partial M}{\partial P}$	$M\frac{\partial M}{\partial P}$	$\int M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI}$
A a B	$-Px$	$-x$	$+Px^2$	$\int_0^{10}(Px^2)\frac{dx}{EI} = \frac{333P}{EI}$
B a C	$-P(x+10)-20x$	$-x-10$	$+Px^2+20Px+20x^2$ $+100P+200x$	$\int_0^{10}(Px^2+20Px+20x^2$ $+100P+200x)\frac{dx}{EI}$ $=\frac{2\,333P+16\,667}{EI}$
Σ				$\frac{2\,666P+16\,667}{EI}$

$$\Delta_v = \frac{2\,666P + 16\,667}{EI} = \frac{43\,333 \text{ klb-pie}^3}{EI} = 2.15 \text{ plg} \downarrow \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 13.12

Determinar la deflexión vertical en el extremo libre de la viga en voladizo mostrada en la figura 13.22.

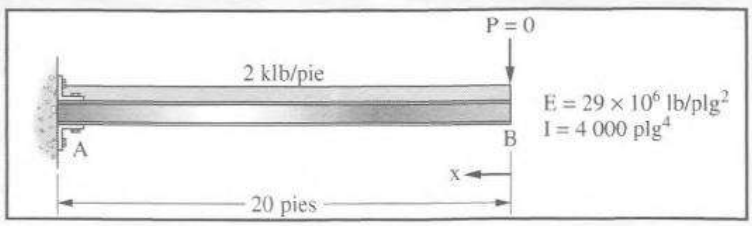


Figura 13.22

Solución. Colocando una carga imaginaria P en el extremo libre.

TABLA 13.4

Sección	M	$\frac{\partial M}{\partial P}$	$M\frac{\partial M}{\partial P}$	$\int M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI}$
B a A	$-Px - x^2$	$-x$	$Px^2 + x^3$	$\int_0^{20}(Px^2 - x^3)\frac{dx}{EI} = \frac{40\,000}{EI}$
Σ				$\frac{40\,000}{EI}$

$$\Delta = 0.596 \text{ plg} \downarrow \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 13.13

Determinar la deflexión vertical bajo la carga de 30 klb en la viga de la figura 13.23.

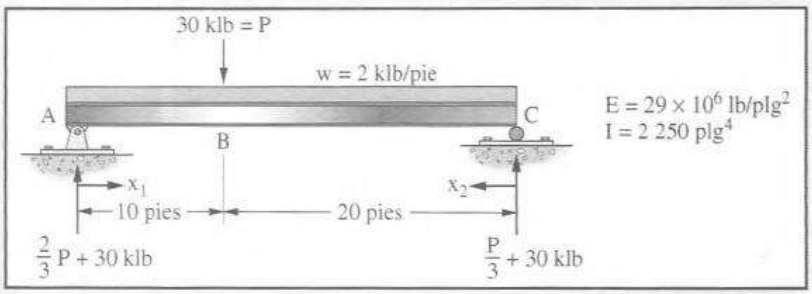


Figura 13.23

Solución. La carga de 30 klb se reemplaza con P. Observe que las reacciones de la viga se calculan con una carga de P en el punto B y no 30 klb.

TABLA 13.5

Sección	M	$\frac{\partial M}{\partial P}$	$M\frac{\partial M}{\partial P}$	$\int M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI}$
A a B	$\frac{2}{3}Px_1 + 30x_1 - x_1^2$	$\frac{2}{3}x_1$	$\frac{4}{9}Px_1^2 + 20x_1^2 - \frac{2}{3}x_1^3$	$\frac{1}{EI}\int_0^{10}\left(\frac{4}{9}Px_1^2 + 20x_1^2 - \frac{2}{3}x_1^3\right)dx_1$
C a B	$\frac{P}{3}x_2 + 30x_2 - x_2^2$	$\frac{x_2}{3}$	$\frac{Px_2^2}{9} + 10x_2^2 - \frac{x_2^3}{3}$	$\frac{1}{EI}\int_0^{20}\left(\frac{Px_2^2}{9} + 10x_2^2 - \frac{x_2^3}{3}\right)dx_2$

Realizando las operaciones indicadas $\Delta = 0.838$ plg $\downarrow$ $\blacksquare$

EJEMPLO 13.14

Encontrar la pendiente en el extremo libre de la viga en voladizo del ejemplo 13.12. La viga se dibuja nuevamente en la figura 13.24.

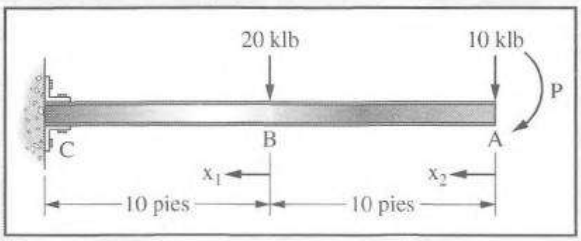


Figura 13.24

Solución. Se supone que un momento de P en el sentido de las manecillas del reloj está actuando en el extremo libre como se muestra en la figura.

TABLA 13.6

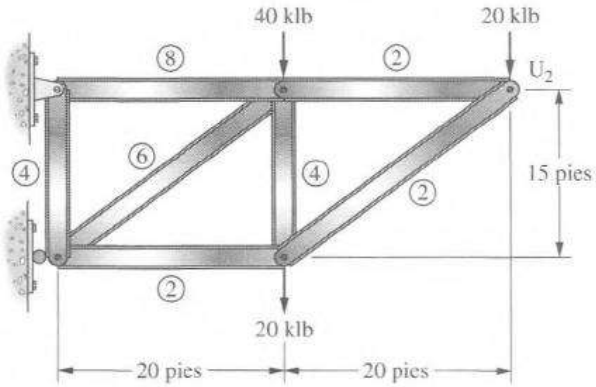
Sección	M	$\frac{\partial M}{\partial P}$	$M\frac{\partial M}{\partial P}$	$\int M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI}$
A a B	$-10x - P$	-1	$10x + P$	$\frac{1}{EI}\int_0^{10}(10x + P)\,dx$
B a C	$-30x - P - 100$	-1	$30x + P + 100$	$\frac{1}{EI}\int_0^{10}(30x + P + 100)\,dx$

Realizando las operaciones indicadas $\theta = +0.0124$ rad↻ ■

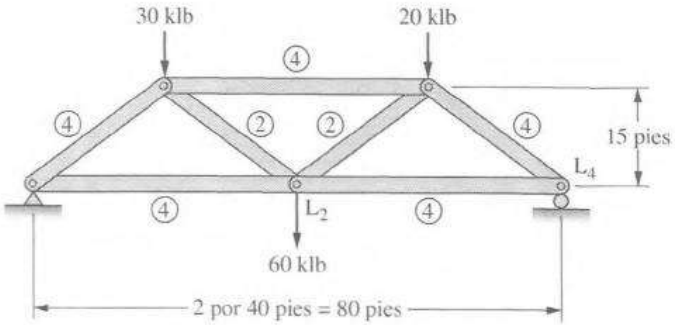
13.11 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

En los problemas 13.1 al 13.6 use el método del trabajo virtual para determinar las deflexiones en cada uno de los nudos indicados de las armaduras que se muestran en las figuras correspondientes. Los números encerrados en círculos son áreas en pulgadas cuadradas y $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2, excepto en los problemas que indiquen otro valor.

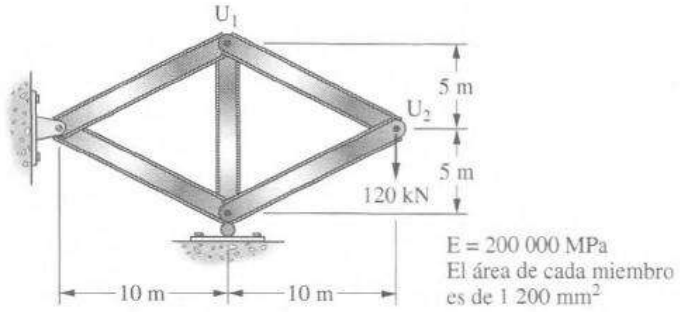
13.1 U_2 vertical, U_2 horizontal. (*Resp.:* 0.405 plg ↓, 0.221 plg ←.)



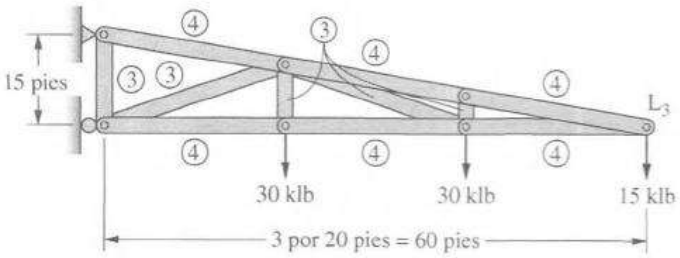
13.2 L_2 vertical, L_4 horizontal.



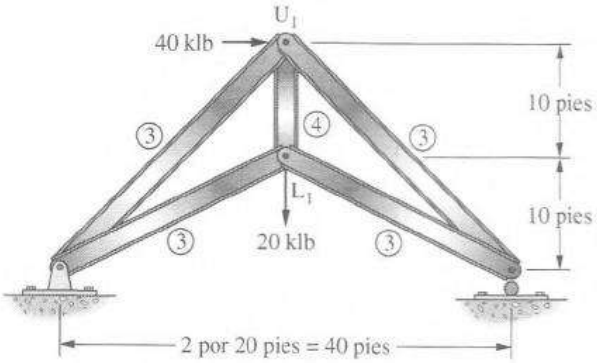
13.3 U_2 vertical, U_1 horizontal. (*Resp.:* 28.0 mm ↓, 9.5 mm →.)



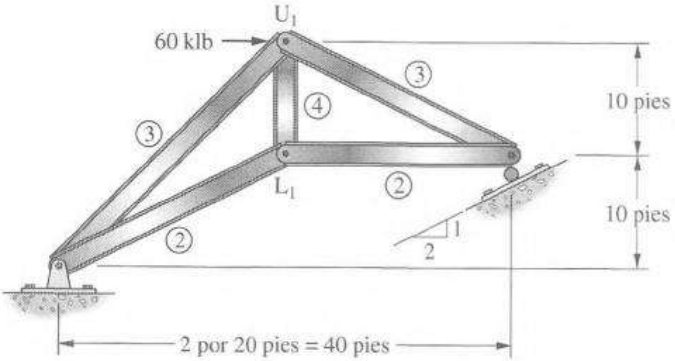
13.4 L_3 vertical.



13.5 U_1 vertical, L_1 horizontal. (*Resp.:* 0.858 plg ↓, 0.702 plg →.)

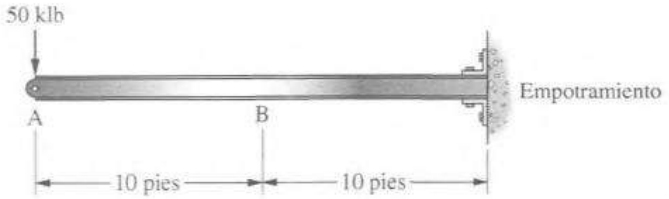


13.6 L_1 vertical, L_1 horizontal.

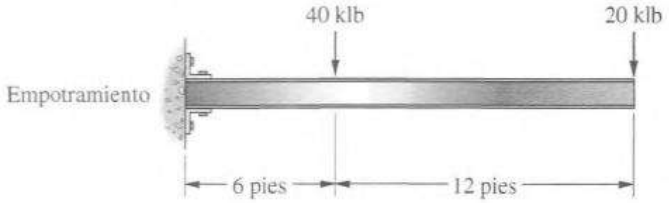


Use el método del trabajo virtual para resolver los problemas 13.7 al 13.30. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2, excepto donde se indique otro valor.

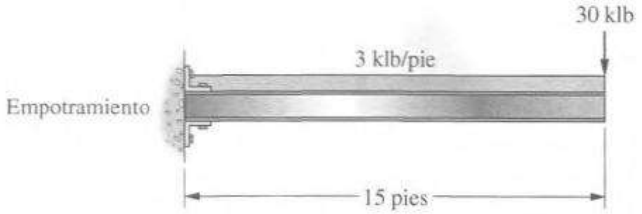
13.7 Determine la deflexión en los puntos A y B de la estructura que se muestra en la figura. $I = 2\,000$ plg^4. (*Resp.:* 3.97 plg ↓, 1.24 plg ↓.)



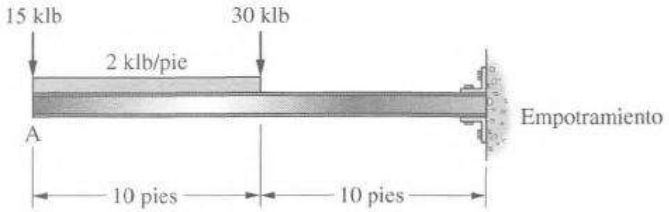
13.8 Determine la deflexión debajo de cada una de las cargas concentradas que se muestran en la figura. $I = 3\,500$ plg^4.



13.9 Encuentre la pendiente y la deflexión en el extremo libre de la viga que se muestra en la figura. $I = 5\,000$ plg^4. (*Resp.:* 0.00503 rads \, 0.628 plg ↓.)



13.10 Encuentre las deflexiones en el punto A de la viga que se muestra en la figura. $I = 3\,500$ plg^4.

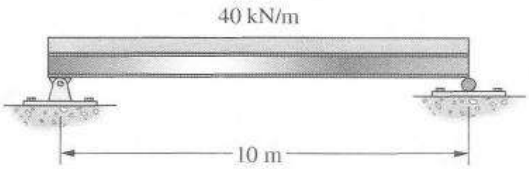


13.11 Determine la pendiente y la deflexión en el punto A de la viga del problema 11.11. (*Resp.:* 0.00251 rads /, 0.271 plg ↓.)

13.12 Determine la pendiente y la deflexión a 12 pies del extremo derecho del problema 11.12.

13.13 Encuentre la pendiente y la deflexión bajo la carga de 40 kN en la viga del problema 11.20. (*Resp.:* 0.01725 rads \, 74.25 mm ↓.)

13.14 Calcule la pendiente y la deflexión en un punto situado a 3 m del apoyo izquierdo de la viga que se muestra en la figura. $I = 2.5 \times 10^8$ mm^4, E = 200 000 MPa.

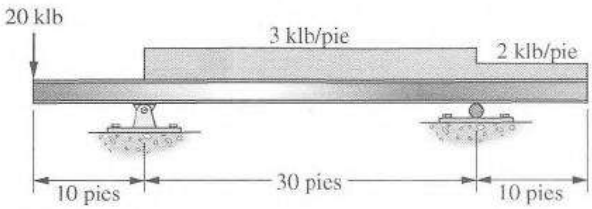


13.15 Determine θ_A y Δ_C para la viga del problema 11.16. (*Resp.:* 0.0106 rads \, 1.70 plg ↓.)

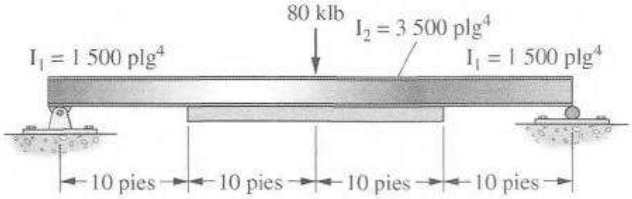
13.16 Calcule θ_A y Δ_A para la viga del problema 11.19.

13.17 Calcule θ_A y Δ_A para la viga del problema 12.1. (*Resp.:* 0.00318 rads \, 0.915 plg ↓.)

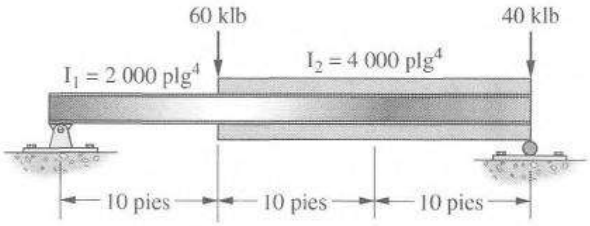
13.18 Determine la deflexión en el centro y la pendiente en el extremo derecho de la viga que se muestra en la figura. I = 2 100 plg^4.



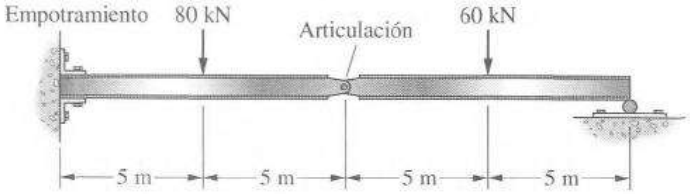
13.19 Calcule la deflexión bajo la carga de 80 klb en la estructura que se muestra en la figura. (*Resp.:* 2.12 plg ↓.)



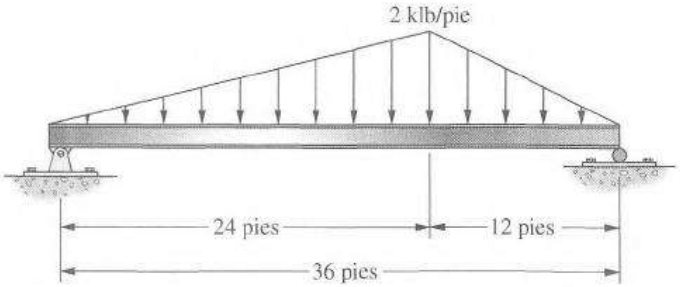
13.20 Calcule la pendiente y la deflexión bajo la carga de 60 klb en la viga que se muestra en la figura.



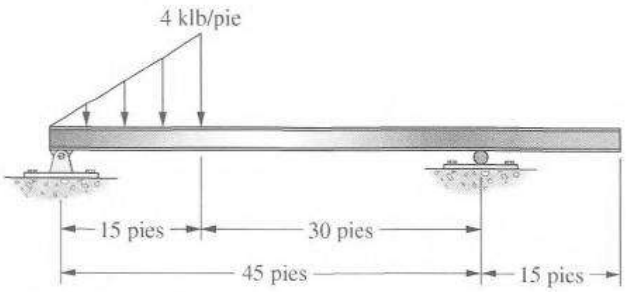
13.21 Calcule la pendiente y la deflexión bajo la carga de 60 kN en la estructura que se muestra en la figura. $I = 1.46 \times 10^9$ mm^4. E = 200 000 MPa. (*Resp.:* 0.00628 rads /, 39.96 mm ↓.)



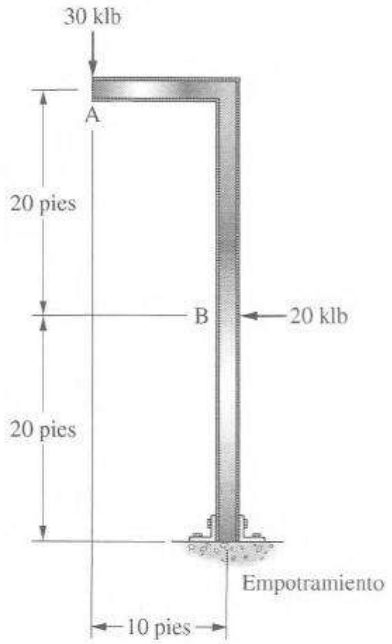
13.22 Encuentre la deflexión a 24 pies del extremo izquierdo de la viga simple que se muestra en la figura. I = 2 250 plg^4.



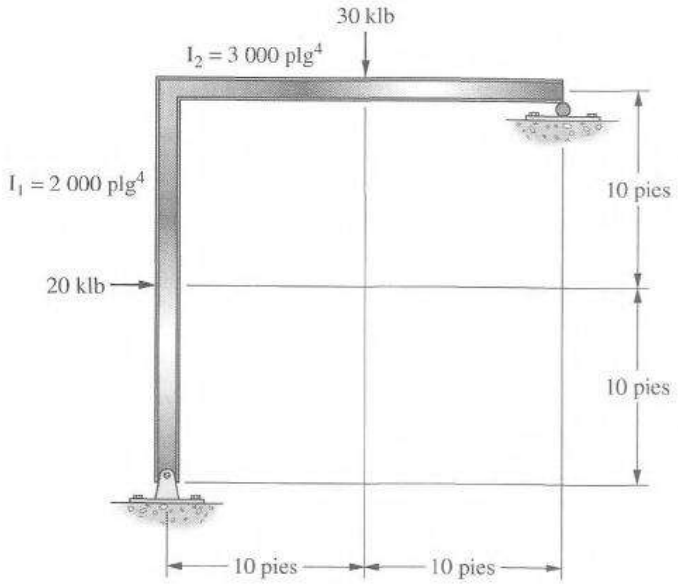
13.23 Calcule la pendiente y la deflexión en el extremo libre de la viga que se muestra en la figura. I = 4 250 plg^4. (*Resp.:* 0.00175 rads /, 0.442 plg ↓.)



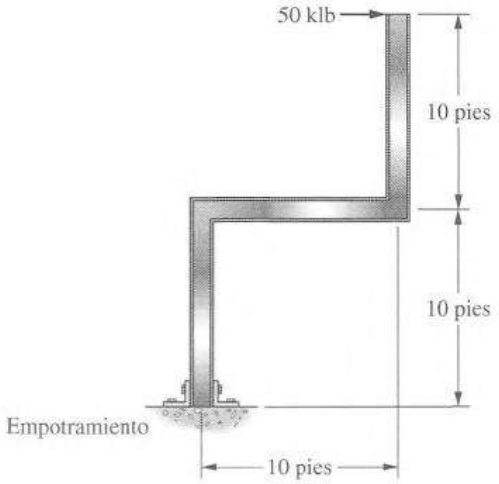
13.24 Encuentre la deflexión vertical en el punto A y la deflexión horizontal en el punto B del marco que se muestra en la figura. $I = 3\ 000$ plg^4.



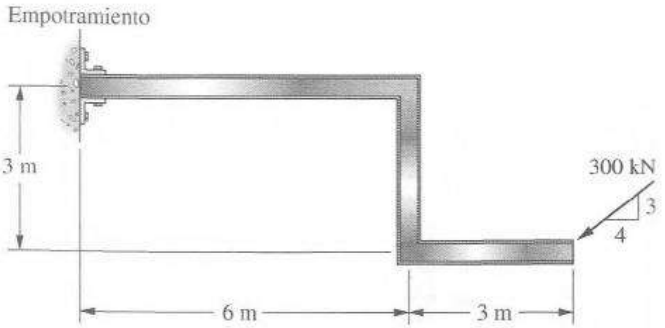
13.25 Determine la deflexión horizontal bajo la carga de 20 klb y la deflexión vertical bajo la carga de 30 klb en el marco que se muestra en la figura. (*Resp.:* 1.212 plg →, 0.198 plg ↓.)



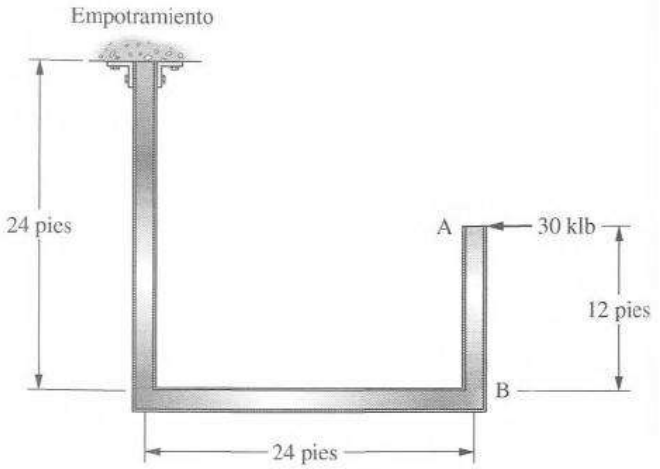
13.26 Encuentre las componentes horizontal y vertical de la deflexión bajo la carga de 50 klb en el marco que se muestra en la figura. $I = 3\ 250$ plg^4.



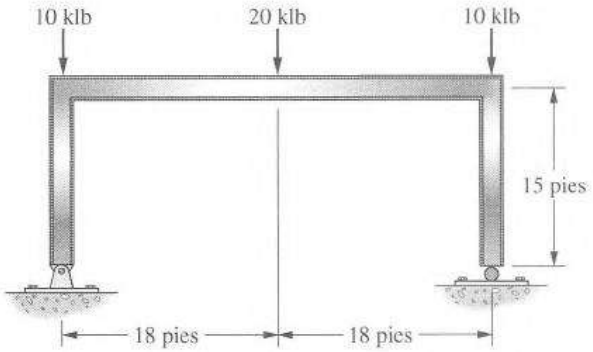
13.27 Determine las componentes vertical y horizontal de la deflexión en el extremo libre del marco que se muestra en la figura. $I = 2.60 \times 10^9$ mm^4. $E = 200\ 000$ MPa. (*Resp.:* 149.4 mm ↓, 71.13 mm ←.)



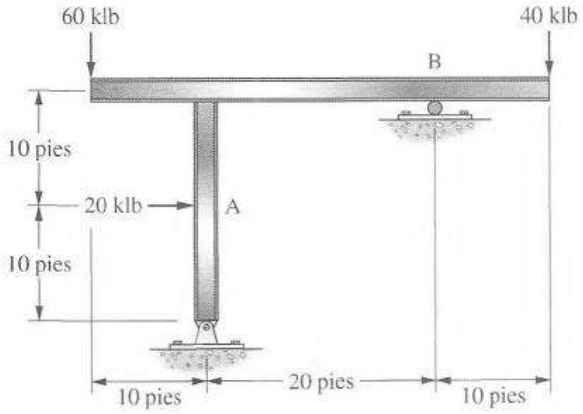
13.28 Encuentre la deflexión horizontal en el punto A y la deflexión vertical en el punto B en el marco que se muestra en la figura. $I = 1\ 200$ plg^4.



13.29 Calcule la deflexión horizontal en el rodillo de apoyo y la deflexión vertical al centro de la viga en el marco que se muestra en la figura. I = 1 850 plg^4. (*Resp.:* 1.57 plg →, 0.626 plg ↓.)

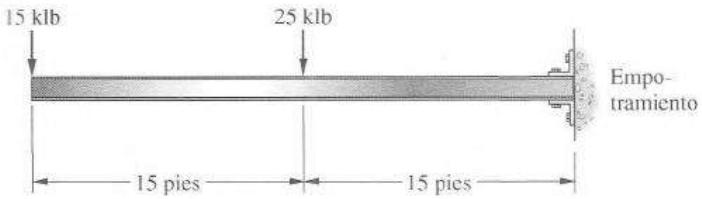


13.30 Encuentre las deflexiones horizontales en los puntos A y B del marco que se muestra en la figura. I = 2 750 plg^4.

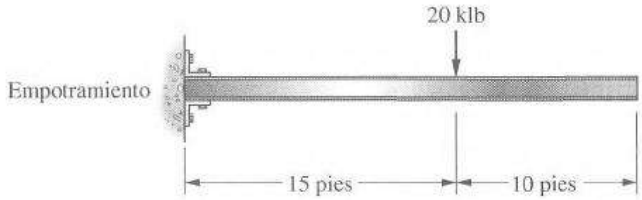


En los problemas 13.31 al 13.42 utilice el segundo teorema de Castigliano para determinar las pendientes y las deflexiones indicadas. E = 29 × 10^6 lb/plg^2 para los problemas donde se utilizan unidades del sistema inglés, y 200 000 MPa donde se utilizan unidades del SI. Las cifras encerradas en círculos son áreas de secciones transversales en pulgadas cuadradas o en milímetros cuadrados.

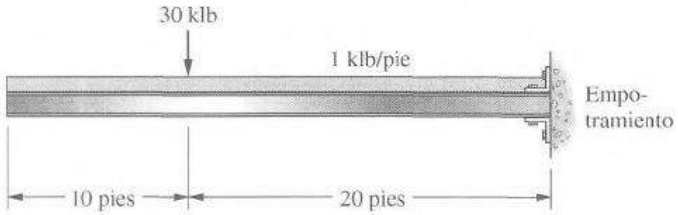
13.31 Deflexión bajo cada carga; I = 3 250 pulg^4. (*Resp.* 3.76 pulg ↓ @ cargas de 10 klb, 1.29 pulg ↓ @ carga de 20 klb).



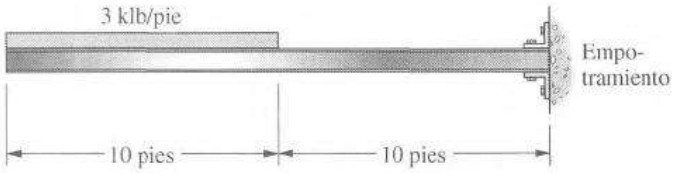
13.32 Pendiente y deflexión en el extremo libre; I = 1 750 plg^4.



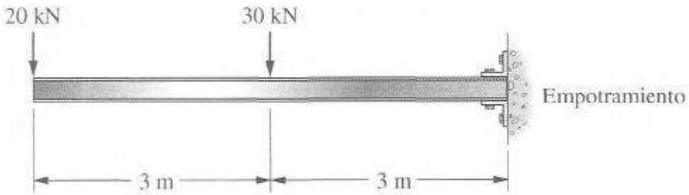
13.33 Pendiente y deflexión bajo la carga de 30 klb; I = 5 500 plg^4. (*Resp.:* 0.00933 rads /, 1.48 plg ↓.)



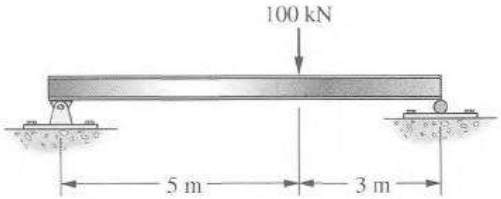
13.34 Deflexión en cada extremo de la carga uniforme; I = 1 250 plg^4.



13.35 Deflexión bajo cada carga; I = 4.0 × 10^8 mm^4. (*Resp.:* 26.4 mm ↓ @ carga de 20 kN, 9 mm ↓ @ carga de 30 kN.)

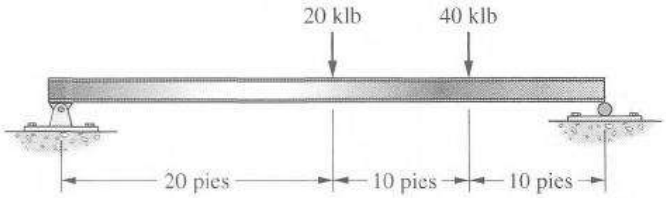


36.36 Pendiente y deflexión bajo la carga de 100 kN. I = 2 000 × 10^8 mm^4.

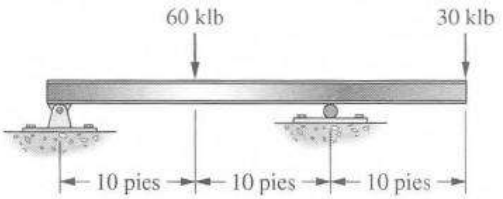


13.37 Resuelva el problema 13.10. (*Resp.:* 1.69 plg ↓.)

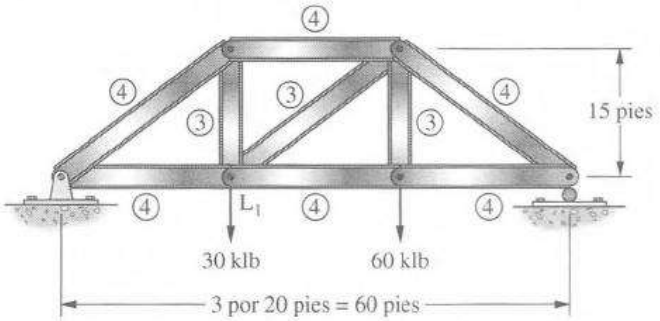
13.38 Deflexión bajo cada carga; I = 2 250 plg4.



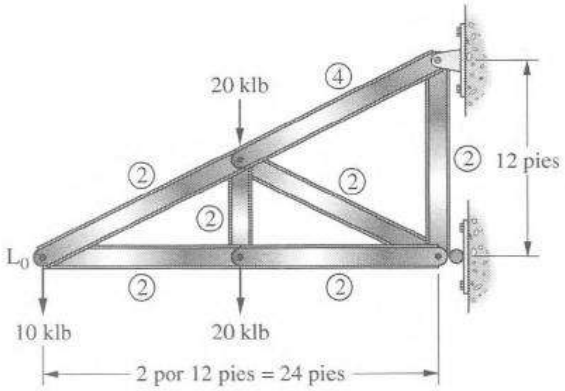
13.39 Pendiente y deflexión bajo la carga de 60 klb: I = 3 100 plg^4. (*Resp.:* 0.00040 rads /, 0.048 plg ↓.)



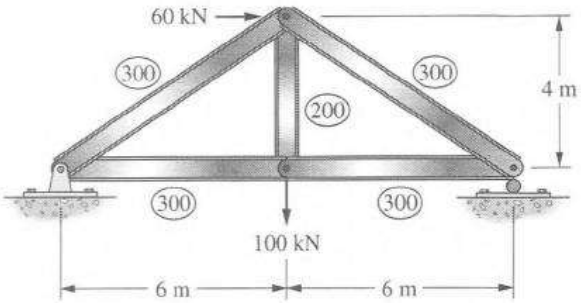
13.40 Deflexión vertical en el nudo L_1.



13.41 Deflexión vertical y horizontal en L_0. (*Resp.:* $\Delta_H = 0.0993$ plg ↓.)



13.42 Deflexión vertical en L_1 y deflexión horizontal en L_2.



PARTE DOS

ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

MÉTODOS CLÁSICOS

Capítulo 14

Introducción a las estructuras estáticamente indeterminadas

14.1 INTRODUCCIÓN

Cuando una estructura tiene más reacciones externas y/o fuerzas internas que las que pueden determinarse con las ecuaciones de equilibrio estático (incluyendo cualesquier ecuaciones de condición), esa estructura es estáticamente indeterminada o hiperestática. Una carga situada en alguna parte de una estructura hiperestática o continua producirá fuerzas cortantes, momentos flexionantes y deflexiones en las otras partes de la estructura. En otras palabras, las cargas aplicadas a una columna afectan a las vigas, a las losas, a otras columnas y viceversa. Esto es a menudo cierto, pero no necesariamente así con las estructuras estáticamente determinadas.

Hasta ahora este texto se ha dedicado por completo a las estructuras estáticamente determinadas, y el lector podría considerar, equivocadamente, que esas estructuras son las más comunes en la práctica. La verdad es que es difícil encontrar una viga ideal simplemente apoyada. Probablemente el mejor lugar para buscar una sería en un libro de texto sobre estructuras, ya que las conexiones atornilladas o soldadas entre vigas y columnas no son en realidad condiciones verdaderas de apoyo simple con momento nulo.

Lo mismo puede decirse de las armaduras estáticamente determinadas. Los nudos atornillados o soldados no son en realidad pasadores sin fricción, como se supuso anteriormente. Los otros supuestos sobre las armaduras que se asumieron en los primeros capítulos tampoco son del todo verdaderos y, en sentido estricto, todas las armaduras son estáticamente indeterminadas, ya que contienen momentos y fuerzas secundarias.

Casi todas las estructuras de concreto reforzado son hiperestáticas. El concreto para gran parte de un piso de concreto, incluyendo las vigas de apoyo, así como las trabes, y tal vez partes de las columnas, pueden colarse al mismo tiempo. Las varillas de refuerzo se extienden de elemento a elemento estructural, así como de claro a claro. Cuando se tienen juntas de construcción, las varillas de refuerzo se dejan sobresalir del concreto para poder empalmarse o unirse a las varillas del concreto que habrá de colarse después. Además, el concreto viejo se limpia y tal vez se pica de manera que el nuevo se adhiera a él tanto como sea posible. El resultado de todo esto es que las estructuras de concreto reforzado son por lo general monolíticas o continuas y, por ello, estáticamente indeterminadas.

Tal vez la única manera de construir una estructura de concreto reforzado estáticamente determinada sea basándose en elementos prefabricados en una planta de concreto y ensamblados en el lugar de la obra. Sin embargo, incluso estructuras como éstas tienen cierta continuidad en sus nudos.

Hasta los primeros años del siglo XX, los ingenieros en Estados Unidos evitaron, siempre que fue posible, el empleo de las estructuras estáticamente indeterminadas. Sin embargo, tres grandes desarrollos cambiaron esta actitud. Estos desarrollos fueron las estructuras monolíticas de concreto reforzado, la soldadura de arco en las estructuras de acero y los métodos modernos de análisis.

14.2 ESTRUCTURAS CONTINUAS

En la medida en que se incrementan los claros de las estructuras simples, sus momentos flexionantes aumentan con rapidez. Si el peso de una estructura por unidad de longitud permanece constante, de manera independiente del claro, el momento por carga muerta variará en proporción con el cuadrado de la longitud del mismo ($M_{máx} = wL^2/8$). Sin embargo, esta proporción no es correcta debido a que el peso de las estructuras debe aumentar a medida que los claros son más grandes, con el fin de que sean lo suficientemente fuertes y resistan el incremento de los momentos flexionantes. Por lo tanto, el momento por carga muerta crece más rápido que el cuadrado del claro.

Por motivos de economía, en el caso de grandes distancias entre apoyos se justifica la utilización de tipos de estructuras que tengan momentos menores que los de gran intensidad que aparecen en las estructuras simplemente apoyadas de grandes claros. En el capítulo 4 se presentó un tipo de estructura que reduce en forma considerable los momentos flexionantes: la de voladizo. A continuación se presentan otros dos tipos de estructuras que reducen los momentos de flexión.

En ciertos casos es posible tener una viga con ambos extremos empotrados en lugar de una viga simplemente apoyada. En la figura 14.1 se comparan los momentos flexionantes desarrollados en una viga simplemente apoyada con carga uniforme con los momentos de una viga doblemente empotrada con carga también uniforme.

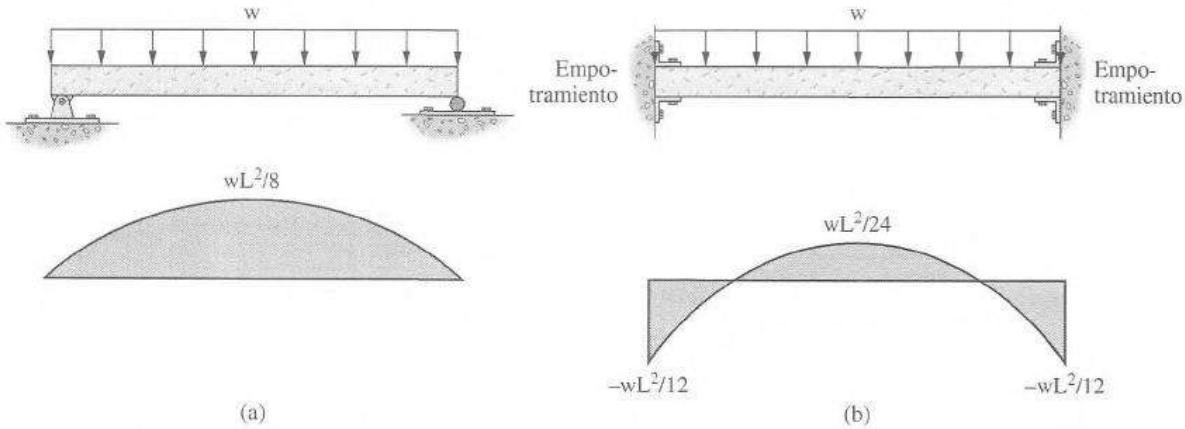
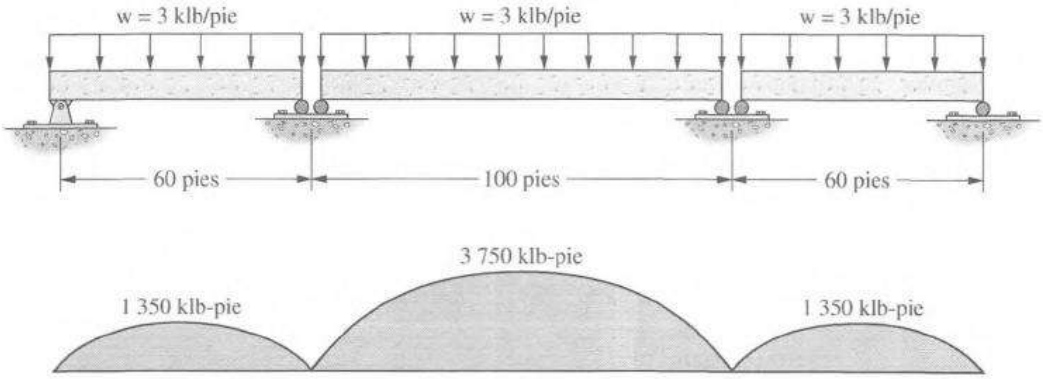
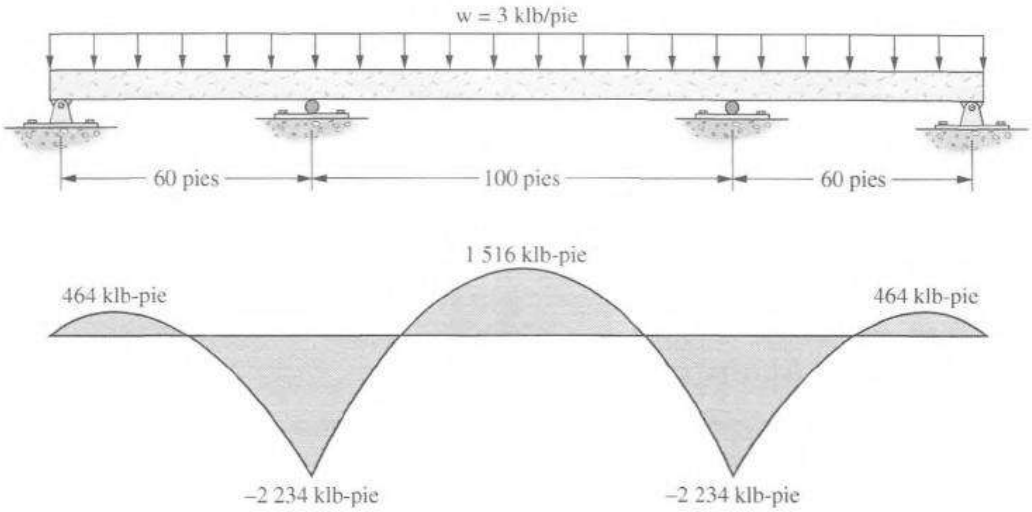


Figura 14.1 (a) Una viga simple y (b) una viga doblemente empotrada.

El momento flexionante máximo en la viga doblemente empotrada es sólo dos tercios del que se presenta en la viga simplemente apoyada. Por lo general, es difícil empotrar o fijar por completo los extremos de una viga, sobre todo en el caso de un puente. Por esta razón se emplean a menudo *claros laterales*, como se ve en la figura 14.2. Estos claros fijan en forma parcial a los soportes interiores, reduciéndose así el momento en el claro central. En la figura se presentan de manera comparativa los momentos flexionantes que se producen en tres vigas simples con carga uniforme (claros de 60, 100 y 60 pies) y los que aparecen en una viga continua, también con carga uniforme, sobre esos tres claros.



(a) Diagramas de momentos si se usan tres vigas simples.

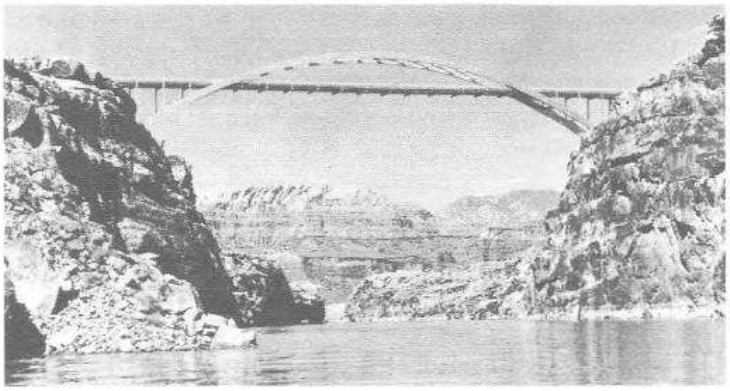


(b) Diagramas de momentos si se usa una viga continua.

Figura 14.2 Comparación de los momentos flexionantes en tres vigas simples contra una viga continua.

El momento flexionante máximo en el caso de una viga continua es casi 40% menor que cuando se tienen las vigas simples. Por desgracia, no existe un correspondiente 40% de reducción en el costo total de la estructura. El factor real de reducción de costo probablemente sea un pequeño porcentaje del costo total de la estructura, debido a que conceptos tales como cimentación, conexiones y sistemas de piso, no se reducen en forma importante al reducirse los momentos. Al variar las longitudes de los claros laterales cambiará la magnitud del momento máximo que ocurre en el elemento continuo. Para una carga constante uniforme sobre los tres claros, el menor momento ocurrirá cuando los claros laterales tengan tanto como 0.3 a 0.4 veces la longitud del claro central.

En la explicación anterior se vio que los momentos máximos desarrollados en las vigas se reducen bastante por la continuidad en la estructura. Esta disminución se produce en lugares donde las vigas están rígidamente unidas entre sí, o bien, donde las vigas se conectan en forma rígida a las columnas de una estructura. Existe continuidad de acción en la resistencia a una carga aplicada en cualquier parte de una estructura continua, debido a que la carga es resistida por el esfuerzo combinado de todos los elementos del marco.



Puente de arco sobre el río Colorado, Utah, Ruta 95. (Cortesía del Departamento de Transporte de Utah.)

14.3 VENTAJAS DE LAS ESTRUCTURAS INDETERMINADAS

Al comparar las estructuras hiperestáticas con las isostáticas, la primera consideración para la mayoría de los ingenieros deberá corresponder al costo. Sin embargo, es imposible justificar económicamente la selección de uno u otro tipo de estructura sin ciertas reservas. Cada forma estructural presenta una situación diferente y única y, por lo tanto, deberán tenerse en cuenta todos los factores, sean éstos de índole económica o de otro tipo. En general, las estructuras estáticamente indeterminadas tienen ciertas ventajas que se describen a continuación.

Ahorro de materiales

Los menores momentos flexionantes desarrollados permiten que el ingeniero seleccione elementos más pequeños para las componentes estructurales. El ahorro de material posiblemente puede ser del orden de 10 a 20% para puentes carreteros. El gran número de inversiones en las fuerzas que se producen en puentes ferroviarios permite sólo ahorros o economías de 10 por ciento.

Un elemento estructural de determinadas dimensiones podrá soportar más carga si es parte de una estructura continua que si estuviese simplemente apoyado. La continuidad permite el uso de elementos de menores dimensiones para las mismas cargas y claros, o bien, un mayor espaciamiento de los apoyos para elementos de iguales dimensiones. La posibilidad de utilizar menos columnas en los edificios, o un menor número de pilares en el caso de los puentes, puede ocasionar una reducción global de los costos.

Las estructuras continuas de concreto o acero son menos costosas al no tener las articulaciones, los pasadores y los demás elementos requeridos para ser estáticamente determinadas, como era la práctica en épocas pasadas. Las estructuras de concreto reforzado de tipo monolítico se edifican de manera que son naturalmente continuas y estáticamente indeterminadas. La instalación de articulaciones y de otros mecanismos de apoyo necesarios para convertir esos sistemas estructurales en estructuras estáticamente determinadas no sólo presentaría difíciles problemas de construcción, sino que además elevaría bastante los costos. Más aún, una construcción constituida por columnas y por vigas simplemente apoyadas necesariamente tendría que reforzarse utilizando contraventeo diagonal indeseable entre sus juntas, con el fin de tener una estructura estable y rígida.

Mayores factores de seguridad

Las estructuras estáticamente indeterminadas tienen con frecuencia mayores factores de seguridad que las estáticamente determinadas. Cuando partes de estructuras estáticamente indeterminadas de acero o de concreto reforzado resultan sobreesforzadas, éstas tienen a menudo la capacidad

de redistribuir parte de esos esfuerzos a zonas con menor esfuerzo. Las estructuras estáticamente determinadas no tienen por lo general esta capacidad.[1] Si los momentos flexionantes en una componente de una estructura estáticamente determinada alcanzan la capacidad por momento último de esa componente, la estructura fallará. Éste no es el caso en estructuras estáticamente indeterminadas, ya que la carga puede redistribuirse a otras partes de la estructura.

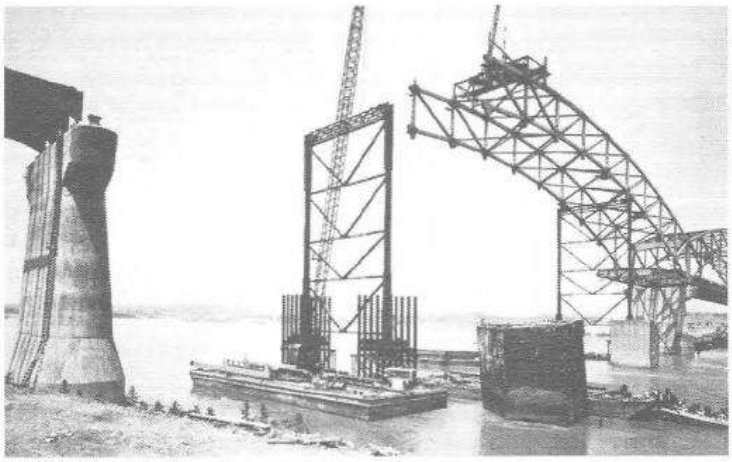
Puede mostrarse con claridad que una viga o un marco estáticamente indeterminado, por lo regular no fallará cuando su capacidad de momento último se alcance en sólo una sección. Más bien, habrá una redistribución de los momentos en la estructura. Su comportamiento es muy similar al caso en que tres hombres caminan con un tronco en sus hombros y uno de ellos se cansa y baja su hombro un poco. El resultado es una redistribución de cargas a los otros hombres, cambiando así las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes a lo largo del tronco.

Mayor rigidez y menores deflexiones

Las estructuras estáticamente indeterminadas son más rígidas que las estáticamente determinadas y sus deflexiones son menores. Gracias a su continuidad, son más rígidas y tienen mayor estabilidad frente a todo tipo de cargas (horizontal, vertical, móvil, etcétera).

Estructuras más atractivas

Es difícil imaginar a las estructuras estáticamente determinadas con la belleza arquitectónica de muchos arcos y marcos rígidos hiperestáticos que se construyen hoy día.



Puente Broadway Street con sección en voladizo en proceso de montaje, Kansas City, Missouri. (Cortesía de la USX Corporation.)

Adaptabilidad al montaje en voladizo

El método de montaje en voladizo de puentes es de gran valor cuando las condiciones por debajo del nivel de la superficie de rodamiento del puente (tráfico naval o niveles muy profundos del agua) obstaculizan el montaje de la obra falsa. Los puentes continuos estáticamente indeterminados y los de tipo en voladizo pueden edificarse en forma conveniente con el método de montaje en voladizo.

[1] J. C. McCormac y J. K. Nelson, Jr. *Structural Steel Design LRFD Method*, 3a. ed. (upper Saddle River, N. J.; Prentice Hall, 2003), 221-231.

14.4 DESVENTAJAS DE LAS ESTRUCTURAS INDETERMINADAS

Un análisis comparativo de las estructuras estáticamente determinadas con las estáticamente indeterminadas pone de relieve que estas últimas poseen ciertas desventajas que las hacen poco prácticas en muchas aplicaciones. Estas desventajas se explican con todo detalle en los párrafos siguientes.

Asentamiento de los apoyos

Las estructuras hiperestáticas no resultan convenientes en todos aquellos casos donde las condiciones de cimentación son desfavorables, pues los asentamientos o ladeos que se presentan en los apoyos de la estructura, por leves que parezcan, pueden causar cambios notables en los momentos flexionantes, las fuerzas cortantes, las reacciones y las fuerzas en los miembros. En los casos donde se realice la construcción de puentes con estructura hiperestática, a pesar de que existan condiciones de cimentación deficientes, suele ser necesario cuantificar físicamente las reacciones debidas a carga muerta. Los puntos de apoyo del puente se levantan o se bajan de manera mecánica hasta un nivel en donde se presente la reacción calculada. Entonces los apoyos de la estructura se construyen hasta ese nivel.

Aparición de otros esfuerzos

El hundimiento de los apoyos no es la única condición que altera los esfuerzos que se producen en estructuras estáticamente indeterminadas. Los cambios en la posición relativa de los elementos estructurales causados por variación de temperatura, fabricación deficiente o deformaciones internas por acción de la carga, pueden causar cambios graves en las fuerzas en toda la estructura.

Dificultad de análisis y diseño

Las fuerzas en las estructuras estáticamente indeterminadas no sólo dependen de sus dimensiones, sino también de sus propiedades elásticas y de las secciones transversales (módulo de elasticidad, momentos de inercia y áreas). Esta situación da lugar a una seria dificultad en cuanto a su diseño: no podrán determinarse las fuerzas sino hasta conocer las dimensiones de los elementos estructurales, y no podrán determinarse las dimensiones si no se conocen antes las fuerzas que actúan en ellos. El problema se resuelve suponiendo las dimensiones de sus elementos y calculando las fuerzas, diseñando los elementos para esas fuerzas y evaluando las fuerzas para las nuevas dimensiones supuestas, y así sucesivamente, hasta lograr el diseño final. El cálculo mediante este procedimiento (*método de aproximaciones sucesivas*) es más tardado que el que se requiere para diseñar una estructura isostática similar, pero el costo adicional sólo es una pequeña parte del costo total de la estructura. Estos diseños se llevan a cabo de la mejor manera por medio de la interacción del diseñador con una computadora. La computación interactiva se usa mucho en la actualidad en las industrias automotriz y aeronáutica.

Inversión de esfuerzos

Por lo general, en las estructuras hiperestáticas se produce un mayor número de inversiones de fuerza que en las estructuras isostáticas. En algunas ocasiones se requiere más material de refuerzo en ciertas secciones de la estructura para resistir los diferentes estados de esfuerzo y para evitar fallas por fatiga.

14.5 MÉTODOS PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Las estructuras estáticamente indeterminadas contienen más fuerzas desconocidas que ecuaciones disponibles de equilibrio estático para su solución. Por ello, estas estructuras no pueden analizarse usando sólo las ecuaciones de equilibrio estático; se requieren ecuaciones adicionales. Las fuerzas no necesarias para mantener a una estructura en equilibrio y estable son fuerzas redundantes. Las fuerzas redundantes pueden ser fuerzas de reacción o fuerzas en los miembros que constituyen a la estructura. Hay dos enfoques generales que se usan para encontrar las magnitudes de esas fuerzas redundantes: *métodos de fuerzas* y *métodos de desplazamientos*. En esta sección se analizan las bases de estos métodos.

Métodos de fuerzas

En el método de fuerzas se formulan ecuaciones de condición que implican un desplazamiento en cada una de las fuerzas redundantes en la estructura para proporcionar las ecuaciones adicionales necesarias para la solución. Se escriben ecuaciones de desplazamiento por y en la dirección de las fuerzas redundantes; se escribe una ecuación para la condición de desplazamiento en cada fuerza redundante. De las ecuaciones resultantes se despejan las fuerzas resultantes, que deben ser suficientemente grandes para satisfacer las condiciones de frontera. Como veremos pronto, las condiciones de frontera no necesariamente tienen que ser un desplazamiento cero. Los métodos de fuerzas también se llaman *métodos de flexibilidades* o *métodos de compatibilidad*.

James Clerk Maxwell publicó por primera vez en 1864 un método de fuerzas para analizar estructuras hiperestáticas. Su método se basó en una consideración de las deflexiones, pero la exposición (que incluía el teorema de las deflexiones recíprocas) fue muy breve y no llamó mucho la atención. Diez años después Otto Mohr, independientemente, amplió la teoría hasta darle casi su estado actual de desarrollo. El análisis de estructuras redundantes empleando deflexiones se denomina, en algunas ocasiones, *método de Maxwell-Mohr* o *método de las deformaciones consistentes*.[2,3]

Los métodos de fuerzas del análisis estructural son útiles para analizar vigas, marcos y armaduras estáticamente indeterminadas de primero o segundo grados. Son también útiles para algunos marcos de un solo nivel con dimensiones poco comunes. Para estructuras de gran indeterminación estática, como son los edificios de múltiples niveles y las armaduras complejas grandes, otros métodos son más apropiados y útiles. Estos métodos, que incluyen a la distribución de momentos y los métodos matriciales, que se verán en capítulos posteriores, son mucho más convenientes. De hecho, los métodos de fuerzas han sido superados casi por completo por los métodos de análisis descritos en la parte tres de este texto. Sin embargo, el estudio de los métodos de fuerzas proporciona un claro entendimiento del comportamiento de las estructuras estáticamente indeterminadas que no se podría obtener de otro modo.

Métodos de los desplazamientos o de las rigideces

En los métodos de análisis de desplazamientos se establecen ecuaciones con los desplazamientos de los nudos (rotaciones y traslaciones) necesarios para describir completamente la configuración deformada de la estructura, a diferencia de las ecuaciones del método de fuerzas que contienen acciones redundantes. Al resolver las ecuaciones simultáneas se encuentran esos desplazamientos, los cuales se sustituyen en las ecuaciones originales para determinar las diversas fuerzas internas.

[2] J. I. Parcel y R. B. B. Moorman, *Analysis of Statically Indeterminate Structures*. (Nueva York, Wiley, 1955), p. 48.

[3] J. S. Kinney, *Indeterminate Structural Analysis* (Reading, Mass., Addison-Wesley, 1957), pp. 12-13.

El método de los desplazamientos más comúnmente usado es el método matricial que se presenta en los capítulos 22 al 25.

14.6 MIRANDO HACIA ADELANTE

En los capítulos 15 al 18 se presentan varios métodos clásicos de análisis de estructuras estáticamente indeterminadas. Entre ellos figuran el método de las deformaciones consistentes, los teoremas de Castigliano y el método de pendiente-deflexión. Los primeros dos métodos son métodos de fuerzas, mientras que el último es de análisis por desplazamientos. Esos métodos son principalmente de interés histórico y casi nunca se usan en la práctica. Sin embargo, constituyen la base de los métodos modernos de análisis.

El autor ha incluido en la parte tres (capítulos 19 al 25) métodos para analizar estructuras estáticamente indeterminadas, usados a menudo hoy día por los ingenieros estructurales. Primero se presentan varios métodos aproximados de análisis y luego se estudian con todo detalle los métodos de distribución de momentos y los matriciales. Hablando honestamente, los análisis de computadora basados en los métodos matriciales son casi el "único juego en casa" en la actualidad.

Capítulo 15

Métodos de fuerzas para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas

15.1 VIGAS Y MARCOS CON UNA REDUNDANTE

Al método de fuerzas para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas frecuentemente se le denomina *método de las distorsiones consistentes*. Como una primera ilustración de las distorsiones consistentes se considera a la viga de dos claros de la figura 15.1(a). Se supone que la viga consiste en un material que sigue la ley de Hooke. Esta estructura estáticamente indeterminada sustenta las cargas P_1 y P_2 y a su vez es sustentada por las componentes de reacción en los puntos A, B y C. La remoción del apoyo B dejaría una viga estáticamente determinada, lo que prueba que la estructura es estáticamente indeterminada en primer grado. Con este apoyo eliminado es una cuestión simple encontrar la deflexión en B, Δ_B, en la figura 15.1(b), causada por las cargas externas.

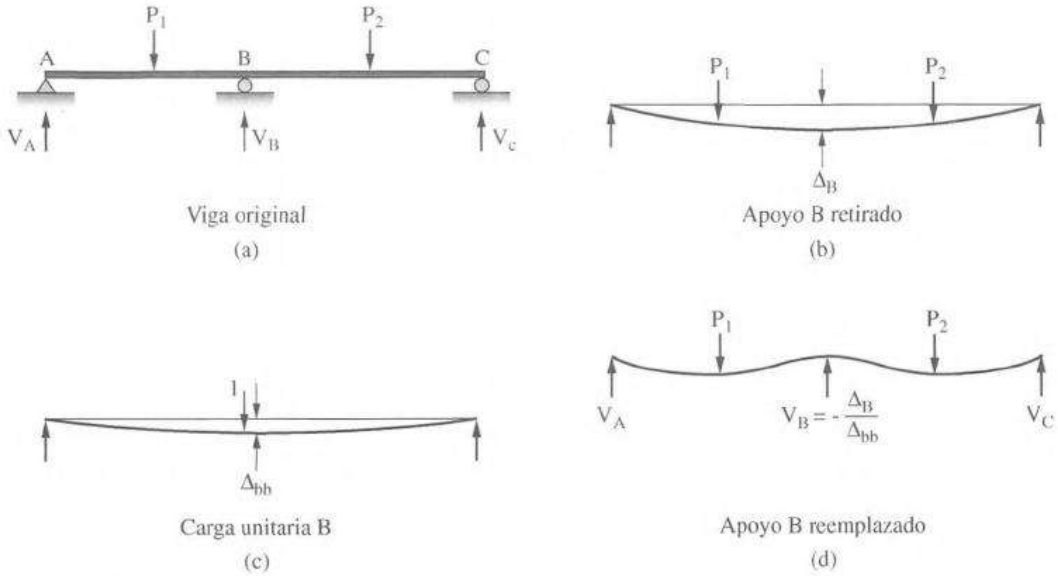


Figura 15.1

Si se retiran las cargas externas de la viga y se coloca una carga unitaria en B, se desarrollará una deflexión en B igual a Δ_{bb}, como se indica en la figura 15.1(c). Las deflexiones debidas a las cargas externas se denotan aquí con letras mayúsculas. La deflexión en el punto C en una viga debida a las cargas externas sería Δ_C. Las deflexiones debidas a la carga unitaria imaginaria se

Viaducto I-180, Cheyenne, Wyoming. (Cortesía del Departamento estatal de carreteras de Wyoming.)

denotan con dos letras minúsculas. La primera letra indica la posición de la deflexión y la segunda indica la posición de la carga unitaria. La deflexión en E causada por una carga unitaria en B sería Δ_{eb}. A los desplazamientos causados por las cargas unitarias se les llama a menudo *coeficientes de flexibilidad*.

El apoyo B no es susceptible de asentamientos, y su remoción es simplemente una suposición de conveniencia. Una fuerza hacia arriba está presente en B y es suficiente par evitar cualquier deflexión, o, si continuamos con la línea de razonamiento ficticia, hay una fuerza en B que es suficientemente grande para empujar al punto B de regreso a su posición original sin deflexión. La distancia que el apoyo debe ser empujado es Δ_B.

Una carga unitaria en B causa una deflexión en B igual a Δ_{bb} y una carga en B de 10 klb causará una deflexión de $10\Delta_{bb}$. Similarmente, una reacción hacia arriba en B de V_B empujará a B hacia arriba una cantidad $V_B\Delta_{bb}$. La deflexión total en B debida a las cargas externas y la reacción V_B son cero y pueden expresarse como sigue:

$$\Delta_B + V_B\Delta_{bb} = 0$$

$$V_B = -\frac{\Delta_B}{\Delta_{bb}}$$

El signo negativo en esta expresión indica que V_B está en dirección opuesta a la carga unitaria hacia abajo. Si la solución de la expresión arroja un valor positivo, la reacción está en la misma dirección que la carga unitaria. Los ejemplos 15.1 a 15.4 ilustran el método de fuerzas para calcular las reacciones de vigas estáticamente indeterminadas que tengan una componente de reacción redundante. El ejemplo 15.5 muestra que el método puede ampliarse para incluir también marcos estáticamente indeterminados. Las deflexiones necesarias para los primeros cuatro ejemplos se determinan con el procedimiento de la viga conjugada, mientras que las del ejemplo 15.5 se determinan mediante el trabajo virtual. Después de encontrar el valor de la reacción redundante para cada problema, las otras reacciones se determinan mediante la estática, y se trazan diagramas de fuerza cortante y de momento.

EJEMPLO 15.1

Determinar las reacciones y dibujar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga con dos claros de la figura 15.2; suponga que V_B es la redundante; E e I son constantes.

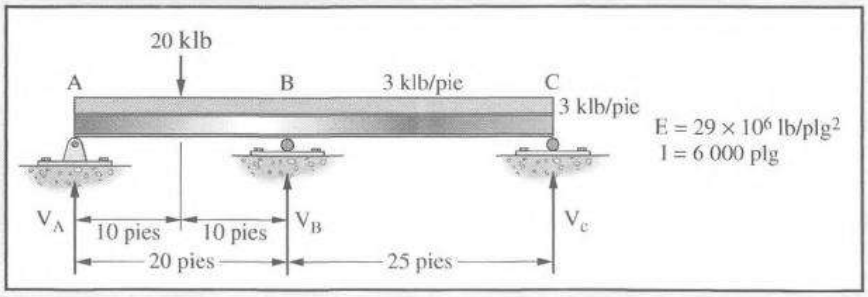
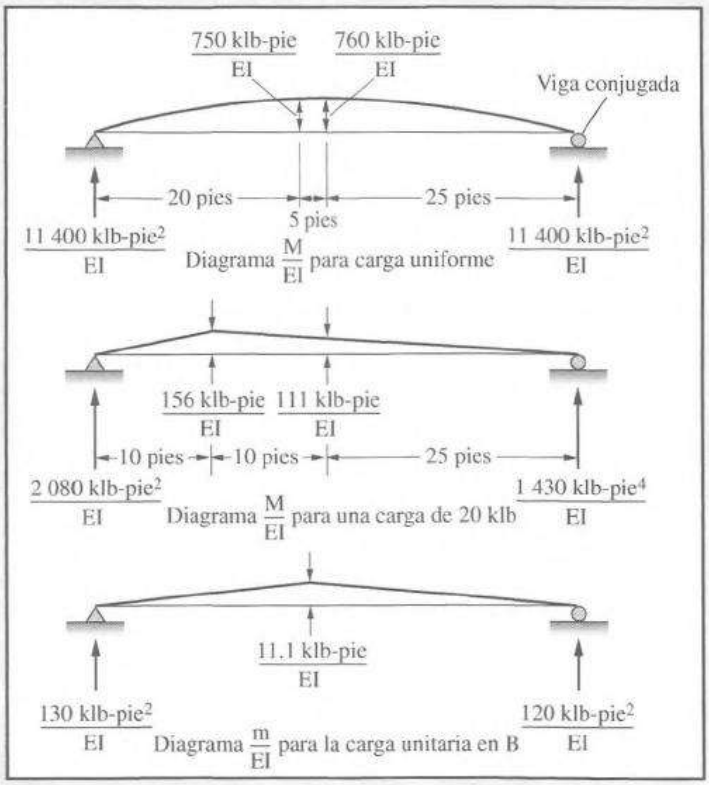


Figura 15.2

Solución. Separando la carga uniforme y la carga concentrada y trazando sus diagramas $\frac{M}{EI}$.



Calculando Δ_B, Δ_{bb} y V_B

$$EI\Delta_B = (20)(11\,400) - \left(\tfrac{1}{2}\right)(20)(750)(6.67) - \frac{(3)(20)^3}{12}(10)$$
$$+ (1\,430)(25) - \left(\tfrac{1}{2}\right)(25)(111)(8.33)$$
$$EI\Delta_B = 182\,100\,\text{klb-pie}^3$$
$$EI\Delta_{bb} = (20)(130) - \left(\tfrac{1}{2}\right)(20)(11.1)(6.67)$$
$$EI\Delta_{bb} = 1\,860\ \text{pie}^3$$
$$V_B = -\frac{\Delta_B}{\Delta_{bb}} = -\frac{182\,100}{1\,860} = 98\ \text{klb}\ \uparrow$$

Calculando las reacciones en A y C mediante la estática,

$$\sum M_A = 0$$

$$(20)(10) + (45)(3)(22.5) - (20)(98) - 45V_C = 0$$

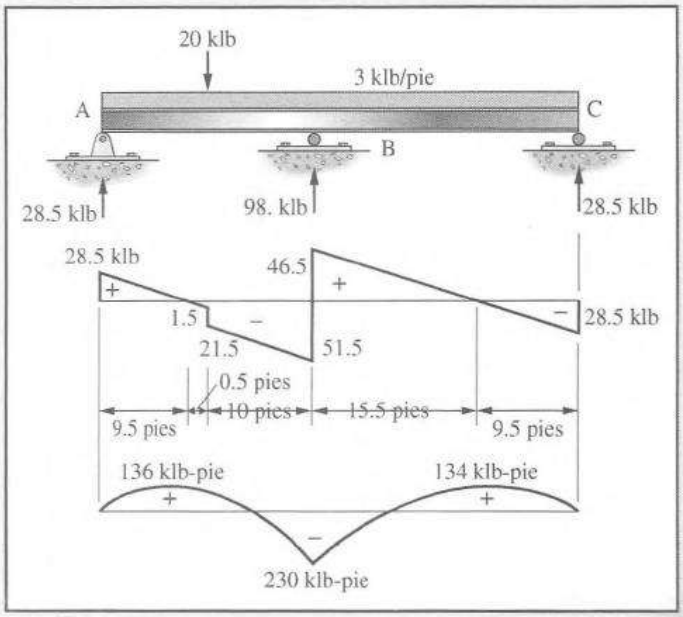
$$V_C = 28.5 \text{ klb} \uparrow$$

$$\sum V = 0$$

$$20 + (3)(45) - 98 - 28.5 - V_A = 0$$

$$V_A = 28.5 \text{ klb} \uparrow$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento:



■

EJEMPLO 15.2

Determinar las reacciones y trazar los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga apuntalada mostrada en la figura 15.3. Considere que V_B es la redundante; E e I son constantes.

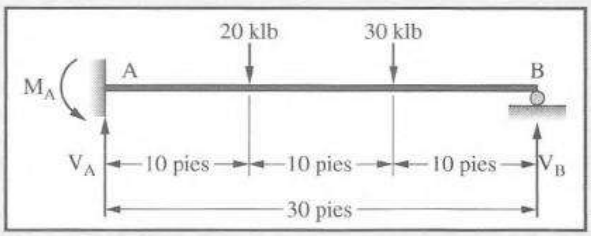
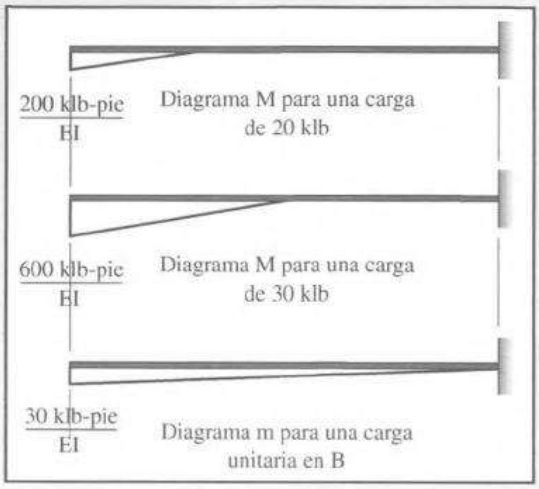


Figura 15.3

Solución.



$$EI\Delta_B = \left(\tfrac{1}{2}\right)(200)(10)(26.67) + \left(\tfrac{1}{2}\right)(600)(20)(23.33) = 166\ 670 \text{ klb-pie}^3$$

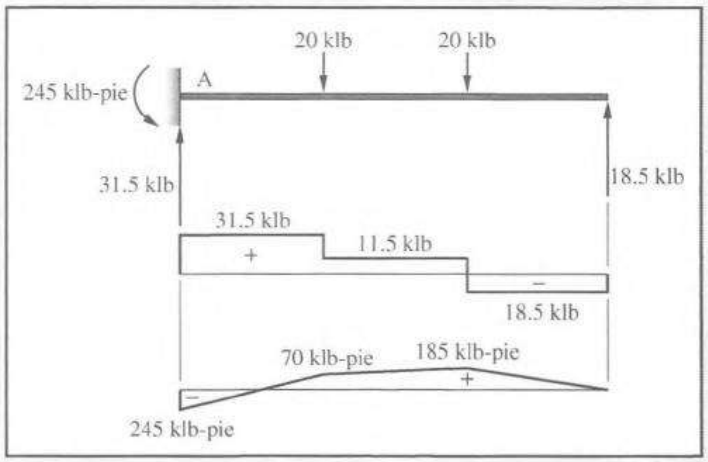
$$EI\Delta_{bb} = \left(\tfrac{1}{2}\right)(30)(30)(20) = 9\ 000 \text{ pie}^3$$

$$V_B = -\frac{166\ 670}{9\ 000} = 18.5 \text{ klb} \uparrow$$

Por estática

$$V_A = 31.5 \text{ klb} \uparrow \text{ y } M_A = 245 \text{ klb-pie} \circlearrowleft$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento:



■

EJEMPLO 15.3

Resuelva de nuevo el ejemplo 15.2, pero esta vez use el momento resistente en el empotramiento como la redundante.

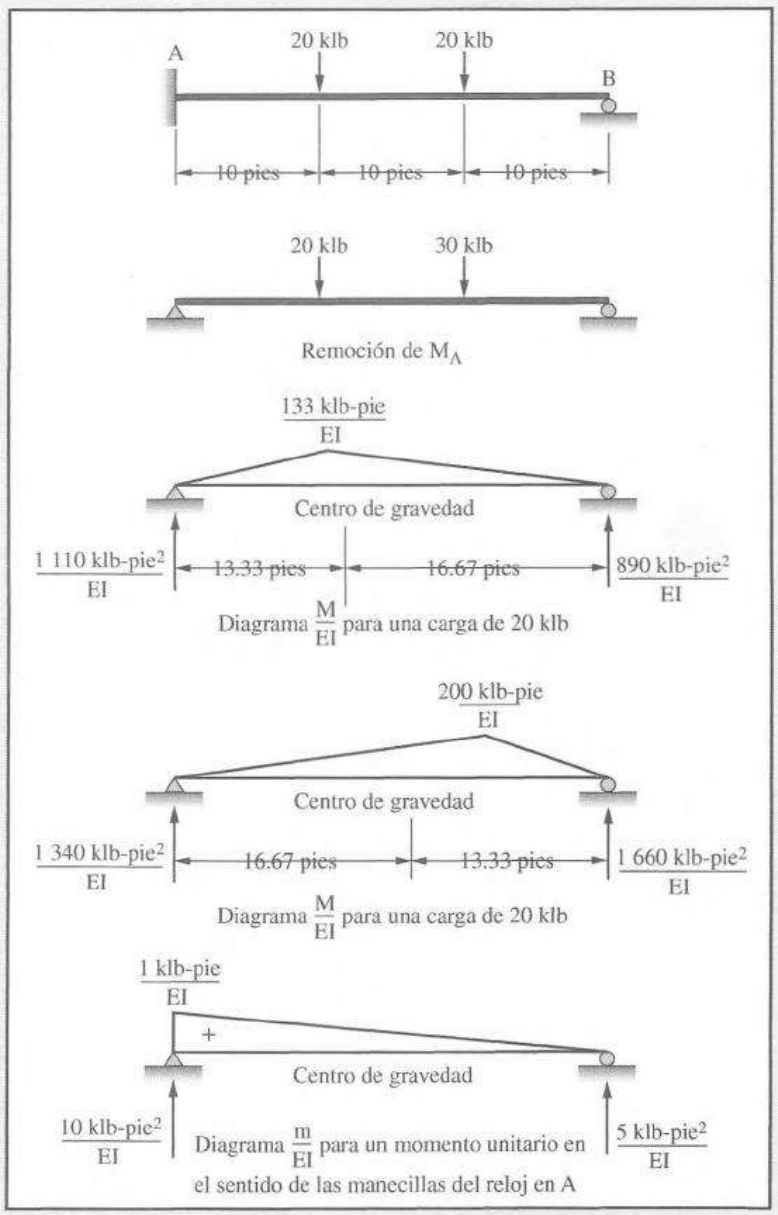
Solución. Cualquiera de las reacciones puede considerarse como la redundante y aislarse, siempre que se tenga una estructura estable. Si se elimina el momento resistente en A, queda un apoyo simple y las cargas de la viga hacen que la tangente a la curva elástica gire una cantidad θ_A. Un estudio breve de esta condición revelará un método para determinar el momento.

El valor de θ_A es igual a la fuerza cortante en A en la viga conjugada cargada con el diagrama M/EI. Si se aplica un momento unitario en A, la tangente a la curva elástica girará una cantidad θ_{aa}, lo que también puede encontrarse con el procedimiento de la viga conjugada. La tangente a la curva elástica en A en realidad no gira; por lo tanto, cuando se reemplaza a M_A, debe ser de suficiente magnitud para restituir a la tangente a su posición horizontal original. Puede escribirse la siguiente expresión igualando a θ_A con cero y puede despejarse el valor de la redundante M_A.

$$\theta_A + M_A\theta_{aa} = 0$$

$$M_A = -\frac{\theta_A}{\theta_{aa}}$$

Solución.



De los diagramas $\frac{M}{EI}$

$$\theta_A = \frac{1\,110 + 1\,340}{EI} = \frac{2\,450 \text{ klb-pie}^2}{EI}$$

$$\theta_{aa} = \frac{10 \text{ pies}}{EI}$$

$$M_A = -\frac{\theta_A}{\theta_{aa}} = -\frac{2\,450}{10} = 245 \text{ klb-pie} \circlearrowleft \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 15.4

Calcule las reacciones y trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga de dos claros mostrada en la figura 15.4. Suponga que el momento en el apoyo interior B es la redundante.

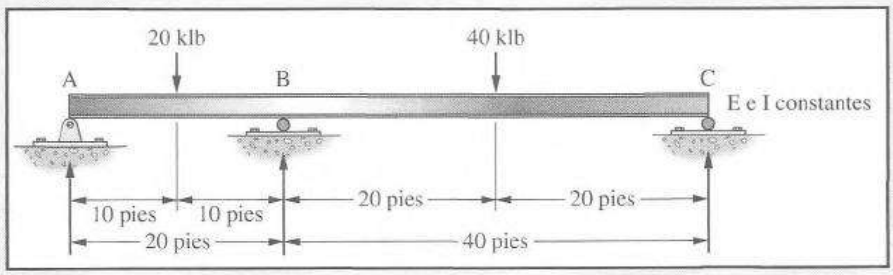
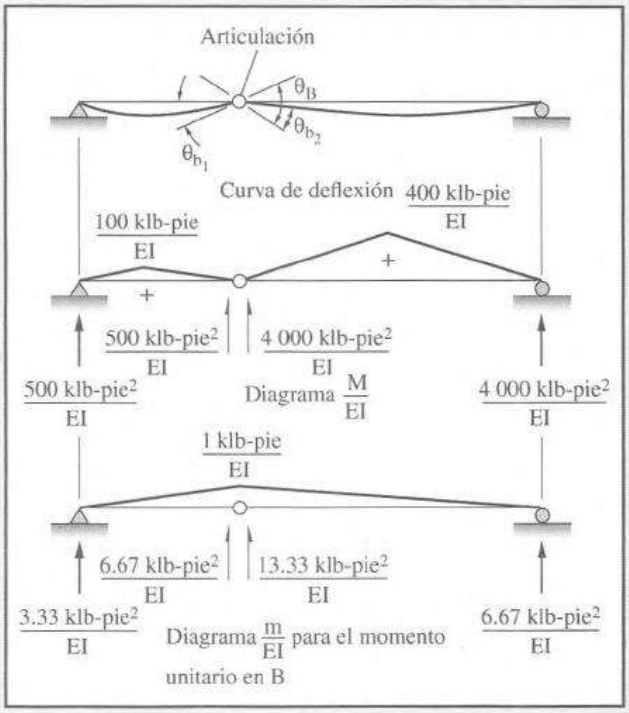


Figura 15.4

Solución. La remoción del momento del apoyo interior cambia al apoyo a una articulación, y las vigas a cada uno de los lados tienen libertad de rotación, independientemente de como lo indican los ángulos θ_{b_1} y θ_{b_2} en la curva de deflexión que se muestra. Los valores numéricos de los ángulos pueden encontrarse colocando el diagrama M/EI sobre la estructura conjugada y calculando la fuerza cortante a cada lado del apoyo. En la viga real no hay cambio de pendiente de la tangente a la curva elástica desde una pequeña distancia a la izquierda de B hasta una pequeña distancia a la derecha de B.

El ángulo representado en el diagrama por θ_B es el ángulo entre las tangentes a la curva elástica a cada lado del apoyo (es decir, $\theta_{b_1} + \theta_{b_2}$). El momento real M_B, cuando se le reemplaza, debe ser de magnitud suficiente para restituir las tangentes a su posición original o para reducir θ_B a cero. Un momento unitario aplicado a cada lado de la articulación produce un cambio de la pendiente de θ_{bb}; por lo tanto, una expresión para la magnitud de M_b es:

$$M_B = -\frac{\theta_B}{\theta_{bb}}$$



Solución.

$$\theta_{b_1} = \frac{500 \text{ klb-pie}^2}{EI}$$

$$\theta_{b_2} = \frac{4\,000 \text{ klb-pie}^2}{EI}$$

$$\theta_B = \theta_{b_1} + \theta_{b_2} = \frac{4\,500 \text{ klb-pie}^2}{EI}$$

$$\theta_{bb} = 6.67 + 13.33 = \frac{20 \text{ klb-pie}^2}{EI}$$

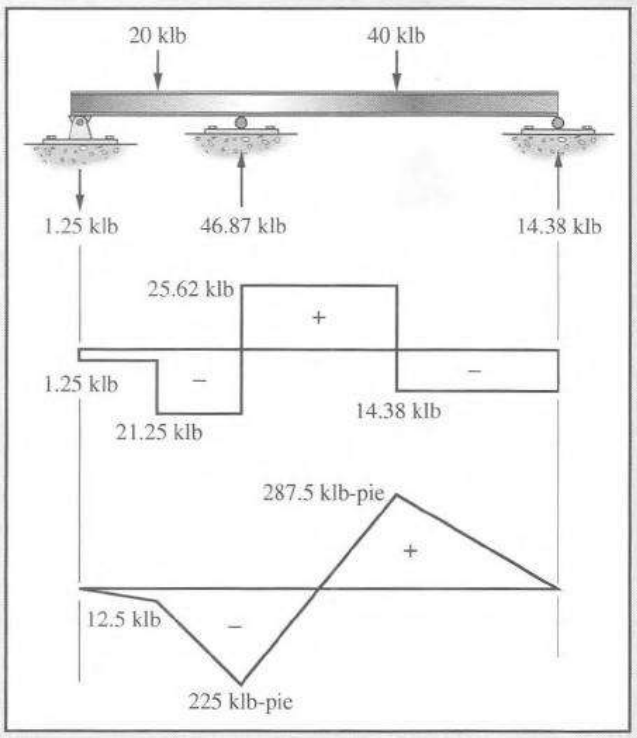
$$M_B = -\frac{\theta_B}{\theta_{bb}} = -\frac{4\,500}{20} = -225 \text{ klb-pie}$$

Mediante la estática se encuentran las siguientes reacciones:

$$V_A = -1.25 \text{ klb}$$

$$V_B = -46.87 \text{ klb}$$

$$V_C = -14.38 \text{ klb}$$



EJEMPLO 15.5

Calcule las reacciones y trace el diagrama de momento para la estructura mostrada en la figura 15.5.

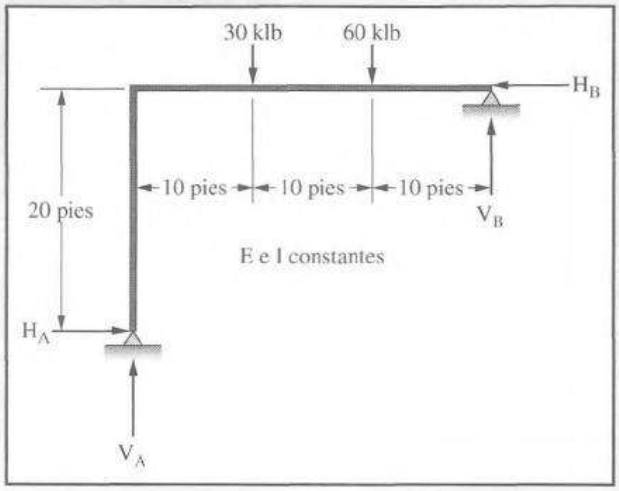
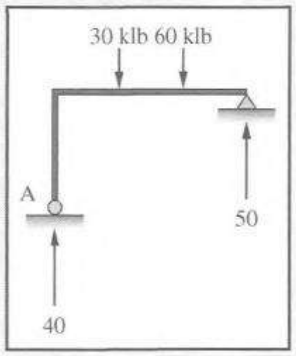


Figura 15.5

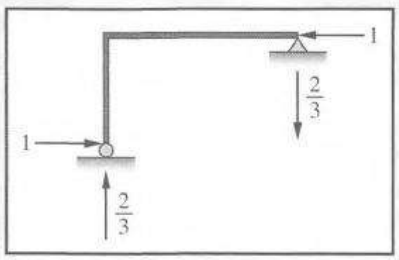
Solución. Retire H_A como la redundante. Esto cambiará a A a un apoyo de tipo de rodillo.



Calcule la deflexión horizontal en A mediante trabajo virtual. El resultado es

$$\Delta_A = \frac{86\,600 \text{ klb-pie}^3}{EI} \leftarrow$$

Aplique una carga horizontal unitaria en A y determine la deflexión horizontal Δ_{aa}.



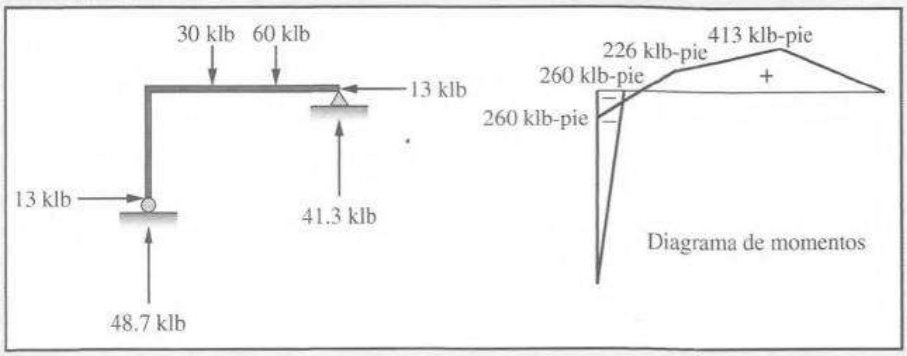
El resultado es

$$\Delta_{aa} = +\frac{6\,667 \text{ klb-pie}^3}{EI} \rightarrow$$

$$\Delta_A + H_A\Delta_{aa} = 0$$

$$H_A = -\frac{\Delta_A}{\Delta_{aa}} = -\frac{-86\,660}{+6\,667} = +13 \text{ klb} \rightarrow$$

Calcule las reacciones restantes mediante la estática.



Puente sobre el río Raritan en Nueva Jersey. (Cortesía de Steinman, Boynton, Gronquist & Birdsall Consulting Engineers.)

15.2 VIGAS Y MARCOS CON DOS O MÁS REDUNDANTES

El método de fuerzas para analizar vigas y marcos con una redundante puede ampliarse al análisis de vigas y de marcos con dos o más redundantes. A continuación se considerará la viga continua con dos reacciones redundantes que se muestra en la figura 15.6.

Para hacer que la viga sea estáticamente determinada, es necesario retirar dos apoyos. Se supone que retiramos los apoyos B y C, y se calculan sus deflexiones Δ_B y Δ_C debidas a las cargas externas. Teóricamente se retiran las cargas externas de la viga; se coloca una carga unitaria en B; y se encuentran las deflexiones en B y C (Δ_{bb} y Δ_{cb}). La carga unitaria se mueve a C, y se determinan las deflexiones en los dos puntos Δ_{bc} y Δ_{cc}.

Las reacciones en los apoyos B y C empujan a estos puntos hacia arriba hasta que están en sus posiciones originales de deflexión cero. La reacción V_B elevará a B una cantidad $V_b\Delta_{bb}$ y a C una cantidad $V_B\Delta_{cb}$. La reacción V_C eleva a C por $V_C\Delta_{cc}$ y a B por $V_C\Delta_{bc}$.

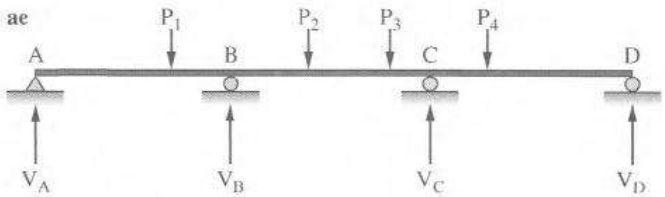
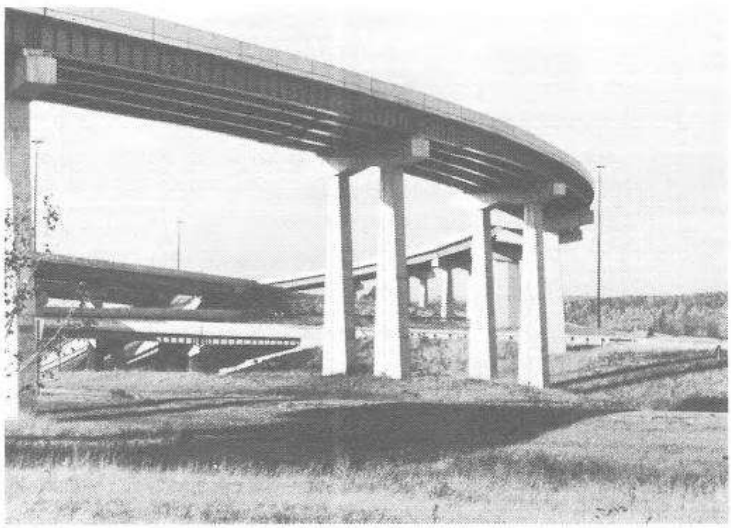


Figura 15.6



Paso a desnivel I-81 de la ruta fluvial auxiliar en Harrisburg, Pennsylvania. (Cortesía de Gannett Fleming.)

Puede escribirse una ecuación para la deflexión en cada uno de los apoyos. Ambas ecuaciones contienen las dos incógnitas V_B y V_C, y sus valores pueden obtenerse resolviendo las ecuaciones simultáneamente.

$$\Delta_B + V_B\Delta_{bb} + V_C\Delta_{bc} = 0$$
$$\Delta_C + V_B\Delta_{cb} + V_C\Delta_{cc} = 0$$

El método de fuerzas para calcular las reacciones redundantes puede ampliarse indefinidamente a estructuras con cualquier número de redundantes. Sin embargo, los cálculos pueden llegar

a ser bastante tediosos, si hay más de dos o tres redundantes. Considerando la viga de la figura 15.7 pueden escribirse las siguientes expresiones:

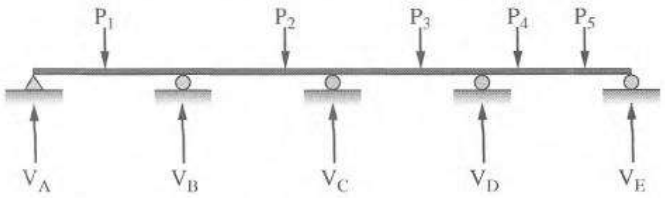


Figura 15.7

$$\Delta_B + V_B\Delta_{bb} + V_C\Delta_{bc} + V_D\Delta_{bd} = 0$$
$$\Delta_C + V_B\Delta_{cb} + V_C\Delta_{cc} + V_D\Delta_{cd} = 0$$
$$\Delta_D + V_B\Delta_{db} + V_C\Delta_{dc} + V_D\Delta_{dd} = 0$$

15.3 ASENTAMIENTO DE APOYOS

En las secciones precedentes se han considerado vigas continuas con apoyos que no experimentan desplazamiento alguno. No obstante, si un apoyo se asienta o sufre algún tipo de desplazamiento con respecto a su posición teórica original, pueden aparecer en la estructura cambios notables en reacciones, fuerzas cortantes, momentos flexionantes y esfuerzos. Cualesquiera que sean los factores que causen los desplazamientos en los soportes (cimentaciones débiles, cambios de temperatura, montaje o fabricación deficientes, etc.), el análisis podrá desarrollarse mediante las ecuaciones de deformación establecidas antes para las vigas continuas.

En la sección 15.1 desarrollamos una expresión para la deflexión en el punto B para la viga de dos claros de la figura 15.1. Esta expresión se desarrolló suponiendo que el soporte B se retiraba temporalmente de la estructura, permitiendo que el punto B se deflexione, después de lo cual el apoyo se reemplazaba. Se suponía que la reacción en B, V_B, tendría la suficiente magnitud para empujar a B hacia arriba a su posición original de deflexión cero. Si B se asentase en realidad 1.0 plg, V_B será mas pequeña porque solamente tendrá que empujar a B hacia arriba una cantidad $\Delta_B - 1.0$ plg, y la expresión para la deflexión puede escribirse como

$$\Delta_B - 1.0 + V_B\Delta_{bb} = 0$$

Si tres hombres caminan con un tronco sobre uno de sus hombros (situación estáticamente indeterminada) y uno de los hombres baja ligeramente el hombro cargado, él no soportará el mismo peso total que antes. En efecto, al separarse del tronco ha cedido más peso del mismo a los otros hombres. El asentamiento de un apoyo en una viga continua estáticamente indeterminada tiene el mismo efecto.

Los valores de Δ_B y Δ_{bb} deben calcularse en pulgadas si el movimiento del apoyo está dado en pulgadas; se calculan en pies si el movimiento del apoyo está dado en pies, etc. El ejemplo 15.6 ilustra el análisis de la viga de dos claros del ejemplo 15.1 con la suposición de un asentamiento de $\frac{3}{4}$ plg en el apoyo interior. El diagrama de momentos se traza después de que ocurre el asentamiento y se compara con el diagrama antes del asentamiento. *El desplazamiento aparentemente pequeño ha cambiado totalmente la escena del momento.*

EJEMPLO 15.6

Determinar las reacciones y trazar los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga del ejemplo 15.1, reproducida en la figura 15.8, si el apoyo B se asienta $\frac{3}{4}$ plg.

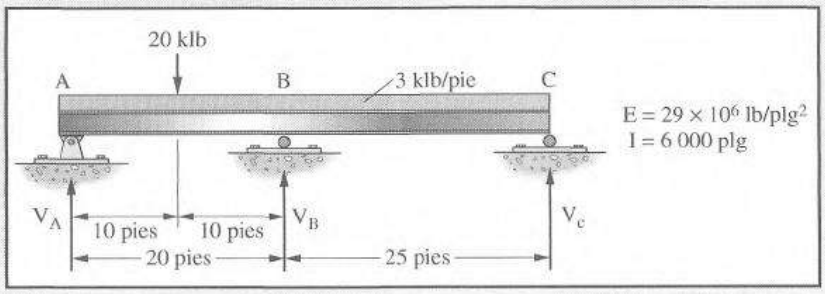


Figura 15.8

Solución. Los valores de Δ_B y Δ_{bb} anteriormente encontrados están calculados en pulgadas, y se determina el efecto del asentamiento del apoyo en V_B. Mediante la estática se encuentran los nuevos valores de V_A y V_C y se trazan los diagramas de fuerza cortante y de momento. Se repite el diagrama de momentos antes del asentamiento para mostrar los dramáticos cambios. Ahora el lector entenderá por qué los ingenieros estructurales se resisten a usar estructuras estáticamente indeterminadas cuando las condiciones de cimentación son malas. Los asentamientos pueden causar todo tipo de cambios y de problemas.

$$\Delta_B = \frac{182\ 100 \text{ klb-pie}^3}{EI} = 1.81 \text{ plg}$$

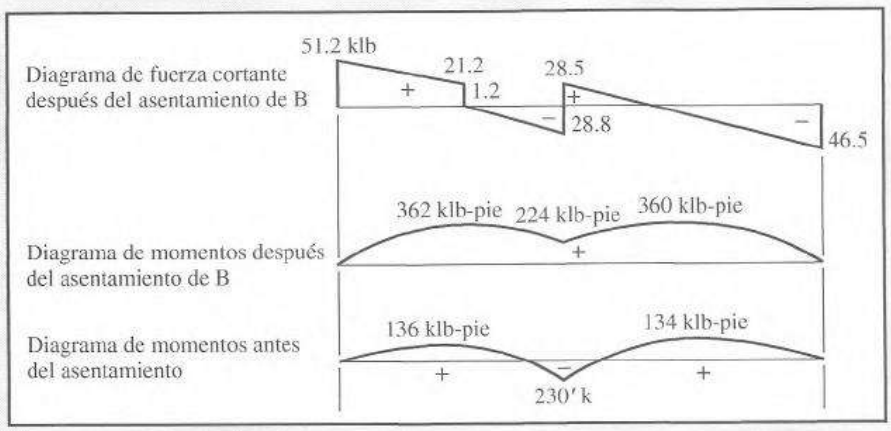
$$\Delta_{bb} = \frac{1\ 860 \text{ klb-pie}^3}{EI} = 0.0185 \text{ plg}$$

$$\Delta_B - 0.750 + V_B\Delta_{bb} = 0$$

$$V_B = -\frac{1.81 - 0.750}{0.0185} = 57.3 \text{ k} \uparrow$$

$$V_A = 51.2 \text{ klb} \uparrow$$

$$V_C = 46.5 \text{ klb} \uparrow$$



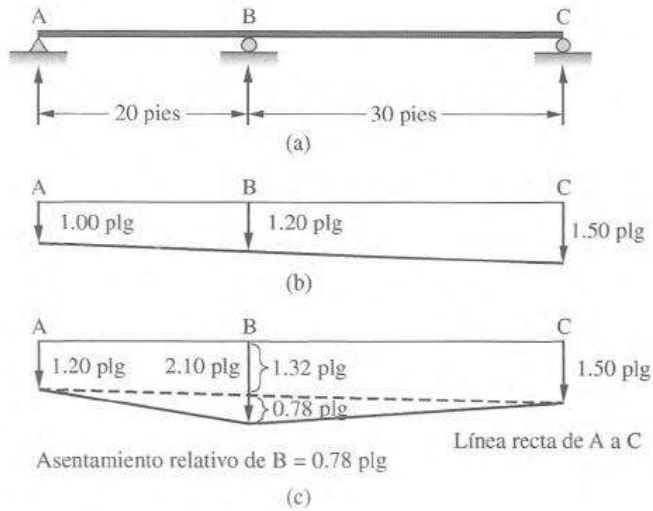


Figura 15.9

Cuando algunos o todos los apoyos se desplacen, el análisis puede efectuarse con base en valores relativos de los asentamientos. Por ejemplo, si todos los apoyos de la viga de la figura 15.9(a) se asentaran 1.5 plg, las condiciones de esfuerzo, en teoría, permanecerían inalteradas. Si los apoyos se desplazan cantidades diferentes pero permanecen alineados, como se ilustra en la figura 15.9(b), la situación será teóricamente la misma que antes del asentamiento.

Cuando se presenten asentamientos inconsistentes, y los apoyos ya no estén alineados, las condiciones de esfuerzo cambiarán debido a la deformación de la viga. Esta situación podría tratarse trazando una línea recta a través de las posiciones desplazadas de dos de los apoyos, generalmente los extremos. A partir de esta línea se determinan y se usan en los cálculos las distancias de los otros apoyos, como se ilustra en la figura 15.9(c).

Se supone que los apoyos de la viga de tres claros de la figura 15.10(a) se asientan como sigue: A es 1.25 plg, B es 2.40 plg, C es 2.75 plg, y D es 1.10 plg. En la figura 15.10(b) se traza un diagrama de estos asentamientos y se determinan los asentamientos relativos de los apoyos B y C.

La solución de las dos ecuaciones simultáneas que siguen arrojará los valores de V_B y V_C. Mediante la estática pueden entonces calcularse los valores de V_A y V_D.

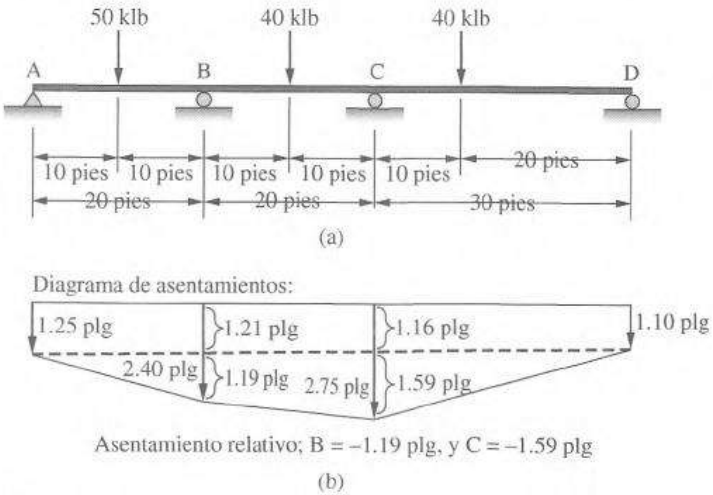


Figura 15.10

$$\Delta_B - 1.19 + V_B\Delta_{bb} + V_C\Delta_{bc} = 0$$
$$\Delta_C - 1.59 + V_B\Delta_{cb} + V_C\Delta_{cc} = 0$$

EJEMPLO 15.7

Determinar las reacciones para la viga de la figura 15.10 suponiendo que los apoyos se asientan como se muestra en esa figura. Trace los diagramas resultantes de fuerza cortante y de momento.

Solución.

Calculando las deflexiones en los apoyos B y C.

$$\Delta_B = \frac{514\ 350\ \text{klb-pie}^3}{EI} = 3.76\ \text{plg}$$
$$\Delta_C = \frac{625\ 300\ \text{klb-pie}^3}{EI} = 4.57\ \text{plg}$$
$$\Delta_{bb} = \frac{4\ 765\ \text{klb-pie}^3}{EI} = 0.0349\ \text{plg}$$
$$\Delta_{cc} = \frac{6\ 820\ \text{klb-pie}^3}{EI} = 0.0498\ \text{plg}$$
$$\Delta_{bc} = \Delta_{db} = \frac{5\ 140\ \text{klb-pie}^3}{EI} = 0.0374\ \text{plg}$$

Escribiendo las ecuaciones para las deflexiones finales en los dos apoyos

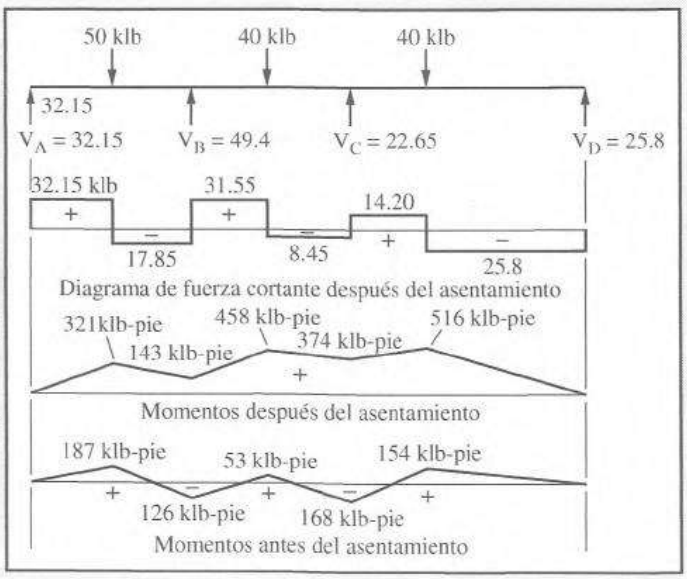
$$\Delta_B + V_B\Delta_{bb} + V_C\Delta_{bc} = \left\{\begin{matrix}\text{asentamiento}\\ \text{relativo}\\ \text{de B}\end{matrix}\right\}$$

$$3.76 + 0.0349V_B + 0.0374V_C = 1.19 \qquad \textbf{(15.1)}$$

$$\Delta_C + V_B\Delta_{cb} + V_C\Delta_{cc} = \Delta_C$$

$$4.57 + 0.0374V_B + 0.0498V_C = 1.59 \qquad \textbf{(15.2)}$$

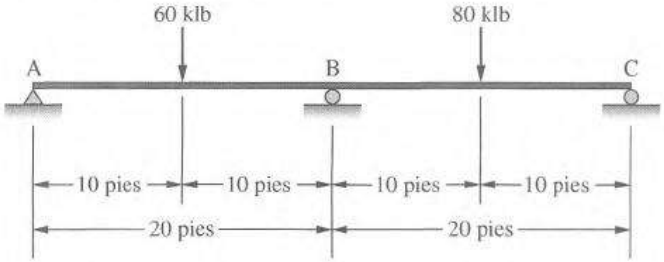
La solución simultánea de las ecuaciones (15.1) y (15.2) da los valores de V_B y V_C, y por estática se determinan V_A y V_D.



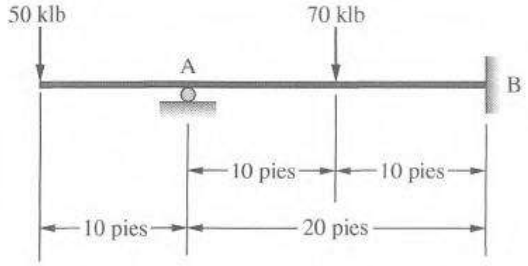
15.4 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

En los problemas 15.1 al 15.23 calcule las reacciones y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de las vigas continuas o marcos; E e I son constantes, a menos que se especifique otra cosa. Utilice el método de las distorsiones consistentes.

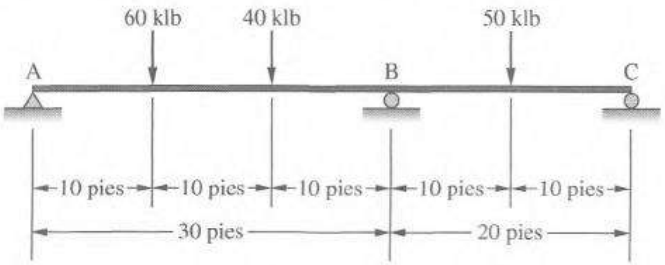
15.1 (*Resp.:* $V_B = 96.28$ klb ↓, $M_B = -262.8$ klb-pie.)



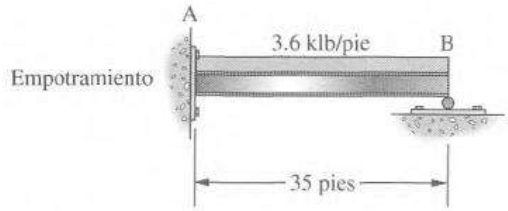
15.2



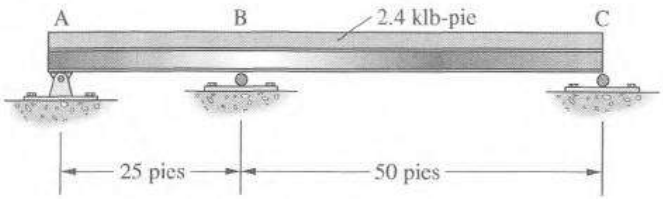
15.3 (*Resp.:* $V_B = 102.37$ klb ↑, $M_B = -368.5$ klb-pie.)



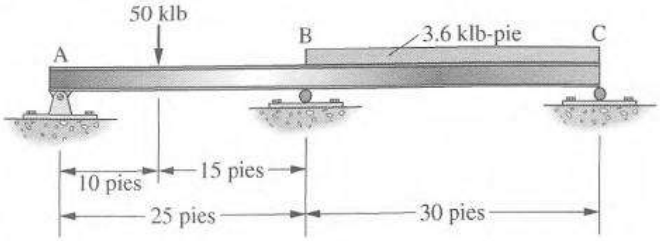
15.4



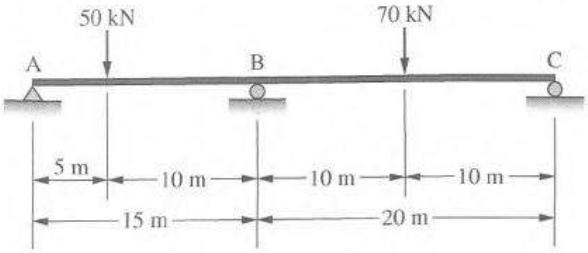
15.5 (*Resp.:* $V_A = 7.5$ klb ↑, $M_B = -562.5$ klb-pie.)



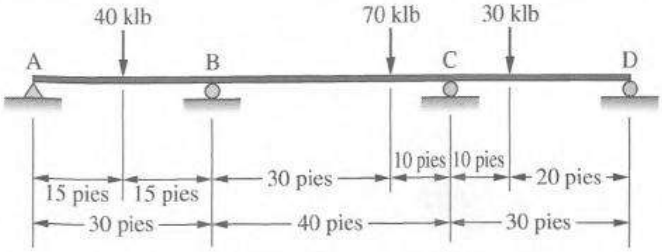
15.6



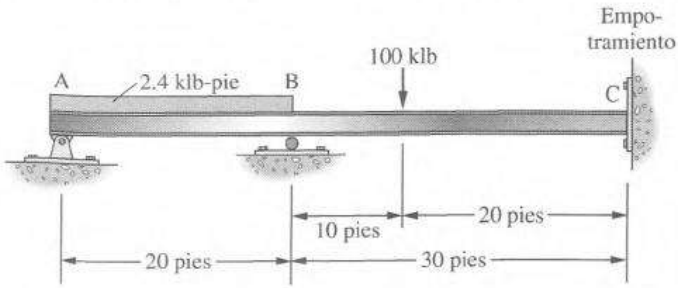
15.7 (*Resp.:* $V_B = 74.66$ kN ↑, $M_B = -197.3$ kN . m.)



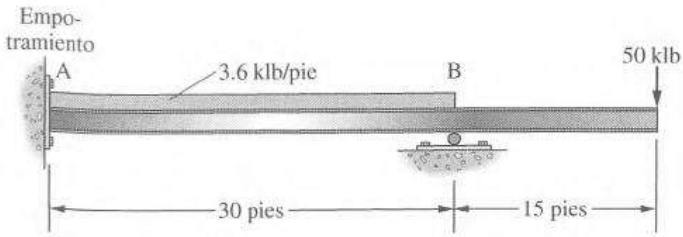
15.8



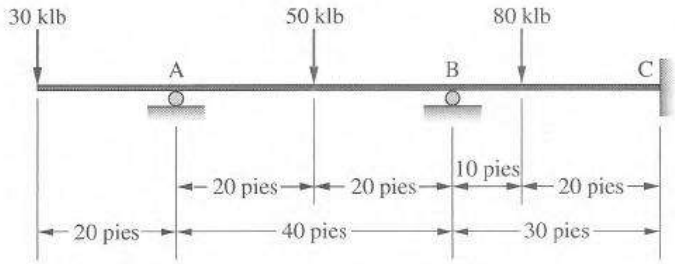
15.9 (*Resp.:* $V_A = 9.42$ klb ↑, $M_B = -291.6$ klb-pie.)



15.10



15.11 (*Resp.:* $V_B = 64.59$ klb ↑, $M_C = -268.9$ klb-pie.)

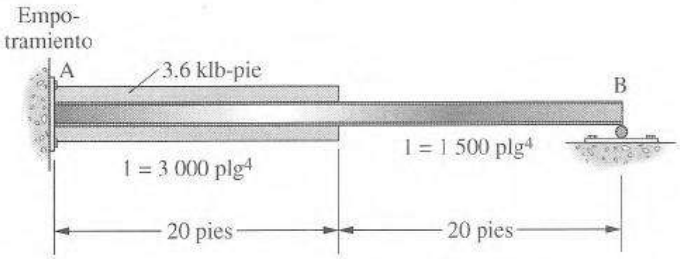


15.12 La viga del problema 15.1, suponiendo que el soporte B se asienta 2.50 plg. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 1\,200$ plg^4.

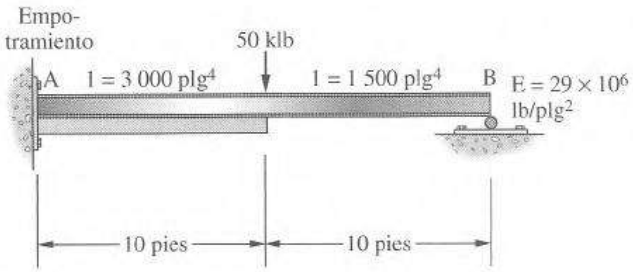
15.13 La viga del problema 15.1, suponiendo los siguientes asentamientos de los soportes: A = 4.00 plg, B = 2.00 plg y C = 3.50 plg. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 1\,200$ plg^4. (*Resp.:* $V_B = 122.66$ klb, $M_B = -526.6$ klb-pie.)

15.14 La viga del problema 15.8, suponiendo los siguientes asentamientos de los soportes: A = 1.00 plg, B = 3.00 plg, C = 1.50 plg y D = 2.00 plg. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2. $I = 3\,200$ plg^4.

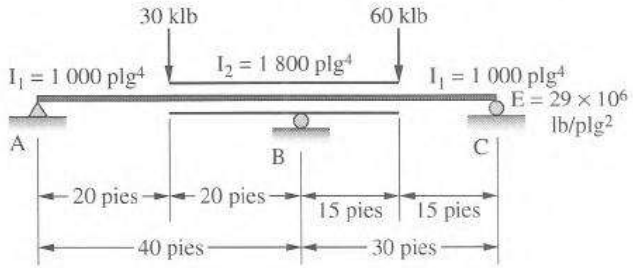
15.15 (*Resp.:* $V_B = 14.00$ klb ↑, $M_A = -160$ klb-pie ↻.)



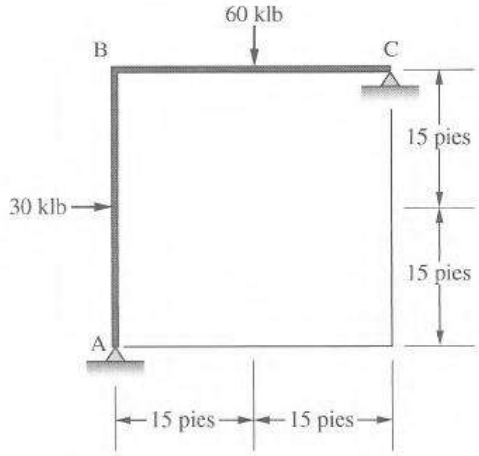
15.16



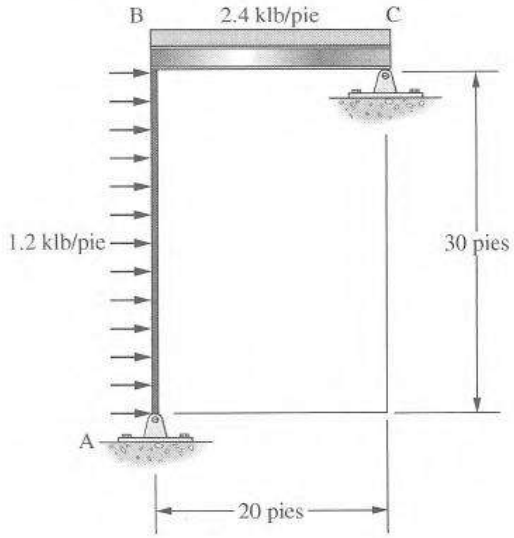
15.17 (*Resp.:* $V_C = 19.54$ klb, $M_B = -313.6$ klb-pie.)



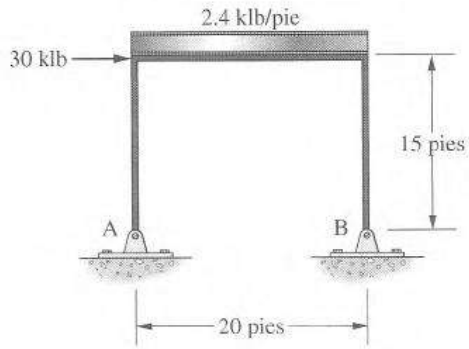
15.18



15.19 (*Resp.:* $V_C = 17.55$ klb ↑, $H_A = 13.7$ klb ←.)



15.20



Capítulo 16

Métodos de fuerzas para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas (continuación)

16.1 ANÁLISIS DE ARMADURAS CON REDUNDANTES EXTERNAS

Las armaduras pueden ser estáticamente indeterminadas debido a reacciones redundantes, a elementos redundantes o a una combinación de ambos. Desde un principio se considerarán armaduras con redundantes externas, y se analizarán con base en el cálculo de deflexiones, de manera muy semejante al procedimiento empleado en el capítulo anterior para las vigas estáticamente indeterminadas.

En el análisis siguiente se estudiará la armadura continua de dos claros que se muestra en la figura 16.1. Una componente de reacción, por ejemplo V_B, se elimina, y se determina la deflexión en ese punto causado por las cargas externas. En seguida se eliminan las cargas externas de la armadura, y se determina la deflexión en el punto de apoyo B debida a una carga unitaria en ese punto. La reacción se reemplaza, y ésta proporciona la fuerza necesaria para empujar al apoyo a su posición original. Entonces la expresión familiar de deflexión se escribe como sigue:

$$\Delta_B + V_B\Delta_{bb} = 0$$

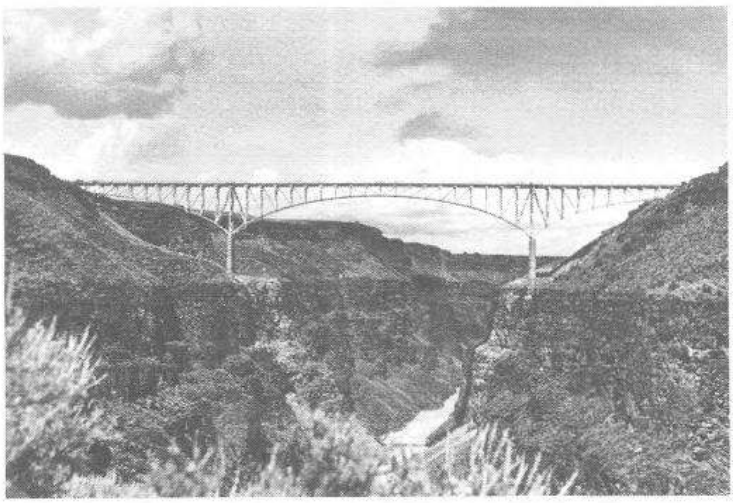
$$V_B = -\frac{\Delta_B}{\Delta_{bb}}$$

Las fuerzas en los miembros de la armadura debidas a las cargas externas, cuando se elimina la redundante, no son las fuerzas finales correctas y se les denomina aquí fuerzas F'. La deflexión en el apoyo eliminado debida a las cargas externas puede calcularse mediante $\Sigma(F'\mu L/AE)$. La deflexión causada en el apoyo al colocar una carga unitaria ahí puede encontrarse aplicando la misma expresión de trabajo virtual, excepto que la carga unitaria es ahora la carga externa y las fuerzas causadas son las mismas que las fuerzas μ. La deflexión en el apoyo debida a la carga unitaria es $\Sigma(\mu^2 L/AE)$, y la reacción redundante puede expresarse como sigue:

$$V_B = -\frac{\sum(F'\mu_B L/AE)}{\sum(\mu_B^2 L/AE)}$$

El ejemplo 16.1 ilustra el análisis completo de una armadura de dos claros por el método antes descrito. Después de haber encontrado la reacción redundante, pueden determinarse las otras reacciones y las fuerzas finales en las barras usando las ecuaciones de equilibro estático. Sin embargo, se dispone de otro método para encontrar las fuerzas finales y deberá usarse como una verificación matemática. Cuando la reacción redundante V_B se regresa a la armadura, hace que la fuerza en cada miembro cambie a V_B multiplicada por su valor de fuerza μ. La fuerza final en un miembro se convierte en

$$F = F' + V_B\mu$$



Puente del desfiladero del Río Grande, en el condado Taos, Nuevo México. (Cortesía del American Institute of Steel Construction, Inc.)

EJEMPLO 16.1

Calcular las reacciones y las fuerzas en las barras de la armadura continua de dos claros que se muestra en la figura 16.1. Los números en círculos indican las áreas de las barras en pulgadas cuadradas.

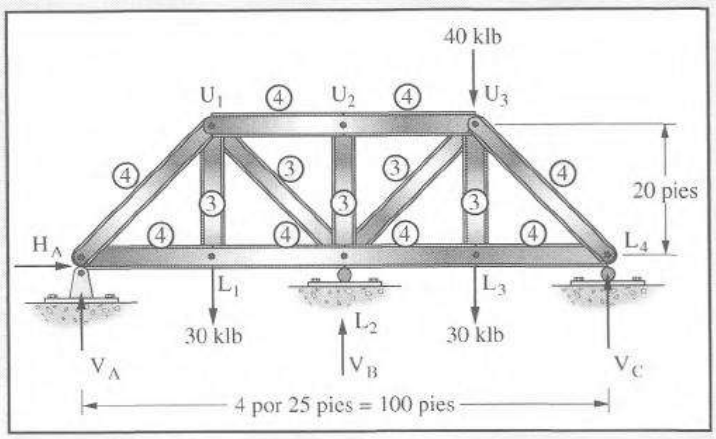
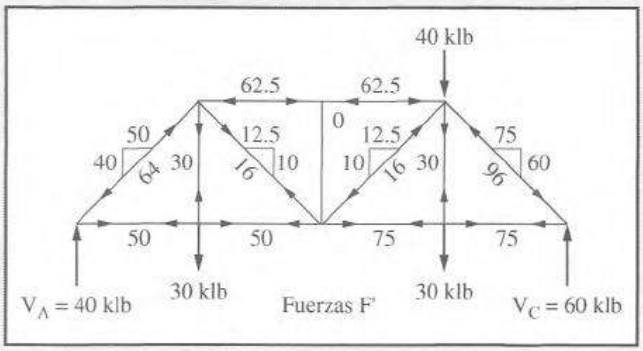
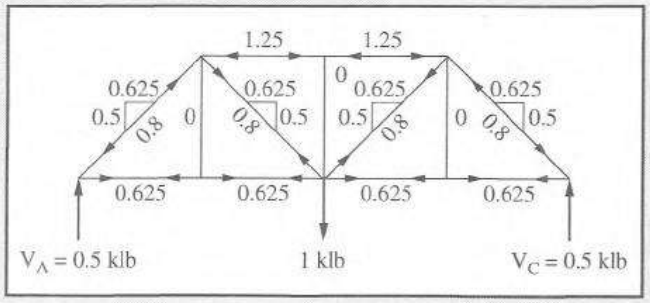


Figura 16.1

Solución. Retiramos el apoyo central como apoyo redundante y calculamos la fuerzas F'.



Retire las cargas externas y coloque una carga unitaria en el apoyo central. Luego calcule las fuerzas μ.



Calculando los valores de Δ_B y Δ_{bb} en la tabla 16.1.

$$V_B = -\frac{\dfrac{35\,690}{E}}{\dfrac{637.6}{E}} = -56.0\,\text{klb} \uparrow$$

Las siguientes reacciones y fuerzas en los elementos se encuentran por equilibrio estático con objeto de verificar los valores finales en la tabla.

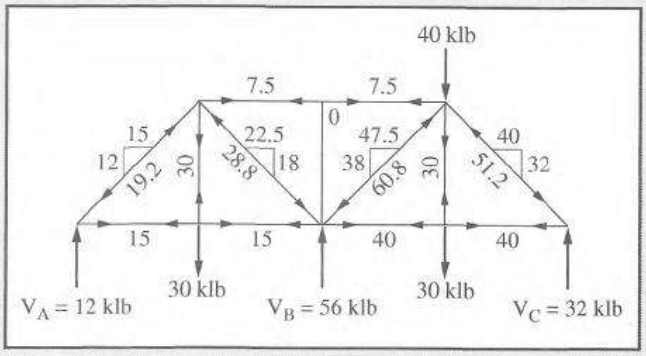


TABLA 16.1

Barra	L (plg)	A (plg^2)	$\frac{L}{A}$	F′ (klb)	μ	$\Delta_B = \frac{F'\mu L}{AE}$	$\Delta_{bb} = \frac{\mu^2 L}{AE}$	$F = F' + V_B\mu$
L_0L_1	300	4	75	+50	+0.625	+2340	+29.2	+15.0
L_1L_2	300	4	75	+50	+0.625	+2340	+29.2	+15.0
L_2L_3	300	4	75	+75	+0.625	+3510	+29.2	+40.0
L_3L_4	300	4	75	+75	+0.625	+3510	+29.2	+40.0
L_0U_1	384	4	96	−64	−0.800	+4920	+61.4	−19.2
U_1U_2	300	4	75	−62.5	−1.25	+5850	+117.0	+7.5
U_2U_3	300	4	75	−62.5	−1.25	+5850	+117.0	+7.5
U_3L_4	384	4	96	−96	−0.800	+7370	+61.4	−51.2
U_1L_1	240	3	80	+30	0	0	0	+30.0
U_1L_2	384	3	128	+16	+0.800	+1640	+ 82.0	−28.8
U_2L_2	240	3	80	0	0	0	0	0
L_2U_3	384	3	128	−16	+0.800	−1640	+ 82.0	− 60.8
U_3L_3	240	3	80	+30	0	0	0	+30.0
Σ						35 690/E	637.6/E	

■

Debería ser evidente que el procedimiento de las deflexiones puede utilizarse para analizar armaduras que tienen dos o más reacciones redundantes. La armadura mostrada en la figura 16.2 es continua sobre tres claros. Las reacciones V_B y V_C en los apoyos interiores pueden considerarse como las reacciones redundantes. Las siguientes ecuaciones de condición, escritas previamente para una viga continua de tres claros, son aplicables a la armadura:

$$\Delta_B + V_B\Delta_{bb} + V_C\Delta_{bc} = 0$$
$$\Delta_C + V_B\Delta_{cb} + V_C\Delta_{cc} = 0$$

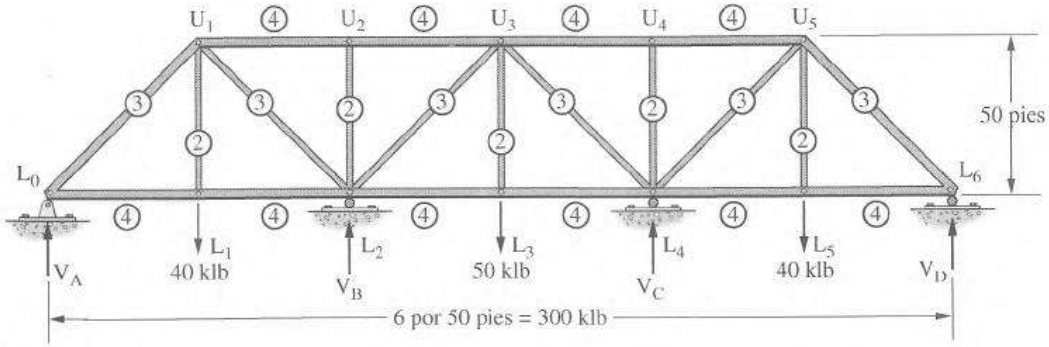


Figura 16.2

Las fuerzas debidas a una carga unitaria en B se designan como fuerzas μ_B y aquéllas debidas a una carga unitaria en C se designan fuerzas μ_C. Una carga unitaria en B causará una deflexión en C que es igual a $\Sigma(\mu_B\mu_C L/AE)$, y una carga unitaria en C causa la misma deflexión en B, $\Sigma(\mu_C\mu_B L/AE)$, que es otra ilustración de la ley de Maxwell. Las expresiones de deflexión toman la forma

$$\sum \frac{F'\mu_B L}{AE} + V_B\sum \frac{\mu_B^2 L}{AE} + V_C\sum \frac{\mu_B\mu_C L}{AE} = 0$$
$$\sum \frac{F'\mu_C L}{AE} + V_B\sum \frac{\mu_C\mu_B L}{AE} + V_C\sum \frac{\mu_C^2 L}{AE} = 0$$

Al resolver simultáneamente estas ecuaciones se obtendrán los valores de las redundantes. Si ocurren asentamientos en los apoyos, las deflexiones tendrán que tratarse numéricamente con las mismas unidades dadas para los asentamientos.

Puente sobre el río Tennessee, Stevenson, Alabama. (Cortesía de USX Corporation.)

16.2 ANÁLISIS DE ARMADURAS CON REDUNDANTES INTERNAS

La armadura mostrada en la figura 16.3 tiene una barra más de las necesarias para garantizar la estabilidad, y por ello es estáticamente indeterminada internamente de primer grado, como puede verificarse al aplicar la ecuación

$$m = 2j - 3$$

Las armaduras con redundantes interiores pueden analizarse en forma semejante a la empleada en relación con las armaduras con redundantes externas para una armadura estáticamente indeterminada de primer grado. Se supone que una barra es la redundante y se le corta o elimina teóricamente de la estructura. Las barras restantes deben formar una armadura estáticamente determinada y estable. Se supone que las fuerzas F' en estos elementos son de una naturaleza tal que hacen que los nudos en los extremos del elemento removido se separen, siendo la distancia $\Sigma(F'\mu L/AE)$.

El elemento redundante se reemplaza en la armadura y se supone que tiene una fuerza unitaria de tensión. Se calcula la fuerza μ en cada uno de los elementos causada por la fuerza redundante de $+1$ y estas fuerzas harán que los nudos se contraigan una cantidad igual a $\Sigma(\mu^2L/AE)$. Si la redundante tiene una fuerza real de X, los nudos van a contraerse una cantidad igual a $X\Sigma(\mu^2L/AE)$.

Si el miembro hubiera sido aserrado a la mitad, las fuerzas F' hubieran abierto una brecha de $\Sigma(F'\mu L/AE)$; por lo tanto, X debe ser suficiente para cerrar la brecha, y pueden escribirse las siguientes expresiones:

$$X\sum \frac{\mu^2 L}{AE} + \sum \frac{F'\mu L}{AE} = 0$$

$$X = -\frac{\sum (F'\mu L/AE)}{\sum (\mu^2 L/AE)}$$

La aplicación de este método para analizar armaduras con redundantes internas se muestra en el ejemplo 16.2. Una vez que se ha calculado la fuerza en la barra redundante, la fuerza en cualquier otra barra es igual a su fuerza F′ más X veces su fuerza μ. Las fuerzas finales también pueden calcularse mediante la estática como una verificación del desarrollo matemático.

EJEMPLO 16.2

Determinar las fuerzas en los miembros de la armadura internamente redundante que se muestra en la figura 16.3. Los miembros U_1L_1, U_1L_2, L_1U_2 y U_2L_2 tienen áreas de 1 plg^2. Las áreas son de 2 plg^2 para cada uno de los otros miembros. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2.

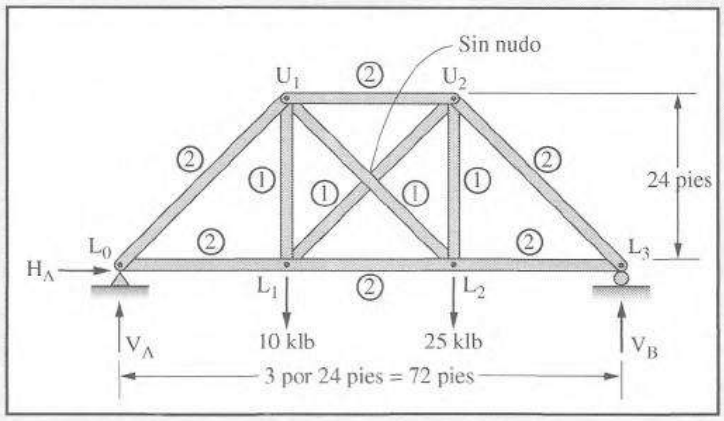
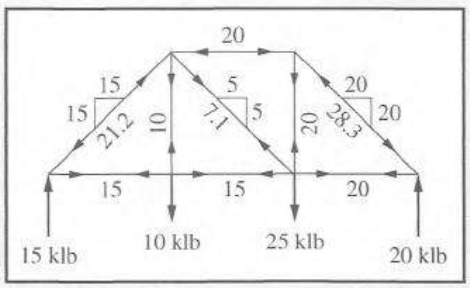
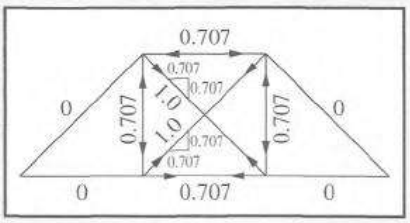


Figura 16.3

Solución. Suponga que L_1U_2 es el miembro redundante, retírelo, y calcule las fuerzas F′.



Reemplace L_1U_2 con una fuerza de +1 y calcule las fuerzas μ.



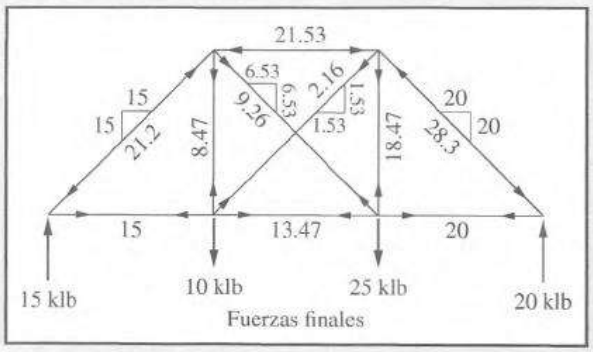
Formando la tabla 16.2 y calculando X.

TABLA 16.2

Barra	L (plg)	A (plg^2)	$\frac{L}{A}$	F′ (klb)	μ	$\frac{F'\mu L}{AE}$	$\frac{\mu^2 L}{AE}$	$\frac{F = F'' + X\mu}{(klb)}$
L_0L_1	288	2	144	+15	0	0	0	+15.00
L_1L_2	288	2	144	+15	−0.707	−1 530	+72	+13.47
L_2L_3	288	2	144	+20	0	0	0	+20.00
L_0U_1	408	2	204	−21.2	0	0	0	−21.20
U_1U_2	288	2	144	−20	−0.707	+2 040	+72	−21.53
U_2L_3	408	2	204	−28.3	0	0	0	−28.30
U_1L_1	288	1	288	+10	−0.707	−2 040	+144	+8.47
U_1L_2	408	1	408	+7.1	+1.0	+2 900	+408	+9.26
L_1U_2	408	1	408	0	+1.0	0	+408	+2.16
U_2L_2	288	1	288	+20	−0.707	−4 070	+144	+18.47
Σ						−2700	⊳ 1248	

$$X = -\frac{\sum (F'\mu L/AE)}{\sum (\mu^2 L/AE)} = -\frac{-2\,700}{+1\,248} = +2.16 \text{ klb}$$

Fuerzas finales en los miembros de la armadura.



Para armaduras que tienen más de una redundante interna, es necesario resolver ecuaciones simultáneas para la solución. Teóricamente se cortan dos barras, con fuerzas X_A y X_B, que se supone son las redundantes. Las fuerzas F′ en los miembros restantes de la armadura separan a los sitios cortados por $\sum(F'\mu_A L/AE)$ y $\sum(F'\mu_B L/AE)$, respectivamente. El reemplazo del primer miembro redundante con una fuerza de +1 origina fuerzas μ_A en los miembros de la armadura y hace que las brechas se cierren por $\sum(\mu^2{}_A L/AE)$ y $\sum\mu_A\mu_B L/AE$. La repetición del proceso con las otras redundantes origina a las fuerzas μ_B y cierres de brecha adicionales de $\sum(\mu_B\mu_A L/AE)$ y $\sum(\mu^2{}_B L/AE)$. Las fuerzas redundantes deben ser suficientes para cerrar las brechas, permitiendo que se escriban las siguientes ecuaciones:

$$\sum \frac{F'\mu_A L}{AE} + X_A \sum \frac{\mu_A^2 L}{AE} + X_B \sum \frac{\mu_A \mu_B L}{AE} = 0$$

$$\sum \frac{F'\mu_B L}{AE} + X_A \sum \frac{\mu_B \mu_A L}{AE} + X_B \sum \frac{\mu_B^2 L}{AE} = 0$$

16.3 ANÁLISIS DE ARMADURAS CON REDUNDANTES INTERNAS Y EXTERNAS

Las ecuaciones de deflexiones se han formulado con tanta frecuencia en las secciones anteriores, que probablemente el lector ya se encuentre en condiciones de escribir sin dificultad las ecuaciones correspondientes a otros tipos de vigas y de armaduras estáticamente indeterminadas que no se han examinado anteriormente. No obstante, se presentará ahora un grupo adicional de ecuaciones necesario para el análisis de armaduras que son hiperestáticas tanto interior como exteriormente. En el análisis que sigue se considerará la armadura que se muestra en la figura 16.4, la cual tiene como redundantes a dos barras y a una componente de reacción.

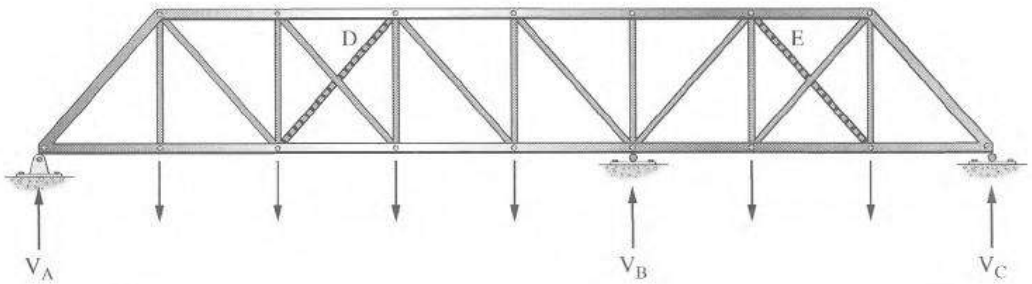


Figura 16.4

Se retiran de la armadura a las diagonales designadas como D y E, y la reacción interior V_B, lo que hace isostática a la estructura. Las aberturas de las brechas en los miembros cortados y las deflexiones en el apoyo interior debidas a las cargas externas pueden calcularse de lo siguiente:

$$\Delta_B = \sum \frac{F'\mu_B L}{AE} \quad \Delta_D = \sum \frac{F'\mu_D L}{AE} \quad \Delta_E = \sum \frac{F'\mu_E L}{AE}$$

La colocación de una carga unitaria en el apoyo interior originará deflexiones en las brechas en los miembros cortados, así como en el punto de aplicación.

$$\Delta_{bb} = \sum \frac{\mu_B^2 L}{AE} \quad \Delta_{db} = \sum \frac{\mu_B \mu_D L}{AE} \quad \Delta_{eb} = \sum \frac{\mu_B \mu_E L}{AE}$$

Puente de peaje en el río Delaware. (Cortesía de la USX Corporation.)

Reemplazando el miembro D y suponiendo que tenga una fuerza unitaria de tensión positiva se originan las siguientes deflexiones:

$$\Delta_{bd} = \sum \frac{\mu_B \mu_D L}{AE} \quad \Delta_{dd} = \sum \frac{\mu_D^2 L}{AE} \quad \Delta_{ed} = \sum \frac{\mu_E \mu_D L}{AE}$$

En forma similar, el reemplazo del miembro E con una fuerza de +1 causará estas deflexiones:

$$\Delta_{be} = \sum \frac{\mu_B \mu_E L}{AE} \quad \Delta_{de} = \sum \frac{\mu_D \mu_E L}{AE} \quad \Delta_{ee} = \sum \frac{\mu_E^2 L}{AE}$$

El cálculo de este conjunto de deflexiones permite calcular los valores numéricos de las fuerzas redundantes, ya que la deflexión total para cada una puede igualarse a cero.

$$\Delta_B + V_B \Delta_{bb} + X_D \Delta_{bd} + X_E \Delta_{be} = 0$$
$$\Delta_D + V_B \Delta_{db} + X_D \Delta_{dd} + X_E \Delta_{de} = 0$$
$$\Delta_E + V_B \Delta_{eb} + X_D \Delta_{ed} + X_E \Delta_{ee} = 0$$

La solución de este tipo de problemas no contiene nada nuevo, por lo que nos ahorramos el espacio y los extensos cálculos que por necesidad implicaría un ejemplo semejante.

16.4 CAMBIOS DE TEMPERATURA, CONTRACCIÓN, ERRORES DE FABRICACIÓN, ETCÉTERA

Las estructuras están sujetas a deformaciones no sólo debido a las cargas externas, sino también a los cambios de temperatura, al asentamiento de los apoyos, a errores en las dimensiones de fabricación, a contracción en los elementos de concreto reforzado causada por el secado y el flujo plástico, etc. Estas deformaciones en las estructuras estáticamente indeterminadas pueden producir grandes fuerzas adicionales en los elementos. Supongamos, a manera de ejemplo, que las barras de la cuerda superior de la armadura que se muestra en la figura 16.5 están mucho más expuestas al

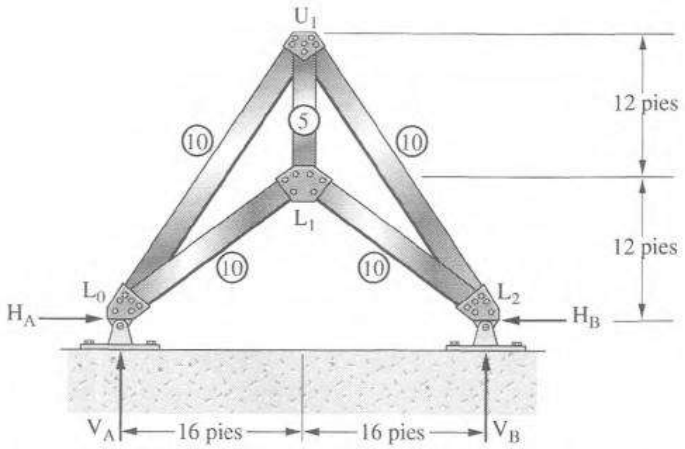


Figura 16.5 Armadura usada para el análisis de los efectos por cambios de temperatura.

sol que las otras barras. En consecuencia, en un día muy caliente pueden alcanzar temperaturas mucho más altas que las otras barras y sus fuerzas pueden sufrir cambios apreciables.

Los problemas de este tipo pueden tratarse de la misma manera que los problemas anteriores de este capítulo. Se calculan los cambios en la longitud de cada una de las barras debidos a la temperatura. (Estos valores, que corresponden a los valores $F'L/AE$, son iguales, cada uno, al cambio de temperatura multiplicado por el coeficiente de dilatación del material y por la longitud de la barra.) La redundante se retira de la estructura, se coloca una carga unitaria en el apoyo en la dirección de la redundante y se calculan las fuerzas μ. Entonces se determinan los valores $\Sigma(F'\mu L/AE)$ y $\Sigma(\mu^2 L/AE)$ con las mismas unidades y se escribe la expresión acostumbrada para la deflexión. En el ejemplo 16.3 se expone un problema de este tipo.

EJEMPLO 16.3

Las barras de la cuerda superior de la armadura estáticamente indeterminada mostrada en la figura 16.5 experimentan un incremento de temperatura de 60 °F. Si $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2 y el coeficiente de dilatación térmica lineal es 0.0000065/°F, determinar las fuerzas inducidas en cada una de las barras de la armadura. Los números en círculos son áreas en pulgadas cuadradas.

Solución. Suponemos que HB es la reacción redundante y calculamos las fuerzas μ.

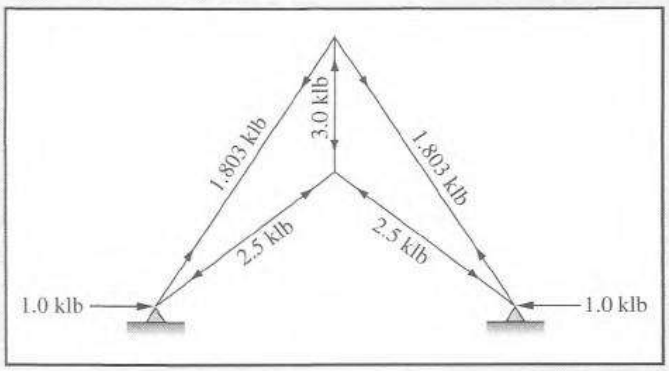


TABLA 16.3

Barra	L (plg)	A (plg^2)	$\frac{L}{A}$	μ	$\frac{\mu^2 L}{AE}$	$\Delta L = \Delta t \cdot \text{coef} \cdot L$ $\left(\text{equivalente a } \frac{F'L}{AE}\right)$	$\mu(\Delta L) = \frac{F'\mu L}{AE}$
L_0L_1	240	10	24	−2.5	+150	—	—
L_1L_2	240	10	24	−2.5	+150	—	—
L_0U_1	346	10	34.6	+1.803	+112.48	(60)(0.0000065)(346) = 0.1349	0.2433
U_1L_2	346	10	34.6	+1.803	+112.48	(60)(0.0000065)(346) = 0.1349	0.2433
U_0L_1	144	5	28.8	−3.0	+259.2	—	—
					$\Sigma = +\frac{784.16}{E}$		$\Sigma = 0.4866$

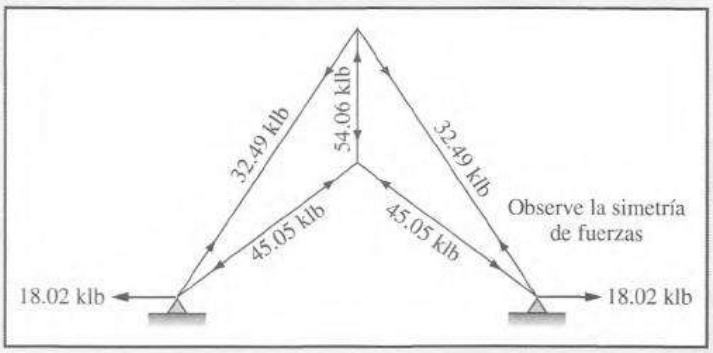
$$\Delta_{bb} = +\frac{(784.16)(1\,000)}{29 \times 10^6} = +0.02704 \text{ plg}$$

$$\Delta_B = +0.4866 \text{ plg}$$

$$\Delta_B + H_B\Delta_{bb} = 0$$

$$H_B = -\frac{0.4866}{0.02704} = -18.02 \text{ klb} \rightarrow$$

Las fuerzas finales en las barras de la armadura debidas al cambio de temperatura son las siguientes:



16.5 PRIMER TEOREMA DE CASTIGLIANO

El primer teorema de Castigliano, conocido por lo común como el *método del trabajo mínimo*, desempeñó un importante papel en el desarrollo del análisis de estructuras durante varios años. Sin embargo, sólo se usa de manera ocasional en la actualidad. Está estrechamente relacionado con el método de las distorsiones consistentes estudiado en el capítulo 15, y es muy efectivo para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas, especialmente armaduras y estructuras compuestas. (Las estructuras compuestas se definen aquí como las estructuras que tienen algunos miembros solamente con esfuerzos axiales y otros miembros con esfuerzos axiales y esfuerzos flexionantes.) Aunque son aplicables a vigas y a marcos, generalmente son más satisfactorios otros métodos tales como el método de distribución de momentos (estudiado en los capítulos 20 y 21). El método del trabajo mínimo tiene la desventaja de no ser aplicable en su forma usual a las fuerzas causadas por desplazamientos debidos a cambios de temperatura, asentamientos de los soportes o errores de fabricación.

En el capítulo 13 se demostró que la primera derivada parcial del trabajo interno total con respecto a una carga P (real o imaginaria) aplicada en un punto en la estructura es igual a la deflexión en la dirección de P. Para este estudio, se consideran la viga continua de la figura 16.6 y su reacción vertical en el apoyo B, V_B.

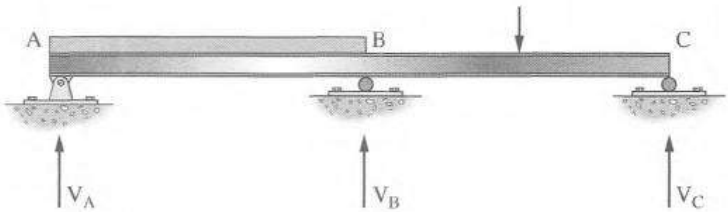


Figura 16.6

Si la primera derivada parcial del trabajo en esta viga se toma con respecto a la reacción V_B, se obtendrá la deflexión en B pero esa deflexión es cero.

$$\frac{\partial W}{\partial P} = 0$$

Éste es un enunciado del primer teorema de Castigliano. Ecuaciones de este tipo pueden escribirse para cada punto de restricción en una estructura estáticamente indeterminada. Una estructura se deformará de manera consistente con sus limitaciones físicas, es decir, que el trabajo interno de deformación será un mínimo.

Las columnas y las trabes que concurren en un nudo de un edificio se deflexionarán la misma cantidad, que será el valor mínimo posible. Despreciando el efecto de los otros extremos de estos miembros, puede verse que cada miembro no realiza más trabajo que el necesario, y el trabajo total realizado por todos los miembros en el nudo es el mínimo posible.

De la discusión anterior puede enunciarse el teorema del trabajo mínimo: *El trabajo interno realizado por cada miembro o por cada parte de una estructura estáticamente indeterminada sujeta a un conjunto de carga externas, es la cantidad mínima posible necesaria para mantener el equilibrio al sustentar las cargas.*

En algunas ocasiones (especialmente para vigas y marcos continuos), el método del trabajo mínimo es muy complicado de aplicar. En consecuencia, los lectores a menudo expresan opiniones más bien desfavorables acerca de lo que piensan del término "trabajo mínimo".

Para analizar una estructura estáticamente indeterminada con el teorema de Castigliano, se supone que ciertos miembros son redundantes y se considera que se retiran de la estructura. La remoción de los miembros debe ser suficiente para dejar una estructura básica estáticamente determinada y estable. Las fuerzas F' en la estructura se determinan para las cargas externas; las redundantes se reemplazan con las cargas X_1, X_2, etc.; y se determinan las fuerzas que causan.

El trabajo interno total de deformación puede establecerse en términos de las fuerzas F' así como las fuerzas causadas por las cargas redundantes. El resultado se diferencia sucesivamente con respecto a las redundantes. Las derivadas se igualan a cero con objeto de determinar los valores de las redundantes.

Los ejemplos 16.4 a 16.9 muestran el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas por el trabajo mínimo. Aunque los métodos de trabajo mínimo y de distorsión consistente son los métodos más generales para analizar diferentes tipos de estructuras estáticamente indeterminadas, actualmente no se usan con mucha frecuencia porque otros métodos tales como la distribución de momentos y los programas de computadora son de aplicación mucho más simple.

EJEMPLO 16.4

Determine la reacción en el soporte C en la viga mostrada en la figura 16.7 mediante el trabajo mínimo: E e I son constantes.

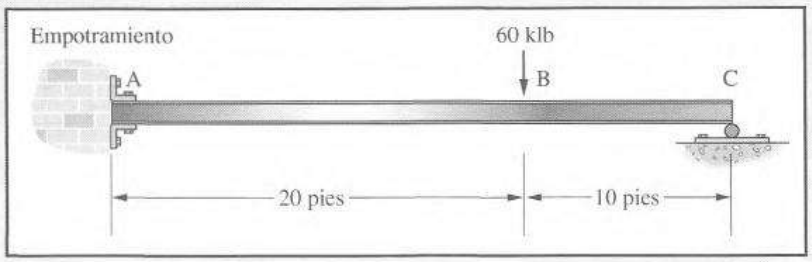


Figura 16.7

Solución. Se supone que la reacción en C es V_C y las otras reacciones se determinan como sigue:

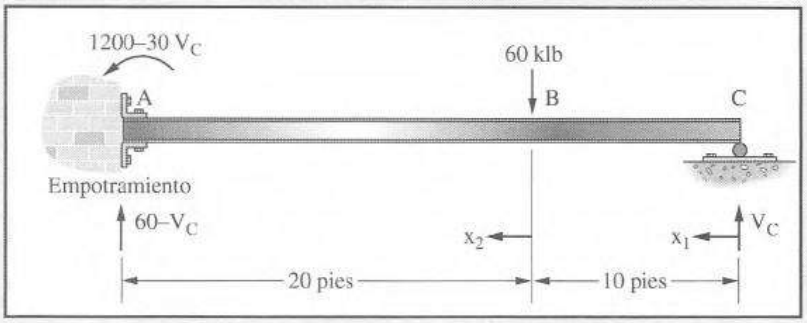


TABLA 16.4

Sección	M	$\frac{\partial M}{\partial V_c}$	$M\frac{\partial M}{\partial V_c}$	$\int M\left(\frac{\partial M}{\partial V_c}\right)\frac{dx}{EI} = 0$
C a B	$V_c x_1$	x_1	$V_c x_1^2$	$\frac{1}{EI}\int_0^{10}(V_c x_1^2)\,dx_1$
B a A	$V_c x_2 + 10V_c - 60x_2$	$x_2 + 10$	$V_c x_2^2 + 20V_c x_2 - 60x_2^2 + 100V_c - 600x_2$	$\frac{1}{EI}\int_0^{20}(V_c x_2^2 + 20V_c x_2 - 60x_2^2 + 100V_c - 600x_2)\,dx_2$
Σ				$9\,000V_c - 280.000 = 0$

$V_c = 31.1$ klb ↑ ■

EJEMPLO 16.5

Determine el valor de la reacción en el apoyo C, figura 16.8 mediante el método de trabajo mínimo.

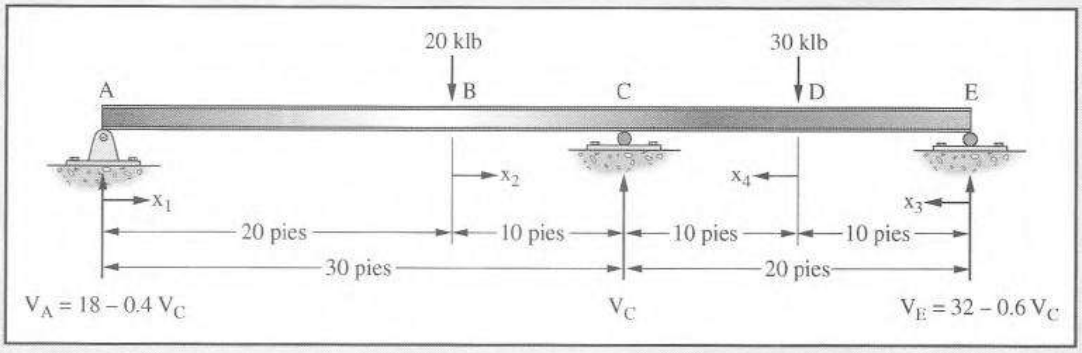


Figura 16.8

Solución.

TABLA 16.5

Sección	M	$\frac{\partial M}{\partial V_c}$	$\int M\left(\frac{\partial M}{\partial V_B}\right)\frac{dx}{EI} = 0$
A a B	$18x_1 - 0.4V_cx_1$	$-0.4x_1$	$\int_0^{20}(-7.2x_1^2 + 0.16V_cx_1^2)dx_1$
B a C	$-2x_2 - 0.4V_cx_2 - 8V_c + 360$	$-0.4x_2 - 8$	$\int_0^{10}(+0.8x_2^2 + 0.16V_cx_2^2 + 6.4V_cx_2 - 128x_2 + 64V_c - 2\,880)\,dx_2$
E a D	$32x_3 - 0.6V_cx_3$	$-0.6x_3$	$\int_0^{10}(-19.2x_3^2 + 0.36V_cx_3^2)\,dx_3$
D a C	$2x_4 - 0.6V_cx_4 - 6V_c + 320$	$-0.6x_4 - 6$	$\int_0^{10}(-1.2x_4^2 + 0.36V_cx_4^2 + 7.2V_cx_4 - 204x_4 + 36V_c - 1\,920)\,dx_4$

Integrando las expresiones $\int M(\partial M/\partial V_B)(dx/EI)$ y substituyendo los valores de los límites apropiados, el resultado para la viga completa es

$$-90\,333 + 2\,400.3\,V_C = 0$$

$$V_C = +37.6 \text{ klb} \uparrow \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 16.6

Determine la fuerza en la barra CD de la armadura mostrada en la figura 16.9. Los valores en círculos son áreas en pulgadas cuadradas. E es constante.

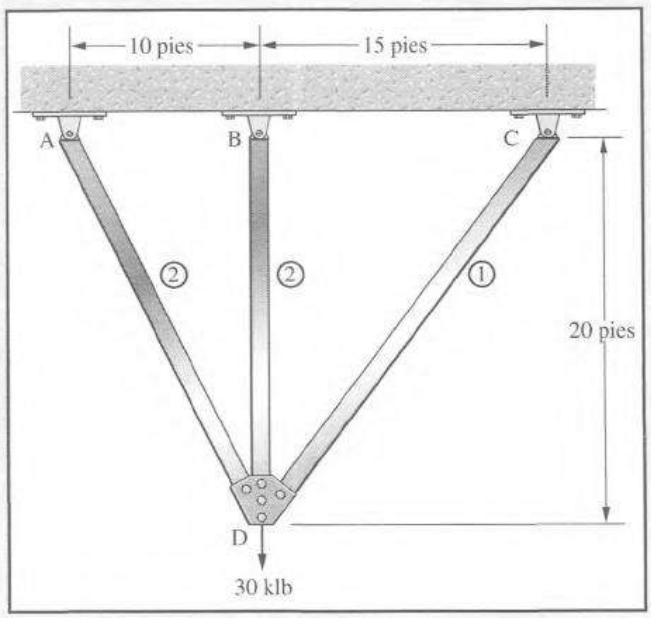


Figura 16.9

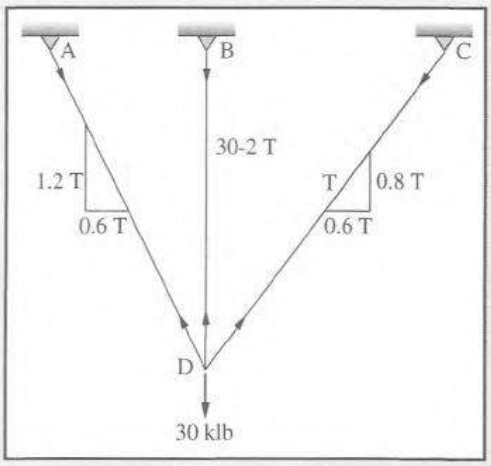
Solución. Suponemos que la barra CD es la barra redundante y que se le asigna una fuerza T. Las otras fuerzas se determinan mediante nudos con los siguientes resultados.

$$\frac{\partial W}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\sum \frac{F^2 L}{2AE} = \sum F \frac{\partial F}{\partial T}\frac{L}{AE}$$

TABLA 16.6

Barra	L (plg)	A (plg^2)	$\frac{L}{A}$	F	$\frac{\partial F}{\partial T}$	$F\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)\frac{L}{AE}$
AD	268	2	134	+1.34T	+1.34	+240T
BD	240	2	120	−2T + 30	−2	+480T − 7 200
CD	300	1	300	+T	+1	+300T
Σ						1 020T − 7 200 = 0

T = +7.06 klb



EJEMPLO 16.7

Analice la armadura de la figura 16.10 mediante el método de trabajo mínimo. Los números en círculos son áreas de las barras, en pulgadas cuadradas.

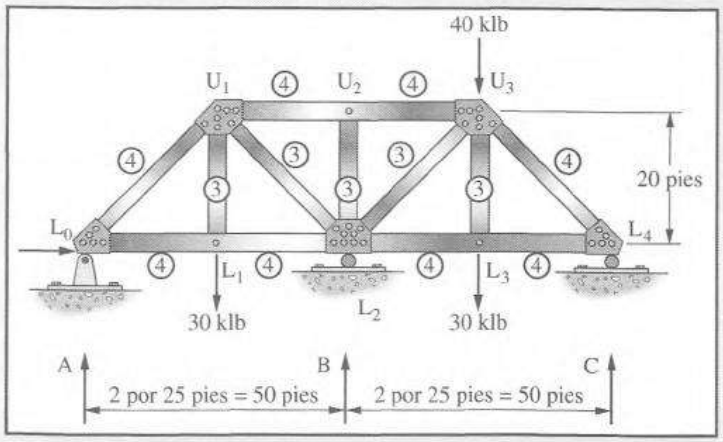
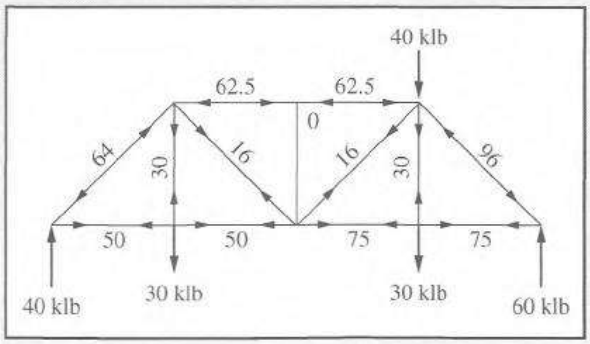
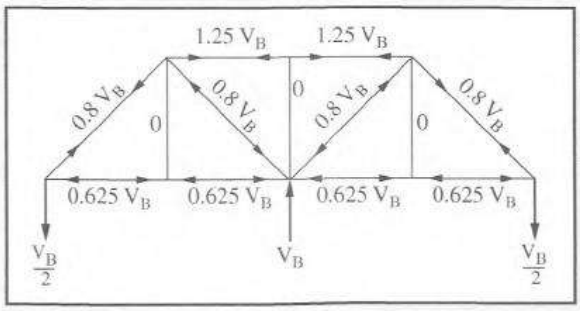


Figura 16.10

Solución. Retire el apoyo del centro y calcule las fuerzas F′.



Reemplace el apoyo del centro y determine su efecto en las fuerzas de las barras en términos de V_B.



Calcule los valores en la tabla 16.7.

$$E\frac{\partial W}{\partial V_B} = \frac{FL}{A}\frac{\partial F}{\partial V_B}$$

$$-35.738 + 638.2V_B = 0$$

$$V_B = +56 \text{ klb} \uparrow$$

TABLA 16.7

Barra	L (plg)	A (plg^2)	$\frac{L}{A}$	F(klb)	$\frac{FL}{A}$	$\frac{\partial F}{\partial V_B}$	$\frac{FL}{A}\frac{\partial F}{\partial V_B}$
L_0L_1	300	4	75	$+50 - 0.625V_B$	$+3750 - 46.9V_B$	-0.625	$-2345 + 29.3V_B$
L_1L_2	300	4	75	$+50 - 0.625V_B$	$+3750 - 46.9V_B$	-0.625	$-2345 + 29.3V_B$
L_2L_3	300	4	75	$+75 - 0.625V_B$	$+5625 - 46.9V_B$	-0.625	$-3520 + 29.3V_B$
L_3L_4	300	4	75	$+75 - 0.625V_B$	$+5625 - 46.9V_B$	-0.625	$-3520 + 29.3V_B$
L_0U_1	384	4	96	$-64 + 0.8V_B$	$-6144 + 76.8V_B$	$+0.8$	$-4915 + 61.4V_B$
U_1U_2	300	4	75	$-62.5 + 1.25V_B$	$-4687 + 93.8V_B$	$+1.25$	$-5860 + 117.2V_B$
U_2U_3	300	4	75	$-62.5 + 1.25V_B$	$-4687 + 93.8V_B$	$+1.25$	$-5860 + 117.2V_B$
U_3L_4	384	4	96	$-96 + 0.8V_B$	$-9216 + 76.8V_B$	$+0.8$	$-7373 + 61.4V_B$
U_1L_1	240	3	80	$+30 + 0$	$+2400 + 0$	0	$0 + 0$
U_1L_2	384	3	128	$+16 - 0.8V_B$	$+2048 - 102.4V_B$	-0.8	$-1638 + 81.9V_B$
U_2L_2	240	3	80	$0 + 0$	$0 + 0$	0	$0 + 0$
L_2U_3	384	3	128	$-16 - 0.8V_B$	$-2048 - 102.4V_B$	-0.8	$+1638 + 81.9V_B$
U_3L_3	240	3	80	$+30 + 0$	$+2400 + 0$	0	$0 + 0$
Σ							$-35\,738 + 638.2V_B$

Debe ser obvio de los problemas de ejemplo anteriores que la cantidad de trabajo que interviene en el análisis de armaduras estáticamente indeterminadas por los métodos de trabajo mínimo y distorsiones consistentes es aproximadamente igual.

El trabajo mínimo es especialmente útil para analizar estructuras compuestas, tales como las que se consideran en los ejemplos 16.8 y 16.9. En estos tipos de estructuras tienen lugar tanto la acción de flexión como la acción de la armadura. El lector estará convencido de la ventaja del trabajo mínimo para el análisis de las estructuras compuestas si intenta resolver los dos problemas siguientes mediante distorsiones consistentes.

EJEMPLO 16.8

Usando el procedimiento de trabajo mínimo, calcule la fuerza en la barra de acero de la estructura compuesta mostrada en la figura 16.11.

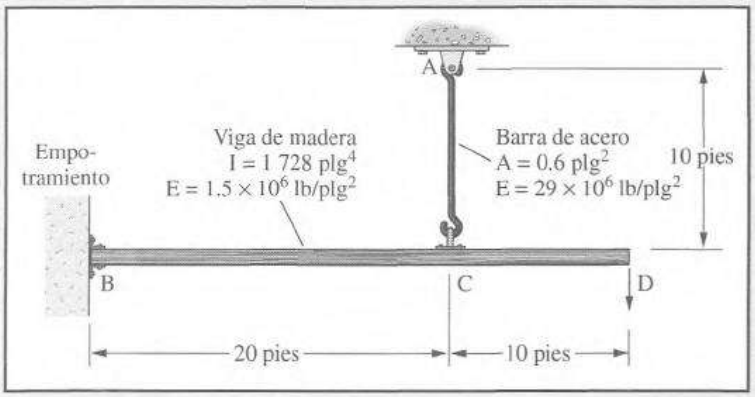


Figura 16.11

Solución.

Se supone que la barra es la redundante con una fuerza T y se calculan los valores de $\sum F(\partial F/\partial T)(L/AE)$ y $\int M(\partial M/\partial T)(dx/EI)$. Se usan valores relativos de E de 29 y 1.5 para el acero y la madera, respectivamente.

TABLA 16.8

Barra	L (plg)	A (plg^2)	$\frac{L}{A}$	$\frac{L}{AE}$	F (klb)	$\frac{\partial F}{\partial T}$	$F\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)\frac{L}{AE}$
AC	120	0.6	200	6.90	+T	+1	+6.90T
Σ							+6.90T

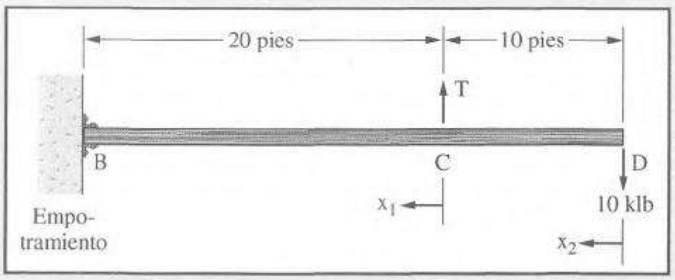


TABLA 16.9

Sección	M	$\frac{\partial M}{\partial T}$	$M\frac{\partial M}{\partial T}$	$\int M\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)\frac{dx}{EI}$
D a C	$-10x$	0	0	0
C a B	$Tx - 10x - 100$	x	$Tx^2 - 10x^2 - 100x$	$\int_0^{20}(Tx^2 - 10x^2 - 100x)\frac{dx}{(1.5)(1\,728)}$
Σ				$1.03T - 18$

Para cambiar el valor de $1.03T - 18$ a pulgadas es necesario multiplicarlo por $1\,728 \times 1\,000$ y dividirlo entre 1×10^6, ya que se usó 29 para E en vez de 29×10^6. Para cambiar el valor de $6.90T$ a pulgadas es necesario multiplicarlo por 1 000 y dividirlo entre 1×10^6. La única diferencia en las dos conversiones es el 1 728; por lo tanto, la expresión puede escribirse como sigue para cambiarla a las mismas unidades.

$$\int M\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)\frac{dx}{EI} + \sum F\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)\frac{1}{AE} = (1.03T - 18)(1\,728) + 6.90T = 0$$

$$T = +17.4 \text{ klb} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 16.9

Encuentre las fuerzas en todas las barras de la armadura de pendolón sencillo mostrada en la figura 16.12.

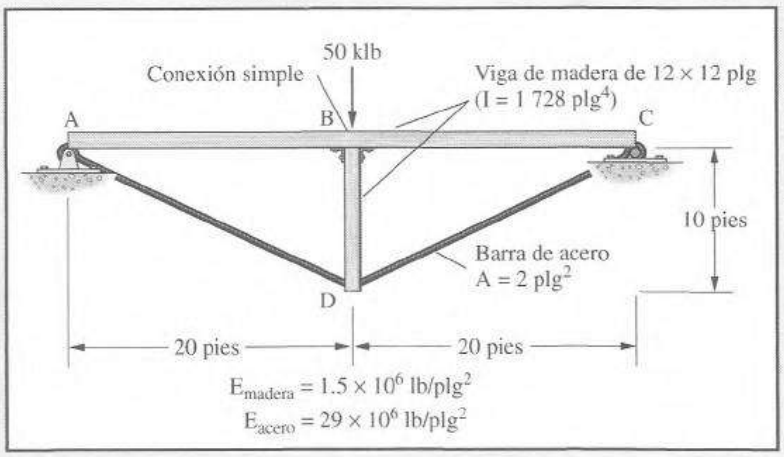
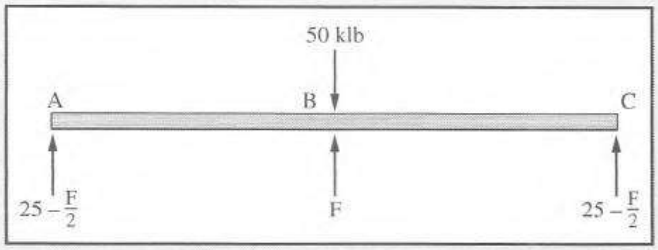


Figura 16.12

Solución.

Haciendo que BD sea la redundante con una fuerza de F, la deflexión de la viga en B se encuentra en términos de F.



De A a B y de C a B:

$$M = 25x - \frac{F}{2}x \quad \frac{\partial M}{\partial F} = -\frac{x}{2}$$

$$\int M\frac{\partial M}{\partial F}\frac{dx}{EI} = 2\int_0^{20}\frac{(-12.5x^2 + 0.25Fx^2)\ dx}{EI}$$

$$\frac{2(-12.5x^3/3 + 0.25Fx^3/3)_0^{20}}{EI} = \frac{-66\ 600 + 1\ 333F}{EI}$$

$$\frac{-66\ 600 + 1\ 333F}{1.5} = -44\ 400 + 889F$$

Determinar las fuerzas en las diversas barras en términos de la fuerza desconocida F.

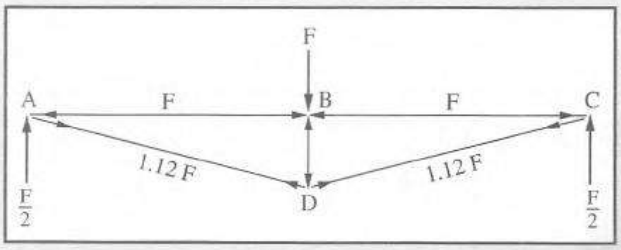


TABLA 16.10

Barra	L (plg)	A (plg^2)	E	$\frac{L}{AE}$	F′ (klb)	$\frac{F'L}{AE}$	$\frac{\partial F'}{\partial F}$	$\frac{\partial F'}{\partial F} \times \frac{F'L}{AE}$
AC	480	144	1.5×10^6	2.22	−F	−2.22F	−1	+2.22F
BD	120	144	1.5×10^6	0.555	−F	−0.555F	−1	+0.555F
AD	268	2	29×10^6	4.62	+1.12F	+5.19F	+1.12	+5.80F
DC	268	2	29×10^6	4.62	+1.12F	+5.19F	+1.12	+5.80F
Σ								14.375F

$$-44\ 400 + 889F + 14.375F = 0$$

Cambiando estos valores a unidades equivalentes y despejando a F, F = 49.2 klb
Fuerzas finales:

$$AC = -(1)(49.2) = -49.2 \text{ klb} \quad AD = +(1.12)(49.2) = +55.1 \text{ klb}$$
$$BD = -(1)(49.2) = -49.2 \text{ klb} \quad DC = +(1.12)(49.2) = +55.1 \text{ klb}$$ ■

El primer teorema de Castigliano no es tan fácil de usar como el segundo teorema u otros métodos de energía, como el del trabajo virtual, porque la energía de deformación se formula más fácilmente en términos de cargas que en términos de desplazamientos. Sin embargo, para algunas respuestas estructurales y para el desarrollo de las matrices del sistema cuando se usan métodos matriciales (que estudiaremos a partir del Capítulo 22), el primer teorema de Castigliano es el método más fácil de usar. Este método es en particular útil para la evaluación de estructuras con respuesta no lineal.

16.6 ANÁLISIS CON COMPUTADORAS

Como habrá usted visto en las estructuras resueltas hasta ahora, el análisis de sistemas de estructuras estáticamente indeterminadas es muy tedioso, especialmente cuando las estructuras implicadas son de un tamaño considerable. En muchos casos, las soluciones a mano no son factibles aun si se usa software computacional. En los despachos de cálculo generalmente se emplean programas de computadora para analizar estructuras grandes. En el ejemplo 16.10 se mostrará el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas usando una computadora donde se usa SABLE32 para analizar una armadura estáticamente indeterminada. El procedimiento que se usa es idéntico al que se usa para las armaduras estáticamente determinadas.

EJEMPLO 16.10

Determine las fuerzas en la armadura mostrada en la figura 16.13 usando el programa SABLE32 de computadora. Ésta es la misma armadura que se analizó en el ejemplo 16.2. El número al lado de cada barra es el área de ésta.

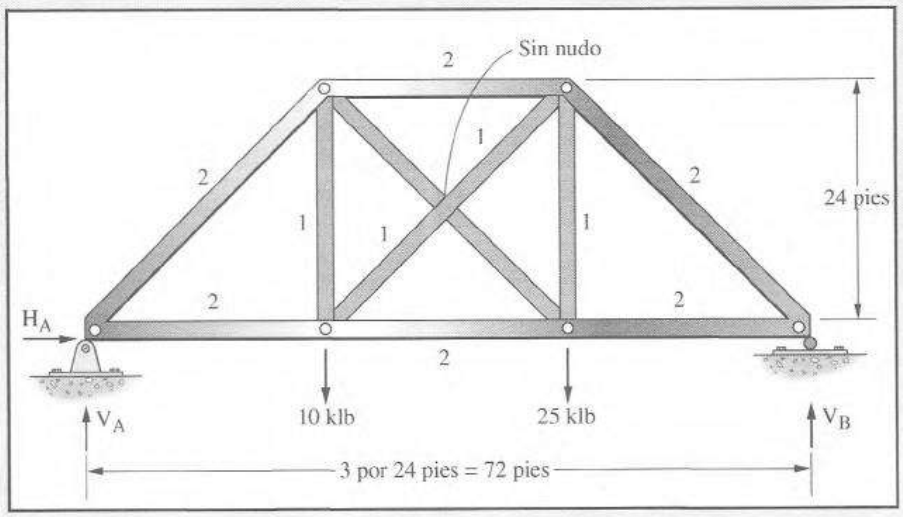
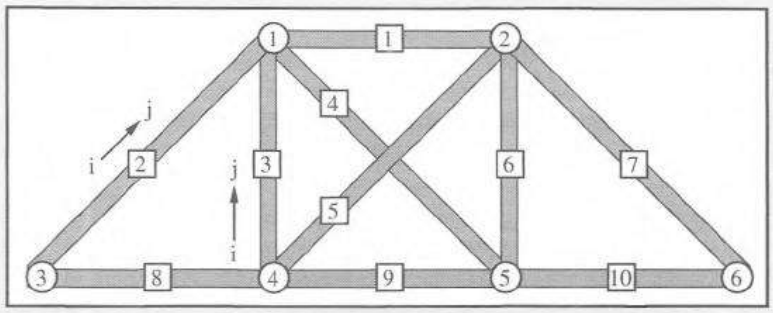


Figura 16.13

Solución.

Esta armadura fue modelada de la misma manera que las armaduras en los capítulos previos. Los grados de libertad por flexión en los extremos de cada barra fueron liberados así como los grados de libertad por torsión al inicio de cada barra. Se muestra el modelo estructural resultante.

Se muestran flechas en dos de las barras para indicar los extremos i y j tal como se usa en la solución por computadora. El extremo i se ubica al inicio de la flecha mientras que el extremo j está en el extremo más alejado.



Fuerzas en los extremos de los miembros

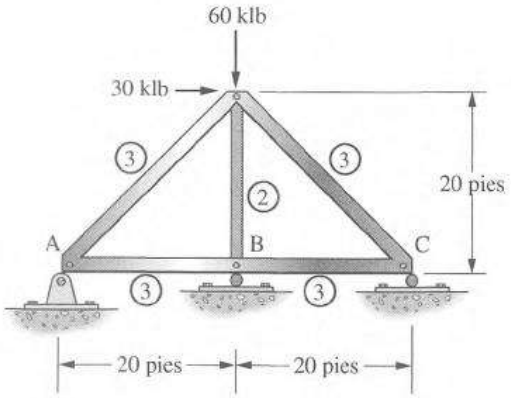
Viga	Caso	Extremo	Axial	Cortante-Y	Momento-Z
1	1	i	2.154E+01	0.000E+00	0.000E+00
		j	−2.154E+01	0.000E+00	0.000E+00
2	1	i	2.121E+01	0.000E+00	0.000E+00
		j	−2.121E+01	0.000E+00	0.000E+00
3	1	i	−8.457E+01	0.000E+00	0.000E+00
		j	8.457E+01	0.000E+00	0.000E+00
4	1	i	−9.253E+01	0.000E+00	0.000E+00
		j	9.253E+01	0.000E+00	0.000E+00
5	1	i	−2.182E+01	0.000E+00	0.000E+00
		j	2.182E+01	0.000E+00	0.000E+00
6	1	i	−1.846E+01	0.000E+00	0.000E+00
		j	1.846E+01	0.000E+00	0.000E+00
7	1	i	2.828E+01	0.000E+00	0.000E+00
		j	−2.828E+01	0.000E+00	0.000E+00
8	1	i	−1.500E+01	0.000E+00	0.000E+00
		j	1.500E+01	0.000E+00	0.000E+00
9	1	i	−1.346E+01	0.000E+00	0.000E+00
		j	1.346E+01	0.000E+00	0.000E+00
10	1	i	−2.000E+01	0.000E+00	0.000E+00
		j	2.000E+01	0.000E+00	0.000E+00

■

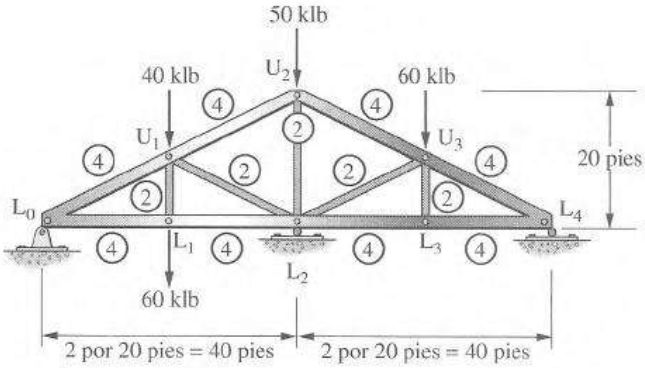
16.7 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

En los problemas 16.1 al 16.13 determine las reacciones y las fuerzas en las barras de las armaduras mostradas usando el método de las distorsiones consistentes.

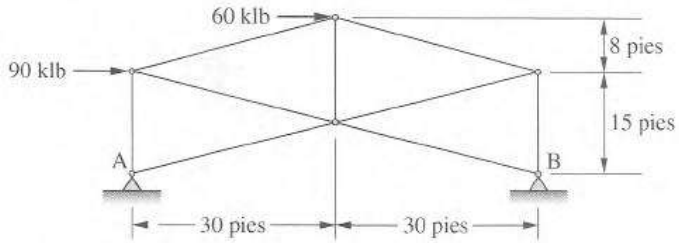
16.1 (*Resp.:* $L_1L_2 = +25.93$ klb, $U_1L_2 = -36.66$ klb.)



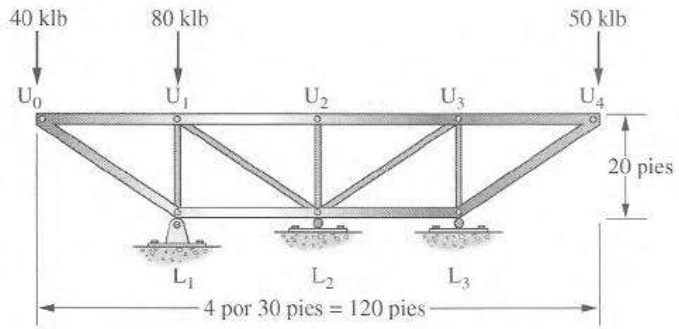
16.2



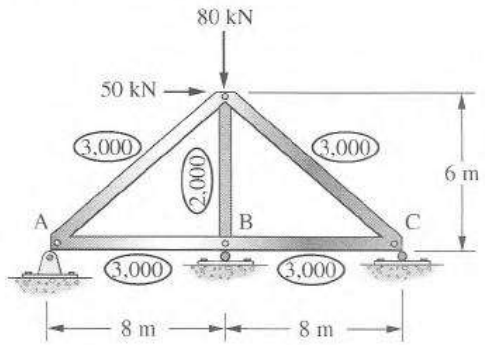
16.3 Todas las áreas son iguales. (*Resp.:* $V_R = 45.5$ klb ↑, $U_0U_1 = +8.4$ klb, $U_2L_2 = -26.8$ klb.)



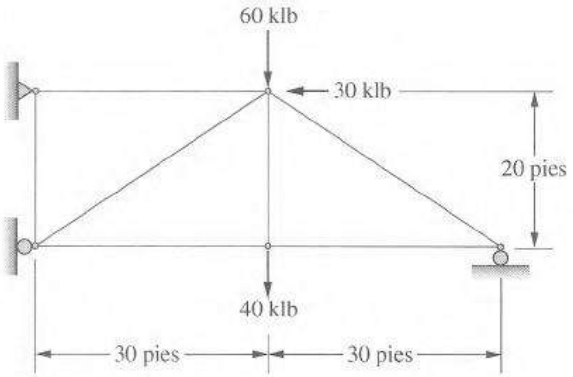
16.4 Todas las áreas son iguales.



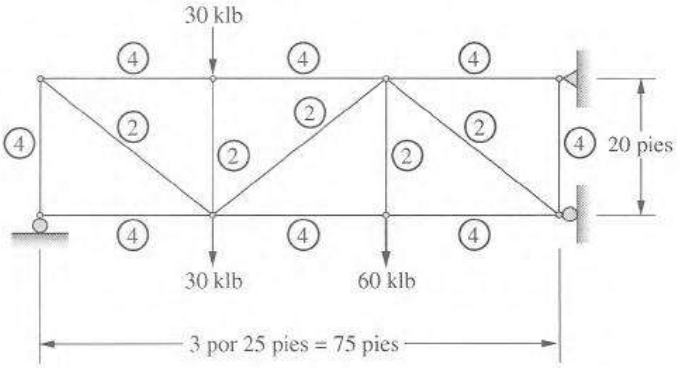
16.5 (*Resp.:* $V_B = 64.89$ kN ↑, $L_0L_1 = +35.05$ kN.)



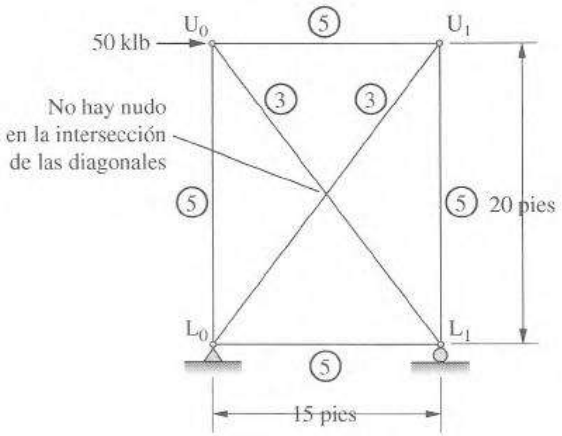
16.6 Todas las áreas son iguales.



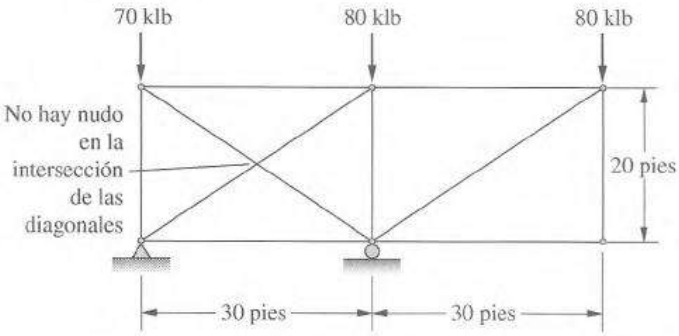
16.7 (*Resp.:* $V_L = 49.0$ klb ↑, $U_0U_1 = -61.25$ klb, $U_2L_3 = -113.6$ klb.)



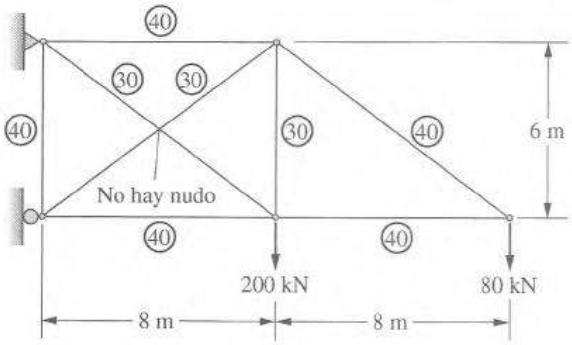
16.8



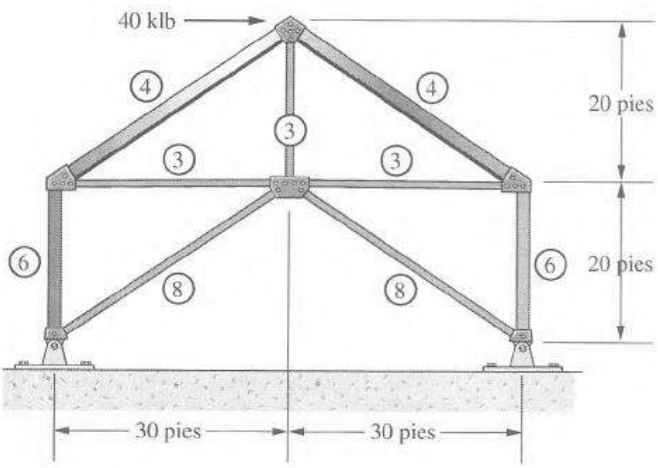
16.9 (*Resp.:* $L_1U_2 = -144.22$ klb, $L_0L_1 = -49.05$ klb.) Todas las áreas son iguales.



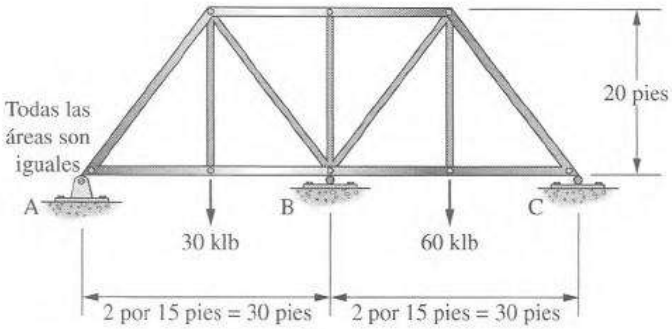
16.10



16.11 (*Resp.:* $H_L = 19.5$ klb ↑, $M_0U_1 = +23.44$ klb, $M_2L_2 = -13.7$ klb.)

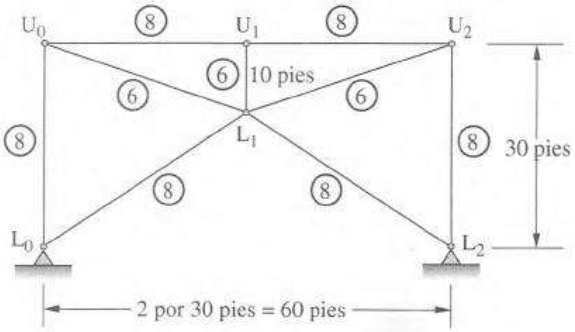


16.12

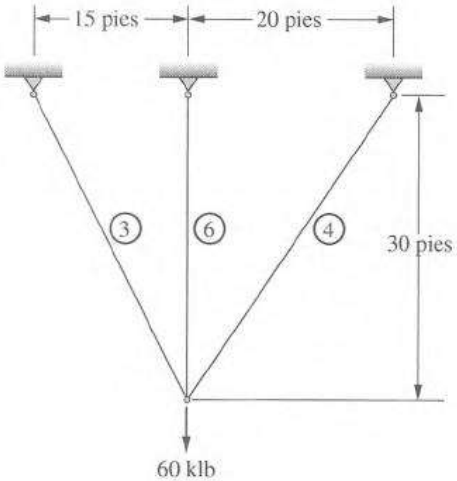


16.13 (*Resp.:* $H_B = 18.19$ klb →, $U_0U_1 = -36.38$ klb, $L_1L_2 = +21.83$ klb.)

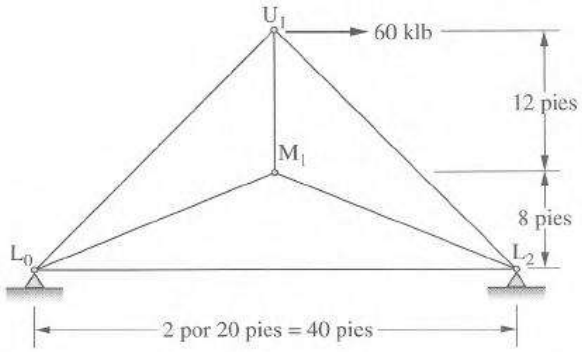
Determine las fuerzas en todos los miembros de la armadura que se muestra en la figura si los miembros de la cuerda superior, U_0U_1 y U_1U_2, tienen un incremento de temperatura de 75 °F y no hay ningún cambio de temperatura en los demás miembros. Coeficiente de dilatación lineal $\epsilon = 0.0000065$. $E = 29 \times 10^6$ lb/plg^2.



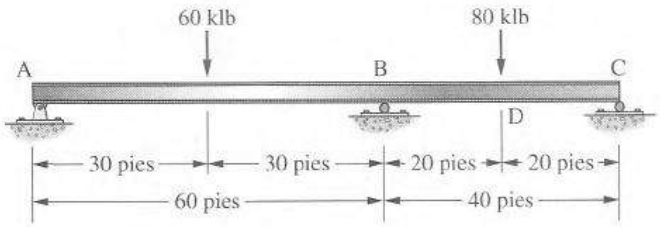
16.14 En los problemas 16.14 al 16.22 analice las estructuras usando el primer teorema de Castigliano. Los valores de E e I son constantes, a menos que se indique otra cosa. Los valores en círculos son áreas en pulgadas cuadradas.



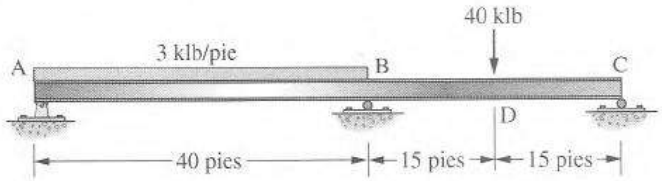
16.15 (*Resp.:* $= L_0L_2 = +25.2$ klb, $U_1M_1 = +6.6$ klb.) Todas las áreas son iguales.



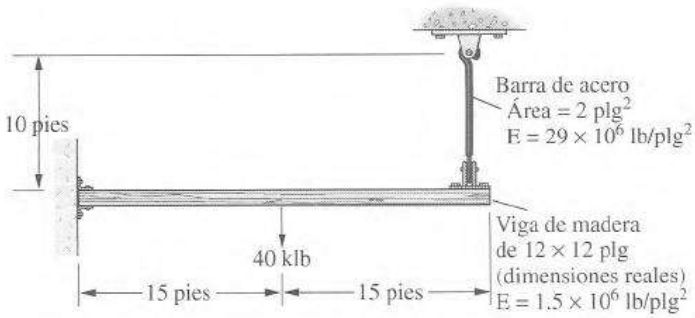
16.16



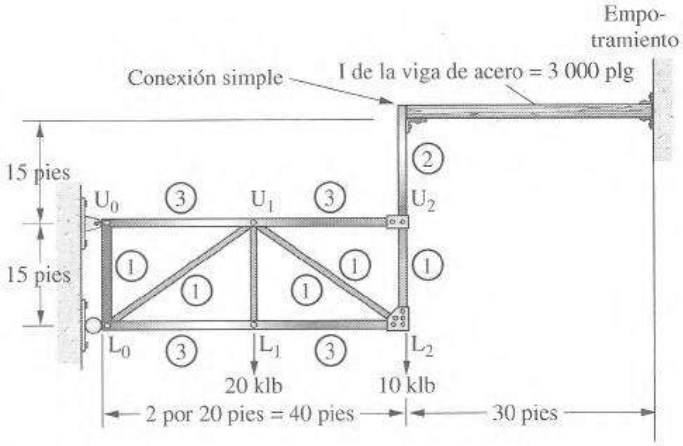
16.17 (*Resp.:* $V_A = 49.0$ klb ↑, $V_B = 105.6$ klb ↑.)



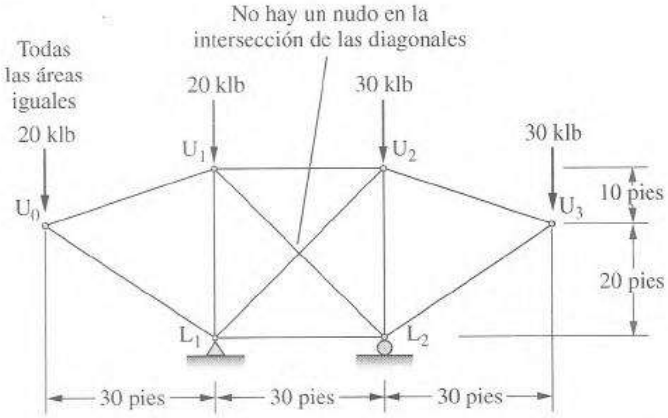
16.18



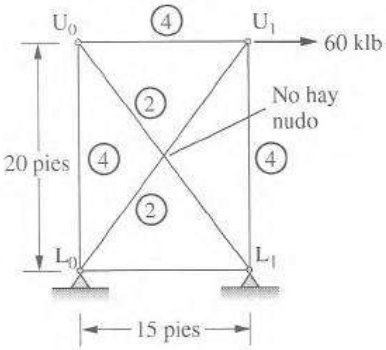
16.19 (*Resp.:* $U_0U_1 = +36.1$ klb, $U_2L_2 = +6.48$ klb.)



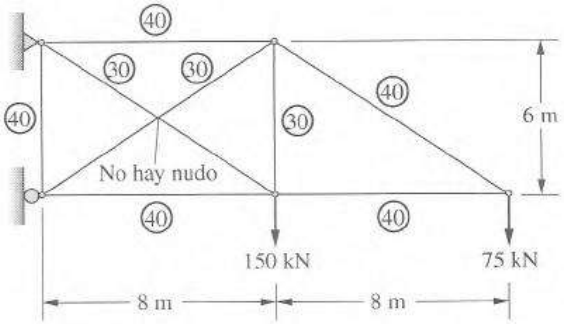
16.20



16.21 (*Resp.:* $H_L = 31.27$ klb, $U_0L_0 = +38.31$ klb, $U_0L_1 = -47.88$ klb.)



16.22



Para los Problemas 16.23 al 16.30, use SABLE32 o SAP2000 y resuelva los siguientes problemas.

16.23 Problema 16.1. (*Resp.:* $L_0U_1 = +5.68$ klb, $L_1L_2 = +25.98$ klb.)

16.24 Problema 16.2.

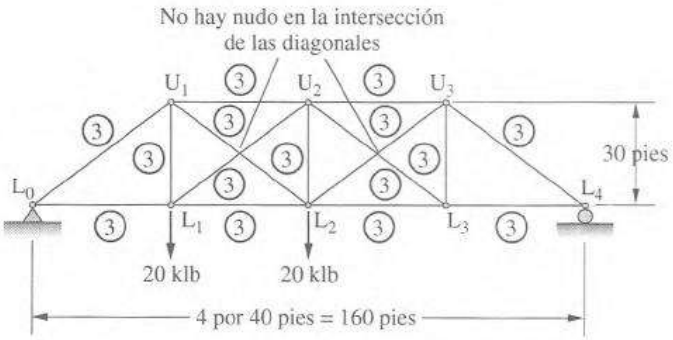
16.25 Problema 16.5. (*Resp.* $L_0L_1 = +35.07$ klb, $U_1L_2 = -43.84$ klb.)

16.26 Problema 16.15.

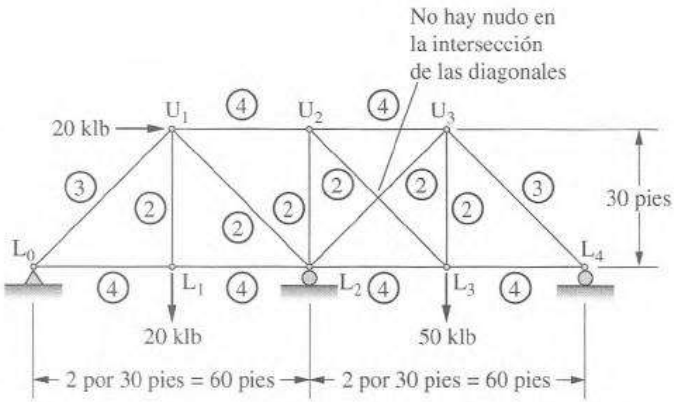
16.27 Problema 16.20. (*Resp.:* $U_1L_1 = -14.761$ klb, $L_1U_2 = -2.692$ klb, $L_1L_2 = -18.10$ klb.)

16.28 Problema 16.22.

16.29 Problema 16.20 (*Resp.:* $L_0U_1 = -13.25$ klb, $U_2L_2 = -6.983$ klb, $L_2L_3 = +1.945$ klb.)



16.30



Capítulo 17

Líneas de influencia para estructuras estáticamente indeterminadas

17.1 LÍNEAS DE INFLUENCIA PARA VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

La utilización de las líneas de influencia en estructuras estáticamente indeterminadas es igual a la que le correspondió a las estructuras isostáticas o estáticamente determinadas. Esas líneas permiten localizar los puntos críticos por cargas vivas y calcular las fuerzas para diversas posiciones de las cargas. Las líneas de influencia para estructuras estáticamente indeterminadas no son tan fáciles de trazar como para el caso de las estructuras isostáticas. En estas últimas se pueden calcular las ordenadas para algunos puntos importantes y unir estos valores por medio de líneas rectas. Por desgracia, las líneas de influencia en estructuras continuas exigen el cálculo de ordenadas en un gran número de puntos, porque los diagramas pueden ser curvos o constar de una serie de cuerdas. El diagrama de cuerdas se determina cuando las cargas se transmiten a intervalos a la estructura.

El problema del trazo de esos diagramas no es tan difícil como el párrafo anterior parece indicar, pues un gran porcentaje del trabajo se elimina mediante la aplicación del principio de las deflexiones recíprocas de Maxwell. A continuación se describe el trazo de la línea de influencia para la reacción interior de la viga de dos claros que se muestra en la figura 17.1.

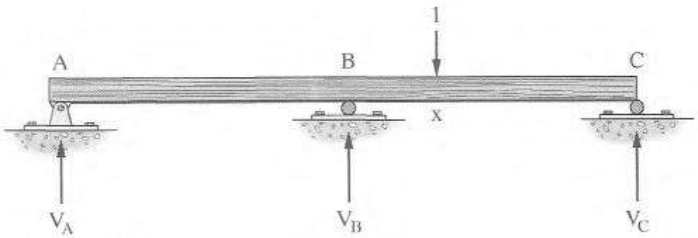


Figura 17.1

El procedimiento para el cálculo de V_B ha sido retirarla de la viga y luego calcular Δ_B y Δ_{bb} y sustituir sus valores en la fórmula acostumbrada. El mismo procedimiento puede usarse para trazar una línea de influencia para V_B. Una carga unitaria se coloca en un punto x haciendo que Δ_B sea igual a Δ_{bx}, de donde se escribe la siguiente expresión:

$$V_B = -\frac{\Delta_B}{\Delta_{bb}} = -\frac{\Delta_{bx}}{\Delta_{bb}}$$

A primera vista parecería que la carga unitaria tiene que colocarse en numerosos puntos sobre la viga y el valor de Δ_{bx} ser laboriosamente calculado para cada ubicación. Sin embargo, un estudio de las deflexiones causadas por una carga unitaria en el punto x mostrará que estos cálculos no son necesarios. Por la ley de Maxwell, la deflexión en B debida a una carga unitaria en x(Δ_{bx}) es idéntica a la deflexión en x causada por una carga unitaria en B(Δ_{xb}). La expresión para V_B es entonces

$$V_B = -\frac{\Delta_{xb}}{\Delta_{bb}}$$

Por ahora debería ser claro que la carga unitaria tiene que colocarse sólo en B y calcular las deflexiones en diferentes puntos a lo largo de la viga. Dividiendo cada uno de esos valores por Δ_{bb} obtenemos las ordenadas de la línea de influencia. Si se grafica una curva de deflexión para la viga para una carga unitaria en B (habiendo retirado el apoyo en B), puede obtenerse una línea de influencia para V_B dividiendo cada una de las ordenadas de deflexión por Δ_{bb}. Otra manera de expresar este principio es como sigue: Si se produce una deflexión unitaria en un apoyo para el cual se desea la línea de influencia, la viga trazará su línea respectiva debido a que la deflexión en cualquier punto de la viga es la ordenada de la línea de influencia en ese punto para la reacción mencionada.

La presentación que hizo Maxwell de su teorema en 1864 fue muy breve, motivo por el cual su valor no fue por completo apreciado sino hasta 1886, cuando Heinrich Müller-Breslau mostró claramente su valor, según se acaba de describir en el párrafo anterior.[1] El principio de Müller-Breslau puede enunciarse con todo detalle de la manera siguiente: **La configuración deformada de una estructura representa a cierta escala la línea de influencia para una función, como puede ser esfuerzo, fuerza cortante, momento o componente de reacción, si se permite que la función actúe a lo largo de un desplazamiento unitario.** Este principio, que es aplicable a vigas, marcos y armaduras estáticamente determinados o indeterminados, se prueba en la siguiente sección de este capítulo.

En el ejemplo 17.1 se presenta la línea de influencia para la reacción en el apoyo interior de una viga de dos claros. Se muestran también las líneas de influencia para las reacciones en los extremos; los valores de las ordenadas se determinaron por estática, a partir de los valores calculados para la reacción interior. El procedimiento de la viga conjugada es un método excelente para determinar las deflexiones de la viga necesarias para los diagramas.

EJEMPLO 17.1

Trazar las líneas de influencia para las reacciones en cada apoyo de la estructura mostrada en la figura 17.2.

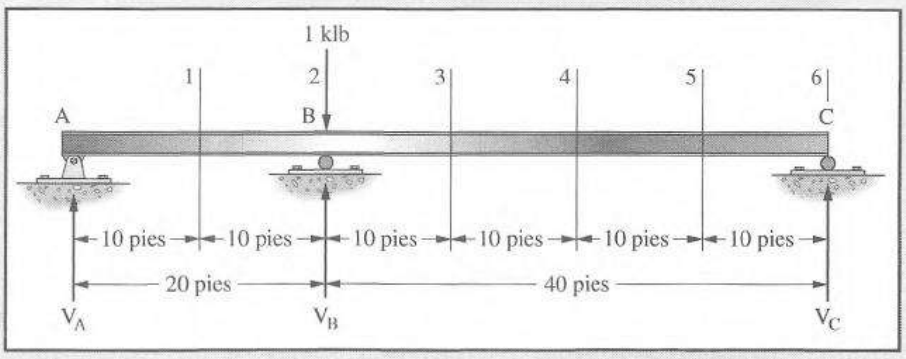
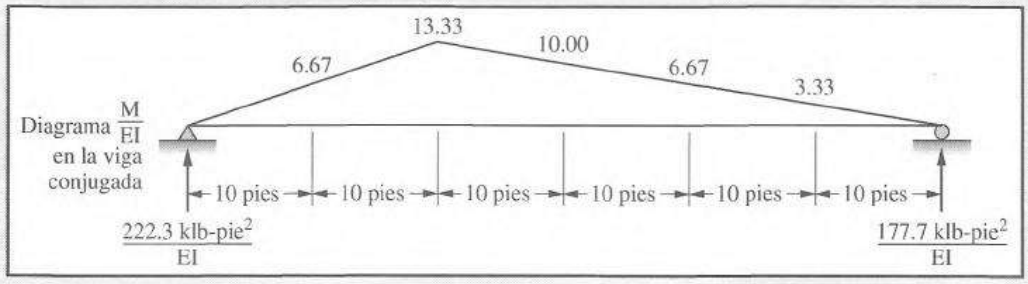


Figura 17.2

[1] J. S. Kinney, *Indeterminate Structural Analysis* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957), 14.

Solución. Retiramos V_B, colocamos una carga unitaria en B, y calculamos las deflexiones causadas a intervalos de 10 pies por el método de la viga conjugada:



$$\Delta_1 = (222.3)(10) - \left(\tfrac{1}{2}\right)(10)(6.67)(3.33) = 2\,112$$

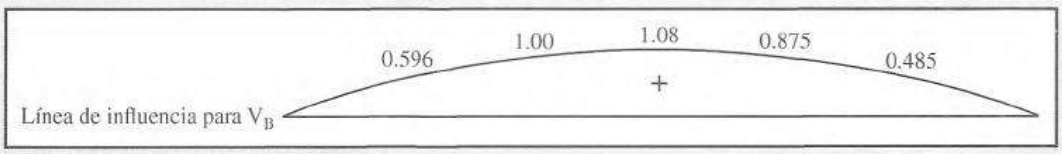
$$\Delta_2 = (222.3)(20) - \left(\tfrac{1}{2}\right)(20)(13.33)(6.67) = 3\,550$$

$$\Delta_3 = (177.7)(30) - \left(\tfrac{1}{2}\right)(30)(10.00)(10.00) = 3\,831$$

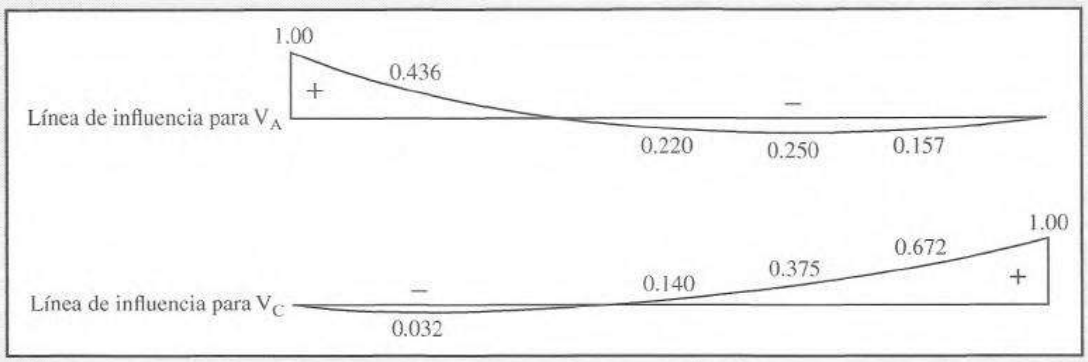
$$\Delta_4 = (177.7)(20) - \left(\tfrac{1}{2}\right)(20)(6.67)(6.67) = 3\,109$$

$$\Delta_5 = (177.7)(10) - \left(\tfrac{1}{2}\right)(10)(3.33)(3.33) = 1\,722$$

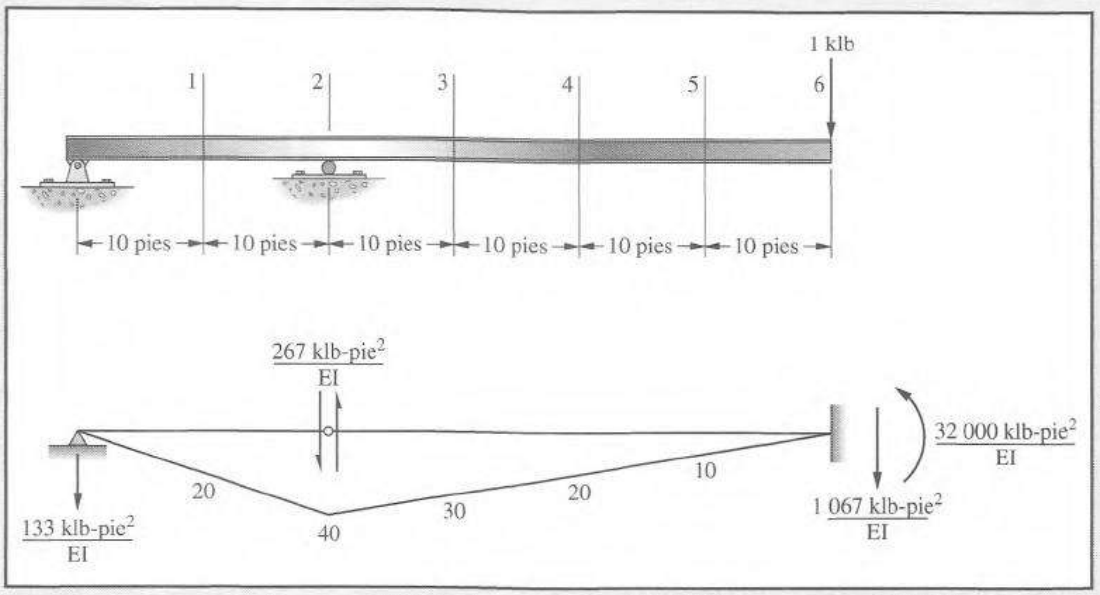
Observando que $\Delta_{bb} = \Delta_2$, el valor de las ordenadas de la línea de influencia para V_B se encuentran dividiendo cada deflexión por Δ_2.



Una vez determinados los valores de V_B para diferentes posiciones de la carga unitaria, pueden determinarse los valores de V_A y V_C para cada posición de la carga mediante la estática con los siguientes resultados:

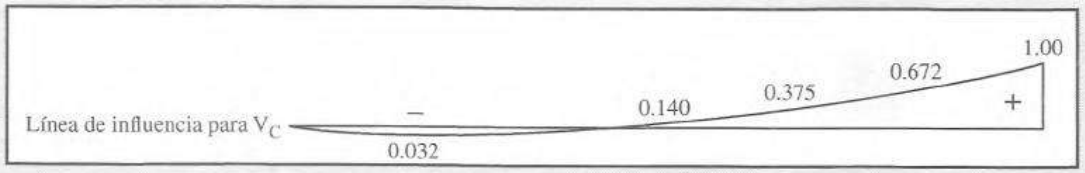


Para verificar los resultados, se retira el apoyo C, se coloca ahí una carga unitaria, y las deflexiones resultantes se calculan a intervalos de 10 pies.



$$\Delta_1 = -(133)(10) + \left(\tfrac{1}{2}\right)(10)(20)(3.33) = -1\,000$$
$$\Delta_2 = -(133)(20) + \left(\tfrac{1}{2}\right)(20)(40)(6.67) = 0$$
$$\Delta_3 = +32\,000 - (1\,067)(30) + \left(\tfrac{1}{2}\right)(30)(30)(10) = +4\,500$$
$$\Delta_4 = +32\,000 - (1\,067)(20) + \left(\tfrac{1}{2}\right)(20)(20)(6.67) = +12\,000$$
$$\Delta_5 = +32\,000 - (1\,067)(10) + \left(\tfrac{1}{2}\right)(10)(10)(3.33) = +21\,500$$
$$\Delta_6 = +32\,000$$

Como $\Delta_{cc} = \Delta_6$, las ordenadas de la línea de influencia para V_C se determinan dividiendo cada deflexión por Δ_6.



A continuación investigaremos el método de trazo de las líneas de influencia para vigas que son continuas sobre tres claros, con dos redundantes. Para este análisis, se considerará la viga mostrada en la figura 17.3 y que las reacciones V_B y V_C son las redundantes.

De nuevo, retiramos las fuerzas redundantes y calculamos las deflexiones en diferentes posiciones a lo largo de la viga para una carga unitaria en B y una carga unitaria en C.

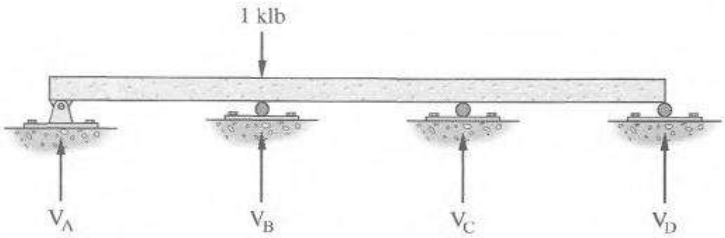


Figura 17.3

De la ley de Maxwell, una carga unitaria en cualquier punto x causa una deflexión en B(Δ_{bx}) igual a la deflexión en x debido a una carga unitaria en B(Δ_{xb}). De manera similar, $\Delta_{cx} = \Delta_{xc}$. Después de calcular Δ_{xb} y Δ_{xc} en diferentes secciones, sus valores en cada sección pueden sustituirse en las siguientes ecuaciones simultáneas, cuya solución dará los valores de V_B y V_C.

$$\Delta_{xb} + V_B\Delta_{bb} + V_C\Delta_{bc} = 0$$
$$\Delta_{xc} + V_B\Delta_{cb} + V_C\Delta_{cc} = 0$$

Las ecuaciones simultáneas se resuelven rápidamente, aunque se calcule un gran número de ordenadas, porque las únicas variables en las ecuaciones son Δ_{xb} y Δ_{xc}. Después de preparar las líneas de influencia para las reacciones redundantes de una viga, pueden determinarse las ordenadas para cualquier otra función (momento, fuerza cortante, etc.), por consideraciones de equilibrio estático. En el ejemplo 17.2 se muestran los cálculos necesarios para preparar las líneas de influencia para varias funciones de una viga continua de tres claros.

EJEMPLO 17.2

Trazar las líneas de influencia para V_B, V_C, V_D, M_7 y la fuerza cortante en la sección 6 en la figura 17.4.

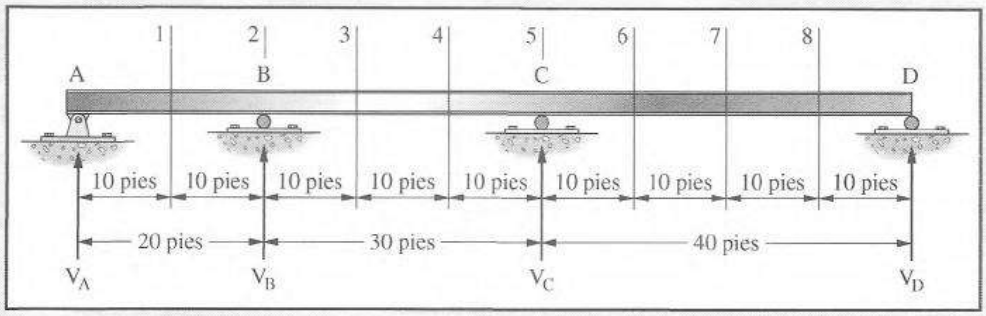
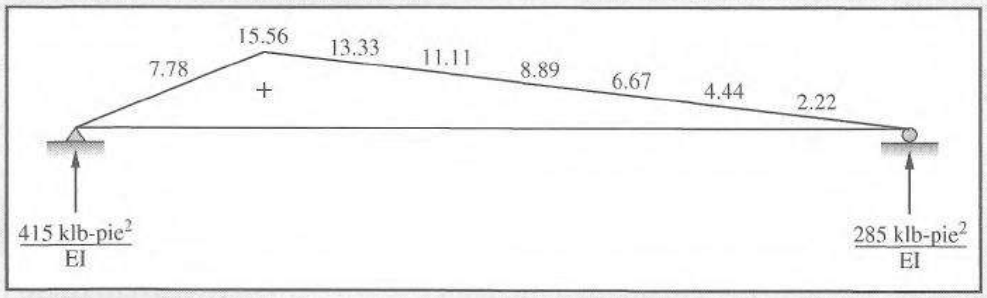
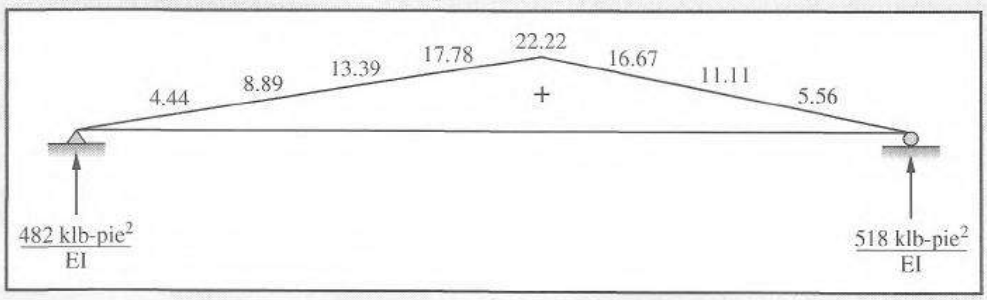


Figura 17.4

Solución. Retiramos las reacciones V_B y V_C, colocamos una carga unitaria en B, y cargamos la viga conjugada con el diagrama M/EI.



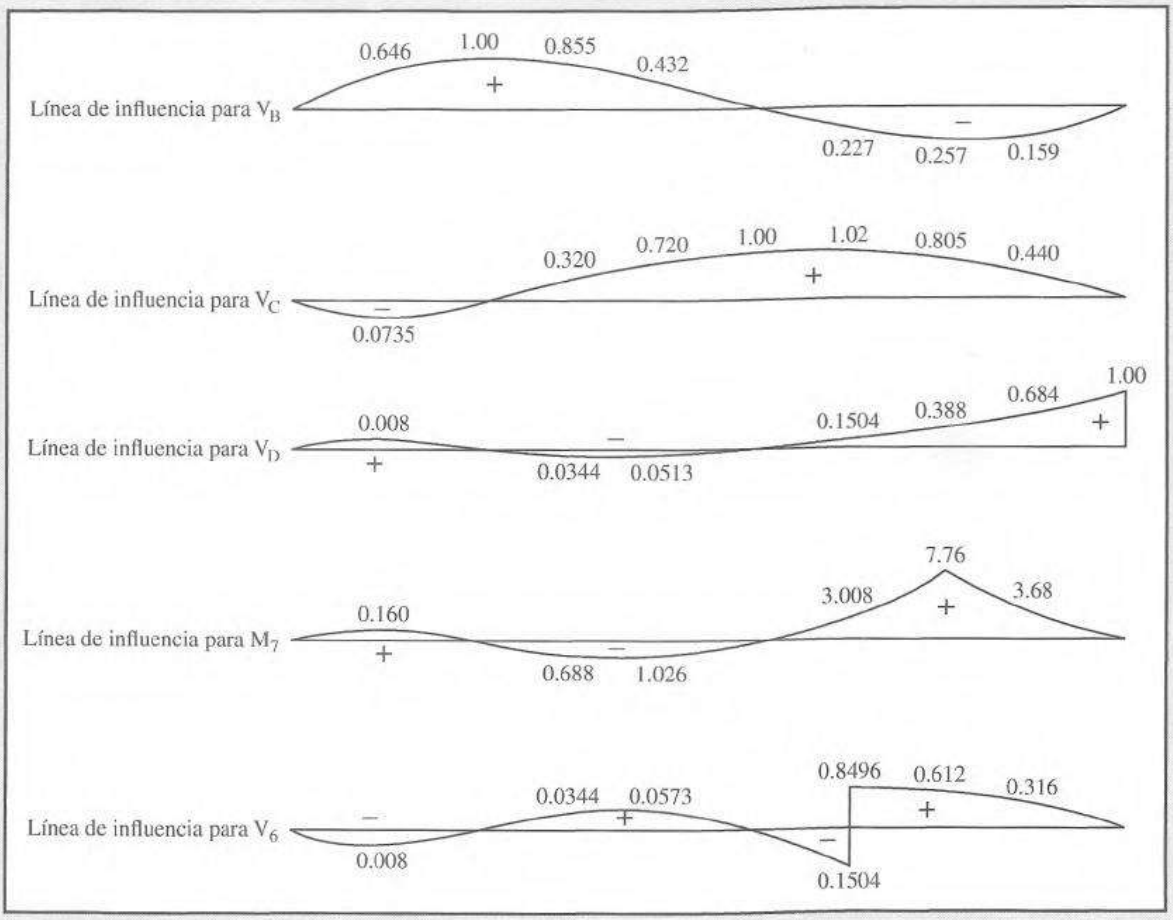
Colocamos una carga unitaria en C y cargamos la viga conjugada con el diagrama M/EI.



Calculamos los valores de Δ_{xb} y Δ_{xc}, de los cuales se obtienen V_B y V_C al resolver las ecuaciones simultáneas. Las ordenadas para M_7, V_D y la fuerza cortante en la sección 6 se obtienen por estática y se muestran en la tabla 17.1.

TABLA 17.1

Sección	Δ_{xb}	Δ_{xc}	V_B	V_C	V_D	M_7	V_6
1	4 020	4 746	+0.646	−0.0735	+0.008	+0.160	−0.008
2	7 255 = Δ_{bb}	9 040 = Δ_{bc}	+1.00	0	0	0	0
3	9 100	12.460	+0.855	+0.320	−0.0344	−0.688	+0.0344
4	9 630	14.540	+0.432	+0.720	−0.0513	−1.026	+0.0513
5	9 040 = Δ_{cb}	14.825 = Δ_{cc}	0	+1.00	0	0	0
6	7 550	13.040	−0.227	+1.02	+0.1504	+3.008	−0.1504 +0.8496
7	5 404	9 618	−0.257	+0.805	+0.388	+7.76	+0.612
8	2 813	5 088	−0.159	+0.440	+0.688	+3.68	+0.316



Las líneas de influencia para las reacciones, fuerzas cortantes, momentos flexionantes, etc., para marcos, pueden prepararse de la misma manera que para las vigas estáticamente indeterminadas antes vistas. Sin embargo, no presentaremos aquí tales cálculos. La próxima sección de este capítulo, que trata de la preparación de líneas de influencia cualitativas, mostrará al lector cómo situar las cargas vivas sobre marcos para generar valores máximos.

17.2 LÍNEAS DE INFLUENCIA CUALITATIVAS

El principio de Müller-Breslau se basa en el teorema del trabajo mínimo de Castigliano, el cual se expone en el capítulo 16 de la presente obra. Este teorema se enuncia como sigue: **Cuando en una estructura se induce un desplazamiento, el trabajo virtual total realizado por todas las fuerzas activas es igual a cero.**

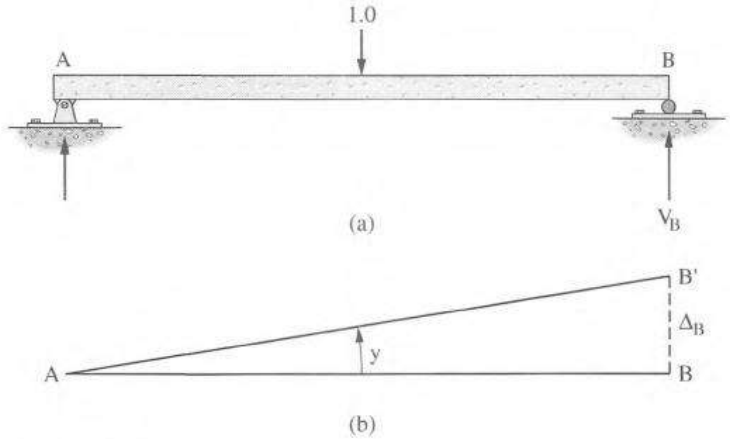


Figura 17.5

La demostración del principio de Müller-Breslau puede efectuarse considerando la viga mostrada en la figura 17.5(a) cuando está sometida a una carga unitaria móvil. Para determinar la magnitud de la reacción V_B, podemos retirar el soporte en B y permitir que V_B recorra una pequeña distancia Δ_B, como se muestra en la parte (b) de la figura. La posición de la viga está ahora representada por la línea AB′ en la figura y la carga unitaria se ha movido la distancia y.

La ecuación del trabajo virtual para las fuerzas activas sobre la viga es

$$(V_B)(\Delta_B) = (1.0)(y)$$

$$V_B = \frac{y}{\Delta_B}$$

Si a Δ_B se le da un valor unitario, V_B será igual a y.

$$V_B = \frac{y}{1.0} = y$$

Puede verse ahora que y es la ordenada de la viga deflexionada en la posición de la carga unitaria. También es el valor de la reacción derecha V_B debido a esa carga unitaria móvil. Por lo tanto, la posición AB′ de la viga deflexionada representa la línea de influencia para V_B. Demostraciones similares pueden desarrollarse para las líneas de influencia de otras funciones de una estructura, como son la fuerza cortante y el momento.

El principio de Müller-Breslau es de tanta importancia que se ocupa espacio para enfatizar su valor. La forma de la línea de influencia para estructuras continuas es tan fácil de determinar a

partir de este principio que el cálculo real de los valores numéricos de las ordenadas no siempre es necesario. Usando este principio se pueden esbozar las líneas de influencia con suficiente exactitud para localizar las posiciones críticas para la carga viva para varias funciones de la estructura. Esta posibilidad es muy importante para los marcos de edificios, como se mostrará en los siguientes párrafos.

Si se desea la línea de influencia para la reacción izquierda de la viga continua mostrada en la figura 17.6(a), su forma general puede determinarse permitiendo que la reacción se mueva hacia arriba a través de un desplazamiento unitario como se muestra en la figura 17.6(b) de la figura. Si el extremo izquierdo de la viga se desplaza hacia arriba de esta manera, la viga tomará la forma mostrada. Esta forma deformada puede dibujarse fácilmente, recordando que los otros soportes no se mueven. Se dice que las líneas de influencia obtenidas esbozando la forma deformada son *líneas de influencia cualitativas*, mientras que las exactas son *líneas de influencia cuantitativas*. La línea de influencia para V_C en la figura 17.6(c) es otro ejemplo de una línea de influencia cualitativa para las componentes de reacción.

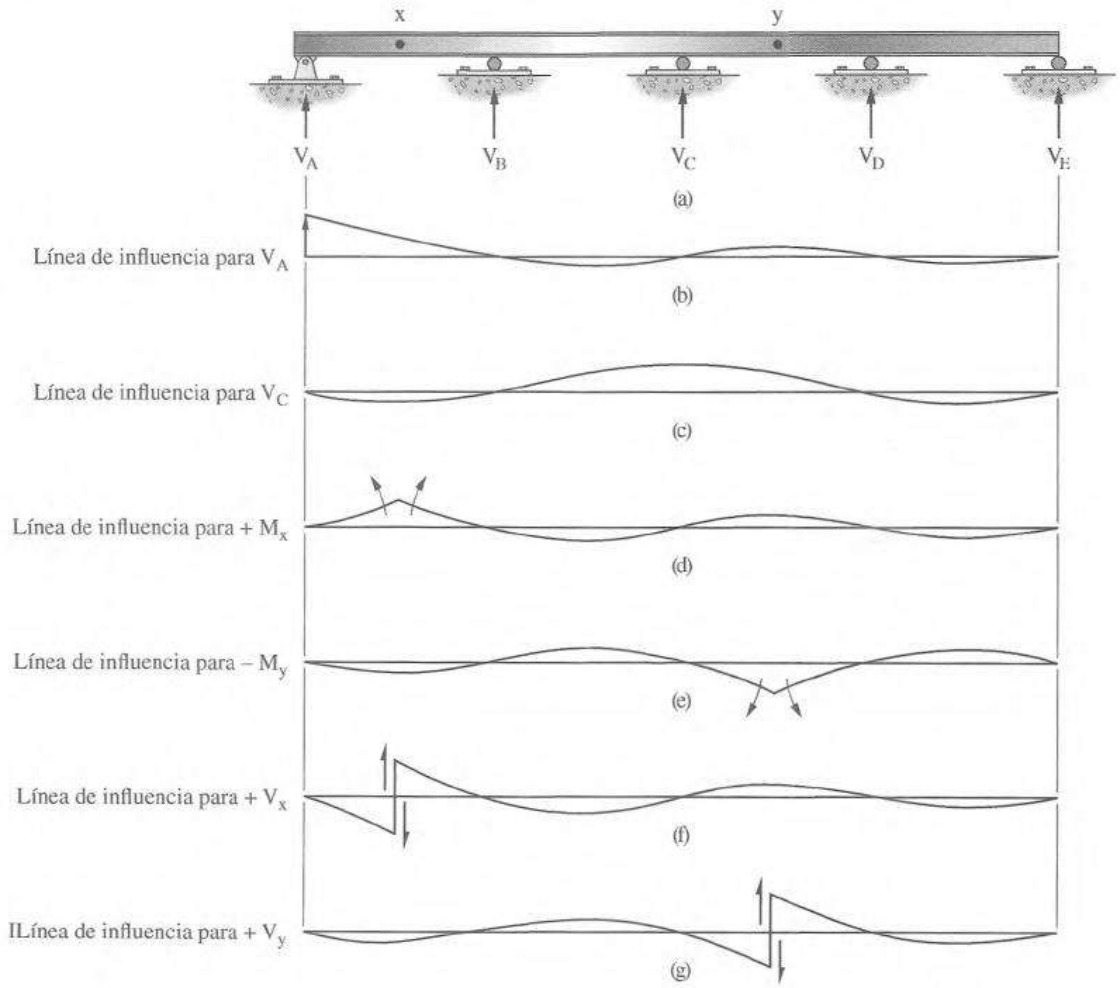


Figura 17.6

La figura 17.6(d) muestra la línea de influencia para el momento flexionante positivo en el punto x cerca del centro del claro a la izquierda. Se supone que la viga tiene un pasador o articulación insertado en x y un par adyacente aplicado a cada lado del pasador que causará compresión en la parte superior de las fibras (momento positivo). El par aplicado a cada lado del pasador causa

que el claro izquierdo tome la forma indicada; la forma deflexionada del resto de la viga puede dibujarse en forma aproximada. Un procedimiento similar se usa para dibujar la línea de influencia para el momento negativo en el punto, y que se localiza en el tercer claro. La diferencia es que el momento del par aplicado en el supuesto pasador tenderá a causar compresión en las fibras inferiores de la viga, asociado esto con un momento negativo.

Finalmente, se dibujan las líneas de influencia cualitativas para la fuerza cortante positiva en los puntos x y y. En el punto x, se supone que la viga se corta y se aplican a la viga dos fuerzas verticales de la naturaleza requerida para dar fuerza cortante positiva sobre los lados de la sección cortada. La viga tomará la forma mostrada en la figura 17.6(f). El mismo procedimiento se usa para dibujar el diagrama para la fuerza cortante positiva en el punto y.

Con estos diagramas se dispone de suficiente información respecto de las condiciones críticas por carga viva. Para obtener el valor positivo máximo de V_A causado por una carga viva uniforme, la carga debería colocarse sobre los claros 1 y 3, donde el diagrama tiene ordenadas positivas; si se requiere el momento negativo máximo en el punto x, los claros 2 y 4 deberán estar cargados, etcétera.

Las líneas de influencia cualitativas son muy valiosas en la determinación de las posiciones críticas para las cargas en edificios, como se ilustra por la línea de influencia de momento para el marco de la figura 17.7. Si se trazan los diagramas para todo el marco, se supondrá que los nudos tienen libertad de girar. Los elementos en cada nudo se suponen unidos rígidamente entre sí, de manera que los ángulos entre ellos no cambian durante el giro. La línea de influencia para esta figura se traza para el momento positivo en el centro de la viga AB.

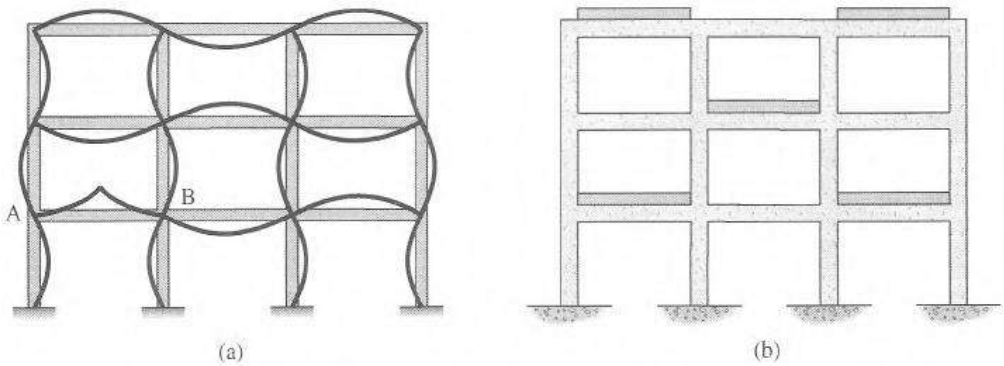


Figura 17.7 Línea de influencia cualitativa para momento positivo al centro del claro AB. Para obtener el momento positivo máximo al centro del claro AB, coloque la carga viva como se muestra.

A partir del diagrama resulta obvio cuáles claros deben cargarse con el fin de producir el máximo momento flexionante positivo. Debe observarse que las cargas sobre una viga a más de tres claros de distancia, aproximadamente, tienen poco efecto en la función estructural considerada. Esto puede verse en las líneas de influencia del ejemplo 17.2, donde las ordenadas, incluso a dos claros de distancia, son muy pequeñas.

Resulta pertinente la siguiente advertencia con respecto a las líneas de influencia cualitativas: deben trazarse para funciones cerca del centro de los claros o en los apoyos. No deberán trazarse líneas de influencia en el caso de secciones próximas a los cuartos de los claros si no se analizan con cuidado. Cerca del cuarto del claro se encuentra el denominado *punto fijo,* en el que la línea de influencia cambia de tipo. El tema de los puntos fijos se analiza con todo detalle en el libro *Continuous Frames of Reinforced Concrete,* de H. Cross y N. D. Morgan.[2]

[2] H. Cross y N. D. Morgan, *Continuous Frames of Reinforced Concrete* (Nueva York: Wiley, 1932).

17.3 LÍNEAS DE INFLUENCIA PARA ARMADURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Para el análisis de armaduras hiperestáticas es necesario trazar líneas de influencia para determinar las posiciones críticas de las cargas vivas, tal como se hizo en las armaduras isostáticas.

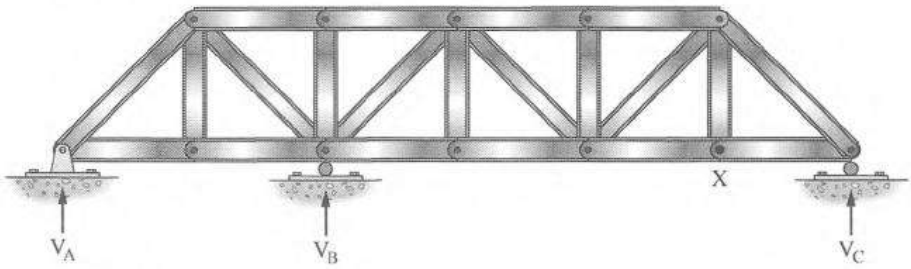


Figura 17.8

El análisis de los detalles de trazo de estos diagramas para armaduras hiperestáticas es muy similar al que se presentó en el caso de las vigas hiperestáticas en las secciones 17.1 y 17.2. Para trazar la línea de influencia correspondiente a una reacción en una armadura continua, se quita el apoyo y se coloca una carga unitaria en el punto de apoyo. Para esta posición de la carga unitaria, se determina la deflexión en cada nudo de la armadura. Por ejemplo, considere la elaboración de la línea de influencia para la reacción interna de la armadura mostrada en la figura 17.8. El valor de la reacción cuando la carga unitaria está en el nudo x puede expresarse como sigue:

$$V_B = -\frac{\Delta_{xb}}{\Delta_{bb}} = -\frac{\sum(\mu_x \mu_B L/AE)}{\sum(\mu_B^2 L/AE)}$$

Después que la línea de influencia para V_B ha sido trazada, puede prepararse la línea de influencia para otra reacción repitiendo el proceso de retirarla como la redundante, introducir una carga unitaria ahí, y calcular las deflexiones necesarias. Un procedimiento más simple es calcular las otras reacciones, o cualesquier otras funciones cuyas líneas de influencia se deseen, usando las ecuaciones del equilibrio estático después de preparar el diagrama para V_B. Este método se usa en el ejemplo 17.3 para una armadura de dos claros donde se buscan las líneas de influencia para las reacciones y de las fuerzas en varias barras.

EJEMPLO 17.3

Dibuje las líneas de influencia para las tres reacciones verticales y para las fuerzas en los miembros U_1U_2, L_0U_1 y U_1L_2 (figura 17.9). Las cifras en círculos son las áreas de los miembros, en pulgadas cuadradas.

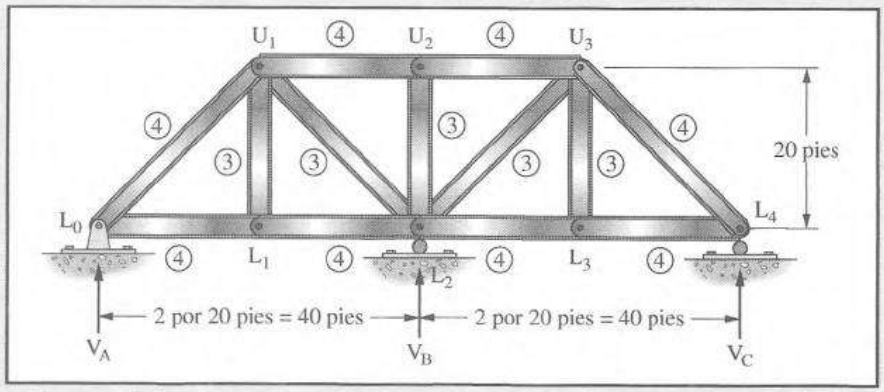


Figura 17.9

Solución. Retire el soporte interior y calcule las fuerzas para una carga unitaria en L_1 y L_2. (Observe que la deflexión en L_1 causada por la carga unitaria en L_2 es la misma que la deflexión causada en L_3 debido a la simetría.) El cálculo de estas deflexiones se presenta en la tabla 17.2.

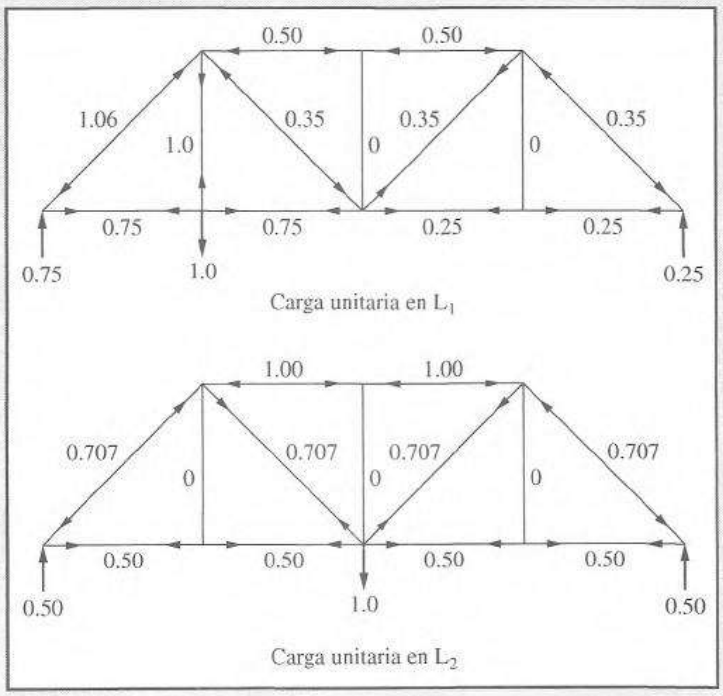
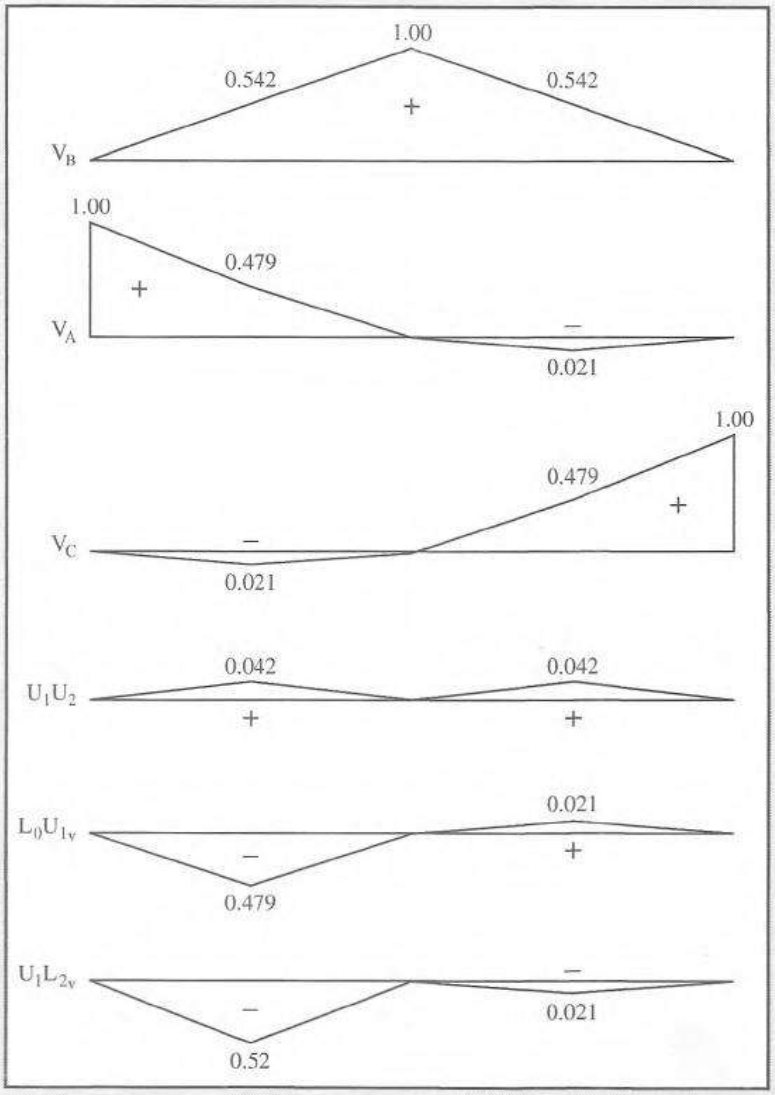


TABLA 17.2

Barra	L(plg)	A(plg^2)	$\frac{L}{A}$	μ_B	μ_A	$\frac{\mu_B^2 L}{AE}$	$\frac{\mu_B \mu_A L}{AE}$
L_0L_1	240	4	60	+0.50	+0.75	+15	+22.5
L_1L_2	240	4	60	+0.50	+0.75	+15	+22.5
L_2L_3	240	4	60	+0.50	+0.25	+15	+7.5
L_3L_4	240	4	60	+0.50	+0.25	+15	+7.5
L_0U_1	340	4	85	−0.707	−1.06	+42.5	+63.6
U_1U_2	240	4	60	−1.00	−0.50	+60	+30.0
U_2U_3	240	4	60	−1.00	−0.50	+60	+30.0
U_3L_4	340	4	85	−0.707	−0.35	+42.5	+21.0
U_1L_1	240	3	80	0	+1.00	0	0
U_1L_2	340	3	113	+0.707	−0.35	+56.5	−28.0
U_2L_2	240	3	80	0	0	0	0
L_2U_3	340	3	113	+0.707	+0.35	+56.5	+28.0
U_3L_3	240	3	80	0	0	0	0
Σ						$\frac{378}{E}$	$\frac{204.6}{E}$

Divida cada uno de los valores por Δ_{bb} para obtener las ordenadas de la línea de influencia para V_B y calcule las ordenadas para los otros diagramas de influencia por la estática.



El ejemplo 17.4 muestra que las líneas de influencia para miembros de una armadura internamente redundante pueden prepararse por medio de un procedimiento casi idéntico. La barra supuesta como redundante tiene una fuerza unitaria inducida en ella que causa deflexiones en cada uno de los nudos, que deben calcularse. Las ordenadas del diagrama para el miembro se obtienen dividiendo cada una de esas deflexiones por la deflexión en el miembro. Todas las otras líneas de influencia se preparan a partir de consideraciones de equilibrio estático. ■

EJEMPLO 17.4

Elabore las líneas de influencia para la fuerza en los miembros L_1U_2, U_1U_2 y U_2L_2 de la armadura mostrada en la figura 16.3, que se reproduce en la figura 17.10. Las cifras en círculos son las áreas de los miembros, en pulgadas cuadradas.

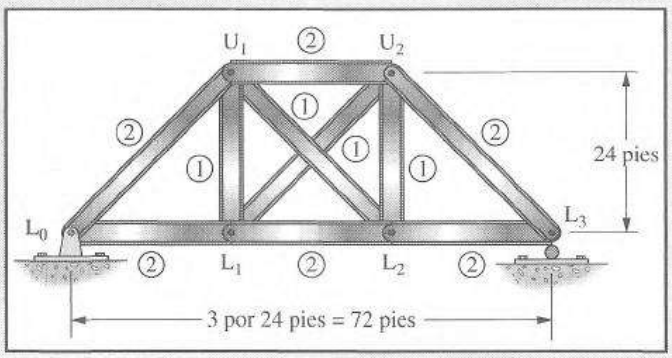


Figura 17.10

Solución. Retiraremos a L_1U_2 como la barra redundante y calcularemos las fuerzas causadas por cargas unitarias en L_1 y L_2; reemplazaremos a L_1U_2 con una fuerza de +1 y calcularemos las fuerzas en los miembros restantes de la armadura. Los cálculos necesarios de deflexiones se muestran en la tabla 17.3.

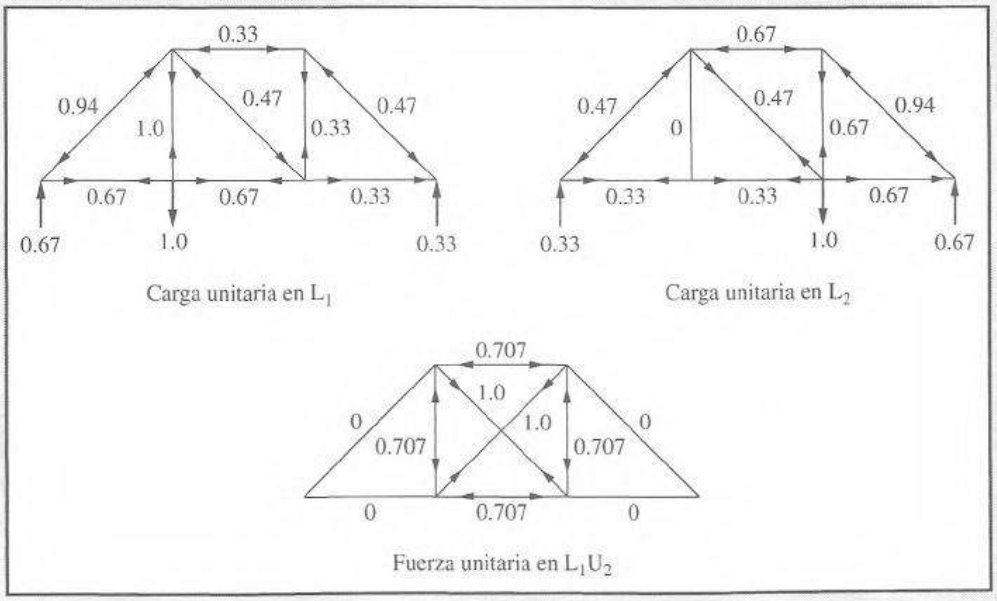
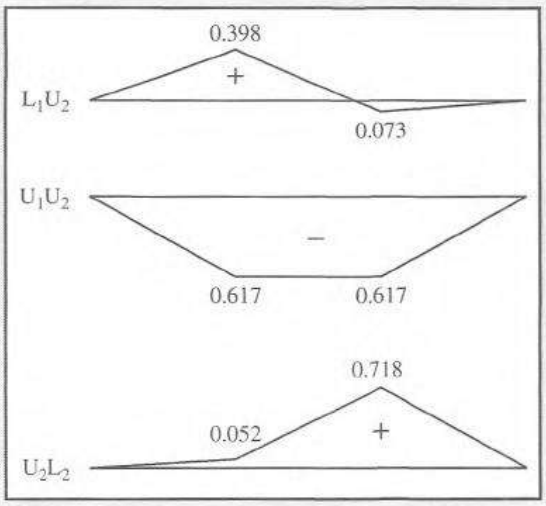


TABLA 17.3

Barra	L(plg)	A(plg²)	$\frac{L}{A}$	μ_{L_1}	μ_{L_2}	μ_A	$\frac{\mu_{L_1}\mu_A L}{AE}$	$\frac{\mu_{L_2}\mu_A L}{AE}$	$\frac{\mu_A^2 L}{AE}$
L_0L_1	288	2	144	+0.67	+0.33	0	0	0	0
L_1L_2	288	2	144	+0.67	+0.33	−0.707	−68	−34	+72
L_2L_3	288	2	144	+0.33	+0.67	0	0	0	0
L_0U_1	408	2	204	−0.94	−0.47	0	0	0	0
U_1U_2	288	2	144	−0.33	−0.67	−0.707	+34	+68	+72
U_2L_3	408	2	204	−0.47	−0.94	0	0	0	0
U_1L_1	288	1	288	+1.00	0	−0.707	−204	0	+144
U_1L_2	408	1	408	−0.47	+0.47	+1.00	−192	+192	+408
L_1U_2	408	1	408	0	0	+1.00	0	0	+408
U_2L_2	288	1	288	+0.33	+0.67	−0.707	−34	−136	+144
Σ							$\frac{-498}{E}$	$\frac{+90}{E}$	$\frac{+1\,248}{E}$

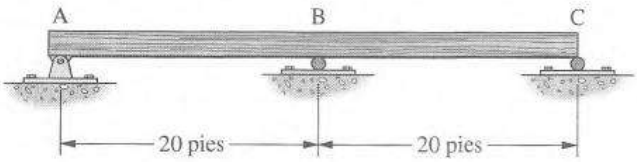
Dibuje la línea de influencia para la redundante, L_1U_2, y observe que la fuerza en cualquier otro miembro es igual a $F' + X\mu$.



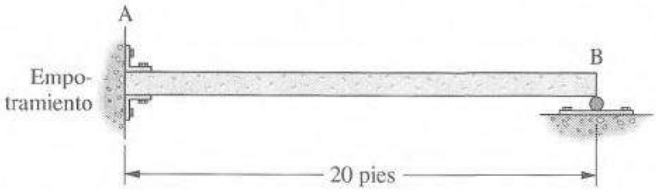
17.4 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

Dibuje líneas de influencia cuantitativas para las situaciones indicadas en los problemas 17.1 al 17.6.

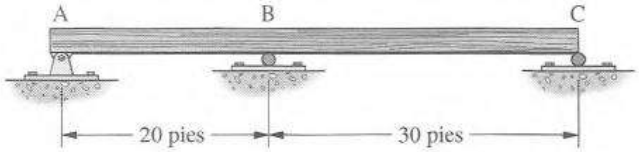
17.1 Reacciones para todos los soportes de la viga que se muestra. Coloque la carga unitaria a intervalos de 10 pies. (*Resp.:* Carga a 10 pies del soporte izquierdo: $V_A = +0.406 \uparrow$, $V_B = +0.688 \uparrow$, $V_C = -0.094 \downarrow$.)



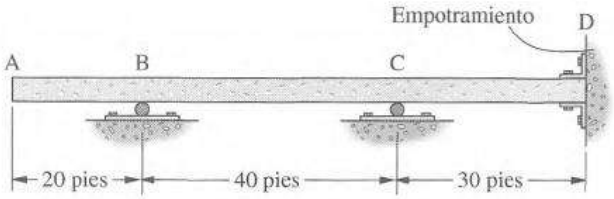
17.2 La reacción vertical izquierda y el momento de reacción en el empotramiento para la viga que se muestra en la figura. Coloque la carga unitaria a intervalos de 5 pies.



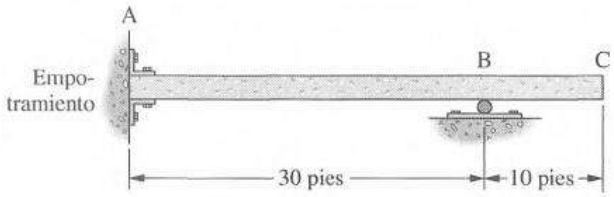
17.3 Fuerza cortante inmediatamente a la izquierda del soporte B y momento en el soporte B para la viga que se muestra. Coloque la carga unitaria a intervalos de 10 pies. (*Resp.:* Carga a 10 pies a la derecha del soporte izquierdo: $V = -0.575$, $M_B = -1.50$.)



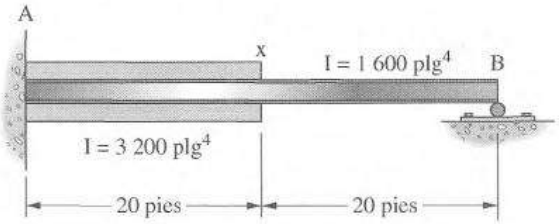
17.4 Fuerza cortante y momento en un punto a 20 pies a la izquierda del empotramiento C de la viga que se muestra. Coloque la carga unitaria a intervalos de 10 pies.



17.5 Reacciones verticales y momentos en A y B. Coloque la carga unitaria a intervalos de 10 pies. (*Resp.:* Carga @ punto C: $V_A = -0.500$, $V_B = 1.50 \uparrow$, $M_A = 5.00$.)

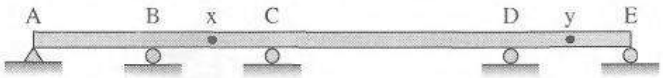


17.6 Reacciones verticales en A y B, momento en A y en x y fuerza cortante justo a la izquierda de x. Coloque la carga unitaria a intervalos de 10 pies. (*Resp.:* Carga en x: $V_A = 0.722 \uparrow$, $V_B = 0.278 \uparrow$, $M_A = -8.88$, $M_x = 5.56$.)

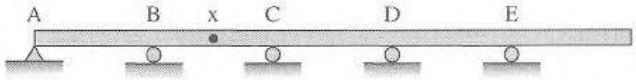


Use el principio de Müller-Breslau para esbozar las líneas de influencia cualitativas para las funciones que se indican en las estructuras de los problemas 17.7 al 17.14.

17.7 (a) Reacciones en A y C, (b) momento positivo en x y en y, y (c) fuerza cortante positiva en x.



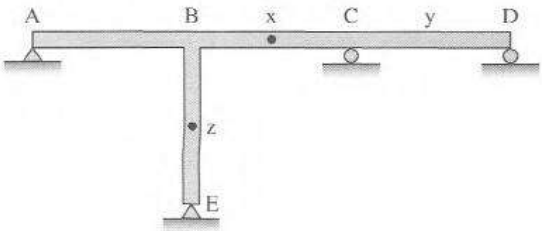
17.8 a) Reacción en A, b) momentos positivo y negativo en x, y c) momento negativo en B.



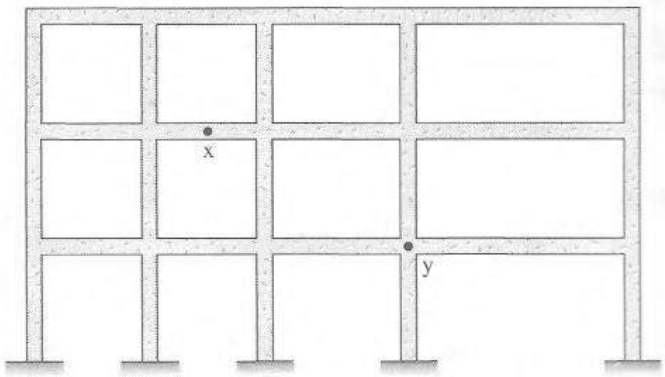
17.9 a) Reacciones verticales en A y C, b) momento negativo en A y momento positivo en x, y c) fuerza cortante justo a la izquierda de C.

17.10 a) Reacciones verticales en A y C, b) momentos negativos en x y C, y c) fuerza cortante justo a la derecha de B.

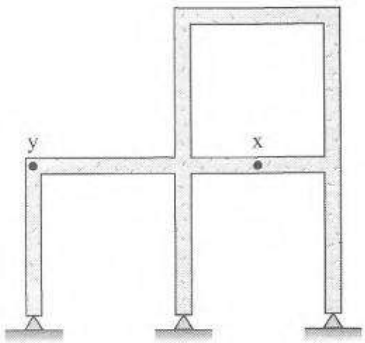
17.11 a) Reacción en A, b) momento positivo en x, c) fuerza cortante positiva en y, y d) momento positivo en z, suponiendo que el lado derecho de la columna es el lado del fondo.



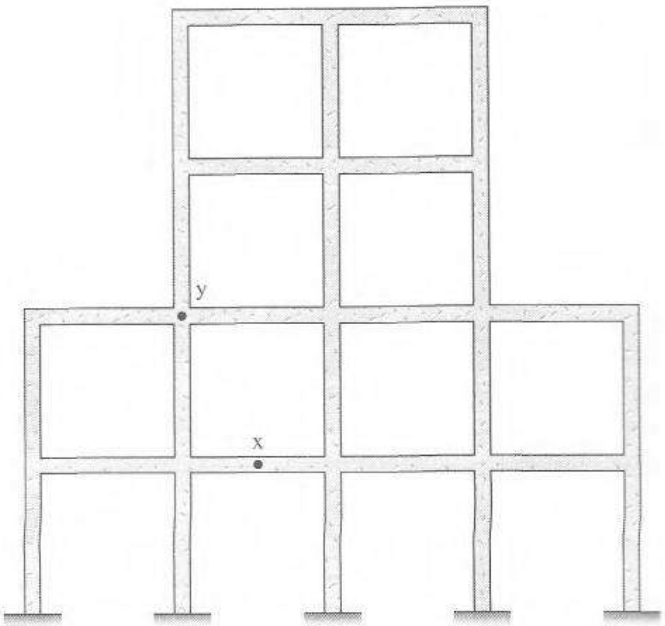
17.12 a) Momento positivo en x, b) fuerza cortante positiva en x, y c) momento negativo justo a la derecha de y.



17.13 a) Momento positivo y fuerza cortante en x, y b) momento negativo justo a la derecha de y.



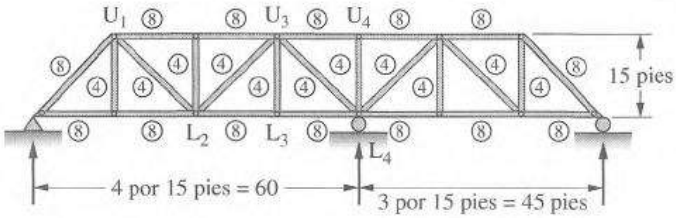
17.14 a) Momentos positivo y negativo en x, y b) fuerza cortante positiva justo a la derecha de y.



Dibuje líneas de influencia cuantitativas para las situaciones indicadas en los problemas 17.15 al 17.19. La solución de estos problemas con una calculadora de bolsillo es bastante tediosa. Como resultado el autor piensa que el estudiante tal vez prefiera resolverlos con SABLE32 o SAP2000.

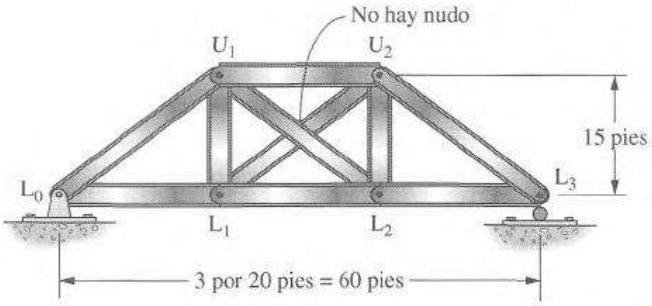
17.15 Reacciones en todos los soportes para la armadura del problema 16.2. (*Resp.:* Carga @ L_3: $V_A = -0.15$, $V_B = +0.79$, $V_C = +0.35$.)

17.16 Reacciones en todos los soportes para la armadura. Las áreas de los miembros se muestran en círculos en la figura.

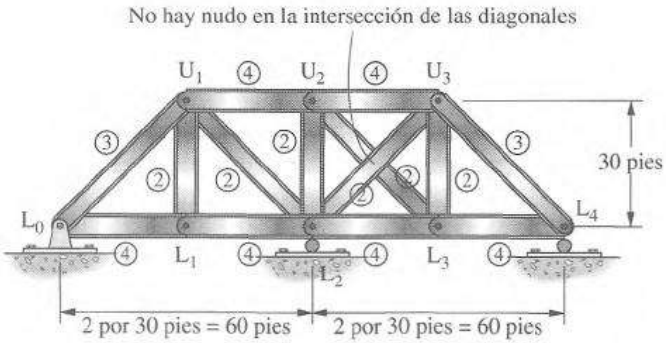


17.17 Fuerzas en los miembros U_1L_2, U_3U_4 y L_4L_5 de la armadura del problema 17.16. (*Resp.:* Carga @ L_2: $U_1L_2 = +0.634$, $U_3U_4 = +0.203$, $L_4L_5 = -0.140$.)

17.18 Fuerzas en los miembros U_1L_2, U_1U_2 y U_2L_2 . Todas las áreas son iguales.



17.19 Fuerza en el miembro L_2U_3 y la reacción en el centro de la armadura. Las áreas de los miembros se muestran en la figura. (*Resp.:* Carga en L_1: $V_B = +0.504 \uparrow$, $L_2U_3 = -0.0078$.)



Capítulo 18

Pendiente-deflexión: Un método de análisis por desplazamientos

18.1 INTRODUCCIÓN

George A. Maney presentó en 1915 el método de análisis de pendiente-deflexión en una publicación sobre ingeniería de la Universidad de Minnesota.[1] Su trabajo fue una ampliación de los estudios realizados antes por Manderla[2] y Mohr[3] sobre los esfuerzos secundarios. Durante casi 15 años, hasta la aparición de la distribución de momentos, el método de pendiente-deflexión fue el procedimiento "exacto" comúnmente usado para el análisis de vigas continuas y de marcos en Estados Unidos.

El método de pendiente-deflexión tiene en cuenta las deformaciones por flexión de vigas y de marcos (o sea rotaciones, asentamientos, etc.), pero que desprecia las deformaciones debidas a fuerza cortante y a fuerza axial. Aunque actualmente este método clásico generalmente se considera obsoleto, su estudio puede resultar útil por las siguientes razones:

1. El método de pendiente-deflexión es adecuado para el análisis a mano de algunas estructuras pequeñas.
2. Su estudio sirve de base para entender el método de distribución de momentos que veremos en los capítulos 20 y 21.
3. Es un caso especial del método de los desplazamientos o de las rigideces, previamente definido en la sección 14.5, y proporciona una introducción muy efectiva a la formulación matricial del análisis de estructuras que se verá en los capítulos 22 al 25.
4. Las pendientes y las deflexiones determinadas mediante este método permiten al proyectista esbozar con facilidad la forma deformada de una estructura en particular. El resultado es que se tiene una mejor "idea" del comportamiento de las estructuras.

18.2 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE PENDIENTE-DEFLEXIÓN

El nombre de *pendiente-deflexión* se debe al hecho de que los momentos en los extremos de los miembros de estructuras estáticamente indeterminadas se expresan en términos de las rotaciones (o pendientes) y las deflexiones de los nudos. Para desarrollar las ecuaciones, se supone que los miembros tienen sección transversal constante entre apoyos. Aunque es posible determinar mediante este método expresiones para elementos de sección variable, los resultados son tan com-

[1] G. A. Maney, *Studies in Engineering*, No. 1 (Minneapolis, Universidad de Minnesota, 1915).

[2] H. Manderla, "Die Berechnung der Sekundarspannungen", *Allg. Bautz* 45 (1880): 34.

[3] O. Mohr, "Die Berechnung der Fachwerke mit starren knotenverbingungen", *Zivilinginieur* (1892).

plejos que acaban por tener poco valor práctico. Se supone, además, que los nudos de una estructura pueden girar o deflexionarse, pero que los ángulos entre los elementos que convergen en un nudo permanecen constantes.

En el siguiente análisis tomaremos como referencia el claro AB de la viga continua de la figura 18.1(a). Si el claro está empotrado en ambos extremos, la pendiente de la curva elástica de la viga en esos puntos es nula. Las cargas externas producen momentos de empotramiento que ocasionan que el claro tome la forma que se muestra en la figura 18.1(b). Los nudos A y B en realidad no están empotrados y rotarán ligeramente con carga, quedando en la posición que se muestra en la figura 18.1(c). Además de la rotación en los nudos, puede existir asentamiento en uno o en ambos apoyos. El asentamiento de los nudos originará una rotación de la cuerda del miembro, como se demuestra en la parte (d) de la figura, en la que se supone que el apoyo B ha experimentado un asentamiento Δ.

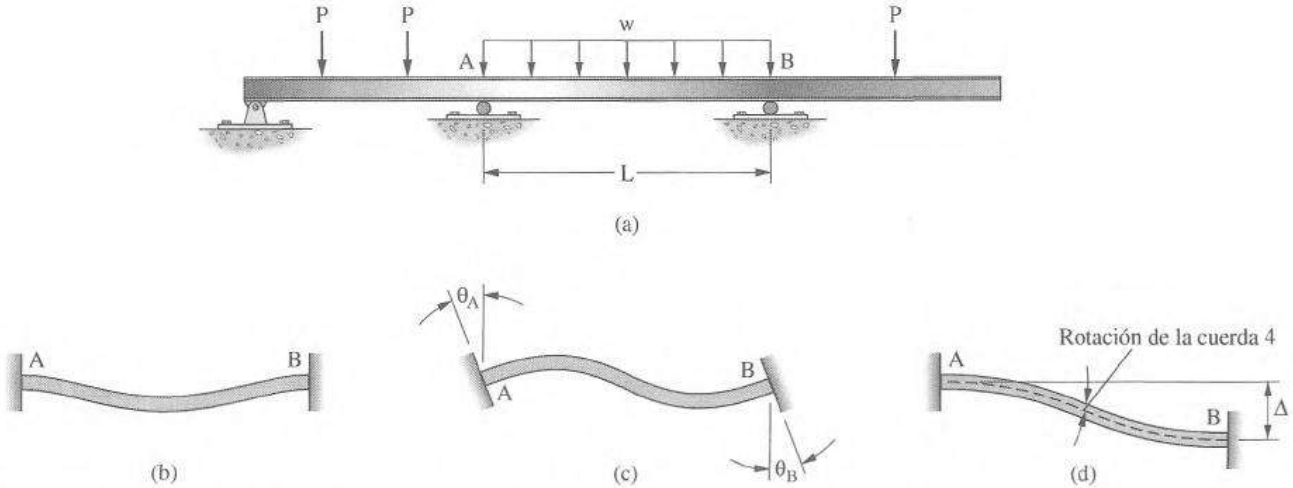


Figura 18.1 Ilustración del desarrollo de las ecuaciones para el método pendiente-deflexión.

El estudio de la figura 18.1 permite observar que los valores de los momentos finales en los extremos A y B (M_{AB} y M_{BA}) son iguales a la suma de los momentos originados por los siguientes conceptos:

1. Los momentos de empotramiento (FEM_{AB} y FEM_{BA}), que se pueden determinar con los teoremas de áreas de diagramas de momento, como se mostró en el ejemplo 11.9. En la figura 20.4 del capítulo 20 se presenta una lista detallada de expresiones para momentos de empotramiento.
2. Los momentos originados por las rotaciones de los nudos A y B (θ_A y θ_B).
3. Los momentos causados por la rotación de la cuerda ($\psi = \Delta/L$) si uno o ambos nudos sufren asentamientos o deflexiones.

Cuando un nudo gira en una estructura, las pendientes de las tangentes a las curvas elásticas de los miembros conectados a ese nudo cambian. Para una viga particular, el cambio de pendiente es igual a la fuerza cortante en el extremo de la viga cuando está cargada con el diagrama M/EI. Se supone que la viga tiene momentos de extremo FEM_{AB} y FEM_{BA}, como se muestran en la figura 18.2(a). Por comodidad este diagrama se divide en dos triángulos simples en la parte (b). Los momentos se muestran sobre los valores de EI por comodidad en la siguiente derivación.

Con el método de la viga conjugada la pendiente en el extremo izquierdo, θ_A, es igual a la fuerza cortante (o reacción) en ese extremo de la viga conjugada. Este valor se determina tomando momentos alrededor del extremo derecho de la viga. La pendiente en el extremo derecho, θ_B, se determina tomando momentos alrededor del extremo izquierdo.

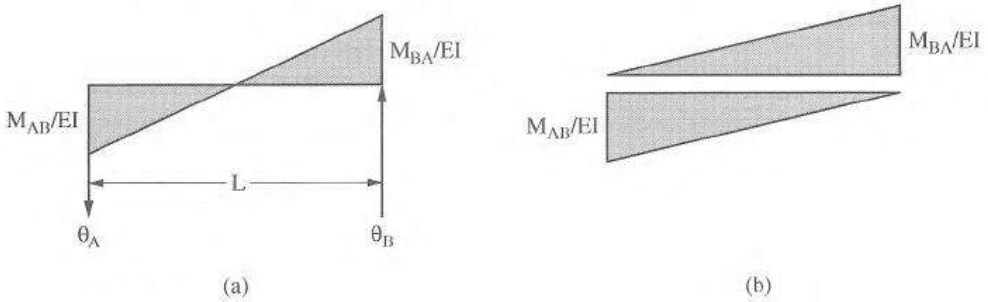
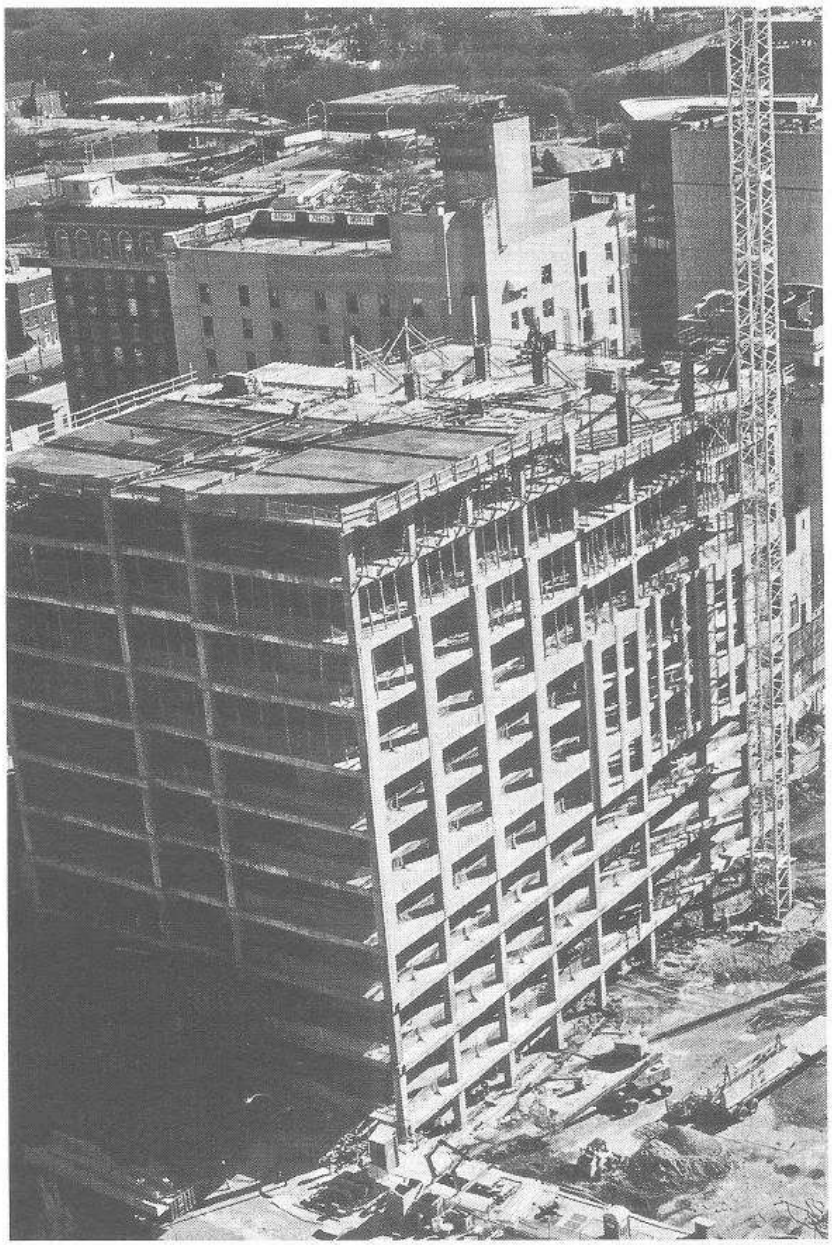


Figura 18.2



Plaza Poinsett, Greenville, Carolina del Sur. (Cortesía de Britt, Peters y Asociados.)

$$\theta_A = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{M_{AB}}{EI}\right)(L)\left(\frac{2L}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{M_{BA}}{EI}\right)(L)\left(\frac{L}{3}\right)}{L} = \frac{L}{6EI}(2M_{AB} - M_{BA})$$

$$\theta_B = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{M_{BA}}{EI}\right)(L)\left(\frac{2L}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{M_{AB}}{EI}\right)(L)\left(\frac{L}{3}\right)}{L} = \frac{L}{6EI}(2M_{BA} - M_{AB})$$

Si uno de los apoyos de la viga se asentara o se deflexionara una cantidad Δ, los ángulos θ_A y θ_B causados por la rotación en los nudos cambiarían en una cantidad Δ/L (o sea ψ), como se muestra en la figura 18.1(d). Al sumar la rotación de la cuerda a las expresiones anteriores, se tienen las siguientes ecuaciones para las pendientes de las tangentes a las curvas elásticas en los extremos de las vigas:

$$\theta_A = \frac{L}{6EI}(2M_{AB} - M_{BA}) + \psi$$
$$\theta_B = \frac{L}{6EI}(2M_{BA} - M_{AB}) + \psi$$

Estas ecuaciones se pueden resolver simultáneamente y despejar M_{AB} y M_{BA}. El resultado son los siguientes momentos de extremo en la viga debido a la rotación de los nudos y la deflexión:

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3\psi)$$
$$M_{BA} = 2EK(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi)$$

En estas ecuaciones, el término I/L ha sido reemplazado por K. Este término se llama *factor de rigidez*. (Lo encontraremos de nuevo cuando veamos la distribución de momentos en los capítulos 20 y 21.)

Los momentos de extremo finales son iguales a los momentos causados por la rotación y la deflexión de los nudos más los momentos de empotramiento que actúan en los extremos de la viga. Las ecuaciones de pendiente-deflexión finales son entonces las siguientes:

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + FEM_{AB}$$
$$M_{BA} = 2EK(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi) + FEM_{BA}$$

Con estas ecuaciones es posible expresar los momentos de extremo en una estructura en términos de las rotaciones y los asentamientos en sus nudos. En métodos anteriores, ha sido necesario escribir una ecuación para cada redundante de la estructura. El número de incógnitas en estas ecuaciones es igual al número de redundantes. El método de pendiente-deflexión reduce bastante la cantidad de trabajo necesario para el análisis de las estructuras multirredundantes, en comparación con métodos de análisis más antiguos, porque los momentos desconocidos se expresan en términos de sólo unas cuantas rotaciones y asentamientos en los nudos. Aun en el caso de estructuras de niveles múltiples, el número de pendientes y rotaciones de cuerdas desconocidas que aparecen en cualquier ecuación rara vez es mayor de cinco o seis, en tanto que el grado de indeterminación estática de la estructura es varias veces ese número.

18.3 APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE PENDIENTE-DEFLEXIÓN A VIGAS CONTINUAS

Los ejemplos 18.1 al 18.4 ilustran el análisis de vigas estáticamente indeterminadas usando las ecuaciones de pendiente-deflexión. Cada miembro en las vigas se considera en forma individual, se calculan sus momentos de empotramiento, y se escribe la ecuación para el momento en cada

extremo del miembro. Para el claro AB del ejemplo 18.1, se escriben ecuaciones para M_{AB} y M_{BA}; para el claro BC se escriben ecuaciones para M_{BC} y M_{CB}, etcétera.

Las ecuaciones de momento se escriben en términos de los valores desconocidos de θ en los soportes. Los dos momentos en un apoyo interior deben totalizar cero, tal como $M_{BA} + M_{BC} = 0$ en el apoyo B del ejemplo 18.1. Por lo tanto se escriben expresiones para el momento total en cada apoyo, lo que da un conjunto de ecuaciones simultáneas de las cuales pueden obtenerse los valores desconocidos de θ. Pueden existir dos condiciones que simplifiquen la solución de las ecuaciones. Éstas son los empotramientos para los cuales los valores de θ deben ser cero y los extremos simples para los cuales el momento es cero. Al final del ejemplo 18.1 se obtiene una expresión especial simplificadora para los claros en los extremos que están simplemente apoyados.

Las vigas de los ejemplos 18.1 y 18.2 tienen apoyos que no se asientan, y ψ es cero para todas las ecuaciones. Ocurre algún asentamiento en los apoyos de las vigas de los ejemplos 18.3 y 18.4, y ψ se incluye en las ecuaciones. La rotación de la cuerda se considera positiva cuando la cuerda de la viga gira en el sentido de las manecillas del reloj debido a los asentamientos; el signo es el mismo sin importar qué extremo se esté considerando, ya que toda la viga gira en esa dirección.

Cuando la longitud de los claros, los módulos de elasticidad y los momentos de inercia son constantes en los claros de una viga continua, el término 2EK es constante para todos los miembros y puede eliminarse de las ecuaciones. Si los valores de K varían de claro a claro, como ocurre a menudo, es conveniente expresar estos valores en términos de valores relativos, como se hace en el ejemplo 18.6.

El uso correcto de los signos es la principal dificultad que se presenta al aplicar las ecuaciones de pendiente-deflexión. Es esencial entender esos signos antes de intentar aplicar las ecuaciones.

Previamente en este libro un signo más para el momento ha indicado tensión en las fibras inferiores, mientras que un signo negativo ha indicado tensión en las fibras superiores. Esta convención de signos fue necesaria para dibujar los diagramas de momentos.

Al aplicar las ecuaciones de pendiente-deflexión es más sencillo usar una convención en la que se le dan signos a los momentos, según tengan éstos sentido horario o antihorario de rotación en los extremos de los miembros. Una vez determinados esos momentos, sus signos pueden ser fácilmente convertidos a la notación de viga para dibujar los diagramas de momento flexionante (conocida como notación de viga).

La siguiente convención se usa en este capítulo para la pendiente-deflexión, y en los capítulos 20 y 21 para la distribución de momentos: Si un miembro genera un momento que tiende a hacer girar a un nudo en sentido horario, el momento que actúa en el nudo se considera negativo; si el momento tiende a hacer girar a un nudo en sentido antihorario, es positivo. En otras palabras, un momento resistente en sentido horario sobre el miembro se considera positivo, y un momento resistente en sentido antihorario se considera negativo.

Esta convención de signos se ilustra en la figura 18.3. El momento M_{AB} en el extremo izquierdo tiende a hacer girar al nudo en sentido horario y se considera un momento negativo. Observe que el momento resistente sobre el extremo del miembro es antihorario. En el extremo derecho de la viga las cargas han causado un momento que tiende a hacer girar al nudo en sentido antihorario. Por tanto, M_{BA} se considera positivo.

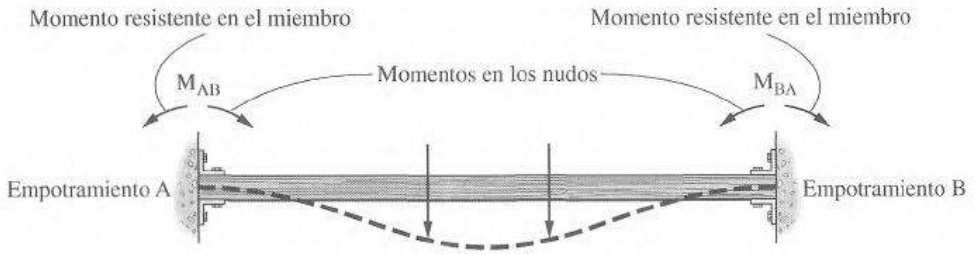


Figura 18.3

EJEMPLO 18.1

Determinar los momentos en todos los apoyos de la viga de la figura 18.4 usando el método pendiente-deflexión. E e I son constantes para el miembro completo.

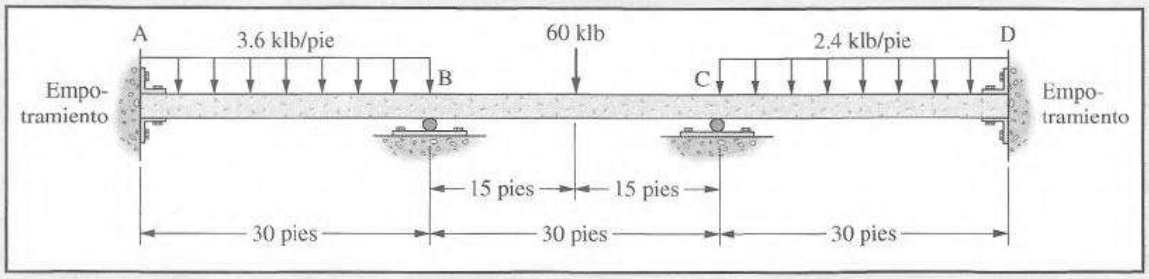


Figura 18.4

Solución. Calculando los momentos de empotramiento (véase la figura 20.4 y la primera de forros).

$$FEM_{AB} = -\frac{(3.6)(30)^2}{12} = -270 \text{ klb-pie}$$

$$FEM_{BA} = +\frac{(3.6)(30)^2}{12} = +270 \text{ klb-pie}$$

$$FEM_{BC} = -\frac{(60)(15)(15)^2}{(30)^2} = -225 \text{ klb-pie}$$

$$FEM_{CB} = +\frac{(60)(15)^2(15)}{(30)^2} = +225 \text{ klb-pie}$$

$$FEM_{CD} = -\frac{(2.4)(30)^2}{12} = -180 \text{ klb-pie}$$

$$FEM_{DC} = +\frac{(2.4)(30)^2}{12} = +180 \text{ klb-pie}$$

Al escribir las ecuaciones para los momentos se observa que $\theta_A = \theta_D = \psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = 0$ y 2EK es constante para los tres claros.

$$M_{AB} = 2EK(\theta_B) - 270 = 2EK\theta_B - 270$$

$$M_{BA} = 2EK(2\theta_B) + 270 = 4EK\theta_B + 270$$

$$M_{BC} = 2EK(2\theta_B + \theta_C) - 225 = 4EK\theta_B + 2EK\theta_C - 225$$

$$M_{CB} = 2EK(\theta_B + 2\theta_C) + 225 = 2EK\theta_B + 4EK\theta_C + 225$$

$$M_{CD} = 2EK(2\theta_C) - 180 = 4EK\theta_C - 180$$

$$M_{DC} = 2EK(\theta_C) + 180 = 2EK\theta_C + 180$$

$$\underline{\Sigma M_B = M_{BA} + M_{BC} = 0}$$

$$(1) \quad 8EK\theta_B + 2EK\theta_C + 45 = 0$$

$$\underline{\Sigma M_C = M_{CB} + M_{CD} = 0}$$

$$(2) \quad 2EK\theta_B + 8EK\theta_C + 45 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) simultáneamente

$$EK\theta_B = -4.50$$
$$EK\theta_C = -4.50$$

Momentos finales

$$M_{AB} = (2)(-4.50) - 270 = -279 \text{ klb-pie}$$
$$M_{BA} = (4)(-4.50) + 270 = +252 \text{ klb-pie}$$
$$M_{BC} = (4)(-4.50) + (2)(-4.50) - 225 = -252 \text{ klb-pie}$$
$$M_{CB} = (2)(-4.50) + (4)(-4.50) + 225 = +198 \text{ klb-pie}$$
$$M_{CD} = (4)(-4.50) - 180 = -198 \text{ klb-pie}$$
$$M_{DC} = (2)(-4.50) + 180 = +171 \text{ klb-pie}$$

■

18.4 VIGAS CONTINUAS CON EXTREMOS SIMPLEMENTE APOYADOS

Para analizar la viga continua de la figura 18.5 con extremos simplemente apoyados, las ecuaciones individuales de momento pueden escribirse tal y como se hicieron en el último ejemplo. Después de hacer esto, las ecuaciones de los apoyos ($\sum M_A = \sum M_B = \sum M_C = \sum M_D$) pueden escribirse y resolverse simultáneamente para $EK\theta_A$, $EK\theta_B$, $EK\theta_C$ y $EK\theta_D$. A partir de estos valores pueden determinarse los valores numéricos de los momentos.

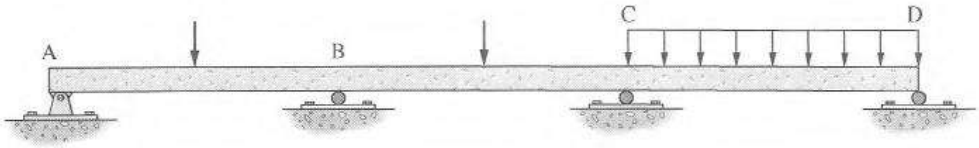


Figura 18.5

El procedimiento de solución así descrito para esta viga incluye cuatro ecuaciones simultáneas. Parece que este procedimiento toma mucho tiempo y esfuerzo cuando dos de los momentos finales ya se conocen ($M_{AD} = M_{DC} = 0$). Sin embargo, si se incluyen apoyos simples en los extremos, las ecuaciones de pendiente-deflexión pueden simplificarse considerablemente como se describe en los siguientes párrafos.

Las ecuaciones acostumbradas de pendiente-deflexión son:

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}) + FEM_{AB} \quad (1)$$
$$M_{BA} = 2EK(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi_{AB}) + FEM_{BA} \quad (2)$$

Suponiendo que el extremo A está simplemente apoyado, el valor de M_{AB} es cero. La solución de las dos ecuaciones simultáneamente eliminando a θ_A da una expresión simplificada para M_{BA}, la cual tiene solamente una incógnita, θ_B. La ecuación simplificada resultante acelerará considerablemente la solución de las vigas continuas con extremos simplemente apoyados.

Dos veces la ecuación (2)

$$2M_{BA} = 2EK(2\theta_A + 4\theta_B - 6\psi) + 2FEM_{BA}$$

Menos la ecuación (1)

$$0 = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + FEM_{AB}$$

Da

$$2M_{AB} = 2EK(3\theta_B - 3\psi) + 2FEM_{BA} - FEM_{AB}$$

$$M_{BA} = 3EK(\theta_B - \psi) + FEM_{BA} - \frac{1}{2}FEM_{AB}$$

Usando esta ecuación, el número de ecuaciones por resolver se reduce en uno para cada apoyo simple. Por supuesto, al usar una computadora, esto no es particularmente importante.

EJEMPLO 18.2

Encuentre todos los momentos de extremo para cada claro en la viga mostrada en la figura 18.6 usando las expresiones modificadas de pendiente-deflexión para los claros en los extremos. E e I son constantes para los tres claros.

Solución.

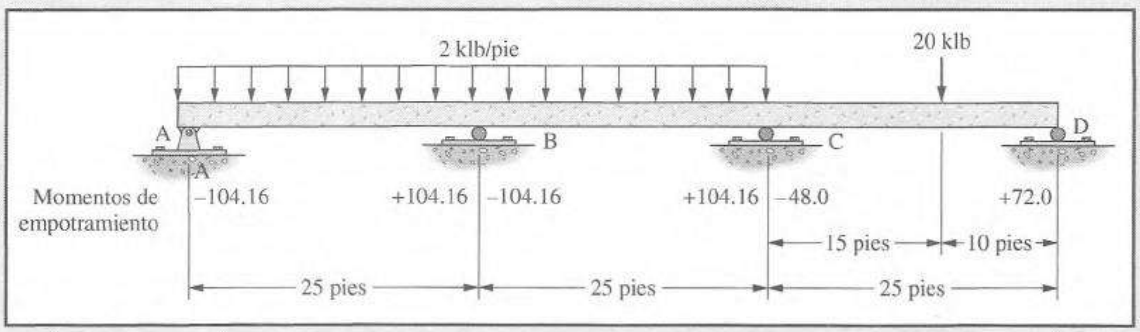


Figura 18.6

Observando que $M_{AB} = M_{DA} = \psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = 0$ y los valores EK son constantes

$$M_{BA} = 3EK(\theta_B) + 104.16 - \left(\frac{1}{2}\right)(-104.16) = 3EK\theta_B + 156.24$$

$$M_{BC} = 2EK(2\theta_B + \theta_C) - 104.16 = 4EK\theta_B + 2EK\theta_C - 104.16$$

$$M_{CB} = 2EK(\theta_B + 2\theta_C) + 104.16 = 2EK\theta_B + 4EK\theta_C + 104.16$$

$$M_{CD} = 3EK(\theta_C) - 48 - \left(\frac{1}{2}\right)(72) + 3EK\theta_C - 84$$

$\Sigma M_B = M_{BA} + M_{BC} = 0$

$$(1) \quad 7EK\theta_B + 2EK\theta_C + 52.08 = 0$$

$\Sigma M_C = M_{CB} + M_{CD} = 0$

$$(2) \quad 2EK\theta_B + 7EK\theta_C + 20.16 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) simultáneamente

$$EK\theta_B = -7.21$$

$$EK\theta_C = -0.82$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones originales de momento

$$M_{BA} = +134.6 \text{ klb-pie} \qquad M_{CB} = +86.5 \text{ klb-pie}$$
$$M_{BC} = -134.6 \text{ klb-pie} \qquad M_{CD} = -86.5 \text{ klb-pie}$$ ■

18.5 DIVERSOS ASPECTOS RELACIONADOS CON LAS VIGAS CONTINUAS

Si los factores de rigidez varían para los diferentes claros de una viga continua deben usarse sus valores reales o sus valores relativos en las ecuaciones de pendiente-deflexión. Esta situación se ilustra en la figura 18.7.

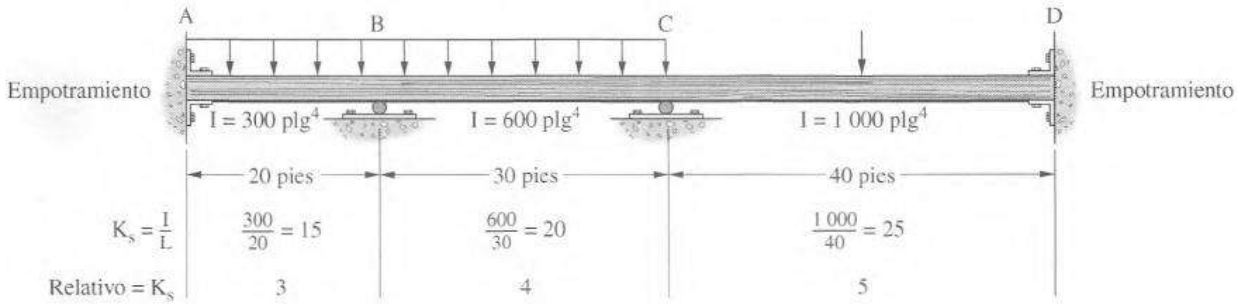


Figura 18.7

Ecuaciones de muestra para las cuales $\theta_A = \theta_D = \psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = 0$

$$M_{AB} = 2E3(\theta_B) + FEM_{AB}$$
$$M_{BC} = 2E4(2\theta_B + \theta_C) + FEM_{BC}$$

Algunas veces un miembro continuo tiene un extremo en voladizo que tal vez sustente a un balcón como se muestra en la figura 18.8. Para un miembro de este tipo, el momento en el apoyo extremo del voladizo es obvio. Por ejemplo, el momento M_{AB} en esta viga es igual a $+ (3.6)(20)(10) = +720$ klb-pie. Las otras ecuaciones de las vigas se escriben como antes y se resuelven para los momentos de los apoyos.

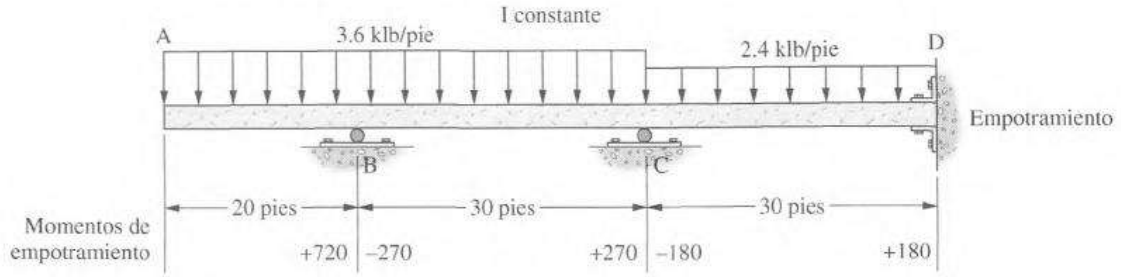


Figura 18.8

Al escribir las ecuaciones de pendiente-deflexión se observa que $\theta_D = \psi_{CD} = 0$

$$M_{BA} = +720 = -M_{BC}$$
$$M_{BC} = 2EK(2\theta_B) - 270$$
$$M_{CB} = 2EK(\theta_B + 270) \text{ etcétera}$$

18.6 ANÁLISIS DE VIGAS CON ASENTAMIENTOS EN LOS APOYOS

Los ejemplos 18.3 y 18.4 muestran el análisis de vigas continuas cuyos apoyos experimentan asentamientos. Estos asentamientos hacen que aparezcan valores ψ en las ecuaciones. Para casos como éste, se calculan los valores reales de EK en vez de solamente valores relativos.

EJEMPLO 18.3

Encuentre el momento en el apoyo B de la viga de la figura 18.9, suponiendo que B se asienta 0.25 pulgadas, o sea 0.0208 pies.

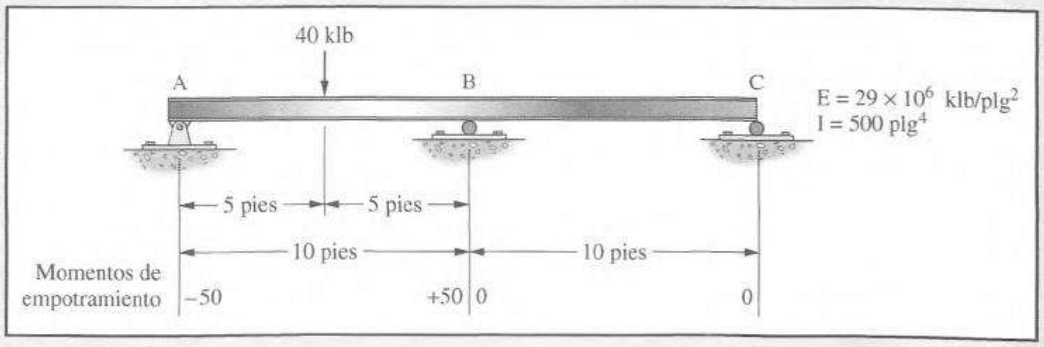


Figura 18.9

Solución. Escribiendo las ecuaciones y observando que $M_{AB} = M_{CB} = 0$,

$$M_{BA} = 3EK\left(\theta_B - \frac{+0.0208}{10}\right) + 50 - \left(\frac{1}{2}\right)(-50)$$
$$M_{BA} = 3EK\theta_B - 0.00624EK + 75$$
$$M_{BC} = 3EK\left(\theta_B - \frac{-0.0208}{10}\right)$$
$$M_{BC} = 3EK\theta_B + 0.00624EK$$
$$\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC}$$
$$3EK\theta_B - 0.0624EK + 75 + 3EK\theta_B + 0.0624EK = 0$$
$$6EK\theta_B + 75 = 0$$
$$EK\theta_B = -12.5$$
$$M_{BA} = (3)(-12.5) - 0.00624EK + 75$$
$$EK = \frac{(29 \times 10^6)(500)}{(12 \times 1\,000)(12 \times 10)} = 10\,070$$
$$M_{BA} = -37.5 - 62.8 + 75 = -25.3 \text{ klb-pie}$$
$$M_{BC} = (3)(-12.5) + 62.8 = +25.3 \text{ klb-pie} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 18.4

Determine todos los momentos para la viga de la figura 18.10 que se supone tiene los siguientes asentamientos de los soportes: A = 1.25 plg = 0.104 pie, B = 2.40 plg = 0.200 pie, C = 2.75 plg = 0.229 pie y D = 1.10 plg = 0.0917 pie.

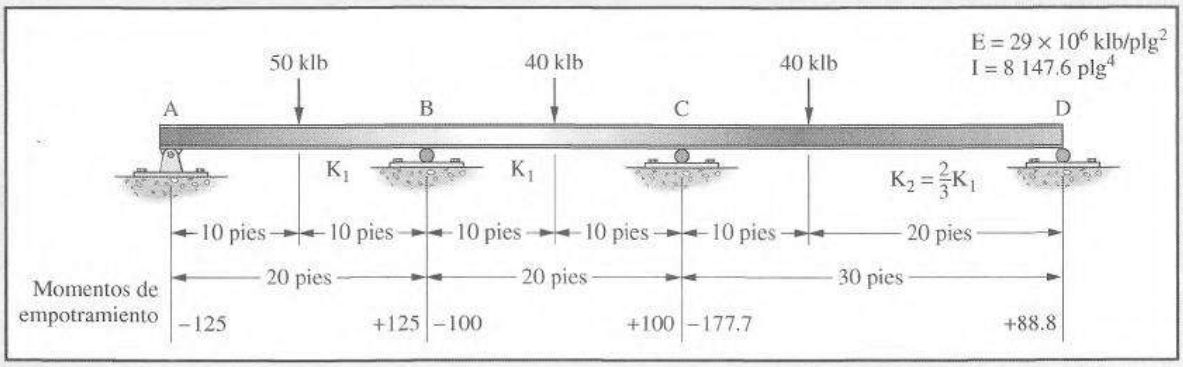


Figura 18.10

Solución. Para el apoyo B:

$$M_{BA} = 3EK_1\left(\theta_B - \frac{0.096}{20}\right) + 125 - \left(\frac{1}{2}\right)(-125)$$

$$M_{BA} = 3EK_1\theta_B - 0.0144EK_1 + 187.5$$

$$M_{BC} = 2EK_1\left[2\theta_B + \theta_C - 3\frac{0.029}{20}\right] - 100$$

$$M_{BC} = 4EK_1\theta_B + 2EK_1\theta_C - 0.0087EK_1 - 100$$

Para el apoyo C:

$$M_{CB} = 2EK_1\left[\theta_B + 2\theta_C - (3)\left(\frac{0.029}{20}\right)\right] + 100$$

$$M_{CB} = 2EK_1\theta_B + 4EK_1\theta_C - 0.00087EK_1 + 100$$

$$M_{CD} = 3EK_2\left(\theta_C - \frac{-0.1373}{30}\right) - 177.7 - \left(\frac{1}{2}\right)(+88.8)$$

$$M_{CD} = 3EK_2\theta_C + 0.01373EK_2 - 222.1$$

$$M_{CD} = 2EK_1\theta_C + 0.00915EK_1 - 222.1$$

$$\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC}$$

$$3EK_1\theta_B - 0.0144EK_1 + 187.5 + 4EK_1\theta_B + 2EK_1\theta_C - 0.0087EK_1 - 100 = 0$$

$$7EK_1\theta_B + 2EK_1\theta_C - 0.0231EK_1 + 87.5 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum M_C = 0 = M_{CB} + M_{CD}$$

$$2EK_1\theta_B + 4EK_1\theta_C - 0.0087EK_1 + 100 + 2EK_1\theta_C + 0.00915EK_1 - 222.1 = 0$$

$$2EK_1\theta_B + 6EK_1\theta_C + 0.00045EK_1 - 122.1 = 0 \qquad (2)$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) simultáneamente para $EK_1\theta_B$ y $EK_1\theta_C$

$$EK_1\theta_B = 0.00367EK_1 - 20.2$$

$$EK_1\theta_C = -0.00129EK_1 + 27.1$$

$$EK_1 = \frac{(29 \times 10^6)(8\,147.6)}{(12 \times 20)(12 \times 1\,000)} = 82\,040 \text{ klb-pie}$$

$$EK_1\theta_B = (0.00367)(82\,040) - 20.2 = +280.9$$

$$EK_1\theta_C = -(0.00129)(81\,970) + 27.1 = -78.7$$

Momentos finales:

$$M_{BA} = (3)(280.9) - (0.0144)(82\,040) + 187.5 = -151 \text{ klb-pie}$$

$$M_{BC} = (4)(280.9) + (2)(-78.7) - (0.0087)(82\,040) - 100 = +152 \text{ klb-pie}$$

$$M_{CB} = (2)(280.9) + (4)(-78.7) - (0.0087)(82\,040) + 100 = -367 \text{ klb-pie}$$

$$M_{CD} = (2)(-78.7) + (0.00915)(82\,040) - 222.1 = +371 \text{ klb-pie}$$

Nota: Ocurrió algún error debido al redondeo de los números. ■

18.7 ANÁLISIS DE MARCOS SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL

Las ecuaciones del método de pendiente-deflexión pueden aplicarse a los marcos estáticamente indeterminados de la misma manera que a las vigas continuas, si no existe posibilidad alguna de que los marcos se ladeen o desplacen de manera lateral, o se deformen de modo asimétrico. En teoría, un marco no se ladeará ni se inclinará si es simétrico y si las cargas aplicadas son simétricas, o si está restringido contra los desplazamientos por otras partes de la estructura. El marco mostrado en la figura 18.11 no puede ladearse porque el miembro AB restringe a la estructura contra desplazamiento horizontal. En el ejemplo 18.5 se ilustra el análisis de un marco simple sin desplazamiento lateral o ladeo. Cuando ocurre el ladeo, los nudos del marco se mueven, y esto afecta los valores de θ y los momentos, como se analizan en la sección 18.8.

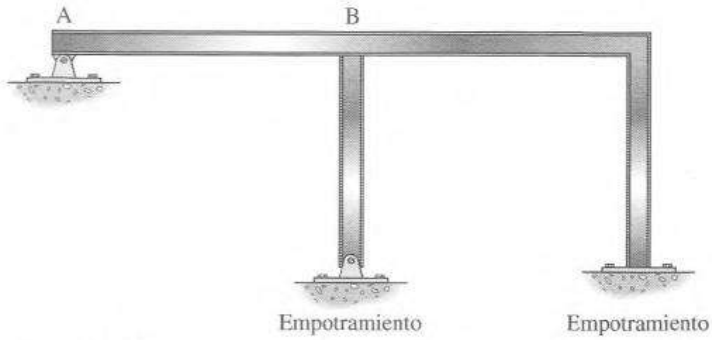
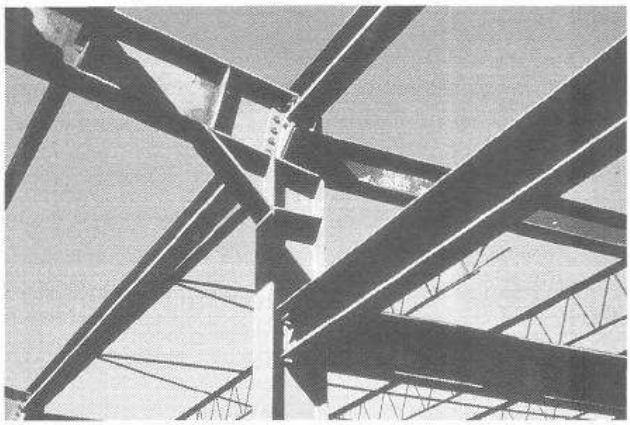


Figura 18.11



Centro comercial Lehigh. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

EJEMPLO 18.5

Obtenga todos los momentos para el marco mostrado en la figura 18.12, el cual no tiene ladeo por ser simétrico.

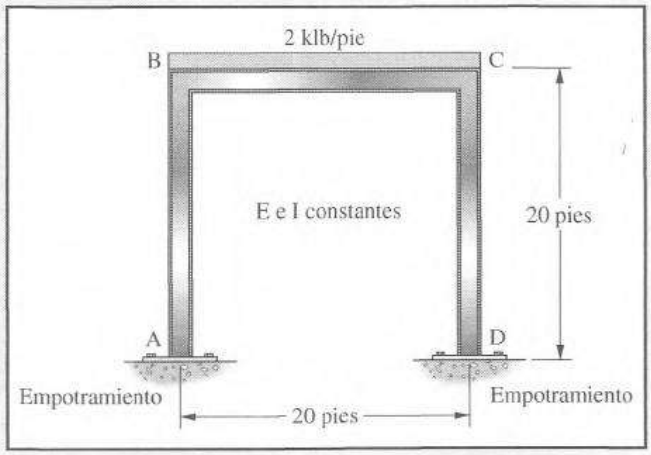


Figura 18.12

Solución. Calculando los momentos de empotramiento,

$$FEM_{BC} = -\frac{(2)(20)^2}{12} = -66.7 \text{ klb-pie}$$

$$FEM_{CB} = +\frac{(2)(20)^2}{12} = +66.7 \text{ klb-pie}$$

Escribiendo las ecuaciones, y observando que $\theta_A = \theta_D = \psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = 0$ y 2EK es constante para todos los miembros, lo que permite despreciarlo,

$$M_{AB} = \theta_B$$
$$M_{BA} = 2\theta_B$$
$$M_{BC} = 2\theta_B + \theta_C - 66.7$$
$$M_{CB} = \theta_B + 2\theta_C + 66.7$$
$$M_{CD} = 2\theta_C$$
$$M_{DC} = \theta_C$$

$$\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC}$$
$$2\theta_B + 2\theta_B + \theta_C - 66.7 = 0$$
$$4\theta_B + \theta_C = 66.7 \qquad (1)$$
$$\sum M_C = 0 = M_{CB} + M_{CD}$$
$$\theta_B + 2\theta_C + 66.7 + 2\theta_C = 0$$
$$\theta_B + 4\theta_C = -66.7 \qquad (2)$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) simultáneamente,

$$\theta_B = +22.2$$
$$\theta_C = -22.2$$

Momentos de extremo finales

$M_{AB} = +22.2$ klb-pie $\quad M_{CB} = +44.4$ klb-pie
$M_{BA} = +44.4$ klb-pie $\quad M_{CD} = +44.4$ klb-pie
$M_{BC} = -44.4$ klb-pie $\quad M_{DC} = -22.2$ klb-pie ■

18.8 ANÁLISIS DE MARCOS CON DESPLAZAMIENTO LATERAL

Las cargas, los momentos de inercia y las dimensiones del marco de la figura 18.13 no son simétricos con respecto al eje central, y obviamente el marco se ladeará hacia un lado. Los nudos B y C se deflexionan hacia la derecha, lo que causa rotaciones en las cuerdas en los miembros AB y CD, sin que haya rotación teóricamente de BC si se desprecia el acortamiento axial (o el alargamiento) de AB y CD. Si se desprecia la deformación axial de BC, cada uno de los nudos se desplazará la misma distancia horizontal Δ.

Puede verse que las rotaciones de las cuerdas de los miembros AB y CD, debido al ladeo, son iguales a Δ/L_{AB} y Δ/L_{CD}, respectivamente. (Observe que para la misma Δ el miembro más corto tiene una rotación de cuerda mayor y mayor efecto sobre los momentos de los miembros.) Para este marco, ψ_{AB} es 1.5 veces tan grande como ψ_{CD}, ya que L_{AB} es sólo dos tercios tan grande como L_{CD}. Es conveniente trabajar solamente con una rotación de cuerda desconocida, y al escribir las ecuaciones de pendiente-deflexión se usan valores relativos. El valor ψ se usa para las dos ecuaciones para el miembro AB, mientras que $\frac{2}{3}\psi$ se usa para las ecuaciones para el miembro CD.

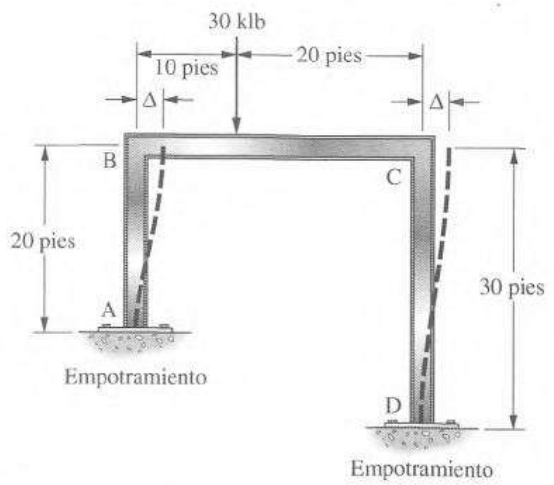


Figura 18.13

En el ejemplo 18.6 se presenta el análisis del marco de la figura 18.14. Observando que $\theta_A = \theta_D = 0$, se verá que las seis ecuaciones de momentos de extremo para la estructura completa contienen un total de tres incógnitas: θ_B, θ_C y ψ. Sin embargo, están presentes tres condiciones que permiten su determinación. Éstas son

1. La suma de momentos en B es cero ($\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC}$).
2. La suma de momentos en C es cero ($\sum M_C = 0 = M_{CB} + M_{CD}$).
3. La suma de las fuerzas horizontales sobre la estructura completa debe ser cero.

Las únicas fuerzas horizontales son las reacciones horizontales en A y D, y serán de la misma magnitud y de dirección opuesta. Las reacciones horizontales pueden calcularse para cada una de las columnas dividiendo los momentos de las columnas entre la altura de las columnas, o, lo que es lo mismo, tomando momentos en la parte superior de cada columna. La suma de las dos reacciones debe ser cero.

$$H_A = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L_{AB}} \qquad H_D = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L_{DC}}$$

$$\sum H = 0 = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L_{AB}} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L_{CD}}$$

EJEMPLO 18.6

Determine los momentos de extremo de los miembros del marco mostrado en la figura 18.14 para el cual E e I son constantes.

Solución. Con el uso de valores ψ relativos,

$$\psi_{AB} = \frac{\Delta}{20} \qquad \psi_{CD} = \frac{\Delta}{30} \qquad \frac{\psi_{AB}}{\psi_{CD}} = \frac{3}{2}$$

Con el uso de valores 2EK relativos,

$$\text{para AB} \quad 2EK = \frac{2E}{20}$$

digamos un valor relativo de 3 con respecto a los valores 2EK de BC y CD

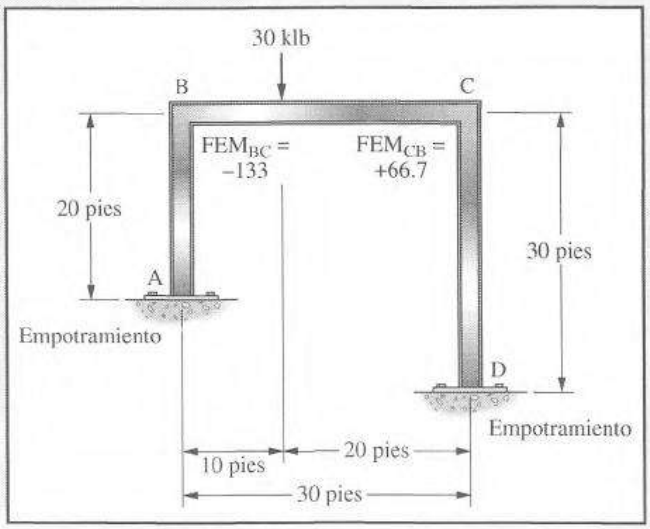


Figura 18.14

$$\text{para BC} \qquad 2EK = \frac{2E}{30} \qquad \text{use un valor relativo} = 2$$

$$\text{para CD} \qquad 2EK = \frac{2E}{30} \qquad \text{use un valor relativo} = 2$$

Escribiendo las ecuaciones y observando que $\theta_A = \theta_D = \psi_{BC} = 0$,

$$M_{AB} = 3(\theta_B - 3\psi) = 3\theta_B - 9\psi$$

$$M_{BA} = 3(2\theta_B - 3\psi) = 6\theta_B - 9\psi$$

$$M_{BC} = 2(2\theta_B + \theta_C) - 133 = 4\theta_B + 2\theta_C - 133$$

$$M_{CB} = 2(\theta_B + 2\theta_C) + 66.7 = 2\theta_B + 4\theta_C + 66.7$$

$$M_{CD} = 2\left[(2\theta_C - (3)\left(\frac{2}{3}\psi\right)\right] = 4\theta_C - 4\psi$$

$$M_{DC} = 2\left[\theta_C - (3)\left(\frac{2}{3}\psi\right)\right] = 2\theta_C - 4\psi$$

$$\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC}$$

$$6\theta_B - 9\psi + 4\theta_B + 2\theta_C - 133 = 0$$

$$10\theta_B + 2\theta_C - 9\psi = 133 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum M_C = 0 = M_{CB} + M_{CD}$$

$$2\theta_B + 4\theta_C + 66.7 + 4\theta_C - 4\psi = 0$$

$$2\theta_B + 8\theta_C - 4\psi = -66.7 \qquad \textbf{(2)}$$

$$\sum H = 0 = H_A + H_D$$

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{L_{AB}} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L_{CD}} = 0$$

$$\frac{3\theta_B - 9\psi + 6\theta_B - 9\psi}{20} + \frac{4\theta_C - 4\psi + 2\theta_C - 4\psi}{30} = 0$$

$$27\theta_B + 12\theta_C - 70\psi = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Resolviendo las ecuaciones (1), (2) y (3) simultáneamente,

$$\theta_B = +21.2$$

$$\theta_C = -10.5$$

$$\psi = +6.4$$

Momentos finales:

$M_{AB} = +6.0$ klb-pie $\qquad M_{CB} = +67.4$ klb-pie

$M_{BA} = +69.4$ klb-pie $\qquad M_{CD} = -67.4$ klb-pie

$M_{BC} = -69.4$ klb-pie $\qquad M_{DC} = -46.6$ klb-pie ■

El método de pendiente-deflexión puede aplicarse a marcos con más de una condición de ladeo, como es el marco de dos niveles mostrado en la figura 18.15. El análisis manual de los marcos de este tipo usualmente se trata en forma más conveniente con el método de distribución de momentos, pero el conocimiento de la solución con pendiente-deflexión es útil para entender mejor la solución con distribución de momentos.

Las cargas horizontales causan que la estructura se incline hacia la derecha; los nudos B y E se deflexionan Δ_1 horizontalmente; y los nudos C y D se deflexionan $\Delta_1 + \Delta_2$ horizontalmente como se muestra en la figura 18.15. Por lo tanto, las rotaciones de las cuerdas para las columnas ψ_1 y ψ_2 son iguales a Δ_1/L_{AB} para el nivel inferior y Δ_2/L_{BC} para el nivel superior.

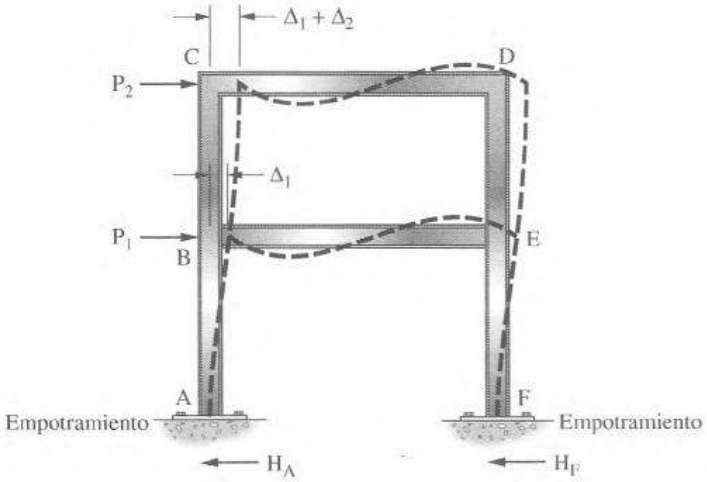


Figura 18.15

Las ecuaciones de pendiente-deflexión pueden escribirse para el momento en cada extremo de los seis miembros, y las ecuaciones acostumbradas de condición de nudos están disponibles como sigue:

$$\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC} + M_{BE} \tag{1}$$

$$\sum M_C = 0 = M_{CB} + M_{CD} \tag{2}$$

$$\sum M_D = 0 = M_{DC} + M_{DE} \tag{3}$$

$$\sum M_E = 0 = M_{ED} + M_{EB} + M_{EF} \tag{4}$$

Estas ecuaciones contienen seis incógnitas (θ_B, θ_C, θ_D, θ_E, ψ_1 y ψ_2), observando que θ_A y θ_F son iguales a cero. Dos ecuaciones adicionales se requieren para determinar las incógnitas, y se les encuentra considerando las fuerzas horizontales o fuerzas cortantes en el marco. Es obvio que la suma de las fuerzas resistentes horizontales para cualquier nivel debe ser igual y opuesta al cortante externo horizontal para ese nivel. Para el nivel de piso la fuerza cortante horizontal es igual a $P_1 + P_2$, y las reacciones en la base de cada columna son iguales a los momentos de extremo divididos entre la altura de las columnas. Por lo tanto

$$P_1 + P_2 - H_A - H_F = 0$$

$$H_A = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L_{AB}}$$

$$H_F = \frac{M_{EF} + M_{EF}}{L_{EF}}$$

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} + \frac{M_{EF} + M_{FE}}{L} + P_1 + P_2 = 0 \tag{5}$$

Una ecuación de condición similar puede escribirse para el nivel superior, el cual tiene una fuerza cortante externa de P_2. Los momentos flexionantes en las columnas producen fuerzas cortantes que son iguales y opuestas a P_2, lo cual permite escribir la siguiente ecuación para el nivel:

$$\frac{M_{BC} + M_{CB}}{L_{BC}} + \frac{M_{DE} + M_{ED}}{L_{DE}} + P_2 = 0 \tag{6}$$

Edificio Alcoa, San Francisco. Un aspecto dominante de la estructura reticular de acero que sobresale de la "tiara" del proyecto de la Puerta Dorada de San Francisco son los muros de cortante exteriores en forma de diamante, resistentes a sismo. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

Se dispone de seis ecuaciones de condición para determinar las seis incógnitas restantes en las ecuaciones de momentos de extremo, y el problema puede resolverse como se ilustra en el ejemplo 18.7. Es conveniente suponer que todos los valores de θ y ψ son positivos al formular las ecuaciones.

Sin importar cuántos pisos tenga el edificio, se dispone de una ecuación de compatibilidad de fuerza cortante para cada piso. El procedimiento de pendiente-deflexión no es muy práctico para edificios de muchos pisos. Para un edificio de seis niveles y cuatro claros por nivel habrá 6 valores desconocidos de ψ y 30 valores desconocidos de θ, o un total de 36 ecuaciones simultáneas para resolverlas. (El problema no es tan serio como pudiera parecer, ya que cada ecuación contendrá sólo algunas de las incógnitas y no las 36.)

EJEMPLO 18.7

Encuentre los momentos para el marco mostrado en la figura 18.6 usando el método pendiente-deflexión.

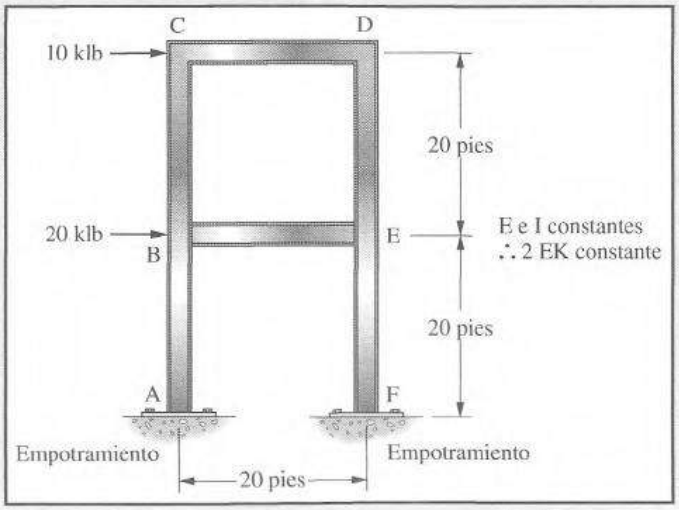


Figura 18.16

Solución.

Observando que las cuerdas BE y CD no giran,

$$\psi_{AB} = \psi_{EF} = \psi_1 \qquad \psi_{BC} = \psi_{DE} = \psi_2$$

Al escribir las ecuaciones, y al observar que $\theta_A = \theta_F = 0$. Como los valores de 2EK son todos iguales se omiten.

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= \theta_B - 3\psi_1 & M_{DC} &= \theta_C + 2\theta_D \\
M_{BA} &= 2\theta_B - 3\psi_1 & M_{DE} &= 2\theta_D + \theta_E - 3\psi_2 \\
M_{BC} &= 2\theta_B + \theta_C - 3\psi_2 & M_{ED} &= \theta_D + 2\theta_E - 3\psi_2 \\
M_{BE} &= 2\theta_B + \theta_E & M_{EB} &= \theta_B + 2\theta_E \\
M_{CB} &= \theta_B + 2\theta_C - 3\psi_2 & M_{EF} &= 2\theta_E - 3\psi_1 \\
M_{CD} &= 2\theta_C + \theta_D & M_{FE} &= \theta_E - 3\psi_1
\end{aligned}$$

$$\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC} + M_{BE}$$

$$2\theta_B - 3\psi_1 + 2\theta_B + \theta_C - 3\psi_2 + 2\theta_B + \theta_E = 0$$

$$6\theta_B + \theta_C + \theta_E - 3\psi_1 - 3\psi_2 = 0$$

$$\sum M_C = 0 = M_{CB} + M_{CD}$$

$$\theta_B + 2\theta_C - 3\psi_2 + 2\theta_2 + \theta_D = 0$$

$$\theta_B + 4\theta_C + \theta_D - 3\psi_2 = 0$$

$$\sum M_D = 0 = M_{DC} + M_{DE}$$

$$\theta_C + 2\theta_D + 2\theta_D + \theta_E - 3\psi_2 = 0$$

$$\theta_C + 4\theta_D + \theta_E - 3\psi_2 = 0$$

$$\sum M_E = 0 = M_{ED} + M_{EB} + M_{EF}$$

$$\theta_D + 2\theta_E - 3\psi_2 + \theta_B + 2\theta_E + 2\theta_E - 3\psi_1 = 0$$

$$\theta_B + \theta_D + 6\theta_E - 3\psi_1 - 3\psi_2 = 0$$

$\Sigma H = -10$, nivel superior:

$$\frac{M_{BC} + M_{CB}}{20} + \frac{M_{DE} + M_{ED}}{20} = -10$$

$$\frac{2\theta_B + \theta_C - 3\psi_2 + \theta_B + 2\theta_C - 3\psi_2}{20} + \frac{2\theta_D + \theta_E - 3\psi_2 + \theta_D + 2\theta_E - 3\psi_2}{20} = -10$$

$$3\theta_B + 3\theta_C + 3\theta_D + 3\theta_E - 12\psi_2 = -200 \qquad (5)$$

$\Sigma H = 30$, nivel de piso:

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{20} + \frac{M_{EF} + M_{FE}}{20} = -30$$

$$\frac{\theta_B - 3\psi_1 + 2\theta_B - 3\psi_1}{20} + \frac{2\theta_E - 3\psi_1 + \theta_E - 3\psi_1}{20} = -30$$

$$3\theta_B + 3\theta_E - 12\psi_1 = -600 \qquad (6)$$

Al resolver las ecuaciones simultáneamente,

$$\theta_B = \theta_E = +52.75 \qquad \psi_1 = +76.37$$
$$\theta_C = \theta_D = +21.82 \qquad \psi_2 = +53.95$$

Momentos finales:

$$M_{AB} = M_{FE} = -176.4 \text{ klb-pie} \qquad M_{BE} = M_{EB} = +158.2 \text{ klb-pie}$$
$$M_{BA} = M_{EF} = -123.6 \text{ klb-pie} \qquad M_{CB} = M_{DE} = -65.5 \text{ klb-pie}$$
$$M_{BC} = M_{ED} = -34.6 \text{ klb-pie} \qquad M_{CD} = M_{DC} = +65.5 \text{ klb-pie}$$ ■

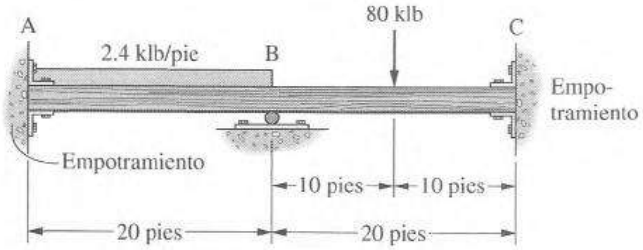
18.9 ANÁLISIS DE MARCOS CON COLUMNAS INCLINADAS

No presentaremos en este capítulo el análisis de marcos con columnas inclinadas. El análisis de este tipo de marcos mediante el método de pendiente-deflexión es muy tedioso cuando se hace con una calculadora manual, y por lo tanto lo más probable es que no se use cuando se dispone de otros métodos. Las soluciones con computadora usando métodos matriciales y el procedimiento de distribución de momentos presentado en los capítulos 20 al 25 son más usados actualmente. Sin embargo, una vez que se entiende el análisis de marcos con columnas inclinadas usando la distribución de momentos, el analista podrá retornar a este capítulo y usar el método de la pendiente-deflexión para el análisis de estas estructuras.

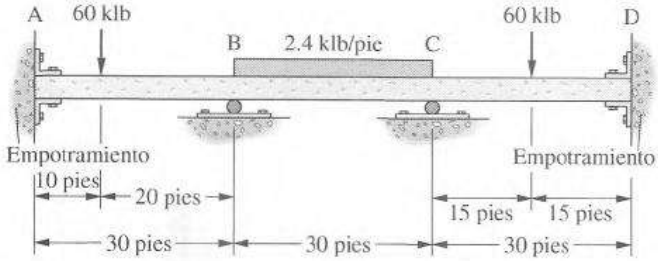
18.10 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

En los problemas 18.1 al 18.15, calcule los momentos de extremo de las vigas con las ecuaciones de pendiente-deflexión. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante. E e I son constantes para cada miembro a menos que se especifique otra cosa.

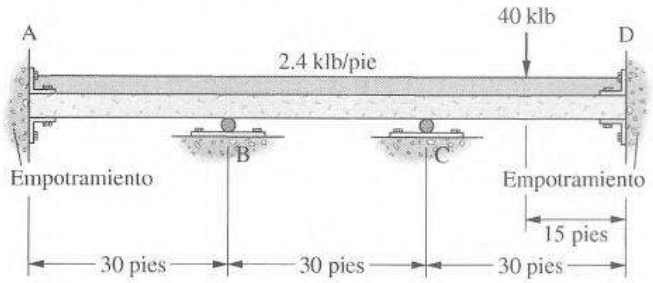
18.1 (*Resp.:* $M_{AB} = -50$ klb-pie, $M_{BC} = -140$ klb-pie.)



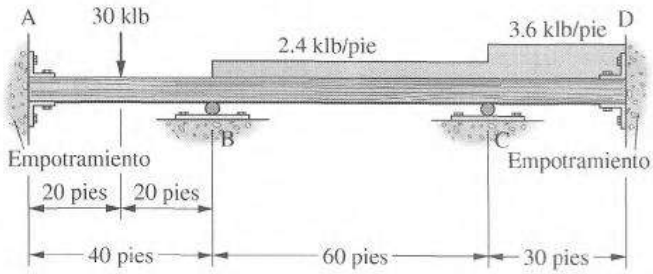
18.2



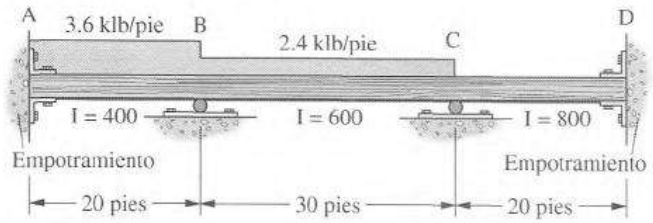
18.3 (*Resp.:* $M_{BA} = -160$ klb-pie, $M_{CD} = -250$ klb-pie.)



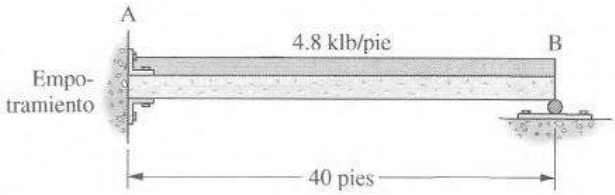
18.4



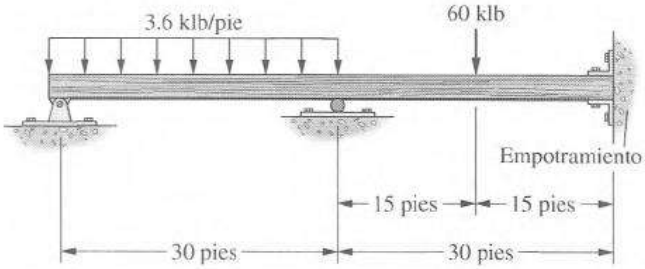
18.5 (*Resp.:* $M_{AB} = -97.90$ klb-pie, $M_{DC} = +67.3$ klb-pie.)



18.6

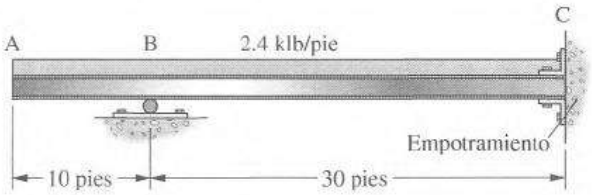


18.7 Use las ecuaciones normales de pendiente-deflexión, es decir, aquellas que no han sido modificadas para apoyos simples en los extremos. (*Resp.:* $M_{BA} = -328.1$ klb-pie, $M_{CB} = -173.9$ klb-pie.)

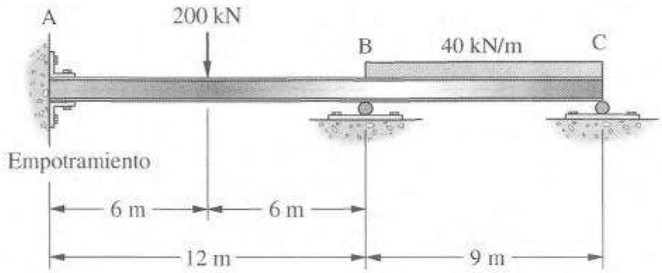


18.8 Repita el problema 18.7 usando las ecuaciones modificadas.

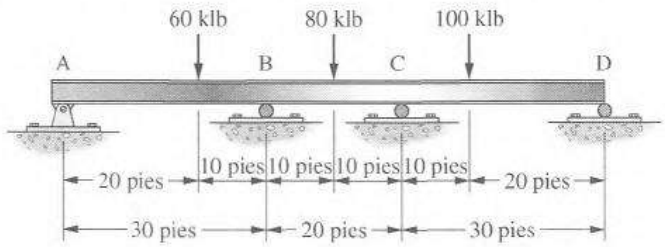
18.9 (*Resp.:* $M_{CB} = -210$ klb-pie, $V_C = 39.00$ klb ↑.)



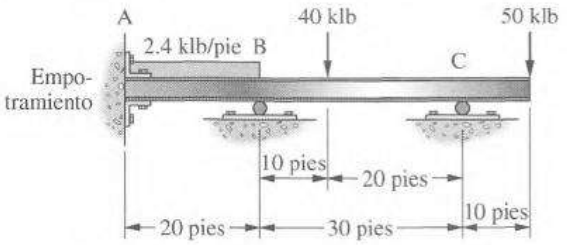
18.10



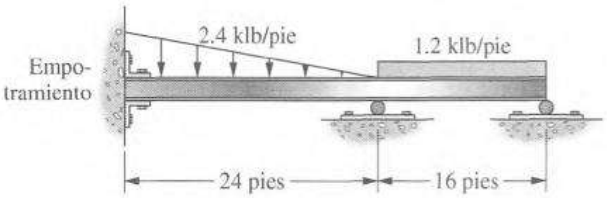
18.11 (*Resp.:* $M_{BA} = -239.1$ klb-pie, $M_{CD} = -405.7$ klb-pie.)



18.12



18.13 Véase la primera de forros para los momentos de empotramiento. (*Resp.:* $M_{AB} = -70.91$ klb-pie, $M_{BA} = -42.44$ klb-pie.)

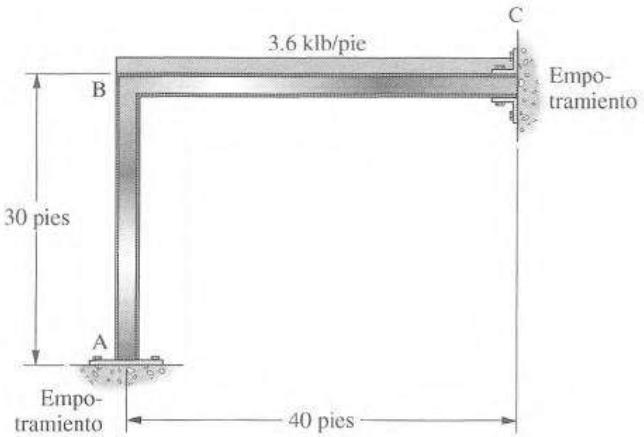


18.14 La viga del problema 18.2 si ambos extremos están simplemente apoyados.

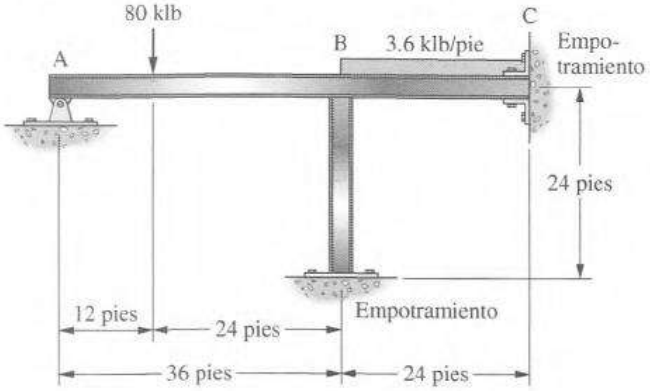
18.15 La viga del problema 18.4 con el extremo derecho simplemente apoyado. (*Resp.:* $M_{BA} = -545.8$ klb-pie, $M_{CB} = -672.7$ klb-pie.)

En los problemas 18.16 al 18.18, determine los momentos de extremo para los miembros de todas las estructuras usando las ecuaciones de pendiente-deflexión. Observe que no se permite desplazamiento lateral para estas estructuras. I y E son constantes.

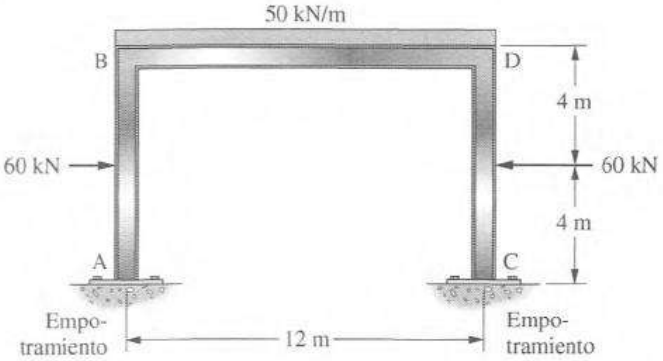
18.16



18.17 (*Resp.:* $M_{BC} = -274.3$ klb-pie, $M_{CB} = +122.0$ klb-pie.)

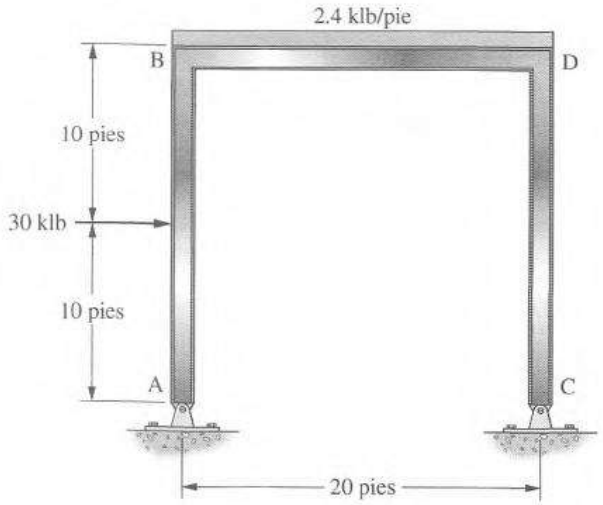


18.18



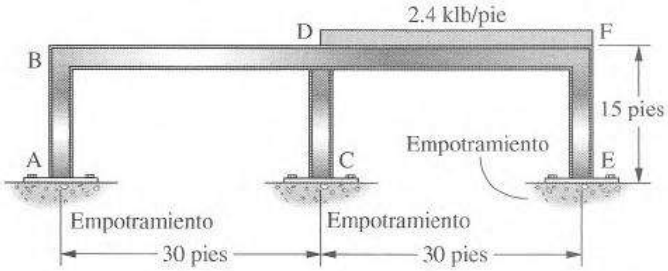
Para los problemas 18.19 al 18.22 determine los momentos en los extremos para los miembros de todas las estructuras usando las ecuaciones de pendiente-deflexión. Estas estructuras están sujetas a desplazamiento lateral. I y E son constantes.

18.19 (*Resp.:* $M_{BD} = +79.60$ klb-pie, $M_{DC} = -220.53$ klb-pie.)

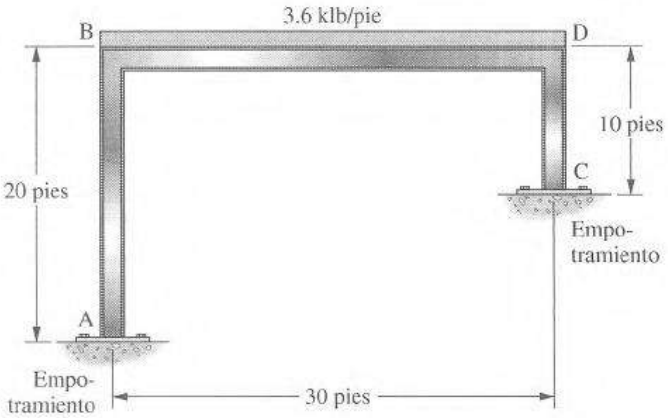


18.20 El marco del problema 18.19 cuando las bases de las columnas están empotradas.

18.21 (*Resp.:* $M_{DF} = -166.1$ klb-pie, $M_{FE} = -130.7$ klb-pie.)



18.22



PARTE TRES

ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

MÉTODOS COMUNES ACTUALMENTE EN USO

Capítulo 19

Análisis aproximado de estructuras estáticamente indeterminadas

19.1 INTRODUCCIÓN

Los métodos aproximados que se presentan en este capítulo para analizar estructuras estáticamente indeterminadas podrían muy bien designarse como *métodos clásicos*. La misma designación podría hacerse del método de distribución de momentos que se expone en los capítulos 20 y 21. Los métodos analizados en éste y los siguientes capítulos serán vistos y usados a menudo por un ingeniero en el curso del diseño diario; éstos son los métodos de análisis comúnmente usados en la práctica corriente de la ingeniería.

Las estructuras estáticamente indeterminadas se pueden analizar ya sea en forma "exacta", o bien, de modo "aproximado". En los capítulos 15 al 18 se explican varios métodos "exactos" que se basan en deformaciones elásticas. En este capítulo se presentan los métodos aproximados que exigen el empleo de hipótesis simplificadas. Estos métodos tienen muchas aplicaciones prácticas, como las siguientes:

1. Para la estimación de costos de configuraciones estructurales y conceptos de diseño alternativos, los análisis aproximados en ocasiones son de mucha utilidad. Los análisis y los diseños aproximados de diversas alternativas pueden efectuarse rápidamente y usarse en la estimación inicial de los costos.
2. Para analizar una estructura estáticamente indeterminada, se debe hacer una estimación de los tamaños de sus miembros antes que la estructura pueda analizarse usando un método "exacto". Esto es necesario porque el análisis de una estructura estáticamente indeterminada se basa en las propiedades elásticas de sus miembros. Un análisis aproximado de la estructura dará fuerzas a partir de las cuales se podrán hacer estimaciones iniciales razonablemente buenas acerca del tamaño de sus miembros.
3. En la actualidad se cuenta con computadoras que pueden efectuar análisis "exactos" y diseños de estructuras bastante indeterminadas en forma rápida y económica. Al usar programas de computadora es aconsejable, desde un punto de vista económico, hacer algunas estimaciones preliminares acerca del tamaño de los miembros. Si ya se ha efectuado un análisis preliminar de la estructura, será posible hacer estimaciones muy razonables sobre el tamaño de los miembros. El resultado será un ahorro apreciable tanto de tiempo de computadora como de horas de diseño.
4. Los análisis aproximados son muy útiles para verificar las soluciones de la computadora, lo que es de gran importancia.

5. Un análisis "exacto" puede ser muy caro para pequeños sistemas no críticos, sobre todo si se efectúan diseños preliminares. Un método aproximado aceptable y aplicable es muy apropiado para una situación como ésta.
6. Una ventaja adicional de los métodos aproximados es que le permiten al proyectista "sentir" el comportamiento real de la estructura bajo diferentes condiciones de carga. Este recurso probablemente no se desarrollará a partir de soluciones elaboradas por computadora.

Para hacer un análisis "exacto" de una estructura complicada estáticamente indeterminada es necesario que un proyectista competente "modele" la estructura, o sea, que formule ciertas hipótesis sobre su comportamiento. Por ejemplo, los nudos pueden suponerse simples, rígidos o semirrígidos. Además pueden suponerse ciertas características del comportamiento del material, condiciones de carga, etc. La consecuencia de todas estas hipótesis es que todos los análisis son aproximados. *Dicho de otra manera, aplicamos un método de análisis "exacto" a una estructura que en realidad no existe*. Además, todos los métodos de análisis son aproximados en el sentido de que toda estructura se construye con ciertas tolerancias (ninguna estructura es perfecta) y su comportamiento no puede determinarse con precisión.

Existen muchos métodos diferentes para efectuar análisis aproximados. Se presentarán aquí algunos de los más comunes, en especial los que son aplicables a armaduras, vigas continuas y marcos constructivos. Se espera que los métodos aproximados descritos en este capítulo le proporcionen al lector un conocimiento de conjunto acerca de un gran número de tipos de estructuras estáticamente indeterminadas. No todos los tipos de estructuras estáticamente indeterminadas se considerarán en este capítulo. Sin embargo, se espera que con base en las ideas presentadas aquí, el estudiante sea capaz de hacer hipótesis razonables cuando encuentre otros tipos de estructuras estáticamente indeterminadas.

Para poder analizar una estructura usando las ecuaciones del equilibrio estático, no debe haber más incógnitas que ecuaciones de equilibrio estático. Si una armadura o un marco tienen 10 incógnitas más que ecuaciones de equilibrio, será estáticamente indeterminada de grado 10. Para analizarla mediante un método aproximado deberá hacerse una hipótesis por cada grado de indeterminación, o sea, un total de 10 hipótesis. Cada hipótesis proporciona una ecuación extra para usarse en los cálculos.

19.2 ARMADURAS CON DOS DIAGONALES EN CADA TABLERO

Diagonales con poca rigidez

La armadura de la figura 19.1 tiene dos diagonales en cada tablero. Si una de estas diagonales se eliminase de cada uno de los seis tableros, la armadura se volvería isostática (estáticamente determinada). Por lo tanto, la armadura original es hiperestática de sexto grado.

Con frecuencia las diagonales en una armadura son más o menos largas y esbeltas, a menudo formadas por un par de pequeños perfiles angulares de acero. Éstas pueden soportar tensiones razonablemente grandes, pero las cargas de compresión que puedan soportar serán insignificantes. En este caso es lógico suponer que la fuerza cortante en cada tablero es soportada del todo por la diagonal que estaría en tensión con ese tipo de cortante (positivo o negativo). Se supone que la otra diagonal no toma ninguna fuerza. Si establecemos esta hipótesis para cada tablero, tendremos en total seis "ecuaciones" para evaluar las seis redundantes. Las fuerzas en los miembros restantes pueden evaluarse con las ecuaciones de equilibrio estático, empleando para ello el método de los nudos o el método de las secciones. Las fuerzas en la figura 19.1 se obtuvieron con base en esta hipótesis.

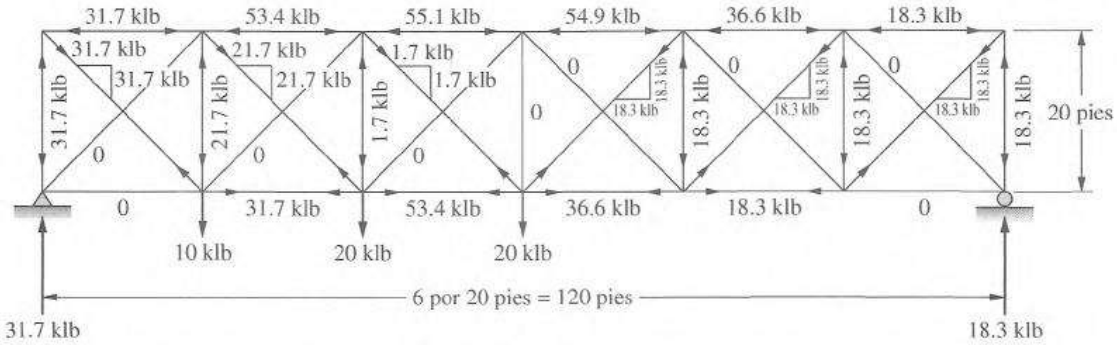


Figura 19.1 Una armadura analizada suponiendo que las diagonales actúan sólo en tensión.

Diagonales con rigidez considerable

En algunas armaduras las diagonales se construyen con rigidez suficiente para resistir cargas de compresión importantes. En el caso de tableros con dos diagonales, puede considerarse que la fuerza cortante es resistida por ambas. La división del efecto de esa fuerza hace que una diagonal esté sometida a tensión y la otra a compresión. La aproximación acostumbrada consiste en suponer que cada diagonal toma 50% de la fuerza cortante en el tablero: también son posibles otras divisiones de la fuerza cortante. Otra división común es que un tercio de la fuerza cortante sea tomada por la diagonal que actúa a compresión y dos tercios sean tomados por la diagonal a tensión.

Las fuerzas calculadas para la armadura de la figura 19.2 se basan en una división del 50% de la fuerza cortante en cada tablero.

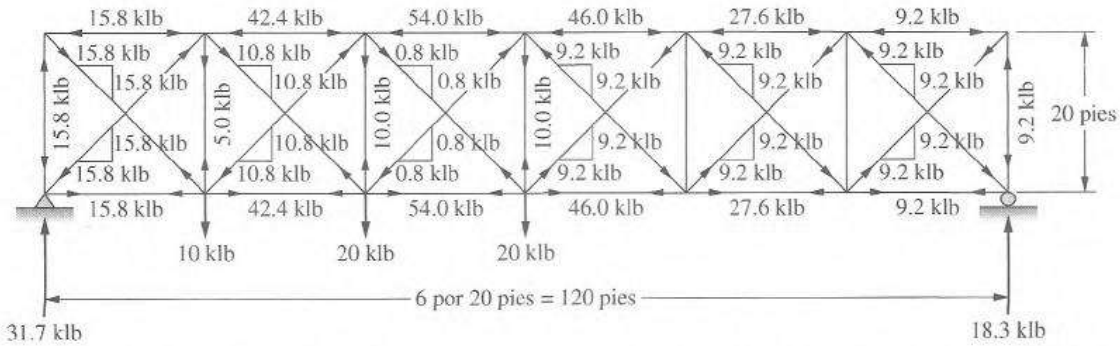


Figura 19.2 Análisis aproximado de una armadura con la hipótesis de que las diagonales cargan el 50% de la fuerza cortante en el tablero.

19.3 VIGAS CONTINUAS

Antes de comenzar un análisis "exacto" de la estructura de un edificio, es necesario estimar el tamaño de sus elementos. Los tamaños preliminares de las vigas pueden determinarse considerando sus momentos aproximados. Con frecuencia es práctico aislar una sección de un edificio y analizar esa parte de la estructura. Por ejemplo, uno o más claros de vigas pueden aislarse como cuerpo libre para luego formular hipótesis sobre los momentos en esos claros. Para facilitar ese análisis, se muestran en la figura 19.3 los diagramas de momentos flexionantes para diferentes vigas cargadas de manera uniforme.

Al analizar esta figura resulta obvio que el tipo de apoyo tiene un efecto considerable en la magnitud de los momentos calculados. Por ejemplo, la viga simple con carga uniforme de la figura

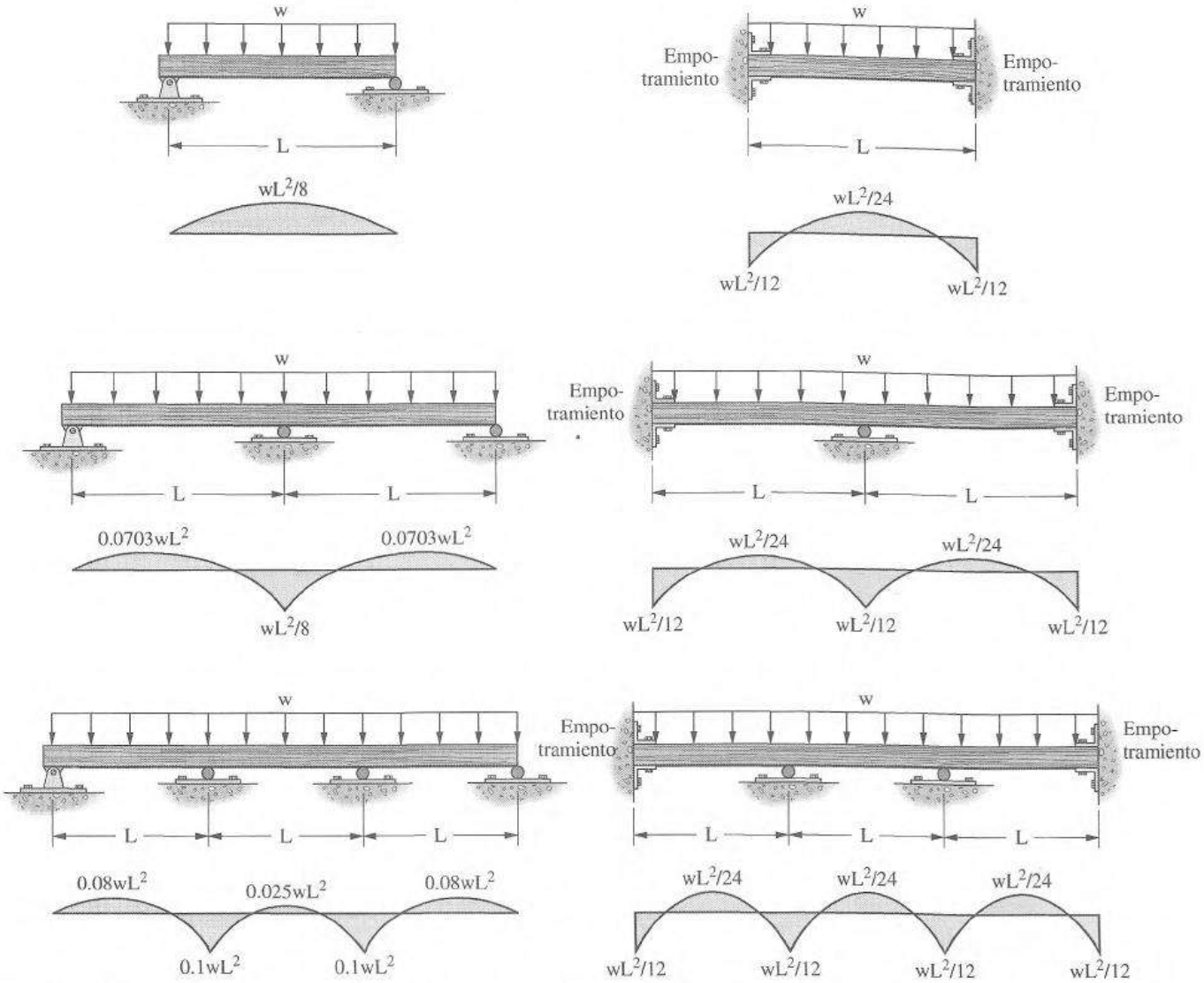


Figura 19.3 Diagramas de momento para algunas vigas típicas.

19.3 tiene un momento máximo de $wL^2/8$. Por otro lado, la viga doblemente empotrada con carga uniforme de un solo claro tendrá un momento máximo de $wL^2/12$. Para una viga continua cargada de manera uniforme se podría estimar un momento máximo con un valor intermedio entre los dos anteriores, digamos $wL^2/10$, y utilizar este valor para el dimensionamiento preliminar de la viga.

Un método muy común usado para el análisis aproximado de estructuras continuas de concreto reforzado consiste en emplear los coeficientes de momentos y de fuerzas cortantes del Instituto Americano del Concreto (ACI: American Concrete Institute).[1] Estos coeficientes, que se reproducen en la tabla 19.1, proporcionan los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes estimados máximos para edificios de proporciones normales. Los valores calculados de esta manera serán en general un poco mayores que los que se lograrían con un análisis exacto. En consecuencia,

[1] *Building Code Requirements for Reinforced Concrete*, ACI 318-05 (Detroit: American Concrete Institute), sección 8.3.3, pp. 96-97.

TABLA 19.1 COEFICIENTES DE MOMENTO DEL ACI*

Momento positivo	
Claros extremos	
Si el extremo discontinuo está restringido	$\frac{1}{11}wL_n^2$
Si el extremo discontinuo es monolítico con el apoyo	$\frac{1}{14}wL_n^2$
Claros interiores	$\frac{1}{16}wL_n^2$
Momento negativo en la cara exterior del primer apoyo interior	
Dos claros	$\frac{1}{9}wL_n^2$
Más de dos claros	$\frac{1}{10}wL_n^2$
Momento negativo en otras caras de apoyos interiores	$\frac{1}{11}wL_n^2$
Momento negativo en caras de todo apoyo para: (a) losas con claros que no excedan de 10 pies y (b) vigas y trabes donde la relación de la suma de las rigideces de las columnas con la rigidez de la viga exceda de 8 en cada extremo del claro	$\frac{1}{12}wL_n^2$
Momento negativo en caras interiores de apoyos exteriores de elementos construidos monolíticamente con sus soportes	
Cuando el soporte es una viga de fachada o una trabe	$\frac{1}{24}wL_n^2$
Cuando el soporte es una columna	$\frac{1}{16}wL_n^2$
Fuerza cortante en elementos extremos en la cara del primer apoyo interior	$\frac{1.15wL_n}{2}$
Fuerza cortante en las caras de todos los demás apoyos	$\frac{wL_n}{2}$

*American Concrete Institute ACI 318-05

normalmente puede obtenerse una economía apreciable si se toma el tiempo o esfuerzo de efectuar un análisis de este tipo. Respecto a esto, el ingeniero debe ser consciente que esos coeficientes se aplican mejor a marcos continuos con más de tres o cuatro claros continuos.

Al desarrollar los coeficientes, los valores de los momentos negativos se redujeron para tener en cuenta los anchos comunes de apoyo y alguna redistribución de momentos antes del colapso. Además, los valores de los momentos positivos se incrementaron ligeramente para tomar en cuenta la redistribución de los momentos. Se observará también que los coeficientes toman en cuenta que en la construcción monolítica los soportes no son simples y que hay momentos presentes en los soportes extremos cuando esos soportes son vigas o columnas.

Al aplicar los coeficientes, w es la carga de diseño por unidad de longitud, mientras que L_n es el claro libre para calcular los momentos flexionantes positivos y el promedio de los claros libres adyacentes para calcular los momentos flexionantes negativos. Esos valores fueron desarrollados para miembros con claros aproximadamente iguales (el mayor de dos claros adyacentes no excede al menor en más de 20%) y para casos donde la razón de la carga viva uniforme de servicio a la carga muerta uniforme de servicio no es mayor que 3. Además, los valores no son aplicables a miembros de concreto preesforzado. Si estas limitaciones no se cumplen, debe usarse un método más preciso de análisis.

Para el diseño de una viga o losa continua, los coeficientes de momento flexionante proporcionan en efecto dos conjuntos de diagramas de momento para cada claro de la estructura. Un

diagrama es el resultado de colocar las cargas vivas de manera que causen un momento positivo máximo en el claro. El otro es el resultado de colocar las cargas vivas de manera que causen momentos negativos máximos en los soportes. En realidad, no es posible producir momentos negativos máximos simultáneamente en ambos extremos de un claro. Se requiere una colocación de las cargas vivas para producir un momento negativo máximo en un extremo del claro y otra colocación para producir un momento negativo máximo en el otro extremo. Sin embargo, la hipótesis de que ambos máximos ocurren al mismo tiempo está del lado de la seguridad, porque el diagrama resultante tendrá mayores valores críticos que los producidos por cualquiera de las dos condiciones separadas de carga.

Los coeficientes ACI dan valores máximos para una envolvente de momento flexionante para cada claro de un marco continuo. En la figura 19.4 se muestran envolventes típicas para una losa continua construida monolíticamente con sus soportes exteriores de trabes de fachada.

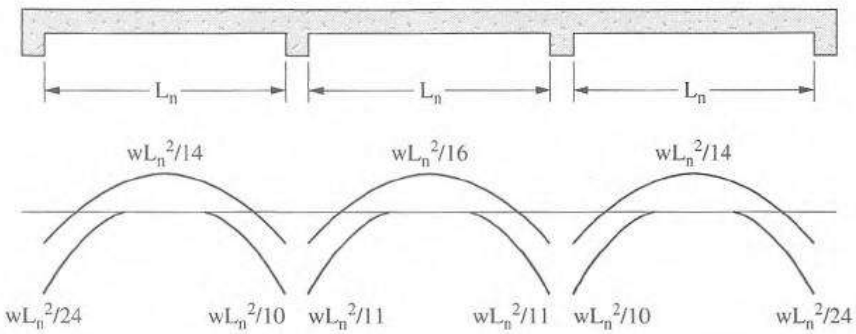


Figura 19.4 Envolventes de momentos para una losa continua construida monolíticamente con soportes exteriores consistentes en trabes de fachada.

En algunos casos el ingeniero tomará una porción de una estructura que incluye no sólo las vigas sino también las columnas de los pisos de arriba y de abajo, como se muestra en la figura 19.5. Este procedimiento, llamado el *método del marco equivalente*, es aplicable sólo a cargas de gravedad. Se estiman los tamaños de los miembros y se hace un análisis usando uno de los métodos "exactos" de análisis que hemos estudiado.

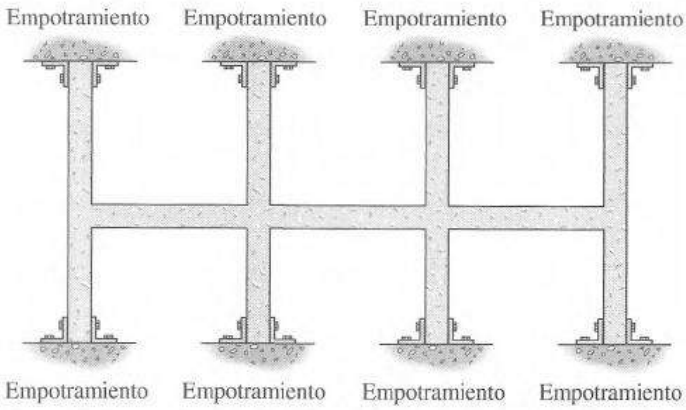
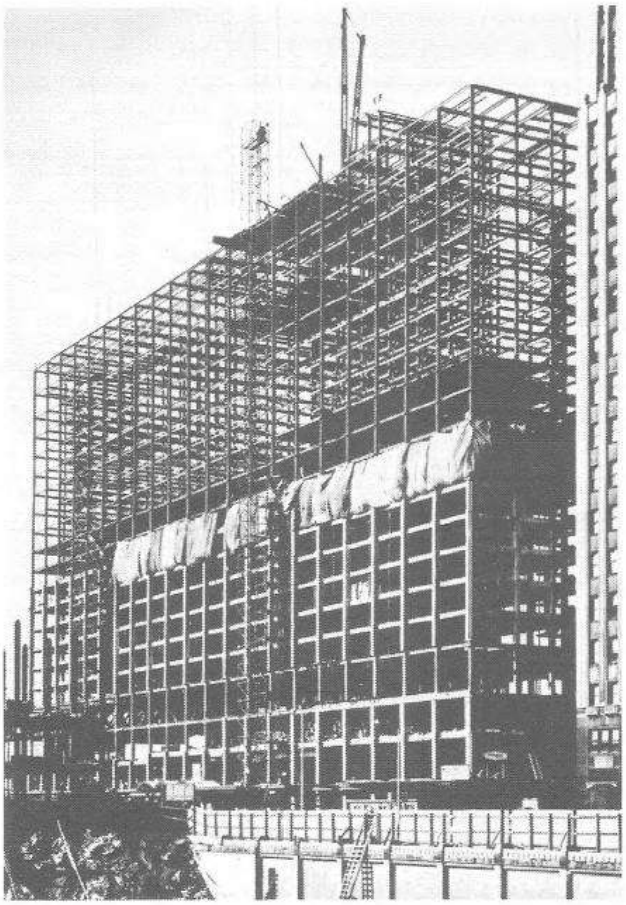


Figura 19.5 Porción de un marco de edificio para ser analizado por el método del marco equivalente.



Edificio de múltiples niveles con estructura de acero, mostrando el esqueleto estructural; Hotel Sheraton, Filadelfia, Pennsylvania. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

19.4 ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS DE EDIFICIOS PARA CARGAS VERTICALES

Un método aproximado para analizar estructuras de edificios considerando cargas verticales implica estimar la posición de los puntos de momento nulo en las trabes. Estos puntos, que se presentan cuando el momento cambia de un signo a otro, suelen denominarse *puntos de inflexión* (PI) o puntos de contraflexión. Una práctica común consiste en suponer que en las trabes existen puntos de inflexión localizados aproximadamente a 1/10 de la longitud, desde cada extremo, y que además es nula la fuerza axial en esas trabes.[2]

Estos supuestos tienen el efecto de crear una viga simplemente apoyada entre los puntos de inflexión, pudiendo determinarse mediante equilibrio estático los momentos positivos en la viga. En las trabes aparecen momentos negativos entre sus extremos y los puntos de inflexión. El valor de estos momentos puede calcularse considerando que la parte de la viga hasta el punto de inflexión funciona como voladizo.

[2] C. H. Norris, J. B. Wilbur y S. Utku, *Elementary Structural Analysis*, 3a. ed. (Nueva York, McGraw-Hill, 1976), 200-201.

La fuerza cortante en el extremo de cada trabe contribuye a las fuerzas axiales en las columnas. De manera análoga, los momentos flexionantes negativos en los extremos de las trabes se transmiten a las columnas. En las columnas interiores, los momentos en las trabes a cada lado se oponen entre sí y pueden cancelarse. En las columnas exteriores hay momentos sólo en un lado, causados por las trabes unidas a ellas, y deben considerarse en el diseño.

EJEMPLO 19.1

Determine las fuerzas en la viga AB del marco en la figura 19.6 suponiendo que los puntos de inflexión están en los puntos décimos del claro y que los extremos de la viga están empotrados. Las cargas distribuidas que actúan sobre el marco son de 3 klb/pie cada una. Las cargas concentradas actúan en los tercios del claro sobre la viga.

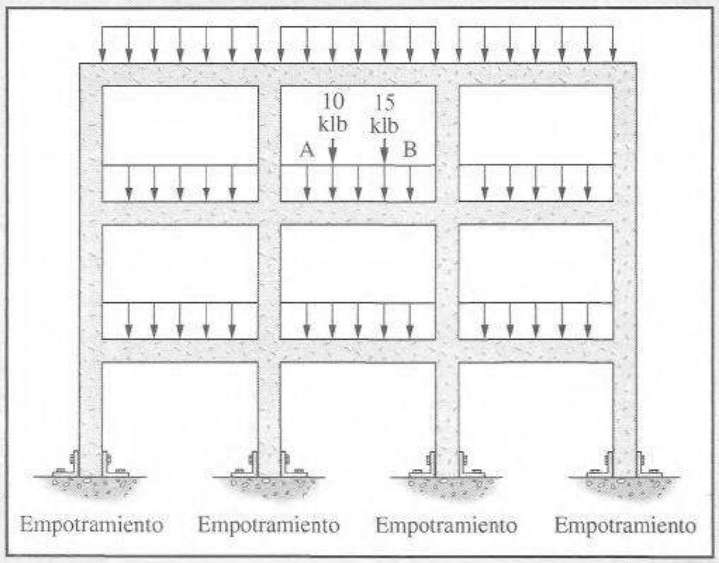
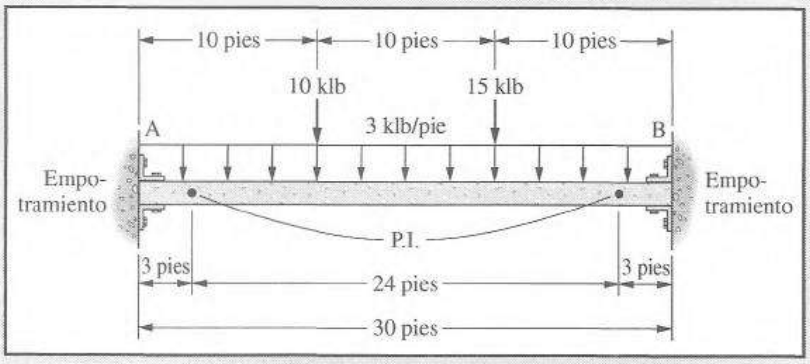
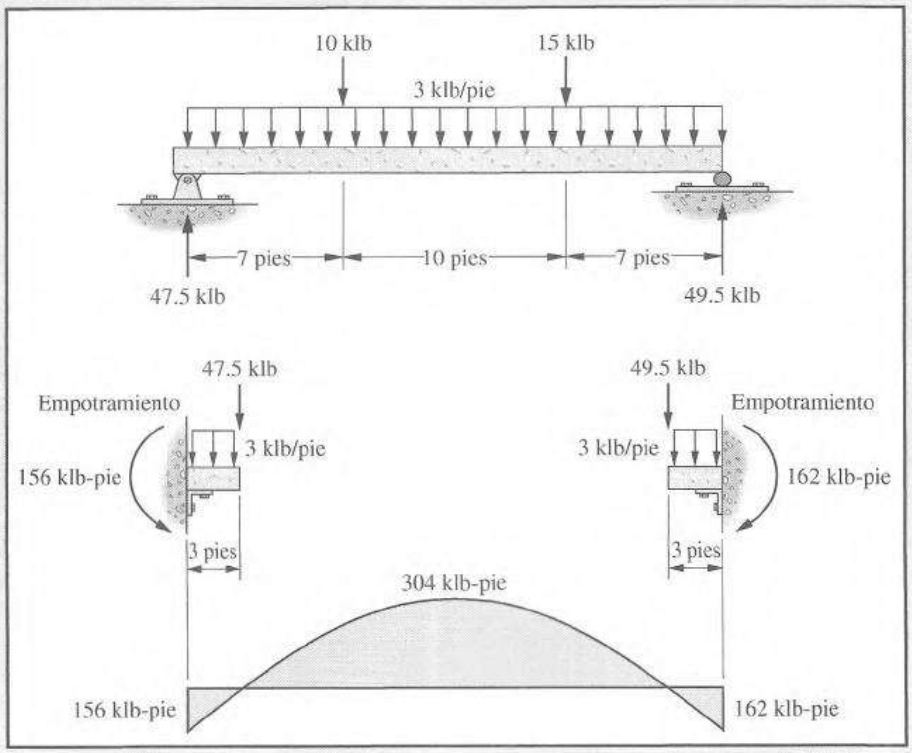


Figura 19.6

Solución. En la siguiente figura se muestra un dibujo detallado de la viga y la posición de los puntos de inflexión supuestos.



Ahora podemos dividir la viga en el "claro simple" y en los dos "claros en voladizo" y calcular las fuerzas que actúan en cada uno. Una vez calculadas las fuerzas se pueden trazar los diagramas de momento flexionante.



Esbozar la forma deflexionada a menudo ayuda para hacer estimaciones razonables acerca de la ubicación de los puntos de inflexión. Como ilustración, en la figura 19.7(a) se muestra una viga continua y un esbozo de su forma deflexionada estimada para las cargas mostradas se da en la parte (b). Del esbozo, se estima la ubicación aproximada de los puntos de inflexión.

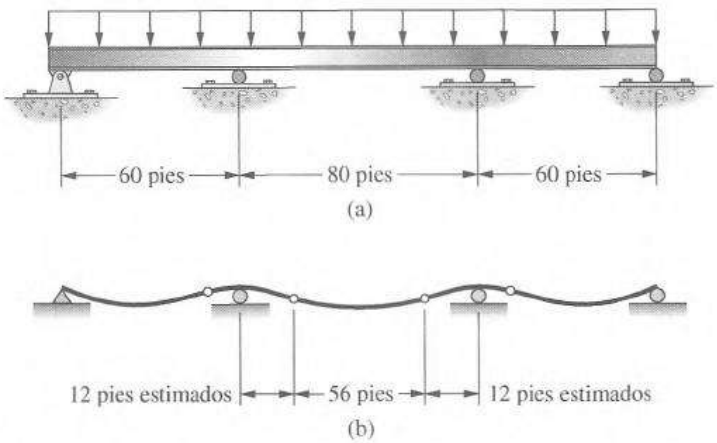


Figura 19.7 Puntos de inflexión estimados en una viga continua.

Sería útil para el lector ver dónde se presentan los puntos de inflexión para algunos tipos de vigas estáticamente indeterminadas. Esto puede ser de utilidad para estimar dónde se presentan los puntos de inflexión en otras estructuras. En la figura 19.8 se muestran los diagramas de momento para varias vigas. Los puntos de inflexión se presentan obviamente donde los diagramas de momento cambian de momentos positivos a negativos o viceversa.

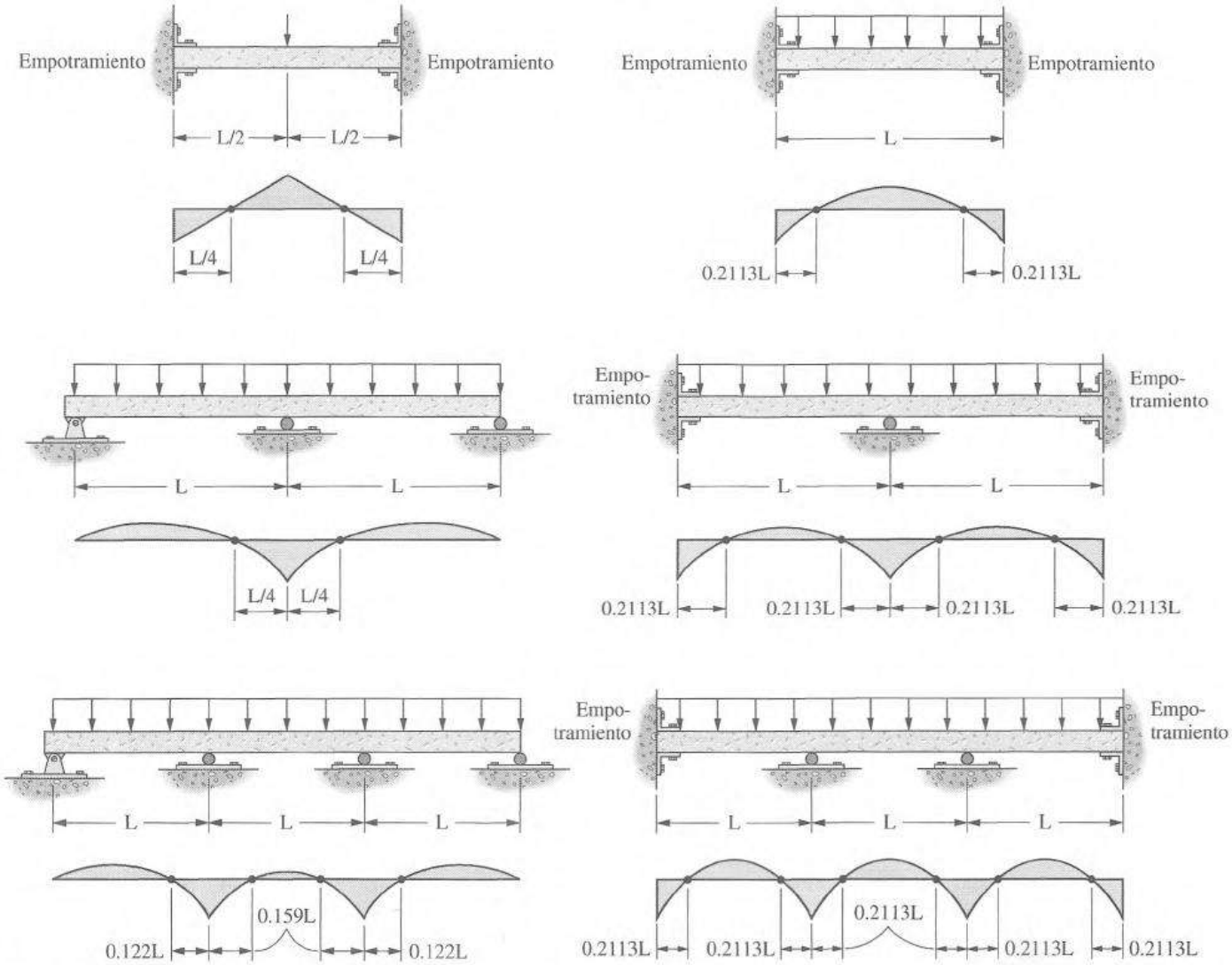


Figura 19.8 Localización de los puntos de inflexión en varias vigas típicas.

19.5 ANÁLISIS DE PORTALES

Los portales del tipo mostrados en las figuras 19.9 y 19.10 pueden estar empotrados en las bases de sus columnas, estar simplemente apoyados, o estar parcialmente empotrados. Se supone que las columnas del marco de la figura 19.9(a) tienen sus bases empotradas. En consecuencia, habrá tres fuerzas de reacción desconocidas en cada soporte, es decir, un total de seis incógnitas. La estructura es estáticamente indeterminada de tercer grado, y para analizarla con un método aproximado deberán hacerse tres suposiciones.

Cuando una columna está rígidamente unida a su cimentación, no puede haber rotación en la base. Aun cuando el marco esté sometido a cargas de viento, ocasionándose que las columnas se flexionen de manera lateral, una tangente a la base de la columna permanecerá vertical. Si la viga en las partes superiores de las columnas es muy rígida y está rígidamente conectada a las columnas, las tangentes a estas últimas en los nudos permanecerán verticales. Una columna rígidamente conectada arriba y abajo adoptará la forma de una curva S al estar sometida a cargas laterales, como se muestra en la figura 19.9(a).

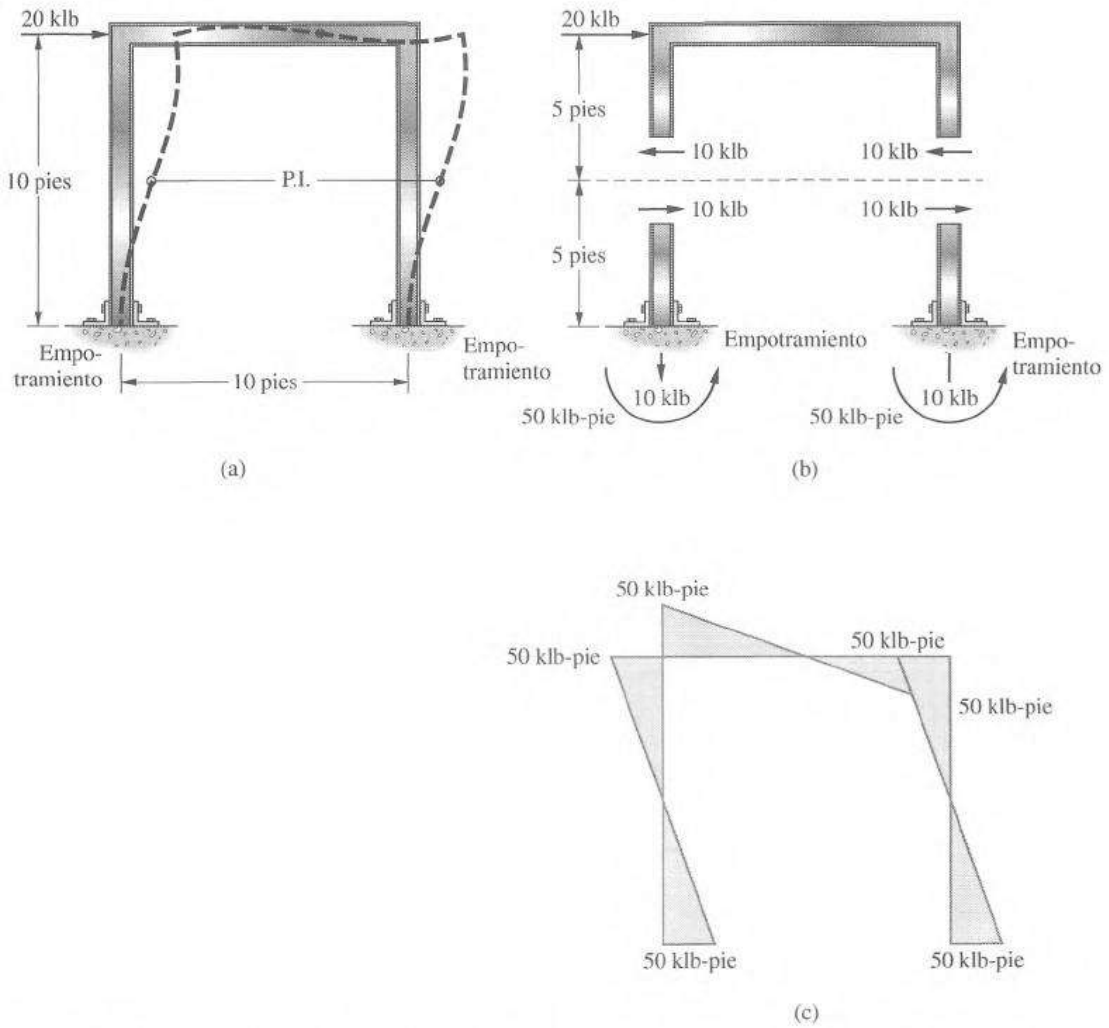


Figura 19.9 Análisis aproximado de un marco en portal con las bases de las columnas empotradas.

A la mitad de la altura de la columna, el momento será cero porque éste cambia de ser un momento que causa tensión en un lado de la columna a ser un momento que causa tensión en el otro lado. Si se suponen puntos de inflexión en cada columna, se tendrán dos de los tres supuestos necesarios, es decir, se dispondrá entonces de dos ecuaciones de suma de momentos.

La tercera suposición que suele hacerse es que la fuerza cortante horizontal se divide de igual manera entre las dos columnas en el plano de contraflexión. Un análisis "exacto" demuestra que ésta es una hipótesis muy razonable, siempre que las columnas sean aproximadamente del mismo tamaño. Si no es así, puede suponerse que la fuerza cortante se distribuye entre ellas según una proporción un poco diferente, en que la columna más rígida toma la mayor cantidad de fuerza cortante. Una buena hipótesis en estos casos es la que consiste en distribuir la fuerza cortante en las columnas en proporción a sus valores I/L^3.

Para analizar el marco en la figura 19.9, la carga lateral de 20 klb se divide en fuerzas cortantes de 10 klb en los puntos de inflexión de las columnas, como se muestra en la figura 19.9(b). Puede calcularse el momento flexionante arriba y abajo de cada columna y es igual a $10 \times 5 = 50$ klb-pie. Se toman entonces momentos respecto al punto de inflexión de la columna izquierda para determinar la reacción vertical derecha como sigue:

$$20(5) - 10V_R = 0$$
$$V_R = 10 \text{ klb} \uparrow$$

Por último, se dibuja el diagrama de momentos con los resultados que se muestran en la figura 19.9(c).

Si las bases de las columnas se suponen simplemente apoyadas, es decir, articuladas, los puntos de contraflexión se presentarán en esas articulaciones. Si se supone que las columnas son del mismo tamaño, la fuerza cortante horizontal se divide de igual manera entre las columnas, y los otros valores se determinan como se muestra en la figura 19.10.

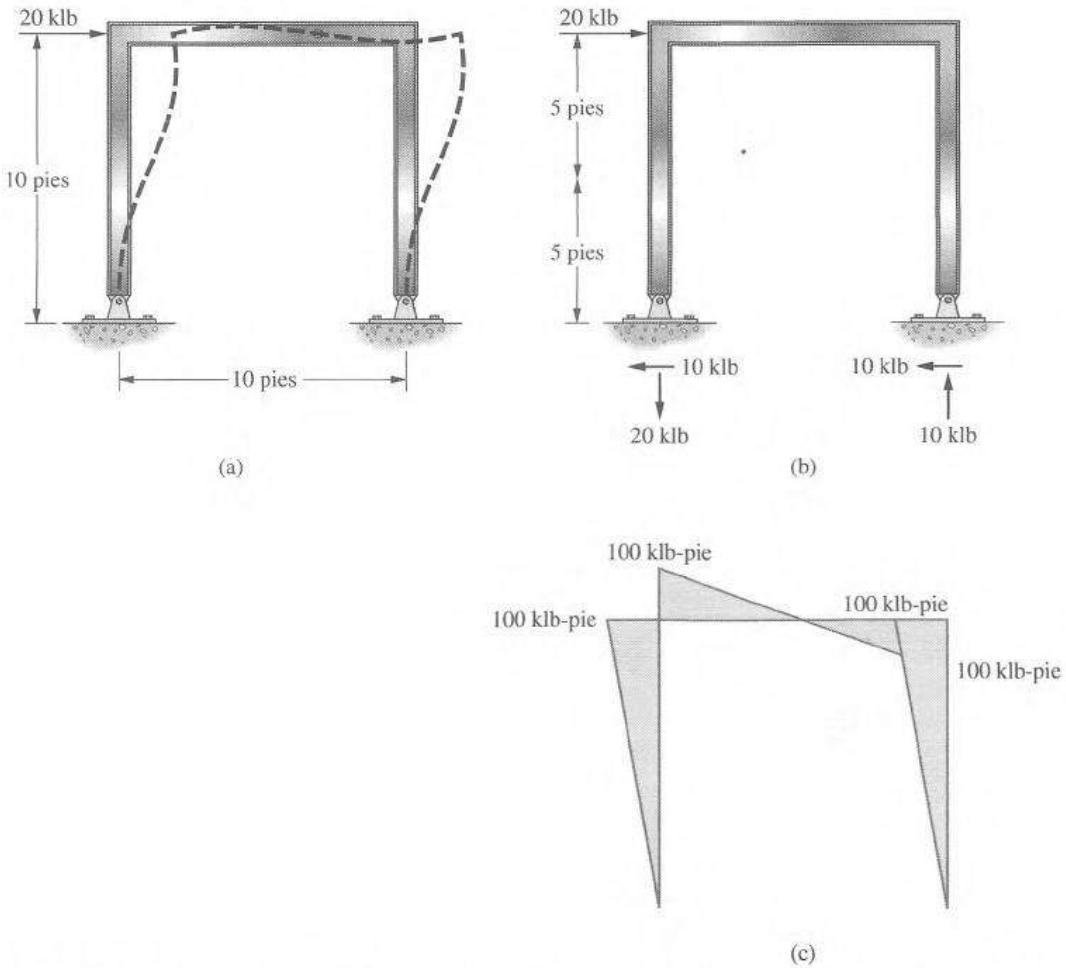


Figura 19.10 Análisis aproximado de un marco en portal con las bases articuladas en sus columnas.

Los principios que hemos analizado aquí pueden aplicarse a otras estructuras independientemente del número de crujías o del número de pisos. Excepto para análisis preliminares, la mayoría de las estructuras no se analizan usando métodos aproximados. La disponibilidad de software de análisis estructural y la rapidez con que se puede usar ha ocasionado que la mayoría de los análisis se realice mediante computadoras.

19.6 ANÁLISIS DE MARCOS DE EDIFICIO PARA CARGAS LATERALES

Los marcos de edificio están sujetos a cargas laterales así como a cargas verticales. La necesidad de una atención cuidadosa a estas fuerzas aumenta a medida que los edificios son más altos. Un

edificio no solamente debe tener suficiente resistencia lateral para evitar la falla, sino que también debe tener suficiente resistencia a las deflexiones para evitar un daño a sus diferentes partes.

Otro aspecto de importancia es proporcionar suficiente rigidez lateral para dar a los ocupantes una sensación de seguridad. Tal vez no tengan esta sensación en edificios altos que tienen una gran cantidad de movimiento lateral en los momentos de viento fuerte. Ha habido casos reales de ocupantes de pisos superiores de edificios altos que se quejan de mareos por el movimiento en días con mucho viento.

Las cargas laterales pueden considerarse mediante las X u otro tipo de arriostramiento, mediante muros de cortante, o mediante conexiones de viento resistentes al momento. En este capítulo se considera solamente el último de estos tres métodos.

Los edificios grandes de marcos rígidos son altamente indeterminados y hasta la década de los 60 su análisis mediante los llamados métodos "exactos" generalmente era impráctico debido a la multitud de ecuaciones que intervienen. El grado total de indeterminación de un edificio de marcos rígidos (internos y externos) puede determinarse considerando que consiste de portales separados. Un nivel de marco rígido de la figura 19.11 se descompone en un conjunto de portales en la figura 19.12. Cada uno de los portales es estáticamente indeterminado en tercer grado, y el grado total de indeterminación de un edificio de marcos rígidos es igual a tres veces el número de portales individuales en el marco.

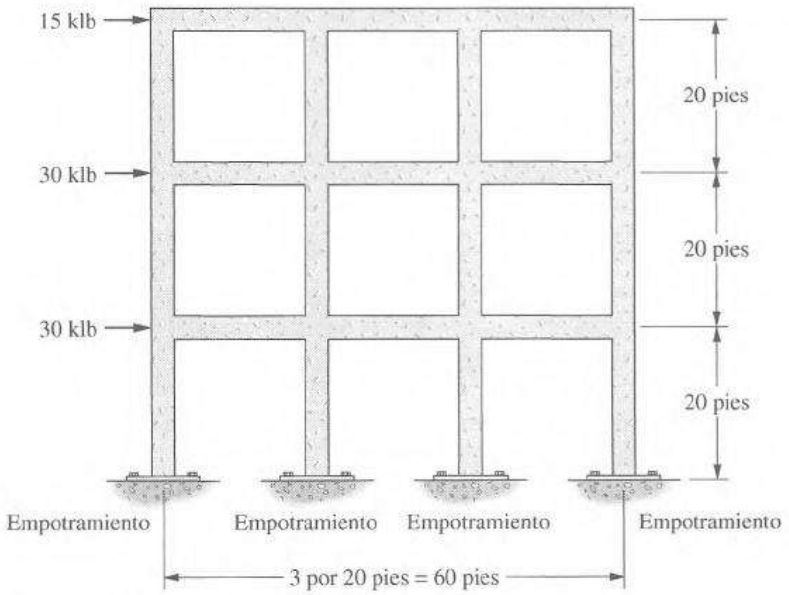


Figura 19.11

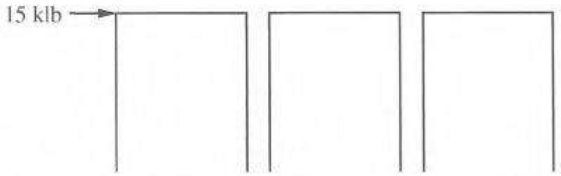


Figura 19.12 Un nivel del marco de la figura 19.11.

Otro método para obtener el grado de indeterminación es suponer que cada una de las trabes se corta con una sección imaginaria. Si se conocen estos valores (fuerza cortante, fuerza axial y momento) para cada trabe, los cuerpos libres producidos pueden analizarse mediante la estática. El grado total de indeterminación es igual a tres veces el número de trabes.

Actualmente estas estructuras por lo general se analizan en forma "exacta" con las computadoras modernas, aunque ocasionalmente se usan los métodos aproximados para el análisis preliminar y el dimensionamiento de los miembros. Los métodos aproximados también proporcionan una revisión de las soluciones de computadora y dan al analista una mejor "percepción" del comportamiento de una estructura, así como de su comprensión de lo que pueda obtener examinando la impresión aparentemente interminable de una computadora.

El marco de edificio de la figura 19.11 se analiza con dos métodos aproximados en las siguientes páginas, y los resultados se comparan con los obtenidos con el programa de computadora SABLE32. Las dimensiones y la carga del marco se seleccionan para ilustrar los métodos que intervienen, al mismo tiempo que los cálculos se conservan tan simples como sea posible. Hay nueve trabes en el marco, dando un grado total de indeterminación de 27, y cuando menos 27 hipótesis serán necesarias para permitir una solución aproximada.

El lector deberá percatarse de que con la disponibilidad de las computadoras digitales actualmente es factible hacer análisis "exactos" en mucho menos tiempo que el requerido para hacer análisis aproximados sin el uso de las computadoras. Los valores más exactos obtenidos permiten el uso de miembros más pequeños. Los resultados del uso de las computadoras ahorran dinero en el tiempo de análisis y en el uso de miembros más pequeños. Es posible analizar en minutos estructuras (tales como edificios altos) que son estáticamente indeterminadas con cientos o aun miles de redundantes, vía el método de desplazamientos. Los resultados para estas estructuras altamente indeterminadas son mucho más exactos y se obtienen de una manera más económica que los obtenidos con análisis aproximados.

Plaza Wachovia, Charlotte, Carolina del Norte. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

Los dos métodos aproximados considerados aquí son los métodos del portal y del voladizo. Estos métodos se usaron en muchos diseños de edificios con tanto éxito que casi se convirtieron en el procedimiento estándar no oficial para la profesión del diseño antes del advenimiento de las computadoras modernas. En ninguno de estos dos métodos se consideran las propiedades elásticas de los miembros. Estas omisiones pueden ser muy graves en marcos asimétricos y en edificios muy altos. Para ilustrar la gravedad del asunto, en edificios muy altos se consideran los cambios de tamaño de los miembros. En un edificio de este tipo probablemente no habrá un cambio muy grande en el tamaño de las vigas desde el piso de la parte superior hasta el piso de la parte inferior. Para las mismas cargas y los mismos claros los tamaños modificados se deberían a los grandes momentos por el viento en los pisos más bajos. Si embargo, el cambio en el tamaño de las columnas de arriba a abajo sería tremendo. El resultado es que los tamaños relativos de las columnas y vigas en los pisos superiores son completamente diferentes de los tamaños relativos en los pisos inferiores. Si no se considera este hecho, se originarán grandes errores en el análisis.

En ambos métodos del portal del voladizo, se supone que las cargas eólicas completas son resistidas por los marcos del edificio, sin ninguna ayuda de rigidez de los pisos, los muros y las particiones. Se supone que los cambios de longitud de las trabes y las columnas son despreciables. Sin embargo, no son despreciables en los edificios altos y esbeltos cuya altura es cinco o más veces la menor dimensión horizontal.

Si la altura de un edificio es aproximadamente cinco o más veces su menor dimensión lateral, generalmente se percibe que deberá usarse un método de análisis más preciso que los métodos del portal o del voladizo. Existen varios métodos aproximados excelentes que hacen uso de las propiedades elásticas de las estructuras y que dan valores que se aproximan mucho a los resultados de los métodos "exactos". Éstos incluyen el método del Factor,[3] el método de Witmer de K porcentajes,[4] y el método de Spurr.[5] Si se desea un método de cálculo manual "exacto", es conveniente el procedimiento de distribución de momentos de los capítulos 20 y 21.

El método del portal

El método aproximado más común para analizar los marcos de edificios para cargas laterales fue alguna vez el método del portal. Debido a su simplicidad, probablemente se usó más que cualquier otro método aproximado para determinar las fuerzas eólicas en los marcos de edificios. Este método, que fue presentado por Albert Smith en el *Journal of the Western Society of Engineers* en abril de 1915, supuestamente fue satisfactorio para la mayoría de los edificios de hasta 25 niveles de altura.[6]

Deben hacerse cuando menos tres hipótesis para cada portal individual o para cada trabe. En el método del portal, el marco se divide teóricamente en portales independientes (figura 19.12) y se formulan las siguientes tres hipótesis:

1. Las columnas se flexionan de tal manera que hay un punto de inflexión a la mitad de la altura (figura 19.9).
2. Las trabes se flexionan de tal manera que hay un punto de inflexión en sus ejes centrales.

[3] C. H. Norris, J. B. Wilbur y S. Utku, *Elementary Structural Analysis*, 3a. ed. (Nueva York, McGraw-Hill, 1976), 207-212.

[4] "Wind Bracing in Steel Buildings", *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 105 (1940): 1725-1727.

[5] *Ibid.*, pp. 1723-1725.

[6] *Ibid.*, p. 1723.

3. Las fuerzas cortantes horizontales en cada nivel se distribuyen arbitrariamente entre las columnas. Una distribución comúnmente usada (y que se ilustra aquí) es suponer que la fuerza cortante se divide entre las columnas según la relación de una parte a las columnas exteriores y dos partes a las columnas interiores. La razón de esta relación puede verse en la figura 19.12. Cada una de las columnas interiores sirve a dos flexiones, mientras que las columnas exteriores sirven solamente a una. Otra distribución común es suponer que la fuerza cortante V tomada por cada columna es proporcional al área de piso que sustenta. La distribución de fuerza cortante por los dos procedimientos sería la misma para un edificio con crujías iguales, pero para uno con crujías desiguales los resultados diferirían del método de área de piso, probablemente dando resultados más realistas.

Para este marco (figura 19.13) hay 27 redundantes; para obtener sus valores, se ha hecho una hipótesis en cuanto a la posición del punto de inflexión para cada una de las 21 columnas y trabes. Se hacen tres hipótesis para cada nivel en cuanto a la fuerza cortante que se divide en cada portal individual, o el número de hipótesis de fuerza cortante es igual a uno menos el número de columnas para cada nivel. Para el marco, se hacen 9 hipótesis de fuerza cortante, dando un total de 30 hipótesis y sólo 27 redundantes. Se hacen más hipótesis que las necesarias, pero son consistentes con la solución (es decir, si solamente se usaron 27 de las hipótesis y los valores restantes se obtuvieron por estática, los resultados serían idénticos).

Análisis de marcos

El marco de la figura 19.13 se analiza sobre la base de estas hipótesis. Las flechas mostradas en la figura dan la dirección de las fuerzas cortantes en las trabes y de las fuerzas axiales en las columnas. El lector puede visualizar la condición de esfuerzos del marco si supone que el viento tiende a empujarlo de izquierda a derecha, alargando las columnas exteriores izquierdas y comprimiendo las columnas exteriores derechas. Brevemente, los cálculos se hicieron como sigue.

1. Fuerzas cortantes en las columnas

Primero se obtuvieron las fuerzas cortantes en cada columna de los diferentes niveles. La fuerza cortante total en el nivel superior es de 15 klb. Como hay dos columnas exteriores y dos interiores puede escribirse la siguiente expresión:

$$x + 2x + 2x + x = 15 \text{ klb}$$
$$x = 2.5 \text{ klb}$$
$$2x = 5.0 \text{ klb}$$

La fuerza cortante en la columna CD es 2.5 klb; en GH es 5.0 klb, etc. En forma similar, las fuerzas cortantes se determinaron para las columnas en el primero y el segundo niveles, donde las fuerzas cortantes totales son 75 y 45 klb, respectivamente.

2. Momentos en las columnas

Se supone que las columnas tienen puntos de inflexión a la mitad de su altura; por lo tanto, sus momentos, superior e inferior, son iguales a las fuerzas cortantes en las columnas multiplicadas por la mitad de las alturas de las columnas.

3. Momentos y fuerzas cortantes de las trabes

Para cualquier nudo del marco la suma de los momentos en las trabes es igual a la suma de los momentos en las columnas. Los momentos de las columnas han sido determinados previamente. Comenzando en la esquina superior izquierda del marco y trabajando de izquierda a derecha, su-

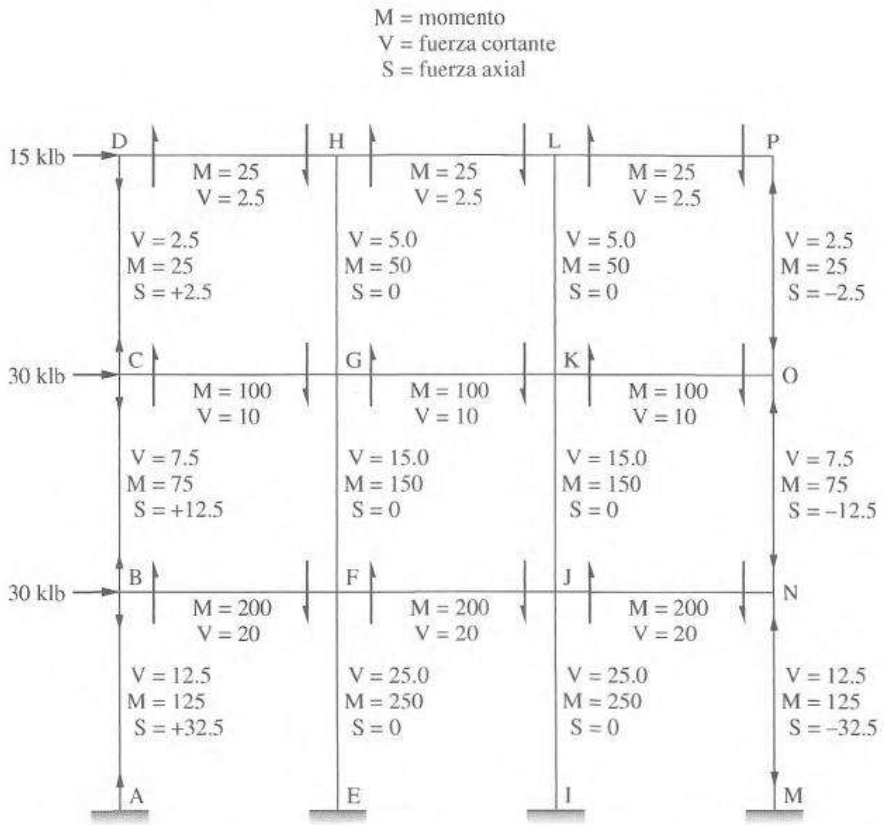


Figura 19.13 Marco de edificio analizado por el método del portal para cargas laterales.

mando o restando los momentos según sea el caso, los momentos de las trabes se encontraron en este orden: DH, HL, LP, CG, GK, etc. Se concluye que con puntos de inflexión en los ejes centrales de las trabes, las fuerzas cortantes en las trabes son iguales a los momentos de las trabes divididos por la semilongitud de las trabes.

4. Fuerzas axiales en las columnas

Las fuerzas axiales en las columnas pueden obtenerse directamente de las fuerzas cortantes de las trabes. Comenzando en la esquina superior izquierda, la fuerza axial en la comuna en CD es numéricamente igual a la fuerza cortante en la trabe DH. La fuerza axial en la columna GH es igual a la diferencia entre las dos fuerzas cortantes de las trabes DH y HL, que es igual a cero en este caso. (Si el ancho de cada uno de los portales es el mismo, las fuerzas cortantes en la trabe en un nivel serán iguales, y las columnas interiores no tendrán fuerza axial, ya que solamente se consideran cargas laterales.)

El método del voladizo

Otro método simple para analizar los marcos de edificios para las fuerzas laterales es el método del voladizo presentado por A. C. Wilson en *Engineering Record*, 5 de septiembre de 1908. Se dice que este método es un poco más deseable para edificios altos y estrechos que el método del portal y se usó satisfactoriamente para edificios con alturas que no excedieran de 25 a 35 niveles.[7] No fue tan popular como el método del portal.

[7] *Ibid*, p. 1723.

El método del señor Wilson hace uso de las hipótesis que usa el método del portal, en cuanto a la posición de los puntos de inflexión en las columnas y las trabes, pero la tercera hipótesis difiere un poco. Más que suponer que la fuerza cortante para un nivel específico se divide entre las columnas según una cierta relación, se considera que la fuerza axial en cada columna es proporcional a su distancia desde el centro de gravedad de todas las columnas para ese nivel. Si se supone que las columnas de cada nivel tienen áreas transversales iguales (como se hace para los problemas de voladizos en este capítulo) entonces sus fuerzas varían proporcionalmente a sus distancias desde el centro de gravedad. Las cargas eólicas tienden a voltear al edificio, y se comprimirán las columnas en el lado de sotavento, mientras que aquéllas en el lado de barlovento serán sometidas a tensión. Entre mayor sea la distancia de una columna al centro de gravedad de su grupo de columnas, será mayor su esfuerzo axial.

Esta hipótesis es equivalente a hacer varias hipótesis de fuerza axial iguales a uno menos el número de columnas en cada nivel. Nuevamente, la estructura tiene 27 redundantes, y se hacen 30 hipótesis (21 hipótesis del punto de inflexión en la columna y en la trabe y 9 hipótesis de fuerzas axiales en la columna), pero las hipótesis adicionales son consistentes con la solución.

Análisis de marcos

El marco previamente analizado por el método del portal se analiza por método del voladizo en la figura 19.14. Brevemente, los cálculos se hacen como sigue.

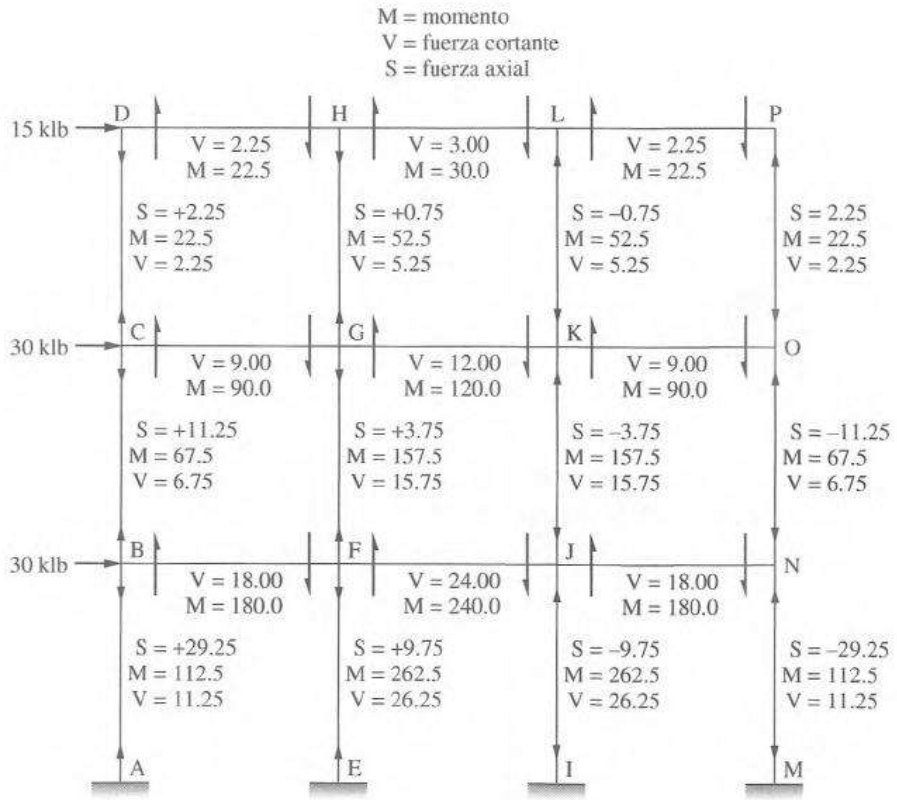


Figura 19.14 Marco de edificio analizado por el método del voladizo para fuerzas laterales.

1. Fuerzas axiales en las columnas

Considerando primero el nivel superior, se toman momentos alrededor del punto de contraflexión en la columna CD de las fuerzas arriba del plano de contraflexión a través de las columnas en ese nivel. De acuerdo con la tercera hipótesis, la fuerza axial en GH será solamente de un tercio de la de CD, y estas fuerzas en GH y CD serán de tensión, mientras que aquéllas en KL y OP serán de compresión. Se escribe la siguiente expresión, con respecto a la figura 19.15 para determinar los valores de las fuerzas axiales en las columnas en el nivel superior.

$$(15)(10) + (1S)(20) - (1S)(40) - (3S)(60) = 0$$

$$S = 0.75 \text{ klb}$$

$$3S = 2.25 \text{ klb}$$

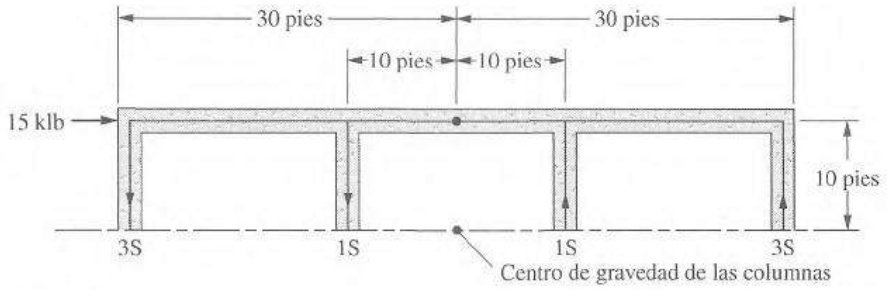


Figura 19.15

La fuerza axial en CD es 2.25 klb y aquélla en GH es 0.75 klb, etc. Se hacen cálculos similares de momentos para cada nivel para obtener las fuerzas axiales en las columnas.

2. Fuerzas cortantes en las trabes

El siguiente paso es obtener las fuerzas cortantes en las trabes a partir de las fuerzas axiales en las columnas. Estas fuerzas cortantes se obtienen comenzando en la esquina superior izquierda y trabajando a través del nivel superior, sumando o restando las fuerzas axiales en las columnas de acuerdo con sus signos. Este procedimiento es similar al método de los nudos que se usa para encontrar las fuerzas en una armadura.

3. Momentos de columnas y de trabes y fuerzas cortantes en las columnas

Los pasos finales pueden resumirse rápidamente. Los momentos en las trabes, como antes, son iguales a las fuerzas cortantes en las trabes multiplicadas por la semilongitud de las trabes. Los momentos de las columnas se obtienen comenzando en la esquina superior izquierda y trabajando a través de cada nivel en sucesión, sumando o restando los momentos de columnas y trabes previamente obtenidos como se indica. Las fuerzas cortantes de las columnas son iguales a los momentos de las columnas divididos entre la semialtura de la altura de las columnas.

19.7 ANÁLISIS APROXIMADO DE MARCOS COMPARADOS CON EL ANÁLISIS "EXACTO" POR SABLE32

La tabla 19.2 compara los momentos en los miembros de este marco como se determinan por los dos métodos aproximados y por SABLE32.

TABLA 19.2 MOMENTOS EN LOS MIEMBROS

Miembro	Portal	Voladizo	SABLE32	Miembro	Portal	Voladizo	SABLE32
AB	125	112.5	258.3	IJ	250	262.5	222.6
BA	125	112.5	148.9	JI	250	262.5	161.6
BC	75	67.5	57.4	JF	200	240	162.6
BF	200	180	206.3	JK	150	157.5	140.6
CB	75	67.5	100.7	JN	200	180	139.6
CD	25	22.5	7.1	KJ	150	157.5	146.4
CG	100	90	93.6	KG	100	120	114.5
DC	25	22.5	20.8	KL	50	52.5	54.2
DH	25	22.5	20.8	KO	100	90	86.1
EF	250	262.5	250.3	LK	50	52.5	71.9
FE	250	262.5	185.6	LH	25	30	47.4
FB	200	180	161.6	LP	25	22.5	24.5
FG	150	157.5	142.4	MN	125	112.5	179.8
FJ	200	240	166.3	NM	125	112.5	92.9
GF	150	157.5	152.4	NJ	200	180	165.5
GC	100	90	82.2	NO	75	67.5	72.7
GH	50	52.5	43.9	ON	75	67.5	87.4
GK	100	120	114.1	OK	100	90	103.1
HG	50	52.5	63.2	OP	25	22.5	15.6
HD	25	22.5	18.0	PO	25	22.5	37.4
HL	25	30	45.2	PL	25	22.5	37.4

Observe que para varios miembros los resultados aproximados varían considerablemente de los resultados obtenidos por el método "exacto". La experiencia con los métodos "exactos" para manejar los marcos de edificio indeterminados mostrará que los puntos de inflexión no ocurrirán exactamente en los puntos medios. El uso de posiciones más realistas para los puntos supuestos de inflexión mejorará los resultados en gran medida. El método de Bowman[8] incluye la posición de los puntos de inflexión en las columnas y trabes de acuerdo con un conjunto especificado de reglas, dependiendo del número de niveles en el edificio. Además, la fuerza cortante se divide entre las columnas de cada nivel de acuerdo con un conjunto de reglas que se basan en los momentos de inercia de las columnas, así como en los anchos de crujía. La aplicación del método de Bowman da resultados mucho mejores que los procedimientos del portal y del voladizo.

19.8 DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS

El método de distribución de momentos descrito en los capítulos 20 y 21 para el análisis de vigas y de marcos estáticamente indeterminados implica ciclos sucesivos de cálculo, en los que cada ciclo se acerca cada vez más a las respuestas "exactas". Cuando los cálculos se prolongan hasta que los cambios en los números son muy pequeños, el método se considera como un método "exacto" de análisis. Si el número de ciclos se limita, el método resulta ser un excelente método aproximado. Como tal, se estudia en la sección 20.5 del capítulo siguiente.

19.9 ANÁLISIS DE "ARMADURAS" VIERENDEEL

En los capítulos anteriores definimos una armadura como una estructura formada por un grupo de tirantes y de puntales conectados en sus nudos por medio de pasadores sin fricción, de manera que

[8] H. Sutherland y H. L. Bowman, *Structural Theory* (Nueva York: Wiley, 1950), 295-301.

los miembros quedan sometidos sólo a tensión o compresión axial. Un tipo especial de armadura es la "armadura" Vierendeel (no es realmente una armadura según la definición anterior). Un ejemplo típico de una armadura Vierendeel se muestra en la figura 19.16. Puede verse aquí que son en realidad marcos rígidos o, como algunos dicen, trabes con grandes agujeros en ellas. La armadura Vierendeel fue desarrollada en 1893 por el ingeniero y constructor belga Arthur Vierendeel. Se emplea con bastante frecuencia en Europa, especialmente en Bélgica para puentes de carreteras y de ferrocarril, pero sólo en forma ocasional en Estados Unidos.

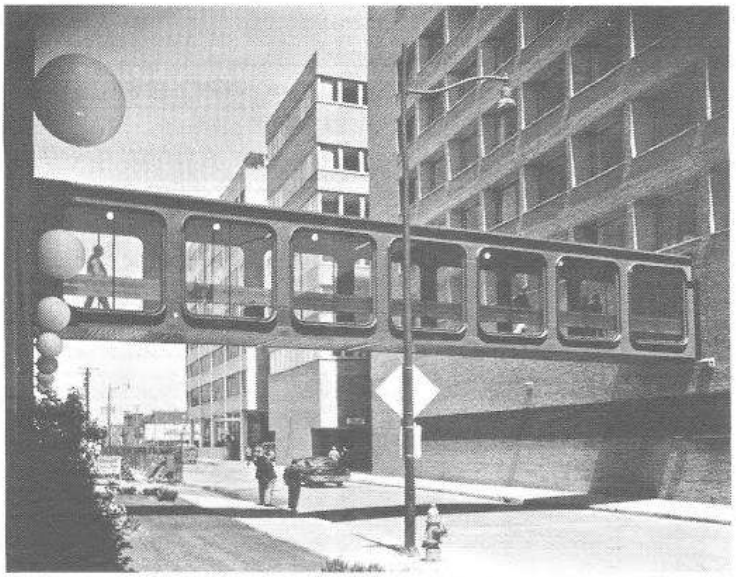


Figura 19.16 Un ejemplo de una armadura Vierendeel (puente peatonal Clinic Inn en Cleveland, Ohio, cortesía del American Institute of Steel Construction, Inc.)

Las armaduras Vierendeel en general se construyen con concreto reforzado, pero también pueden fabricarse con acero estructural. Las cargas externas son soportadas por medio de la resistencia a flexión de los miembros cortos y robustos. Los nudos continuos resistentes a momento ocasionan que las "armaduras" sean altamente indeterminadas en forma estática. No obstante que las armaduras Vierendeel son algo ineficientes, éstas se usan, debido a su buen aspecto, en ciertas situaciones donde se desea tener grandes vanos libres. Además, son particularmente adecuadas en edificios donde pueden construirse con peraltes iguales a las alturas de los pisos.

Estas estructuras altamente hiperestáticas pueden analizarse en forma aproximada con los métodos del portal o del voladizo descritos en la sección precedente. La figura 19.17 muestra una armadura Vierendeel (muy similar a la mostrada en la figura 19.16) y los resultados obtenidos al aplicar el método del portal. Para esta "armadura" simétrica, el método del voladizo dará los mismos resultados. Para seguir los cálculos, gire la estructura sobre su extremo porque la fuerza cortante considerada para la Vierendeel es vertical, en tanto que en las estructuras que se analizaron antes era horizontal. Como la armadura es simétrica, los resultados se muestran sólo para una mitad de la armadura.

En muchas estructuras Vierendeel, sobre todo en las de varios pisos, los miembros horizontales inferiores pueden ser mucho más grandes y rígidos que los otros miembros horizontales. Para obtener mejores resultados con los métodos del portal o del voladizo, se debe tener en cuenta la falta de uniformidad de las dimensiones, suponiendo que la mayor parte de la fuerza cortante es tomada por los miembros más rígidos.

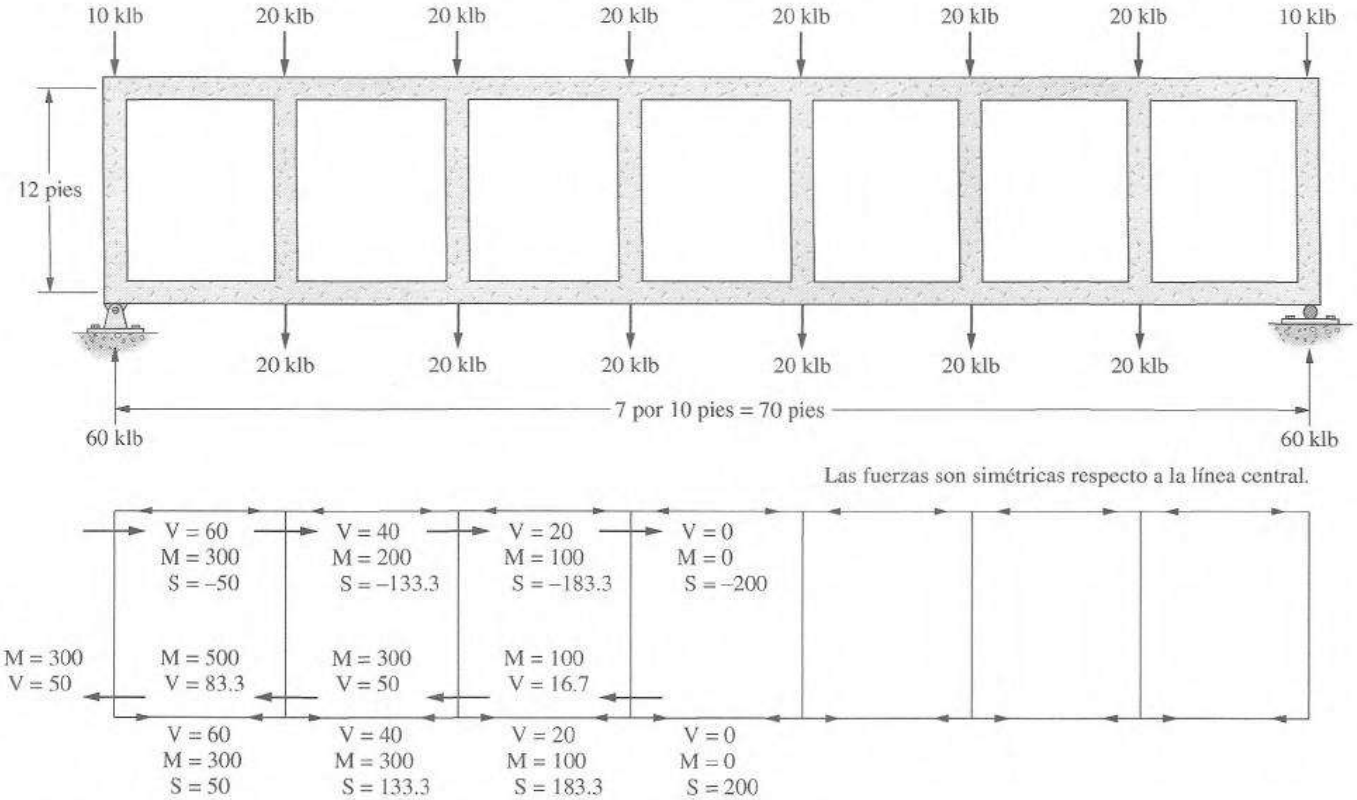
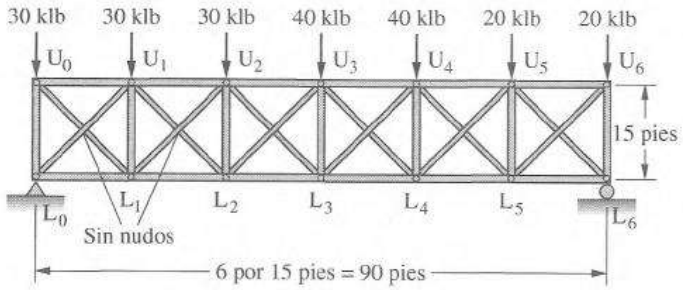


Figura 19.17 Análisis de una armadura Vierendeel usando el método del portal.

19.10 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

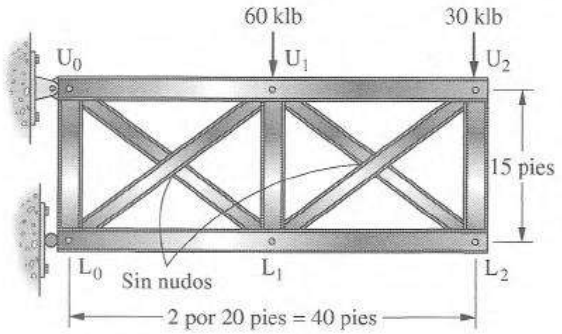
19.1 Calcule las fuerzas en los miembros de la armadura que se muestra en la figura, considerando que las diagonales no son capaces de tomar compresiones. (*Resp.:* $U_0U_1 = -81.67$ klb, $L_2L_3 = +133.34$ klb, $U_3L_3 = -21.67$ klb.)



19.2 Resuelva el problema 19.1 considerando que las diagonales en compresión pueden resistir la mitad de la fuerza cortante en cada tablero.

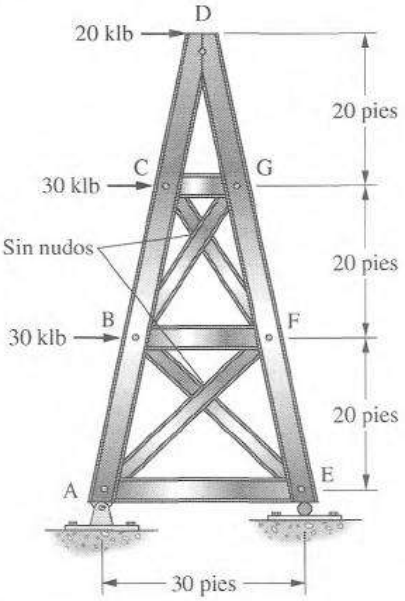
19.3 Resuelva el problema 19.1 considerando que las diagonales en compresión pueden resistir un tercio de la fuerza cortante en cada tablero. (*Resp.:* $U_0U_1 = -54.55$ klb, $L_1L_2 = +98.89$ klb.)

19.4 Calcule las fuerzas en los miembros de la armadura en voladizo considerando que las diagonales no pueden tomar compresión.

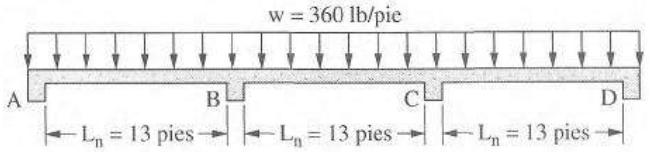


19.5 Resuelva el problema 19.4 considerando que las diagonales que estarían normalmente en compresión pueden resistir sólo un tercio de la fuerza cortante en cada tablero. (*Resp.:* $U_1U_2 = +13.33$ klb, $U_1L_1 = -50$ klb.)

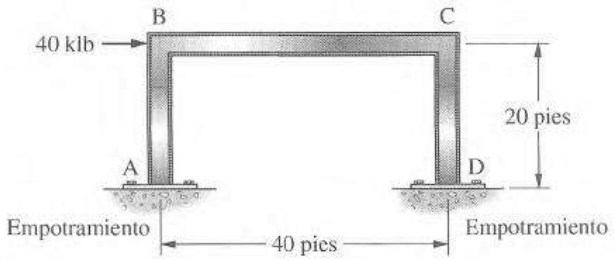
19.6 Calcule las fuerzas en los miembros de la armadura que se muestra, considerando que las diagonales interiores que normalmente trabajarían en compresión no pueden resistir compresión.



19.7 Se desea preparar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga continua que aquí se muestra usando los coeficientes ACI de la tabla 19.1. Suponga que la viga está construida monolíticamente con las trabes en todos sus soportes. Dibuje los diagramas de momentos como envolventes. (*Resp.:* $M_{AB} = -2\,535$ pie-lb, $M_{CD} = -6\,084$ pie-lb.)



19.8 Analice el portal que aquí se muestra considerando que los puntos de inflexión están localizados a la mitad de la altura de las columnas y a la mitad del claro de la viga.

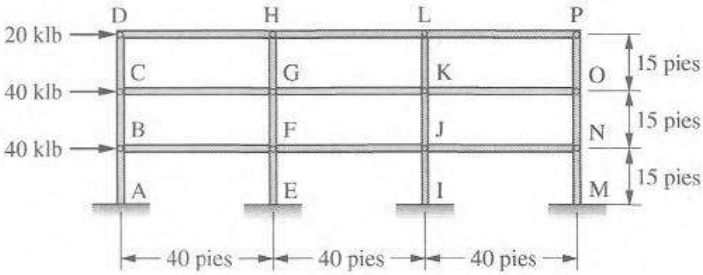


19.9 Resuelva el problema 19.8 suponiendo que los puntos de inflexión están localizados 8 pies arriba de las bases de las columnas. (*Resp.:* $M_{AB} = 160$ klb-pie, $M_{CB} = 240$ klb-pie.)

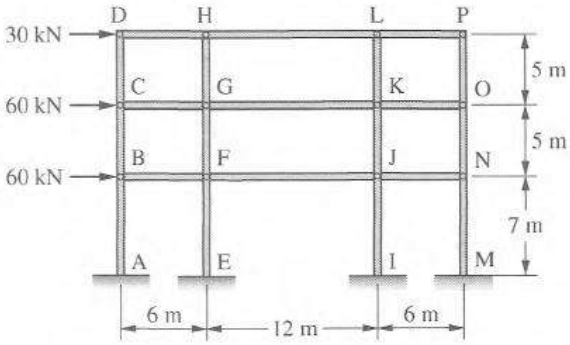
19.10 Resuelva el problema 19.8 suponiendo que las bases de las columnas están articuladas y que los puntos de inflexión se localizan ahí mismo.

En los problemas 19.11 a 19.14 calcule los momentos flexionantes, las fuerzas cortantes y las fuerzas axiales en todos los miembros de los marcos mostrados usando el método del portal. Se supone que todos los nudos son rígidos.

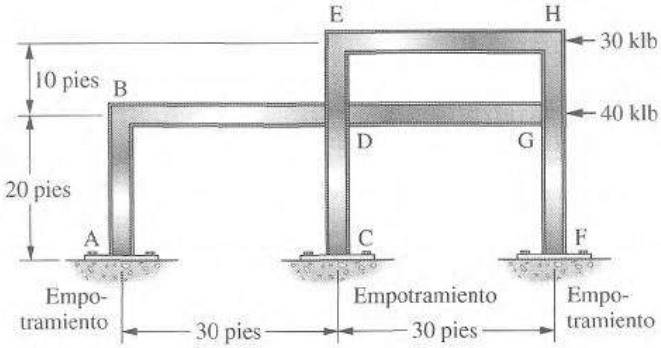
19.11 (*Resp.:* $M_{CD} = 25$ klb-pie, $M_{GF} = 150$ klb-pie, $M_{JI} = 250$ klb-pie.)



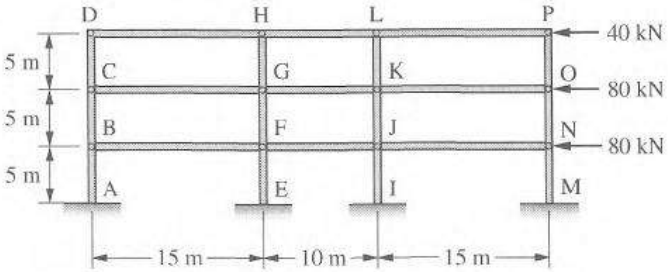
19.12



19.13 (*Resp.:* $M_{AB} = 175$ klb-pie, $S_{FG} = +21.67$ klb.)

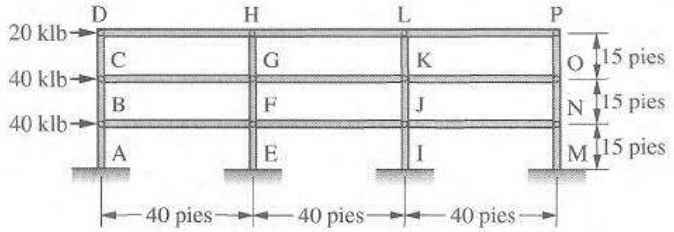


19.14



En los problemas 19.15 al 19.17 analice los marcos con nudos rígidos usando el método del voladizo.

19.15 (*Resp.:* $M_{BC} = 67.5$ klb-pie, $V_{NM} = 15.00$ klb.)

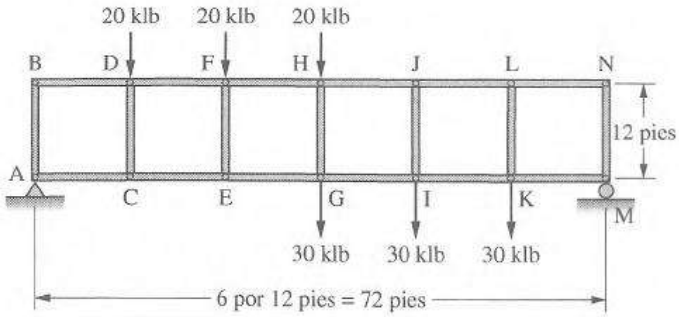


19.16 Resuelva el problema 19.12 considerando que las bases de las columnas están articuladas.

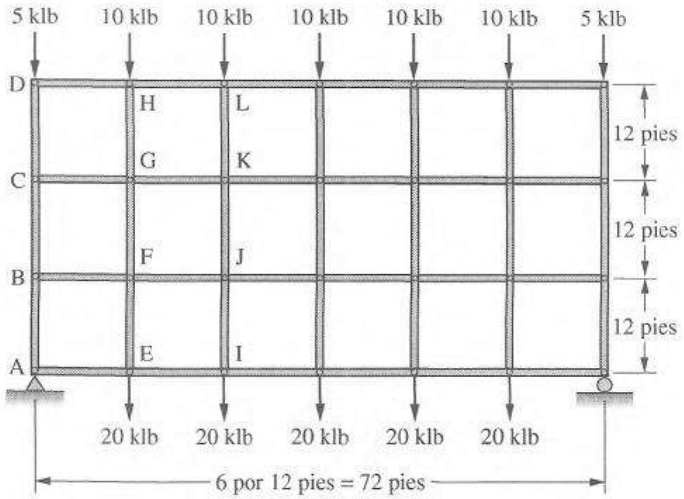
19.17 Repita el problema 19.13. (*Resp.:* $M_{AB} = 250$ klb-pie, $M_{FG} = 100$ klb-pie.)

En los problemas 19.18 y 19.19 calcule los momentos flexionantes, las fuerzas cortantes y las fuerzas axiales en todos los miembros de las armaduras Vierendeel con nudos rígidos usando el método del portal.

19.18



19.19 (*Resp.:* $M_{BC} = 75$ klb-pie, $M_{KL} = 60$ klb-pie.)



19.20 Repita el problema 19.11 usando SABLE32. Suponga que los miembros del marco tienen áreas, módulos de elasticidad y momentos de inercia constantes.

Capítulo 20

Distribución de momentos en vigas

20.1 INTRODUCCIÓN

En 1929[1, 2] y 1930[3], el extinto profesor Hardy Cross escribió artículos acerca del método de distribución de momentos, luego de haber enseñado ese procedimiento a sus alumnos en la Universidad de Illinois desde el año de 1924. Sus artículos señalaron el comienzo de una nueva época en el análisis de marcos estáticamente indeterminados, dando un mayor impulso a su uso. El método de la distribución de momentos aplicado a vigas continuas y a marcos implica un poco más de trabajo que los métodos aproximados, pero proporciona una exactitud equivalente a la lograda con los métodos clásicos "exactos" mucho más laboriosos.

En los capítulos anteriores, el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas comprendió la solución de ecuaciones simultáneas. Estas ecuaciones no son necesarias en la aplicación del método de la distribución de momentos, excepto en raras situaciones, como en el caso de marcos complicados. El método que desarrolló Cross comprende ciclos de cálculos sucesivos que van aproximando los resultados hacia la respuesta "exacta". Las operaciones pueden suspenderse después de dos o tres ciclos, dando un análisis aproximado muy satisfactorio, o bien, pueden continuarse hasta alcanzar la precisión deseada. Cuando se consideran estas ventajas a la luz del hecho de que la precisión obtenida mediante los laboriosos procedimientos "clásicos" suele ser de valor cuestionable, se comprende la gran utilidad de este método práctico y rápido.

Entre 1930 y 1960, el método de la distribución de momentos fue el más usado para el análisis de vigas continuas y de marcos. Sin embargo, desde 1960 se ha incrementado en forma extraordinaria el uso de computadoras para el análisis de todo tipo de estructuras. Las computadoras son extremadamente eficientes para resolver las ecuaciones simultáneas que se generan mediante otros métodos de análisis. Por lo general, el software se basa en el análisis matricial descrito en los capítulos 22 a 25 de este texto.

Aun con el software de computadora disponible, el método de la distribución de momentos sigue siendo el más importante de los métodos "manuales" para analizar vigas continuas y marcos. El ingeniero de estructuras puede efectuar con él, rápidamente, análisis aproximados para

[1] Hardy Cross, "Continuity as a Factor in Reinforced Concrete Design", *Proceedings of the American Concrete Institute*, Vol. 25 (1929), pp. 669-708.

[2] Hardy Cross, "Simplified Rigid Frame Design", Report of Committee 301, *Proceedings of the American Concrete Institute*, Vol. 26 (1929), pp. 170-183.

[3] Hardy Cross, "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments", *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 56, No. 5 (mayo de 1930): pp. 919-928. También, *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 96 (1932), pp. 1-10.

diseños preliminares, y también puede comprobar los resultados de la computadora, lo que es muy importante. Además, el método de distribución de momentos puede ser el único que se use para el análisis de estructuras pequeñas.

El atractivo del método de distribución de momentos estriba en su sencillez teórica y de aplicación. Cualquier persona podrá comprender rápidamente los principios básicos y entender con claridad en qué consiste el procedimiento. En el análisis que sigue se han hecho ciertas hipótesis. Éstas son:

1. Las estructuras tienen miembros de sección transversal constante en toda su longitud, es decir, los miembros son prismáticos.
2. Los nudos en que dos o más miembros se conectan no se trasladan.
3. Los nudos en que los miembros se conectan pueden girar, pero los extremos de todos los miembros conectados a un nudo giran la misma cantidad que el nudo. En un nudo no hay rotación de los extremos de los miembros entre sí o con respecto al nudo.
4. La deformación axial de los miembros se desprecia.

"El rascacielos horizontal" curvo más grande en Estados Unidos, Boston, Massachusetts. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

Considerando el marco de la figura 20.1(a), los nudos A a D están fijos contra desplazamiento. Sin embargo, el nudo E no está fijo, y las cargas sobre la estructura ocasionan que gire ligeramente, tal como lo representa el ángulo θ_E en la figura 20.1(b).

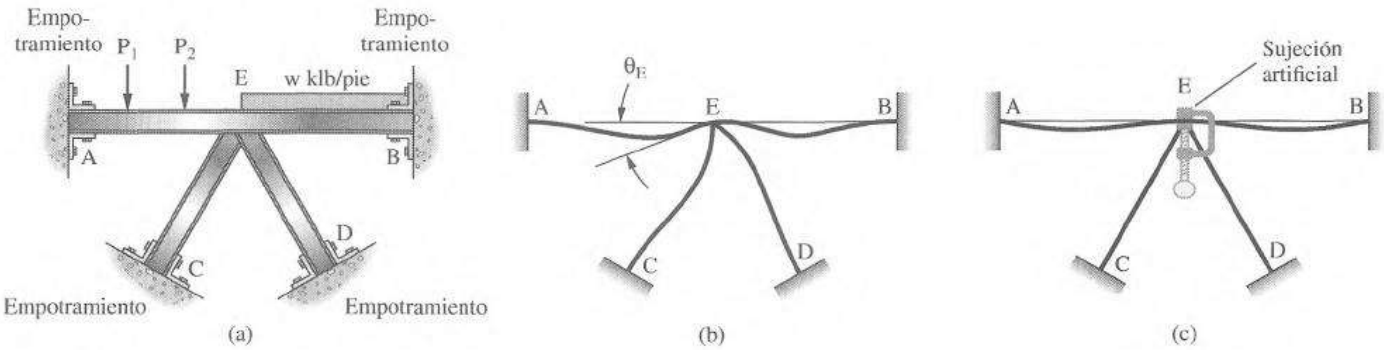


Figura 20.1

Si se aplica una sujeción imaginaria en E, fijándola de manera que no pueda girar, la estructura bajo carga tomará la forma mostrada en la figura 20.1(c). Cuando los extremos de todos los miembros están fijos contra rotación de esta manera, los momentos de empotramiento pueden calcularse con poca dificultad mediante las expresiones acostumbradas ($wL^2/12$ para cargas uniformes y Pab^2/L^2 o Pa^2b/L^2 para cargas concentradas) como se muestra en la figura 20.4 y en el forro interior de la cubierta del libro.

Si la sujeción en E se elimina, el nudo rotará un poco, flexionando los extremos de los miembros que concurren en él, lo cual origina una redistribución de los momentos en los extremos de los miembros. Los cambios en los momentos o las rotaciones en el extremo E de los miembros AE, BE, CE y DE causan cierto efecto en el otro extremo de esos miembros. Cuando en el extremo de una barra se aplica un momento estando empotrado el otro extremo, existe cierto efecto de *transporte* del momento aplicado hacia el extremo fijo.

Una vez calculados los momentos de empotramiento, el proceso de distribución de momentos puede enunciarse brevemente como el cálculo de (1) los momentos causados en el extremo E de los miembros por la rotación del nudo E, (2) la magnitud de los momentos transportados a los otros extremos de los miembros y (3) la suma o resta de estos últimos momentos a los momentos originales de empotramiento.

Estos pasos pueden expresarse simplemente como la suma de los momentos de empotramiento más los momentos debidos a la rotación del nudo E.

$$M = M_{fijo} + M_{\theta E}$$

20.2 RELACIONES BÁSICAS

Existen dos cuestiones que deben evaluarse antes de aplicar el método de distribución de momentos en el análisis de estructuras. Esas cuestiones son las siguientes:

1. ¿Cuál es el valor del momento desarrollado o transportado al extremo fijo de un miembro cuando en el otro extremo actúa un momento determinado?
2. Cuando una junta se libera y gira, ¿cómo es la distribución del momento desequilibrado sobre los miembros estructurales que concurren en el nudo?, o bien, ¿qué valor de momento resistente proporciona cada barra?

Momento transportado

Para determinar el momento transportado se considerará la viga sin carga y de sección transversal constante, que se muestra en la figura 20.2(a). Si se aplica un momento M_1 al extremo izquierdo de

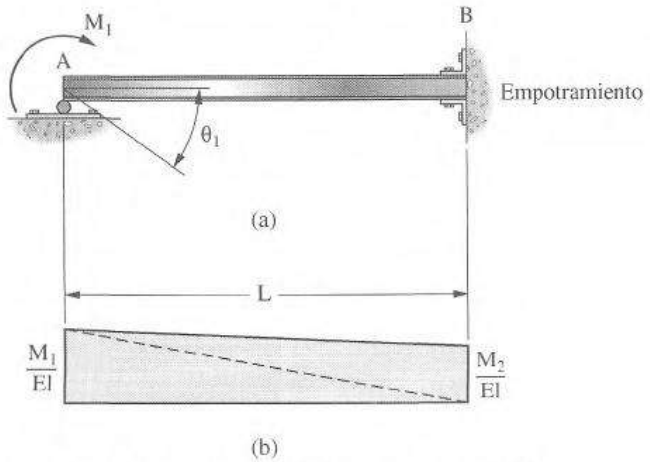


Figura 20.2 Concepto de momento transportado.

la viga, en el extremo derecho será desarrollado un momento M_2. El extremo izquierdo es un nudo que se ha liberado y el momento M_1 producirá en él un giro θ_1. Sin embargo, no ocurrirá ninguna deflexión o desplazamiento del extremo izquierdo respecto del derecho.

Puede utilizarse el segundo teorema del área del diagrama de momento para determinar la magnitud de M_2. La deflexión de la tangente a la curva elástica de la viga en el extremo izquierdo con respecto a la tangente en el extremo derecho (que permanece horizontal) es igual al momento estático del área del diagrama de M/EI, tomado con respecto al extremo izquierdo, pero esa desviación es igual a cero. A partir del diagrama de M/EI de la figura 20.2(b), y después de dividirlo en dos triángulos para facilitar el cálculo del área, puede escribirse la siguiente expresión y luego despejar M_2:

$$\delta_A = \frac{\frac{1}{2}M_1L\left(\frac{1}{3}L\right) + \frac{1}{2}M_2L\left(\frac{2}{3}L\right)}{EI} = 0$$

$$\frac{M_1L^2}{6EI} + \frac{M_2L^2}{3EI} = 0$$

$$M_2 = -\frac{1}{2}M_1$$

Un momento aplicado en un extremo de una viga prismática empotrada en el otro extremo, transmitirá a este último un momento de magnitud igual a la mitad del valor del primero y de signo contrario. El factor de transporte es $-\frac{1}{2}$. El signo menos obedece a la convención de signos adoptada en resistencia de materiales: un momento distribuido actuante en un extremo y que produzca tensión en las fibras inferiores se transmitirá de manera que origine tensión en las fibras superiores en el otro extremo. El estudio de las figuras 20.2 y 20.3 permite ver que un factor de transporte de $\frac{1}{2}$, utilizado de acuerdo con la convención de signos para la distribución de momentos (lo que se estudia en la sección 20.4), automáticamente considera esta situación, de manera que no es necesario cambiar el signo en cada transporte.

Factores de distribución

Por lo general, los elementos estructurales conectados en un nudo tienen diferente rigidez a la flexión. Cuando un nudo se libera y comienza a girar debido al momento desequilibrado, la resistencia a la rotación varía de miembro a miembro. El problema consiste en determinar qué parte del momento de desequilibrio tomará cada uno de los elementos. Parece lógico suponer que el momento desequilibrado será resistido en razón directa a la respectiva resistencia a la rotación en el extremo de cada elemento.

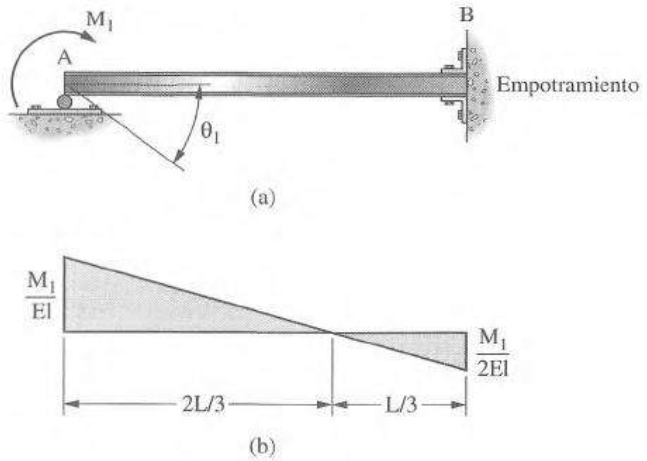


Figura 20.3 Momento transportado.

La viga y el diagrama de M/EI de la figura 20.2 se reproducen en la figura 20.3, con las relaciones apropiadas entre M_1 y M_2; a continuación se tiene una expresión para la magnitud del giro originado por el momento M_1.

Si se utiliza el primer teorema del área del diagrama de momento, el giro θ_1 puede representarse por el área del diagrama de M/EI entre A y B, permaneciendo horizontal la tangente en B:

$$\theta_1 = \frac{\frac{1}{2}M_1\left(\frac{2}{3}\right)L - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)M_1\left(\frac{1}{3}\right)L}{EI}$$

$$\theta_1 = \frac{M_1 L}{4EI}$$

Al suponer que todos los elementos son del mismo material, con el mismo valor de E, las únicas variables en la ecuación anterior que afectan la magnitud de la rotación en el extremo son los valores I y L. El giro que se presenta en el extremo de un elemento varía, como es obvio, en razón directa al valor de L/I del elemento. Cuanto mayor sea la rotación de una barra, menor será el momento que soporte. El momento resistido varía en razón inversa a la magnitud de la rotación, o bien, directamente con la cantidad I/L. Este último valor recibe el nombre de *factor de rigidez K*.

$$K = \frac{I}{L}$$

Para determinar el momento desequilibrado que toma cada uno de los elementos concurrentes en un nudo, se suman los factores de rigidez para dicho nudo y se supone que cada barra resiste una parte del momento desequilibrado igual a su valor K dividido entre la suma de todos los valores K en el nudo. Estas proporciones del momento de desequilibrio total resistidas por cada uno de los elementos son los *factores de distribución*.

20.3 DEFINICIONES

Los términos siguientes se emplean constantemente al exponer el método de la distribución de momentos.

Momentos de empotramiento perfecto

Cuando todos los nudos de una estructura se fijan en forma tal que no puede ocurrir ninguna rotación en ellos, las cargas externas originan ciertos momentos en los extremos de las barras a las que esas cargas están aplicadas. Esos momentos se denominan momentos de empotramiento perfecto. La figura 20.4 presenta los momentos de empotramiento para diferentes condiciones de carga.

Momentos de desequilibrio

Los nudos de una estructura se consideran inicialmente fijos. Cuando un nudo se libera, éste rotará si la suma de los momentos de empotramiento en el nudo no es cero. La diferencia entre cero y el valor de la suma de los momentos de extremo es el momento de desequilibrio.

Momentos distribuidos

Después de eliminar la sujeción que restringe un nudo, el momento desequilibrado lo hará girar. La rotación desviará los extremos de los elementos reunidos en el nudo cambiando sus momentos. En otras palabras, el giro del nudo es resistido por los elementos estructurales y se producen momentos resistentes a medida que los miembros se deforman. La rotación continúa hasta que se alcanza el equilibrio (cuando la suma de los momentos resistentes es igual al momento desequilibrado), o sea, cuando es nula la suma de los momentos en el nudo. Los momentos que se desarrollan en los miembros estructurales que resisten la rotación son los momentos distribuidos.

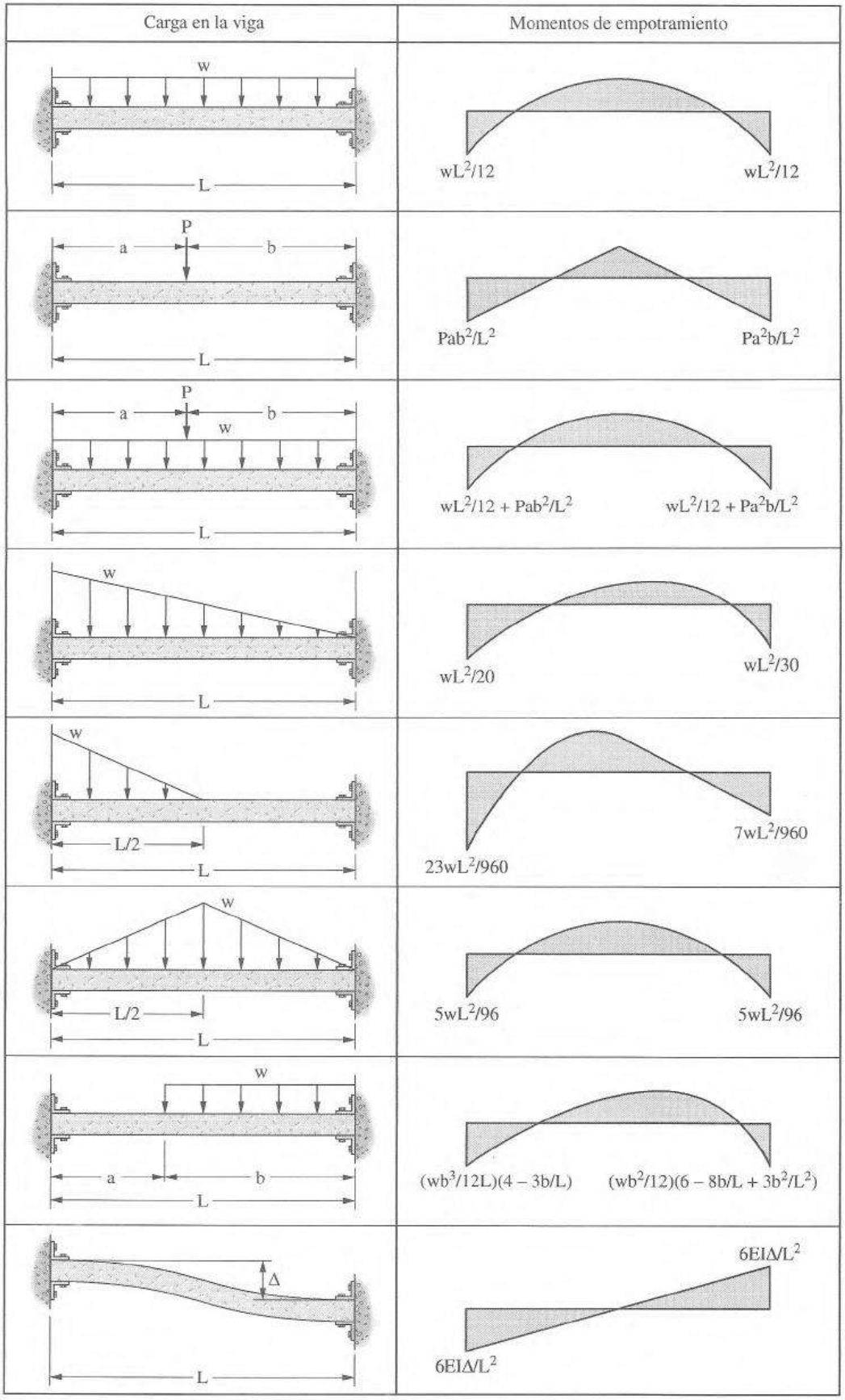


Figura 20.4 Expresiones de momento de empotramiento.

Momentos transportados

Los momentos distribuidos en los extremos de las barras originan momentos flexionantes en los extremos opuestos, que supuestamente están fijos. Estos últimos son los momentos transportados.

20.4 CONVENCIÓN DE SIGNOS

Los momentos en el extremo de un elemento se consideran negativos cuando tienden a girarlo con respecto al nudo en el sentido de las manecillas del reloj (el momento resistente en el nudo sería de sentido contrario). La viga continua de la figura 20.5, con todos sus nudos fijos, tiene momentos en el sentido de las manecillas del reloj (o sea −) en el extremo izquierdo de cada tramo, y momentos en el sentido contrario de las manecillas del reloj (o sea +) en el extremo derecho de cada tramo. La convención de signos por lo común utilizada en resistencia de materiales le asigna a las vigas doblemente empotradas, sujetas a cargas verticales hacia abajo, momentos negativos en uno y otro extremo debido a que en estos puntos se manifiesta tensión en las fibras superiores de las vigas. Debe observarse que esta convención de signos que se usa en el método de la distribución de momentos, es la misma que se empleó en el capítulo 18 con el método de pendiente-deflexión.

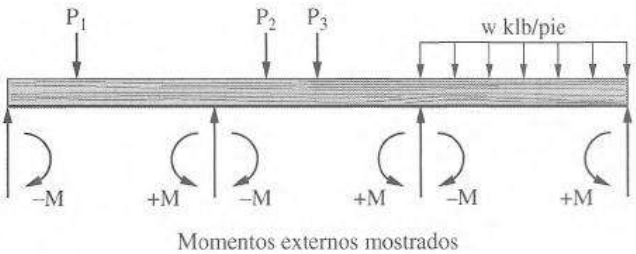


Figura 20.5 Convención de signos para la distribución de momentos.

20.5 APLICACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS

Se dispone ahora de los pocos medios necesarios para utilizar el método de distribución de momentos, y se describe su aplicación.

En la figura 20.6(a) se muestra una viga continua con varias cargas aplicadas a ella. En la figura 20.6(b), los nudos interiores B y C se suponen fijos y se calculan los momentos de empotramiento correspondientes. Para el nudo B se calcula el momento de desequilibrio, liberándose después dicho nudo, como se ve en la figura 20.6(c). El nudo gira, distribuyéndose de esta manera el momento de desequilibrio entre los extremos B de las barras BA y BC en proporción directa a sus factores de distribución. Los valores de estos momentos distribuidos se transmiten, a razón de la mitad, a los extremos opuestos de los miembros AB y BC. Cuando se alcanza el equilibrio, el nudo B se sujeta en su nueva posición girada, soltando luego el C, como se muestra en la figura 20.6(d). El nudo C gira debido a su momento desequilibrado hasta alcanzar el equilibrio, y la rotación produce momentos distribuidos en los extremos C de los miembros CB y CD, así como los correspondientes momentos transportados. Ahora se fija el nudo C y se libera el nudo B, en la figura 20.6(e).

Se repite el mismo procedimiento, una y otra vez, para los nudos B y C. El valor del momento de desequilibrio disminuye rápidamente hasta que toda liberación adicional de un nudo sólo produce una rotación insignificante. En resumen, este proceso constituye el método de la distribución de momentos.

Los ejemplos 20.1 al 20.3 ilustran el análisis de tres vigas continuas. Para el ejemplo 20.1, el momento de inercia I es constante para ambos claros y se supone igual a 1.0 para calcular la rigidez relativa o valores $\frac{I}{L}$ de esos miembros. Con estos valores los factores de distribución se determinan como sigue:

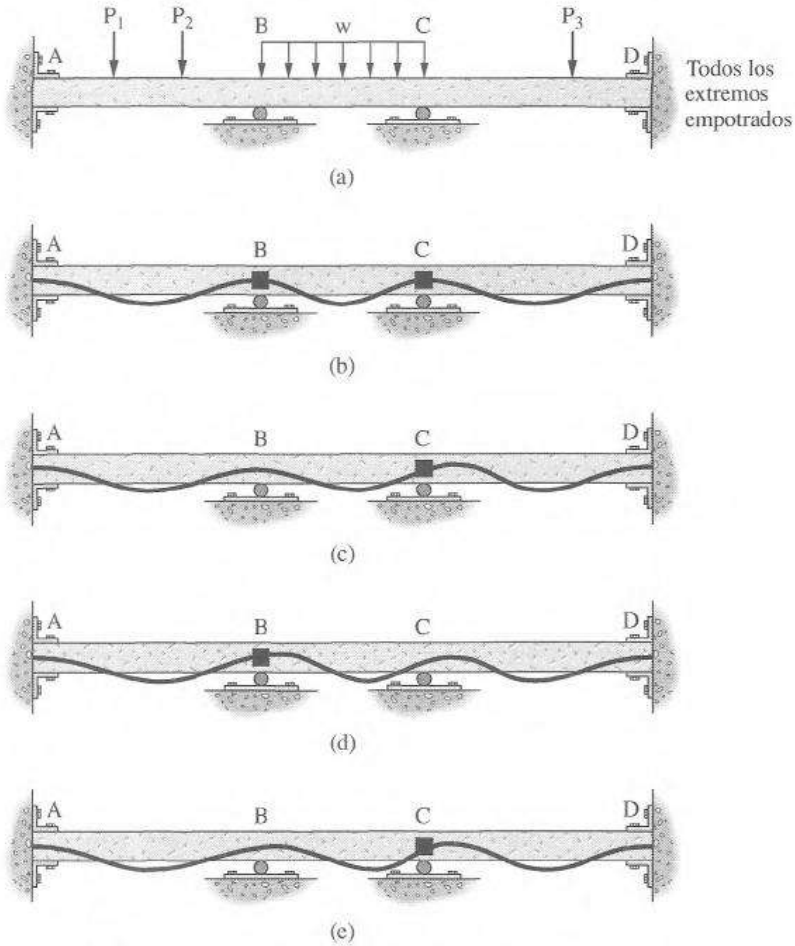


Figura 20.6 Procedimiento para la distribución de momentos.

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{\sum K} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{25}} = 0.43$$

$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{\sum K} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{25}} = 0.57$$

En los ejemplos 20.1 y 20.2 se utiliza un arreglo tabular sencillo para familiarizar al lector con el método de la distribución de momentos. En ejemplos posteriores se usará una variante algo distinta, preferida por el autor, la cual conduce a la solución más rápidamente. El procedimiento tabular puede resumirse de la siguiente manera:

1. Se calculan los momentos de empotramiento, anotándolos en el primer renglón de la tabla (renglón Momentos de empotramiento en los ejemplos 20.1 y 20.2).
2. Los momentos de desequilibrio de cada nudo se distribuyen en el siguiente renglón (Dist. 1).
3. Se efectúan los transportes desde cada nudo y se anotan en el siguiente renglón (Momentos transportados 1).
4. Se distribuyen los nuevos momentos desequilibrados de cada nudo (Dist. 2) y así sucesivamente. (Como la viga del ejemplo 20.1 tiene un solo nudo para balancear, sólo es necesario efectuar un ciclo de distribución.)

EJEMPLO 20.1

Determine los momentos de extremo de la estructura mostrada en la figura 20.7 por distribución de momentos.

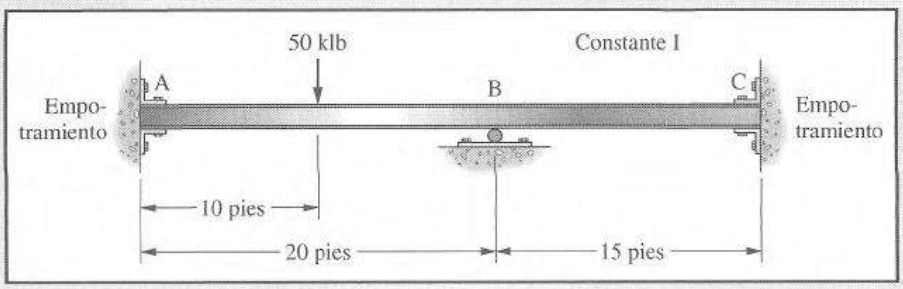


Figura 20.7

Solución.

0.0	0.43	0.57	0.0	Factores de distribución
−125	+125	0.0	0.0	Momentos de empotramiento
0.0	−53.8	−71.2	0.0	Distribución 1
−26.9			−35.6	Momentos transportados 1
−151.9	+71.2	−71.2	−35.6	Momentos finales

El transporte se muestra con líneas punteadas

Cuando la distribución alcanza la exactitud deseada, se trazan dos rayas debajo de cada columna de cifras. El momento final en el extremo de un elemento es igual a la suma de todos los momentos de la tabla correspondientes a su posición. A menos que un nudo se encuentre empotrado, será nula la suma de los momentos finales en los extremos de los elementos que llegan a éste.

EJEMPLO 20.2

Usando la distribución de momentos, determine los momentos de extremo de los miembros para la estructura de la figuras 20.8. Como los miembros tienen valores diferentes de I, los miembros reales (o los valores relativos de esos números) se usan para calcular los factores de rigidez y de distribución.

El valor calculado de $\frac{I}{L}$ para el miembro AB es $\frac{200}{25} = 8$, mientras que para el miembro BC es $\frac{300}{30} = 10$. La rigidez total de los miembros que concurren en B es $8 + 10 = 18$. El miembro AB tiene $\frac{8}{18}$avos del total $= 0.44$, mientras que el miembro BC tiene $\frac{10}{18}$avos del total $= 0.56$. Estos valores son los factores de distribución en el nudo B. Se hacen cálculos similares en el nudo C para los factores de distribución.

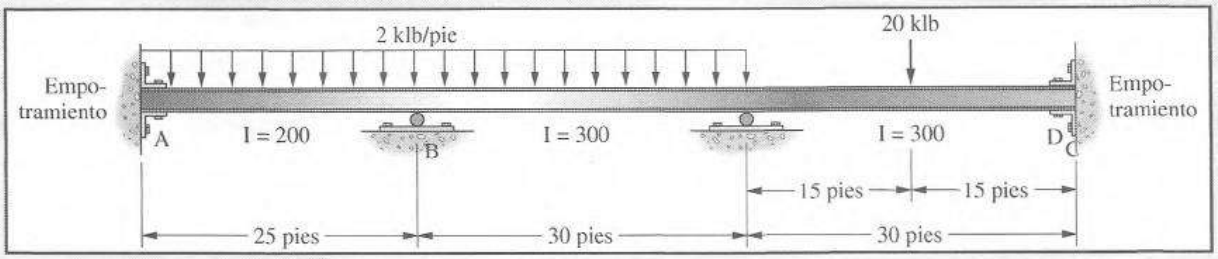


Figura 20.8

Solución.

0.0	0.44	0.56	0.5	0.5	0.0	Factores de distribución
−104.2	+104.2	−150.0	+150.0	−75.0	+75.0	Momentos de empotramiento
	+20.2	+25.6	−37.5	−37.5		Dist. 1
+10.1		−18.8	+12.8		−18.8	Momentos de transporte 1
	+8.3	+10.5	−6.4	−6.4		Dist. 2
+4.2		−3.2	+5.3		−3.2	Momentos de transporte 2
	+1.4	+1.8	−2.7	−2.7		Dist. 3
+0.7		−1.3	+0.9		−1.3	Momentos de transporte 3
	+0.6	+0.7	−0.4	−0.4		Dist. 4
+0.3		−0.2	+0.4		−0.2	Momentos de transporte 4
	+0.1	+0.1	−0.2	−0.2		Dist. 5
−88.9	+134.8	−134.8	+122.2	−122.2	+51.5	Final

A partir del ejemplo 20.3 se usará un procedimiento ligeramente diferente para distribuir los momentos. Sólo un nudo a la vez será balanceado y los transportes requeridos se harán desde ese nudo. En términos generales, es deseable (pero no necesario) balancear el nudo que tiene el mayor desbalanceo, efectuar los transportes, balancear el siguiente nudo con el mayor desbalanceo, etc., porque este proceso dará una convergencia más rápida. Este procedimiento es más rápido que el método tabular usado en los ejemplos 20.1 y 20.2 y se desarrolla junto con la descripción del comportamiento de una viga continua (con empotramientos imaginarios), como se hizo en la figura 20.6.

EJEMPLO 20.3

Calcule los momentos de extremo en la viga mostrada en la figura 20.9.

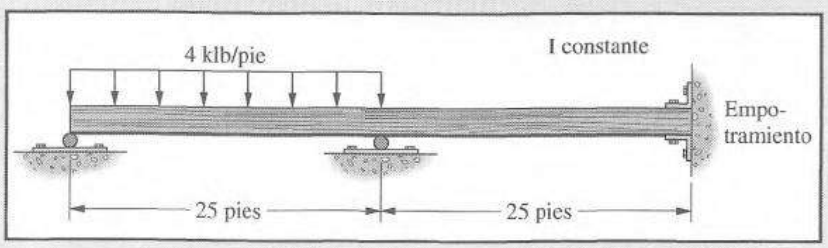


Figura 20.9

Solución.

0.0	0.5	0.5	0.0
−208.3	+208.3		
+208.3	−104.2		
−78.1	−156.2	−156.2	−78.1
+78.1	+39.0		
−9.8	−19.5	−19.5	−9.8
+9.8	+4.9		
−1.2	−2.5	−2.5	−1.2
+1.2	+0.6		
−0.2	−0.3	−0.3	−0.2
+0.2	+178.5	−178.5	−89.3
0.0			

En el capítulo 19 se presentaron varios métodos para analizar en forma aproximada estructuras estáticamente indeterminadas. La distribución de momentos es uno de los métodos "exactos" de análisis si se lleva a cabo hasta que los momentos por distribuir y los momentos transportados resultan muy pequeños. Sin embargo, ese método puede usarse como un excelente método aproximado en estructuras estáticamente indeterminadas si se efectúan sólo unos cuantos ciclos de distribución.

Consideremos la viga del ejemplo 20.2. Se dice que en este problema cada ciclo de distribución termina cuando los momentos desbalanceados quedan balanceados. En la tabla 20.1 se muestran las razones de los momentos totales de cada ciclo en los nudos A y C a los momentos finales en esos nudos después que se han completado todos los ciclos. Esas razones dan una idea de qué tan buena es la distribución parcial de momentos como método aproximado.

TABLA 20.1 EXACTITUD DE LA DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS DESPUÉS DE CADA CICLO DE BALANCEO PARA LA VIGA DEL EJEMPLO 20.2

Valores dados después del ciclo núm.	Momentos en el soporte A	Razón del momento aproximado al momento "exacto" soporte A	Momentos en el soporte C	Razón del momento aproximado al momento "exacto" soporte C
1	104.2	1.172	112.5	0.921
2	94.1	1.058	118.9	0.973
3	89.9	1.011	121.5	0.994
4	89.2	1.003	122.0	0.998
5	88.9	1.000	122.2	1.000

Para muchos casos donde la estructura y/o las cargas son muy asimétricas habrá algunos ciclos de mayor ajuste de los momentos en toda la estructura. Si no se hacen esos ajustes, la distribución de momentos no servirá como un buen método aproximado. El analista podrá reconocer fácilmente cuándo puede detenerse el proceso con buenos resultados aproximados. Esto ocurrirá cuando los momentos desbalanceados y los de transporte resulten muy pequeños al compararlos con sus valores iniciales.

20.6 MODIFICACIÓN DE LA RIGIDEZ PARA EL CASO DE EXTREMOS SIMPLES

El factor de transporte fue ideado para transportar momentos hacia los extremos empotrados, pero puede aplicarse en los extremos simplemente apoyados, en donde los momentos finales deben ser nulos. El extremo simple del ejemplo 20.3 se consideró empotrado; se efectuó la transmisión al extremo opuesto y el nudo se soltó después, equilibrándolo de nuevo en cero. Entonces, una mitad de ese momento equilibrado se transportó sobre el apoyo adyacente. Este procedimiento, repetido una y otra vez, es absolutamente correcto, pero implica un trabajo innecesario que puede eliminarse estudiando la rigidez de los elementos con extremos simplemente apoyados.

En la figura 20.10 (a) y (b) se compara la rigidez relativa de un elemento sujeto a la acción de un momento M_1 cuando el extremo lejano está empotrado y cuando es un apoyo simple. En la parte (a), usando los principios del método del área de momentos vistos en el capítulo 11, la pendiente en el extremo izquierdo, que se representa por θ_1, es igual a $M_1L/4EI$.

Para la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 20.10(b), nuevamente usando los principios de área-momento, la pendiente θ_1 es $M_1L/3EI$. Por lo tanto, la pendiente generada por el momento M_1 cuando el extremo lejano está empotrado es sólo tres cuartos tan grande ($M_1L/4EI \div M_1L/3EI = \frac{3}{4}$) que cuando el extremo lejano está simplemente apoyado. La viga simplemente apoyada en el extremo lejano sólo tiene tres cuartos de la rigidez de la viga con el extremo lejano empotrado. Si los factores de rigidez se modifican según un factor de tres cuartos en el caso de tramos de extremo simplemente apoyados, el extremo simple se equilibra en cero, se hacen transportes a los soportes adyacentes y no se efectúa ya ningún transporte hasta ese punto, por lo que se tendrán los mismos resultados. En el ejemplo 20.4, la rigidez modificada se usa para la viga que se evaluó previamente en el ejemplo 20.3.

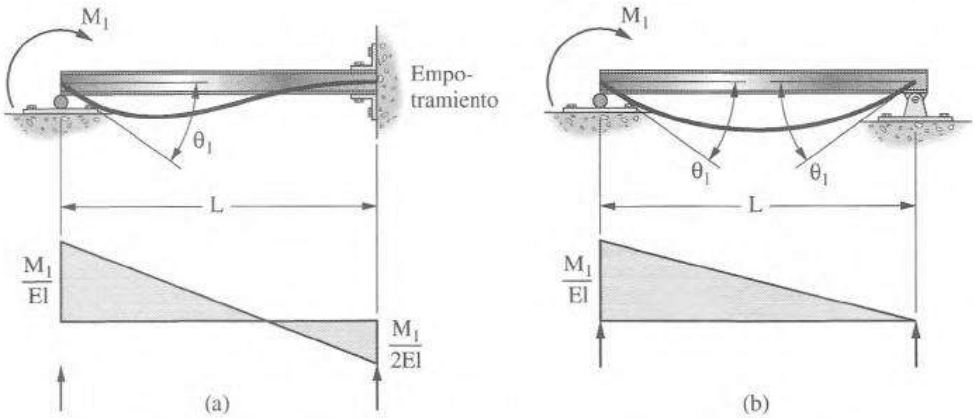


Figura 20.10 Comparación de la rigidez relativa para dos condiciones de apoyo.

EJEMPLO 20.4

Determinar los momentos de extremo en la estructura que se muestra en la figura 20.11 empleando el factor de rigidez modificado para el apoyo simple del extremo izquierdo.

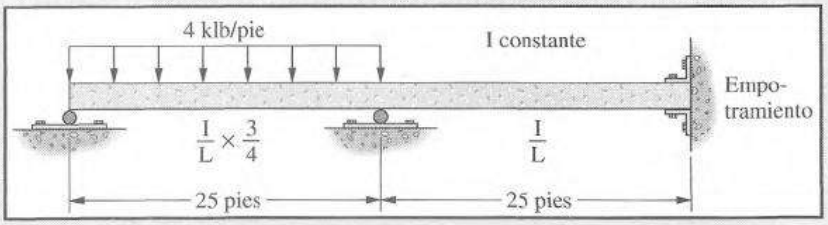


Figura 20.11

Solución.

0.0	0.43	0.57	0.0
−208.3	+208.3		
+208.3	+104.2		
0.0	−134.4	−178.1	−89.1
	+178.1	−178.1	−89.1

20.7 DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO FLEXIONANTE

El trazo de los diagramas de cortante y de momento es un medio excelente para comprobar el valor de los momentos finales determinado mediante el método de distribución de momentos, así como para tener una idea de conjunto de la condición de esfuerzos en la estructura. Antes de trazar los diagramas es necesario considerar algunos puntos que relacionan la convención de signos para esos diagramas con la que se emplea en el método de la distribución de momentos. Se utilizará aquí la convención usual de signos para el trazo de diagramas (el momento flexionante es positivo cuando provoca tensión en las fibras inferiores de una viga, y la fuerza cortante es positiva cuando corresponde al lado izquierdo y es ascendente).

La relación entre los signos de los momentos en las dos convenciones se muestra en las vigas de la figura 20.12. La parte (a) de la figura representa una viga empotrada para la cual el resultado de la distribución de momentos es un momento negativo. El momento en el sentido de las manecillas del reloj flexiona la viga como se indica, causando tensión en las fibras superiores, o sea, un momento negativo, según la convención usual para los diagramas de cortante y de momento flexionante. En la figura 20.12(b) el resultado de la distribución de momentos es un momento positivo, pero nuevamente las fibras superiores de la viga están en tensión, lo que indica un momento negativo para el diagrama de momento flexionante.

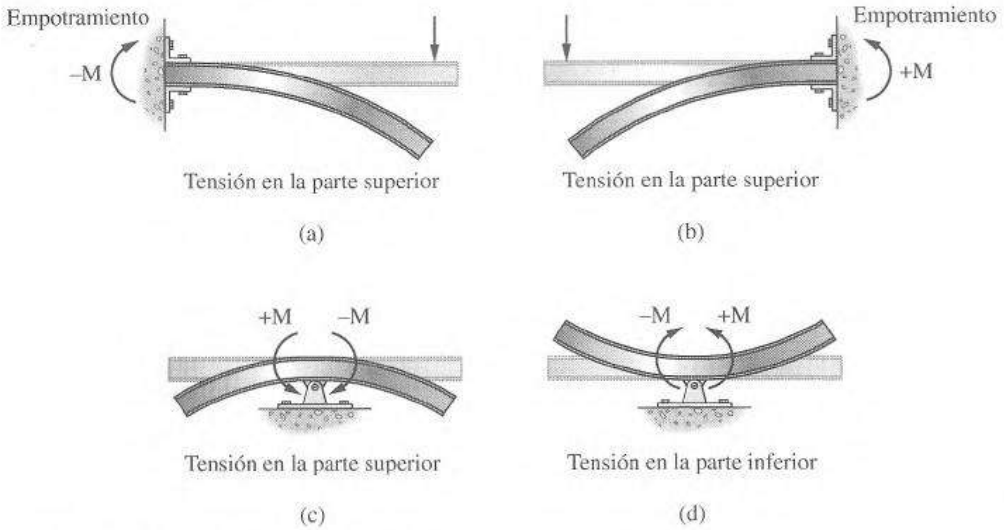


Figura 20.12 Interpretación del sentido de los momentos resultantes.

En la figura 20.12(c) y (d) se muestra un apoyo simple interior. En la parte (c), la distribución de momentos da un momento negativo a la derecha y un momento positivo a la izquierda, que causa tensión en las fibras superiores. La parte (d) muestra el efecto de momentos de sentidos opuestos en el mismo apoyo considerado en la parte (c).

Del análisis anterior puede concluirse que la convención de signos usada aquí para la distribución de momentos en vigas continuas concuerda con la usada para trazar los diagramas de momentos flexionantes en las partes derechas de los apoyos, pero no concuerda con las partes izquierdas.

Para dibujar los diagramas de un elemento vertical, en algunas ocasiones se considera que su lado derecho es el lado de abajo. En los ejemplos 20.5 y 20.6 se distribuyen los momentos en las vigas continuas y luego se trazan los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.

Las reacciones que se indican en la solución de este problema se determinaron calculándolas como si cada tramo estuviese simplemente apoyado y sumándoles los valores de las reacciones producidas por los momentos presentes en los apoyos de la viga.

EJEMPLO 20.5

Distribuir los momentos y trazar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la estructura que se muestra en la figura 20.13.

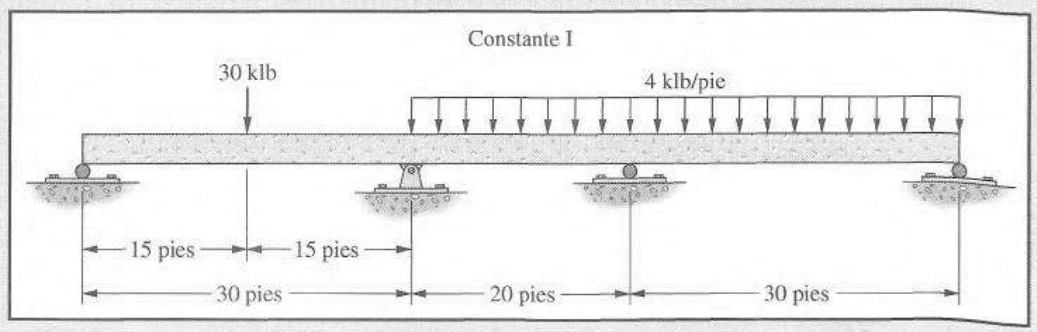
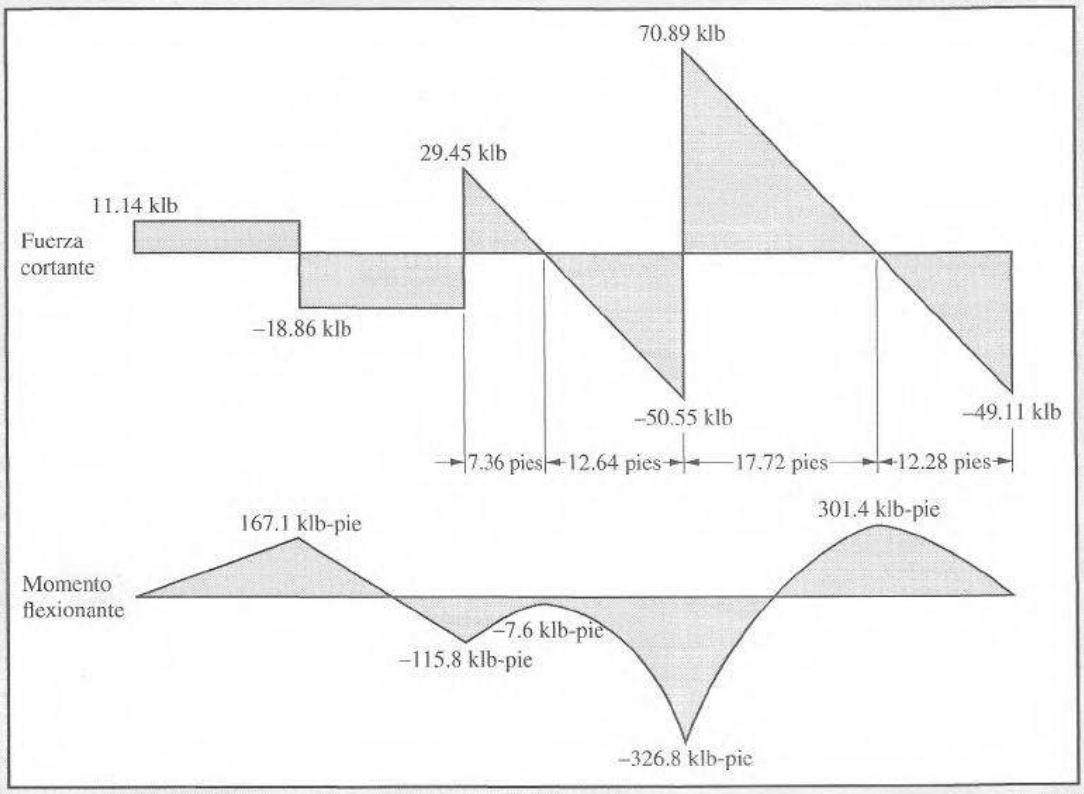


Figura 20.13

Solución.

	0.0	0.33	0.67	0.67	0.33	0.0
	−112.5	+112.5	−133.3	+133.3	−300.0	+300.0
	+112.5	+56.2			−150.0	−300.0
			+105.6	+211.1	+105.6	
		−47.0	−94.0	−47.0		
			+15.7	+31.3	+15.7	
		−5.2	−10.5	−5.2		
			+1.7	+3.5	+1.7	
		−0.6	−1.1	−0.6		
			+0.2	+0.4	+0.2	
		−0.1	−0.1			
	0.0	+115.8	−115.8	+326.8	−326.8	0.0
	Cálculo de las reacciones					
Reacciones de la "viga simple"	+15.00	+15.00	+40.00	+40.00	+60.00	+60.00
Reacciones de momento	−3.86	+3.86	−10.55	+10.55	+10.89	−10.89
Reacciones finales	+11.14	+18.86	+29.45	+50.55	+70.89	+49.11

Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante:



EJEMPLO 20.6

Distribuya los momentos y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga continua mostrada en la figura 20.14.

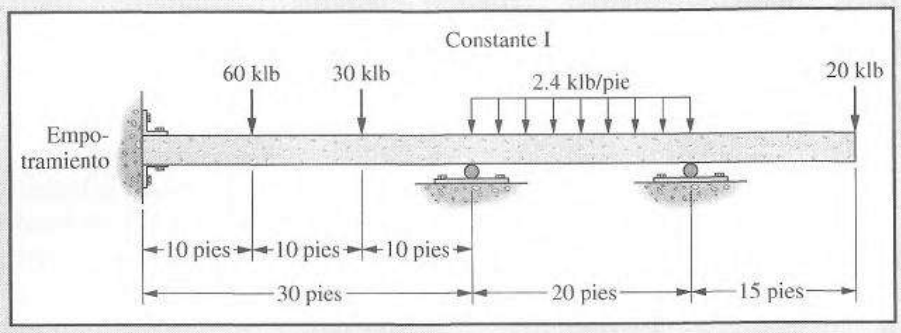
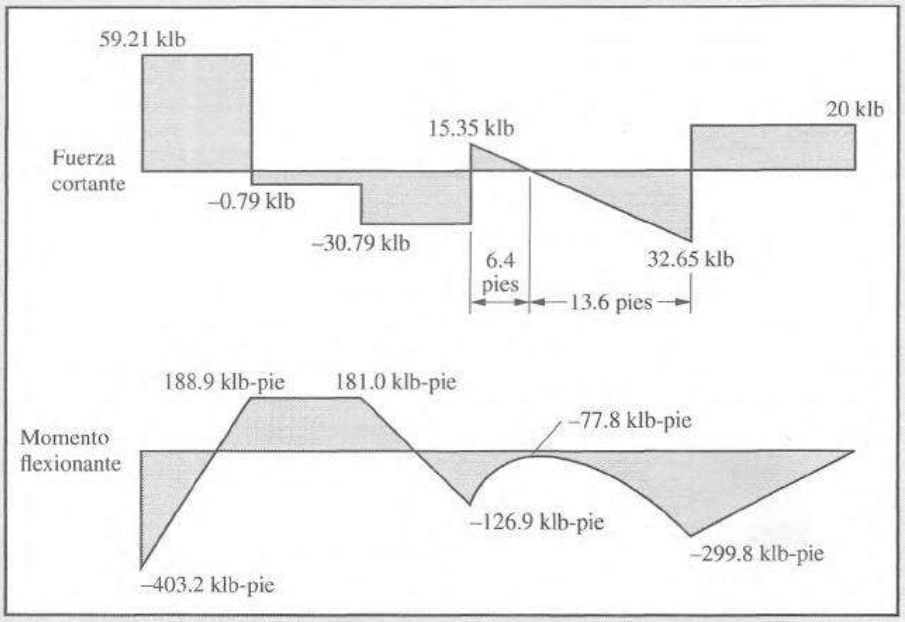


Figura 20.14

Solución.

0.0	0.471	0.529	1.00	0.0
−333.3	+266.7	−80.0	+80.0	−300.0
		+110.0	+220.0	
−69.9	−139.7	−157.0		
−403.2	+127.0	−127.0	+300.0	−300.0
Cálculo de las reacciones				
+50.00	+40.00	+24.00	+24.00	+20.00
+9.21	−9.21	−8.65	+8.65	
+59.21	+30.79	+15.35	+32.65	+20.00

Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante:



20.8 SOLUCIONES CON COMPUTADORA CON SABLE32

El software Sable permite al lector analizar muy rápidamente todos los problemas contenidos en este capítulo. El ejemplo 20.7 ilustra el análisis de la viga continua de tres claros de la figura 20.15(a) con SABLE32. Aunque los datos se ingresan a la computadora de una forma muy parecida a como lo fue para el análisis de armaduras bidimensionales y tridimensionales en capítulos anteriores, debe tener especial cuidado con la información proporcionada para los extremos de los claros de la viga.

El lector recordará que los tipos de apoyos para la viga se ingresan con los datos de los nudos. Para esta viga, el empotramiento izquierdo proporciona resistencia al movimiento en las direcciones x, y y z, mientras que los otros apoyos sólo proporcionan resistencia al movimiento en la dirección y.

Cuando se proporcionan los datos de la viga, el usuario deberá considerar a los extremos de los claros como nudos y debe decidir si el extremo de un claro puede moverse independientemente con respecto del claro contiguo. Para la viga de las figura 20.15, el lector puede ver que éste no

es el caso en el empotramiento y tampoco es posible en los nudos interiores, donde los extremos derechos de los claros izquierdos no pueden moverse con respecto a los extremos izquierdos de los claros derechos. Como resultado, las condiciones de los extremos de los claros son como se muestra en la figura 20.15(b) con las letras F-F, que significan empotrado-empotrado.

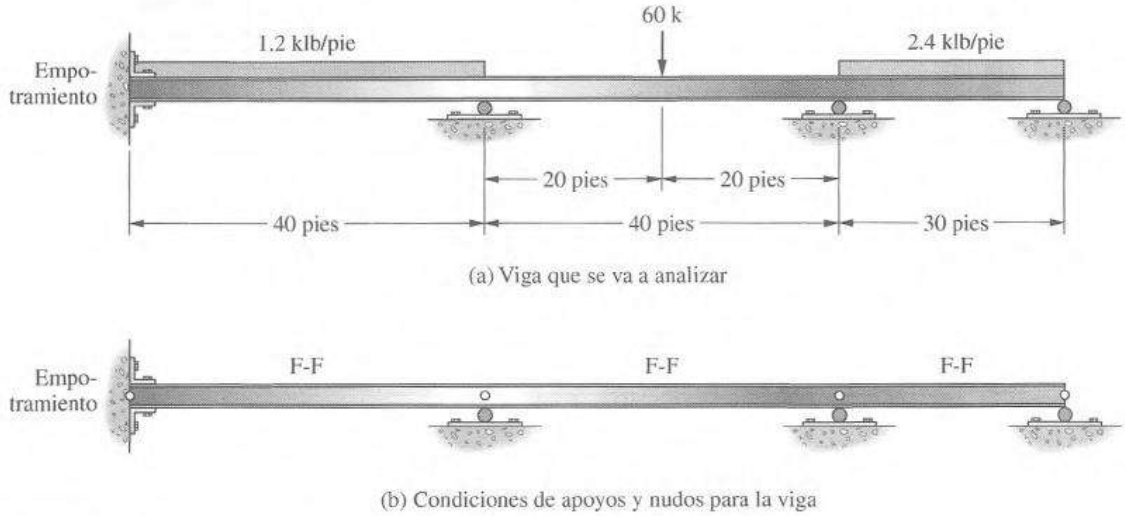


Figura 20.15

Se muestran todos los datos ingresados con esta solución, ya que el autor piensa que puede ser una ayuda para el estudiante la especificación de las condiciones de extremo para sus problemas.

EJEMPLO 20.7

Analice la viga de la figura 20.15 usando SABLE32.

Solución. El miembro se vuelve a esbozar en la figura 20.16 y se numeran sus nudos y claros.

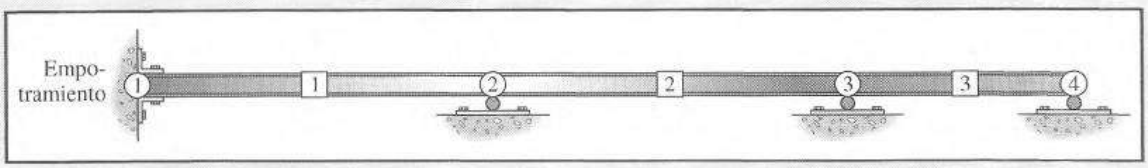


Figura 20.16

Datos: Posición de los nudos y datos de restricciones

	Coordenadas			Restricciones		
Nudo	X	Y	Z	X	Y	Rotación
1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	S	S	S
2	4.000E+01	0.000E+00	0.000E+00	N	S	N
3	8.000E+01	0.000E+00	0.000E+00	N	S	N
4	1.100E+02	0.000E+00	0.000E+00	N	S	N

Datos: Posición de las vigas y datos de propiedades

Propiedades de las vigas							
Viga	i	j	Tipo	Estado	Área	Izz	E
1	1	2	F-F	A	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00
2	2	3	F-F	A	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00
3	2	4	F-F	A	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00

Datos: Cargas aplicadas a las vigas

Viga	Caso	P	a	W
1	1	0.000E+00	0.000E+00	−1.200E+00
2	1	−6.000E+01	2.000E+01	0.000E+00
3	1	0.000E+00	0.000E+00	−2.400E+00

Datos: Fuerzas calculadas en los extremos de las vigas

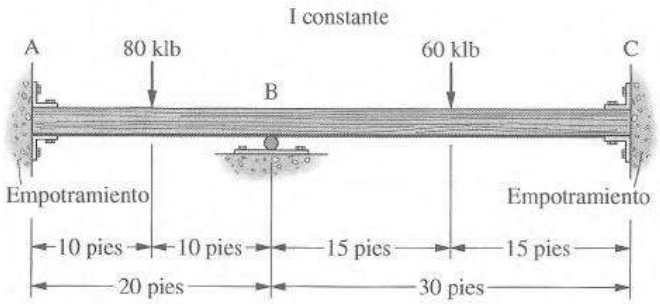
Viga	Caso	Extremo	Axial	Cortante-Y	Momento-Z
1	1	i	0.000E+00	2.105E+01	1.207E+02
		j	0.000E+00	2.695E+01	−2.387E+02
2	1	i	0.000E+00	2.835E+01	2.387E+02
		j	0.000E+00	3.165E+01	−3.047E+02
3	1	i	0.000E+00	4.616E+01	3.047E+02
		j	0.000E+00	2.584E+01	6.148E+06

■

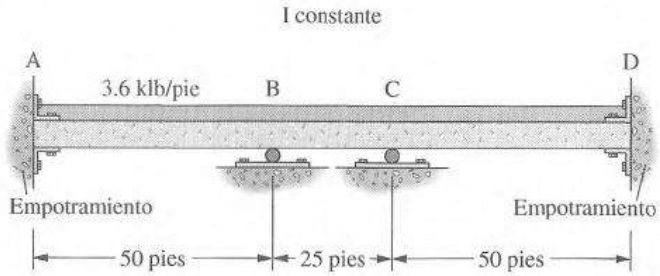
20.9 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

En los problemas 20.1 al 20.21 analice las estructuras con el método de distribución de momentos y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Para las respuestas dadas, los signos se basan en la convención de los diagramas de fuerza cortante y de momento.

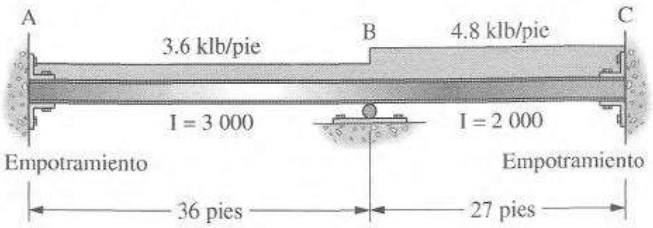
20.1 (*Resp.:* $M_A = -192.5$ klb-pie, $M_B = -215$ klb-pie.)



20.2

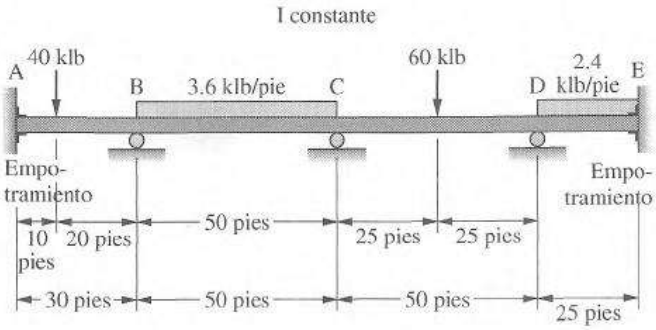


20.3 (*Resp.:* $M_A = -414.5$ klb-pie, $M_C = -269.2$ klb-pie.)

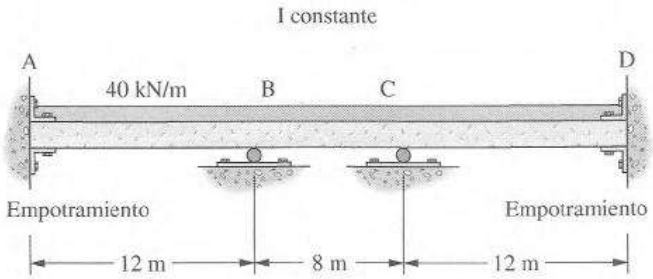


20.4 Resuelva el problema 20.3 si se agrega una carga de 60 klb en el centro del claro derecho.

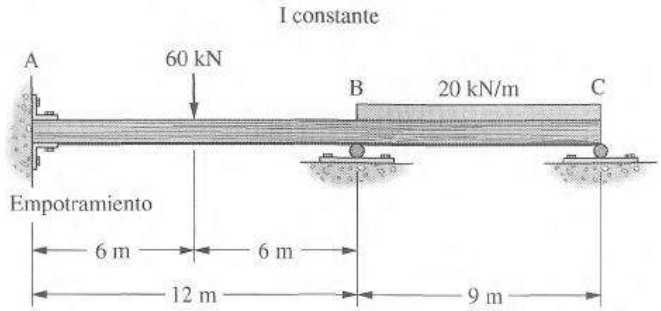
20.5 (*Resp.:* $M_B = -580.5$ klb-pie, $M_C = -646.8$ klb-pie.)



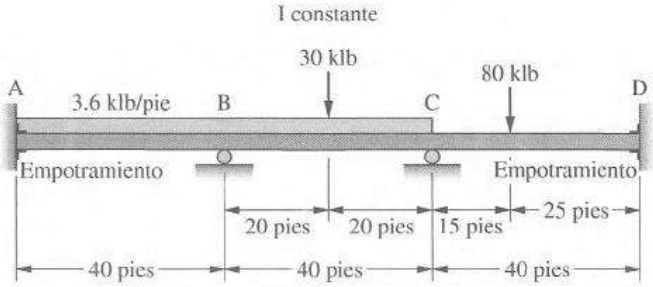
20.6



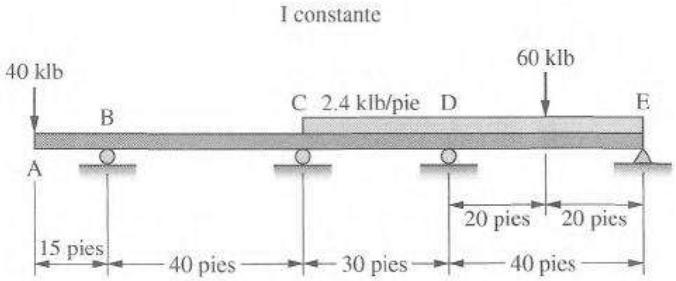
20.7 (*Resp.:* $M_B = -146.28$ klb-pie, $V_C = 73.75$ klb ↑.)



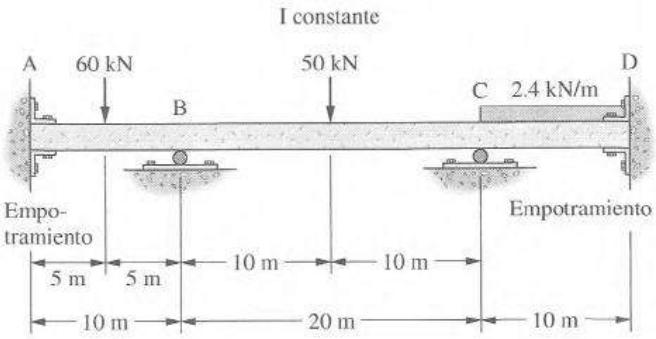
20.8



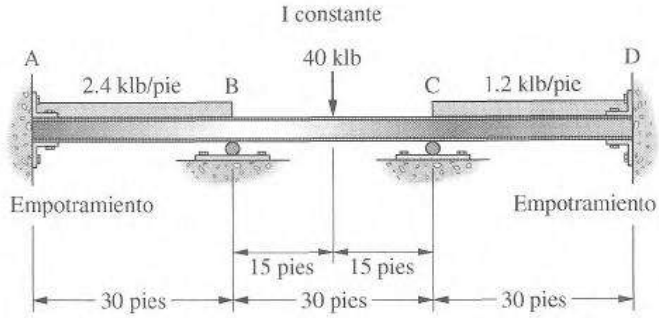
20.9 (*Resp.:* $M_B = -600$ klb-pie, $M_C = +203$ klb-pie.)



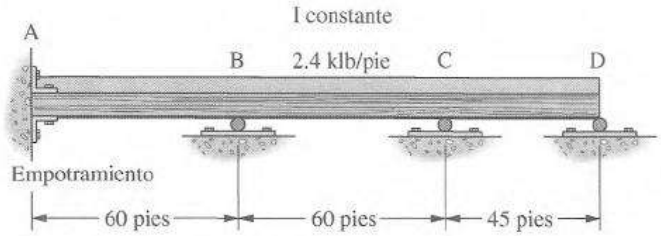
20.10



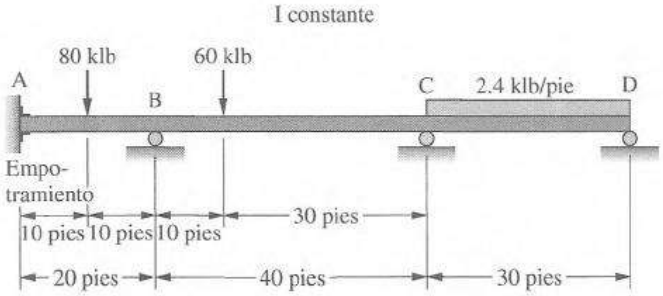
20.11 (*Resp.:* $M_B = -171.9$ klb-pie, $M_D = -75.9$ klb-pie.)



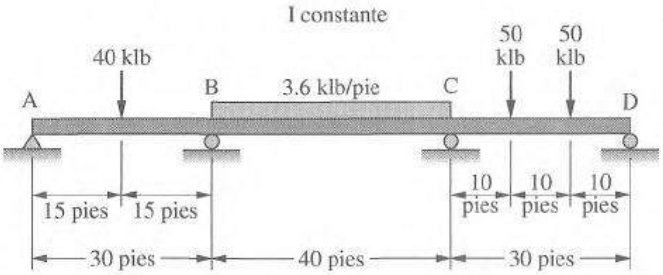
20.12



20.13 (*Resp.:* $M_A = -165.9$ klb-pie, $M_C = -199.7$ klb-pie.)

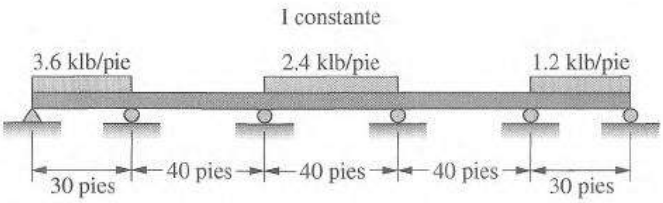


20.14

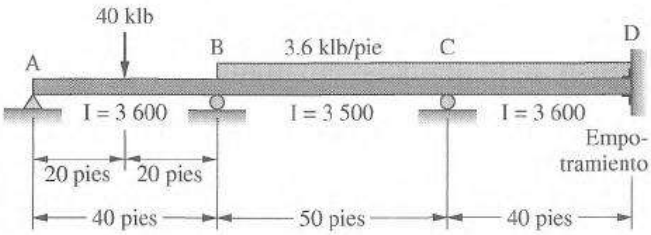


20.15 Repita el problema 20.2 considerando que los soportes extremos A y D son soportes simples. (*Resp.:* $M_B = -723.3$ klb-pie $= M_C$.)

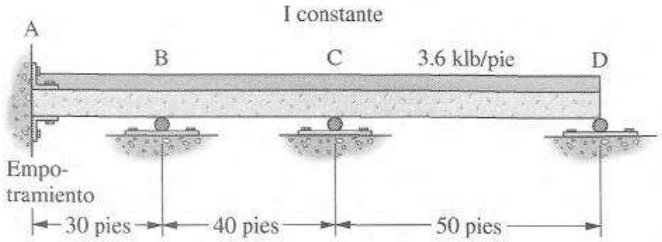
20.16



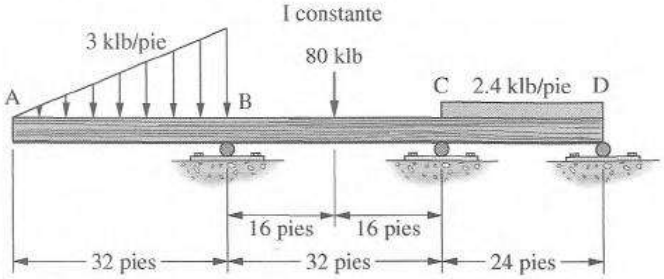
20.17 (*Resp.:* $M_B = -538.8$ klb-pie, $M_C = -715$ klb-pie.)



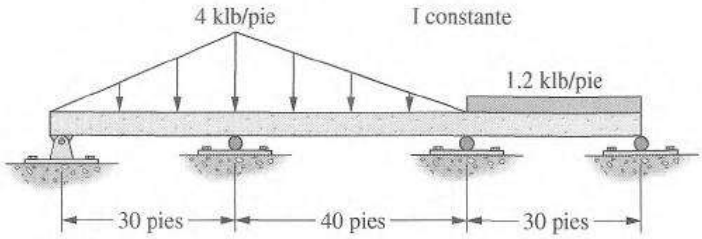
20.18



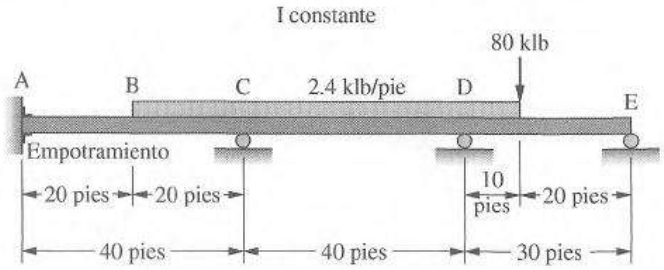
20.19 (*Resp.:* $M_A = -48.2$ klb-pie, $M_B = -262.0$ klb-pie.)



20.20



20.21 (*Resp.:* $M_A = -88.5$ klb-pie, $M_C = -439.7$ klb-pie.)



Para los problemas 20.22 al 20.26 use SABLE32.

20.22 Problema 20.1.

20.23 Problema 20.3. (*Resp.:* $M_A = -414.5$ klb-pie, $M_C = -268.7$ klb-pie.)

20.24 Problema 20.6.

20.25 Vaya a la biblioteca y lea el ensayo escrito por Hardy Cross sobre el método de distribución de momentos. Véase la referencia en los pies de página en la primera página de este capítulo.

Capítulo 21

Distribución de momentos para marcos

21.1 MARCOS SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL

El método de la distribución de momentos se aplica también a marcos, siempre que se impida en éstos el movimiento lateral o ladeo. El análisis de marcos sin ladeo se muestra en los ejemplos 21.1 y 21.2. Sin embargo, cuando el ladeo es posible, debe tomarse en consideración, ya que los movimientos o deflexiones en los nudos ocasionan rotaciones en los extremos de los miembros conectados a los nudos que afectan la magnitud de los momentos de los elementos en todos los miembros.

Cuando las estructuras por analizarse son muy complejas, es necesario usar algún método para registrar los cálculos, de manera que éstos no interfieran entre sí. En este capítulo, se usa un sistema para marcos en el cual los momentos de las vigas se escriben abajo de éstas o en los extremos izquierdos, y arriba de ellas en los extremos derechos. Para las columnas se usa el mismo sistema, considerando que los lados derechos corresponden a los lados de la base.

EJEMPLO 21.1

Determinar los momentos de extremo del marco que se muestra en la figura 21.1. Se muestra el valor relativo de I para cada miembro del marco.

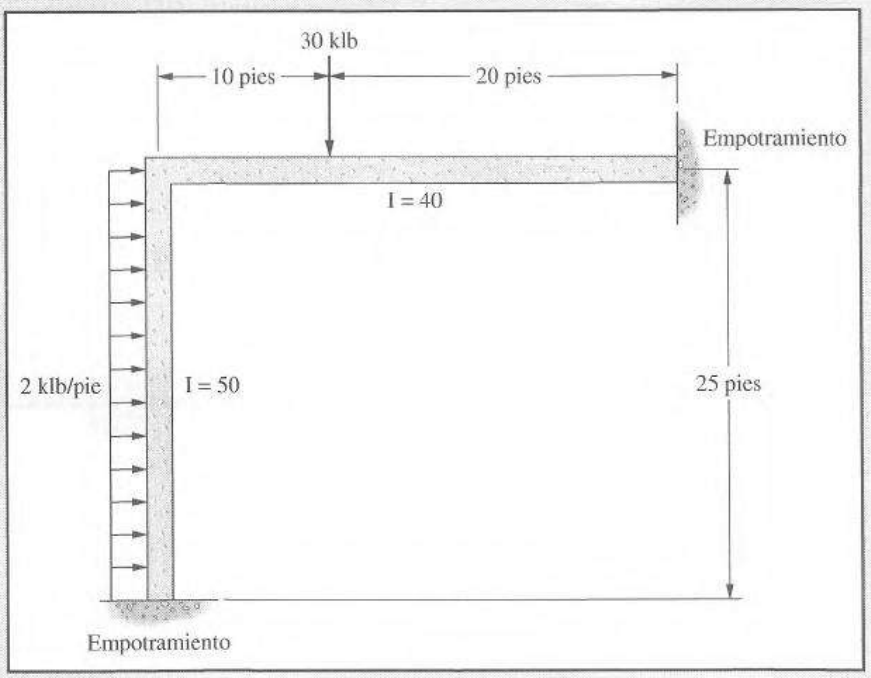
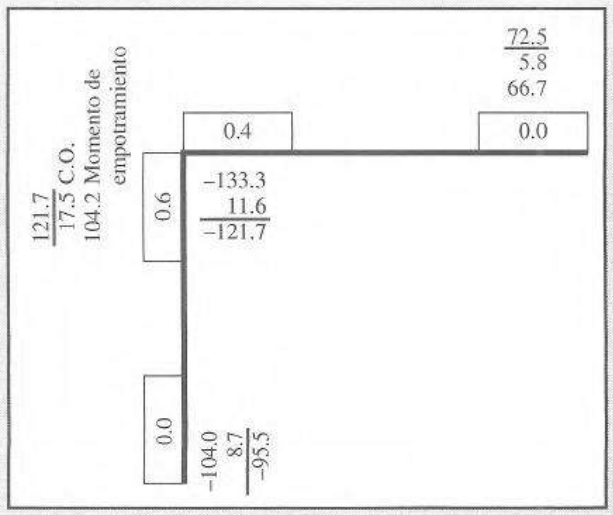


Figura 21.1



EJEMPLO 21.2

Calcule los momentos de extremo de la estructura mostrada en la figura 21.2. Los valores de I son constantes para todos los miembros de esta estructura.

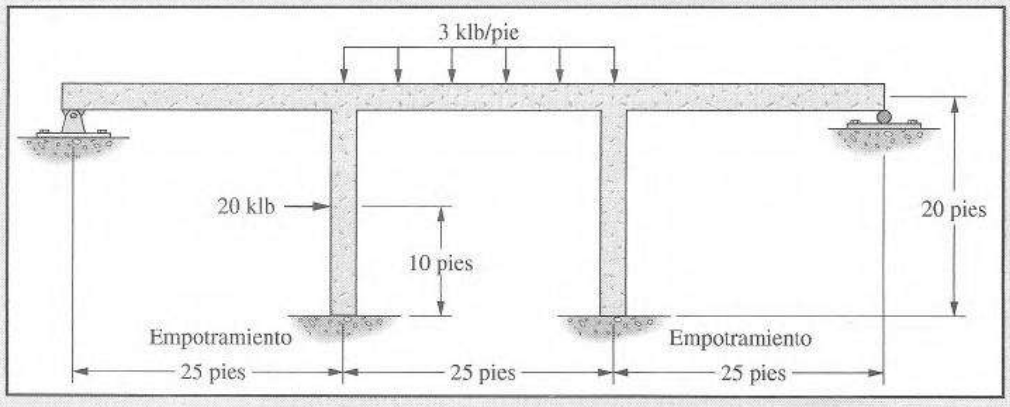
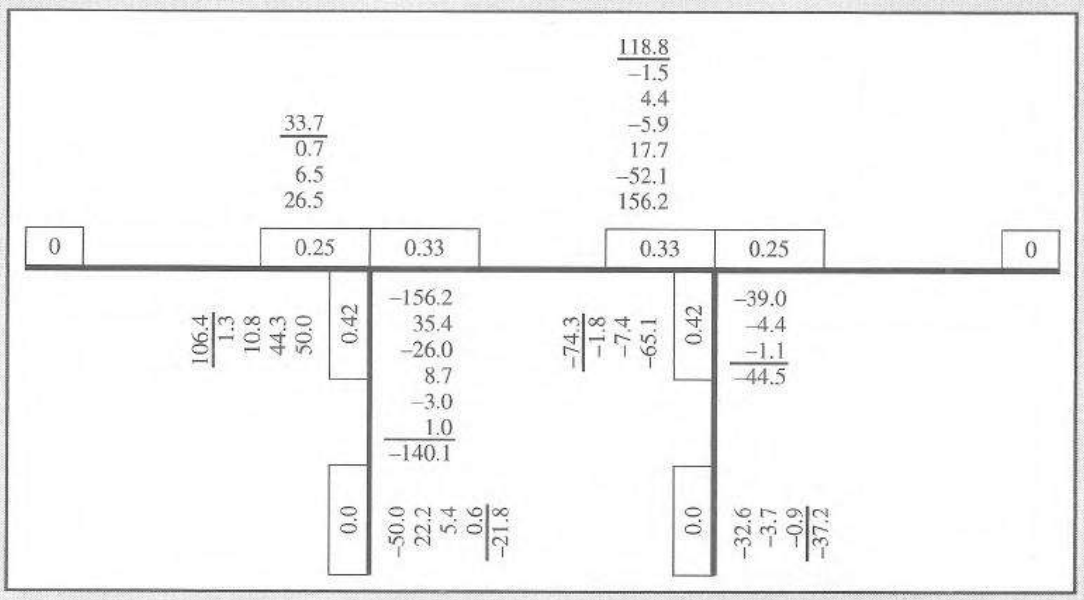


Figura 21.2

Solución.



21.2 MARCOS CON DESPLAZAMIENTO LATERAL

Los marcos estructurales, como el que se muestra en la figura 21.3, por lo general se construyen de modo que puedan ladearse al ser sometidos a la acción de cargas. El marco que se muestra en la figura es simétrico, pero tenderá a desplazarse lateralmente debido a que la carga P es excéntrica.

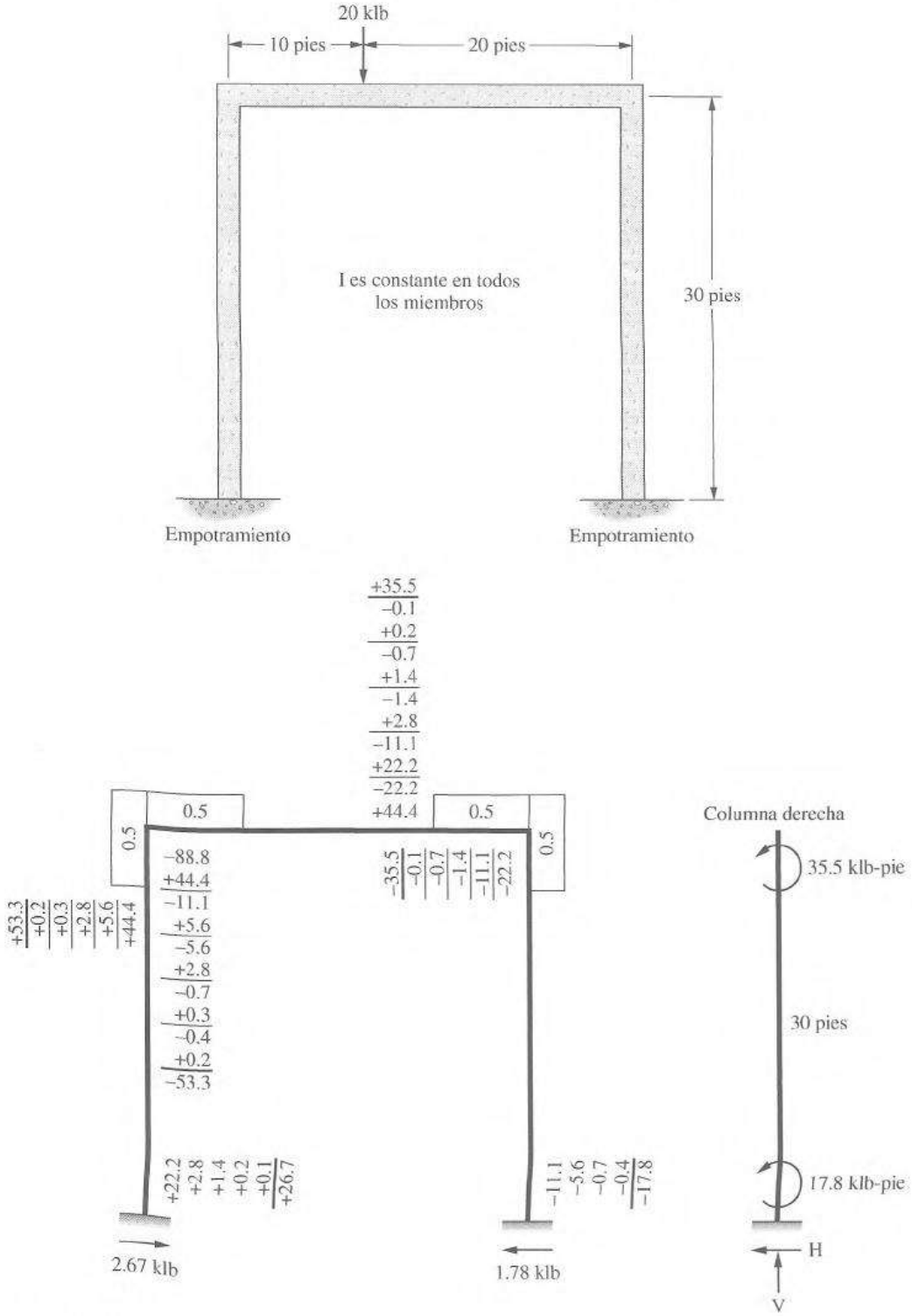


Figura 21.3

El análisis de este marco da resultados incongruentes si se utiliza el procedimiento acostumbrado.

Los momentos de empotramiento se balancean y las componentes de la reacción horizontal se calculan en los apoyos. Cada columna se toma como un cuerpo libre. Se toman momentos en la parte superior de una columna específica de las fuerzas y de los momentos aplicados a esa columna y se determina la componente de la reacción horizontal. Con referencia al boceto de la columna derecha en la figura 21.3, puede escribirse la siguiente expresión observando que la componente de la reacción vertical pasa por el punto donde se están tomando los momentos si la columna es en sí misma vertical.

$$\sum M_{\text{parte superior de la columna}} = 0$$

$$-35.5 - 17.8 + 30H = 0$$

$$H = +1.78 \text{ klb} \leftarrow$$

La reacción en la base de la columna izquierda se determina de una manera similar. De los resultados obtenidos, vemos que la suma de las fuerzas horizontales sobre toda la estructura no es igual a cero. La suma de las fuerzas hacia la derecha es de 0.89 klb más que la suma de las fuerzas hacia la izquierda. Si esta estructura simétrica se sometiera un sistema de fuerzas fuera de equilibrio como éste, no estaría en equilibrio.

El análisis usual no da resultados consistentes porque la estructura se deflexiona lateralmente hacia un lado, y las deflexiones resultantes afectan a los momentos. Una solución posible es calcular las deflexiones causadas al aplicar una fuerza de 0.89 klb hacia la derecha en la esquina superior del marco. Los momentos causados por esta fuerza podrían obtenerse para las deflexiones calculadas y sumarse a los momentos de empotramiento distribuidos originalmente, pero el método es más bien difícil de aplicar.

Un método más conveniente es suponer la existencia de un soporte imaginario, algunas veces llamado soporte virtual, que impide la deflexión lateral de la estructura, como se muestra en la figura 21.4. Los momentos de empotramiento se distribuyen y se calcula la fuerza que el soporte imaginario debe proporcionar para mantener el marco sin deflexión. Para el marco de la figura 21.3 el soporte ficticio debe proporcionar 0.89 klb que empujan a la izquierda.

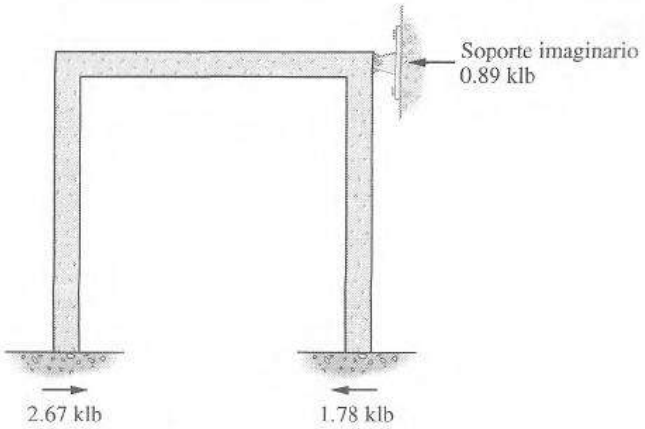


Figura 21.4

El soporte es imaginario, y si se retira permitirá que el marco se deflexione hacia la derecha. Al deflexionarse la estructura hacia la derecha, los nudos se fijan contra rotación. Los extremos de las columnas giran en dirección de las manecillas del reloj y producen momentos negativos o en el sentido de las manecillas del reloj en los nudos (figura 21.5). Pueden colocarse en las columnas valores supuestos de estos momentos que causan desplazamientos laterales. Las relaciones necesarias entre estos momentos se discuten en la sección 21.3.

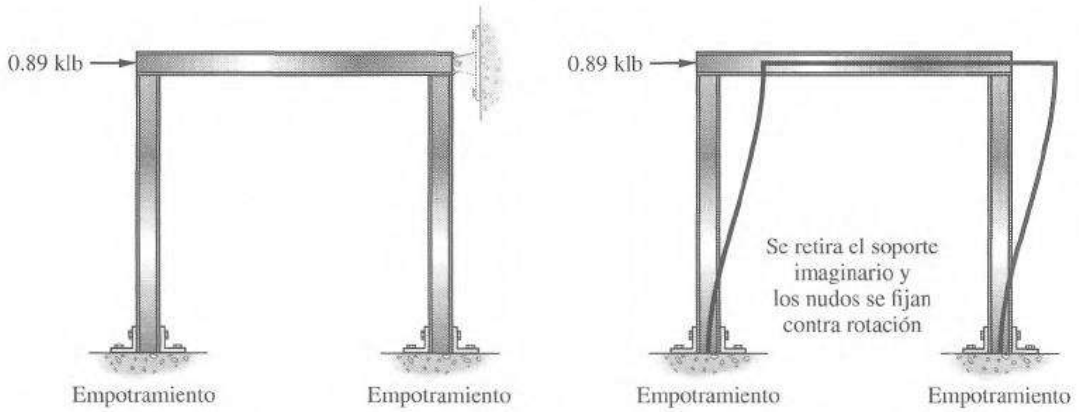


Figura 21.5

21.3 MOMENTOS DEBIDOS AL DESPLAZAMIENTO LATERAL

En el caso de que todas las columnas de un marco tengan igual longitud e igual momento de inercia, los momentos por desplazamiento lateral supuestos serán los mismos en todas las columnas. Sin embargo, si difieren las longitudes de las columnas y/o sus momentos de inercia, lo anterior no sucederá. Se demostrará en los párrafos siguientes que los momentos por ladeo supuestos deben variar de columna a columna en proporción a sus valores I/L^2.

Si la carga P que actúa sobre el marco de la figura 21.6(a) desplazara a éste una distancia Δ, el marco tomaría la configuración deformada que se muestra en la figura 21.6(b). En teoría, ambas columnas se deforman según curvas S perfectas, si se considera que la viga es rígida. En los puntos medios de las columnas, la deflexión será igual a $\Delta/2$. Esos puntos pueden considerarse entonces como puntos de contraflexión, y las mitades inferiores como vigas en voladizo. La deflexión en una viga en voladizo con una carga concentrada en su extremo libre es

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

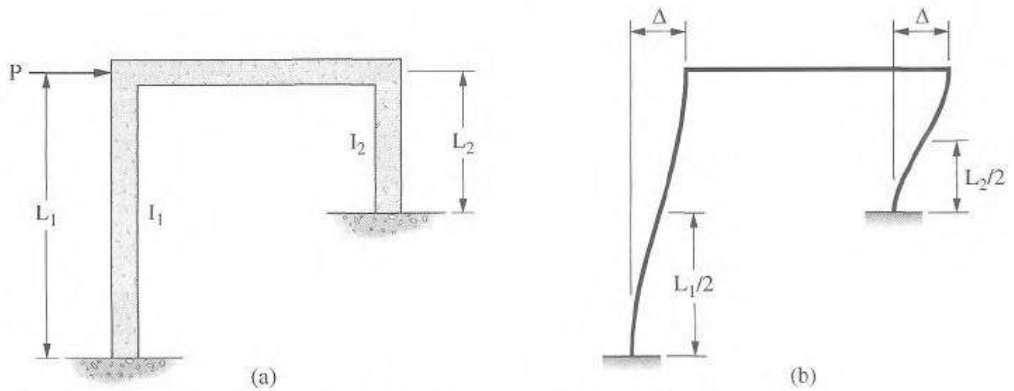


Figura 21.6 Marco simple para el análisis que considera deflexión lateral.

Como las deflexiones son las mismas para ambas columnas, pueden escribirse las siguientes expresiones:

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{P_1\left(\frac{L_1}{2}\right)^3}{3EI_1} = \frac{P_1L_1^3}{24EI_1}$$

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{P_2\left(\frac{L_2}{2}\right)^3}{3EI_2} = \frac{P_2L_2^3}{24EI_2}$$

Despejando de estas expresiones P_1 y P_2, que son las fuerzas que actúan en los voladizos, se tiene:

$$P_1 = \frac{12EI_1\Delta}{L_1^3}$$

$$P_2 = \frac{12EI_2\Delta}{L_2^3}$$

Los momentos producidos por las dos fuerzas en los extremos de sus voladizos respectivos son iguales a la fuerza multiplicada por la longitud del voladizo correspondiente. Al escribir las expresiones para estos momentos y sustituyendo en éstas los valores de P_1 y P_2, se tiene que:

$$M_1 = P_1\frac{L_1}{2} = \left(\frac{12EI_1\Delta}{L_1^3}\right)\frac{L_1}{2} = \frac{6EI_1\Delta}{L_1^2}$$

$$M_2 = P_2\frac{L_2}{2} = \left(\frac{12EI_2\Delta}{L_2^3}\right)\frac{L_2}{2} = \frac{6EI_2\Delta}{L_2^2}$$

De estas expresiones se puede obtener la relación entre los momentos, como se indica en seguida, debido a que Δ es la misma en cada columna:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{6EI_1\Delta/L_1^2}{6EI_2\Delta/L_2^2} = \frac{I_1/L_1^2}{I_2/L_2^2}$$

Debe emplearse esta relación para suponer los valores de los momentos originados en las columnas de un marco por desplazamiento lateral. Pueden suponerse cualesquier valores para los momentos, siempre que éstos sean proporcionales a las magnitudes I/L^2. Si los valores de I y de L fueran iguales, los momentos supuestos tendrían idéntico valor.

El procedimiento para aplicar el método de la distribución de momentos cuando se tiene desplazamiento lateral puede resumirse como sigue:

1. Determine los factores de distribución para cada miembro del marco.
2. Calcule los momentos de empotramiento causados por las cargas aplicadas.
3. Distribuya los momentos de empotramiento hasta que se alcance la convergencia.
4. Calcule la fuerza de desequilibrio, que es la fuerza en el soporte virtual que impide que ocurra el ladeo.
5. Calcule el valor de I/L^2 para cada una de las columnas.
6. Calcule los momentos supuestos de ladeo en proporción a los valores I/L^2 de cada una de las columnas y distribúyalos hasta lograr la convergencia. Pueden seleccionarse cualesquier momentos convenientes siempre que sean proporcionales a los valores de I/L^2 de las columnas.
7. Calcule la fuerza lateral causada por esos momentos.
8. Sume estos últimos momentos finales, multiplicados por la razón de las fuerzas laterales, a los momentos obtenidos en la distribución original. Éstos son los momentos de extremo de miembro finales en el marco.

El análisis del marco de la figura 21.3 se termina en la figura 21.7 con el método del desplazamiento lateral. Primero, se calculan los valores de I/L^2 para cada una de las columnas (iguales en este caso) en la parte (a) de la figura. Entonces, en la parte (b) se suponen momentos de desplazamiento lateral proporcionales a los valores de I/L^2 y se distribuyen en todo el marco, después de lo cual se calculan las reacciones horizontales en las bases de las columnas. Los momentos de desplazamiento lateral supuestos de −10 klb-pie se encuentran de modo que produzcan reacciones horizontales a la izquierda por un total de 0.92 klb. Sólo se necesitan 0.89 klb, y si

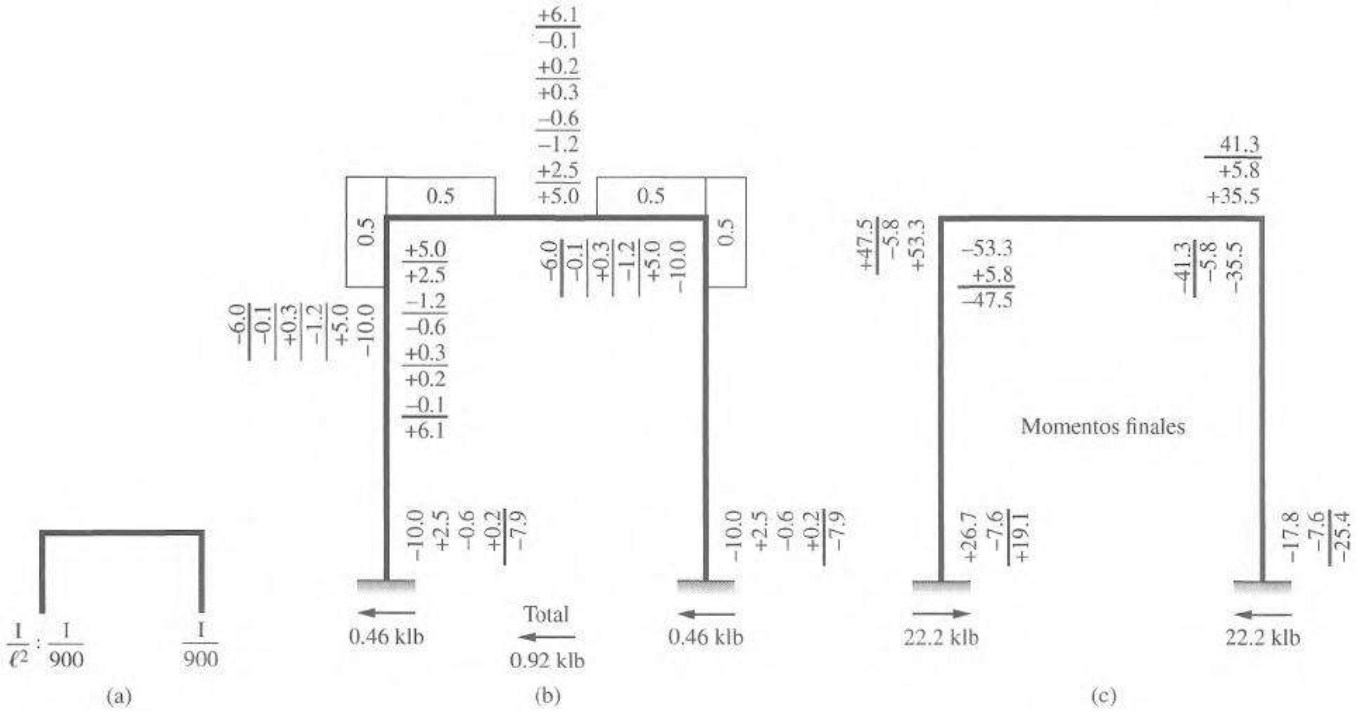


Figura 21.7

0.89/0.92 multiplicado por los valores de los momentos distribuidos se suman a los momentos de empotramiento distribuidos originalmente, se obtendrán los momentos finales. Los resultados se muestran en la figura 21.7(c). Las reacciones horizontales en las bases de las columnas también se calculan y se muestran.

Los ejemplos 21.3 a 21.5 presentan las soluciones para problemas adicionales de desplazamiento lateral. Se observará en el ejemplo 21.4 que las bases de las columnas tienen seguros. Esta situación no altera el método de solución. Para equilibrar los momentos de empotramiento o para equilibrar los momentos de desplazamiento lateral supuestos, las bases se equilibran hasta sus valores cero correctos como se hizo con las vigas continuas. Se usó un factor de tres cuartos para calcular las rigideces de las columnas para este ejemplo.

EJEMPLO 21.3

Usando distribución de momentos, encuentre todos los momentos de extremo en la estructura mostrada en la figura 21.8.

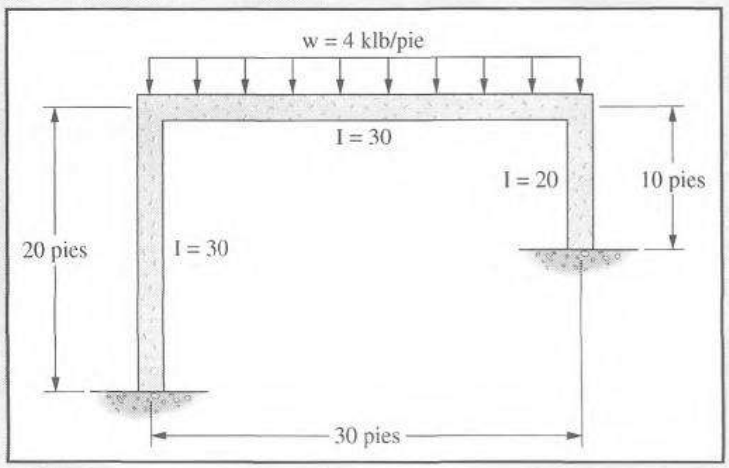
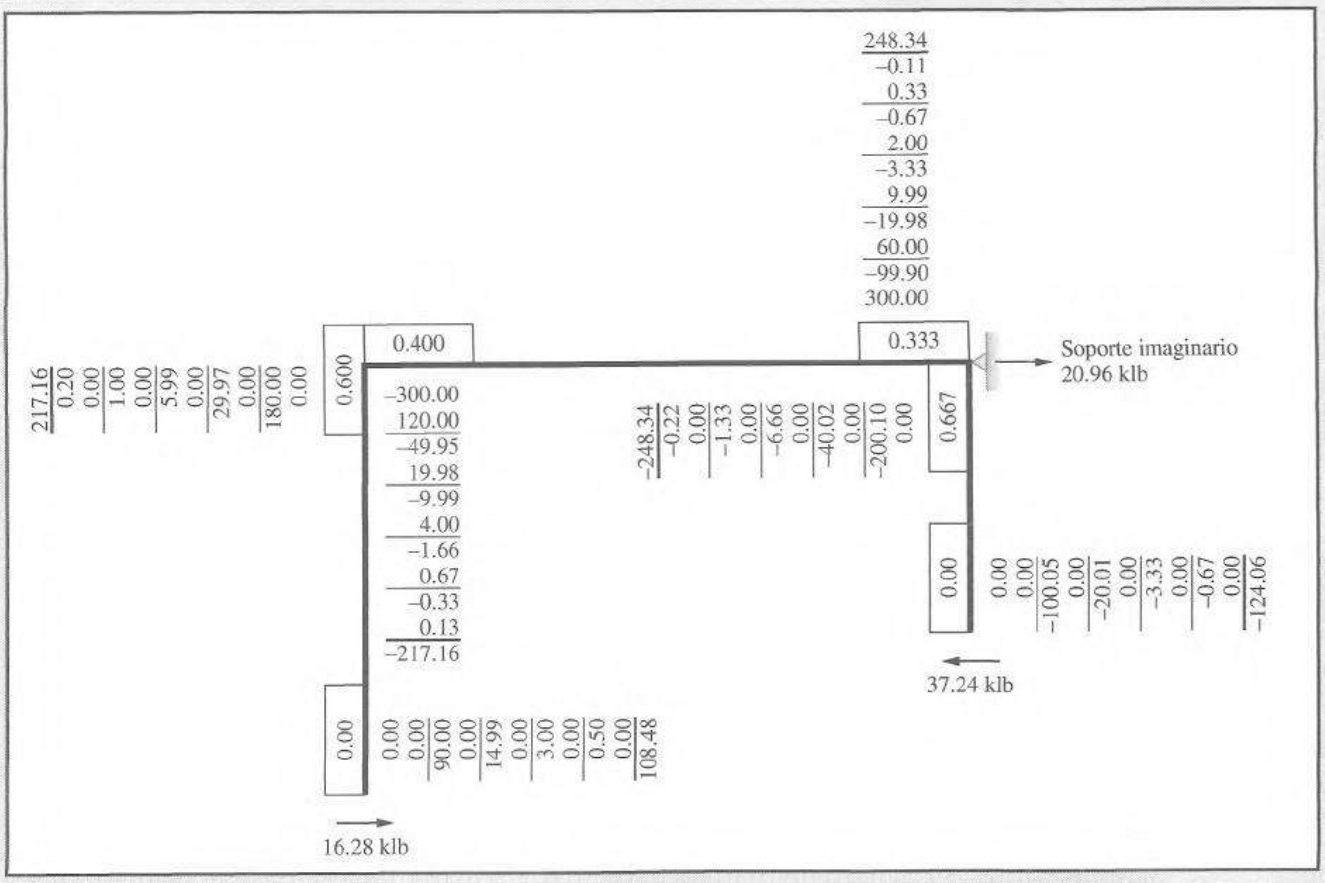


Figura 21.8

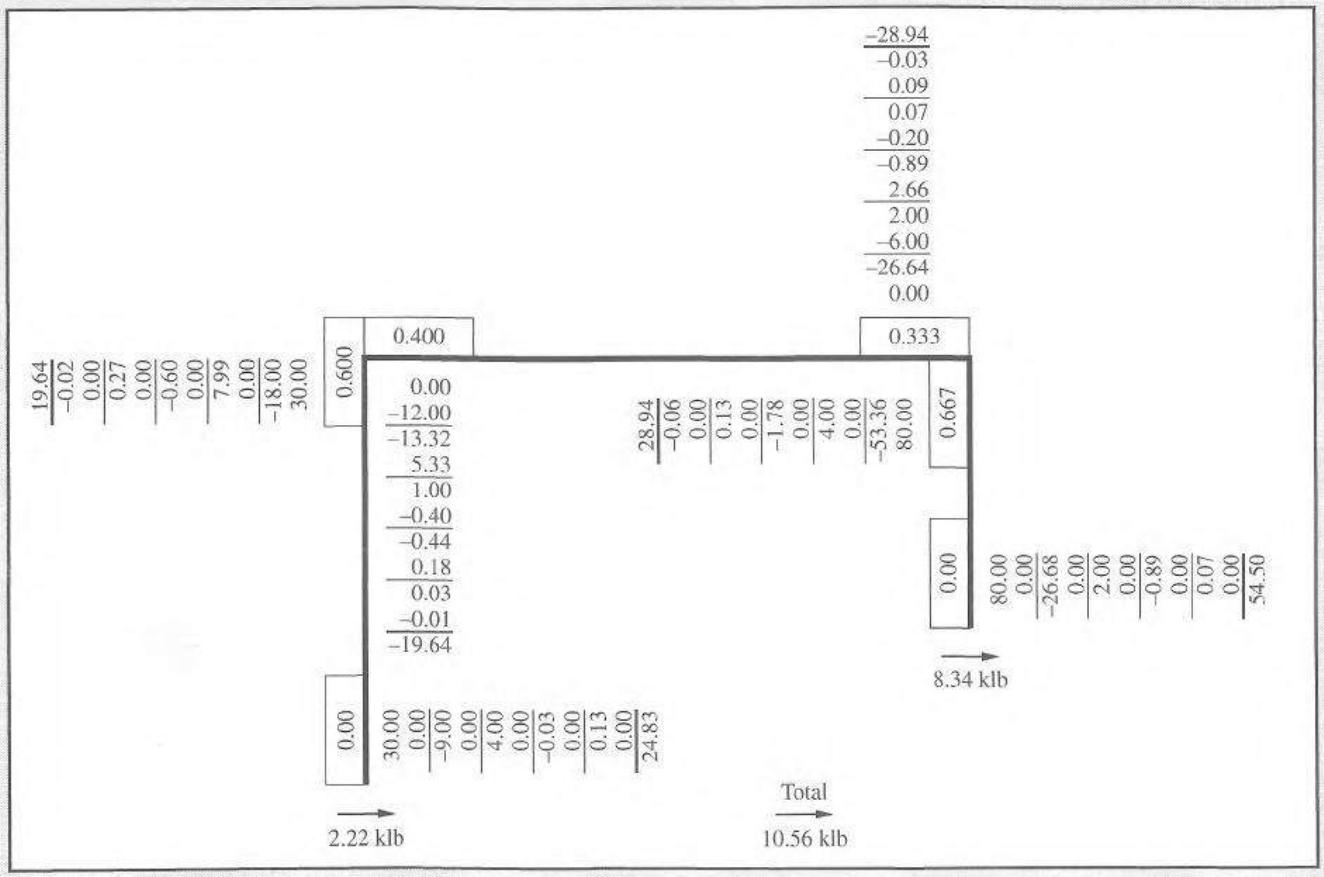
Solución. Distribuya los momentos de empotramiento y calcule las reacciones horizontales en las bases de las columnas.



De estos resultados vemos que el soporte imaginario debe ejercer una fuerza de 20.96 klb actuando hacia la derecha. Ésta es la fuerza necesaria por equilibrio estático en la dirección horizontal. Cuando la estructura se ladea, los momentos de ladeo supuestos son negativos y están en la siguiente proporción:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\dfrac{I_1}{L_1^2}}{\dfrac{I_2}{L_2^2}} = \frac{\dfrac{30}{20^2}}{\dfrac{20}{10^2}} = \frac{3}{8} \qquad \text{Sea} \begin{cases} M_1 = 30 \text{ klb-pie} \\ M_2 = 80 \text{ klb-pie} \end{cases}$$

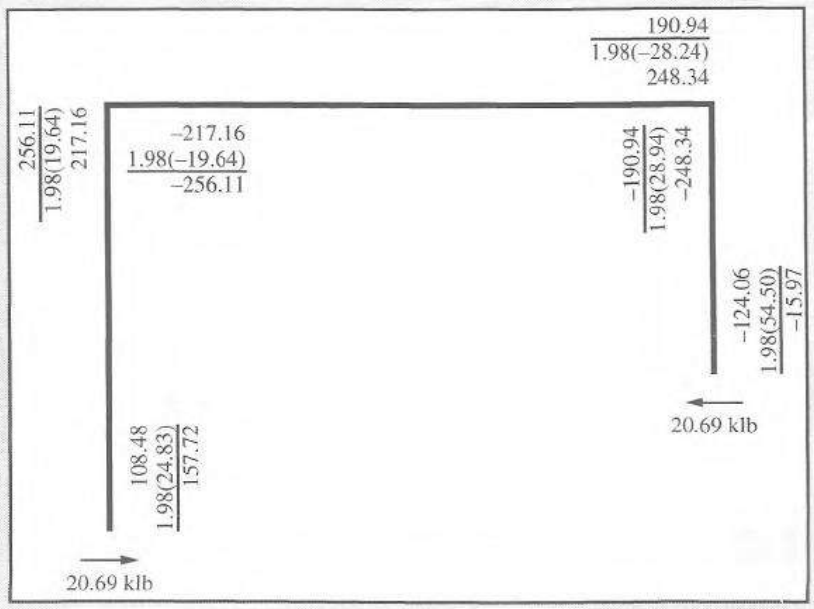
A continuación, distribuya esos momentos de ladeo supuestos.



El factor por el cual se multiplican los momentos de ladeo supuestos se calcula a partir de

$$\frac{20.96}{10.56} = 1.985$$

Los momentos de extremo de miembro finales en el marco son entonces iguales a 1.985 veces los momentos de ladeo supuestos distribuidos más los momentos de empotramiento distribuidos.



EJEMPLO 21.4

Determine los momentos finales de extremo de miembro para el marco mostrado en la figura 21.9.

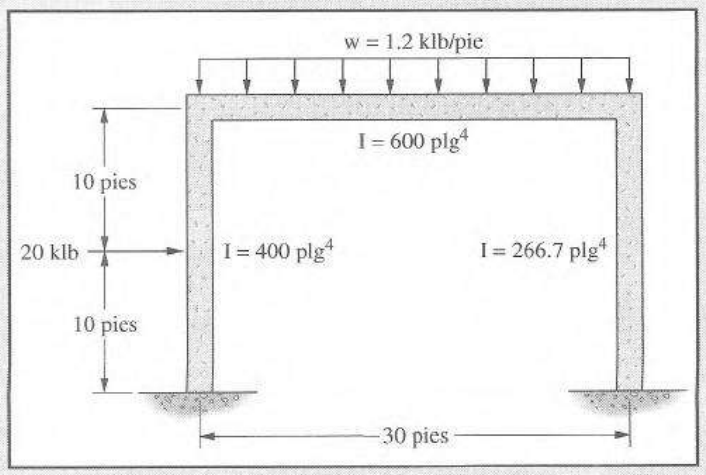
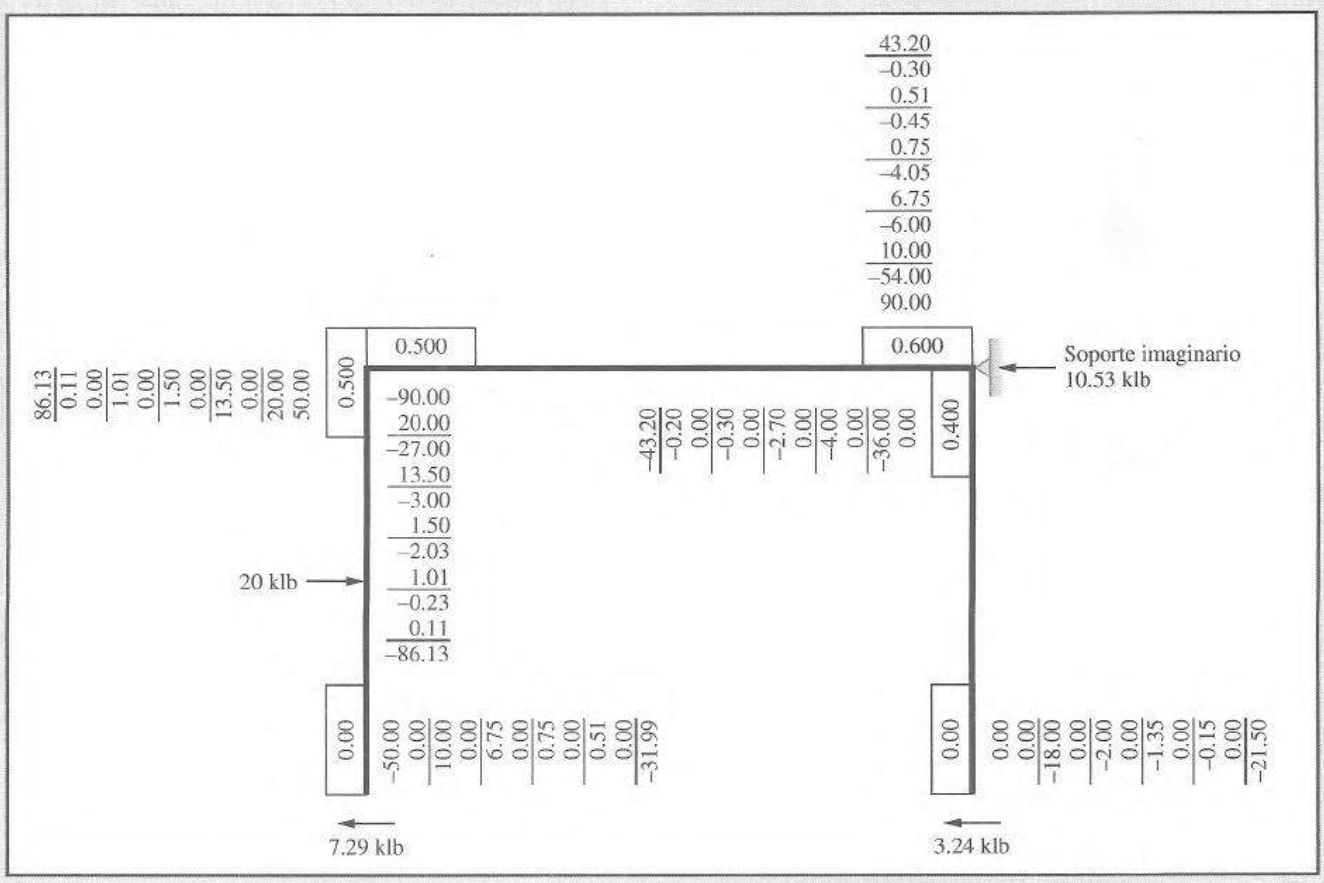


Figura 21.9

Solución. Distribuya los momentos de empotramiento y calcule las reacciones horizontales en las bases de las columnas.



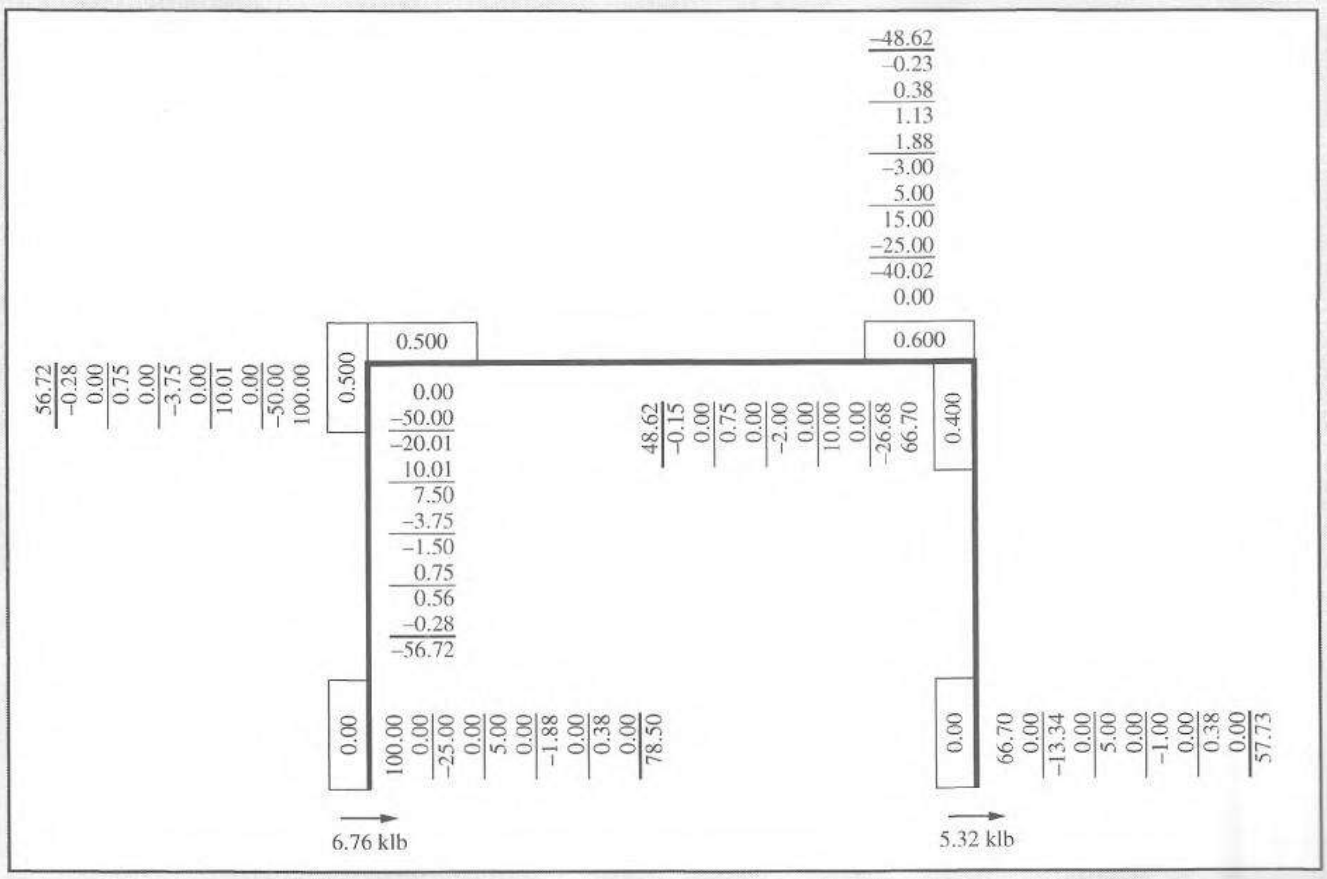
Al calcular las fuerzas cortantes en los extremos de los miembros, debemos incluir todas las fuerzas que actúan sobre los miembros. La columna izquierda tiene una carga concentrada actuando en el centro del claro. La fuerza cortante en la base de la columna izquierda es, entonces

$$H_{Izquierda} = \frac{+86.13 - 31.99 - (20)(10)}{20} = 7.29 \text{ klb} \leftarrow$$

Después de calcular la reacción en la base de la columna derecha, vemos que el soporte imaginario debe ejercer una fuerza de 10.53 klb actuando hacia la izquierda. Ésta es la fuerza necesaria por equilibrio estático en la dirección horizontal, incluyendo la carga lateral de 20 klb. Los momentos de desplazamiento lateral supuestos se determinan como sigue:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\dfrac{I_1}{L_1^2}}{\dfrac{I_2}{L_2^2}} = \frac{\dfrac{400}{20^2}}{\dfrac{266.7}{20^2}} = \frac{1.0}{0.667} \qquad \text{Sea} \begin{cases} M_1 = 100 \text{ klb-pie} \\ M_2 = 66.7 \text{ klb-pie} \end{cases}$$

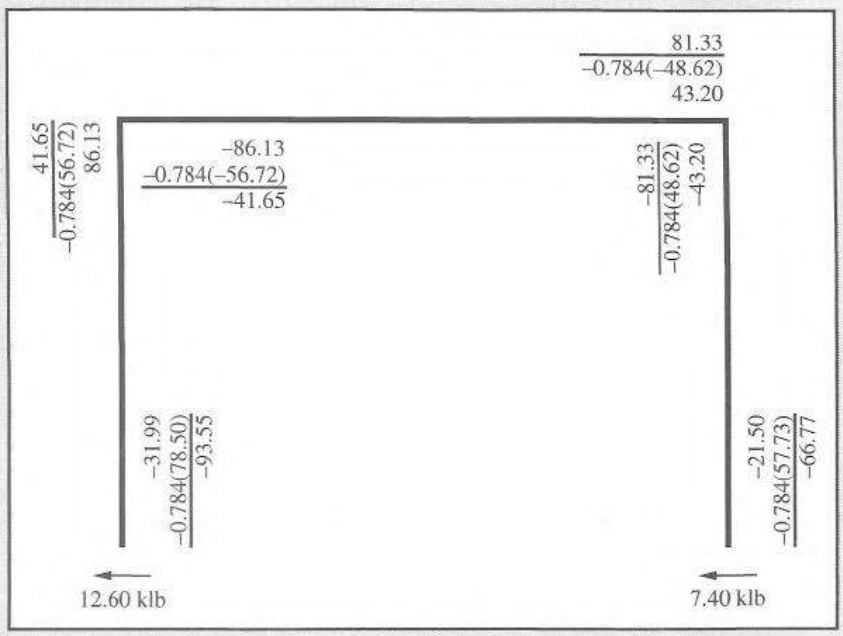
A continuación, distribuimos esos momentos de desplazamiento lateral supuestos:



El factor por el cual se multiplican los momentos de desplazamiento supuestos se calcula a partir de lo siguiente observando que los momentos de desplazamiento lateral supuestos debieron haber sido negativos.

$$S = -\frac{20 - 7.29 - 3.24}{6.76 + 5.32} = -0.784$$

Los momentos finales de extremo de miembro son iguales a los momentos de empotramiento distribuidos menos 0.784 veces los momentos de desplazamiento supuestos distribuidos.



En el ejemplo 21.5 se analiza un marco de dos crujías o tres columnas para mostrar que el mismo método de desplazamiento lateral puede usarse para analizar marcos sometidos a desplazamiento lateral independientemente de cuántas columnas estén presentes.

EJEMPLO 21.5

Calcule los momentos finales de extremo para el marco mostrado en la figura 21.10.

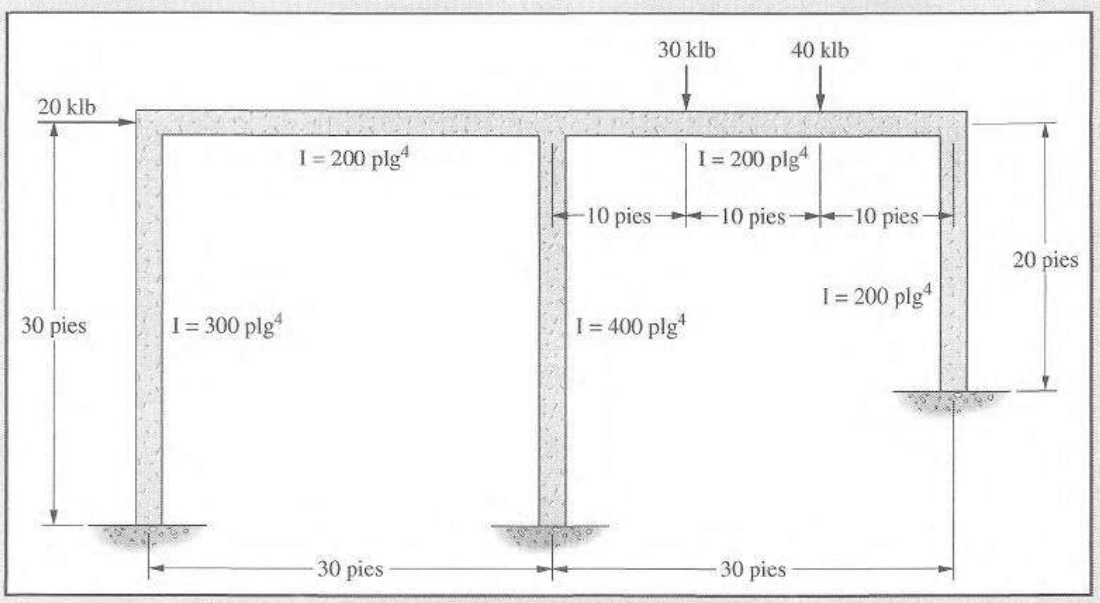
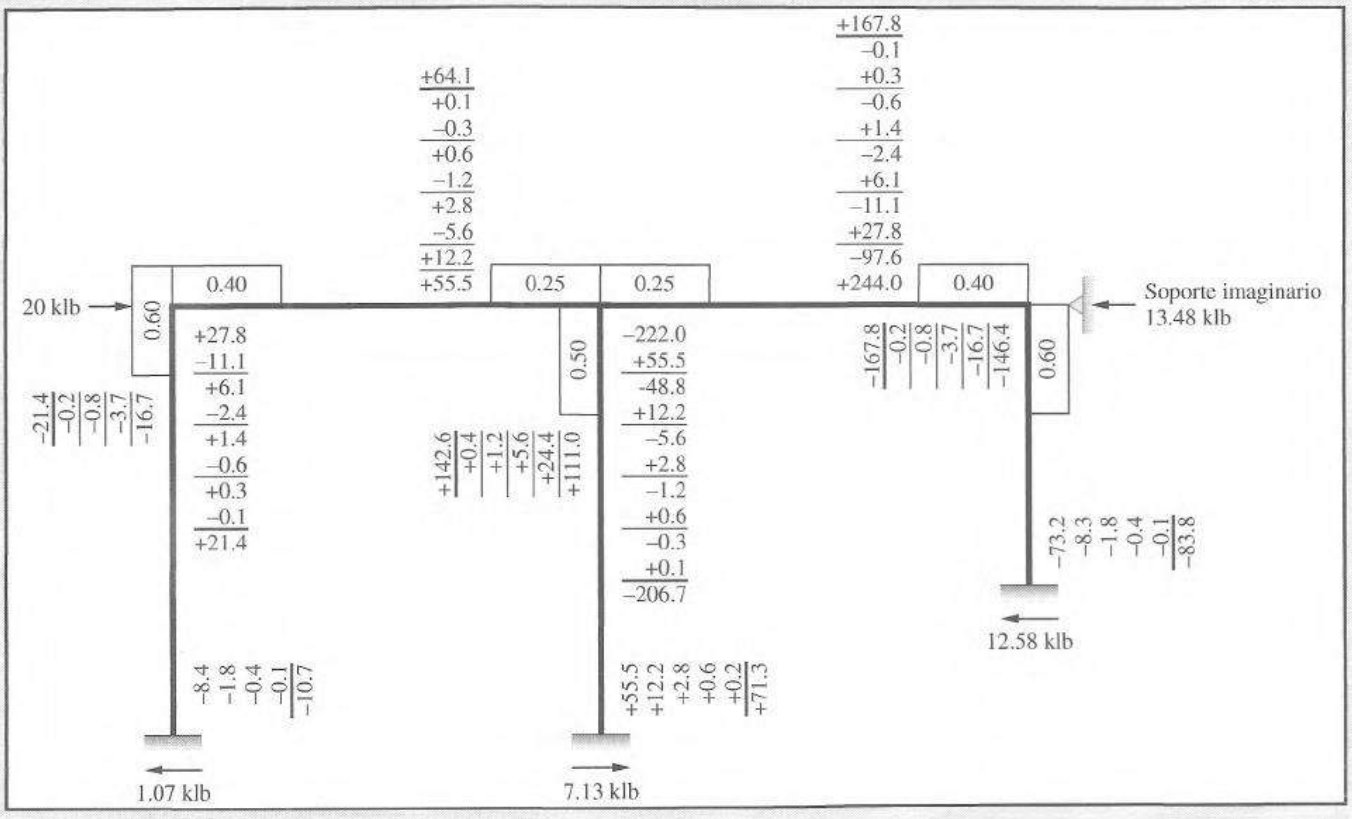


Figura 21.10

Solución. Distribuya los momentos de empotramiento y calcule las reacciones horizontales en las bases de las columnas.



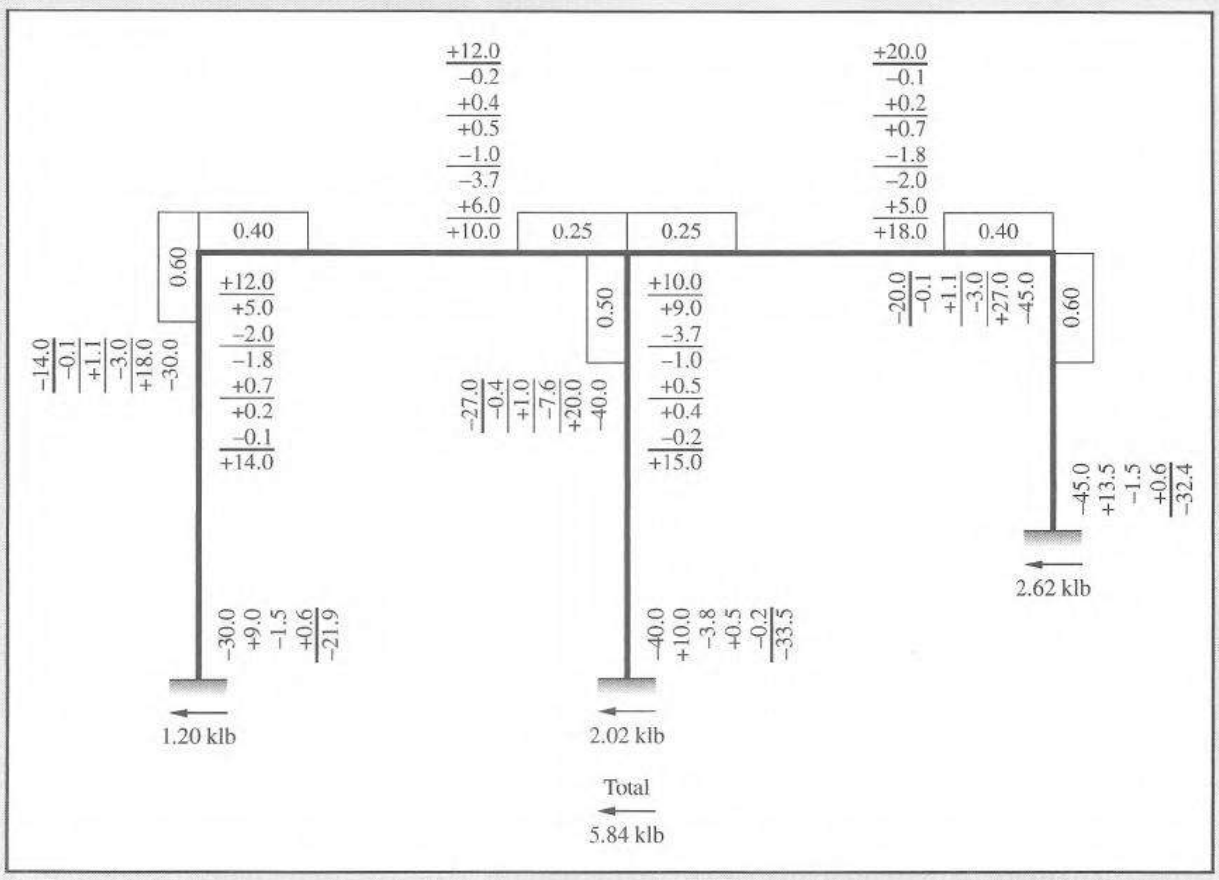
La estructura se ladea a la derecha; por lo tanto, se suponen momentos negativos en las columnas en proporción a los valores de $\frac{1}{L^2}$.

$$M_1 : M_2 : M_3$$

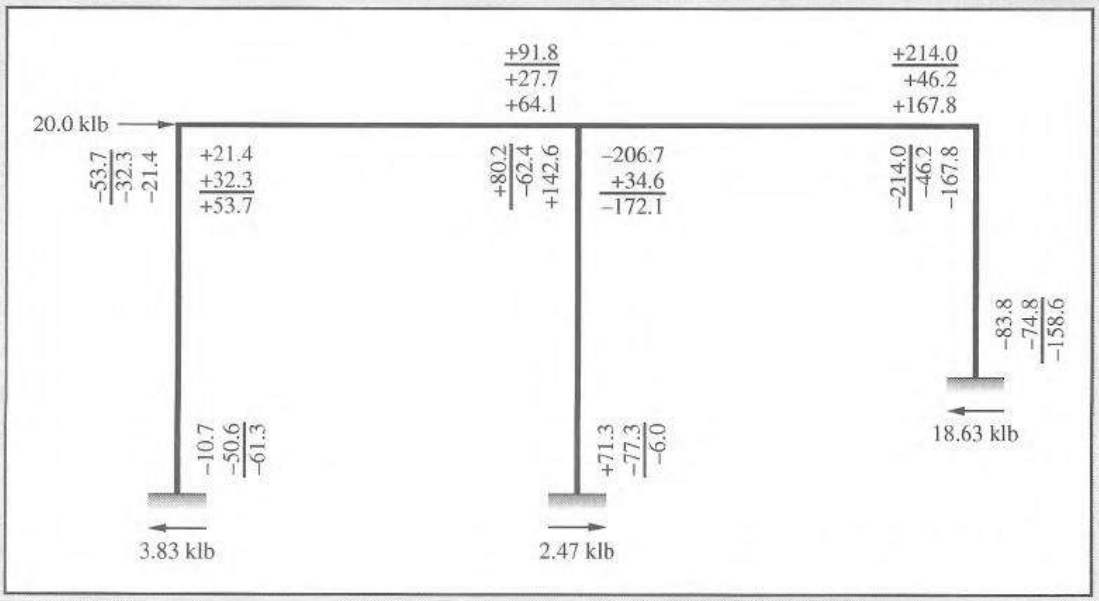
$$\frac{30}{30^2} : \frac{40}{30^2} : \frac{20}{20^2}$$

$$30 : 40 : 45$$

Distribuya los momentos de ladeo supuestos.

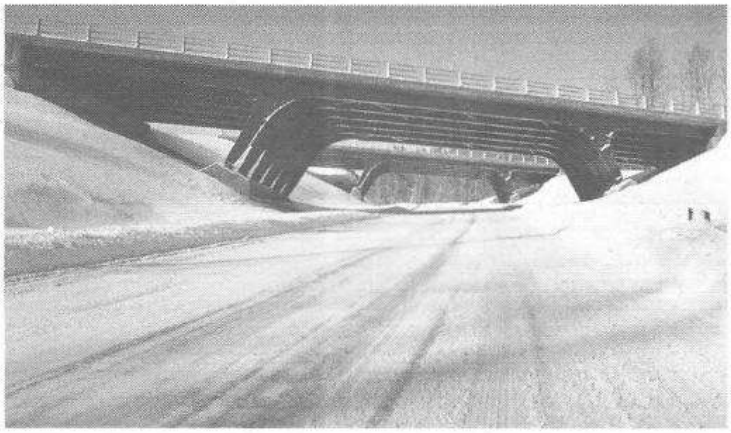


Momentos finales = momentos de empotramiento distribuidos + $\frac{13.48}{5.84}$ veces los momentos de desplazamiento lateral supuestos distribuidos.



21.4 MARCOS CON ELEMENTOS INCLINADOS

Los marcos considerados hasta ahora han estado compuestos de elementos verticales y horizontales. Antes se demostró en este capítulo que cuando en esos marcos se presenta el ladeo, en las columnas se producen momentos de empotramiento proporcionales a sus rigideces y al ladeo, es decir, a $6EI\Delta/L^2$. (Como $6E\Delta$ fue una constante en estos marcos, se consideraron los momentos de empotramiento proporcionales a sus valores I/L^2.) Además, los desplazamientos laterales no produjeron momentos de empotramiento en las vigas.



Puente I-91 en Lyndon, Vermont. (Cortesía de la Vermont Agency of Transportation.)

El marco con un elemento inclinado en la figura 21.11 puede analizarse, en gran parte, de la misma manera que los marcos con elementos verticales que consideramos con anterioridad. Los momentos de empotramiento debidos a cargas externas se calculan y se distribuyen; también se calculan las reacciones horizontales, y se determina la fuerza horizontal necesaria en el soporte imaginario.

Esos momentos de ladeo son proporcionales de nuevo a los valores $\frac{6EI\Delta}{L^2}$ en cada uno de los miembros. En marcos con columnas inclinadas, la magnitud de Δ en cada uno de los miembros es a menudo desigual, como lo son los valores de I y L. Por lo tanto, debemos considerar que los momentos de ladeo son proporcionales a los valores de $\frac{I\Delta}{L^2}$. Estos momentos supuestos son distribuidos, las reacciones horizontales son calculadas, y los momentos necesarios requeridos para el balanceo son calculados y sobrepuestos a los momentos distribuidos de empotramiento.

Para esta discusión, se considera y se supone que el marco de la figura 21.11(a) se ladea a la derecha como se muestra en la parte (b) de la figura. Puede verse que el movimiento lateral del

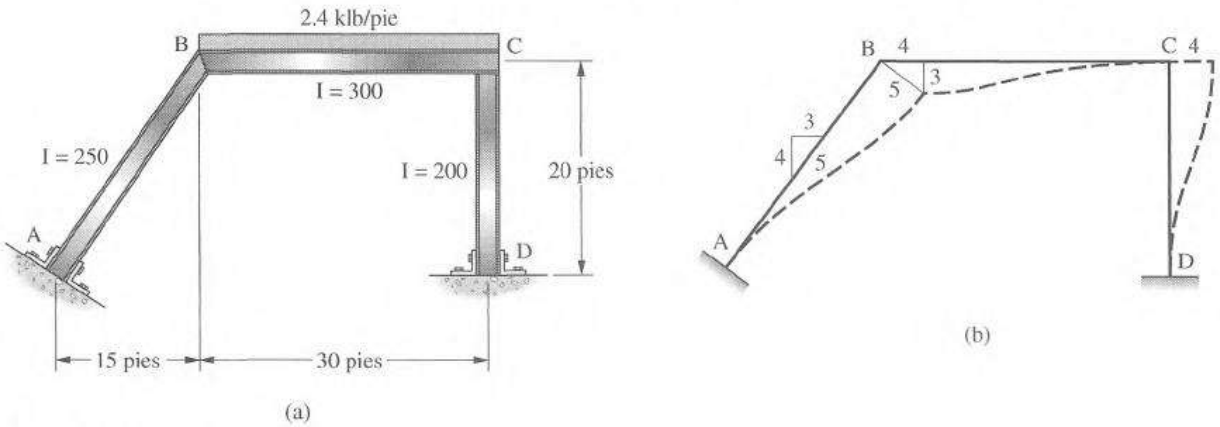


Figura 21.11

marco causará Δs, y por tanto momentos en la viga así como en las columnas. Para determinar el valor de $I\Delta/L^2$ para cada miembro es necesario determinar los valores relativos de Δ para los diferentes miembros.

A medida que el marco se ladea a la derecha, el nudo B describe un arco alrededor del nudo A y el nudo C describe un arco alrededor del nudo D. Como estos movimientos de arco son muy pequeños, se considera que consisten en líneas rectas perpendiculares a los respectivos miembros. En lugar de intentar desarrollar fórmulas trigonométricas complejas para los Δ relativos, el autor simplemente ha dibujado triángulos de deformación en la figura.

La columna AB tiene una pendiente de cuatro en sentido vertical, tres en sentido horizontal, o cinco en sentido inclinado. Si el movimiento relativo del nudo B perpendicular a AB se supone como cinco, entonces su movimiento vertical será tres y su movimiento horizontal será cuatro.

El nudo C se mueve en dirección horizontal a la derecha perpendicular al miembro CD. Si se desprecia el cambio de longitud del miembro BC, el nudo C debe moverse en sentido horizontal la misma distancia que el nudo B, o sea una distancia de cuatro. Ahora están disponibles los valores relativos de Δ como sigue: $\Delta_{AB} = 5$, en el sentido de las manecillas del reloj; $\Delta_{BC} = 3$, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj; y $\Delta_{CD} = 4$, en el sentido de las manecillas del reloj. La rotación en el sentido de las manecillas del reloj produce un momento resistente negativo o en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Estos valores se dan al final de este párrafo junto con los valores de $I\Delta/L^2$.

Valores relativos de Δ	Momentos de ladeo relativos $I\Delta/L^2$	
$\Delta_{AB} = -5$	$M_{AB} = \dfrac{(250)(-5)}{(25)^2} = -2$	aproximadamente -100 klb-pie
$\Delta_{BC} = +3$		
$\Delta_{CD} = -4$	$M_{BC} = \dfrac{(300)(+3)}{(30)^2} = +1$	aproximadamente $+50$ klb-pie
	$M_{CD} = \dfrac{(200)(-4)}{(20)^2} = -2$	aproximadamente -100 klb-pie

El ejemplo 21.6 muestra el análisis del marco de la figura 21.11. El mismo procedimiento usado para determinar las componentes de reacción horizontal en las bases de las columnas inclinadas se usa para las columnas verticales. (Es decir, se considera que cada columna es un cuerpo libre, y se toman momentos en la parte superior para determinar la reacción horizontal en su base.) Para las columnas verticales, las reacciones verticales pueden despreciarse por pasar por los puntos donde se toman los momentos. *Éste no es el caso para las columnas inclinadas y las reacciones verticales serán incluidas en las ecuaciones de momentos.*

La columna izquierda AB del marco de la figura 21.11 se considera como un cuerpo libre después de haber distribuido los momentos de empotramiento y se muestra en la figura 21.12. Tomando momentos en B para determinar H_A, resulta la siguiente ecuación:

$$+59.9 + 120 + 15V_A - 20H_A = 0$$

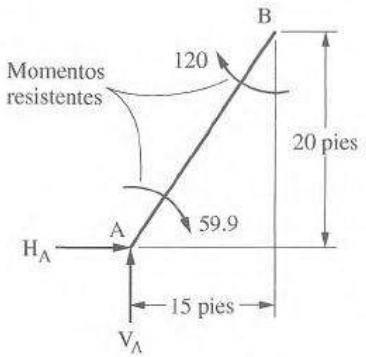


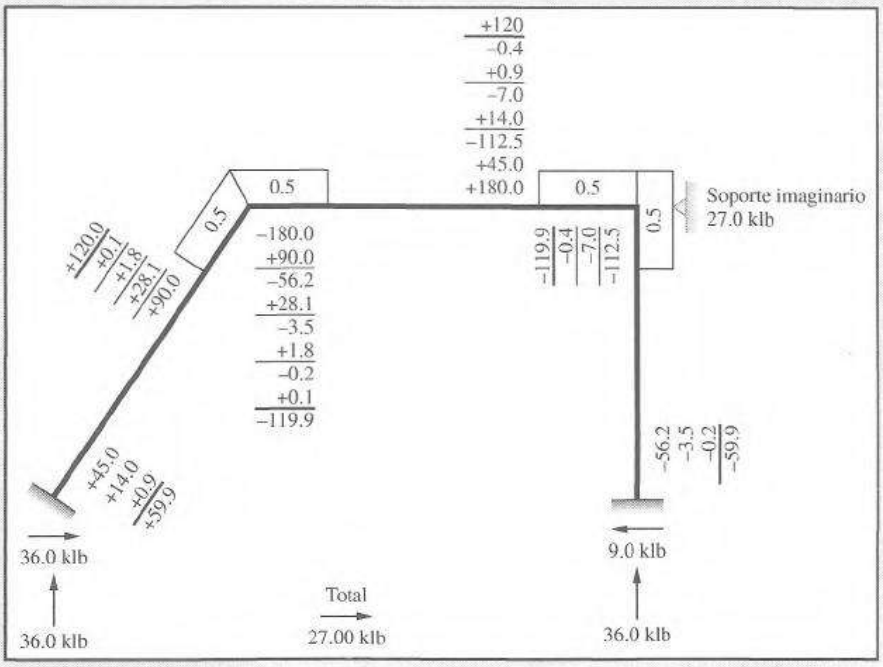
Figura 21.12

Observe que es necesario calcular V_A antes de resolver la ecuación para H_A. El autor encuentra conveniente aislar la viga BC como cuerpo libre y calcular la reacción vertical aplicada a cada extremo por las columnas. Una vez que se determina el valor en B, la suma de las fuerzas verticales en la columna AB se iguala a cero y puede determinarse V_A. Se sigue el mismo procedimiento después de distribuir los momentos de ladeo supuestos.

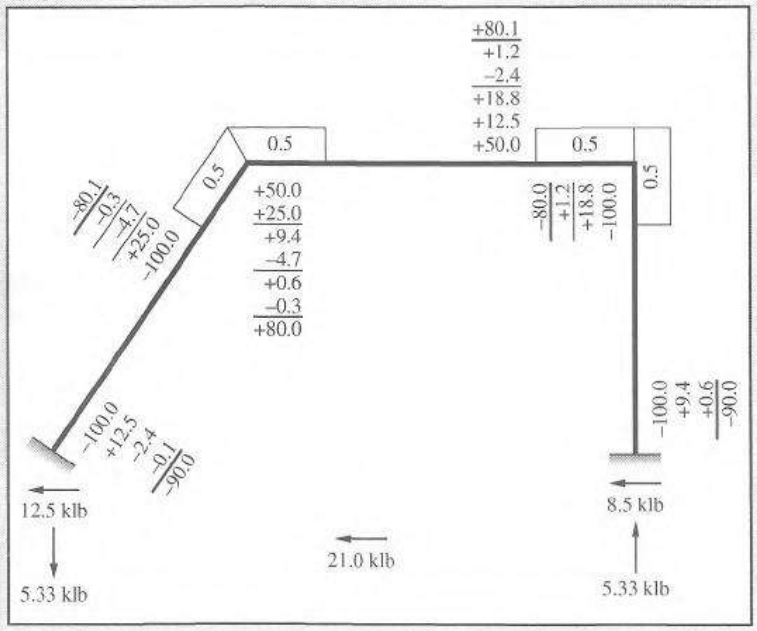
EJEMPLO 21.6

Determine los momentos de extremo finales para el marco mostrado en la figura 21.11.

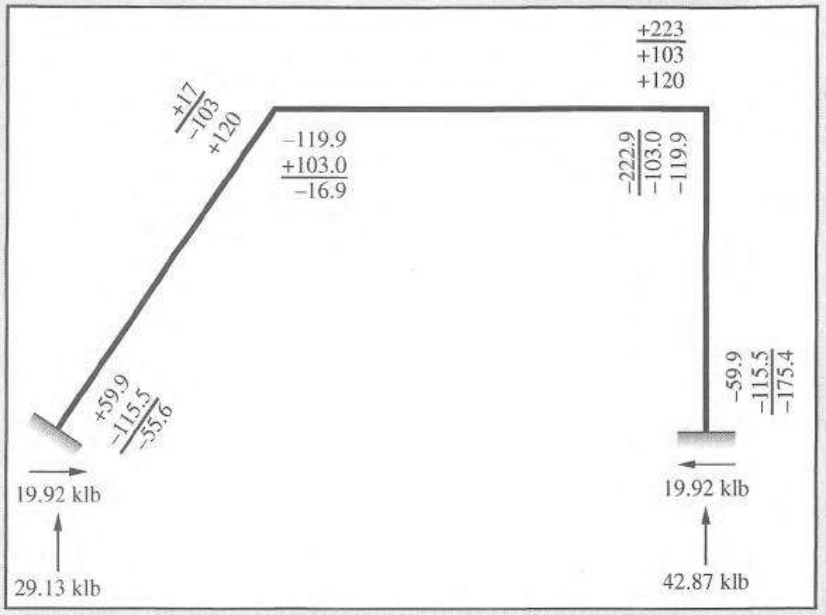
Solución. Distribuya los momentos de empotramiento y determine las reacciones en los apoyos.



Distribuya los momentos de ladeo supuestos.



Momentos finales $= +\frac{27.0}{21.0}$ veces los momentos de ladeo supuestos distribuidos más los momentos de empotramiento distribuidos.



En la figura 21.13 se presenta otra ilustración de la determinación de los valores relativos de Δ para un marco con elementos inclinados. Con los números mostrados inicialmente en los triángulos de deformación, el nudo B se mueve tres unidades a la derecha y el nudo C se mueve cuatro unidades a la derecha, pero el movimiento horizontal de los nudos B y C debe ser igual. Por esta razón los valores iniciales en C se marcan y se multiplican por tres cuartos, de modo que los valores horizontales sean iguales. Los valores resultantes se muestran en seguida.

Valores relativos de Δ
$\Delta_{AB} = -3.605$
$\Delta_{BC} = +4.25$
$\Delta_{CD} = -3.75$

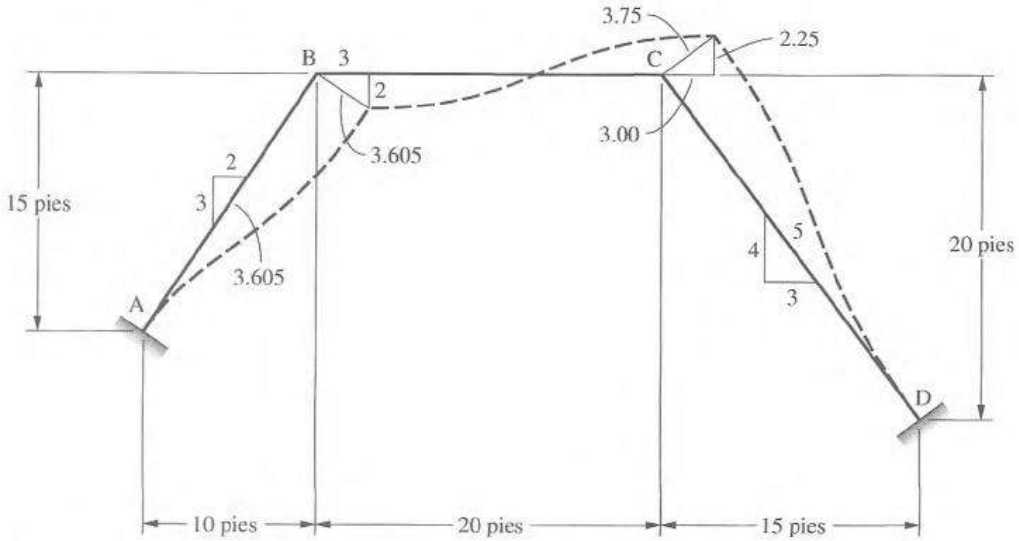


Figura 21.13

De los análisis considerados en este capítulo es obvio que los miembros de marcos están sometidos a fuerzas axiales (y por tanto a deformaciones axiales), así como a momentos flexionantes y fuerzas cortantes. *El lector debe entender claramente que los efectos de las deformaciones axiales (si bien generalmente son insignificantes) se desprecian en los procedimientos de distribución de momentos descritos aquí.*

21.5 MARCOS DE NIVELES MÚLTIPLES

Hay dos maneras posibles en que el marco en la figura 21.14 puede desplazarse lateralmente. Es obvio que las cargas P_1 y P_2 harán que ambos pisos de la estructura se desplacen hacia la derecha, pero no se sabe cuál es la magnitud del desplazamiento en el piso superior (condición x) o cuál es su valor para el piso inferior (condición y). Ambas condiciones de desplazamiento lateral tienen que considerarse.

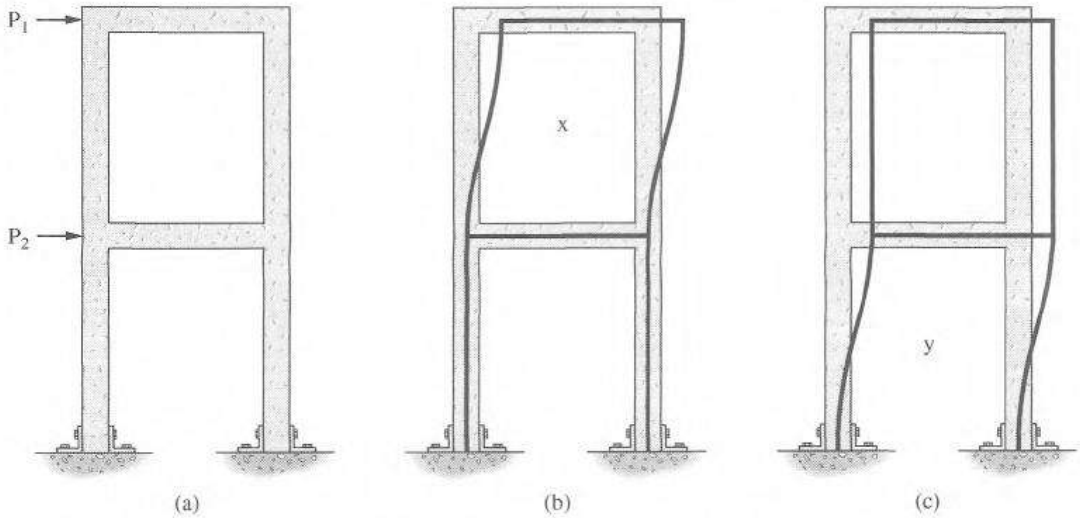


Figura 21.14 Desplazamiento lateral de pisos en un marco de dos pisos.

El análisis del marco por el procedimiento acostumbrado de desplazamiento lateral incluiría (1) una hipótesis de momentos en el piso superior para la condición x y la distribución de los momentos para el marco completo, y (2) una hipótesis de momentos en el piso inferior para la condición y y la distribución de los momentos para el marco completo. Podría escribirse una ecuación para el piso superior igualando x veces las fuerzas horizontales causadas por los momentos x más y veces las fuerzas horizontales causadas por los momentos y con la fuerza cortante real total en el piso, P_1. Podría escribirse una ecuación similar para el piso inferior al igualar las fuerzas horizontales causadas por los momentos supuestos con la fuerza cortante en ese piso, $P_1 + P_2$. La solución simultánea de las dos ecuaciones daría los valores de x y de y. Los momentos finales en el marco son iguales a x veces los momentos distribuidos x más y veces los momentos distribuidos y.

El método del desplazamiento lateral no es difícil de aplicar a un marco de dos niveles, pero para marcos de múltiples niveles, el método resulta engorroso porque cada nivel adicional introduce otra condición de desplazamiento lateral y otra ecuación simultánea.

El profesor C. T. Morris de la Universidad estatal de Ohio introduce un método mucho más simple para manejar los marcos de múltiples niveles, el cual incluye una serie de correcciones sucesivas.[1] Su método también se basa en la fuerza cortante horizontal total a lo largo de cada nivel

[1] C. T. Morris, "Morris on Analysis of Continuous Frames", *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 96 (1932): 66-69.

del edificio. Al considerar el marco de la figura 21.15(a), que se deflexiona lateralmente por las cargas P_1 y P_2, se supone que cada columna adopta la forma S aproximada que se muestra en (b).

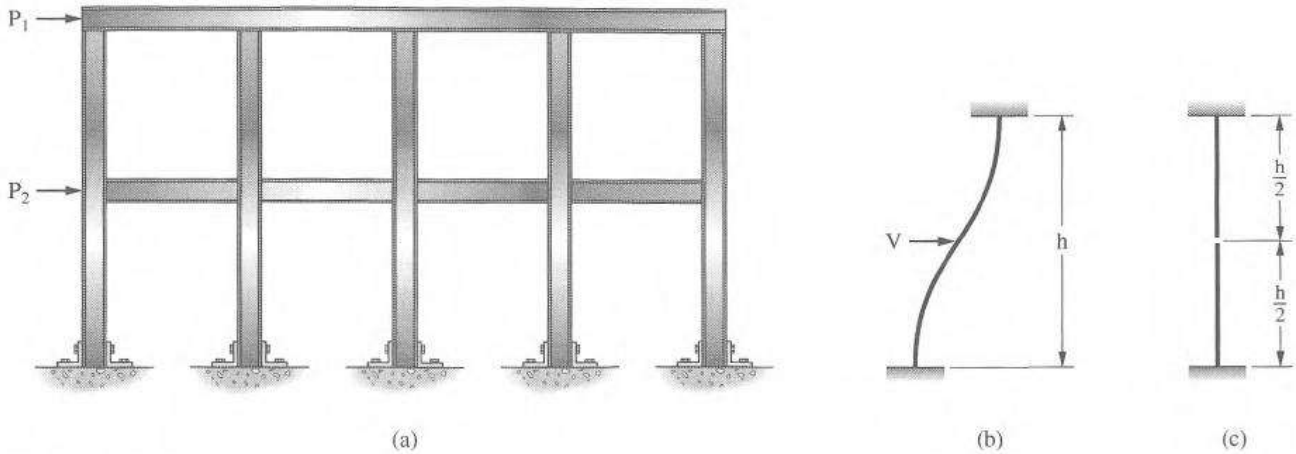


Figura 21.15

A la mitad de la altura de las columnas se supone que hay un punto de contraflexión. Puede considerarse que la columna consiste en un par de vigas en voladizo, una por arriba del punto y otra por debajo del punto, como se muestra en (c). El momento en cada voladizo será igual a la fuerza cortante multiplicada por $h/2 = Vh/2$, y el momento total superior e inferior es igual a $Vh/2 + Vh/2 = Vh$. Como tal, el momento total en una columna es igual a la fuerza cortante sustentada por la columna multiplicada por la altura de la columna.

Edificio de oficinas en 99 Park Avenue, Nueva York. (Cortesía del American Institute of Steel Construction, Inc.)

En forma similar, para cualquier nivel los momentos totales superior e inferior de todas las columnas son iguales a la fuerza cortante total en ese nivel, multiplicada por la altura de la columna. El método consiste en suponer inicialmente este total para los momentos de las columnas en un piso y distribuirlo entre las columnas proporcionalmente a sus valores de I/L^2.

El momento tomado por cada columna se distribuye como la mitad para el extremo superior y la mitad para el extremo inferior. Los nudos se equilibran, incluyendo los momentos de empotramiento, sin efectuar el transporte hasta que se equilibren todos los nudos. En este momento la suma de los momentos de la columna no es igual al valor final correcto; así, éstos se corrigen en su total inicial y final, y los nudos se equilibran nuevamente. Las correcciones sucesivas funcionan extraordinariamente bien para marcos individuales o de múltiples niveles, como lo muestran los ejemplos 21.7 y 21.8. El procedimiento que se usa es como sigue:

1. Calcule los momentos de empotramiento.
2. Calcule los momentos totales en las columnas (iguales a la fuerza cortante en ese nivel multiplicada por la altura de la columna) para cada nivel y distribúyalos entre las columnas en proporción a sus valores de I/L^2, luego divida cada valor por la mitad; una mitad para la parte superior de la columna y la otra mitad para la inferior.
3. Equilibre todos los nudos en la estructura completa, sin hacer transportes.
4. Haga el transporte para el marco completo.
5. El total de los momentos de las columnas en cada nivel ha cambiado y no será igual a la fuerza cortante multiplicada por la altura de la comuna. Determine la diferencia y sume o reste la cantidad para las columnas proporcionalmente a sus valores de I/L^2.
6. Los pasos 3 a 5 se repiten una y otra vez hasta que la cantidad de correcciones que se hagan sea despreciable.

EJEMPLO 21.7

Determine los momentos finales para la estructura de la figura 21.16. Use el método de correcciones sucesivas desarrollado por el profesor Morris.

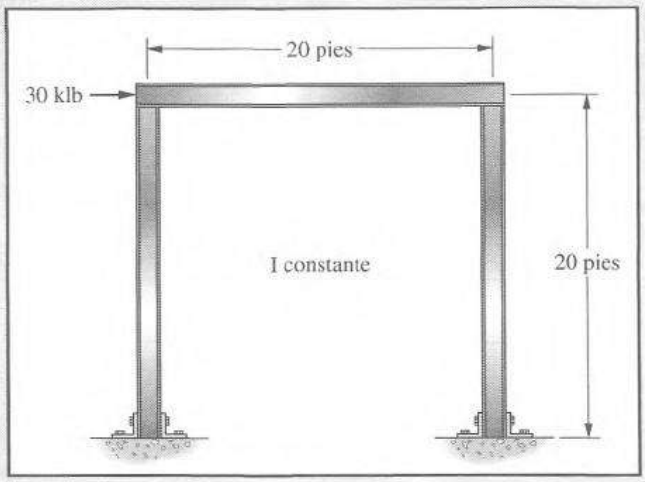
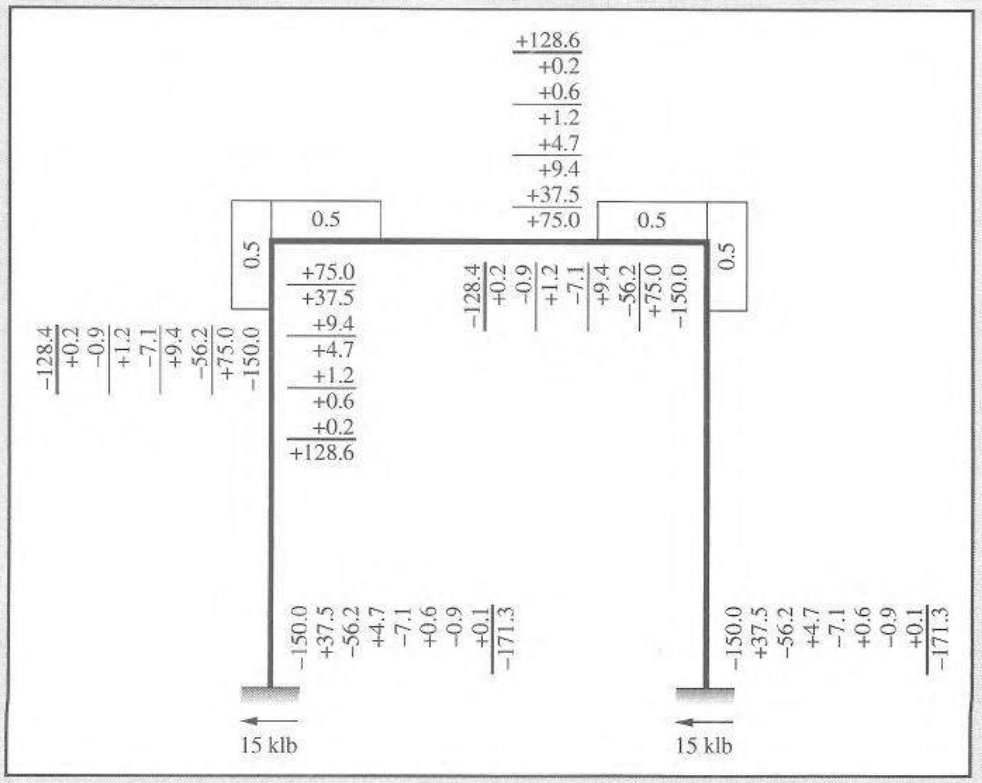


Figura 21.16



EJEMPLO 21.8

Determine los momentos finales para el marco de la figura 21.17 mediante correcciones sucesivas.

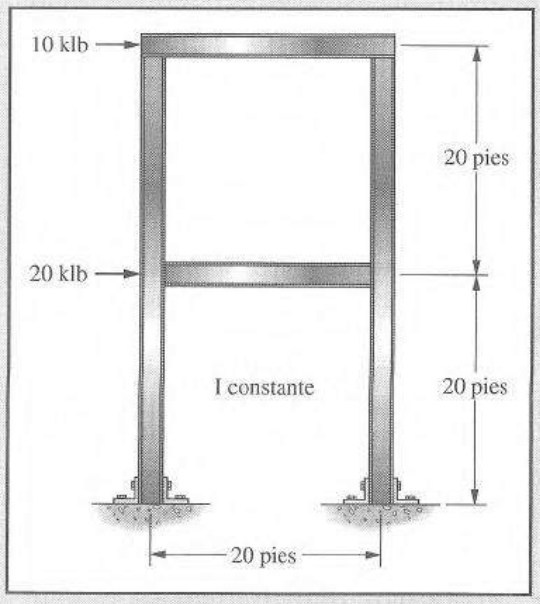
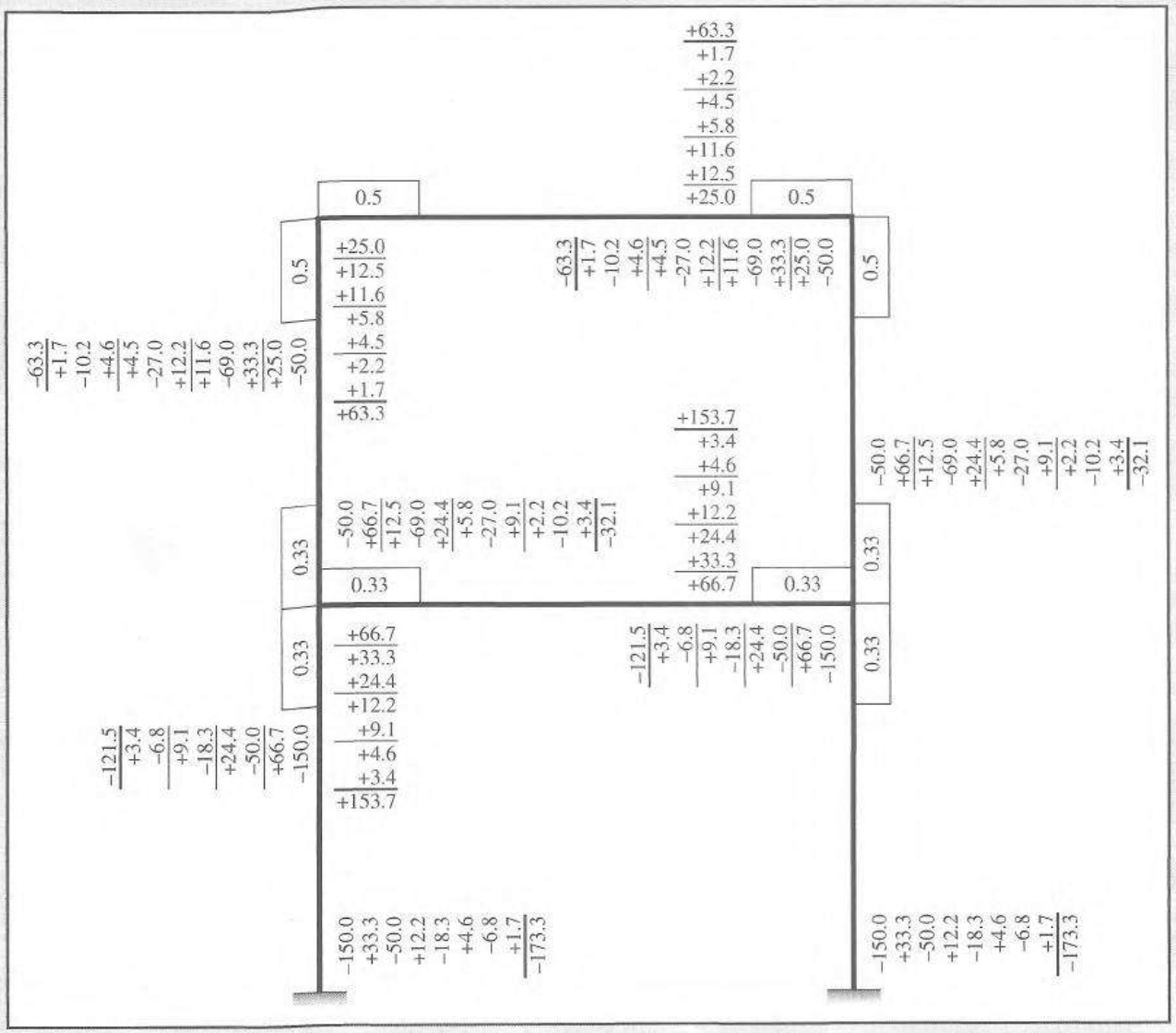


Figura 21.17

Solución.



21.6 ANÁLISIS CON COMPUTADORA DE LOS MARCOS

El ejemplo 21.9 presenta el análisis de un marco de un nivel y una crujía con SABLE32. Con una excepción, el procedimiento es el mismo que el que se usó anteriormente para las vigas. Esta excepción alude a los sistemas de coordenadas.

Se usan dos sistemas de coordenadas en SABLE32. Éstos son el sistema global de coordenadas y el sistema de coordenadas de los elementos, que también se conoce como el sistema local de coordenadas. El sistema global se usa para especificar los datos de los nudos o juntas en una estructura y para interpretar los desplazamientos y las fuerzas calculados en los nudos. El sistema de los elementos o sistema local se usa para especificar los datos relativos a los elementos o miembros en la estructura y para interpretar las fuerzas calculadas en los elementos.

Los dos sistemas coordenados se estudian con detalle en el capítulo 24. El lector aprenderá en el capítulo de matrices que el sistema local de coordenadas o de los elementos se establece para

cada miembro de la estructura dibujando el eje x a lo largo del eje del miembro independientemente de que sea inclinado, vertical u horizontal. Para los marcos esto afectará la dirección de las cargas. Como una muestra, la carga de 50 klb del miembro horizontal mostrado en la figura 21.18 estará en la dirección y perpendicular a la columna izquierda.

EJEMPLO 21.9

Determine los momentos de extremo de los miembros del marco mostrado en la figura 21.18 usando SABLE32. Las áreas de los miembros, los momentos de inercia y los módulos de elasticidad son constantes para todos los miembros.

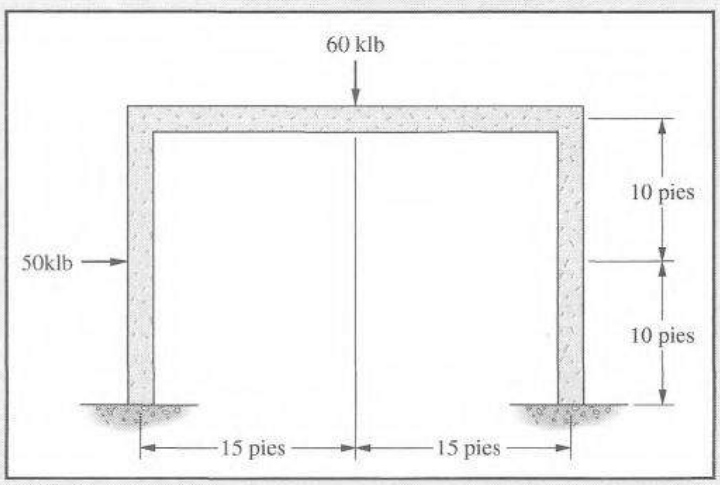
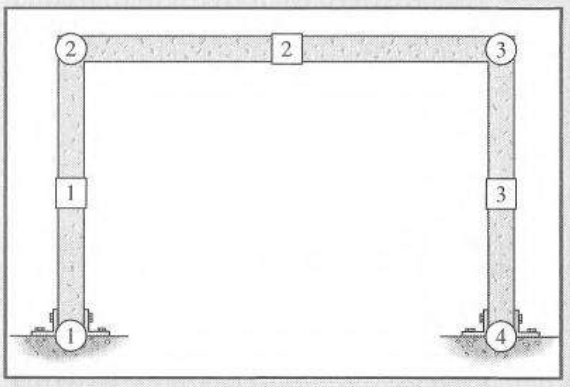


Figura 21.18

Solución. Numerando los nudos y los miembros del marco.



ENTRADA

Posición de los nudos y restricciones

	Coordenadas			Restricciones		
Nudo	X	Y	Z	X	Y	Rotación
1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	S	S	S
2	0.000E+00	2.000E+01	0.000E+00	N	N	N
3	3.000E+01	2.000E+01	0.000E+00	N	N	N
4	3.000E+01	0.000E+00	0.000E+00	S	S	S

Posición de las vigas y datos de propiedades

Viga	i	j	Tipo	Estado	Área	Izz	E
1	1	2	F-F	A	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00
2	2	3	F-F	A	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00
3	3	4	F-F	A	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00

Cargas aplicadas a las vigas

Viga	Caso	P	a	W
1	1	−5.000E+01	1.000E+01	0.000E+00
2	1	−6.000E+01	1.500E+01	0.000E+00
3	1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

SALIDA

Fuerzas de extremo en las vigas

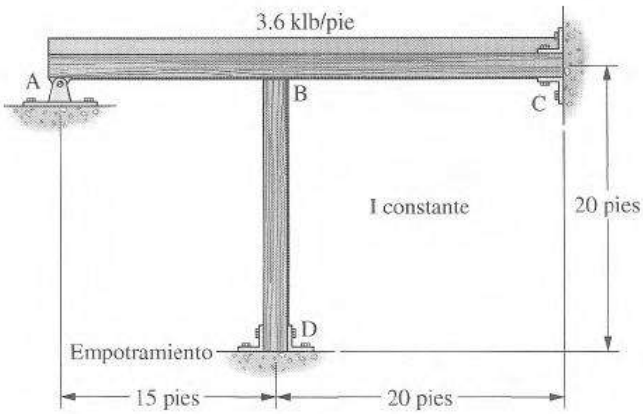
Viga	Caso	Extremo	Axial	Cortante-Y	Momento-Z
1	1	i	2.668E+01	2.857E+01	2.048E+02
		j	−2.668E+01	2.143E+01	−1.333E+02
2	1	i	2.143E+01	2.668E+01	1.333E+02
		j	−2.143E+01	3.332E+01	−2.330E+02
3	1	i	3.332E+01	2.143E+01	2.330E+02
		j	−3.332E+01	−2.143E+01	1.956E+02

■

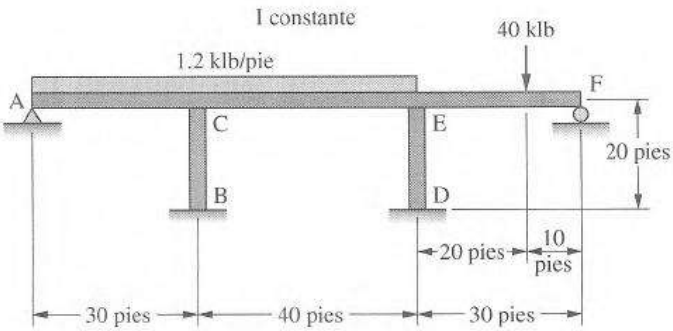
21.7 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

Balancee los momentos y calcule las reacciones horizontales en las bases de las columnas para los problemas 21.1 al 21.6.

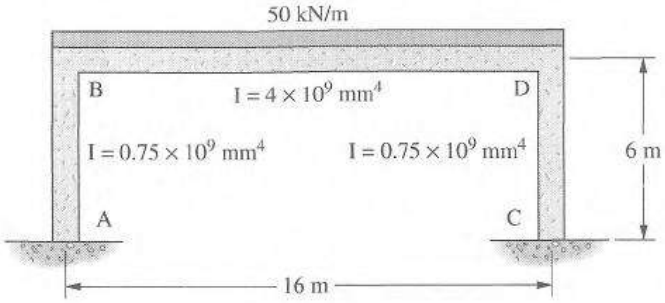
21.1 (*Resp.:* $M_{BA} = 107.5$ klb-pie, $M_{CB} = 123.1$ klb-pie.)



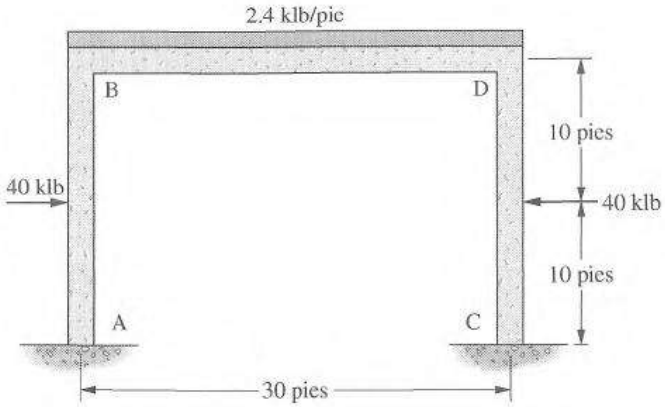
21.2



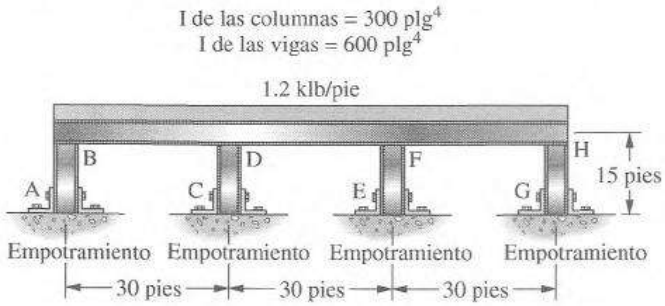
21.3 (*Resp.:* $M_{BA} = 533.6$ kN, $M_{DB} = 533.2$ kN · m.)



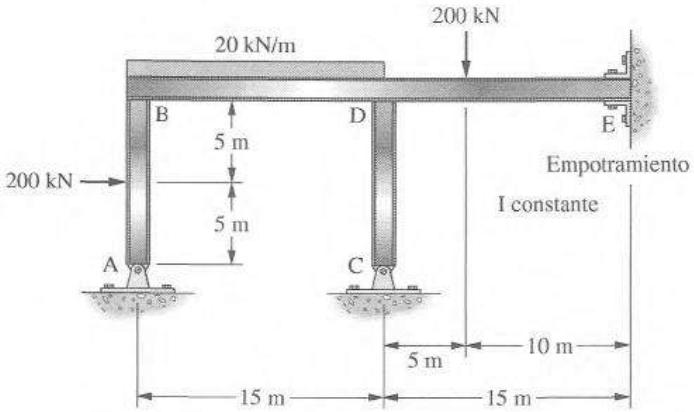
21.4



21.5 (*Resp.:* $M_{AB} = 23.7$ klb-pie, $M_{DF} = 94.7$ klb-pie.)

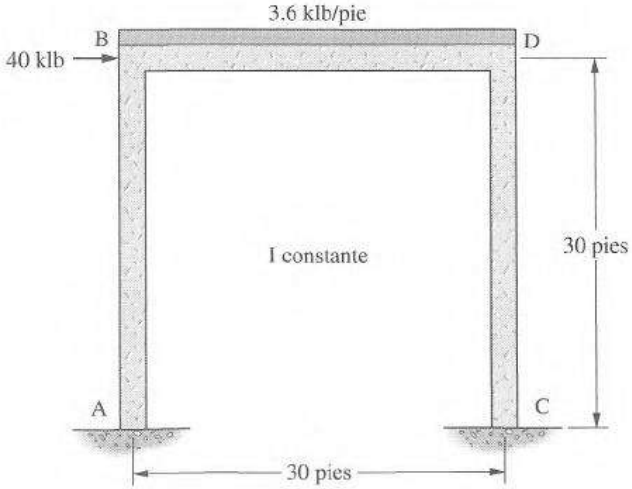


21.6

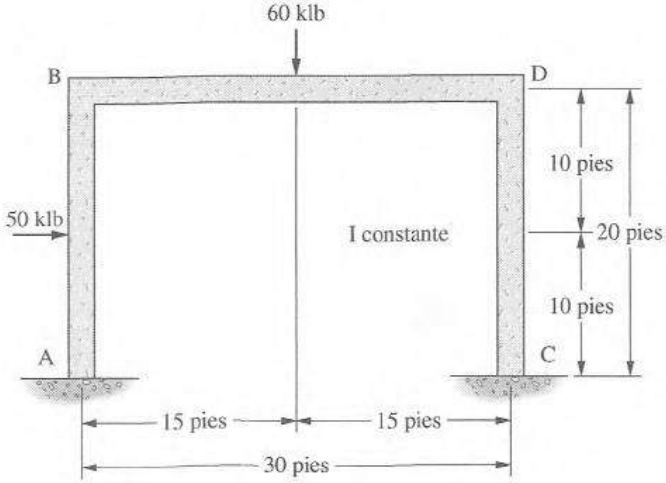


Para los problemas 21.7 a 21.9 determine los momentos finales con el método de desplazamiento lateral.

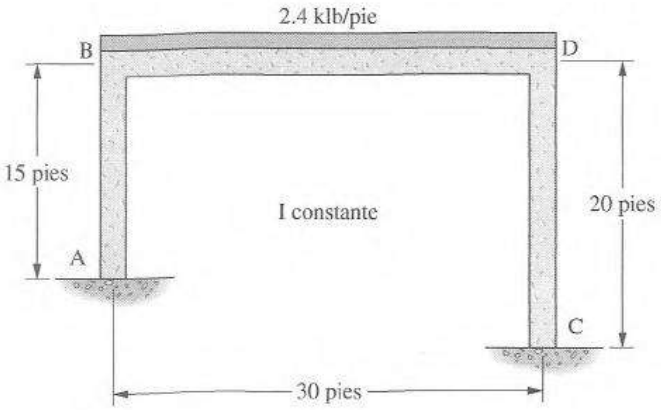
21.7 (*Resp.:* $M_{BA} = 77.2$ klb-pie, $M_{DC} = 437.2$ klb-pie.)



21.8



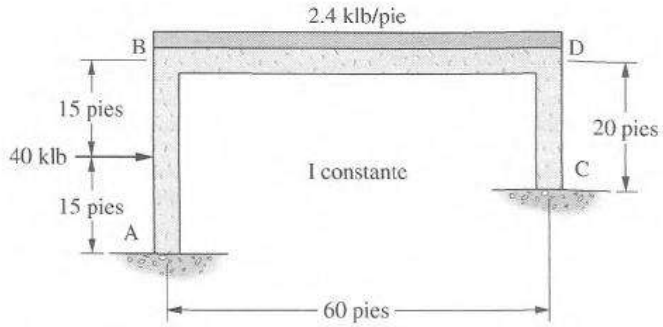
21.9 (*Resp.:* $M_{BD} = 130.9$ klb-pie, $M_{CD} = 85.7$ klb-pie.)



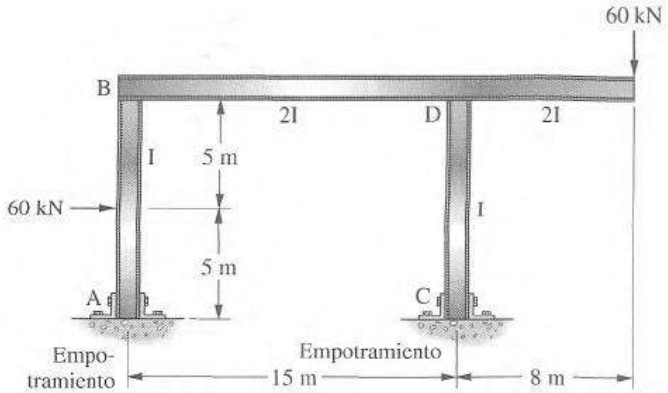
21.10 Resuelva el problema 21.7 suponiendo que las bases de las columnas están articuladas.

21.11 Resuelva el problema 21.8 suponiendo que la columna CD está articulada en su base. (*Resp.:* $M_{BA} = 99.1$ klb-pie, $M_{DC} = 219.5$ klb-pie.)

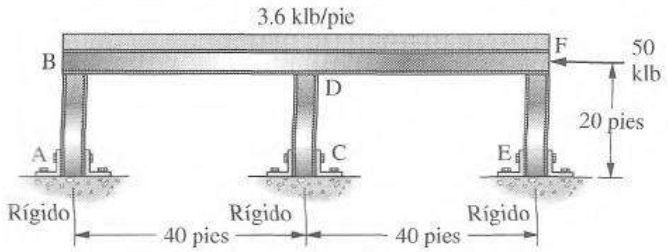
21.12



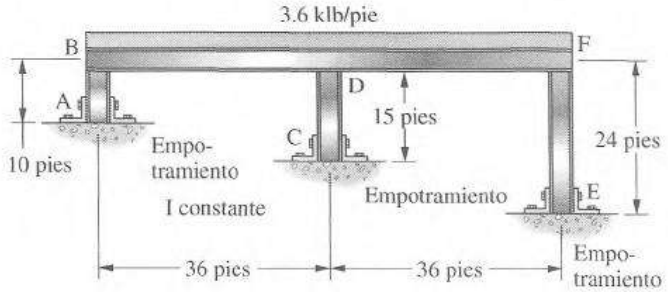
21.13 (*Resp.:* $M_{AB} = 264.2$ klb-pie, $M_{BD} = 135.7$ klb-pie.)



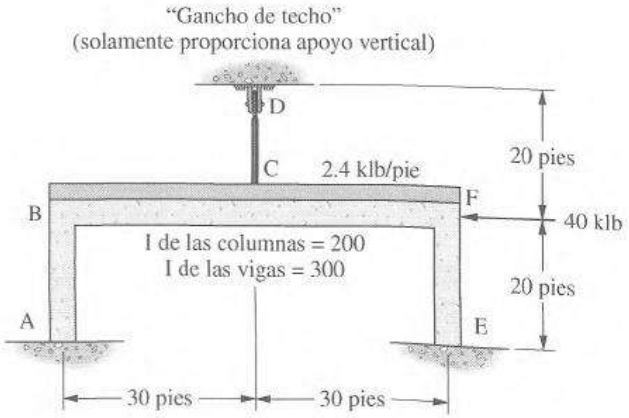
21.14



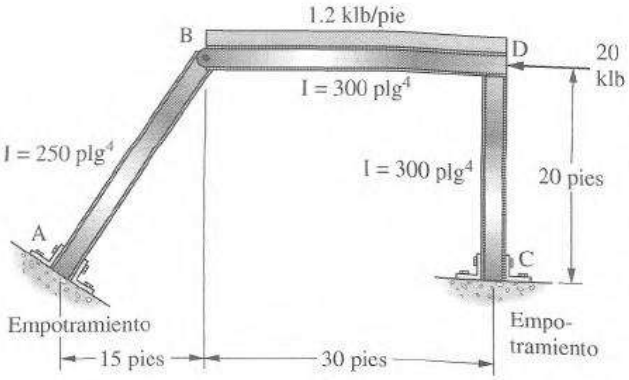
21.15 (*Resp.:* $M_{AB} = 4.7$ klb-pie, $M_{FE} = 256.9$ klb-pie.)



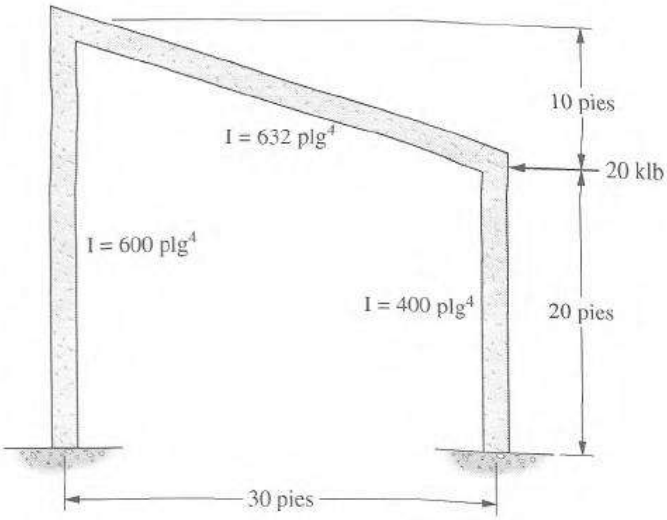
21.16



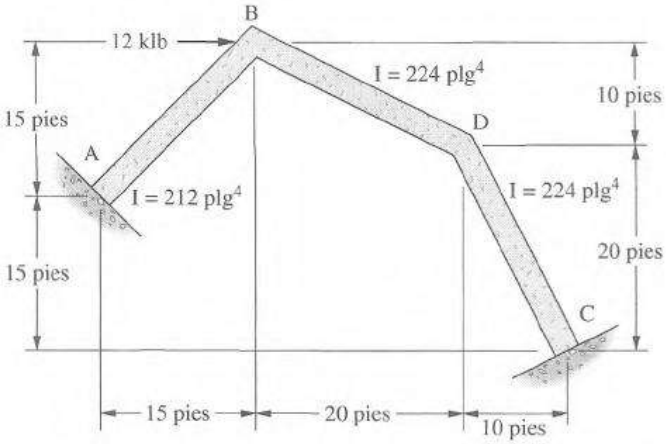
21.17 (*Resp.:* $M_{AB} = 57.8$ klb-pie, $M_{DC} = 2.1$ klb-pie.)



21.18



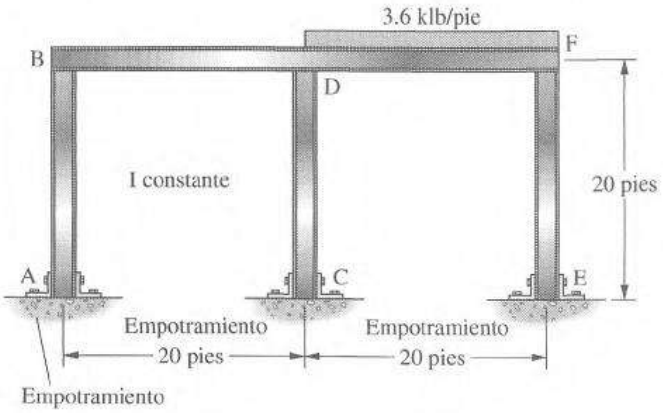
21.19 (*Resp.:* $M_A = 18.9$ klb-pie, $M_B = 21.1$ klb-pie, $M_C = 24.4$ klb-pie, $M_D = 23.9$ klb-pie.)



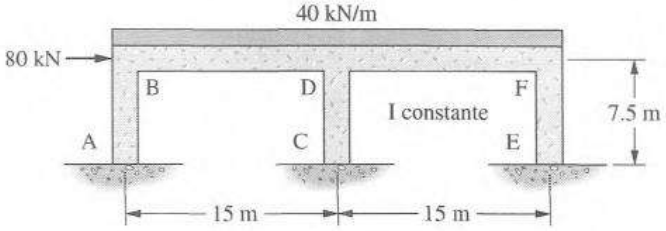
Para los problemas 21.20 al 21.23 analice estas estructuras usando el método de correcciones sucesivas.

21.20 Resuelva el problema 21.7.

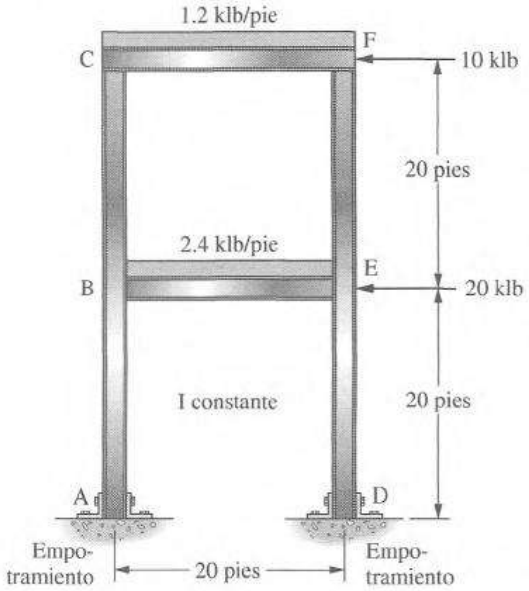
21.21 (*Resp.:* $M_{AB} = 1.6$ klb-pie, $M_{BA} = 7.5$ klb-pie, $M_{DF} = 106.4$ klb-pie, $M_{FE} = 67.5$ klb-pie respuestas después de 3 ciclos.)



21.22



21.23 (*Resp.:* $M_{AB} = 189.6$ klb-pie, $M_{BE} = 222.1$ klb-pie, $M_{EF} = 3.7$ klb-pie respuestas después de 5 ciclos.)



Para los problemas 21.24 al 21.26 resuelva los problemas indicados usando SABLE32 o SAP2000. Suponga que las áreas y los módulos de elasticidad son constantes.

21.24 Problema 21.18.

21.25 Problema 21.19 (*Resp.:* $M_{AB} = 39.93$ klb-pie, $M_{DC} = 143.8$ klb-pie.)

21.26 Problema 21.21.

Capítulo 22

Introducción a los métodos matriciales

22.1 ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS CON EL USO DE LA COMPUTADORA

Durante varias de las décadas anteriores han ocurrido grandes cambios en los métodos de análisis de estructuras usados en la práctica de la ingeniería. Estos cambios han ocurrido principalmente gracias al gran desarrollo de computadoras digitales de alta velocidad y al uso creciente de estructuras muy complejas. Los métodos matriciales de análisis proporcionan un lenguaje matemático muy adecuado para la descripción de un sistema estructural complejo que se puede resolver fácilmente con el uso de las computadoras. Antes del advenimiento de las computadoras, los métodos matriciales eran de poco uso, pues las soluciones de las ecuaciones eran muy difíciles de manejar usando métodos de cálculo manual.

El costo decreciente de las computadoras personales ha escalado esta tendencia y se tiene disponible una impresionante potencia de cómputo en casi todas las oficinas de diseño. Por ello es muy importante que todos los estudiantes de ingeniería de estructuras conozcan los principios fundamentales del análisis matricial de estructuras y puedan conocer tanto los puntos fuertes como los débiles de este tipo de análisis.

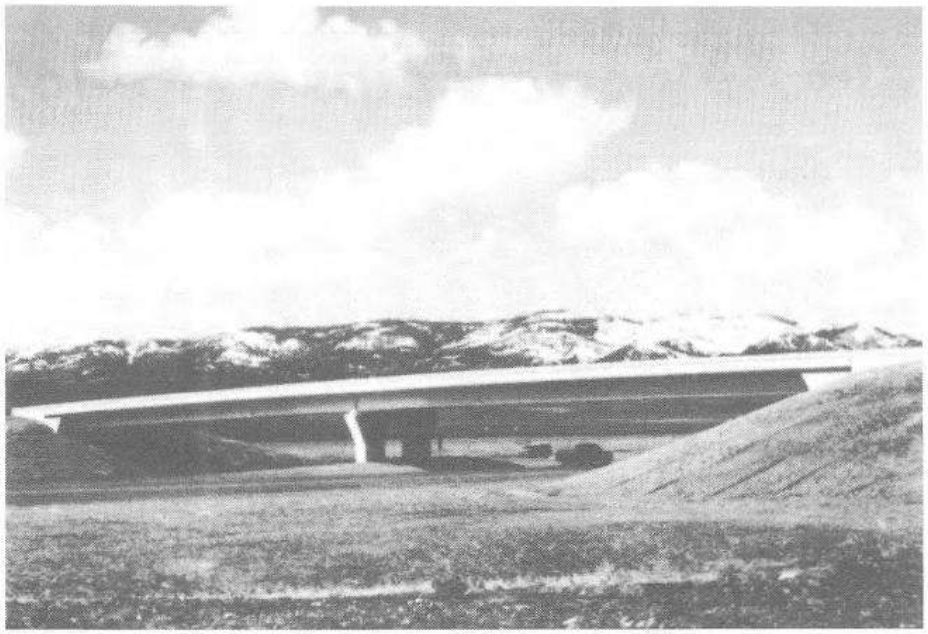
El análisis de estructuras mediante métodos matriciales no implica la adquisición de conceptos nuevos de ingeniería de estructuras. Sin embargo, la organización del trabajo debe ser tanto versátil como precisa. La computadora es capaz de realizar operaciones aritméticas en forma extraordinaria, pero sólo puede efectuar aquellas que sean descritas por medio de instrucciones simples, precisas y sin ambigüedades. En los capítulos siguientes el autor ha intentado explicar cómo se organizan los problemas del análisis de estructuras para uso en la computadora, y cómo pueden escribirse instrucciones que permitan a la computadora resolver una gran variedad de problemas según el deseo del analista.

22.2 MÉTODOS MATRICIALES

Durante muchos años, los ingenieros de estructuras intentaron resolver los problemas de análisis estructural mediante la aplicación de los métodos matemáticos del álgebra lineal.

Aun cuando muchas estructuras pudieron analizarse con las ecuaciones resultantes, el trabajo fue tan tedioso que resultó impráctico, hasta que estuvieron disponibles las computadoras de gran capacidad. De hecho, las ecuaciones matriciales usuales no pueden procesarse con calculadoras de bolsillo, a menos que se trate de estructuras muy sencillas.

Actualmente, el análisis matricial (mediante computadoras) ha reemplazado casi totalmente a los métodos clásicos de análisis en los despachos de ingeniería. En vista de esto, los profesores de ingeniería y los autores de libros de texto sobre análisis estructural se encuentran frente a una decisión difícil. ¿Deben exigir un estudio completo de los métodos clásicos seguido de un estudio de los métodos matriciales modernos? ¿Deben exigir que sus alumnos aprendan ambos



Puente de intercambio de Cold Springs (U. S. 395), al norte de Reno, Nevada. (Cortesía del Departamento de Transporte de Nevada.)

métodos al mismo tiempo? ¿Deben enseñar sólo los métodos modernos? Se podrá ver, por lo expuesto en los capítulos precedentes, que el autor considera que un estudio inicial de algunos de los métodos clásicos seguido de un estudio de los métodos matriciales formará ingenieros con un mejor entendimiento del comportamiento estructural.

Cualquier método de análisis que implique resolver ecuaciones algebraicas lineales puede formularse en notación matricial y emplear para su solución operaciones con matrices. La posibilidad de la aplicación de los métodos matriciales por el ingeniero de estructuras es muy importante, ya que todas las estructuras linealmente elásticas, isostáticas o hiperestáticas están regidas por los sistemas de ecuaciones lineales.

Los ejemplos numéricos sencillos que se presentan en los próximos capítulos podrían resolverse más rápidamente por medio de los métodos clásicos, usando una calculadora de bolsillo, en lugar de utilizar un procedimiento matricial. Sin embargo, en estructuras más complejas y cuando se tienen que considerar múltiples condiciones de carga, los métodos matriciales que usan computadoras se hacen cada vez más útiles.

22.3 REPASO DE ÁLGEBRA MATRICIAL

Los estudiantes de ingeniería tienen alguna formación en álgebra matricial; sin embargo, parece que los estudiantes del autor necesitan un pequeño repaso de la materia antes de estudiar el material presentado en éste y en los siguientes tres capítulos. Si usted pertenece a esta clase de estudiantes, tal vez podría examinar las secciones de repaso del álgebra matricial presentadas en el Apéndice B de este libro.

22.4 MÉTODOS DE ANÁLISIS DE LAS FUERZAS Y DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Los métodos presentados en los capítulos anteriores para analizar estructuras estáticamente indeterminadas pueden agruparse en dos tipos generales. Éstos son los métodos de las fuerzas y los

métodos de los desplazamientos. Ambos métodos se han desarrollado a un grado tal que pueden aplicarse a casi cualquier estructura, como son armaduras, vigas, marcos, placas, armazones, etc. Sin embargo, en la actualidad los métodos de los desplazamientos se usan de manera más amplia debido a que pueden programarse con mayor facilidad para ser utilizados en las computadoras (como se describe en el capítulo 25). Estos dos métodos de análisis, que se analizaron previamente en la sección 14.5, se redefinirán aquí, ya que consideramos que el material presentado en los últimos capítulos le permitirá al lector entender mejor las definiciones.

Método de análisis de las fuerzas

En este método, llamado también de las *flexibilidades* o de las *compatibilidades*, las redundantes se escogen y eliminan de la estructura, de modo que quede una estructura estable y estáticamente determinada. Se plantea una ecuación de compatibilidad de deformaciones en cada sección de la que se ha excluido una redundante. Estas ecuaciones se escriben en términos de las redundantes, y las ecuaciones resultantes se resuelven para los valores numéricos de esas redundantes. Una vez conocidas éstas, las fuerzas internas restantes, los momentos, etc., pueden determinarse por medio de la estática. El método de las deformaciones consistentes (véase el capítulo 15), es un método de fuerzas.

Método de análisis de los desplazamientos

En este método, llamado también de la *rigidez* o del *equilibrio*, los desplazamientos de los nudos, necesarios para describir totalmente la configuración deformada de la estructura, se usan en un conjunto de ecuaciones simultáneas. Después de resolver estas ecuaciones y determinar los desplazamientos, éstos se sustituyen en las relaciones fuerza-deformación de cada elemento para determinar las diversas fuerzas internas. El método pendiente-deflexión (véase el capítulo 18) es un método de desplazamientos.

Observe que el número de incógnitas en el método de los desplazamientos es en general mucho mayor que el número de incógnitas en el método de las fuerzas. A pesar de ello, el método de los desplazamientos es el de mayor importancia, debido a que, como se mostrará, es el método matricial que puede computarizarse más fácilmente para su uso general. Por esta razón, sólo se dedica la sección 22.5 al método de las fuerzas, mientras que el resto de este libro se dedica al método de los desplazamientos.

22.5 INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LAS FUERZAS O DE LAS FLEXIBILIDADES

Este método es en realidad el método de las deformaciones consistentes (previamente descrito en el capítulo 15) puesto en forma matricial. Los pasos que intervienen en el análisis de una estructura estáticamente indeterminada por este método se esbozan como sigue:

1. Se selecciona un número suficiente de redundantes y se les retira de la estructura para hacerla estáticamente determinada. La estructura restante, que con frecuencia se le llama *estructura primaria* o *estructura liberada*, debe ser estable.
2. Se analiza la estructura primaria para determinar las deformaciones en y en la dirección de las redundantes que se retiraron.
3. Se aplica un valor unitario a la estructura primaria en el punto y en la dirección de una de las redundantes y se determina la deformación en esa redundante y en cada una de las otras redundantes. Por ejemplo, se calcula la deflexión debida a una carga unitaria en el punto 1 y se le rotula como $\delta_{1,1}$ incluso: la deflexión en el punto 2 debida a una carga

unitaria en el punto 1 se rotula como $\delta_{2.1}$, etc. Se sigue este mismo procedimiento con un valor unitario de una redundante aplicada a cada una de las otras posiciones de las redundantes.

A los desplazamientos debidos a la carga unitaria se les llama *coeficientes de flexibilidad*. El desplazamiento real en el nudo 1 debido a la redundante R_1 es R_1 por la deflexión causada por una carga unitaria que actúe ahí, es decir, $R_1 * \delta_{1.1}$; el desplazamiento en el nudo 2 debido a R_1 es $R_1 * \delta_{2.1}$, etcétera.

4. Finalmente, se escriben ecuaciones simultáneas de compatibilidad de deformación para cada una de las posiciones de las redundantes. Las incógnitas en estas ecuaciones son las fuerzas redundantes. Las ecuaciones se expresan en forma matricial y se resuelven para las redundantes.

Para ilustrar este procedimiento se considera a la viga de cuatro claros de la figura 22.1. Esta viga es estáticamente indeterminada en tercer grado y las tres reacciones de apoyo R_1, R_2 y R_3, se han seleccionado como las redundantes y se considera que se retiran de la estructura como se muestra en la parte (b) de la figura. Las cargas externas harán que la viga se deflexione hacia abajo según los valores de δ_1, δ_2 y δ_3, como se muestra.

En la figura 22.1(c) se aplica una carga unitaria en el punto 1 que actúa hacia arriba. Causa deflexiones hacia arriba en los puntos 1, 2 y 3, respectivamente, iguales a $\delta_{1.1}$, $\delta_{2.1}$ y $\delta_{3.1}$. En forma similar, en las partes (d) y (e), se aplican cargas unitarias hacia arriba en los puntos 2 y 3 respectivamente, y se determinan las deformaciones en los tres puntos redundantes.

Entonces se escriben ecuaciones para la deformación total en cada uno de los puntos. Puede verse que estas ecuaciones se expresarán en términos de todas las redundantes. Esto significa que cada redundante afecta a los desplazamientos asociados con cada una de las otras redundantes.

Ahora podemos escribir una expresión para la deformación en cada uno de los nudos. Aquí δ_{R1} es la deflexión total en el punto 1, δ_{R2} es la deflexión total en el nudo 2, etcétera.

Como se supone que esta viga tiene apoyos que no se asientan, estos valores son cada uno de ellos iguales a cero.

$$\begin{aligned} \delta_1 + \delta_{1.1}R_1 + \delta_{1.2}R_2 + \delta_{1.3}R_3 &= \delta_{R_1} \\ \delta_2 + \delta_{2.1}R_1 + \delta_{2.2}R_2 + \delta_{2.3}R_3 &= \delta_{R_2} \\ \delta_3 + \delta_{3.1}R_1 + \delta_{3.2}R_2 + \delta_{3.3}R_3 &= \delta_{R_3} \end{aligned} \tag{22.1}$$

Estas ecuaciones pueden ponerse en forma matricial como sigue:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{1.1} & \delta_{1.2} & \delta_{1.3} \\ \delta_{2.1} & \delta_{2.2} & \delta_{2.3} \\ \delta_{3.1} & \delta_{3.2} & \delta_{3.3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{R1} \\ \delta_{R2} \\ \delta_{R3} \end{Bmatrix} \tag{22.2}$$

Esta ecuación en realidad dice que los desplazamientos debidos a las cargas más la matriz de flexibilidad, multiplicada por las redundantes son iguales a la deformación final en los apoyos. Puede escribirse en forma simbólica compacta como sigue:

$$\{\delta_L\} + [F]\{R\} = \{\delta_R\} \tag{22.3}$$

donde

$\{\delta_L\}$ es un vector de desplazamientos debidos a las cargas impuestas

$[F]$ es una matriz de coeficientes de flexibilidad

$\{R\}$ es un vector de fuerzas redundantes

$\{\delta_R\}$ es un vector de deformaciones finales en los apoyos (todas son iguales a cero aquí)

Esta ecuación puede escribirse en una forma un tanto alterada y resolverse para las redundantes:

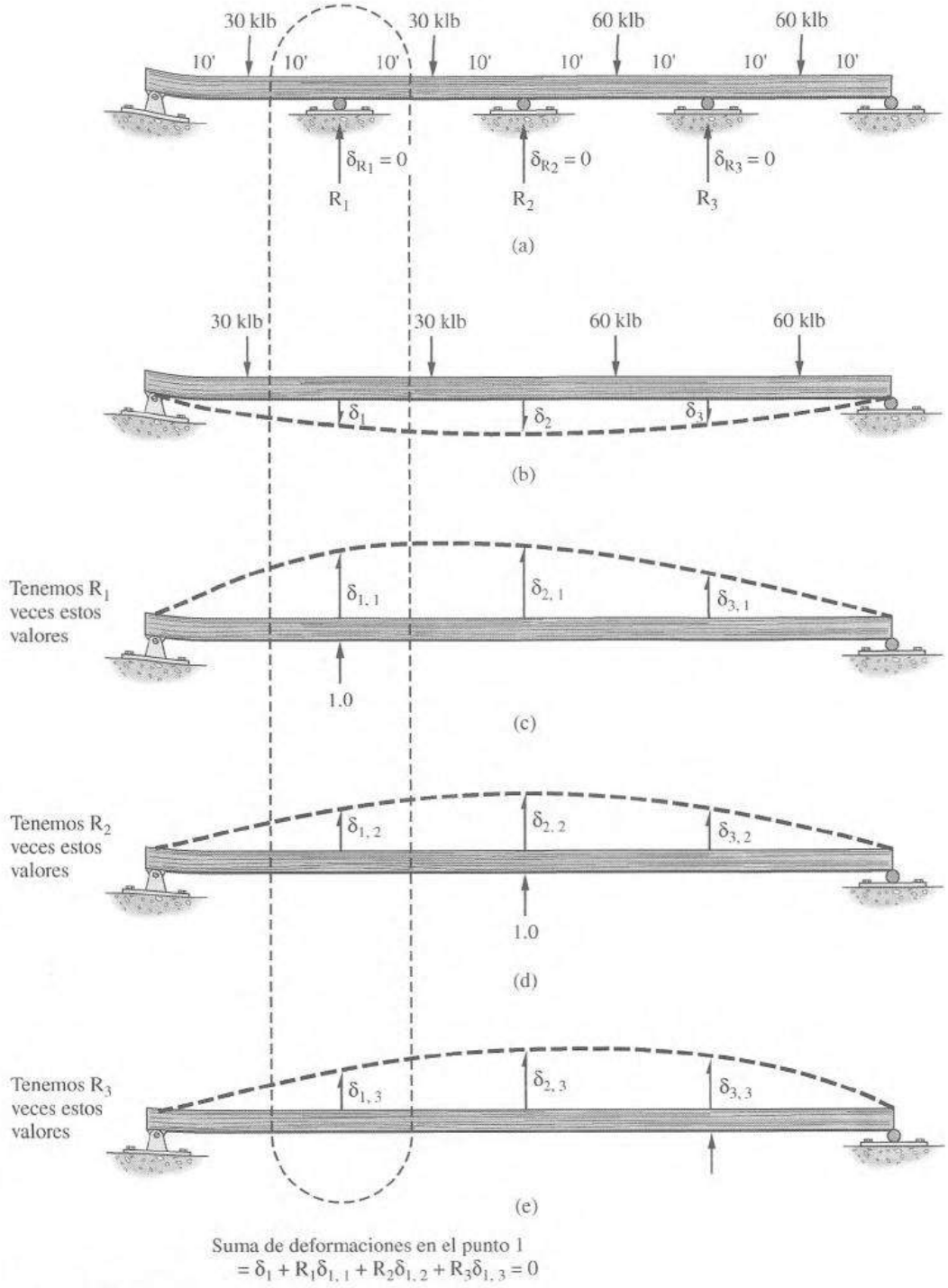


Figura 22.1

$$\{R\} = [F]^{-1}(\{\delta_R\} - \{\delta_L\}) \tag{4}$$

El símbolo $[F]^{-1}$ representa el inverso de la matriz [F]. Esta matriz puede encontrarse de una manera formal a través del procedimiento matemático descrito en el apéndice B. Sin embargo, en la mayoría de los problemas prácticos, la inversa no se encuentra explícitamente, sino que el conjunto de ecuaciones algebraicas se resuelve de manera simultánea por algún otro procedimiento,

por ejemplo, el método de Gauss. Seguirá usándose la notación inversa en este libro para representar simbólicamente la solución del conjunto de ecuaciones algebraicas.

En el ejemplo 22.1, las reacciones redundantes se determinan para la viga de la figura 22.1. En este problema es necesario calcular tres deformaciones en los apoyos y nueve coeficientes de flexibilidad. Estos cálculos más bien complicados, que pueden manejarse con los métodos anteriormente presentados en este libro, no se muestran aquí. La aplicación de la ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas abrevia el trabajo un poco en que $\delta_{1.2} = \delta_{2.1}$, $\delta_{1.3} = \delta_{3.1}$ y $\delta_{2.3} = \delta_{3.2}$. Además, debido a la simetría de esta viga específica, $\delta_{1.1} = \delta_{3.3}$.

EJEMPLO 22.1

Determine los valores de las reacciones R_1, R_2 y R_3 de la viga continua de la figura 22.1 usando un enfoque matricial y el método de las fuerzas o de las flexibilidades.

Solución.

Las siguientes deflexiones se obtienen usando ya sea el procedimiento de la viga conjugada del capítulo 12 o el método del trabajo virtual del capítulo 13.

$$\delta_1 = -\frac{850\,000}{EI} \text{ klb-pie}^3$$

$$\delta_2 = -\frac{1\,230\,000}{EI} \text{ klb-pie}^3$$

$$\delta_3 = -\frac{905\,000}{EI} \text{ klb-pie}^3$$

$$\delta_{1.1} = \frac{6\,000}{EI} \text{ klb-pie}^3$$

$$\delta_{1.2} = \delta_{2.1} = \frac{7\,333}{EI} \text{ klb-pie}^3$$

$$\delta_{1.3} = \delta_{3.1} = \frac{4\,667}{EI} \text{ klb-pie}^3$$

$$\delta_{2.2} = \frac{10\,667}{EI} \text{ klb-pie}^3$$

$$\delta_{2.3} = \delta_{3.2} = \frac{7\,333}{EI} \text{ klb-pie}^3$$

$$\delta_{3.3} = \frac{6\,000}{EI} \text{ klb-pie}^3$$

Escribiendo las ecuaciones:

$$\frac{1}{EI}[-850\,000 + 6\,000R_1 + 7\,333R_2 + 4\,667R_3] = 0$$

$$\frac{1}{EI}[-1\,230\,000 + 7\,333R_1 + 10\,667R_2 + 7\,333R_3] = 0$$

$$\frac{1}{EI}[-905\,000 + 4\,667R_1 + 7\,333R_2 + 6\,000R_3] = 0$$

Poniéndolas en forma matricial:

$$\frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 6\,000 & 7\,333 & 4\,667 \\ 7\,333 & 10\,667 & 7\,333 \\ 4\,667 & 7\,333 & 6\,000 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} 850\,000 \\ 1\,230\,000 \\ 905\,000 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones:

$$R_1 = 34.0 \text{ klb} \uparrow$$
$$R_2 = 40.2 \text{ klb} \uparrow$$
$$R_3 = 75.3 \text{ klb} \uparrow \quad \blacksquare$$

En el ejemplo 22.2, sólo se consideran deformaciones axiales con objeto de simplificar los cálculos numéricos requeridos mientras que al mismo tiempo se muestran los principios que intervienen en el método. En el capítulo 23 se trabajan problemas similares con el método de rigidices.

EJEMPLO 22.2

El miembro sujeto a una fuerza axial mostrado en la figura 22.2(a) está apoyado en cada extremo y cargado con fuerzas axiales en posiciones intermedias. Determine las reacciones en los apoyos.

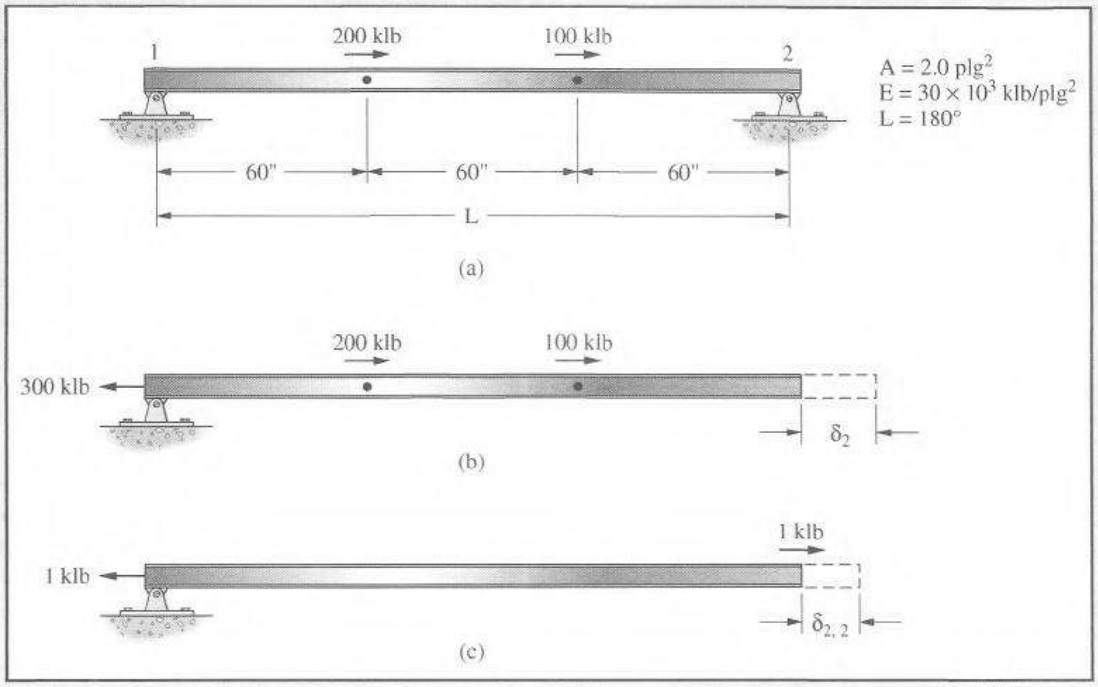


Figura 22.2

Solución.

La reacción en el extremo 2 se considera como la redundante para este problema. Cuando esta reacción se retira, la estructura restante (primaria) se muestra en la figura 22.2(b). En la figura 22.2(c) se muestra una carga unitaria aplicada a la estructura primaria. Un miembro sujeto a una carga axial cambia en longitud por $\frac{PL}{AE}$ como se describe en la sección 13.4 de este libro. Entonces

$$\delta_2 = \frac{300}{AE}\left(\frac{L}{3}\right) + \frac{100}{AE}\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{(300)(60)}{(2.0)(30 \times 10^3)} + \frac{(100)(60)}{(2.0)(30 \times 10^3)}$$
$$= 0.40 \text{ plg}$$

$$\delta_{2.2} = 1\left(\frac{L}{AE}\right) = \frac{1(180)}{2.0(30 \times 10^3)} = 0.003 \text{ plg}$$

Entonces se calcula la reacción en el extremo 2 a partir de una ecuación similar a la ecuación 22.1:

$$\delta_2 + \delta_{2.2}R_2 = \delta_{R_2} = 0$$

$$R_2 = -\frac{0.40}{0.003} = -133 \text{ klb}$$

Entonces se calcula la reacción en el extremo 1 a partir de una relación de equilibro.

$$\sum F_x = R_1 + 200 + 100 + R_2 = 0$$

$$R_1 = -167 \text{ klb} \quad \blacksquare$$

Una dificultad inherente con el uso del método de las fuerzas es que el analista debe saber desde el inicio cuántas redundantes existen en la estructura que se va a analizar. Además, deberán seleccionarse los miembros o las reacciones que deben servir como redundantes. La selección de las redundantes, que no es única, puede afectar la complejidad que interviene en la solución manual del problema. Sin embargo, con el método de las rigideces, que se introduce en el capítulo 23, es mucho más fácil preparar un programa general aplicable a todos los tipos de estructuras estáticamente determinadas o indeterminadas.

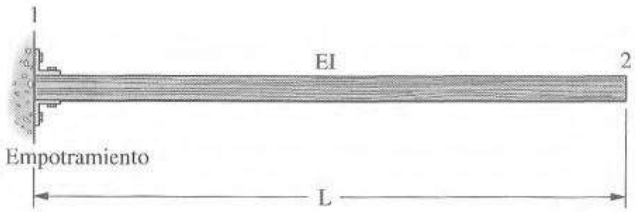
En este libro no se incluye una discusión completa del método de las fuerzas porque las tendencias actuales del análisis de estructuras son decididamente en la dirección del método de los desplazamientos o rigideces. Sería posible expandir el método de las fuerzas descrito aquí para incluir otros aspectos tales como el desarrollo de los coeficientes de flexibilidad usando los métodos matriciales, una consideración de los diferentes tipos de estructuras, etc. El lector interesado en estos temas tal vez preferiría estudiar un libro de texto tal como el de Weaver y Gere[1] que describe el método en detalle.

22.6 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

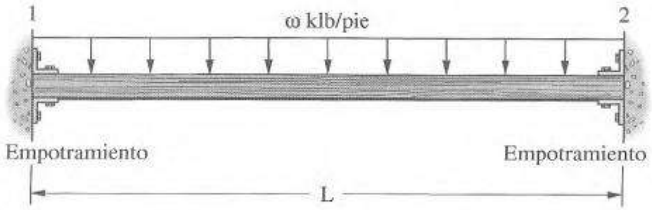
22.1 Encuentre los coeficientes de flexibilidad asociados con las cargas nodales aplicadas en el nudo 2, es decir, encuentre los coeficientes de la matriz [F] en la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [F]\begin{Bmatrix} Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\textit{Resp.:} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L^3}{3EI} & \dfrac{L^2}{2EI} \\ \dfrac{L^2}{2EI} & \dfrac{L}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \right)$$



22.2 Utilice el método de las flexibilidades para determinar las reacciones en el nudo 2 de la viga doblemente empotrada que sustenta una carga uniformemente distribuida. Sugerencia: Use los coeficientes de flexibilidad que se encontraron en el problema 22.1.

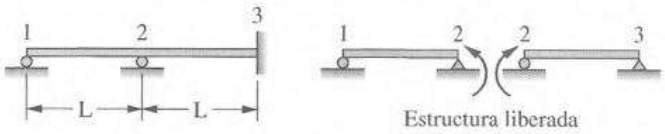


22.3 Determine los coeficientes de flexibilidad asociados con la viga continua mostrada para este problema. Use los momentos en los nodos 2 y 3 como redundantes; la estructura liberada aparecerá entonces como dos vigas simplemente apoyadas, como se muestran adyacentes a la figura. Los coeficientes de flexibilidad serán parte de la matriz [F] en la ecuación matricial:

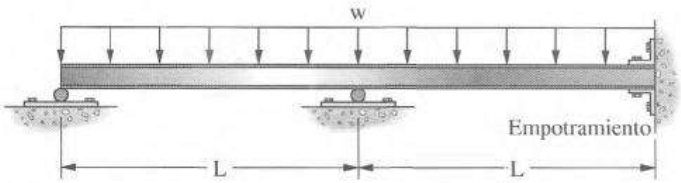
[1] W. Weaver y J. M. Gere, *Matrix Analysis of Framed Structures* 2a. ed. (Nueva York: Van Nostrand Reinhold, 1980).

$$\begin{Bmatrix} \theta_{2,1} - \theta_{2,3} \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = [F]\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\textit{Resp.:} \begin{Bmatrix} \theta_{2,1} - \theta_{2,3} \\ \theta_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} + \frac{L}{3EI} & \frac{L}{6EI} \\ \frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} \right)$$

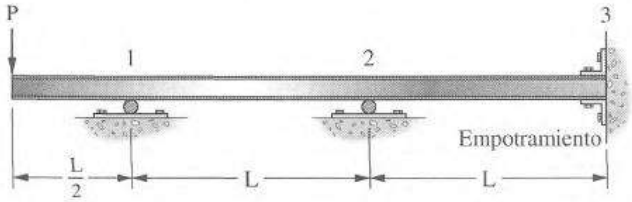


22.4 Use el método de las flexibilidades para encontrar los momentos internos en los nudos 2 y 3 para la viga continua que se muestra. La viga está cargada con una carga uniformemente distribuida en toda su longitud. (Sugerencia: Use los coeficientes de flexibilidad determinados en el problema 22.3.)



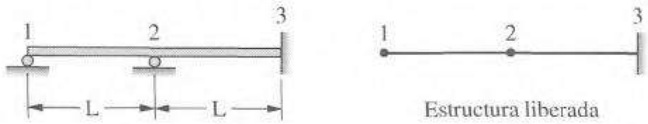
22.5 Use los coeficientes de flexibilidad encontrados en el problema 22.3 para determinar los momentos en los nudos 2 y 3, para la viga continua cargada con una carga concentrada como se muestra.

$$\left(\textit{Resp.:} \begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{14}PL^2 \\ -\frac{1}{14}PL^2 \end{Bmatrix} \right)$$



22.6 Determine los coeficientes de flexibilidad para la viga continua que se muestra. Seleccione las reacciones en los nudos 1 y 2 como redundantes; la configuración liberada se muestra adyacente a la figura. Encuentre [F] en la ecuación

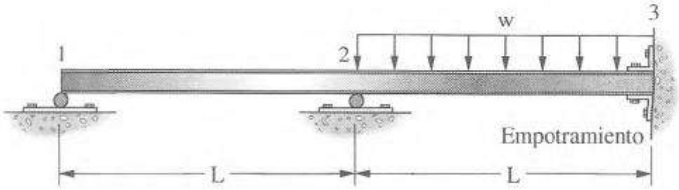
$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = [F]\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix}$$



22.7 Determine las reacciones en los nudos 1 y 2 para la viga continua mostrada en el problema 22.6, suponiendo que una carga uniformemente distribuida actúa sobre toda la longitud de la viga, tal como se muestra en el problema 22.4.

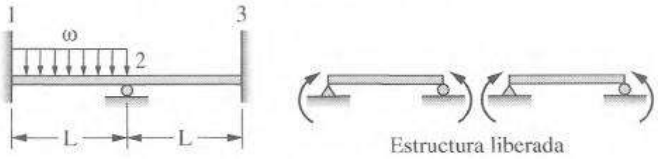
$$\left(\textit{Resp.:} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{11}{28}wL \\ \frac{32}{28}wL \end{Bmatrix} \right)$$

22.8 Determine las reacciones en los nudos 1 y 2 para la viga continua mostrada. La carga uniformemente distribuida actúa sobre el claro entre los nudos 2 y 3 solamente.

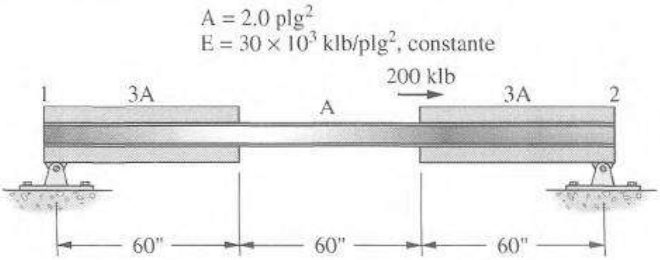


22.9 Determine los momentos en los extremos y el momento en el nudo 2 para la viga continua que se muestra. La carga sustentada por la viga consiste en una carga uniformemente distribuida en un claro, como se muestra. Use los momentos en los nudos como redundantes; la estructura liberada se muestra adyacente a la figura.

$$\left(\textit{Resp.:} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{5}{48}wL^2 \\ -\frac{2}{48}wL^2 \\ \frac{1}{48}wL^2 \end{Bmatrix} \right)$$



22.10 Un miembro sujeto a una fuerza axial consistente en tres segmentos que tienen diferentes áreas transversales, está sustentado en cada extremo y cargado con una carga intermedia de 200 klb. Use el método de las flexibilidades para encontrar las reacciones en los apoyos.



Capítulo 23

Fundamentos del método de los desplazamientos o de las rigideces

23.1 INTRODUCCIÓN

Cuando una estructura se está analizando con el método de los desplazamientos o de las rigideces, los desplazamientos de los nudos (traslaciones y rotaciones) se tratan como incógnitas. Se escriben ecuaciones de equilibrio para cada nudo de la estructura en términos de (1) las cargas aplicadas, (2) las propiedades de los miembros que concurren en el nudo y (3) los desplazamientos desconocidos del nudo. El resultado es un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales que pueden resolverse simultáneamente para los desplazamientos del nudo. Entonces estos desplazamientos se usan para determinar las fuerzas internas de la barra y las reacciones en los apoyos.

El método de los desplazamientos puede usarse con la misma facilidad para el análisis de estructuras estáticamente determinadas o estáticamente indeterminadas. El analista no tiene que hacer una selección de redundantes y no tiene que especificar ni aun saber si la estructura es estáticamente determinada o indeterminada. Además, si la estructura es inestable, no puede determinarse una solución y por ello el analista está advertido de la inestabilidad.

En este capítulo el autor ha desarrollado los fundamentos del método de las rigideces para vigas y puntales continuos. Ha intentado presentar las ecuaciones en una forma que permita al lector comprender el significado físico de los términos involucrados. En el capítulo 24 se desarrollan ecuaciones de rigideces para estructuras que consisten en vigas y columnas. También se consideran barras inclinadas o con pendiente.

23.2 RELACIONES GENERALES

La rigidez de un nudo generalmente se define como la fuerza (o momento) requerido para producir un desplazamiento unitario (o rotación) en el nudo si se impide el desplazamiento en todos los demás nudos de la estructura. Para este estudio inicial se considera el resorte lineal mostrado en la figura 23.1.

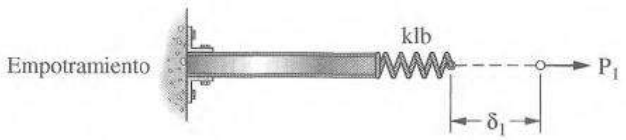


Figura 23.1

A partir de esta figura la relación entre la fuerza aplicada P_1 y el alargamiento del resorte δ_1 puede escribirse como

$$P_1 = k\delta_1$$

En esta expresión k es la *constante del resorte* o la *fuerza* requerida para producir un desplazamiento unitario:

$$k = P_1 \quad \text{si} \quad \delta_1 = 1.0$$

Por lo tanto si se conoce la constante del resorte el desplazamiento puede determinarse para cualquier carga aplicada P_1.

Para la mayoría de los problemas prácticos se necesita el desplazamiento en más de un nudo o posición. Éste es el caso para la viga simple mostrada en la figura 23.2.

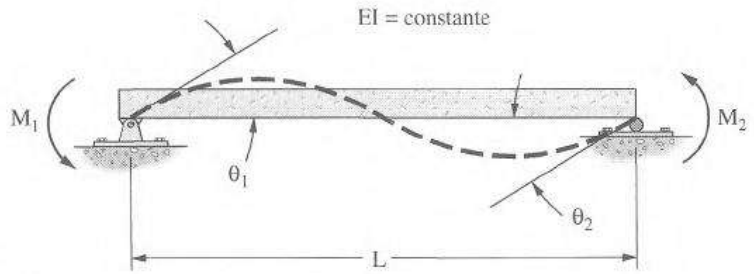


Figura 23.2

Los momentos en los extremos M_1 y M_2 producen las rotaciones en los extremos θ_1 y θ_2. Usando el procedimiento de pendiente-deflexión de la sección 18.2 pueden escribirse las siguientes ecuaciones suponiendo que no ocurre una rotación en la cuerda. En estas expresiones K es igual a I/L, el así llamado factor de rigidez.

$$M_1 = 2EK(2\theta_1 + \theta_2) = \frac{4EI}{L}\theta_1 + \frac{2EI}{L}\theta_2$$

$$M_2 = 2EK(\theta_1 + 2\theta_2) = \frac{2EI}{L}\theta_1 + \frac{4EI}{L}\theta_2$$

Estas ecuaciones se expresan en forma matricial como sigue:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Los coeficientes 4EI/L y 2EI/L pueden escribirse simbólicamente como $k_{i,j}$, donde los subíndices definen la posición de la fila y de la columna de los coeficientes en la matriz de rigideces.

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{23.1}$$

El coeficiente de rigidez $k_{1,1}$ puede interpretarse como el momento que debe aplicarse en el extremo 1 de la viga con objeto de producir una rotación unitaria ($\theta_1 = 1$), mientras que el extremo opuesto de la viga está fijo ($\theta_2 = 0$), como se muestra en la figura 23.3. El coeficiente $k_{2,1}$, es el momento resultante en el extremo 2 de la viga para esta situación. En forma similar, los coeficientes $k_{1,2}$ y $k_{2,2}$ pueden interpretarse como los momentos resultantes en los extremos 1 y 2 de la viga, respectivamente, cuando $\theta_2 = 1$ y $\theta_1 = 0$. Esta situación se muestra en la figura 23.4.

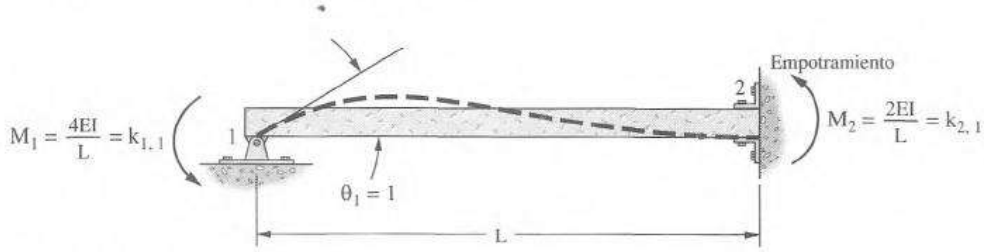


Figura 23.3

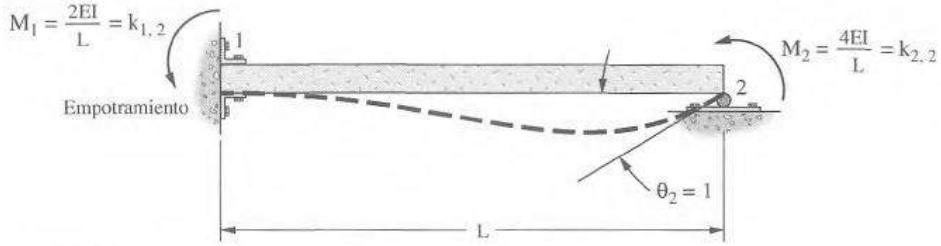


Figura 23.4

La ecuación matricial 23.1 involucra dos ecuaciones algebraicas y pueden resolverse simultáneamente para obtener las rotaciones de los extremos θ_1 y θ_2. El resultado, escrito simbólicamente, es:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{23.2}$$

Un estudio de esta viga simple con sus dos nudos ilustra muchas de las características cruciales del método de las rigideces, aun cuando casi todas las estructuras prácticas analizada por dicho método tienen mucho más que dos nudos. El resto de este capítulo se dedica al desarrollo de la ecuación de rigideces de una forma aplicable a las vigas o puntales que tengan cualquier número de nudos.

23.3 ECUACIONES DE RIGIDEZ PARA BARRAS CON FUERZA AXIAL

Para el estudio que sigue se considera la barra o puntal individual con fuerza axial de la figura 23.5(a). Puede considerarse a esta barra como un resorte lineal. Aunque en las últimas páginas este resorte ha sido considerado el tema, se reconsidera aquí de modo que puedan introducirse características adicionales del método de las rigideces.

Los extremos del puntal se identifican como nudos o puntos nodales (los dos términos se usan en forma intercambiable). Éstos son los puntos de aplicación de las fuerzas y donde se determinan los desplazamientos. A las fuerzas que actúan en los puntos nodales se les asigna a cada una dos subíndices. Éstos representan los números de los nodos de la barra sobre la cual actúan las fuerzas. El primer subíndice es el nodo donde se ubica la fuerza mientras que el segundo representa el otro extremo de la barra. Por ejemplo $F_{1,2}$ es la fuerza que actúa en el nodo 1 de una barra cuyos nodos extremos son 1 y 2 y la fuerza $F_{2,1}$ es la fuerza que actúa en el nodo 2 de la misma barra.

El eje x del sistema se toma paralelo al eje de la barra en la figura 23.5 y la dirección positiva se toma de izquierda a derecha. Se supone que las cargas de los nudos y los desplazamientos de los nudos son positivos cuando actúan en el sentido positivo del eje x de la barra. Así, en la figura 23.5, tanto $F_{1,2}$ como $F_{2,1}$ son positivos. En forma similar, los desplazamientos u_1 y u_2 tienen direcciones positivas.

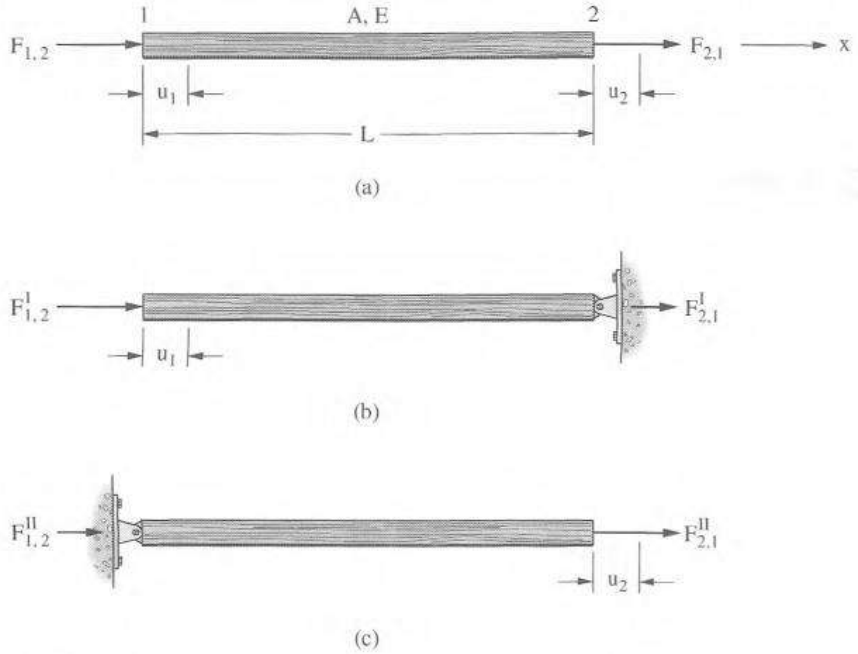


Figura 23.5

Si se impide el movimiento del extremo 2 del puntal, como se muestra en la parte (b) de la figura, existirán las siguientes relaciones (desarrolladas de los principios de la Resistencia de los materiales) entre las fuerzas y los desplazamientos:

$$F^{I}_{1,2} = \left(\frac{AE}{L}\right)u_1$$
$$F^{I}_{2,1} = -F^{I}_{1,2} = -\left(\frac{AE}{L}\right)u_1 \tag{23.3}$$

Escribiendo con la notación matricial, estas ecuaciones pueden resumirse como sigue:

$$\begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix}^{I} = \begin{Bmatrix} \dfrac{AE}{L} \\ -\dfrac{AE}{L} \end{Bmatrix} u_1 \tag{23.4}$$

Si ahora se impide el movimiento del nudo 1 del puntal, como se muestra en la figura 23.5(c), existirán las siguientes relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos:

$$F^{II}_{2,1} = \left(\frac{AE}{L}\right)u_2$$
$$F^{II}_{1,2} = -F^{II}_{2,1} = -\left(\frac{AE}{L}\right)u_2 \tag{23.5}$$

O en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix}^{II} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{AE}{L} \\ \dfrac{AE}{L} \end{Bmatrix} u_2 \tag{23.6}$$

A los extremos 1 y 2 del puntal se les puede asignar desplazamientos arbitrarios y, basándose en el principio de la superposición, pueden escribirse las siguientes relaciones para las fuerzas resultantes en los nudos 1 y 2:

$$\begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix}^{\text{total}} = \begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix}^{\text{I}} + \begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix}^{\text{II}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{AE}{L} \\ -\dfrac{AE}{L} \end{Bmatrix} u_1 + \begin{Bmatrix} -\dfrac{AE}{L} \\ \dfrac{AE}{L} \end{Bmatrix} u_2 \tag{23.7}$$

O, en forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix}^{\text{total}} = \begin{bmatrix} \dfrac{AE}{L} & -\dfrac{AE}{L} \\ -\dfrac{AE}{L} & \dfrac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{23.8}$$

Simbólicamente, la ecuación 23.8 puede escribirse como

$$\{F\} = [K]\{u\} \tag{23.9}$$

donde

$\{F\}$ es un vector de fuerzas en los nudos,
$\{u\}$ es un vector de desplazamientos en los nudos, y
$[K]$ es una matriz de coeficientes de rigidez conocida como la *matriz de rigideces.*

Puede verse de las ecuaciones 23.7 y 23.8 que cada columna de la matriz de rigideces representa el conjunto de fuerzas que corresponde a un *valor unitario de un desplazamiento individual de un nudo*. La comprensión de esta característica de la matriz de rigideces permitirá al estudiante desarrollar matrices de rigideces para estructuras mucho más complejas que unos simples puntales.

Aunque la matriz de la ecuación 23.8 representa dos ecuaciones algebraicas diferentes escritas en términos de dos incógnitas es imposible resolverlas para los desplazamientos u_1 y u_2 en términos de las fuerzas dadas $F_{1,2}$ y $F_{2,1}$. Este hecho puede verificarse intentando obtener una solución usando el procedimiento formal de inversión de matrices, como sigue:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{AE}{L} & -\dfrac{AE}{L} \\ -\dfrac{AE}{L} & \dfrac{AE}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix} \tag{23.10}$$

La solución esbozada por la ecuación 23.10 no tiene sentido ya que la inversa de la matriz [K] no existe, es decir, la matriz [K] es singular. La razón de esta peculiar circunstancia es que los movimientos de cuerpo rígido no se han eliminado de la ecuación 23.8. Si u_1 debe ser igual a u_2 el puntal puede desplazarse cualquier distancia arbitraria sin el beneficio de ninguna de las fuerzas axiales $F_{1,2}$ o $F_{2,1}$. Sin embargo, si a alguno de los dos extremos del puntal se le da un desplazamiento específico tal como $u_2 = 0$ existirá una relación bien definida entre la fuerza $F_{1,2}$ y el desplazamiento resultante en el nudo 1:

$$u_1 = \left(\frac{L}{AE}\right) F_{1,2} \tag{23.11}$$

El análisis del puntal mostrado en la figura 23.6(a) es un poco más difícil que el análisis del puntal de dos nudos de la figura 23.5. Sin embargo, un estudio de esta barra ilustrará mejor los principios involucrados en los últimos párrafos.

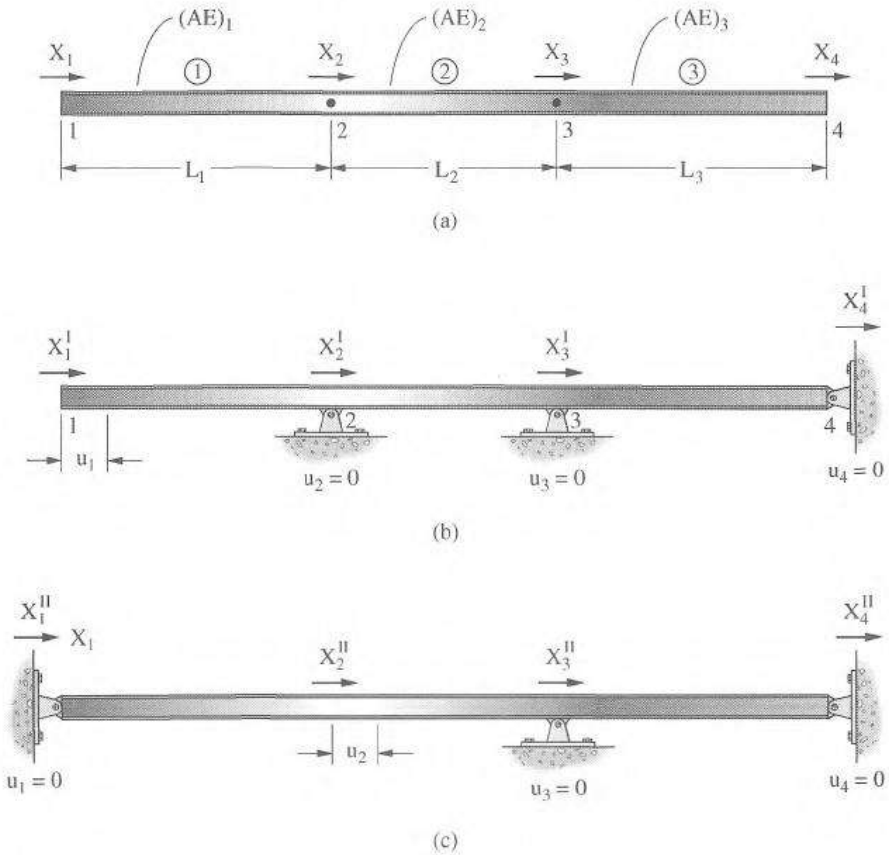


Figura 23.6

Este puntal tiene tres segmentos, o elementos, y cuatro nudos. A los extremos del elemento se les asigna nodo, o nudo, números y a cada elemento se le asigna un número de identificación. Estos números se muestran dentro de círculos en la figura 23.6(a). A la fuerza externa que actúa en el nodo j se le da el símbolo X_j.

Si al nudo 1 de la figura 23.6 (a) se le da un desplazamiento arbitrario y se impide que todos los demás nudos del puntal se desplacen, como se muestra en la figura 23.6 (b), existirá la siguiente relación entre las fuerzas de los nudos y los desplazamientos de los nudos:

$$X_1^I = \left(\frac{AE}{L}\right)_1 u_1$$

$$X_2^I = -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 u_1$$

$$X_3^I = 0$$

$$X_4^I = 0$$

Los subíndices adscritos a los coeficientes AE/L se refieren a los números de los elementos asociados con los términos.

Si al nudo 2 se le da un desplazamiento arbitrario mientras que se impide que los demás nodos se desplacen como se muestra en la figura 23.6(c), existirán las siguientes relaciones entre las fuerzas de los nudos y los desplazamientos de los nudos:

$$X_1^{II} = -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 u_2$$
$$X_2^{II} = \left[\left(\frac{AE}{L}\right)_1 + \left(\frac{AE}{L}\right)_2\right] u_2$$
$$X_3^{II} = -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 u_2$$
$$X_4^{II} = 0$$

Este procedimiento puede repetirse con cada nudo dado un valor arbitrario mientras que se impide el movimiento de todos los demás nudos. La superposición de todas estas relaciones produce la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\right)_1 \\ -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u_1 + \begin{Bmatrix} -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 \\ \left(\frac{AE}{L}\right)_1 + \left(\frac{AE}{L}\right)_2 \\ -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 \\ 0 \end{Bmatrix} u_2 + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 \\ \left(\frac{AE}{L}\right)_2 + \left(\frac{AE}{L}\right)_3 \\ -\left(\frac{AE}{L}\right)_3 \end{Bmatrix} u_3 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\left(\frac{AE}{l}\right)_3 \\ \left(\frac{AE}{L}\right)_3 \end{Bmatrix} u_4 \tag{23.12}$$

O en forma más compacta

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\right)_1 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 & \left(\frac{AE}{L}\right)_1 + \left(\frac{AE}{L}\right)_2 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 & \left(\frac{AE}{L}\right)_2 + \left(\frac{AE}{L}\right)_3 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_3 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_3 & \left(\frac{AE}{L}\right)_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \tag{23.13}$$

Esta relación puede escribirse simbólicamente como

$$\{P\} = [K]\{\delta\}$$

La matriz de rigideces [K] mostrada en la ecuación 23.13 es singular y no tiene una inversa. Por lo tanto, como antes, no es posible despejar los desplazamientos u_1, u_2, u_3 y u_4 en términos de las fuerzas nodales X_1, X_2, X_3 y X_4. Sin embargo, si se impide el movimiento de cuerpo rígido para el puntal especificando uno o más desplazamientos nodales, es posible una solución. Como ejemplo, sean $u_1 = 0$ y $u_4 = 0$. Esto conducirá a la configuración mostrada en la figura 23.7.

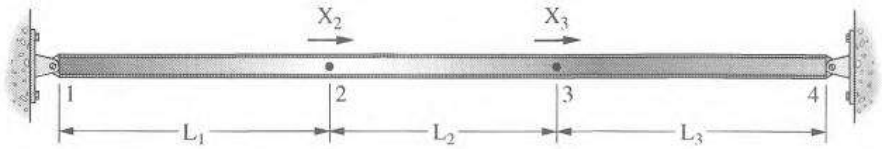


Figura 23.7

Como u_1 y u_4 son iguales a cero, las columnas 1 y 4 de la matriz de rigideces pueden eliminarse del conjunto de ecuaciones. (El lector puede preferir revisar un poco atrás en esta sección para recordar el significado físico de la matriz de rigideces.) De manera similar las ecuaciones 1 y 4 también pueden eliminarse del conjunto de ecuaciones. (La justificación para eliminar a estas ecuaciones se presenta en el capítulo 25.) Estas manipulaciones pueden manejarse convenientemente cuando se hacen cálculos a mano eliminando las filas y las columnas asociadas con los componentes de desplazamiento cuyos valores se especifican como cero. En este ejemplo se eliminan la primera y la cuarta columnas y la primera y la cuarta filas del conjunto de ecuaciones.

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\right)_1 & \left(\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 & \left(\frac{AE}{L}\right)_1 + \left(\frac{AE}{L}\right)_2 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 & \left(\frac{AE}{L}\right)_2 + \left(\frac{AE}{L}\right)_3 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_3 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_3 & \left(\frac{AE}{L}\right)_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix} \tag{23.14}$$

Las dos ecuaciones restantes pueden resolverse simultáneamente para determinar los valores de los desplazamientos libres de las fuerzas nodales.

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\right)_1 + \left(\frac{AE}{L}\right)_2 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 \\ -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 & \left(\frac{AE}{L}\right)_2 + \left(\frac{AE}{L}\right)_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{23.15}$$

Se suponen los siguientes valores de modo que se obtengan respuestas numéricas para este ejemplo.

$$\left(\frac{AE}{L}\right)_1 = \left(\frac{AE}{L}\right)_2 = \left(\frac{AE}{L}\right)_3 = 1\,000.0 \text{ klb/plg}$$

$$X_2 = 200 \text{ klb y } X_3 = 100 \text{ klb}$$

Entonces, la ecuación 23.15 puede resolverse con los siguientes resultados:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,000 & -1\,000 \\ -1\,000 & 2\,000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 200 \\ 100 \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 200 \\ 100 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.167 \text{ plg} \\ 0.133 \text{ plg} \end{Bmatrix} \tag{23.16}$$

Ahora pueden determinarse las reacciones X_1 y X_4 sustituyendo los valores de u_1 y u_2 en las ecuaciones anteriormente eliminadas del conjunto de ecuaciones.

$$X_1 = -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 u_2 = -1\,000(0.167) = -167 \text{ klb}$$
$$X_4 = -\left(\frac{AE}{L}\right)_3 u_3 = -1\,000(0.1333) = -133 \text{ klb} \qquad \textbf{(23.17)}$$

El lector deberá observar cuidadosamente que, aunque el puntal continuo de la figura 23.7 es estáticamente indeterminado, su solución por el método de las rigideces no requirió de la identificación de las redundantes o ni siquiera del conocimiento de que la estructura era estáticamente indeterminada. *Una característica más bien peculiar del método de las rigideces es que el número de ecuaciones algebraicas que deben resolverse simultáneamente disminuye a medida que aumenta el orden de la redundancia.* Esto contrasta directamente con las características del método de las fuerzas o de las flexibilidades.

23.4 ECUACIONES DE RIGIDECES PARA LAS BARRAS SOMETIDAS A FLEXIÓN

Se obtuvieron ecuaciones de rigideces para elementos sometidos a flexión por el método de pendiente-deflexión en el capítulo 18. Sin embargo, estas derivaciones se repiten en esta sección para presentar un sistema uniforme de notación y para introducir algunos temas que no se mencionaron anteriormente. Para este estudio se considera en primer lugar el elemento de viga individual en la figura 23.8.

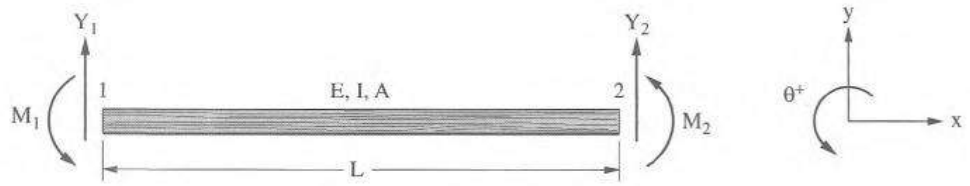


Figura 23.8

Se asignan números de nodo a los extremos del elemento tal como se hizo con los puntales. El eje x se toma paralelo al eje del elemento y el analista designa un sentido positivo como se muestra en la figura. Se toma un eje y positivo perpendicular al eje x del elemento y se determina un sentido positivo de rotación usando la regla estándar de la mano derecha.

Como fue el caso de los puntales, los nodos de la viga se designan como las posiciones donde se aplican las fuerzas y donde se miden los desplazamientos. Para el elemento de viga mostrado en la figura 23.8 las fuerzas aplicadas en los nodos consisten en fuerzas cortantes transversales y momentos flexionantes. En esta figura estas fuerzas se designan con los símbolos Y_i y M_i, respectivamente, y se muestran actuando según su sentido positivo. Los desplazamientos en los nodos consisten en las traslaciones v_i paralelas a las fuerzas cortantes, y las rotaciones θ_i. Las fuerzas axiales, estudiadas en la sección anterior, también pueden actuar sobre el elemento de viga, pero por simplificación se suponen iguales a cero en este caso.

Las relaciones entre las fuerzas de los nudos y los desplazamientos de los nudos se desarrollan, como antes, asignando un valor arbitrario a un componente de desplazamiento individual, al tiempo que se requiere que todos los demás componentes de desplazamiento permanezcan iguales a cero. Como ejemplo, al nodo 1 de la viga mostrada en la figura 23.8 se le da un valor arbitrario, mientras que $v_2 = \theta_1 = \theta_2 = 0$. En la figura 23.9 se muestra un croquis de la viga deformada resultante.

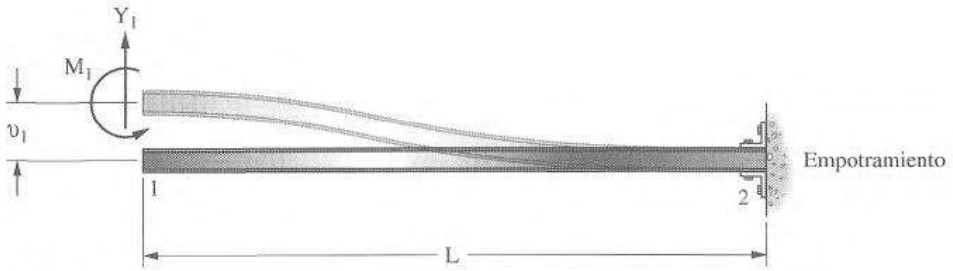


Figura 23.9

Unas cuantas relaciones de fuerzas-desplazamiento se han presentado en los primeros capítulos de este libro. Debido a su considerable importancia para el método de las rigideces en la figura 23.10 se muestran las relaciones de uso más frecuente.

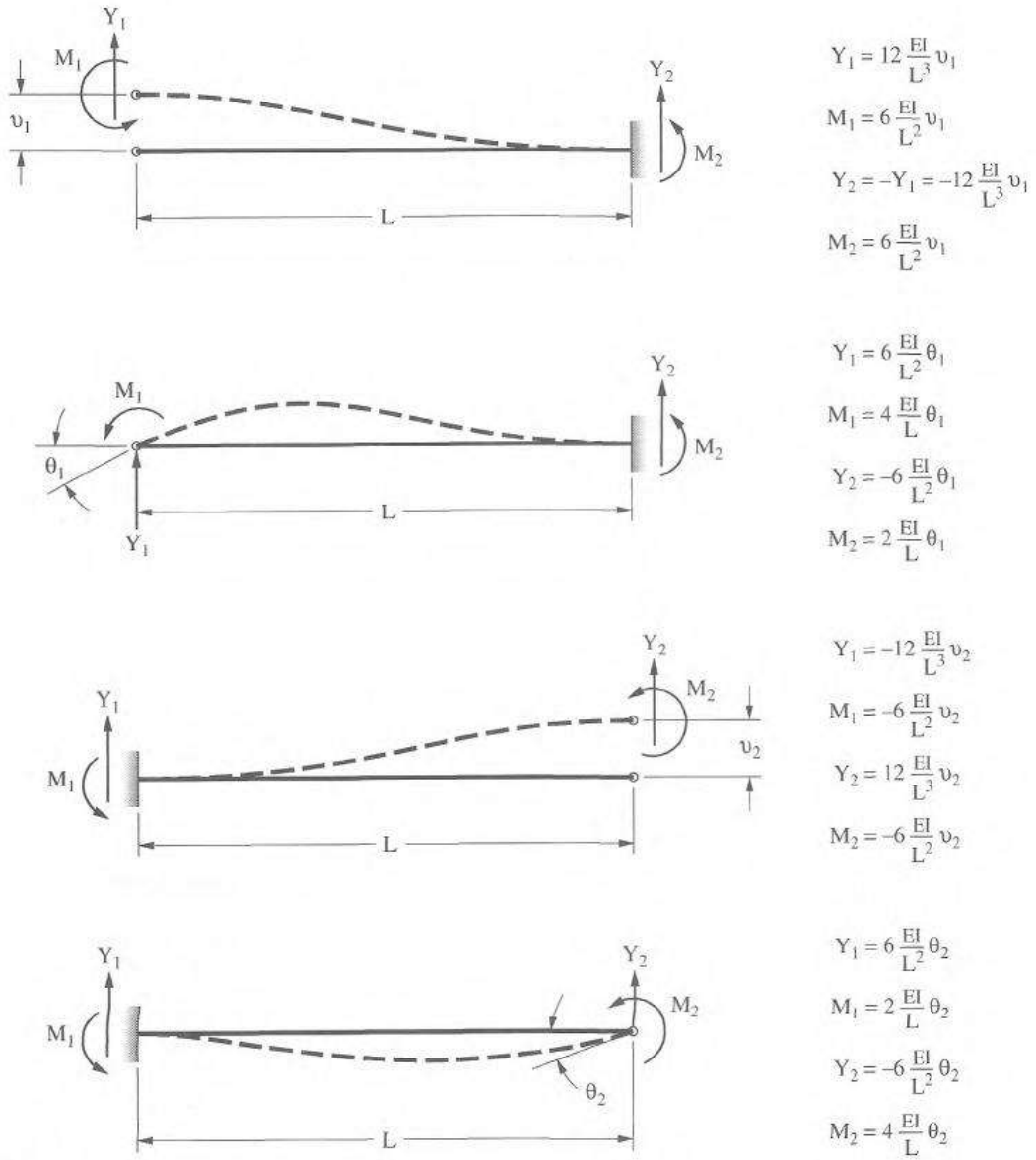


Figura 23.10

Para la viga deformada mostrada en la figura 23.9 y con referencia a las relaciones fuerza-desplazamiento de la figura 23.10, las fuerzas nodales resultantes pueden resumirse como sigue:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \left(\frac{12EI}{L^3}\right)v_1 \\
M_1 &= \left(\frac{6EI}{L^2}\right)v_1 \\
Y_2 &= -\left(\frac{12EI}{L^3}\right)v_1 \\
M_2 &= \left(\frac{6EI}{L^2}\right)v_1
\end{aligned}
\tag{23.18}
$$

O en notación matricial

$$
\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{12EI}{L^3} \\ \dfrac{6EI}{L^2} \\ -\dfrac{12EI}{L^3} \\ \dfrac{6EI}{L^2} \end{Bmatrix} v_1 \tag{23.19}
$$

Si a θ_1 se le da un valor arbitrario y todos los otros componentes de desplazamiento nodal se hacen iguales a cero, el elemento de viga de la figura 23.8 adoptará la forma mostrada en la figura 23.11.

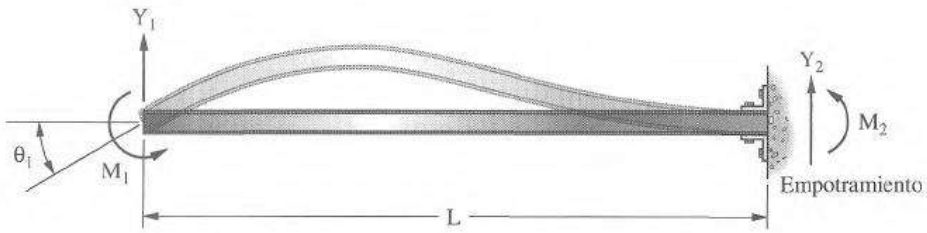


Figura 23.11

Las fuerzas nodales resultantes pueden resumirse como sigue:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{6EI}{L^2}\theta_1 \\
M_1 &= \frac{4EI}{L}\theta_1 \\
Y_2 &= -\frac{6EI}{L^2}\theta_1 \\
M_2 &= \frac{2EI}{L}\theta_1
\end{aligned}
\tag{23.20}
$$

O en notación matricial

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{6EI}{L^2} \\ \dfrac{4EI}{L} \\ -\dfrac{6EI}{L^2} \\ \dfrac{2EI}{L} \end{Bmatrix} \theta_1 \tag{23.21}$$

También pueden imponerse desplazamientos nodales similares al nodo 2 del elemento de viga. La superposición de las fuerzas nodales producidas por cada uno de los desplazamientos nodales individuales produce la siguiente expresión para las fuerzas nodales totales:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{\text{total}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{12EI}{L^3} \\ \dfrac{6EI}{L^2} \\ -\dfrac{12EI}{L^3} \\ \dfrac{6EI}{L^2} \end{Bmatrix} v_1 + \begin{Bmatrix} \dfrac{6EI}{L^2} \\ \dfrac{4EI}{L} \\ -\dfrac{6EI}{L^2} \\ \dfrac{2EI}{L} \end{Bmatrix} \theta_1 + \begin{Bmatrix} -\dfrac{12EI}{L^3} \\ -\dfrac{6EI}{L^2} \\ \dfrac{12EI}{L^3} \\ -\dfrac{6EI}{L^2} \end{Bmatrix} v_2 + \begin{Bmatrix} \dfrac{6EI}{L^2} \\ \dfrac{2EI}{L} \\ -\dfrac{6EI}{L^2} \\ \dfrac{4EI}{L} \end{Bmatrix} \theta_2 \tag{23.22}$$

O en una forma matricial más compacta

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{12EI}{L^3} & \dfrac{6EI}{L^2} & -\dfrac{12EI}{L^3} & \dfrac{6EI}{L^2} \\ \dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L} & -\dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{2EI}{L} \\ -\dfrac{12EI}{L^3} & -\dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{12EI}{L^3} & -\dfrac{6EI}{L^2} \\ \dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{2EI}{L} & -\dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{23.23}$$

La ecuación 23.23 representa a la ecuación de rigideces para un elemento de viga individual.

Para una viga que consiste en dos o más elementos las ecuaciones de rigideces pueden determinarse de manera similar. Par ilustrar este punto se considera la viga continua de dos claros de la figura 23.12(a). Se asignan números de nodos y números de elementos a esta estructura de la misma manera que se hizo con los puntales. Si a v_1 se le da un valor arbitrario (todos los demás componentes de desplazamiento permanecen iguales a cero) la estructura se deformará como se muestra en la figura 23.12(b).

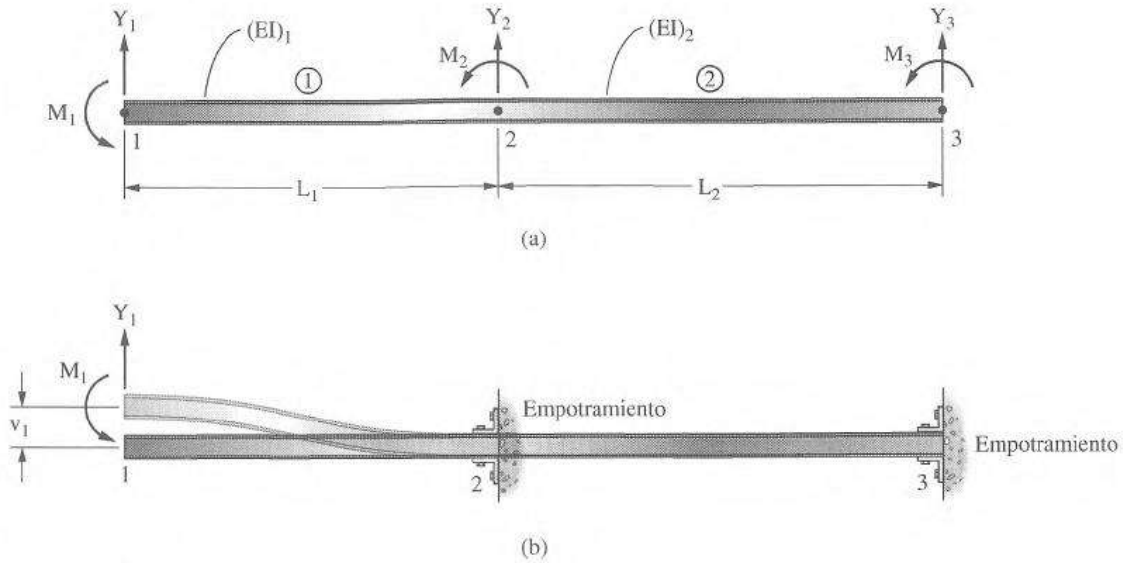


Figura 23.12

Las fuerzas nodales resultantes pueden resumirse como sigue:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12\left(\dfrac{EI}{L^3}\right)_1 \\ 6\left(\dfrac{EI}{L^2}\right)_1 \\ -12\left(\dfrac{EI}{L^3}\right)_1 \\ 6\left(\dfrac{EI}{L^2}\right)_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} v_1 \tag{23.24}$$

Debe observarse que no habrá fuerzas impuestas en el nodo 3 del segmento de viga ② ya que ni el nodo 2 ni el 3 se deforman de ninguna manera. Además, no tienen que considerarse las condiciones de frontera para una estructura dada cuando se están desarrollando las ecuaciones de rigidez (se les considerará en una etapa posterior del análisis).

Si ahora se le da un valor arbitrario a la componente de desplazamiento v_2, mientras que todos lo demás desplazamientos se mantienen iguales a cero, la estructura adoptará la forma deformada mostrada en la figura 23.13.

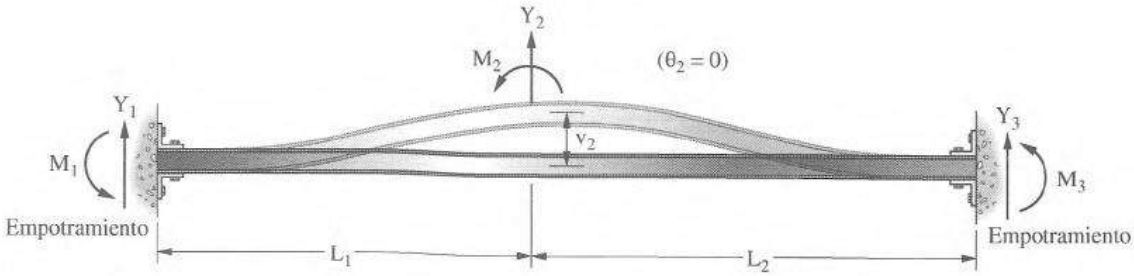


Figura 23.13

El conjunto resultante de fuerzas nodales que corresponden a la forma deformada de la figura 23.13 puede resumirse como sigue:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 \\ -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 \\ 12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 + 12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_2 \\ -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 + 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 \\ -12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_2 \\ 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 \end{Bmatrix} v_2 \tag{23.25}$$

Cuando se repite el proceso descrito aquí, dando un valor arbitrario a cada componente de desplazamiento en turno, todas las demás componentes de desplazamiento se mantienen iguales a cero, y los resultados se superponen, dando como resultado la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 & 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 & -12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 & 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 & 0 & 0 \\ 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 & 4\left(\frac{EI}{L}\right)_1 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 & 2\left(\frac{EI}{L}\right)_1 & 0 & 0 \\ -12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 & -6\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 & 12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 + 12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_2 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 + 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 & -12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_2 & 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 \\ 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 & 2\left(\frac{EI}{L}\right)_1 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 + 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 & 4\left(\frac{EI}{L}\right)_1 + 4\left(\frac{EI}{L}\right)_2 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 & 2\left(\frac{EI}{L}\right)_2 \\ 0 & 0 & -12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_2 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 & 12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_2 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 \\ 0 & 0 & 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 & 2\left(\frac{EI}{L}\right)_2 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 & 4\left(\frac{EI}{L}\right)_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{23.26}$$

Aunque no están listados todos los coeficientes de rigidez mostrados en la ecuación 23.26, explícitamente en la figura 23.10, pueden encontrarse todos lo coeficientes a partir de esta figura sumando apropiadamente (o restando) los coeficientes asociados con los segmentos individuales de viga. Se exhorta al lector para que realice esta operación para todos los coeficientes de la matriz de rigideces mostrada en la ecuación 23.26.

Los problemas de los ejemplos 23.1 y 23.2 tienen como objetivo listar muchos de los comentarios formulados en las secciones anteriores.

EJEMPLO 23.1

Una viga continua, mostrada en la figura 23.14(a), está sujeta a un momento concentrado, M*, aplicado en la distancia a desde el extremo izquierdo. Determine la rotación y las reacciones en los apoyos de la viga.

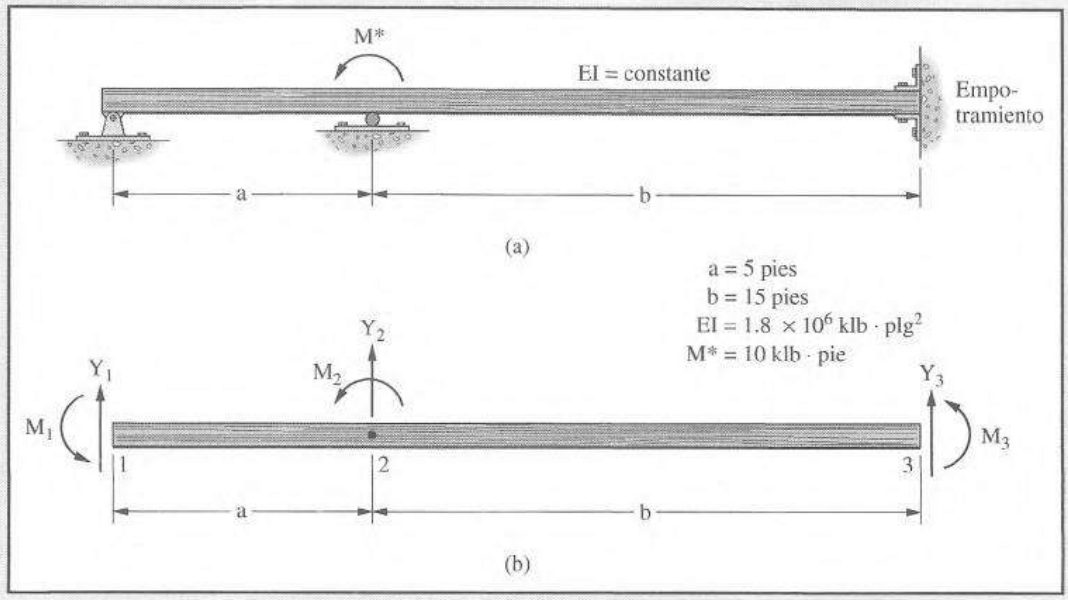


Figura 23.14

Solución.

La viga se divide en dos segmentos de modo que se localice un punto nodal en cada punto de apoyo. La figura 23.14(b) muestra el modelo de viga que se analizará. La matriz de rigideces para esta estructura se desarrolló previamente y se muestra como la ecuación 23.26. Las condiciones de frontera se expresan como

$$v_1 = 0$$
$$v_2 = 0$$
$$v_3 = 0$$
$$\theta_3 = 0$$

Inicialmente las columnas en la matriz de rigideces que se asocian con los desplazamientos impuestos de cero se borran. Entonces por sí mismas se borran las filas asociadas con las columnas borradas. El resultado de estas operaciones se muestra en la ecuación 23.27.

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} & \frac{-12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a} & \frac{-6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{a^3} & \frac{-6EI}{a^2} & \frac{12EI}{a^3}+\frac{12EI}{b^3} & \frac{-6EI}{a^2}+\frac{6EI}{b^2} & \frac{-12EI}{b^3} & \frac{6EI}{b^2} \\ \frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} & \frac{-6EI}{a^2}+\frac{6EI}{b^2} & \frac{4EI}{a}+\frac{4EI}{b} & \frac{-6EI}{b^2} & \frac{2EI}{b} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI}{b^3} & \frac{-6EI}{b^2} & \frac{12EI}{b^3} & \frac{-6EI}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{b^2} & \frac{2EI}{b} & \frac{-6EI}{b^2} & \frac{4EI}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{Bmatrix} \tag{23.27}$$

Las ecuaciones de rigideces restantes se escriben y resuelven para los desplazamientos desconocidos (libres).

$$\begin{Bmatrix} M_1 = 0 \\ M_2 = M^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{a} & \dfrac{2EI}{a} \\ \dfrac{2EI}{a} & \dfrac{4EI}{a} + \dfrac{4EI}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Los valores numéricos mostrados en la figura 23.14 se sustituyen en las ecuaciones anteriores y se convierten a unidades de pulgadas.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 120 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 120\,000 & 60\,000 \\ 60\,000 & 160\,000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

y

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 120\,000 & 60\,000 \\ 60\,000 & 160\,000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 120 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.62 \times 10^{-4} \\ 9.23 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} \text{ rad}$$

Ahora se encuentran las componentes de reacción sustituyendo los valores de los desplazamientos libres en las ecuaciones que se mostraron borradas en la ecuación 23.27. Los resultados son los siguientes:

$$Y_1 = \frac{6EI}{a^2}\theta_1 + \frac{6EI}{a^2}\theta_2 = 1.385 \text{ klb}$$

$$Y_2 = \frac{-6EI}{a^2}\theta_1 + \left(\frac{-6EI}{a^2} + \frac{6EI}{b^2}\right)\theta_2 = -1.077 \text{ klb}$$

$$Y_3 = \frac{-6EI}{b^2}\theta_2 = -0.308 \text{ klb}$$

$$M_3 = \frac{2EI}{b}\theta_2 = 18.46 \text{ klb-plg} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 23.2

La viga de la figura 23.15(a) tiene segmentos con diferentes rigideces de flexión. Una carga concentrada P actúa en el punto medio de la viga. Determine la deflexión bajo la carga y las reacciones en los puntos de apoyo.

Solución.

La viga se divide en dos segmentos, con la carga actuando en uno de los puntos nodales, como se muestra en la figura 23.15(b). Para este problema se usa la ecuación básica de rigidez (23.26), pero ahora las condiciones de frontera son

$$v_1 = 0$$
$$\theta_1 = 0$$
$$v_2 = 0$$
$$\theta_2 = 0$$

Cuando las columnas y las filas se borran de la ecuación 23.26 con objeto de reflejar las condiciones de frontera, el resultado es

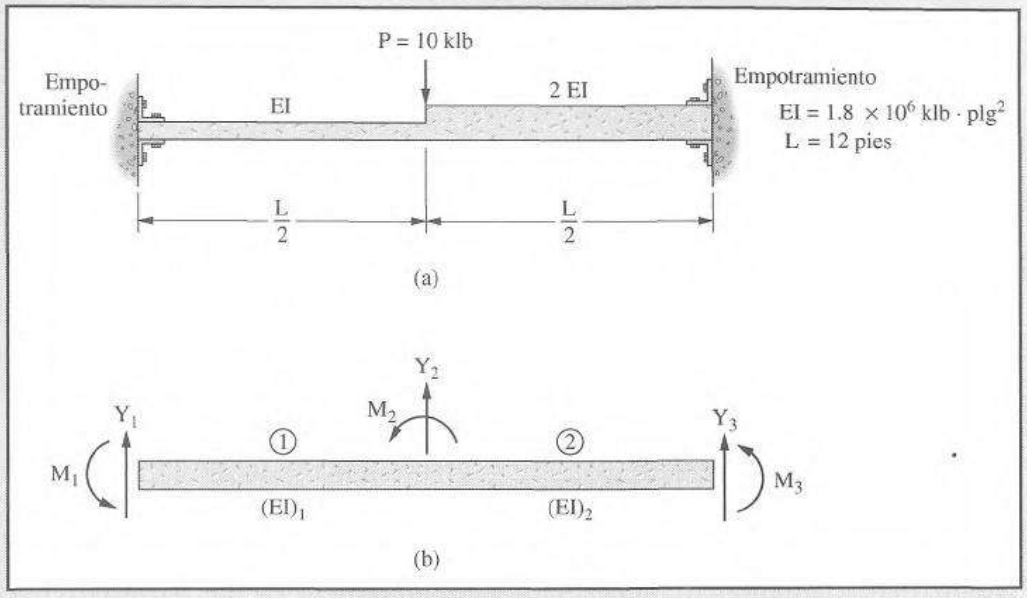


Figura 23.15

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & \dfrac{-96EI}{L^3} & \dfrac{24EI}{L^2} & x & x \\ x & x & \dfrac{-24EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L} & x & x \\ x & x & \dfrac{288EI}{L^3} & \dfrac{24EI}{L^2} & x & x \\ x & x & \dfrac{24EI}{L^2} & \dfrac{24EI}{L^2} & x & x \\ x & x & \dfrac{-192EI}{L^3} & \dfrac{-48EI}{L^2} & x & x \\ x & x & \dfrac{48EI}{L^2} & \dfrac{8EI}{L} & x & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{Bmatrix} \tag{23.28}$$

Restan dos ecuaciones del conjunto original que se resuelven para los desplazamientos de los nodos libres.

$$\begin{Bmatrix} Y_2 = -10 \\ M_2 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{288EI}{L^3} & \dfrac{24EI}{L^2} \\ \dfrac{24EI}{L^2} & \dfrac{24EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Los valores numéricos mostrados en la figura 23.15 se sustituyen en las expresiones anteriores con los siguientes resultados:

$$\begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 173.6 & 2\,083 \\ 2\,083 & 300\,000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

y

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 173.6 & 2\,083 \\ 2\,083 & 300\,000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.063 \text{ plg} \\ 4.4 \times 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Los valores obtenidos para v_2 y θ_2 se sustituyen en las ecuaciones que fueron borradas con objeto de producir las soluciones para las reacciones:

$$Y_1 = \frac{-96EI}{L^3} v_2 + \frac{24EI}{L^2} \theta_2 = 4.545 \text{ klb}$$

$$M_1 = \frac{-24EI}{L^2} v_2 + \frac{4EI}{L} \theta_2 = 152.7 \text{ klb-plg}$$

$$Y_3 = \frac{-192EI}{L^3} v_2 - \frac{48EI}{L^2} \theta_2 = 5.455 \text{ klb}$$

$$M_3 = \frac{48EI}{L^2} v_2 + \frac{8EI}{L} \theta_2 = -218.2 \text{ klb-plg} \quad \blacksquare$$

El lector deberá observar que puede usarse la misma ecuación básica de rigideces (23.26) para resolver un gran número de problemas cuando se especifican diferentes cargas, rigideces y condiciones de frontera.

23.5 MATRIZ DE RIGIDECES PARA ELEMENTOS COMBINADOS SUJETOS A FUERZA AXIAL Y FLEXIÓN

Si actúan fuerzas axiales sobre elementos que están sujetos simultáneamente a fuerzas cortantes y momentos flexionantes, las matrices de rigideces pueden prepararse de la misma manera que lo fue en la última sección para elementos sujetos solamente a fuerzas cortantes y momentos. Para este estudio se considera el elemento mostrado en la figura 23.16.

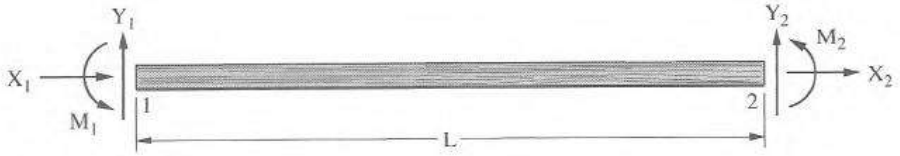


Figura 23.16

De acuerdo con la teoría de los pequeños desplazamientos se supone que las fuerzas axiales no afectan a los momentos flexionantes y a las fuerzas cortantes transversales, y viceversa. Por lo tanto, la matriz de rigideces puede escribirse como una superposición de casos de carga individual.

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{AE}{L} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{AE}{L} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u_1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{12EI}{L^3} \\ \frac{6EI}{L^2} \\ 0 \\ \frac{-12EI}{L^3} \\ \frac{6EI}{L^2} \end{Bmatrix} v_1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{4EI}{L} \\ 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} \end{Bmatrix} \theta_1 + \begin{Bmatrix} -\frac{AE}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{AE}{L} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u_2 + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 \\ \frac{12EI}{L^3} \\ \frac{-6EI}{L^2} \end{Bmatrix} v_2 + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} \\ 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{4EI}{L} \end{Bmatrix} \theta_2 \tag{23.29}$$

En notación matricial la ecuación de rigidez resultante es

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{-AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{23.30}$$

El ejemplo 23.3 muestra el análisis de una viga en voladizo usando el método de las rigideces.

EJEMPLO 23.3

Determine los desplazamientos de extremo y las reacciones en los apoyos para la viga en voladizo de la figura 23.17.

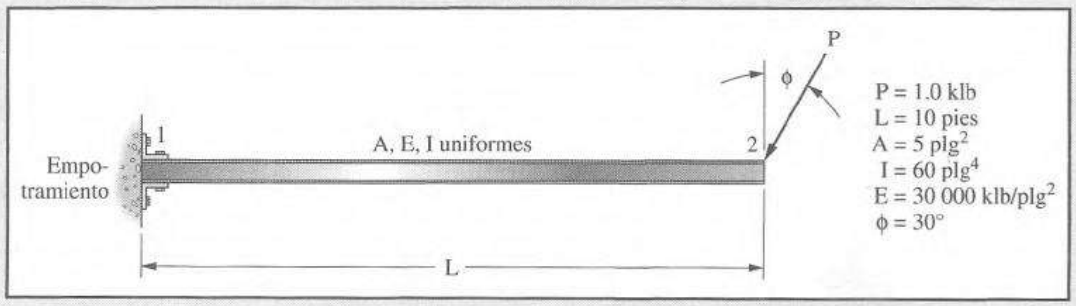


Figura 23.17

Solución.

La ecuación 23.30 representa a la matriz total de rigidices para esta estructura, ya que consiste en solamente un elemento de viga. Se eliminan las filas y las columnas apropiadas de la ecuación para reflejar las condiciones de frontera impuestas.

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 = -P \operatorname{sen} \phi \\ Y_2 = -P \cos \phi \\ M_2 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ x & x & x & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ x & x & x & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ x & x & x & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{23.31}$$

La ecuación matricial resultante es

$$\begin{Bmatrix} -P \operatorname{sen}\phi \\ -P\cos\phi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{12EI}{L^3} & \dfrac{-6EI}{L^2} \\ 0 & -6\dfrac{EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{23.32}$$

Después de sustituir los valores numéricos dados en la figura 23.17 se determinan los desplazamientos de extremos resolviendo simultáneamente el conjunto de ecuaciones.

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,250 & 0 & 0 \\ 0 & 12.5 & -750 \\ 0 & -750 & 60\,000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -0.50 \\ -0.866 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0004 \text{ plg} \\ -0.27713 \text{ plg} \\ -0.00346 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Las reacciones se encuentran sustituyendo los valores de estos desplazamientos en las ecuaciones que se eliminaron de la ecuación 23.31.

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-12EI}{L^3} & \dfrac{6EI}{L^2} \\ 0 & \dfrac{-6EI}{L^2} & \dfrac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1\,250 & 0 & 0 \\ 0 & -12.5 & 750 \\ 0 & 750 & 30\,000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.50 \text{ klb} \\ 0.866 \text{ klb} \\ 103.9 \text{ klb-plg} \end{Bmatrix} \quad \blacksquare$$

Aunque los problemas de vigas rara vez implican fuerzas axiales importantes, la ecuación de rigideces (23.30) se convierte en una ecuación fundamental en la solución de problemas que implican columnas y miembros diagonales, así como elementos de viga. Estos problemas, y sus soluciones, se estudian en el capítulo 24.

23.6 CARACTERÍSTICAS DE LAS MATRICES DE RIGIDECES

En las secciones anteriores se han desarrollado matrices de rigideces para puntales, para elementos sujetos a flexión, y para elementos que tienen fuerzas axiales actuando conjuntamente con fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Todas estas matrices de rigideces se escriben según un orden especial, que deberá estudiarse cuidadosamente. La ecuación general de rigideces se escribe simbólicamente como sigue:

$$\{P\} = [K]\{\delta\}$$

El orden de listado de las fuerzas nodales en la matriz [K] debe ser el mismo que el orden listado de los desplazamientos correspondientes en la matriz $\{\delta\}$. Así, si la primera fuerza nodal listada en $\{P\}$ es X_1, entonces el primer desplazamiento listado en la matriz $\{\delta\}$ debe ser u_1, etc. Si este orden de ecuaciones se conserva durante todo el análisis, todas las matrices de rigideces deberán tener las siguientes características:

1. Deben ser simétricas, es decir, $k_{i,j} = k_{j,i}$. Una prueba de esta característica se puede obtener de la ley de Maxwell de Deformaciones recíprocas.
2. La matriz completa de rigideces, ya sea para un elemento individual o para una estructura general, es singular. Sin embargo, si se especifican suficientes condiciones de frontera de modo que la estructura sea estable (y la matriz de rigideces se modifica para reflejar estas condiciones), la matriz de rigideces resultante es no singular.
3. Los coeficientes de rigidez en la diagonal principal siempre son positivos. La razón de esta característica surge del hecho de que los coeficientes de rigidez en la diagonal principal representan cada uno a la fuerza en el nodo requerida para producir un desplazamiento correspondiente en ese nodo. Una fuerza negativa requerida para producir un desplazamiento positivo es contraria al comportamiento físico observado en las estructuras.

23.7 RELACIÓN ENTRE LAS MATRICES DE RIGIDECES Y DE FLEXIBILIDADES

Aunque el método de las rigideces y el método de las flexibilidades son dos métodos diferentes de análisis de estructuras, las matrices desarrolladas en los dos métodos están estrechamente relacionadas. El propósito de esta sección es señalar estas similitudes y mostrar también algunas de la diferencias entre ellas.

Como se describe en el capítulo 22, los coeficientes de flexibilidad representan los desplazamientos en posiciones específicas debido a las cargas unitarias en otras posiciones específicas. Como ejemplo, se desarrolla un conjunto de coeficientes de flexibilidad en esta sección para la viga simplemente apoyada de la figura 23.18(a).

Se aplica un momento unitario en el nodo 1 de la viga, como se muestra en la figura 23.18(b). La rotaciones resultantes en los nodos 1 y 2 son los coeficientes de flexibilidad, $\delta_{1,1}$ y $\delta_{2,1}$, respectivamente. Sus valores se muestran en la figura 23.18(b). En forma similar se aplica un momento unitario al nodo 2 de la viga, como se muestra en la figura 23.18(c), con objeto de determinar los coeficientes de flexibilidad $\delta_{1,2}$ y $\delta_{2,2}$. Los valores de estos coeficientes se muestran en la figura 23.18(c).

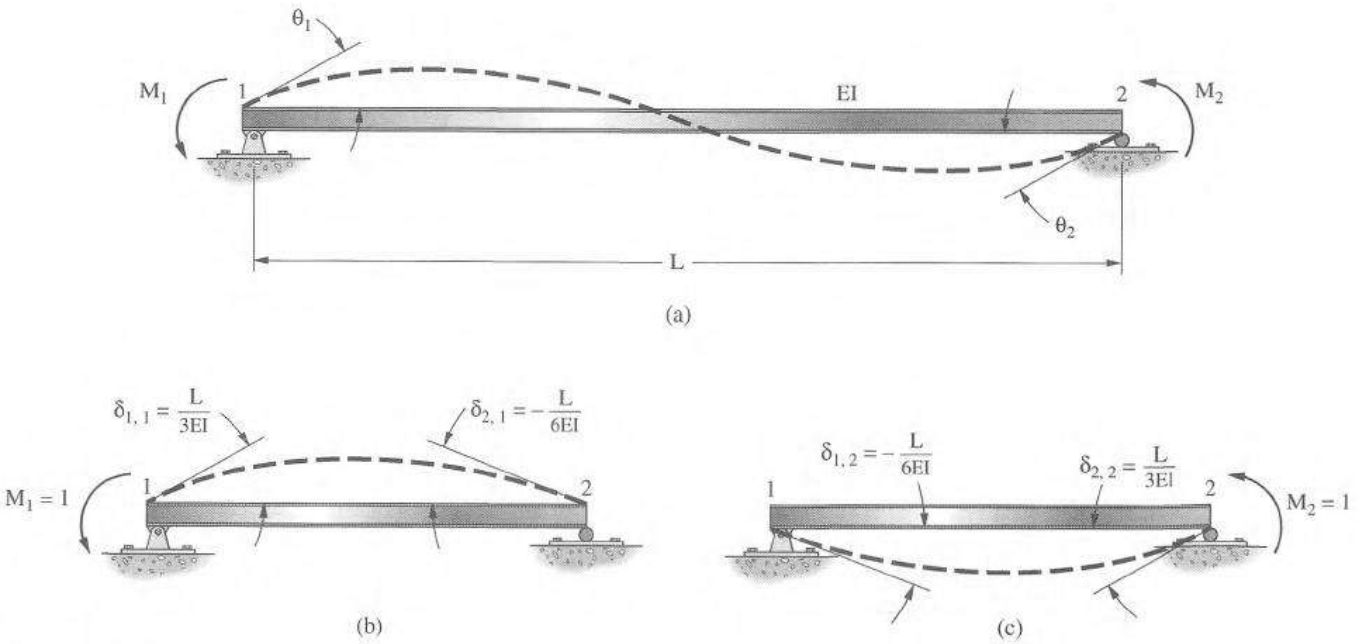


Figura 23.18

Los desplazamientos totales en los nodos 1 y 2 debido a la aplicación de los momentos arbitrarios M_1 y M_2 se escriben entonces usando el principio de superposición.

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \left(\frac{L}{3EI}\right)M_1 - \left(\frac{L}{6EI}\right)M_2 \\ \theta_2 &= -\left(\frac{L}{6EI}\right)M_1 + \left(\frac{L}{3EI}\right)M_2 \end{aligned} \tag{23.33}$$

O en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L}{3EI} & -\dfrac{L}{6EI} \\ -\dfrac{L}{6EI} & \dfrac{L}{3EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{23.34}$$

Simbólicamente, la ecuación 23.34 se escribe como

$$\{\delta\} = [F]\{P\} \tag{23.35}$$

En la sección 23.2, se obtuvo una relación comparable para esta viga usando el método de las rigideces, y esto se mostró en la ecuación 23.1. Esta ecuación se repite como la ecuación 23.36.

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{L} & \dfrac{2EI}{L} \\ \dfrac{2EI}{L} & \dfrac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{23.36}$$

O, simbólicamente,

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \tag{23.37}$$

Una comparación de las ecuaciones 23.35 y 23.37 indica que la matriz de rigideces [K] es el inverso de la matriz de flexibilidades [F].

$$[K] = [F]^{-1} \tag{23.38}$$

El lector puede probar esta relación desarrollando lo siguiente de las ecuaciones 23.34 y 23.36.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{L}{3EI} & -\dfrac{L}{6EI} \\ -\dfrac{L}{6EI} & -\dfrac{L}{3EI} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{L} & \dfrac{2EI}{L} \\ \dfrac{2EI}{L} & \dfrac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Aunque la ecuación 23.38 es correcta para casos específicos, hay una diferencia más fundamental entre las matrices de rigideces y de flexibilidades. El lector recordará de la ecuación 23.23 que la matriz total de rigideces para una viga puede escribirse como sigue:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{12EI}{L^3} & \dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{-12EI}{L^3} & \dfrac{6EI}{L^2} \\ \dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L} & \dfrac{-6EI}{L^2} & \dfrac{2EI}{L} \\ \dfrac{-12EI}{L^3} & \dfrac{-6EI}{L^2} & \dfrac{12EI}{L^3} & \dfrac{-6EI}{L^2} \\ \dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{2EI}{L} & \dfrac{-6EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{23.39}$$

Así la matriz de rigideces mostrada en la ecuación 23.36 representa solamente una porción de la matriz total de rigideces para la viga. Si se especifican condiciones de frontera diferentes para la viga, son aplicables otras matrices reducidas de rigideces. Así la matriz total de rigideces mostrada en la ecuación 23.39 incluye a las matrices reducidas de rigideces para varias condiciones de frontera diferentes, tales como las que se muestran en las figuras 23.19(a) a 23.19(f). Sin embargo, observe que no existe una matriz de flexibilidades que sea una contraparte de la matriz total de rigideces, es decir, las matrices de flexibilidades existen solamente para las estructuras estables.

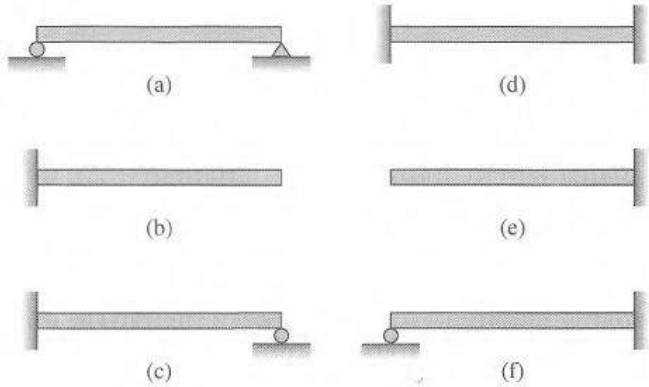


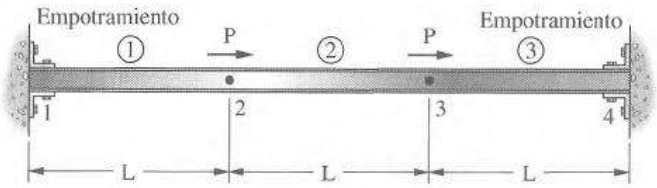
Figura 23.19

Los enunciados anteriores para un elemento de viga individual son aplicables igualmente bien a cualquier estructura, independientemente de qué tan compleja sea. Para cada condición de soporte individual de la estructura existe una matriz reducida de rigideces diferente y una matriz de flexibilidades diferente. Están relacionadas entre sí a través de la ecuación 23.38. Sin embargo, la estructura posee solamente una matriz *total* de rigideces.

23.8 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

23.1

$$\left(\frac{AE}{L}\right)_1 = \left(\frac{AE}{L}\right)_2 = \left(\frac{AE}{L}\right)_3 = 100.0 \text{ klb/plg}$$



Para la estructura con fuerza axial mostrada, determine lo siguiente:

(a) El desplazamiento de los nodos 2 y 3;
(b) Las reacciones en los nodos 1 y 4;
(c) Las fuerzas internas en los elementos en los miembros 1, 2 y 3.

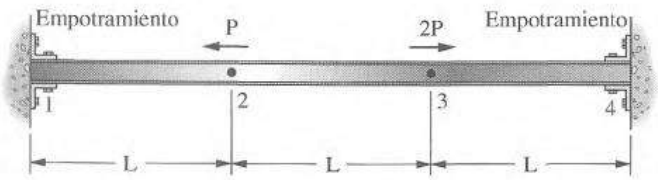
Resp.: (a) $\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{P}{100}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

(b) $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ -P \end{Bmatrix}$

(c) $\begin{Bmatrix} F_{1,1} \\ F_{1,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ P \end{Bmatrix}$

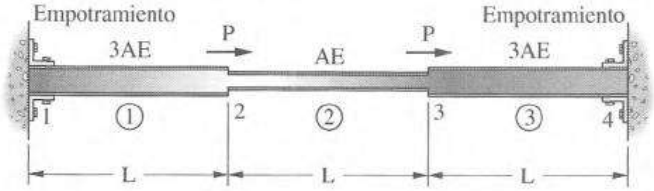
23.2 Repita el problema 23.1 usando cargas modificadas que actúen en los nodos 2 y 3, como se muestra.

$$\frac{AE}{L} = 100.0 \text{ klb/plg}$$



23.3 Resuelva el problema 23.1 usando rigideces modificadas para los elementos 1 y 3, como se muestra.

$$\left(\frac{AE}{L}\right)_2 = 100.0 \text{ klb/plg}$$



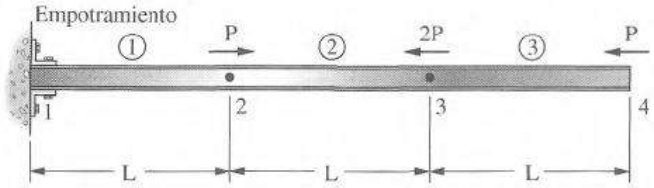
Resp.: (a) $\begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ P \end{Bmatrix}$

(b) $\begin{Bmatrix} F_{2,3} \\ F_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

(c) $\begin{Bmatrix} F_{3,4} \\ F_{4,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ -P \end{Bmatrix}$

23.4

$$\frac{AE}{L} = 100.0 \text{ klb/plg}$$

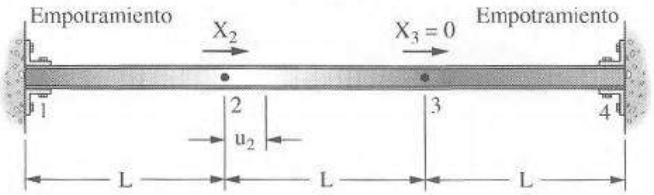


Para la estructura de fuerzas axiales mostrada determine lo siguiente:

(a) Los desplazamientos en los nodos 2, 3, y 4;
(b) La reacción en el nodo 1;
(c) Las fuerzas internas en los elementos en los miembros 1, 2 y 3.

23.5

$$\frac{AE}{L} = 100.0 \text{ klb/plg}$$
todos los miembros
$u_2 = 0.05$ plg



Para la estructura de fuerzas axiales mostrada suponga que una fuerza externa X_2, actuando en el nodo 2, produce un desplazamiento $u_2 = 0.02$ plg. Determine lo siguiente:

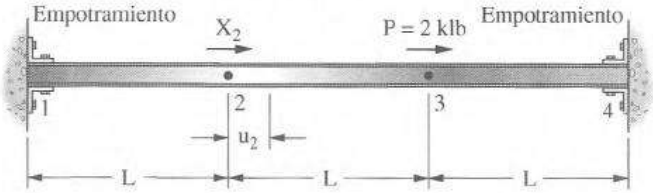
(a) La fuerza externa X_2;
(b) El desplazamiento resultante en el nodo 3;
(c) Las reacciones en los nodos 1 y 4.

Resp.: (a) y (b) $\begin{Bmatrix} x_3 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \text{ klb} \\ 0.01 \text{ plg} \end{Bmatrix}$

(c) $\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -1 \end{Bmatrix}$

23.6

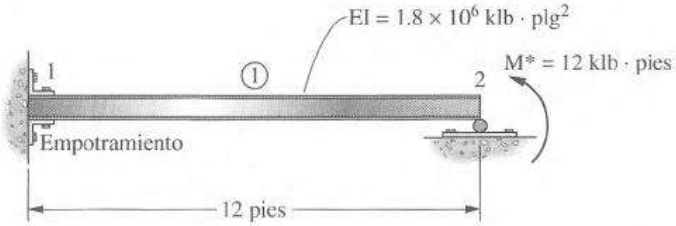
$$\frac{AE}{L} = \text{constante} = 100.0 \text{ klb/plg}$$
todos los miembros
$u_2 = 0.05$ plg



Para el elemento con fuerza axial mostrado suponga que una fuerza P conocida actúa en el nodo 3, y una fuerza desconocida X_2 actúa en el nodo 2. Se mide El desplazamiento resultante para la carga combinada y se encuentra que es $u_2 = 0.05$. Determine

(a) La fuerza nodal X_2;
(b) El desplazamiento en el nodo 3;
(c) Las reacciones en los nodos 1 y 4.

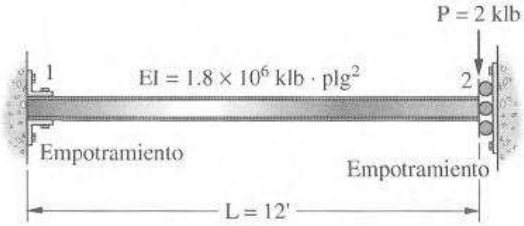
23.7



Usando la matriz de rigideces dada por la ecuación 23.23, encuentre lo siguiente:

(a) La rotación en el nodo 2 debida al momento externamente aplicado M*. (*Resp.:* $\theta_2 = 0.00288$ radianes.)
(b) La reacción en los nodos 1 y 2. (*Resp.:* $y_2 = -1.5$ klb.)

23.8



La viga mostrada puede trasladarse en sentido vertical en el nodo 2, pero no puede girar. Suponiendo una carga transversal P que actúa en el nodo 2, determine lo siguiente:

(a) El desplazamiento en el nodo 2;
(b) Las reacciones en los nodos 1 y 2.

Capítulo 24

Matrices de rigideces para elementos inclinados

24.1 GENERALIDADES

En el capítulo 23 se escribieron ecuaciones de rigideces para puntales y vigas que se orientaron a lo largo de un eje horizontal único. La mayoría de las estructuras consisten en una combinación de vigas y columnas, y tal vez algunos elementos inclinados. En este capítulo se aborda el desarrollo de ecuaciones de rigideces para elementos cuyos ejes no son paralelos.

24.2 ELEMENTOS CON FUERZA AXIAL

La armadura conectada con pasadores mostrada en la figura 24.1 consiste en varios elementos cuyos ejes están orientados según diferentes ángulos con respecto a un eje horizontal de referencia.

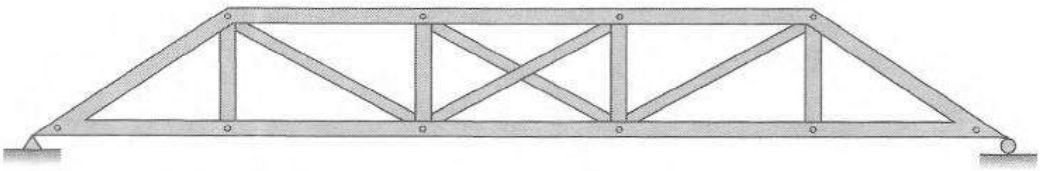


Figura 24.1

En la figura 24.2 se muestra un elemento inclinado de esta armadura.

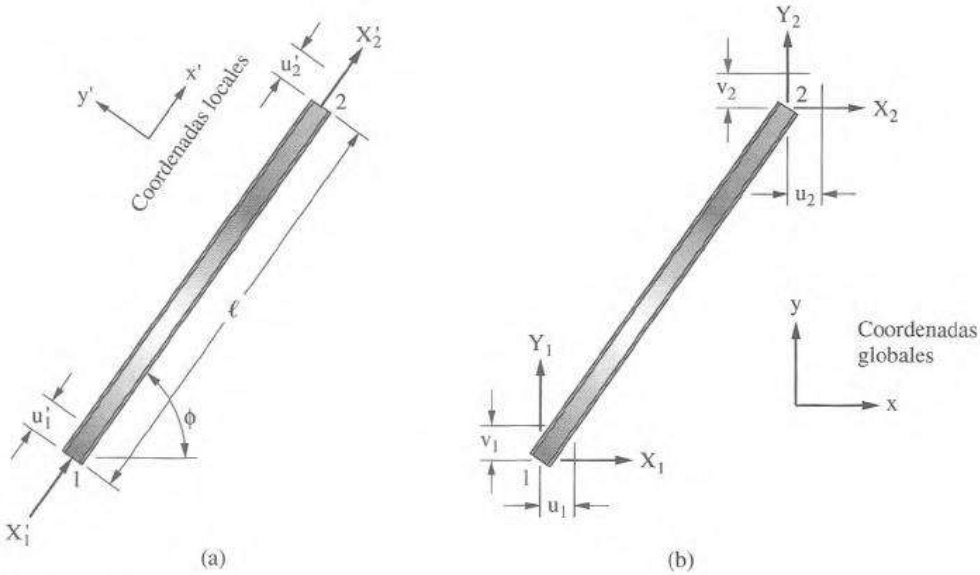
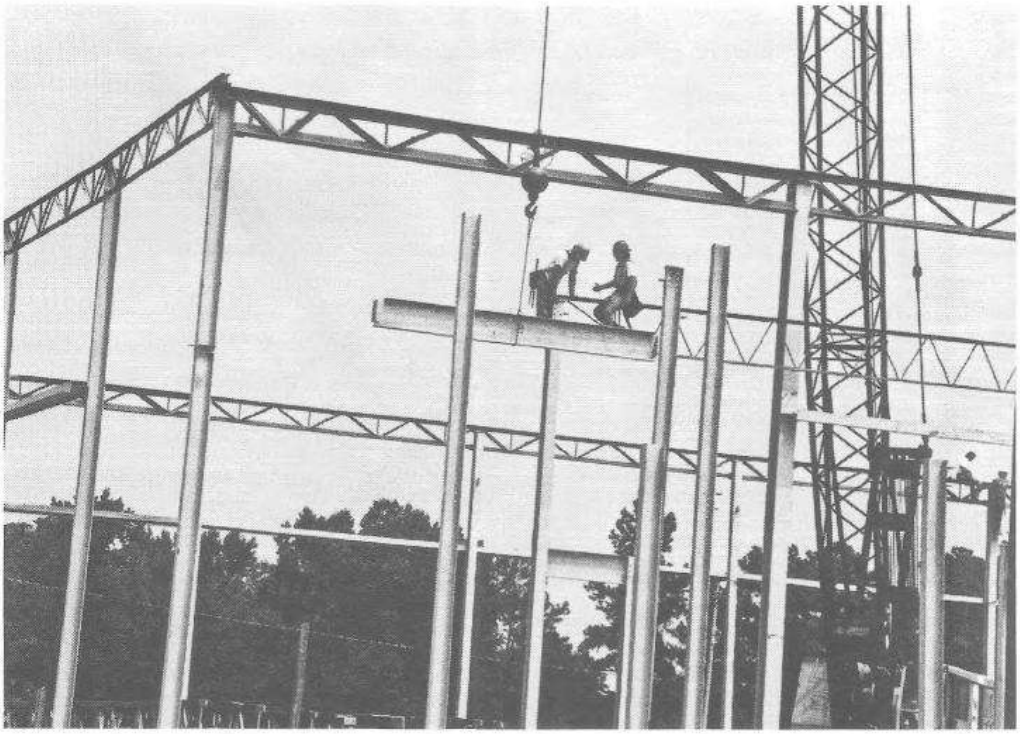


Figura 24.2



Centro recreativo, Universidad Lander, Greenwood, Carolina del Sur. (Cortesía de Britt, Peters y Asociados.)

Para describir la relación fuerza-desplazamiento para este elemento y todos los demás elementos inclinados, es conveniente establecer dos sistemas coordenados: un *sistema coordenado local* y un *sistema coordenado global*. El sistema coordenado local se establece trazando el eje x local a lo largo del eje del elemento inclinado [véase la figura 24.2(a)]. Este eje se rotula x' para distinguirlo del eje x global. El eje y local, rotulado y', se traza perpendicular al eje x' local. El sistema coordenado global es un sistema de referencia individual establecido por el analista para toda la estructura. Los ejes globales se rotulan x y y para las estructuras planas [véase la figura 24.2(b)].

Las fuerzas y los desplazamientos referenciados con respecto a los ejes locales se designan con primas, por ejemplo, X_1' representa una fuerza paralela al eje x', mientras que u_1' representa un desplazamiento paralelo a este eje. Inversamente, las fuerzas y los desplazamientos escritos sin primas representan valores referenciados a los ejes globales. Así X_1 y Y_1 representan fuerzas paralelas a los ejes globales x y y, respectivamente, mientras que u_1 y v_1 representan componentes de desplazamiento paralelos a estos ejes.

Las relaciones fuerza-desplazamiento desarrolladas en el capítulo 23 son válidas solamente cuando las fuerzas y los desplazamientos están referenciados a los ejes locales del puntal. Si varios puntales concurren en un nudo, tal como se muestra en la figura 24.1, habrá varios conjuntos de ejes de referencia locales. Como las direcciones de las fuerzas axiales y de los desplazamientos axiales de los puntales que concurren en un nudo son diferentes, sus rigideces individuales no pueden sumarse directamente. Por lo tanto, en esta sección las relaciones fuerza-desplazamiento para un puntal se obtienen de nuevo con respecto a los ejes globales, de modo que las rigideces de los puntales que concurren en un nudo puedan sumarse.

Para establecer la relación fuerza-desplazamiento con respecto a los ejes globales para un puntal inclinado, se da un valor arbitrario a una componente global de desplazamiento. Todas las demás componentes de desplazamiento se mantienen iguales a cero. La figura 24.3 muestra un puntal al cual se le ha dado un valor arbitrario de desplazamiento, u_1. Este desplazamiento puede

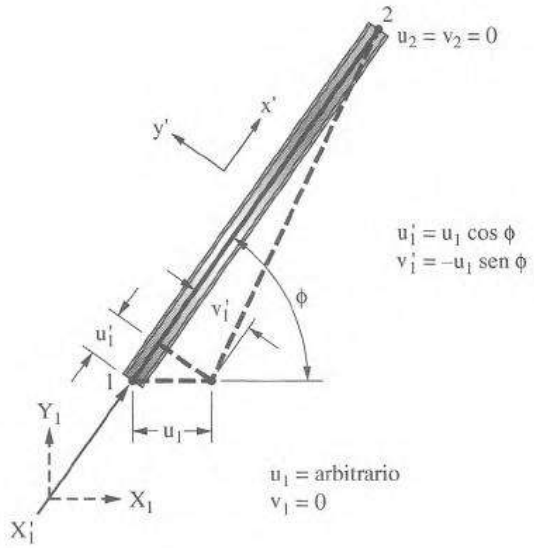


Figura 24.3

ser fragmentado, o descompuesto, en componentes perpendicular y paralelo a los ejes locales del elemento como se muestra en esta figura.

La componente de desplazamiento v_1' no cambia la longitud del puntal en forma significativa y, en la teoría de los pequeños desplazamientos, no produce esfuerzos en el puntal. Sin embargo, la componente de desplazamiento u_1' es significativa y ciertamente causa esfuerzos apreciables en el puntal. La relación fuerza-desplazamiento ha sido establecida anteriormente como

$$X_1' = \left(\frac{AE}{L}\right) u_1' \tag{24.1}$$

La fuerza del elemento local X_1' puede descomponerse en dos componentes globales X_1 y Y_1 como sigue:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1' \cos\phi \\ Y_1 &= X_1' \operatorname{sen}\phi \end{aligned} \tag{24.2}$$

Entonces, a través de una sustitución apropiada, todas las componentes de fuerzas y desplazamientos escritas con respecto al eje local x' se escriben con respecto a los ejes globales x y y:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1' \cos\phi = \left(\frac{AE}{L}\right) \cos\phi\, u_1' = \left(\frac{AE}{L} \cos^2\phi\right) u_1 \\ Y_1 &= X_1' \operatorname{sen}\phi = \left(\frac{AE}{L}\right) \operatorname{sen}\phi\, u_1' = \left(\frac{AE}{L} \operatorname{sen}\phi \cos\phi\right) u_1 \end{aligned} \tag{24.3}$$

Las fuerzas en el nodo 2, que corresponden a la componente de desplazamiento impuesta u_1, pueden establecerse a partir del equilibrio:

$$\begin{aligned} X_2 &= -X_1 = -\left(\frac{AE}{L} \cos^2\phi\right) u_1 \\ Y_2 &= -Y_1 = -\left(\frac{AE}{L} \operatorname{sen}\phi \cos\phi\right) u_1 \end{aligned} \tag{24.4}$$

De manera similar puede darse al nodo 1 un valor arbitrario de desplazamiento v_1, mientras que todas las demás componentes de desplazamiento se mantienen iguales a cero. Esta configuración se muestra en la figura 24.4.

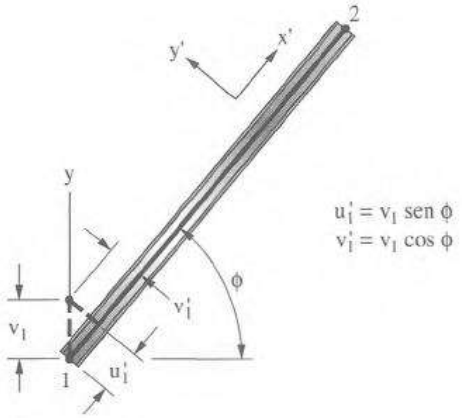
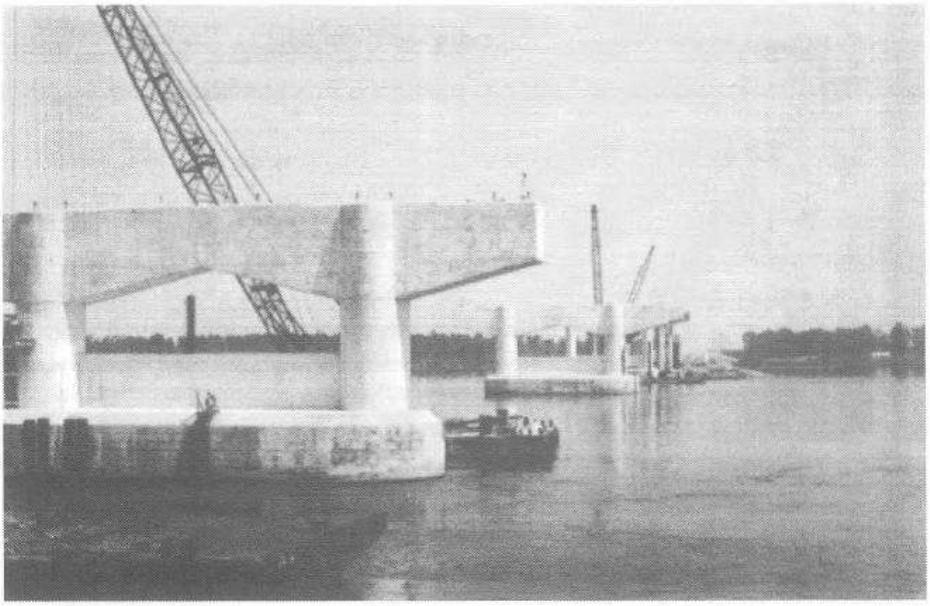


Figura 24.4

La componente de desplazamiento v_1, puede resolverse en las componentes u_1' y v_1', como se muestra en la figura 24.4. La relación fuerza-desplazamiento, escrita con respecto a las coordenadas locales es

$$X_1' = \left(\frac{AE}{L}\right) u_1' \tag{24.5}$$



Autopista del circuito este (I-440), Little Rock, Arkansas. (Cortesía del Departamento Estatal de Transporte y Carreteras de Arkansas.)

Si la fuerza X_1' se descompone en las componentes globales X_1 y Y_1 pueden escribirse las siguientes ecuaciones, que relacionan las componentes de fuerza globales con la componente de desplazamiento global v_1:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= X_1' \cos\phi = \left(\frac{AE}{L}\cos\phi\right) u_1' = \left(\frac{AE}{L}\,\text{sen}\,\phi\cos\phi\right) v_1 \\
Y_1 &= X_1' \,\text{sen}\,\phi = \left(\frac{AE}{L}\,\text{sen}\,\phi\right) u_1' = \left(\frac{AE}{L}\,\text{sen}^2\,\phi\right) v_1 \\
X_2 &= -X_1 = -\left(\frac{AE}{L}\,\text{sen}\,\phi\cos\phi\right) v_1 \\
Y_2 &= -Y_1 = -\left(\frac{AE}{L}\,\text{sen}^2\,\phi\right) v_1
\end{aligned}
\tag{24.6}
$$

Puede usarse un procedimiento similar para establecer la relación fuerza-desplazamiento asociada con las componentes de desplazamiento arbitrarias u_2 y v_2. Una superposición de todas estas relaciones produce la siguiente ecuación:

$$
\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} &= \frac{AE}{L}\begin{Bmatrix} \cos^2\phi \\ \text{sen}\,\phi\cos\phi \\ -\cos^2\phi \\ -\text{sen}\,\phi\cos\phi \end{Bmatrix} u_1 + \frac{AE}{L}\begin{Bmatrix} \text{sen}\,\phi\cos\phi \\ \text{sen}^2\,\phi \\ -\text{sen}\,\phi\cos\phi \\ -\text{sen}^2\,\phi \end{Bmatrix} v_1 \\
&+ \frac{AE}{L}\begin{Bmatrix} -\cos^2\phi \\ -\text{sen}\,\phi\cos\phi \\ \cos^2\phi \\ \text{sen}\,\phi\cos\phi \end{Bmatrix} u_2 + \frac{AE}{L}\begin{Bmatrix} -\text{sen}\,\phi\cos\phi \\ -\text{sen}^2\,\phi \\ \text{sen}\,\phi\cos\phi \\ \text{sen}^2\,\phi \end{Bmatrix} v_2
\end{aligned}
\tag{24.7}
$$

En una forma matricial más compacta, la ecuación 24.7 puede escribirse como:

$$
\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}
\tag{24.8}
$$

donde

$$s = \text{sen}\,\phi$$
$$c = \cos\phi$$

La ecuación 24.8 representa una relación completamente general entre las fuerzas nodales y los desplazamientos nodales para un puntal, cuyas componentes en su totalidad se escriben con respecto a los ejes globales.

Puede usarse una ecuación de rigideces tal como la ecuación 24.8 para resolver las componentes globales de desplazamiento de una estructura. Para un problema dado también puede ser necesario encontrar las componentes de desplazamiento expresadas en términos de los ejes locales. Las relaciones entre las componentes de desplazamiento globales y las locales se muestran en las figuras 24.3 y 24.4, y se resumen en forma matricial como sigue:

$$
\begin{Bmatrix} u_1' \\ v_1' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\,\phi \\ -\text{sen}\,\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}
\tag{24.9}
$$

Puede escribirse una relación similar para el extremo 2 del puntal sustituyendo el subíndice 2 en lugar del subíndice 1 en la ecuación 24.9. La utilidad de las expresiones tales como la ecuación 24.9 se ilustrará en el ejemplo siguiente.

El ejemplo 24.1 ilustra la determinación de los desplazamientos en un punto en una estructura que consiste en dos elementos inclinados unidos. También se calculan las fuerzas en los elementos.

EJEMPLO 24.1

La armadura mostrada en la figura 24.5 está sometida a una fuerza horizontal P aplicada en el nodo 3. Determine las componentes del desplazamiento resultante en el nodo libre (nodo 3), y las fuerzas resultantes en la barra.

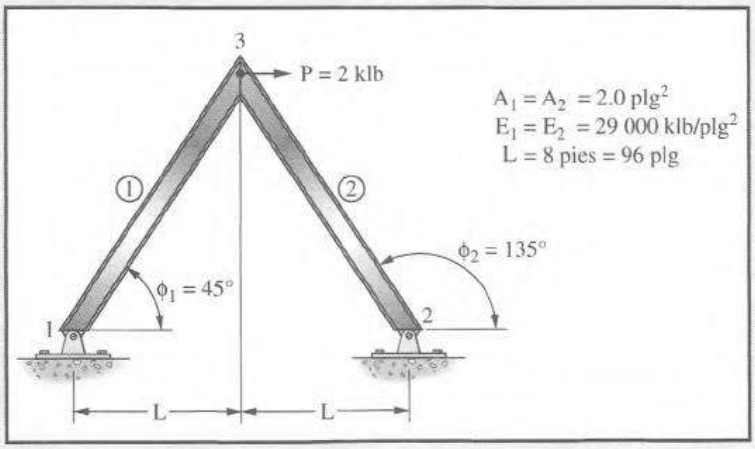


Figura 24.5

Solución.

Las ecuaciones de rigidez para la estructura pueden escribirse imponiendo, a su vez, los desplazamientos de nudo u_3 y v_3. Cuando se impone el desplazamiento u_3, resulta la configuración mostrada en la figura 24.6(a).

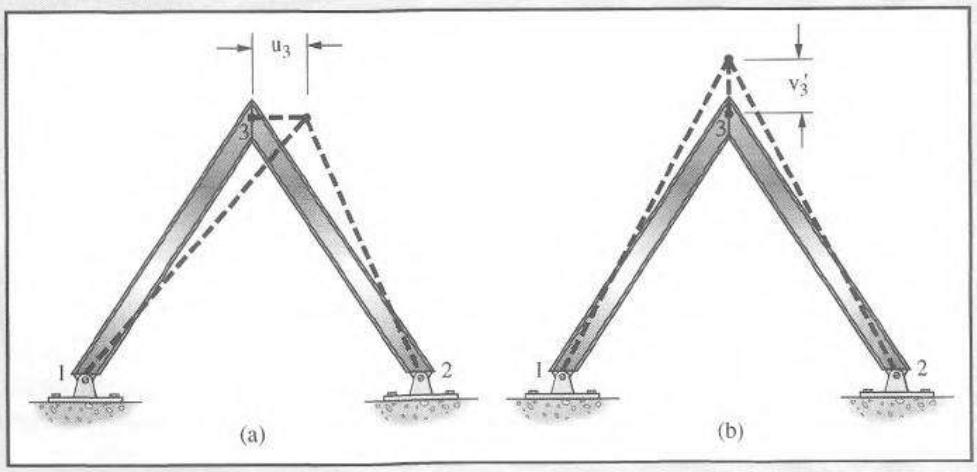


Figura 24.6

Las relaciones fuerza-desplazamiento pueden escribirse con la ayuda de la ecuación 24.7 como

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{AE}{\sqrt{2}l}\begin{Bmatrix} c^2 \\ sc \end{Bmatrix}_{\phi_1=45°} u_3}_{\text{para el miembro ①}} + \underbrace{\frac{AE}{\sqrt{2}l}\begin{Bmatrix} c^2 \\ sc \end{Bmatrix}_{\phi_2=135°} u_3}_{\text{para el miembro ②}} = 427.2\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} u_3$$

Cuando se impone v_3, resulta la configuración de la figura 24.6(b) y las relaciones fuerza-desplazamiento resultantes son

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{AE}{\sqrt{2}l}\begin{Bmatrix} sc \\ s^2 \end{Bmatrix}_{\phi_1=45^\circ} v_3}_{\text{para el miembro ①}} + \underbrace{\frac{AE}{\sqrt{2}l}\begin{Bmatrix} sc \\ s^2 \end{Bmatrix}_{\phi_2=135^\circ} v_3}_{\text{para el miembro ②}} = 427.2\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} v_3$$

Cuando se superponen las dos relaciones de desplazamiento impuestas, tenemos

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = 427.2\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} u_3 + 427.2\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} v_3 = 427.2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(24.10)}$$

La ecuación de rigidez, dada por la ecuación 24.10, puede resolverse para los desplazamientos nodales u_3 y v_3:

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{427.2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} X_3 = P = 2 \\ Y_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0047 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{plg}$$

Las fuerzas en la barra pueden encontrarse usando la ecuación 24.9 para descomponer las componentes de desplazamiento globales en componentes de desplazamiento locales para cada barra individual, y luego, al aplicar la relación básica de rigidez de la ecuación 23.8:

Para el miembro 1 ($\phi_1 = 45^\circ$):

$$\begin{Bmatrix} u_3' \\ v_3' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & \operatorname{sen}\phi_1 \\ -\operatorname{sen}\phi_1 & \cos\phi_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0047/\sqrt{2} \\ -0.0047/\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0033 \\ -0.0033 \end{Bmatrix} \text{plg}$$

y

$$X_{3,1}' = \frac{AE}{\sqrt{2}l}u_3' = \frac{2(29\,000)}{\sqrt{2}(96)}(0.0033) = 1.414 \text{ klb}$$

Para el miembro 2 ($\phi_2 = 135^\circ$):

$$\begin{Bmatrix} u_3' \\ v_3' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_2 & \operatorname{sen}\phi_2 \\ -\operatorname{sen}\phi_2 & \cos\phi_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0047/\sqrt{2} \\ -0.0047/\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0033 \\ -0.0033 \end{Bmatrix} \text{plg}$$

y

$$X_{3,2}' = \frac{AE}{\sqrt{2}l}u_3' = \frac{2(29\,000)}{\sqrt{2}(96)}(-0.0033) = -1.414 \text{ klb} \quad \blacksquare$$

24.3 ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN

Las ecuaciones de rigidez para miembros sometidos a flexión orientados arbitrariamente se pueden desarrollar de la misma manera general como lo fueron para los puntales. Para este estudio se considera el elemento individual sujeto a flexión mostrado en la figura 24.7. Las fuerzas del elemento expresadas en términos de los ejes locales se muestran en la figura 24.7(a), mientras que las fuerzas comparables expresadas en términos de los ejes globales se muestran en la figura 24.7(b). Por comodidad, los efectos de la fuerza axial, así como las fuerzas cortantes y los momentos, se tratan conjuntamente en esta sección.

En la figura 24.7(a) el eje local y (designado como y′) se muestra actuando hacia arriba a la izquierda, aunque esta selección es un poco arbitraria. Para el propósito de este libro, el autor ha escogido el sentido del eje y′, de modo que actúe *hacia arriba* si el eje x′ apunta hacia la *derecha* del observador. Por lo tanto, una vez que el analista escoge el sentido del eje x′, el eje y′ se determina automáticamente. El ángulo ϕ que describe la orientación del elemento con respecto a las coordenadas globales se mide en el sentido positivo de la regla de la mano derecha desde el eje x positivo al eje x′ positivo. Las figuras 24.8(a) y 24.8(b) muestran dos conjuntos específicos de orientaciones de los ejes locales.

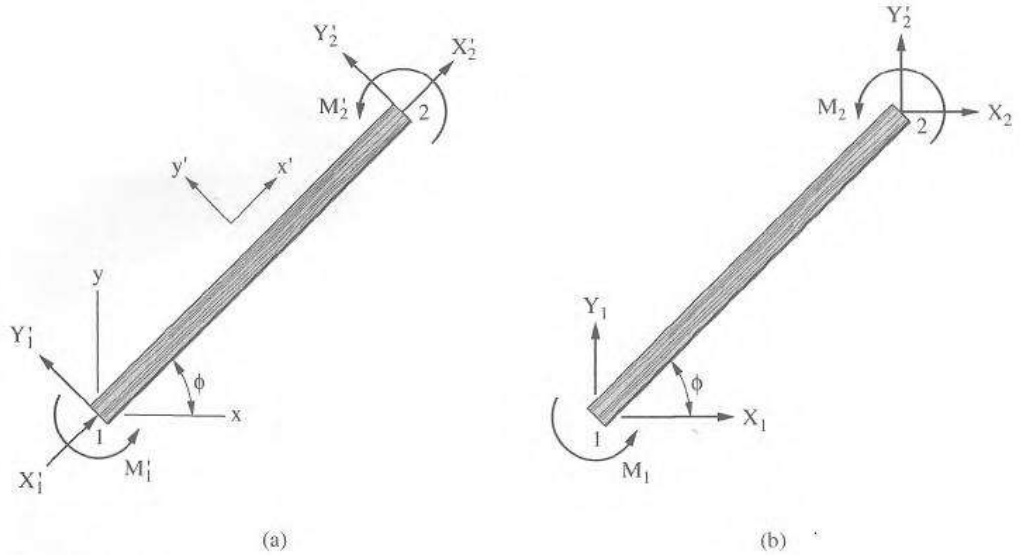


Figura 24.7

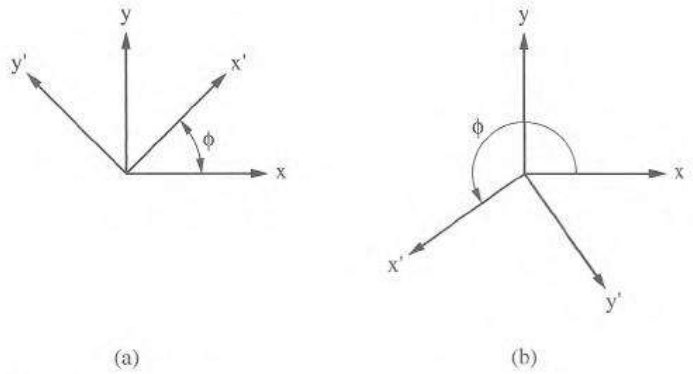


Figura 24.8

Para establecer las relaciones fuerza-desplazamiento para el elemento sometido a flexión en términos de las componentes globales, se da un valor arbitrario a una componente de desplazamiento específico, u_1, mientras que todas las demás componentes de desplazamiento permanecen iguales a cero. La configuración desplazada se muestra en la figura 24.9.

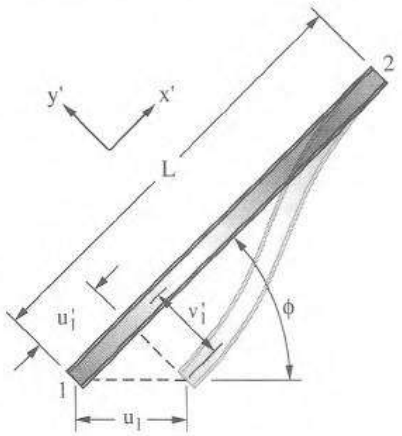


Figura 24.9

Edificio Westvaco, Ciudad de Nueva York. Las más gigantescas armaduras y trabes que alguna vez han intervenido en la cimentación de un edificio a lo largo de Blue Chip Row de Manhattan. (Cortesía de Bethlehem Steel Co.)

La componente de desplazamiento, u_1, se descompone en las componentes de desplazamiento locales:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 \cos \phi \\ v_1' &= -u_1 \operatorname{sen} \phi \\ \theta_1' &= 0 \end{aligned} \tag{24.11}$$

Las componentes de fuerza que actúan en el nodo 1 en respuesta al desplazamiento u_1' y v_1' (que se resumieron anteriormente en la ecuación 23.29) se repiten aquí:

$$\begin{Bmatrix} X_1' \\ Y_1' \\ M_1' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{AE}{L} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u_1' + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{12EI}{L^3} \\ \dfrac{6EI}{L^2} \end{Bmatrix} v_1' + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{6EI}{L^2} \\ \dfrac{4EI}{L} \end{Bmatrix} \theta_1' \tag{24.12}$$

La sustitución de la ecuación 24.11 en la ecuación 24.12 produce lo siguiente:

$$\begin{Bmatrix} X_1' \\ Y_1' \\ M_1' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{AE}{L} \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{-12EI}{L^3} \operatorname{sen} \phi \\ \dfrac{-6EI}{L^2} \operatorname{sen} \phi \end{Bmatrix} u_1 = \begin{Bmatrix} \dfrac{AE}{L} \cos \phi \\ \dfrac{-12EI}{L^3} \operatorname{sen} \phi \\ \dfrac{-6EI}{L^2} \operatorname{sen} \phi \end{Bmatrix} u_1 \tag{24.13}$$

En forma similar, ahora se impone un desplazamiento v_1 al nodo 1 y la configuración desplazada resultante se muestra en la figura 24.10.

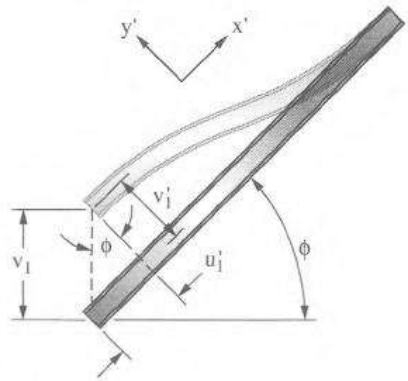


Figura 24.10

El desplazamiento v_1 se descompone en componentes locales:

$$\begin{aligned} u_1' &= v_1 \text{ sen } \phi \\ v_1' &= v_1 \cos \phi \\ \theta_1' &= 0 \end{aligned} \tag{24.14}$$

Las resultantes de la fuerza en el nodo 1 pueden escribirse al sustituir estos valores de desplazamiento en la ecuación 24.12:

$$\begin{Bmatrix} X_1' \\ Y_1' \\ M_1' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{AE}{L} \text{sen } \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{12EI}{L^3} \cos \phi \\ \dfrac{6EI}{L^2} \cos \phi \end{Bmatrix} v_1 = \begin{Bmatrix} \dfrac{AE}{L} \text{ sen } \phi \\ \dfrac{12EI}{L^3} \cos \phi \\ \dfrac{6EI}{L^2} \cos \phi \end{Bmatrix} v_1 \tag{24.15}$$

La rotación θ_1' (en coordenadas locales) es exactamente la misma que θ_1. Por lo tanto las relaciones de rigidez debidas a una rotación de nudo impuesta se escriben de la ecuación 24.12 como

$$\begin{Bmatrix} X_1' \\ Y_1' \\ M_1' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{6EI}{L^2} \\ \dfrac{4EI}{L} \end{Bmatrix} \theta_1' \tag{24.16}$$

Las fuerzas X_1' y Y_1', expresadas en coordenadas locales, se descomponen ahora en las componentes globales X_1 y Y_1:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1' \cos \phi - Y_1' \text{ sen } \phi \\ Y_1 &= X_1' \text{ sen } \phi + Y_1' \cos \phi \\ M_1' &= M_1' \end{aligned} \tag{24.17}$$

La sustitución de los valores de X_1' y Y_1' a partir de las ecuaciones 24.13, 24.15 y 24.16 en la ecuación 24.17 produce lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \cos\phi\left[\frac{AE}{L}\cos\phi\, u_1 + \frac{AE}{L}\,\mathrm{sen}\,\phi\, v_1\right] \\
&\quad - \mathrm{sen}\,\phi\left[\frac{-12EI}{L^3}\,\mathrm{sen}\,\phi\, u_1 + \frac{12EI}{L^3}\cos\theta\, v_1\right] \\
Y_1 &= \mathrm{sen}\,\phi\left[\frac{AE}{L}\cos\phi\, u_1 + \frac{AE}{L}\,\mathrm{sen}\,\phi\, v_1\right] \\
&\quad + \cos\phi\left[\frac{-12EI}{L^3}\,\mathrm{sen}\,\phi\, u_1 + \frac{12EI}{L^3}\cos\phi\, v_1\right] \\
M_1 &= \frac{-6EI}{L^2}\,\mathrm{sen}\,\phi\, u_1 + \frac{6EI}{L^2}\cos\phi\, v_1
\end{aligned}
\tag{24.18}
$$

Las componentes de fuerza X_2, Y_2 y M_2, que resultan de las componentes de desplazamiento impuestos al nodo 1 pueden encontrarse de manera similar, comenzando con las componentes de fuerza locales en el nodo 2 dadas en la ecuación 23.29. El proceso entero puede repetirse usando las componentes de desplazamiento impuestas al nodo 2. Un resumen de los resultados de estas operaciones se muestra en forma matricial como sigue:

$$
\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
c^2\left(\frac{AE}{L}\right) + s^2\left(\frac{12EI}{L^3}\right) & & & & & \\
sc\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) & s^2\left(\frac{AE}{L}\right) + c^2\left(\frac{12EI}{L^3}\right) & & & \text{(Simétrica)} & \\
-s\left(\frac{6EI}{L^2}\right) & c\left(\frac{6EI}{L^2}\right) & \left(\frac{6EI}{L}\right) & & & \\
-c^2\left(\frac{AE}{L}\right) - s^2\left(\frac{12EI}{L^3}\right) & -sc\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) & s\left(\frac{6EI}{L^2}\right) & c^2\left(\frac{AE}{L^2}\right) + s^2\left(\frac{12EI}{L^3}\right) & & \\
-sc\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) & -s^2\left(\frac{AE}{L}\right) - c^2\left(\frac{12EI}{L^3}\right) & -c\left(\frac{6EI}{L^2}\right) & sc\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) & s^2\left(\frac{AE}{L}\right) + c^2\left(\frac{12EI}{L^3}\right) & \\
-s\left(\frac{6EI}{L^2}\right) & c\left(\frac{6EI}{L^2}\right) & \left(\frac{2EI}{L}\right) & s\left(\frac{6EI}{L}\right) & -c\left(\frac{6EI}{L^2}\right) & \left(\frac{4EI}{L}\right)
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}
\tag{24.19}
$$

donde

$$s = \mathrm{sen}\,\phi \quad \text{y} \quad c = \cos\phi.$$

La ecuación 24.19 representa una ecuación de rigideces completamente general para un elemento sometido a fuerza axial y a flexión bidimensional orientado según un ángulo arbitrario ϕ con respecto a los ejes globales.

Los ejemplos 24.2 y 24.3 muestran el análisis de estructuras cuyos elementos experimentan fuerzas axiales, así como fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

EJEMPLO 24.2

Determine los desplazamientos del nodo 2, las reacciones en los nodos 1 y 3 y las fuerzas internas del miembro en los miembros 1 y 2 para la estructura mostrada en la figura 24.11:

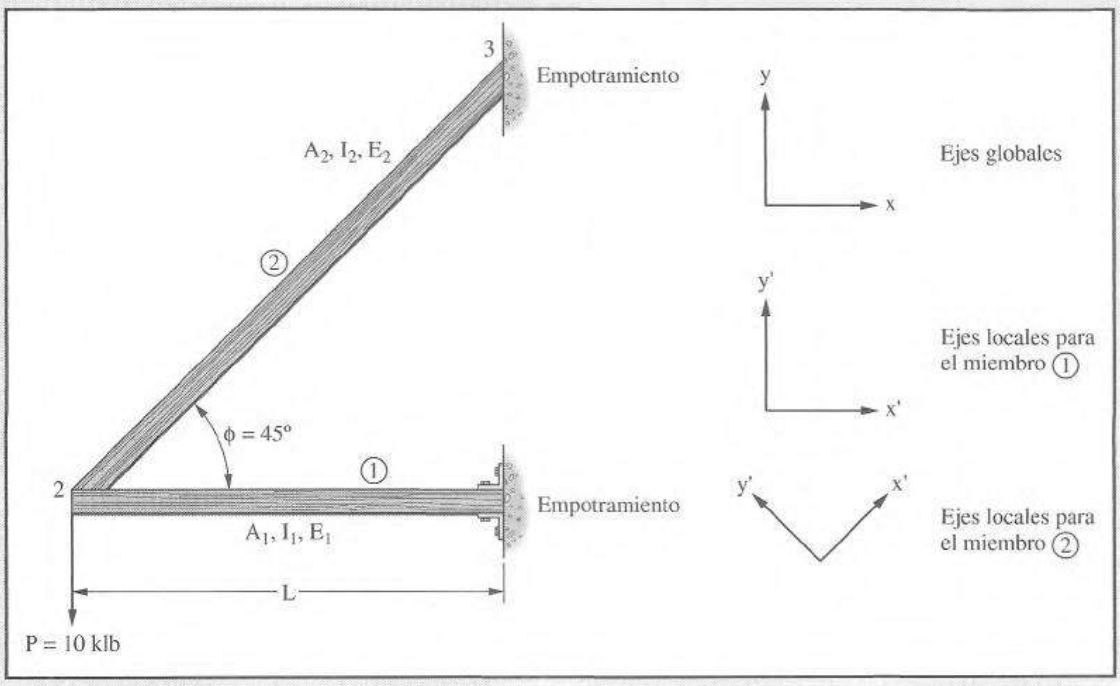


Figura 24.11

Solución.

La ecuación de rigideces para el miembro ①, incluyendo las contribuciones de fuerza axial, está dada por la ecuación 23.30, y se escribe nuevamente aquí:

$$\begin{Bmatrix} X_{2,1} \\ Y_{2,1} \\ M_{2,1} \\ X_{1,2} \\ Y_{1,2} \\ M_{1,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\right)_1 & & & & & \\ 0 & \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_1 & & & \text{(Simétrica)} & \\ 0 & \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_1 & 4\left(\frac{EI}{L}\right)_1 & & & \\ -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 & 0 & \left(\frac{AE}{L}\right)_1 & & \\ 0 & -12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 & 0 & 12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 & \\ 0 & 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 & 2\left(\frac{EI}{L}\right)_1 & 0 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 & 4\left(\frac{EI}{L}\right)_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \tag{24.20}$$

Las ecuaciones de rigideces para el elemento ②, pueden encontrarse directamente en la ecuación 24.19, con una sustitución apropiada de los subíndices 2 y 3 (en vez de 1 y 2) para reflejar los números de nodo en los extremos del elemento ②:

$$\begin{Bmatrix} X_{2,3} \\ Y_{2,3} \\ M_{2,3} \\ X_{3,2} \\ Y_{3,2} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{L}+\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & & & & & \\ \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{L}+\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & & \text{(Simétrica)} & & \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & 4\left(\frac{EI}{L}\right)_2 & & & \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{AE}{L}+\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & -\frac{1}{2}\left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{L}+\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & & \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & -\frac{1}{2}\left(\frac{AE}{L}+\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{L}+\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{EI}{L}\right)_2 & 2\left(\frac{EI}{L}\right)_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & 4\left(\frac{EI}{L}\right)_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{24.21}$$

Después de considerar las condiciones de frontera impuestas:

$$u_1 = v_1 = \theta_1 = u_3 = v_3 = \theta_3 = 0$$

la ecuación de rigideces para la estructura total se escribe en términos de las tres componentes de desplazamiento libres u_2, v_2 y θ_2 sumando los términos apropiados de rigidez de los elementos individuales, es decir,

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{2,1} + X_{2,3} \\ Y_{2,1} + Y_{2,3} \\ M_{2,1} + M_{2,3} \end{Bmatrix} \tag{24.22}$$

El resultado de esta operación produce la siguiente ecuación de rigideces:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\right)_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{L}+\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{6EI}{L^3}\right)_2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{L}+\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & 6\left(\frac{AE}{L^2}\right)_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & \left(6\frac{EI}{L^2}\right)_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & 4\left(\frac{EI}{L}\right)_1 + 4\left(\frac{EI}{L}\right)_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{24.23}$$

Las soluciones para los desplazamientos del nodo 2, para los siguientes valores específicos de las propiedades de los elementos, se muestran en seguida:

$$\left(\frac{AE}{L}\right)_1 = \left(\frac{AE}{L}\right)_2 = \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_1 = \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_2 = 1\,000\frac{\text{klb}}{\text{plg}}$$

$$\phi_2 = 45°$$

$$L = 6 \text{ pies} = 72 \text{ plg}$$

$$P = 10 \text{ klb}$$

Así

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & -36 \\ 0 & 2 & 72 \\ -36 & 72 & 5\,184 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

La solución del conjunto de ecuaciones anterior produce:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.333 \text{ plg} \\ -11.667 \text{ plg} \\ 0.185 \text{ rad} \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

La sustitución de estos desplazamientos nodales en las ecuaciones 24.20 y 24.21 proporciona las reacciones en los nodos 1 y 3:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{1,2} \\ Y_{1,2} \\ M_{1,2} \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -36 \\ 0 & 36 & 864 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.33 \text{ klb} \\ 5.00 \text{ klb} \\ -260 \text{ klb} \cdot \text{plg} \end{Bmatrix}$$

y

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{3,2} \\ Y_{3,2} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 36 \\ 0 & -1 & -36 \\ -36 & 36 & 1\,728 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.33 \text{ klb} \\ 5.00 \text{ klb} \\ -220 \text{ klb} \cdot \text{plg} \end{Bmatrix}$$

Las reacciones mostradas anteriormente son también fuerzas de elementos, expresadas en coordenadas globales. Con objeto de encontrar las componentes de las fuerzas cortantes y axiales, que son necesarias para realizar los cálculos de esfuerzos, las fuerzas expresadas como componentes globales deben descomponerse en componentes locales a través de relaciones similares a la ecuación 24.17:

$$X' = X \cos \phi + Y \operatorname{sen} \phi$$
$$Y' = -X \operatorname{sen} \phi + Y \cos \phi$$
$$M' = M$$

La sustitución en estas ecuaciones produce:

$$\text{Elemento ①} \; (\phi = 0°) \begin{cases} X'_{1,2} = -3.33 \text{ klb} \\ Y'_{1,2} = 5.00 \text{ klb} \\ M'_{1,2} = -260 \text{ klb} \cdot \text{plg} \end{cases}$$

$$\text{Elemento ②} \; (\phi = 45°) \begin{cases} X'_{3,2} = 5.89 \text{ klb} \\ Y'_{3,2} = 1.18 \text{ klb} \\ M'_{3,2} = -220 \text{ klb} \cdot \text{plg} \end{cases}$$

En las figuras 24.12(a) y 24.12)(b) se presentan bocetos que muestran las reacciones nodales y las fuerzas en los elementos para esta estructura:

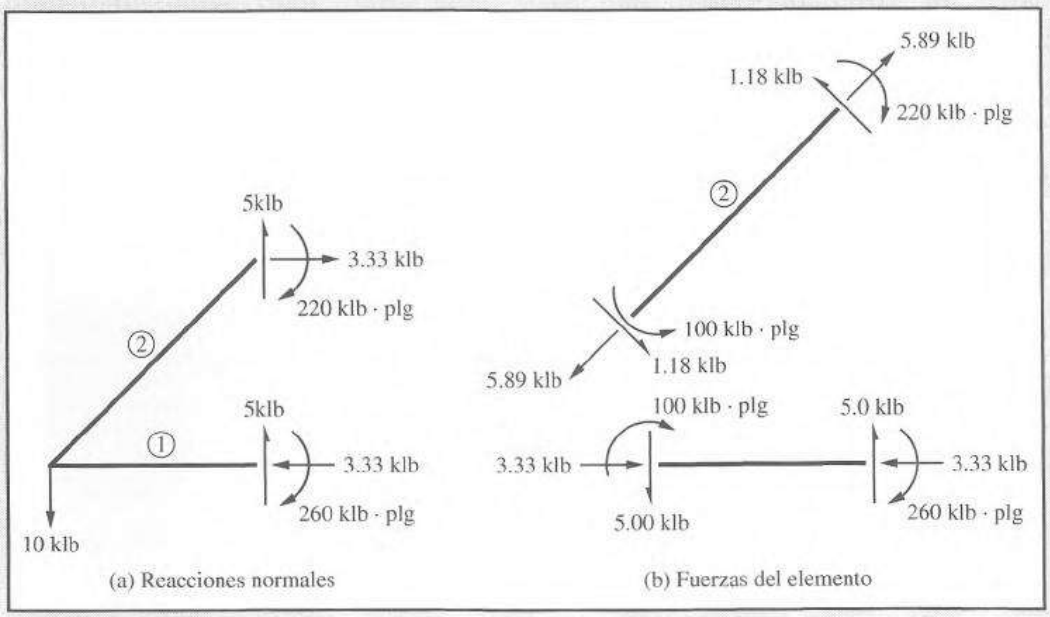


Figura 24.12

EJEMPLO 24.3

El marco de la figura 24.13, consistente en cuatro elementos de igual longitud conectados en un punto, se somete a un momento concentrado en su nodo central. Determine los desplazamientos de este nodo.

Solución.

Se asignan números de nodo y de elemento a la estructura como se muestra en la figura 24.13. La ecuación de rigideces para la estructura puede determinarse considerando las fuerzas requeridas para mover, en forma consecutiva, los extremos de cada elemento individual según las distancias arbitrarias u_5, v_5 y θ_5. Estos coeficientes de fuerza pueden determinarse a partir de la ecuación 24.19 como sigue:

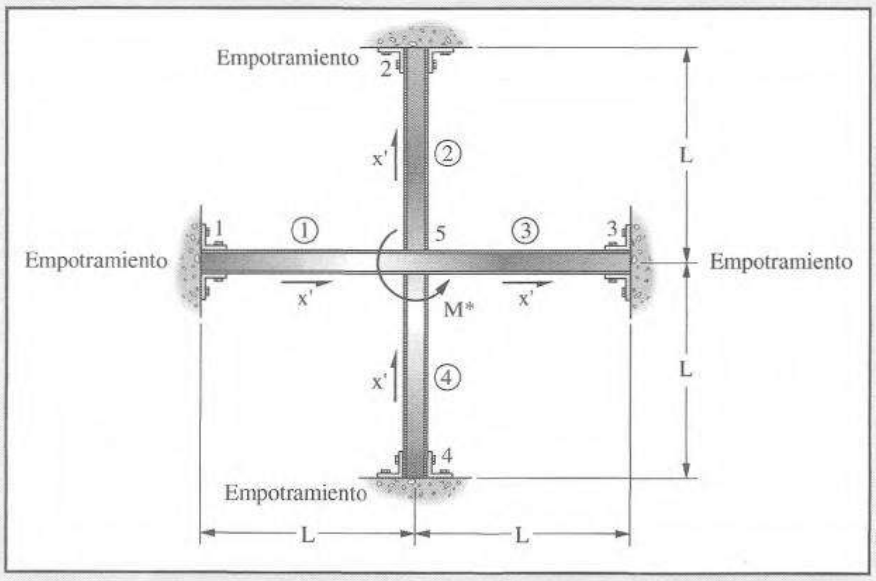


Figura 24.13

$$(\phi_1 = 0)\begin{Bmatrix} X_{5,1} \\ Y_{5,1} \\ M_{5,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_1 & -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_1 \\ 0 & -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_1 & \left(\frac{4EI}{L}\right)_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}$$

$$(\phi_2 = 90°)\begin{Bmatrix} X_{5,2} \\ Y_{5,2} \\ M_{5,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & 0 & -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 \\ 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}$$

$$(\phi_3 = 0)\begin{Bmatrix} X_{5,3} \\ Y_{5,3} \\ M_{5,3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\right)_3 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_3 & \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_3 \\ 0 & \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_3 & \left(\frac{4EI}{L}\right)_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}$$

$$(\phi_4 = 90°)\begin{Bmatrix} X_{5,4} \\ Y_{5,4} \\ M_{5,4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_4 & 0 & \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_4 \\ 0 & \left(\frac{AE}{L}\right)_4 & 0 \\ \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_4 & 0 & \left(\frac{4EI}{L}\right)_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}$$

La resistencia total al movimiento del nodo 5 es simplemente la suma de los coeficientes de fuerza individuales para los cuatro elementos. Entonces

$$\begin{Bmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ M_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\right)_1 + \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_2 + \left(\frac{AE}{L}\right)_3 + \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_4 & 0 & -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 + \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_4 \\ 0 & \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_1 + \left(\frac{AE}{L}\right)_2 + \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_3 + \left(\frac{AE}{L}\right)_4 & -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_1 + \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_3 \\ -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 + \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_4 & -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_1 + \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_3 & -\left(\frac{4EI}{L}\right)_1 + \left(\frac{4EI}{L}\right)_2 + \left(\frac{4EI}{L}\right)_3 + \left(\frac{4EI}{L}\right)_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} \tag{24.24}$$

Para obtener una solución numérica, sea

$$\left(\frac{AE}{L}\right)_1 = \left(\frac{AE}{L}\right)_2 = \psi \qquad \left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 = \left(\frac{EI}{L^3}\right)_2 = 0.05\psi$$
$$\left(\frac{AE}{L}\right)_3 = \left(\frac{AE}{L}\right)_4 = 2\psi \qquad \left(\frac{EI}{L^3}\right)_3 = \left(\frac{EI}{L^3}\right)_4 = 0.10\psi$$

Entonces la ecuación de rigideces se transforma en:

$$\begin{Bmatrix} X_5 = 0 \\ Y_5 = 0 \\ M_5 = M^* \end{Bmatrix} = \psi \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0.3L \\ 0 & 4.8 & 0.3L \\ 0.3L & 0.3L & 24L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} \tag{24.25}$$

La solución para las componentes de desplazamiento en el nodo 5 se obtiene resolviendo simultáneamente las tres ecuaciones mostradas en la ecuación matricial 24.25:

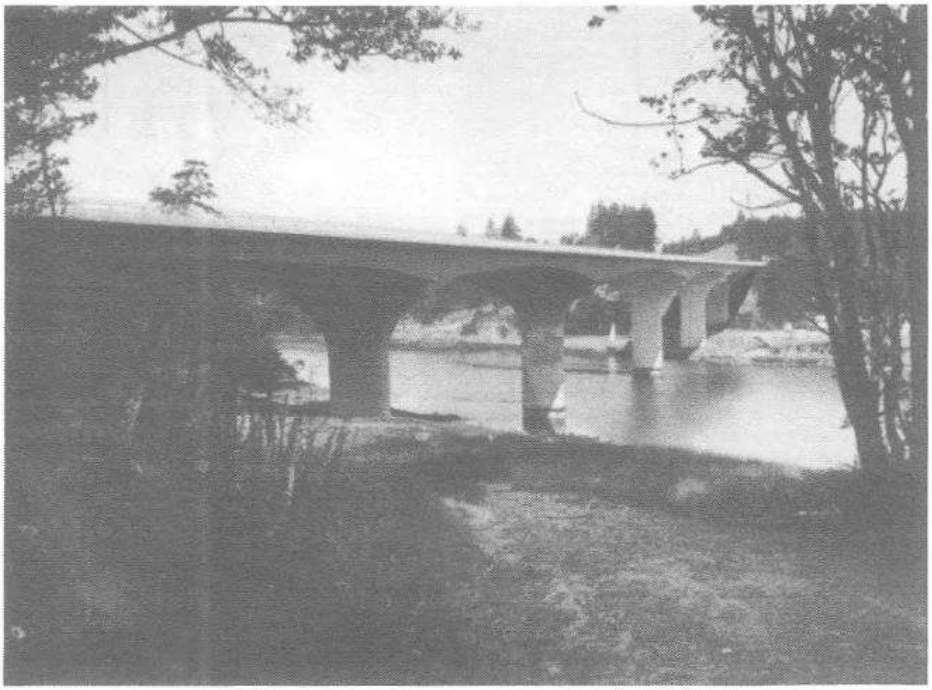
$$\begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\psi} \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0.3L \\ 0 & 4.8 & 0.3L \\ 0.3L & 0.3L & 24L^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^* \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} -0.0026L \\ -0.0026L \\ +0.04173 \end{Bmatrix} \frac{M^*L}{(EI)_1} \tag{24.26}$$

Una solución comparable realizada usando el Método de distribución de momentos produce los resultados ligeramente diferentes:

$$\begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.04167 \end{Bmatrix} \frac{M^*L}{(EI)_1}$$

Las diferencias entre la solución obtenida usando las ecuaciones de rigideces y el Método de distribución de momentos ocurren porque las ecuaciones de rigideces consideran la *deformación axial*, mientras que el Método de distribución de momentos se basa en la hipótesis de cero deformaciones axiales. El despreciar las deformaciones axiales para

estructuras simples tal como la que se considera aquí no introduce errores apreciables. Sin embargo, para estructuras más complicadas, por ejemplo, un edificio reticular de gran altura, la hipótesis de deformación axial cero puede introducir errores significativos. ■



Puente del río Chetco, Brookings, Oregón. (Cortesía del Departamento de Transporte de Oregón.)

24.4 CARGA ENTRE NODOS

Los problemas que han sido estudiados en las secciones anteriores han involucrado fuerzas concentradas y momentos aplicados solamente a los nodos. Como casi todas las estructuras reales están sometidas a cargas distribuidas o concentradas entre nodos, la técnica de solución usando el método de las rigideces debe expandirse para permitir el manejo de estas situaciones. Afortunadamente, los cambios requeridos son relativamente menores.

La viga de la figura 24.14, que tiene una carga uniformemente distribuida sobre el segmento 2, se considera para este estudio.

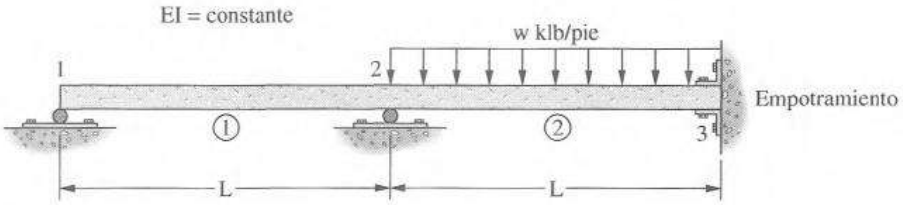


Figura 24.14

Si se restringen todos los grados de libertad de la estructura (es decir, $v_1 = v_2 = v_3 = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0.0$), las reacciones nodales resultantes se denominan "fuerzas de empotramiento". Como se usa aquí, el término "fuerzas" incluye tanto las fuerzas transversales como los momentos. Para el problema mostrado en la figura 24.14, las fuerzas de empotramiento son

$$\{P\}^F = \begin{Bmatrix} Y_1^F \\ M_1^F \\ Y_2^F \\ M_2^F \\ Y_3^F \\ M_3^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{wL}{2} \\ \dfrac{wL^2}{12} \\ \dfrac{wL}{2} \\ -\dfrac{wL^2}{12} \end{Bmatrix} \tag{24.27}$$

Las fuerzas nodales adicionales debidas al desplazamiento nodal están dadas por la ecuación 23.26 (para una viga en la cual se desprecian los desplazamientos axiales):

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{12EI}{L^3} & & & & & \\ \dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L} & & \text{(Simétrica)} & & \\ \dfrac{-12EI}{L^3} & \dfrac{-6EI}{L^2} & \dfrac{24EI}{L^3} & & & \\ \dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{2EI}{L} & 0 & \dfrac{8EI}{L} & & \\ 0 & 0 & \dfrac{-12EI}{L^3} & \dfrac{-6EI}{L^2} & \dfrac{12EI}{L^3} & \\ 0 & 0 & \dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{2EI}{L} & \dfrac{-6EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{24.28}$$

o sea,

$$\{P\}^N = [K]\{\delta\}$$

Por lo tanto la carga nodal resultante cuando las cargas distribuidas actúan sobre le estructura se expresa, en general, como la suma de los lados derechos de las ecuaciones 24.27 y 24.28:

$$\{P\}^{total} = \{P\}^F + [K]\{\delta\} \tag{24.29}$$

Después de eliminar las filas y las columnas asociadas con los desplazamientos de frontera iguales a cero impuestos (v_1, v_2, v_3, θ_3), las ecuaciones de rigideces restantes son

$$\begin{Bmatrix} M_1 = 0 \\ M_2 = 0 \end{Bmatrix}^{total} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{wL^2}{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{L} & \dfrac{2EI}{L} \\ \dfrac{2EI}{L} & \dfrac{8EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{24.30}$$

La solución para los desplazamientos libres se encuentra resolviendo el conjunto de ecuaciones simultáneamente:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{wL^2}{12} \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} \frac{wL^3}{12EI} \tag{24.31}$$

Las fuerzas nodales se encuentran sustituyendo los valores de los desplazamientos libres en la ecuación 24.29:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{wL^2}{2} \\ \frac{wL^2}{2} \\ \frac{-wL^2}{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 39 \\ 48 \\ -9L \end{Bmatrix} \frac{wL}{84}$$

Las fuerzas internas de los elementos debidas a los desplazamientos nodales pueden encontrarse sustituyendo los valores derivados de θ_1 y θ_2 en las matrices de rigideces para los elementos de viga individuales. Estos momentos internos se calculan como sigue:

$$\begin{Bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{-6}{168} wL^2 \end{Bmatrix}$$

y

$$\begin{Bmatrix} M_{2,3} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-8}{168} wL^2 \\ \frac{-4}{168} wL^2 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas internas totales de los elementos son aquellas que resultan de las condiciones de "empotramiento" *además* de aquellas que resultan de los desplazamientos nodales. Para este problema de ejemplo, no se desarrollan momentos internos de empotramiento en el elemento ①, ya que no hay cargas en los elementos. Para el elemento ②, los momentos internos de empotramiento debido a la carga son

$$\begin{Bmatrix} M_{2,3} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{wL^2}{12} \\ \frac{-wL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

Entonces los momentos internos finales son

$$\begin{Bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,1} \end{Bmatrix}^{\text{final}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^{F} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{-6}{168} wL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{-6}{168} wL^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{2,3} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix}^{\text{final}} = \begin{Bmatrix} \frac{wL^2}{12} \\ \frac{-wL^2}{12} \end{Bmatrix}^{F} + \begin{Bmatrix} \frac{-8}{168} wL^2 \\ \frac{-4}{168} wL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{6}{168} wL^2 \\ \frac{-18}{168} wL^2 \end{Bmatrix}$$

El ejemplo 24.4 muestra el análisis de un marco que consiste en un elemento horizontal y un elemento inclinado, los cuales están sometidos a cargas localizadas entre los nodos. El propósito de este ejemplo es mostrar cómo manejar las cargas distribuidas aplicadas a los elementos inclinados y las cargas concentradas que actúan entre nodos, y cómo manejar las fuerzas de empotramiento en elementos contiguos.

EJEMPLO 24.4

El marco de la figura 24.15 soporta una carga uniformemente distribuida sobre el elemento ① y una carga concentrada en el eje central del elemento ②. Prepare las ecuaciones de rigideces requeridas para resolver el problema.

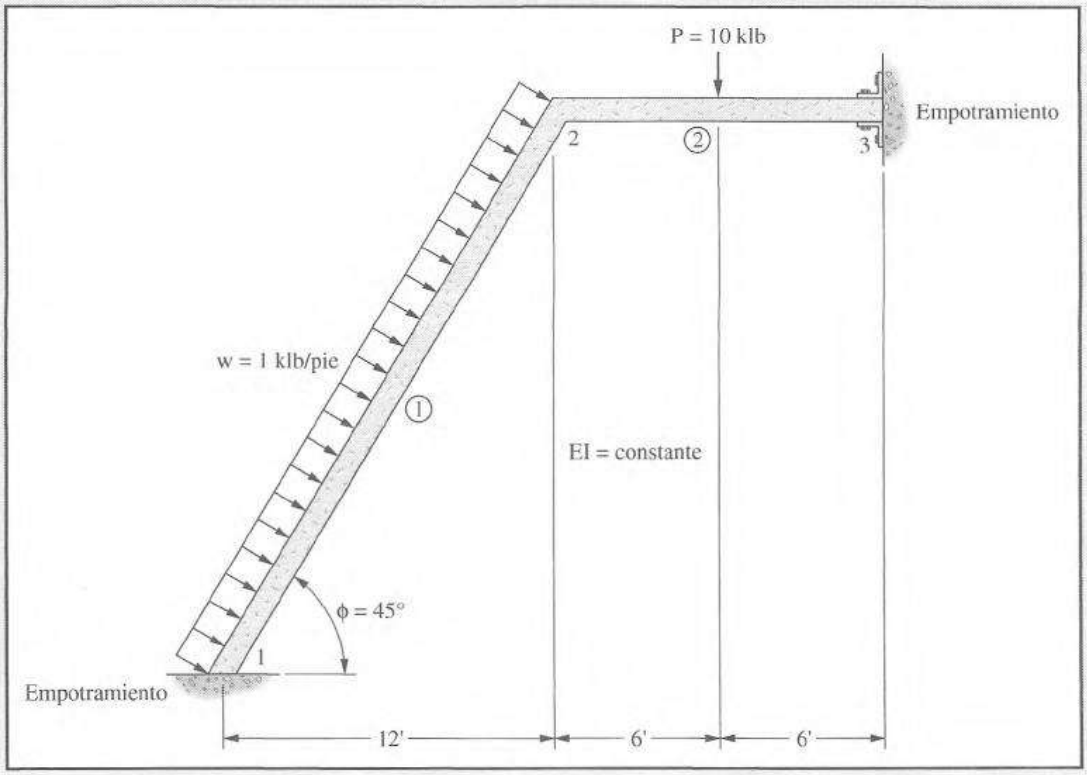


Figura 24.15

Solución.

Las "fuerzas de empotramiento" que actúan sobre el elemento ① se muestran en la figura 24.16(a), con las fuerzas cortantes mostradas actuando paralelas al eje local y del elemento ①. Estas fuerzas se descomponen en fuerzas que actúan en la dirección global, y las "fuerzas de empotramiento" se vuelven a trazar en la figura 24.16(b). En la figura 24.16(c) se muestran las "fuerzas de empotramiento" apropiadas que actúan sobre el elemento ②.

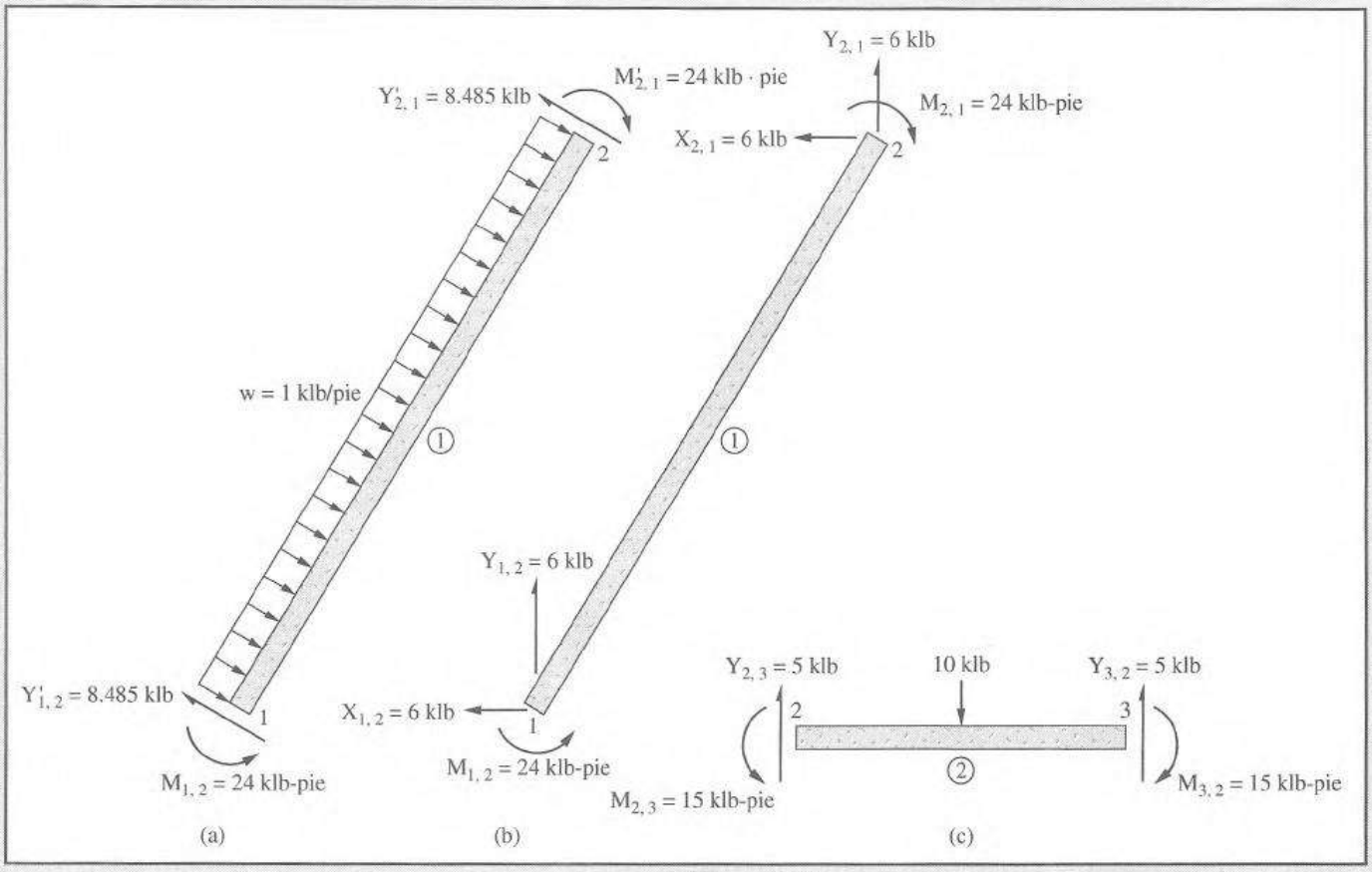


Figura 24.16

La adición de todas las fuerzas de empotramiento produce la carga total de empotramiento para el marco mostrado en la figura 24.17.

Las ecuaciones de rigideces asociadas con los nodos libres de esta estructura pueden entonces escribirse como

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{\text{total}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -6 \\ 11 \\ -9 \end{Bmatrix}^{F}$$

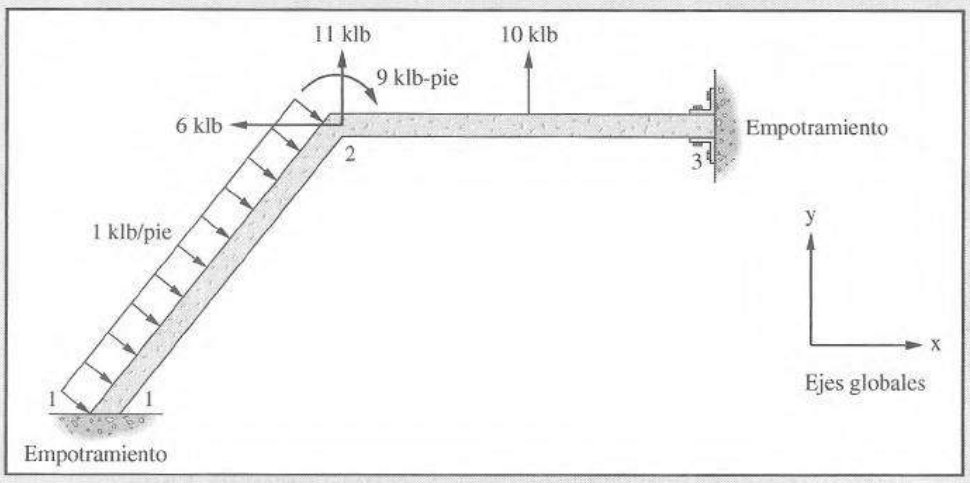


Figura 24.17

Los desplazamientos de nodo libre se determinan usando una técnica de solución de ecuaciones simultáneas adecuada.

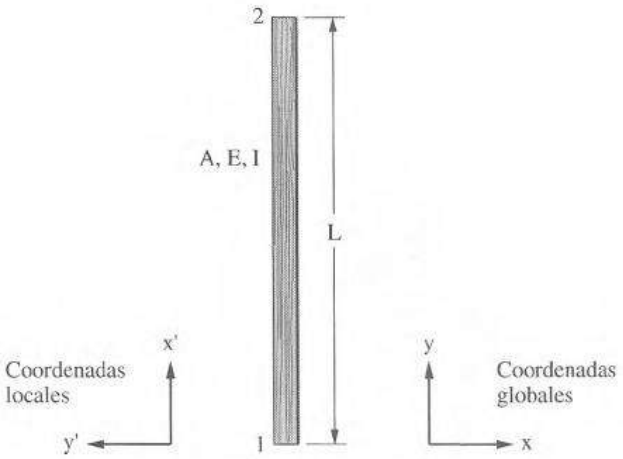
$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 6 \\ -11 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

El modelo de marco mostrado en la figura 24.15 consiste en dos elementos y 3 nodos. Como se ha mostrado en el ejemplo, la fuerza concentrada que actúa entre los nodos del elemento ② se trata de una manera similar a la usada para la carga distribuida. En forma alterna, el analista puede elegir añadir otro nodo al modelo en la posición de la fuerza concentrada. Esta elección elimina la necesidad de un tratamiento especial de la carga concentrada, pero ciertamente añade tres componentes de desplazamiento adicionales al conjunto de incógnitas en los problemas.

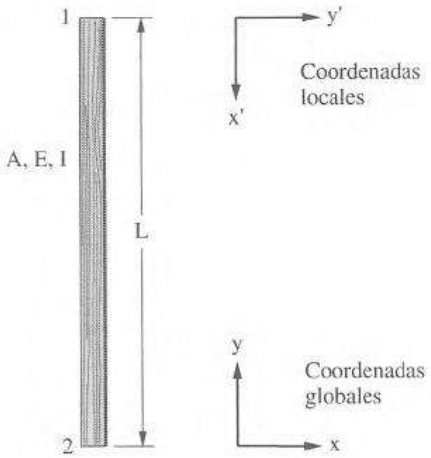
Aunque los problemas de ejemplo abordaron casos muy especiales de carga entre nodos, el método mostrado en estos ejemplos puede usarse para cualquier forma de carga distribuida o concentrada que actúe entre los nodos. Para aplicar el método de las rigideces a estos problemas el analista afronta solamente la tarea adicional de determinar las fuerzas de empotramiento. Se proporciona en resumen condensado de las fuerzas de empotramiento para cargas de ocurrencia común en la figura 20.4 y en el primer forro. ■

24.5 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

24.1 Determine la matriz global de rigideces [K] para el elemento vertical mostrado. Suponga que los ejes locales se definen como se muestra en el esquema. (*Sugerencia:* Use la ecuación 24.19, con $\theta = 90°$.)



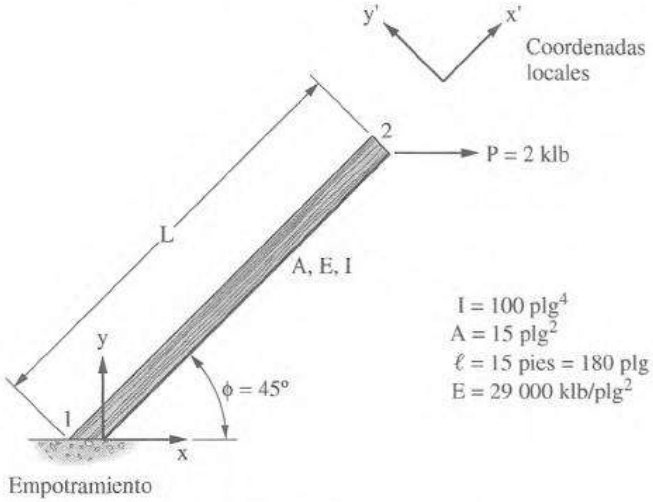
24.2 Repita el problema 24.1, pero use un conjunto de ejes locales de nueva definición. Observe las diferencias en las matrices de rigideces determinadas en los problemas 24.2 y 24.1.



24.3 Una viga en voladizo está orientada a 45° con la horizontal. Una carga horizontal P actúa en el extremo del puntal. Ejecute lo siguiente:

(a) Determine la matriz de rigideces para el puntal;
(b) Determine los desplazamientos del nodo 2 (expresados con respecto al sistema global de coordenadas);
(c) Resuelva los desplazamientos globales del nodo 2 en un conjunto de desplazamientos locales (u'_2, v'_2, θ'_2)

(d) Use las respuestas de la parte (c) para obtener las fuerzas del elemento para el puntal (expresadas con respecto a los ejes locales).



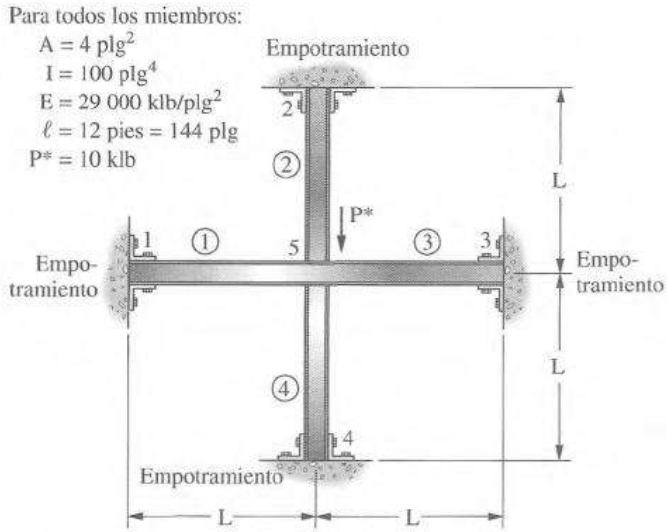
Resp.: (b) $u_2 = 0.6708$ (c) $X_2' = 1.41$ plg
$v_2 = -0.6700$ $Y_2' = -1.41$ plg
$\theta_2 = -0.0079$ $M_2' = 0$

24.4 Una estructura cruciforme está hecha de cuatro elementos unidos en el nodo 5, como se muestra. Una fuerza nodal, P*, actúa en el nodo 5. Ejecute lo siguiente:

(a) Determine la matriz global de rigideces para el cruciforme;

(b) Apique condiciones de frontera y determine los desplazamientos nodales en el nodo 5 debidos a P*;

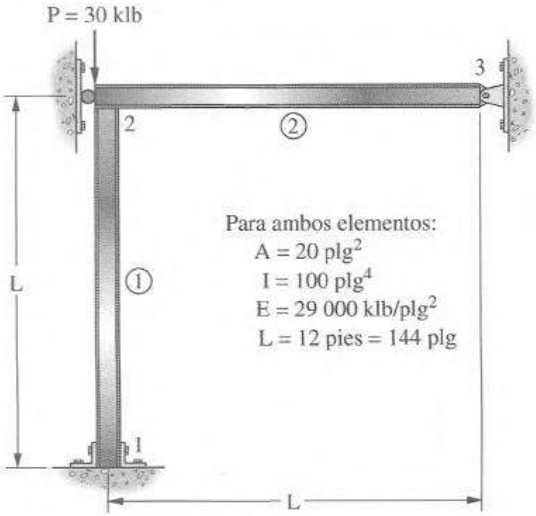
(c) Considere que el área transversal A de todos los elementos tiende a cero (es decir, A = 0). Vuelva a calcular los desplazamientos del nodo 5.



24.5 Un marco de dos elementos está rígidamente sustentado en el nodo 1 y está sujeto con un pasador en el nodo 3. Adicionalmente, se proporciona un soporte de rodillo en el nodo 2.

(a) Determine los desplazamientos en los nodos 2 y 3.

(b) Considere que el área transversal de todos los elementos tiende a cero (es decir, A = 0). Vuelva a calcular los desplazamientos nodales. ¿Puede explicar la naturaleza de la solución para la parte (b)?



Resp.: (a) $\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00745 \text{ plg} \\ 0.00002 \text{ rads.} \\ 0.00007 \text{ rads.} \end{Bmatrix}$

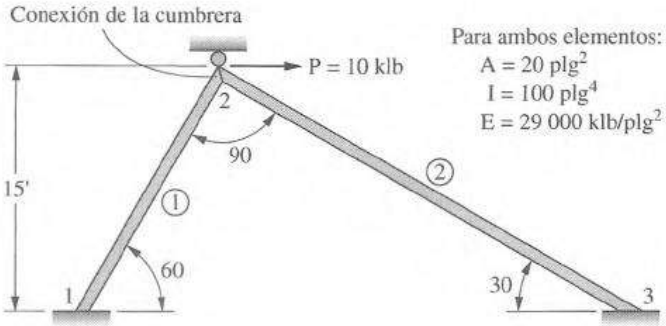
(b) $\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18.01 \text{ plg} \\ 0.536 \text{ rads.} \\ 0.161 \text{ rads.} \end{Bmatrix}$

24.6 Un marco que consiste en dos elementos unidos en el nodo 2 está rígidamente apoyado en los nodos 1 y 3. El marco también está guiado por un soporte de rodillo en el nodo 2. Una fuerza concentrada P actúa horizontalmente en el nodo 2. Ejecute lo siguiente:

(a) Determine la matriz global de rigideces para el marco;

(b) Aplique condiciones de frontera y determine los desplazamientos nodales resultantes en el nodo 2;

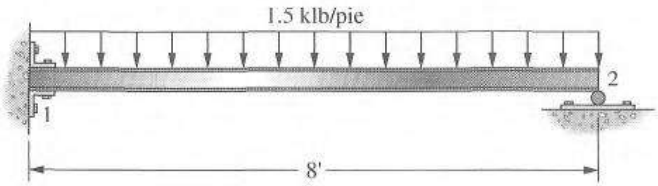
(c) Determine las reacciones en los nodos 1, 2 y 3.



24.7 Use el método descrito en la sección 24.4 para determinar lo siguiente para la viga mostrada, cargada con una carga uniformemente distribuida, w:

(a) Rotación en el nodo 2;
(b) Reacciones en los nodos 1 y 2.

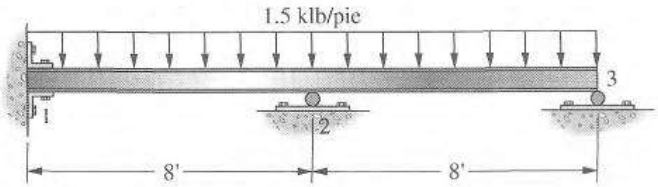
$EI = 1.8 \times 10^6$ klb · plg^2



Resp.: (a) $\theta_2 = 0.00128$ rads (b) Y_1 Total = 7.5 klb
$Y_1 = 1.5$ plg M_1 Total = 144 klb · plg
$M_1 = 48.0$ klb · plg Y_2 Total = 4.5 klb
Y_2 (neta) = −1.5 plg M_2 Total = 0

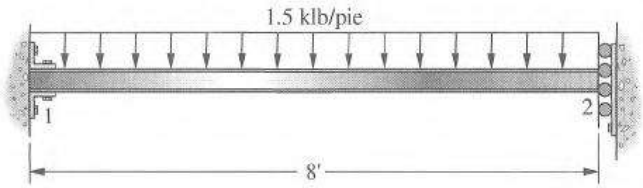
24.8 Una viga continua tiene una carga uniformemente distribuida para toda su longitud. Determine lo siguiente:
(a) Rotaciones en los nodos 2 y 3;
(b) Reacciones en los nodos 1, 2 y 3.

$EI = 1.8 \times 10^6$ klb · plg^2



24.9 Una viga de un solo claro tiene una carga uniformemente distribuida para toda su longitud. El extremo derecho de la viga tiene libertad de trasladarse verticalmente, pero no puede girar. Determine lo siguiente:
(a) El desplazamiento transversal del nodo 2;
(b) Las reacciones en los nodos 1 y 2.

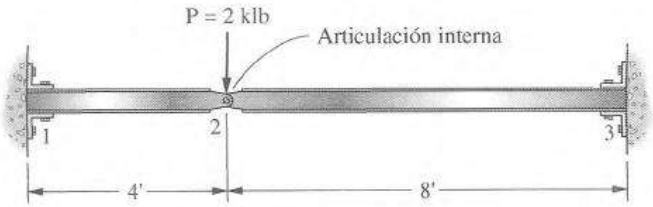
$EI = 1.8 \times 10^6$ klb · plg^2



Resp.: (a) $Y_1 = 6.00$ plg (b) Y_1 Total = 12.0 plg
$M_1 = 288.0$ klb · plg M_1 Total = 384.0 klb · plg
$M_2 = 288.0$ klb · plg M_2 Total = 192.0 klb · plg

24.10 Una viga está empotrada en ambos extremos, pero tiene una articulación interior, como se muestra. Una fuerza vertical P actúa en la articulación. Determine lo siguiente:*
(a) El desplazamiento transversal en el nodo 2;
(b) Las rotaciones en ambos lados del nodo 2, es decir, $\theta_{2,1}$ y $\theta_{2,3}$
(c) Las reacciones en los nodos 1 y 3.

$EI = 1.8 \times 10^6$ klb · plg^2



*Al formar la matriz de rigideces para la estructura, trate las rotaciones $\theta_{2,1}$ y $\theta_{2,3}$ como variables independientes (es decir, $\theta_{2,1} \neq \theta_{2,3}$). Después de imponer las condiciones de frontera, las ecuaciones de rigideces contendrán tres variables de desplazamiento independientes: v_2, $\theta_{2,1}$ y $\theta_{2,3}$.

Capítulo 25

Temas adicionales de métodos matriciales

25.1 GENERALIDADES

La introducción al método de las rigideces presentada en los capítulos 23 y 24 se escribió con la intención de proporcionar una visión de los principios físicos involucrados en el método. Aunque la implementación del método de las rigideces es bastante directa, los detalles que intervienen en su aplicación a todas las estructuras, con excepción de las más sencillas, son desalentadamente tediosos para quienquiera que intente una solución manual. Sin embargo, la utilidad del método surge de su adaptabilidad de uso con las computadoras digitales. En este capítulo se replantean algunos aspectos del método de las rigideces en una forma que haga más evidentes los pasos de programación en computadora. Además, el método se aplica a varias estructuras que no se han estudiado anteriormente. Se pone énfasis en la manipulación de las ecuaciones algebraicas a través de los métodos matriciales, una forma idealmente adecuada para los lenguajes de computadora existentes.

25.2 ADICIÓN DE LAS ECUACIONES DE RIGIDECES

La derivación de las ecuaciones de rigideces incluye una nueva formulación para cada estructura diferente. Sin embargo, como el lector seguramente ya se percató, la matriz de rigideces para una estructura completa puede encontrarse sumando, de manera apropiada, las matrices de rigideces de los elementos individuales de la estructura. Para ilustrar este hecho, se considera el elemento de fuerza axial mostrado en la figura 25.1.

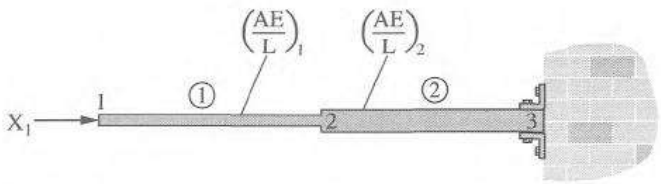
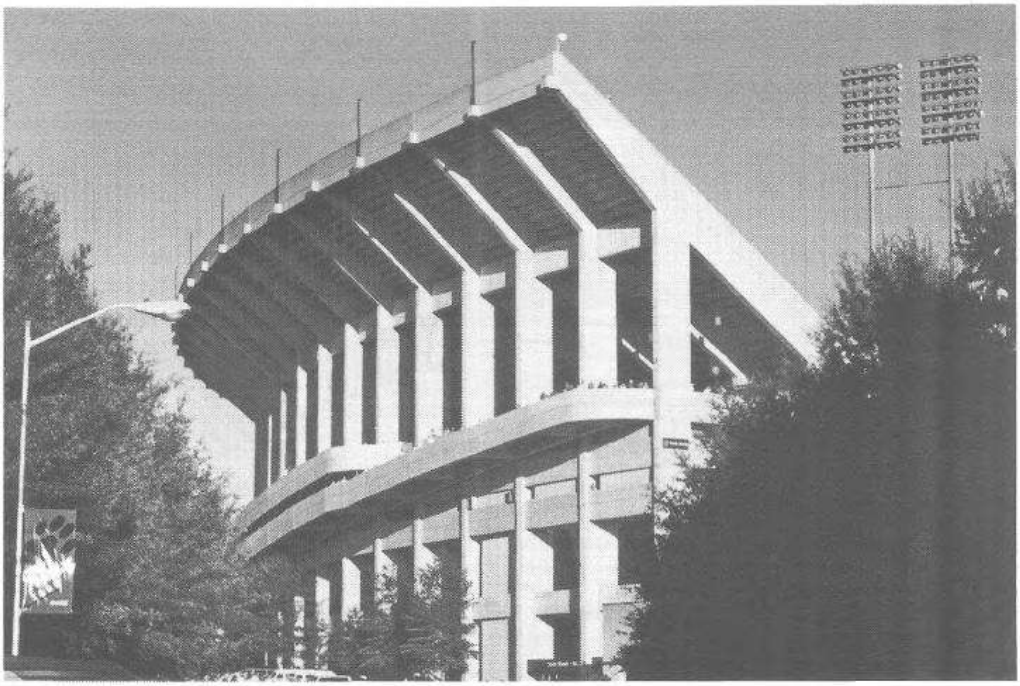


Figura 25.1



Estadio de futbol de la Universidad Clemson, Clemson, Carolina del Sur. (Cortesía de Britt, Peters y Asociados.)

El miembro se divide en dos elementos y se escribe una ecuación de rigidez para cada elemento (ecuación 23.8). Los subíndices i y j se usan para denotar los números de nodos y m se usa para los números de los miembros.

$$\begin{Bmatrix} F_{i,j} \\ F_{j,i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\right)_m & -\left(\frac{AE}{L}\right)_m \\ -\left(\frac{AE}{L}\right)_m & \left(\frac{AE}{L}\right)_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{25.1}$$

Como la estructura total incluye tres nodos, hay tres desplazamientos nodales posibles (también llamados grados de libertad en este libro), y resultará una matriz de rigideces total de tres por tres. La matriz de rigideces para cada elemento individual se expande, o se *aumenta*, para incluir todos los grados de libertad de la estructura. Las ecuaciones de rigideces reescritas para los miembros aparecen ahora como

$$\begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\right)_1 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 \\ -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 & \left(\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{25.2}$$

y

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_{2,3} \\ F_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{AE}{L}\right)_2 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 \\ 0 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 & \left(\frac{AE}{L}\right)_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{25.3}$$

Las dos ecuaciones matriciales (25.2 y 25.3) se suman directamente para producir

$$\begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{2,3} \\ F_{3,2} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\right)_1 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 \\ -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 & \left(\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{AE}{L}\right)_2 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 \\ 0 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 & \left(\frac{AE}{L}\right)_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

o

$$\begin{Bmatrix} F_{1,2} = X_1 \\ F_{2,1} + F_{2,3} = X_2 \\ F_{3,2} = X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\right)_1 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 \\ -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 & \left(\frac{AE}{L}\right)_1 + \left(\frac{AE}{L}\right)_2 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 \\ 0 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_2 & \left(\frac{AE}{L}\right)_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{25.4}$$

Las fuerzas internas del elemento $F_{2,1}$ y $F_{2,3}$ se relacionan con la fuerza externa que actúa en el nodo 2 a través del equilibrio estático, como se muestra en la figura 25.2.

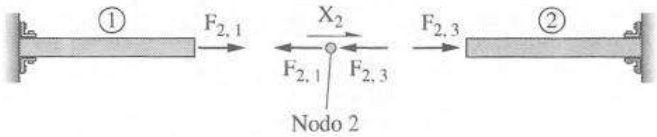


Figura 25.2

A partir de esta figura se escribe la siguiente relación para el nodo 2:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -F_{2,1} - F_{2,3} + X_2 = 0 \\ \therefore X_2 &= F_{2,1} + F_{2,3} \end{aligned} \tag{25.5}$$

Por lo tanto, la adición de las ecuaciones de rigideces de los miembros individuales produce la ecuación de rigideces para la estructura completa. En general, lo único que se necesita es que el programa de computadora contenga las instrucciones para formar una matriz general de rigideces del miembro y las instrucciones para sumar apropiadamente las matrices de rigideces para los miembros individuales para formar la matriz de rigideces para la estructura completa.

25.3 MATRICES DE RIGIDECES PARA ELEMENTOS INCLINADOS

En el capítulo 24 la matriz de rigideces para un miembro general sometido a flexión en el plano se obtuvo en términos de las propiedades del miembro y de su ángulo de inclinación con un sistema de referencia global. Un procedimiento sistemático para manipular las ecuaciones escritas con respecto a los sistemas de referencia girados es útil al escribir programas de computadora para realizar estas tareas. Aquí se presenta una introducción a estos métodos.

Ahora se considera el elemento inclinado sometido a flexión de la figura 25.3.

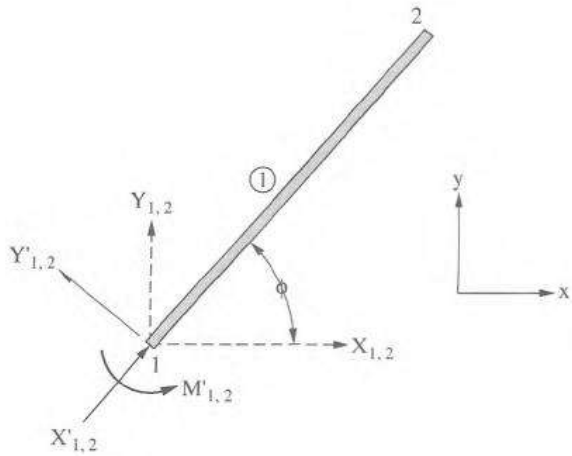


Figura 25.3

Las fuerzas nodales expresadas en el sistema local de coordenadas se muestran con primas, mientras que sus componentes equivalentes expresadas con respecto al sistema global de coordenadas se muestran sin primas. La relación entre las componentes de fuerza en el sistema local de coordenadas y las componentes equivalentes en el sistema global de coordenadas se ha mostrado anteriormente como la ecuación 24.17 y se repite aquí con una notación ligeramente alterada:

$$X_{1,2} = X'_{1,2}\cos\phi - Y'_{1,2}\,\text{sen}\,\phi$$
$$Y_{1,2} = X'_{1,2}\,\text{sen}\,\phi + Y'_{1,2}\cos\phi$$
$$M_{1,2} = M'_{1,2}$$

Escrita en forma matricial, la relación es

$$\begin{Bmatrix} X_{1,2} \\ Y_{1,2} \\ M_{1,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\,\phi & 0 \\ \text{sen}\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X'_{1,2} \\ Y'_{1,2} \\ M'_{1,2} \end{Bmatrix} \tag{25.6}$$

Simbólicamente, la ecuación 25.6 puede escribirse como

$$\{P_i\} = [\gamma]\{P'_i\} \tag{25.7}$$

donde $[\gamma]$ se denomina matriz de transformación.

La ecuación 25.6 también puede usarse para expresar las fuerzas nodales locales en términos de las componentes globales de fuerza:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X'_{1,2} \\ Y'_{1,2} \\ M'_{1,2} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\,\phi & 0 \\ \text{sen}\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} X_{1,2} \\ Y_{1,2} \\ M_{1,2} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\,\phi & 0 \\ -\text{sen}\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{1,2} \\ Y_{1,2} \\ M_{1,2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{25.8}$$

La matriz de transformación $[\gamma]$ tiene la propiedad (que no es verdadera para las matrices en general) de que $[\gamma]^{-1} = [\gamma]^T$. Esta propiedad puede verificarse fácilmente multiplicando $[\gamma]$ por su transpuesta para obtener una matriz identidad. Por lo tanto

$$\{P'\} = [\gamma]^{-1}\{P\} = [\gamma]^T\{P\} \tag{25.9}$$

Puede realizarse una transformación similar de fuerzas nodales en el extremo 2 del elemento. Las dos transformaciones pueden combinarse en una sola ecuación matricial:

$$\begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\gamma] & [0] \\ [0] & [\gamma] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P'_1\} \\ \{P'_2\} \end{Bmatrix}$$

o

$$\{P\} = [\Gamma]\{P'\}$$

donde

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} [\gamma] & [0] \\ [0] & [\gamma] \end{bmatrix} \tag{25.10}$$

y

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix}$$

Una transformación similar a la descrita en la ecuación 25.10 puede realizarse para cualquier otro vector que actúe en el nodo. En particular, los desplazamientos nodales pueden transformarse de coordenadas locales a globales

$$\{\delta_i\} = [\gamma]\{\delta'_i\} \tag{25.11}$$

y

$$\begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \end{Bmatrix} = \{\delta\}_{\text{combinado}} = [\Gamma]\{\delta'\}_{\text{combinado}} \tag{25.12}$$

Una ecuación de rigideces tal como la que se da en la ecuación 25.30, referida a ejes locales, puede ahora transformarse a ejes de coordenadas globales con la ayuda de las ecuaciones 25.10 y 25.12:

$$\{P'\} = [K']\{\delta'\}$$

donde $[K']$ se denomina matriz local de rigideces.

La sustitución de las ecuaciones 25.10 y 25.12 produce:

$$[\Gamma]^{-1}\{P\} = [K'][\Gamma]^{-1}\{\delta\} \tag{25.13}$$

Si ambos lados de la ecuación 25.13 se premultiplican por $[\Gamma]$, el resultado es

$$\{P\} = ([\Gamma][K'][\Gamma]^{-1})\{\delta\} \tag{25.14}$$

o

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \tag{25.15}$$

donde

$$[K] = [\Gamma][K'][\Gamma]^{-1}, \text{ matriz global de rigideces} \tag{25.16}$$

El producto triple matricial mostrado en la ecuación 25.16 producirá exactamente el mismo resultado para $[K]$ que el mostrado anteriormente en la ecuación 24.9.

Las ecuaciones de transformación tales como las dadas en las ecuaciones 25.10 y 25.12 son muy útiles para manejar elementos inclinados, ya que permiten al analista programar ecuaciones para usarse en una computadora en ambos sistemas coordenados local y global con relativa facilidad. La solución típica de una estructura que tiene elementos inclinados requiere varias etapas de transformación de un sistema coordenado a otro.

25.4 ECUACIONES DE RIGIDECES PARA ESTRUCTURAS CON DESPLAZAMIENTOS IMPUESTOS

Aunque, en general, las estructuras se deflexionan como respuesta a las cargas aplicadas, hay ocasiones en que una estructura es obligada a desplazarse una cantidad especificada. Un ejemplo es una viga continua cuyos apoyos no están alineados apropiadamente. La desalineación puede corregirse asegurando la estructura en su posición con un gato. Tal vez el analista quiera saber qué fuerzas se requieren para forzar a la viga a través del desplazamiento necesario para hacer que se ajuste.

Se supone que el nodo 1 de la viga continua de la figura 25.4(a) está desalineada una cantidad v_1^*.

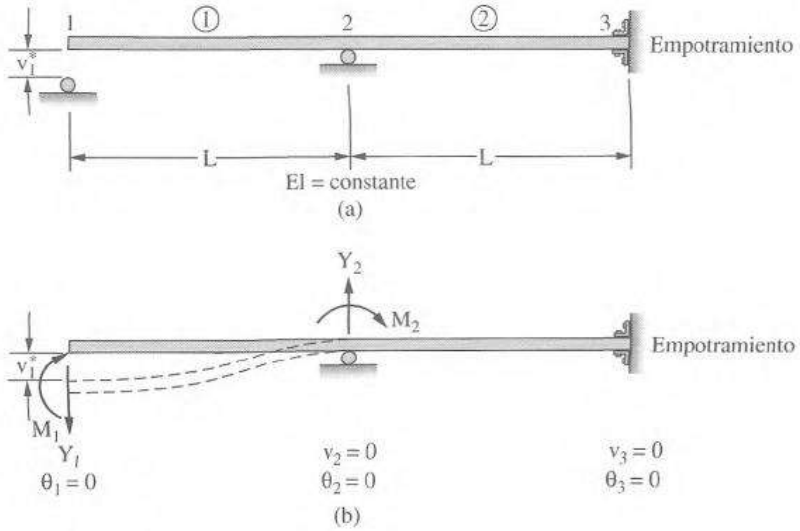


Figura 25.4

Las fuerzas necesarias para desplazar a la viga esta distancia mientras que se evitan cualesquier otros desplazamientos nodales pueden determinarse de la figura 23.10. La forma deformada de la viga se esboza en la figura 25.4(b). Puede escribirse una ecuación de rigideces que incluya a estas "fuerzas de empotramiento", así como las fuerzas desarrolladas por los desplazamientos nodales:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{-12EI}{L^3} \\ \dfrac{-6EI}{L^2} \\ \dfrac{12EI}{L^3} \\ \dfrac{-6EI}{L^2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} v_1^* + [K] \begin{Bmatrix} \Delta v_1 = 0 \\ \theta_1 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{Bmatrix} \tag{25.17}$$

Para el problema expuesto en la figura 25.4(a), la ecuación de rigideces, después de considerar las condiciones de frontera, es

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{\text{total}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{-6EI}{L^2} \\ \dfrac{-6EI}{L^2} \end{Bmatrix} v_1^* + \begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{L} & \dfrac{2EI}{L} \\ \dfrac{2EI}{L} & \dfrac{8EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{25.18}$$

Si no se aplican momentos nodales externos, la solución para las rotaciones nodales resultantes, debidas al desplazamiento nodal impuesto v_1^*, se encuentra resolviendo el conjunto de ecuaciones resultantes (ecuación 25.18) simultáneamente:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{L} & \dfrac{2EI}{L} \\ \dfrac{2EI}{L} & \dfrac{8EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{6EI}{L^2} \\ \dfrac{6EI}{L^2} \end{Bmatrix} v_1^*$$

y

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{9}{7} \\ \dfrac{3}{7} \end{Bmatrix} \frac{v_1^*}{L} \tag{25.19}$$

Como de costumbre, las fuerzas internas del elemento se encuentran sustituyendo las componentes obtenidas del desplazamiento nodal en las ecuaciones de rigideces para los elementos individuales, y sumando las fuerzas de empotramiento al resultado.

25.5 ECUACIONES DE RIGIDECES PARA ESTRUCTURAS CON ELEMENTOS QUE EXPERIMENTAN CAMBIOS DE TEMPERATURA

Frecuentemente, uno o más miembros de una estructura están sujetos a cambios de temperatura con cambios resultantes en la longitud. Para una estructura estáticamente indeterminada estos cambios de longitud generalmente conducirán al desarrollo de fuerzas internas. Tal vez sea necesario que el analista conozca las fuerzas y los desplazamientos causados por los cambios de temperatura.

Se supone que el elemento ② del puntal continuo de la figura 25.5(a) experimenta un incremento en la temperatura igual a ΔT.

Si todos los nodos de la estructura se mantienen inmóviles, se desarrollan fuerzas en ambos extremos del elemento. Éstas se muestran en la figura 25.5(b) como X_2^F y X_3^F, y sus valores se calculan con la siguiente expresión, en la cual α es el coeficiente térmico de dilatación.

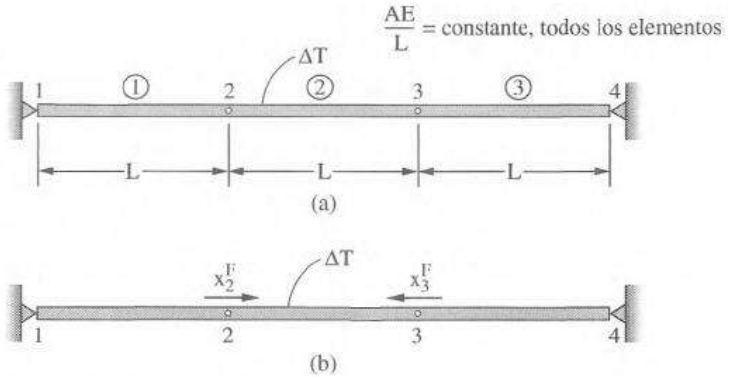


Figura 25.5

$$X_2^F = \alpha(\Delta T)EA$$

$$X_3^F = -\alpha(\Delta T)EA$$

La ecuación de rigideces para la estructura puede escribirse como una superposición de "fuerzas empotradas" a las fuerzas resultantes de los desplazamientos nodales:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha(\Delta T)EA \\ -\alpha(\Delta T)EA \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{25.20}$$

Cuando se consideran las condiciones de frontera la ecuación de rigideces resultante se transforma en

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{2AE}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha(\Delta T)EA \\ -\alpha(\Delta T)EA \end{Bmatrix} \tag{25.21}$$

Si no hay fuerzas externas aplicadas al nodo 2 o al 3, la solución para este problema de carga térmica es

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{2AE}{L} \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} -\alpha(\Delta T)EA \\ \alpha(\Delta T)EA \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-\alpha(\Delta T)L}{3} \\ \frac{\alpha(\Delta T)L}{3} \end{Bmatrix} \tag{25.22}$$

La sustitución de los desplazamientos nodales en las ecuaciones de rigideces para el elemento individual, más la adición de las fuerzas de empotramiento, proporcionarán la solución para las fuerzas internas del elemento.

$$\begin{Bmatrix} X_{1,2} \\ X_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^F + \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\alpha(\Delta T)EA}{3} \\ -\frac{\alpha(\Delta T)EA}{3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{2,3} \\ X_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha(\Delta T)EA \\ -\alpha(\Delta T)EA \end{Bmatrix}^F + \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\alpha(\Delta T)EA}{3} \\ -\frac{\alpha(\Delta T)EA}{3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{3,4} \\ X_{4,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^F + \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\alpha(\Delta T)EA}{3} \\ -\frac{\alpha(\Delta T)EA}{3} \end{Bmatrix}$$

Como se ve de la solución, la estructura experimenta una compresión uniforme en todos lados como resultado de un aumento de la temperatura en el elemento ②.

25.6 ECUACIONES DE RIGIDECES PARA ESTRUCTURAS CUYOS ELEMENTOS TIENEN LONGITUDES INCORRECTAS

Muchas estructuras se fabrican con uno o más elementos que tienen longitudes incorrectas. Si la estructura se ajusta "forzadamente" durante el ensamblado, pueden desarrollarse fuerzas en distintas partes de la estructura, aun cuando no se apliquen cargas externas. El procedimiento para determinar estas fuerzas "trabadas" es esencialmente el mismo que el que se ha descrito para los elementos que experimentan cambios de temperatura.

Como ejemplo, suponga que el elemento ② de la estructura mostrada en la figura 25.5(a) se fabrica con una longitud en exceso Δl. Para este análisis se supone que la estructura se fuerza mientras que se mantienen los nodos inmóviles. Resultarán fuerza nodales aplicadas en los nodos 2 y 3, como se muestra en la figura 25.5 (b). Sin embargo, para este caso, los valores de las fuerzas nodales se calculan como

$$X_2^F = AE\frac{\Delta L}{L}$$
$$X_3^F = -AE\frac{\Delta L}{L} \tag{25.23}$$

El resto del procedimiento es exactamente como se describió para el problema de la carga térmica, es decir, se escribe para la estructura una ecuación de rigideces similar a la ecuación 25.20, se aplican condiciones de frontera, y se determinan valores para las componentes de desplazamiento en los nodos libres. Entonces se encuentran las fuerzas internas de los elementos sustituyendo los valores de los desplazamientos libres de los nodos en las ecuaciones individuales de rigidez del elemento.

25.7 APLICACIONES DE LA PARTICIÓN DE MATRICES

En el estudio anterior del método de las rigideces, generalmente se obtenía primero el conjunto completo de ecuaciones de rigideces para una estructura. La solución para los desplazamientos de los nodos libres se determinaba eliminando primero de la matriz de rigideces las filas y las columnas correspondientes a los desplazamientos de frontera cuyos valores se especificaban iguales a cero suponiendo que no había momentos en los apoyos. La justificación de este procedimiento se ve claramente considerando el conjunto completo de ecuaciones de rigideces para una estructura. Si se le escribe en forma particionada, la ecuación es

$$\begin{Bmatrix} \underline{P}_f \\ \underline{P}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\delta}_f \\ \underline{\delta}_s \end{Bmatrix} \tag{25.24}$$

La ecuación 25.24 se ha escrito de modo que todos los desplazamientos de frontera se agrupan y se identifican como $\{\delta_s\}$. Los desplazamientos de los nodos libres se identifican como $\{\delta_F\}$. En la ecuación 25.24, el guión bajo asociado con los diversos términos indica que el término es una matriz, y no solamente un escalar. El lado izquierdo de la ecuación 25.24 representa fuerzas nodales, es decir,

$\underline{P}_f = \{P_f\}$; un vector de fuerzas nodales aplicadas,

$\underline{P}_s = \{P_s\}$; un vector de reacciones en los apoyos.

La matriz [K] se particiona en cuatro segmentos que corresponden a la división entre los desplazamientos de los nodos libres y de los nodos en los apoyos.

La ecuación matricial 25.24 puede escribirse como dos ecuaciones matriciales reducidas. La ecuación matricial superior es

$$\{P_f\} = [K_{ff}]\{\delta_f\} = [K_{fs}]\{\delta^0{}_s\} = [K_{ff}]\{\delta_f\} \tag{25.25}$$

y la ecuación matricial inferior es:

$$\{P_s\} = [K_{sf}]\{\delta_f\} = [K_{ss}]\{\delta^0{}_s\} = [K_{sf}]\{\delta_f\} \tag{25.26}$$

Una parte de los lados derechos de ambas ecuaciones 25.25 y 25.26 se elimina, ya que el vector $\{\delta_s\}$ es idénticamente igual a cero.

Por lo tanto, la ecuación 25.25 puede resolverse para $\{\delta_f\}$:

$$\{\delta_f\} = [K_{ff}]^{-1}\{P_f\} \tag{25.27}$$

y los valores de $\{\delta_f\}$ pueden sustituirse ahora en la ecuación 25.26 para producir los valores de las reacciones:

$$\{P_s\} = [K_{sf}]\{\delta_f\} = [K_{sf}][K_{ff}]^{-1}\{P_f\} \tag{25.28}$$

Éste es exactamente el procedimiento que se ha usado para resolver los problemas que intervienen en el método de las rigideces en los dos capítulos anteriores.

25.8 CONDENSACIÓN

El estudio de los procedimientos de solución en la sección anterior es un caso especial de un tema importante frecuentemente denominado "condensación". Este procedimiento, que se estudia brevemente aquí, permite que un analista reduzca el orden del conjunto de ecuaciones de rigideces para simplificar el problema, o para alcanzar algún otro objetivo.

Para ilustrar el procedimiento, se considera a la viga en voladizo de la figura 25.6. Después de considerar las condiciones de frontera, la estructura tiene 4 grados de libertad (v_1, θ_1, v_2, θ_2). Las ecuaciones de rigideces correspondientes pueden escribirse simbólicamente (de la ecuación 23.26) como

$$\begin{Bmatrix} Y_1 = 1\text{ klb} \\ Y_2 = 3\text{ klb} \\ M_1 = 0 \\ M_2 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{-12EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{25.29}$$

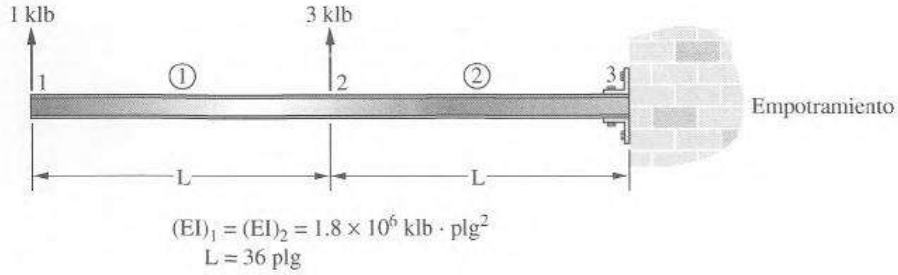


Figura 25.6

En la ecuación 25.29, las rotaciones θ_1 y θ_2 y los desplazamientos v_1 y v_2 se han agrupado, y la matriz de rigideces se ha particionado para reflejar esta división. Para un problema específico el analista puede saber que no hay momentos externos aplicados a los nodos 1 y 2. Por lo tanto, la ecuación matricial inferior mostrada en la ecuación 25.29 puede resolverse para las rotaciones θ_1 y θ_2 en términos de los desplazamientos v_1 y v_2:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{6EI}{L^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \frac{2EI}{L}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

y

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{3}{7}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{v_1}{L} \\ \dfrac{v_2}{L} \end{Bmatrix} \tag{25.30}$$

Ahora puede sustituirse la ecuación 25.30 en la ecuación matricial superior mostrada en la ecuación 25.29 para producir el siguiente resultado:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{12EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \left(\frac{6EI}{L^2}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{v_1}{L} \\ \dfrac{v_2}{L} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} \dfrac{12}{7} & \dfrac{-30}{7} \\ \dfrac{-30}{7} & \dfrac{96}{7} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \tag{25.31}$$

La ecuación 25.31 se resuelve para los desplazamientos $\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$ en términos de las fuerzas nodales aplicadas:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} \dfrac{12}{7} & \dfrac{-30}{7} \\ \dfrac{-30}{7} & \dfrac{96}{7} \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} 2.667 & 0.833 \\ 0.833 & 0.333 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.134 \text{ plg} \\ 0.048 \text{ plg} \end{Bmatrix} \tag{25.32}$$

Observe que la ecuación 25.31 representa un conjunto de solamente dos ecuaciones que tienen que resolverse simultáneamente, con objeto de encontrar los desplazamientos, mientras que la ecuación matricial original (ecuación 25.29) incluye cuatro ecuaciones que tienen que resolverse simultáneamente. Aunque el orden reducido del conjunto de ecuaciones que deben resolverse simultáneamente se obtiene a expensas del álgebra matricial adicional, el resultado neto puede ser un ahorro importante en costos de computación para resolver problemas grandes.

25.9 ANCHO DE BANDA DE LAS MATRICES DE RIGIDECES PARA ESTRUCTURAS GENERALES

El lector pudo haber observado, en los ejemplos de las matrices de rigideces, que casi todas estas matrices están pobladas con una gran cantidad de ceros. Si el esquema de numeración de nodos se realiza de manera óptima, los elementos diferentes de cero de la matriz se agrupan en una "banda". Como ejemplo, considere la matriz de rigideces para el elemento sometido a fuerza axial uniforme que consiste de cuatro elementos, mostrado en la figura 25.7.

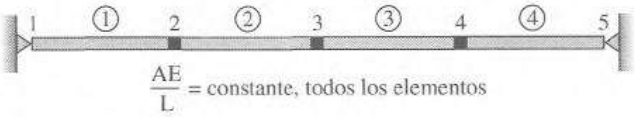


Figura 25.7

La matriz de rigideces para esta estructura puede escribirse, con la ayuda de la ecuación 23.8, como

$$[K] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{25.33}$$

Las líneas punteadas en la matriz de rigideces denotan los límites de la banda en la cual se sitúan todos los elementos diferentes de cero de la matriz.

Edificio Manufacturers & Traders Trust Company. (Cortesía de Bethlehem Steel Co.)

Las soluciones de computadora de las ecuaciones de rigideces utilizan las características de banda de la matriz de rigideces para ahorrar espacio de almacenamiento en la computadora. Pueden escribirse algoritmos que requieran el almacenaje de solamente aquellos elementos dentro de la banda de una matriz de rigideces. Para un problema estructural grande, el número de elementos fuera de la banda puede ser muchas veces mayor que el número de elementos dentro de la banda de la matriz. Si se aprovechan debidamente las características de banda de una matriz de rigideces, pueden alcanzarse grandes ahorros en espacio de almacenaje de computadora y en el tiempo resultante para la solución.

Si una estructura consiste en una viga o de un puntal continuos, se alcanza la numeración óptima de los nodos numerando los nodos en forma secuencial de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. Si la estructura es un marco, el esquema óptimo de numeración de nodos es mucho menos evidente. Sin embargo, los siguientes lineamientos permitirán al analista alcanzar un ancho de banda "cercano al mínimo":

1. Para cada nodo de la estructura, realice lo siguiente:
   (a) Determine el número de nodo más alto asociado con cualquier elemento unido al nodo en cuestión; también determine el número de nodo más bajo.
   (b) Calcule la diferencia entre el número de nodo más alto y el número de nodo más bajo.
2. Minimice esta diferencia cuando considere todos los nodos.

Aun cuando el uso de estos lineamientos no siempre conducirá a absolutamente el ancho de banda mínimo para las matriz de rigideces asociada, proporcionarán un valor satisfactoriamente cercano al mínimo.

Para ilustrar estos lineamientos, se considera un marco simple de varios niveles con dos esquemas de numeración de nodo, mostrados en las figuras 25.8(a) y (b). Para el esquema (a), la diferencia más grande ocurre simultáneamente en los nodos 2 a 7 y 9 a 13, y tiene un valor de 8. Para el esquema (b) la diferencia más grande ocurre simultáneamente en los nodos 3 a 11 y 4 a 12, y tiene un valor de 4. Así, el esquema de numeración de nodos (b) conduce a un ancho de banda menor y generalmente conducirá a una solución más económica en términos del tiempo de cómputo requerido.

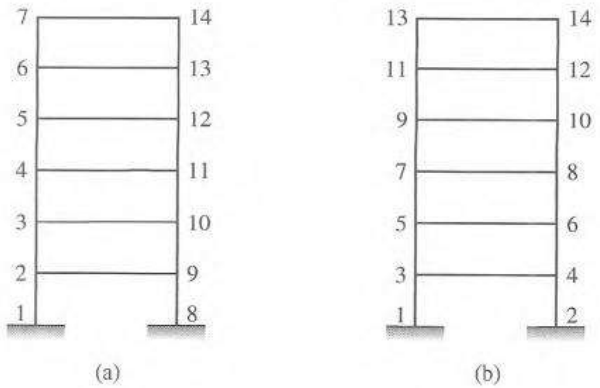
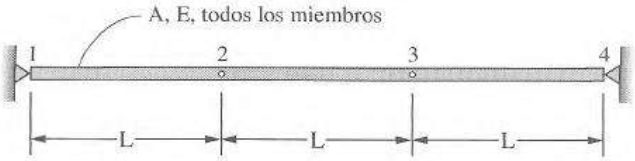


Figura 25.8

La mayoría de los programas de cómputo se escriben de modo que aprovechen la simetría de la matriz de rigideces. Por lo tanto, solamente aquella porción de la matriz que está arriba o abajo de la diagonal principal se almacena y se usa en los cálculos. Para estos programas, el término ancho de banda debe reemplazarse por el semiancho de banda. Sin embargo, las reglas con respecto a alcanzar los esquemas económicos de numeración de nodos permanecen iguales.

25.10 PROBLEMAS PARA SOLUCIONAR

25.1 Un elemento con fuerza axial consiste en tres elementos (miembros) unidos entre sí y a cuatro apoyos en cuatro nodos. Realice lo siguiente:



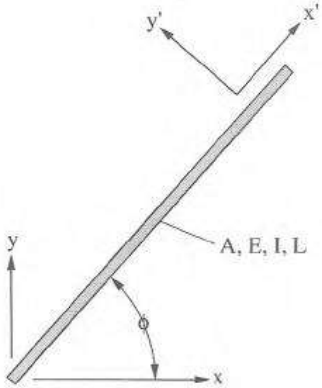
(a) Determine las matrices de rigideces individuales para los tres elementos;

(b) Sume las matrices de rigideces elementales en una matriz global de rigideces para la estructura. La matriz de rigideces debe arreglarse de modo que pueda usarse en la siguiente ecuación de rigideces:

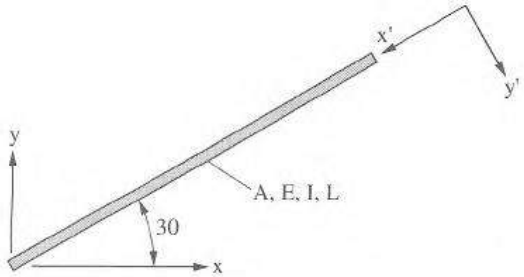
$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_2 \end{Bmatrix} = [K_{total}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

(c) Compare el "ancho de banda" de la matriz de rigideces encontrada en la parte (b) con aquella mostrada en la ecuación 25.33. [*Resp.:* Ancho de banda (arriba) = 4 contra ancho de banda (ecuación 25.33) = 3.]

25.2 Use la ecuación 25.16 para verificar que la matriz de rigideces [K], expresada en coordenadas globales, es la misma que la dada por la ecuación 24.19.



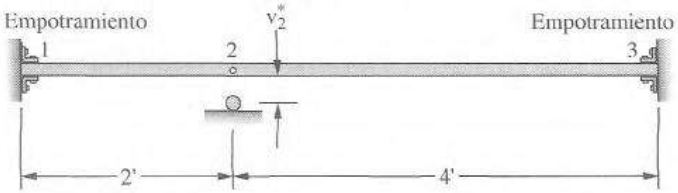
25.3 Determine la matriz de rigideces para un elemento inclinado, como el que se muestra en la figura, pero con el eje local x orientado como se muestra (apuntando de la derecha superior a la izquierda inferior). También, encuentre la matriz de rigideces para el mismo puntal si el eje local x está orientado como se muestra en el problema 25.2. Señale las diferencias, si las hay, que existen entre estas dos matrices de rigideces.



25.4 Verifique la ecuación 25.9, es decir, muestre que $[\gamma]^{-1} = [\gamma]^T$.

25.5 Muestre que la matriz $[\Gamma]$ en la ecuación 25.10 tiene las mismas propiedades que $[\gamma]$, es decir, muestre que $[\Gamma]^{-1} = [\Gamma]^T$.

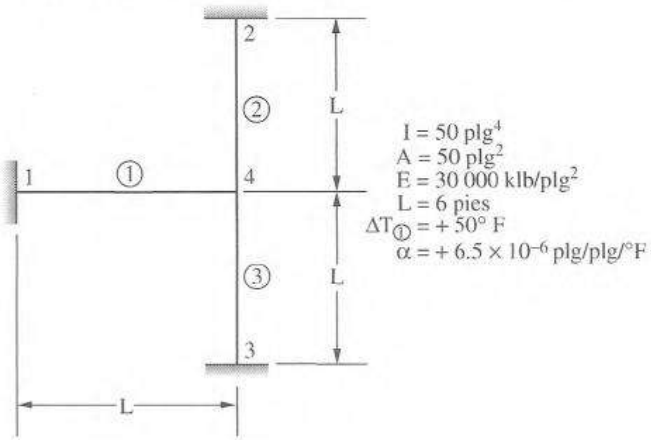
25.6 Una viga doblemente empotrada tiene un apoyo intermedio en el nodo 2. El apoyo 2 está a una distancia v_2^* debajo de un eje trazado entres los nodos 1 y 3. Determine las fuerzas nodales que se desarrollan en los nodos 1, 2 y 3 cuando la viga se coloca en su posición con un gato (con el nodo 2 unido a la viga).



$EI = \text{constante} = 1.0 \times 10^6 \text{ klb} \cdot \text{plg}^2$
$v_2^* = 0.1 \text{ plg}$

Resp.: $Y_1 = 54.2$ klb, $Y_2 = -73.2$ klb; $Y_3 = 19.0$ klb
$M_1 = 780.9$ klb · plg $\quad M_3 = -390.0$ klb · plg

25.7 Un marco consiste en tres elementos uniformes, como se muestra en el boceto. El elemento ① experimenta un aumento de temperatura ΔT_1, mientras que los elementos ② y ③ permanecen a la temperatura ambiente. Determine las reacciones resultantes en los nodos 1, 2 y 3 debidas al aumento de temperatura. [*Resp.:* Reacciones totales (partes A y B) $X_1^{Total} = 2.17$ klb.]



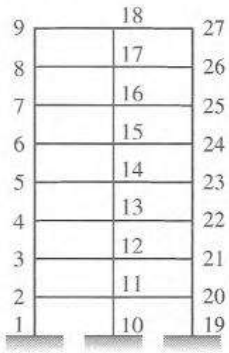
25.8 Para el marco mostrado en el problema 25.7, suponga que todos los elementos están a la temperatura ambiente, pero el elemento ② fue fabricado demasiado corto una distancia $\Delta L_2 = -0.10$ plg. Determine las reacciones resultantes en los nodos 1, 2 y 3 si el elemento ② se coloca forzado en su posición. (*Nota:* suponga que $u_4 = 0.0$ para simplificar el cálculo.)

Resp.:

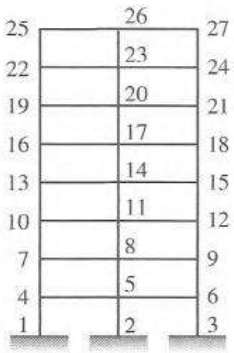
$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1.79\,\text{klb} \\ -71.7\,\text{klb}\cdot\text{plg} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.598\,\text{klb} \\ -103.3\,\text{klb} \\ 14.34\,\text{klb}\cdot\text{plg} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 208.3\,\text{klb} \\ 0.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.598\,\text{klb} \\ 105.0\,\text{klb} \\ 14.34\,\text{klb}\cdot\text{plg} \end{Bmatrix}$$

25.9. Una estructura de dos crujías de varios niveles se modela con dos esquemas diferentes de numeración de nodos, que se muestran en los bocetos (a) y (b). ¿Cuál esquema de numeración de nodos conducirá a una matriz de rigideces que tenga el más bajo ancho de banda? Explique su respuesta. [*Resp.:* El esquema de numeración de nodos (b) produce el más bajo ancho de banda con una diferencia máxima = 6.]



(a)



(b)

Apéndice A

La ecuación de la catenaria

Algunas estructuras de la ingeniería civil incluyen cables como parte del sistema de soporte de cargas. Entre estas estructuras se cuentan los puentes colgantes y las instalaciones de plataformas fuera de la costa que incluyen líneas de amarre, tales como las plataformas de patas tensadas. Debido a que los cables tienen peso, como a menudo suponemos al diseñar los tirantes de torres pequeñas, la tensión en el cable cambia a lo largo de su longitud y el cable se comba a lo largo de su longitud al estar en uso. Esos cables adoptan la forma de una catenaria. En este apéndice se desarrollan las relaciones fundamentales necesarias para evaluar la fuerza en catenarias.

La geometría básica del cable catenaria que consideraremos se muestra en la figura A.1. Observe que la parte inferior del cable tiene coordenada (0, 0) y es tangente al eje coordenado horizontal en ese punto. La parte superior del cable tiene coordenada (X, Y).

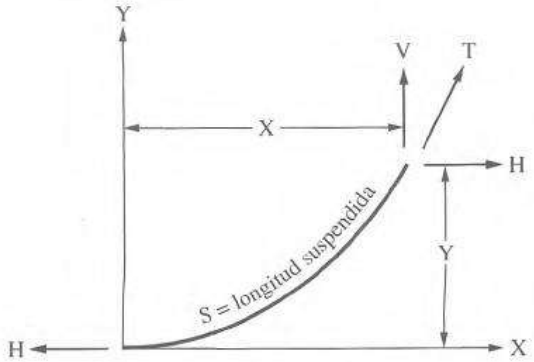


Figura A.1 Geometría del cable.

Para desarrollar las ecuaciones gobernantes de un cable, consideremos el segmento de longitud Δs que se muestra en la figura A.2. Las ecuaciones de equilibrio para este segmento del cable son las siguientes:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= (T + \Delta T)\cos(\theta + \Delta\theta) - T\cos\theta = 0 \\ \sum F_y &= (T + \Delta T)\,\mathrm{sen}(\theta + \Delta\theta) - T\,\mathrm{sen}\,\theta - w\Delta s = 0 \end{aligned} \qquad \textit{(A.1)}$$

El término w en la ecuación A.1 es el peso del cable por unidad de longitud. Por conveniencia en la manipulación matemática, introducimos la función:

$$H(T, \theta) = T\cos\theta \qquad \textbf{(A.2)}$$

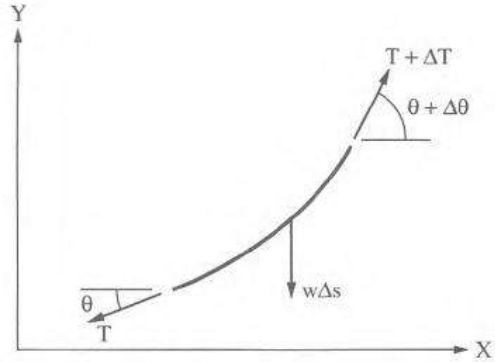


Figura A.2 Un segmento del cable.

Esta ecuación es la componente horizontal de la fuerza en el cable. Si sustituimos la ecuación A.2 en la primera de las ecuaciones A.1, esa ecuación toma la forma:

$$H(T + \Delta T, \theta + \Delta\theta) - H(T, \theta) = \Delta H = 0 \tag{A.3}$$

A lo largo del segmento Δs, la razón de cambio de la fuerza horizontal es entonces:

$$\frac{dH}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\left(\frac{\Delta H}{\Delta s}\right) = \lim_{\Delta s \to 0}\left(\frac{0}{\Delta s}\right) = 0 \tag{A.4}$$

Como la función H, definida por la ecuación A.2, es la componente horizontal de la fuerza en el cable, podemos concluir de la ecuación A.4 que la componente horizontal de fuerza es constante a lo largo de la longitud del cable, es decir:

$$H = T\cos\theta \tag{A.5}$$

De esta ecuación puede verse que para que H sea constante, la fuerza T en el cable debe cambiar a lo largo de su longitud.

Examinemos ahora la segunda de las ecuaciones A.1. Si reordenamos esa ecuación y dividimos ambos lados entre $\Delta\theta$, obtenemos:

$$\frac{(T + \Delta T)\,\mathrm{sen}(\theta + \Delta\theta) - T\,\mathrm{sen}\,\theta}{\Delta\theta} = \frac{w\Delta s}{\Delta\theta} \tag{A.6}$$

Si tomamos el límite de esta ecuación cuando $\Delta\theta$ tiende a cero, encontramos que:

$$\lim_{\Delta\theta \to 0}\left[\frac{(T + \Delta T)\,\mathrm{sen}(\theta + \Delta\theta) - T\,\mathrm{sen}\,\theta}{\Delta\theta}\right] = \lim_{\Delta\theta \to 0}\left[\frac{w\Delta s}{\Delta\theta}\right] \tag{A.7}$$

de lo que resulta:

$$\frac{d}{d\theta}[T\,\mathrm{sen}\,\theta] = w\frac{ds}{d\theta} \tag{A.8}$$

Pero por la ecuación A.5 sabemos que:

$$T = \frac{H}{\cos\theta} \tag{A.9}$$

por lo que la ecuación A.8 toma la forma:

$$\frac{d}{d\theta}[H\tan\theta] = H\sec^2\theta = w\frac{ds}{d\theta} \tag{A.10}$$

y podemos reordenarla en la forma:

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{H}{w}\sec^2\theta \tag{A.11}$$

Al integrar la ecuación A.11 encontramos que la longitud colgante del cable es la siguiente:

$$S = \int_0^s ds = \frac{H}{w}\int_0^\theta \sec^2\theta\, d\theta = \frac{H}{w}\tan\theta \tag{A.12}$$

Del cálculo sabemos que:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \lim_{\Delta s \to 0}\left[\frac{\Delta x}{\Delta s}\right] = \frac{dx}{ds} \\ \operatorname{sen}\theta &= \lim_{\Delta s \to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta s}\right] = \frac{dy}{ds} \end{aligned} \tag{A.13}$$

Al aplicar la regla de la cadena con las ecuaciones A.11 y A.13 obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \left[\frac{H}{w}\right]\sec^2\theta\cos\theta = \left[\frac{H}{w}\right]\sec\theta \\ \frac{dy}{d\theta} &= \left[\frac{H}{w}\right]\sec^2\theta\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{A.14}$$

Integramos la primera de esas ecuaciones:

$$X = \int_0^x dx = \frac{H}{w}\int_0^u \sec\theta\, d\theta \tag{A.15}$$

que se reduce a:

$$X = \left[\frac{H}{w}\right]\ln(\sec\theta + \tan\theta) \tag{A.16}$$

Ésta es la proyección X del cable o distancia horizontal de un extremo al otro. La proyección Y puede encontrarse integrando la segunda ecuación A.14, de manera análoga a como lo hicimos para obtener la proyección X. El resultado es el siguiente:

$$Y = \left[\frac{H}{w}\right](\sec\theta - 1) \tag{A.17}$$

Estas dos últimas ecuaciones están expresadas en términos del ángulo θ, que probablemente no se conoce. Sin embargo, este ángulo puede expresarse en términos de otros parámetros del cable.

De la ecuación A.16:

$$e^{wX/H} = \sec\theta + \tan\theta \tag{A.18}$$

y por trigonometría sabemos que:

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1 \tag{A.19}$$

Si la ecuación A.18 se sustituye en la ecuación A.19, se obtiene la ecuación:

$$\sec\theta - \tan\theta = e^{-wX/H} \tag{A.20}$$

Entonces, sumando las ecuaciones A.18 y A.20, se encuentra para $\sec\theta$ la expresión:

$$\sec\theta = \tfrac{1}{2}\left[e^{wX/H} + e^{-wX/H}\right] = \cosh\left(\frac{wX}{H}\right) \tag{A.21}$$

y restando la ecuación A.20 de la ecuación A.18, se encuentra para $\tan\theta$ la expresión:

$$\tan\theta = \tfrac{1}{2}\left[e^{wX/H} - e^{-wX/H}\right] = \operatorname{senh}\left(\frac{wX}{H}\right) \tag{A.22}$$

La longitud del cable se encuentra sustituyendo la ecuación A.22 en la ecuación A.12. El resultado es:

$$S = \left[\frac{H}{w}\right] \operatorname{senh}\left(\frac{wX}{H}\right) \tag{A.23}$$

Al sustituir la ecuación A.21 en la ecuación A.17, encontramos que la proyección Y del cable es la siguiente:

$$Y = \frac{H}{w}\left[\cosh\left(\frac{wX}{H}\right) - 1\right] \tag{A.24}$$

Por último, mediante las ecuaciones A.21, A.22 y A.24, se encuentra que la proyección X del cable es la siguiente:

$$X = \frac{H}{w}\cosh^{-1}\left(\frac{Y + \frac{H}{w}}{\frac{H}{w}}\right) \tag{A.25}$$

o, si se hubiesen usado las ecuaciones A.21, A.22 y A.23, X tendría la forma:

$$X = \frac{H}{w}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{Sw}{H}\right) \tag{A.26}$$

La última cantidad que necesitamos es la tensión en el cable. Ésta puede obtenerse con las ecuaciones A.5, A.13 y A.26. El resultado es el que sigue:

$$T = \sqrt{(wS)^2 + H^2} \tag{A.27}$$

De la forma de esta última ecuación, vemos que T se calcula usando el teorema de Pitágoras aplicado a las componentes horizontal y vertical de la fuerza en el cable. La componente vertical de fuerza en el cable es entonces:

$$V = wS \tag{A.28}$$

Las ecuaciones desarrolladas son suficientes para determinar las fuerzas en un cable y su perfil. Pueden usarse para evaluar un cable que no pasa por el origen, como se muestra en la figura A.1. Para hacer esto, un cable que pase por el origen, que contenga al cable AB, se determina como se muestra en la figura A.3. Se calculan entonces las fuerzas y las proyecciones en los puntos a y b. Ellas representan las fuerzas y el perfil del cable AB.

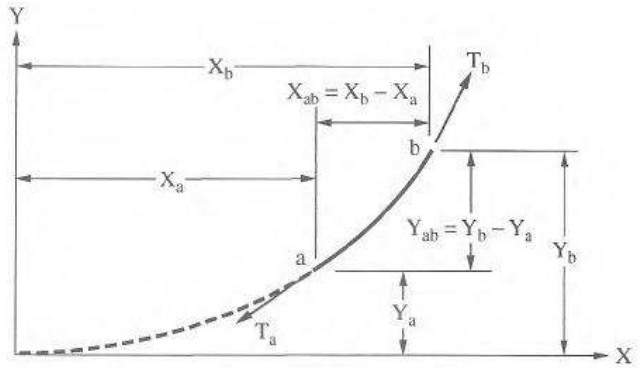


Figura A.3 Geometría de un segmento de cable que no pasa por el origen.

EJEMPLO A.1

La cadena de anclaje de una unidad perforadora móvil fuera de la costa tiene 2 000 pies de longitud y sumergida tiene un peso de 108 lb/pie. Ella es tangente al fondo del océano en el extremo con el ancla. El otro extremo de la cadena se conecta a un navío en un punto a 800 pies arriba del fondo. ¿Cuál es la tensión en la cadena y la distancia del navío al ancla?

Al sustituir la ecuación A.25 en la ecuación A.23, obtenemos la ecuación:

$$S = \frac{H}{w}\,\text{senh}\left[\cosh^{-1}\left(\frac{Y + \frac{H}{w}}{\frac{H}{w}}\right)\right]$$

de la que puede despejarse H, la componente horizontal de la fuerza en la cadena. El resultado es el siguiente:

$$H = \tfrac{1}{2}(S^2 + Y^2)\left(\frac{w}{Y}\right) = \tfrac{1}{2}(2\,000^2 - 800^2)\left(\frac{108}{800}\right) = 226\,800\,\text{lbs}$$

Podemos entonces sustituir este valor de H y los otros valores conocidos en la ecuación A.25 para obtener X, es decir, la distancia horizontal del extremo de la cadena al ancla.

$$X = \frac{226\,800}{108}\cosh^{-1}\left(\frac{800 + \frac{226\,800}{108}}{\frac{226\,800}{108}}\right) = 1\,780\,\text{pies}$$

La tensión en la cadena puede calcularse usando la ecuación A.27. El resultado es el siguiente:

$$T = \sqrt{(108 \cdot 2\,000)^2 + (226\,800)^2 + 313\,200\,\text{lbs}} \quad \blacksquare$$

Apéndice B

Álgebra matricial

B.1 INTRODUCCIÓN

Se presenta aquí una introducción a las reglas básicas del álgebra matricial. Se pretende que el material proporcione bases introductorias del tema. El material se centra en aplicaciones que puedan ser de interés, sobre todo para los ingenieros estructurales. Existen otras excelentes referencias que le pueden proporcionar al lector interesado un tratamiento más amplio del tema[1, 2].

B.2 DEFINICIONES Y PROPIEDADES DE LAS MATRICES

Se define una matriz como un arreglo ordenado de números en renglones y en columnas. Por ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

Una matriz [A] representativa, como la que se muestra en la ecuación B.1 consta de m renglones y de n columnas de números entre corchetes. La matriz [A] es entonces de orden $m \times n$. Los elementos $a_{i,j}$ en el arreglo se identifican por medio de dos subíndices. El primer subíndice designa el renglón y el segundo la columna en donde se localiza el elemento. Así, $a_{3,5}$ es el elemento localizado en la intersección del tercer renglón y la quinta columna de la matriz. Los elementos con subíndices repetidos, por ejemplo, $a_{i,i}$, se localizan en la diagonal principal de la matriz.

Aunque el número de renglones y de columnas de una matriz puede variar de problema a problema, merecen mencionarse dos casos especiales. Cuando $m = 1$, la matriz consta sólo de un *renglón* de elementos y se llama matriz renglón. Se escribe de la manera siguiente:

$$\lfloor A \rfloor = \lfloor a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \rfloor \tag{B.2}$$

[1] F. Ayres, *Theory and Problems of Matrices*, Schaum Outline Series (Nueva York, McGraw-Hill, 1962).

[2] S. D. Conte y L. deBoor. *Elementary Numerical Analysis*, 2a. ed. (Nueva York, McGraw-Hill, 1972).

Cuando $n = 1$, la matriz consta sólo de una *columna* y se denomina matriz columna o vector. Se indica como sigue:

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \tag{B.3}$$

B.3 TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

Matriz cuadrada

Cuando el número de renglones m y el de columnas n son iguales, la matriz se denomina *cuadrada*. Por ejemplo, si $m = n = 3$, la matriz cuadrada [A] tiene la siguiente forma:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

Matriz simétrica

Una matriz simétrica es aquella en la cual los términos que no pertenecen a la diagonal son recíprocos con respecto a la diagonal principal. Entonces:

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \text{para } i \neq j \tag{B.5}$$

Cuando los elementos de una matriz cuadrada obedecen esta regla, se dice que la matriz es *simétrica* y los elementos están dispuestos simétricamente respecto a la diagonal principal. Un ejemplo de una matriz simétrica de 3×3 es:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

Las matrices simétricas se encuentran frecuentemente en la teoría de las estructuras y desempeñan un papel muy importante en las operaciones matriciales que se usan para el desarrollo de los principios teóricos.

Matriz identidad

Cuando todos los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada son iguales a la unidad y todos los otros elementos son iguales a cero, la matriz se denomina *matriz identidad*. Algunas veces también se le denomina *matriz unitaria*. Las matrices de este tipo se representan con el símbolo [I]. Un ejemplo de una matriz identidad de 3×3 es:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.7}$$

Matriz transpuesta

Cuando los elementos de una matriz determinada se reordenan de modo que las columnas de la matriz original se convierten en los renglones correspondientes de la nueva matriz, ésta se deno-

mina la *transpuesta* de la original. En este libro, la transpuesta de la matriz [A] se designa con el símbolo $[A]^T$. Un ejemplo de una matriz específica y su transpuesta es:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$
$$[A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 7 & 6 \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

El lector debe observar que si la matriz [A] es una matriz simétrica, entonces:

$$[A]^T = [A] \tag{B.9}$$

Esta propiedad se usa frecuentemente en el desarrollo de la teoría estructural matricial. Como casos especiales, la transpuesta de una matriz renglón es una matriz columna, y viceversa. Así:

$$\lfloor A \rfloor^T = \{A\}$$
$$\{A\}^T = \lfloor A \rfloor \tag{B.10}$$

B.4 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

El determinante de una matriz cuadrada [A] se indica con el símbolo |A|, y en la forma desarrollada, se escribe como:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{vmatrix} \tag{B.11}$$

Se dice que este determinante es de orden m. A diferencia de la matriz [A], que no posee ningún valor, el determinante |A| tiene un valor numérico único. El valor de |A| se encuentra fácilmente para un arreglo de 2×2. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 6 \tag{B.12}$$

El valor de |A| en el ejemplo anterior se determinó multiplicando los números en la diagonal principal y restando de este producto el de los números en la otra diagonal. Por desgracia, este procedimiento simple no funciona para determinantes de orden mayor que el dos.

Un procedimiento general para encontrar el valor de un determinante es el llamado "desarrollo por menores". El primer *menor* de la matriz [A], correspondiente al elemento $a_{i,j}$ se define como el determinante de una matriz reducida, obtenida eliminando el renglón $i^{\text{-ésimo}}$ y la columna $j^{\text{-ésima}}$ de la matriz [A]. El menor es un número específico, como cualquier otro determinante.

A manera de ejemplo, se muestran a continuación varios menores primeros para una matriz [A] específica:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{menor de } a_{1,1} &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14 \\ \text{menor de } a_{1,2} &= \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8 \\ \text{menor de } a_{2,3} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 2 = 3 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Cuando se asocia a un menor el signo correcto, el resultado se denomina *cofactor* y se le designa con el símbolo A_{ij}. El signo de un menor se determina multiplicando el menor por $(-1)^{i+j}$. Se muestran a continuación varios cofactores de la matriz [A]:

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= (-1)^{1+1} \times \text{menor de } a_{1,1} = 1(-14) = -14 \\ A_{1,2} &= (-1)^{1+2} \times \text{menor de } a_{1,2} = (-1)(-8) = 8 \\ A_{2,3} &= (-1)^{2+3} \times \text{menor de } a_{2,3} = -1(3) = -3 \end{aligned} \tag{B.14}$$

Ahora, para tener el valor de un determinante general podemos escoger cualquier renglón i de la matriz [A] y expandirlo de acuerdo con la relación:

$$|A| = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} A_{i,j} \tag{B.15}$$

El valor de un determinante también puede encontrarse escogiendo una columna j cualquiera y expandiéndola según la relación:

$$|A| = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} A_{i,j} \tag{B.16}$$

Si el orden del determinante original es grande, el procedimiento descrito no conduce a una solución fácil de obtener. Por ejemplo, un determinante de orden 15 tiene aún menores de orden 14. Sin embargo, los menores de orden 14 pueden a su vez reducirse a menores de orden 13 por medio del proceso de expansión. El proceso puede repetirse hasta que los menores resultantes sean de orden 2. Estos menores pueden entonces evaluarse fácilmente usando el procedimiento descrito en el ejemplo ilustrativo inicial de esta sección.

Aunque el procedimiento para evaluar determinantes puede parecer largo y tedioso, pueden escribirse algoritmos para computadora que ejecutarán las operaciones algebraicas necesarias. Existen procedimientos más sencillos que hacen uso de propiedades especiales de los determinantes. Estos procedimientos no se expondrán aquí; los lectores interesados en aprenderlos pueden consultar los libros especializados en este tema que se citan en las notas de pie de página 1 y 2 de este capítulo.

B.5 MATRIZ ADJUNTA

Existe una matriz especial denominada la matriz *adjunta* y se denota por el símbolo adj[A]. Para encontrar la matriz adjunta correspondiente a una matriz original [A], se reemplaza primero cada elemento de [A] por su cofactor; la matriz adjunta es la transpuesta de esta matriz resultante.

Simbólicamente, la matriz adjunta adj[A] se escribe como sigue:

$$\mathrm{adj}[A] = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,m} \end{vmatrix} \tag{B.17}$$

Un ejemplo numérico específico de una matriz [A] y su matriz adjunta es:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= -11 & A_{1,2} &= -2 & A_{1,3} &= 7 \\ A_{2,1} &= 9 & A_{2,2} &= 0 & A_{2,3} &= -3 \\ A_{3,1} &= -1 & A_{3,2} &= 2 & A_{3,3} &= -1 \end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\mathrm{adj}[A] = \begin{bmatrix} -11 & -2 & 7 \\ 9 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -11 & 9 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

El determinante y la matriz adjunta se emplean en el cálculo de la inversa de una matriz, lo cual es un tema que se estudia en una sección posterior de este apéndice.

B.6 ARITMÉTICA MATRICIAL

Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales sólo si los elementos correspondientes de las dos matrices son iguales. Por lo tanto, la igualdad de matrices puede existir únicamente entre matrices de igual orden.

Suma y resta de matrices

Dos matrices pueden sumarse o restarse sólo si ambas son del mismo orden. La suma de dos matrices, [A] y [B], se indica como sigue:

$$[A] + [B] = [C] \tag{B.19}$$

en donde los elementos de la matriz [C] son la suma de los elementos correspondientes de [A] y [B], es decir,

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \tag{B.20}$$

Se muestra a continuación un ejemplo de la suma de dos matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \tag{B.21}$$

La resta de dos matrices se efectúa de manera análoga, restando los elementos correspondientes.

Tanto la ley conmutativa como la asociativa se cumplen para la suma y para la resta de matrices. Así:

$$[A] + [B] = [B] + [A] \tag{B.22}$$

y

$$[A] + ([B] + [C]) = ([A] + [B]) + [C] \tag{B.23}$$

Multiplicación escalar de matrices

Para multiplicar una matriz por un escalar, *cada elemento* de la matriz se multiplica por el escalar. Así:

$$\alpha[A] = \begin{bmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} & \cdots & \alpha a_{1,n} \\ \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} & \cdots & \alpha a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m,1} & \alpha a_{m,2} & \cdots & \alpha a_{m,n} \end{bmatrix} \tag{B.24}$$

Multiplicación de matrices

El producto de dos matrices existe sólo si las matrices son *conformables*. En el producto matricial [A][B], conformabilidad significa que el número de columnas de [A] sea igual al número de renglones de [B]. Las dos matrices que se muestran más adelante son conformables (en el orden mostrado) y pueden multiplicarse.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \tag{B.25}$$

El número de columnas en [A] es igual al número de renglones en [B]. Sin embargo, si el orden de la multiplicación matricial se invierte, o sea [B][A], las matrices *no* son conformables y el producto matricial no existe. Además, aun si las matrices [A] y [B] son cuadradas y, por lo tanto, conformables en el orden [A][B] como en el orden [B][A], los productos de las dos matrices en general no son iguales. Por tanto,

$$[A][B] \neq [B][A] \tag{B.26}$$

La definición formal de un producto matricial entre matrices conformables es la siguiente:

$$[A]_{m\times l}[B]_{l\times n} = [C]_{m\times n} \tag{B.27}$$

en donde

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{l} a_{i,k} b_{k,j} \tag{B.28}$$

Obsérvese que la matriz [A] no es del mismo orden que la [B], pero las dos matrices son conformables, ya que el número de columnas de [A] es igual al número de renglones de [B]. El orden de la matriz producto [C] es $m \times n$.

Se muestra a continuación un ejemplo de un producto de dos matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 13 & 8 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.29}$$

En esta multiplicación matricial los términos de la matriz [C] se calculan como sigue:

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= (1)(1) + (2)(4) = 9 \\ c_{1,2} &= (1)(3) + (2)(5) = 13 \\ c_{1,3} &= (1)(2) + (2)(3) = 8 \\ c_{2,1} &= (-3)(1) + (2)(4) = 5 \\ c_{2,2} &= (-3)(3) + (2)(5) = 1 \\ c_{2,3} &= (-3)(2) + (2)(3) = 0 \end{aligned} \tag{B.30}$$

Aunque el orden de multiplicación de dos matrices no puede en general invertirse sin alterar el producto, tanto la ley asociativa como la distributiva son válidas para los productos matriciales. Así:

$$[A][B][C] = ([A][B])[C] = [A]([B][C]) \tag{B.31}$$

y

$$[A]([B] + [C]) = [A][B] + [A][C] \tag{B.32}$$

Si una matriz [A] se multiplica por la matriz identidad [I] (suponiendo que las matrices sean conformables), la matriz [A] no cambia en absoluto. Así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \tag{B.33}$$

En general,

$$\begin{aligned} [A][I] &= [A] \\ [I][A] &= [A] \end{aligned} \tag{B.34}$$

Transpuesta de un producto

Si un producto de matrices se transpone, el resultado es el producto inverso de la transpuesta de las matrices individuales. El resultado se indica simbólicamente como:

$$([A][B])^T = [B]^T[A]^T \tag{B.35}$$

La transpuesta de un producto matricial triple puede encontrarse usando la ecuación (B.35) junto con la ley asociativa en varias etapas, como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned} ([A][B][C])^T &= \{[A]([B][C])\}^T \\ &= ([B][C])^T[A]^T \\ &= [C]^T[B]^T[A]^T \end{aligned} \tag{B.36}$$

Nótese, sobre todo, que en la transpuesta de un producto matricial cambia el orden de los factores.

Matriz inversa

En las secciones precedentes se han definido la suma, la resta y la multiplicación, pero no se ha mencionado la división matricial. De hecho, la división matricial en la forma [A]/[B] no existe. Sin embargo, existe una operación entre matrices que se parece mucho a la división algebraica. Esta operación hace uso de una matriz *inversa*.

La inversa de una matriz cuadrada [A] se indica con el símbolo $[A]^{-1}$. Se define de manera que:

$$[A][A]^{-1} = [I] \tag{B.37}$$

Hay muchos procedimientos para invertir una matriz. Un procedimiento formal está dado por la siguiente relación:

$$[A]^{-1} = \frac{\text{adj}[A]}{|A|} \tag{B.38}$$

Como ejemplo, consideremos la matriz [A] dada por la ecuación (B.18). La matriz adjunta, adj[A], también se indica en la ecuación B.18. El determinante |A| puede encontrarse usando los elementos y los primeros menores de la primera columna de [A]:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1,1}A_{1,1} + a_{2,1}A_{2,1} + a_{3,1}A_{3,1} \\ &= 1(-11) + 2(9) + 1(-1) \\ &= 6 \end{aligned} \tag{B.39}$$

Entonces,

$$[A]^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -11 & 9 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} \tag{B.40}$$

Pueden verificarse los coeficientes de la inversa $[A]^{-1}$ formando el producto matricial $[A][A]^{-1}$, que debe dar como resultado la matriz identidad. Para este ejemplo se tiene:

$$[A][A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{6}\right)\begin{bmatrix} -11 & 9 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = [I] \tag{B.41}$$

Existe una situación especial respecto a la inversa de una matriz que merece considerarse. Si el determinante de una matriz [A] es igual a cero ($|A| = 0$), la operación de división indicada por la ecuación B.38 no puede efectuarse. En estas circunstancias, la inversa de la matriz [A] no existe y se dice que la matriz [A] es singular. Las matrices singulares se presentan con frecuencia en la teoría de las estructuras, por lo que el lector debe conocer el significado de este término. Se muestra a continuación, como ejemplo, una matriz singular:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \tag{B.42}$$

y

$$|A| = a_{1,1}A_{1,1} + a_{2,1}A_{2,1} + a_{3,1}A_{3,1} = 24 + 0 - 24 = 0 \tag{B.43}$$

La inversa de un producto matricial puede encontrarse mediante reglas que son muy similares a las usadas para encontrar la transpuesta de un producto matricial como se muestra en la ecuación B.35. Específicamente:

$$([A][B])^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1} \tag{B.44}$$

y

$$\begin{aligned} ([A][B][C])^{-1} &= ([B][C])^{-1}[A]^{-1} \\ &= [C]^{-1}[B]^{-1}[A]^{-1} \end{aligned} \tag{B.45}$$

Aplicación de la inversa de una matriz

Consideremos un conjunto de ecuaciones algebraicas, cada una de las cuales contiene un número de cantidades x_i desconocidas:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 &= b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{B.46}$$

El conjunto de ecuaciones algebraicas puede expresarse en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \tag{B.47}$$

o simbólicamente, como

$$[A]\{X\} = \{B\} \tag{B.48}$$

Las incógnitas x_1, x_2 y x_3, pueden encontrarse premultiplicando ambos lados de la ecuación (B.48) por $[A]^{-1}$:

$$\begin{aligned} [A]^{-1}[A]\{X\} &= [A]^{-1}\{B\} \\ [I]\{X\} &= [A]^{-1}\{B\} \\ \{X\} &= [A]^{-1}\{B\} \end{aligned} \tag{B.49}$$

Por lo tanto, si se conoce $[A]^{-1}$ o puede calcularse, los valores de x pueden determinarse por medio de un simple producto matricial.

Como ejemplo numérico consideremos las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 100 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 140 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 110 \end{aligned} \tag{B.50}$$

Éstas se escriben en forma matricial como sigue

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

La matriz de cofactores de [A] es

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Evaluando los determinantes con la matriz adjunta

$$\text{adj}[A] = \begin{bmatrix} -21 & 11 & -6 \\ 6 & -6 & 4 \\ 11 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (2)(-21) + (3)(6) + (4)(11) = 20$$

La inversa de [A] es

$$A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -21 & 11 & -6 \\ 6 & -6 & 4 \\ 11 & -1 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 \\ 140 \\ 110 \end{bmatrix}$$

Y los valores de las incógnitas son

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{20}[(-21)(100) + (11)(140) + (6)(110)] = 5 \\ x_2 &= \tfrac{1}{20}[(6)(100) + (-6)(140) + (4)(110)] = 10 \\ x_3 &= \tfrac{1}{20}[(11)(100) + (-1)(140) + (-6)(110)] = 15 \end{aligned} \tag{B.51}$$

Existen muchas otras técnicas para resolver ecuaciones algebraicas simultáneas. El uso de la matriz inversa es una técnica especial que el proyectista puede usar opcionalmente.

B.7 MÉTODO DE GAUSS PARA RESOLVER ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Uno de los métodos que más se usan para resolver ecuaciones algebraicas simultáneas lineales es el método de Gauss. Este método, o alguna variante de él, se usan en muchos de los programas para computadora que tienen relación con problemas estructurales. Es interesante que el método también se adapta muy bien al cálculo manual. A continuación se exponen las bases de este método.

Consideremos un conjunto de tres ecuaciones algebraicas escritas en términos de tres incógnitas x_1, x_2 y x_3:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 - 1x_3 &= 2 \\ 1x_1 + 4x_2 + 1x_3 &= 12 \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 10 \end{aligned} \tag{B.52}$$

Para despejar los términos incógnita, primero divida cada ecuación del conjunto entre el respectivo primer coeficiente, de modo que el primer coeficiente de cada ecuación sea ahora igual a la unidad:

$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_3 &= \tfrac{2}{3} \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned} \tag{B.53}$$

Reste ahora la primera ecuación del conjunto resultante de cada una de las otras ecuaciones, de modo que el primer coeficiente de la segunda y tercera ecuaciones sean iguales a cero:

$$\begin{aligned} x_1 + 0.3333x_2 - 0.3333x_3 &= 0.6667 \\ 3.6667x_2 + 1.3333x_3 &= 11.3333 \\ 0.1667x_2 + 1.3333x_3 &= 4.3333 \end{aligned} \tag{B.54}$$

Repita las dos operaciones descritas, pero comenzando ahora con la segunda ecuación, o sea, divida la segunda y la tercera ecuaciones entre sus primeros coeficientes, respectivamente, de modo que los primeros coeficientes sean iguales a la unidad:

$$\begin{aligned} x_1 + 0.3333x_2 - 0.3333x_3 &= 0.6667 \\ x_2 + 0.3636x_3 &= 3.0909 \\ x_2 + 7.9996x_3 &= 25.9946 \end{aligned} \tag{B.55}$$

Reste la segunda ecuación de la tercera, de modo que el primer coeficiente de la tercera ecuación sea igual a cero:

$$\begin{aligned} x_1 + 0.3333x_2 - 0.3333x_3 &= 0.6667 \\ x_2 + 0.3636x_3 &= 3.0909 \\ 7.6360x_3 &= 22.9037 \end{aligned} \tag{B.56}$$

Divida la tercera ecuación entre su primer coeficiente. Observe que esta operación presenta una solución para x_3:

$$x_3 = \frac{22.9037}{7.6360} = 2.9994 \tag{B.57}$$

Ahora sustituya el valor encontrado para x_3 en la última forma de la segunda ecuación y despeje x_2:

$$\begin{aligned} x_2 + 0.3636x_3 = x_2 + 0.3636(2.9994) &= 3.0909 \\ x_2 &= 2.0003 \end{aligned} \tag{B.58}$$

Finalmente, sustituya los valores encontrados para x_2 y x_3 en la primera ecuación y despeje x_1:

$$\begin{aligned} x_1 + 0.3333x_2 - 0.3333x_3 = x_1 + 0.3333(2.0003) - 0.3333(2.9994) &= 0.6667 \\ x_1 &= 0.9997 \end{aligned} \tag{B.59}$$

La solución encontrada con el método de Gauss es la siguiente:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9997 \\ 2.0003 \\ 2.9994 \end{Bmatrix} \tag{B.60}$$

Esta solución es muy cercana a la solución exacta:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \tag{B.61}$$

La inexactitud de la solución mostrada es una función de los errores de redondeo. Se puede alcanzar más exactitud empleando un mayor número de cifras significativas en el proceso.

B.8 TEMAS ESPECIALES

Subdivisión de matrices

La manipulación de las ecuaciones matriciales es con frecuencia más sencilla si se dividen las matrices en matrices más pequeñas, llamadas *subdivisiones* o *subunidades*. En este libro, la subdivisión se indica por medio de líneas horizontales y verticales colocadas entre los renglones y las columnas de las matrices. Se muestran en seguida ejemplos de matrices que han sido subdivididas:

$$\begin{aligned} [A] &= \left[\begin{array}{cc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \hline a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array}\right] \\ \lfloor A \rfloor &= \lfloor\, a_1 \;\; a_2 \mid a_3 \,\rfloor \\ \{A\} &= \left\{\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \hline a_3 \end{array}\right\} \end{aligned} \tag{B.62}$$

La subdivisión de una ecuación matricial es:

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \hline a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \hline b_3 \end{array}\right\} \tag{B.63}$$

Nótese que las líneas horizontales de subdivisión en la ecuación B.63 se extienden entre los mismos dos renglones de cada matriz en la ecuación. Además, los números de las columnas que definen la línea vertical de subdivisión en la matriz cuadrada son los mismos que los números de los renglones que definen las líneas de subdivisión horizontal para la ecuación completa. Así, si las líneas de subdivisión horizontal corren entre el segundo y el tercer renglones, entonces la línea de subdivisión vertical corre entre la segunda y la tercera columnas de la matriz cuadrada.

Como un ejemplo del uso de la subdivisión, consideremos la misma ecuación matricial descrita en la ecuación B.63:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 5 & 3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 13 \\ 19 \\ \hline 22 \end{array}\right\} \tag{B.64}$$

En la ecuación B.64 se han trazado líneas de subdivisión entre el segundo y el tercer renglones de cada matriz, y entre la segunda y la tercera columnas de la matriz [A]. Cuando ésta se subdivide, las subunidades, en general, son aún matrices y se manipulan como tales. Sin embargo, en este problema una de las subunidades es una matriz de 1×1, que puede tratarse como un escalar. La ecuación matricial original puede ahora escribirse como dos ecuaciones matriciales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} x_3 = \begin{Bmatrix} 13 \\ 19 \end{Bmatrix} \tag{B.65}$$

y

$$\lfloor 1 \quad 5 \rfloor \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + 3x_3 = 22 \tag{B.66}$$

La ecuación B.66 puede resolverse para x_3 en términos de x_1 y x_2 como:

$$\begin{aligned} 3x_3 &= 22 - \lfloor 1 \quad 5 \rfloor \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\ x_3 &= \frac{22}{3} - \frac{1}{3} \lfloor 1 \quad 5 \rfloor \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{B.67}$$

El valor de x_3 obtenido de la ecuación B.67 se sustituye en la ecuación B.65 y la ecuación resultante se resuelve para x_1 y x_2:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \left(\frac{22}{3} - \frac{1}{3} \lfloor 1 \quad 5 \rfloor \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \right) &= \begin{Bmatrix} 13 \\ 19 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 13 \\ 19 \end{Bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 66 \\ 88 \end{Bmatrix} \\ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 2 & -11 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} -27 \\ -31 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 2 & -11 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -27 \\ -31 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{B.68}$$

Los valores de x_1 y x_2 determinados por la ecuación B.68 pueden ahora sustituirse en la ecuación B.67 para obtener el valor de x_3:

$$x_3 = \frac{22}{3} - \frac{1}{3}\lfloor 1 \quad 5 \rfloor \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3}(22 - 16) = 2 \tag{B.69}$$

Una ventaja obvia de la subdivisión es que se reduce el orden de las matrices para las que hay que encontrar inversas. Sin embargo, esta ventaja se ve afectada por el hecho de que se requieren operaciones algebraicas adicionales al usar las subdivisiones. No obstante, la subdivisión de las ecuaciones matriciales se usa extensamente en la solución de problemas estructurales por computadora.

Diferenciación e integración de una matriz

Previamente en este apéndice, una matriz se definió como un arreglo ordenado de números en renglones y en columnas. Aunque los elementos de una matriz por lo general son constantes, en algunas ocasiones pueden ser variables, como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3x & -x^2 & 2x^4 \\ -x^2 & 5x^3 & 7x \\ 2x^4 & 7x & 2x^2 \end{bmatrix} \tag{B.70}$$

La diferencial de la matriz [A] con respecto a x se determina diferenciando cada elemento de la matriz con respecto a x. En seguida se muestra el resultado para este ejemplo:

$$\frac{d}{dx}[A] = \begin{bmatrix} 3 & -2x & 8x^3 \\ -2x & 15x^2 & 7 \\ 8x^3 & 7 & 4x \end{bmatrix} \tag{B.71}$$

Los elementos de [A] son funciones de más de una variable (digamos de x y y). La diferenciación parcial de la matriz [A] con respecto a x o a y se efectúa en forma similar, diferenciando parcialmente cada elemento de la matriz con respecto a esa variable.

De igual manera, la integración de una matriz se efectúa integrando cada elemento de la matriz. Así, para la matriz [A] dada por la ecuación (1) la integración proporciona los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \int_a^b [A]\,dx &= \begin{bmatrix} \frac{3x^2}{2} & \frac{-x^3}{3} & \frac{2x^5}{5} \\ \frac{-x^3}{3} & \frac{5x^4}{4} & \frac{7x^2}{2} \\ \frac{2x^5}{5} & \frac{7x^2}{2} & \frac{2x^3}{3} \end{bmatrix}_a^b \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3(b^2-a^2)}{2} & \frac{-(b^3-a^3)}{3} & \frac{2(b^5-a^5)}{5} \\ \frac{-(b^3-a^3)}{3} & \frac{5(b^4-a^4)}{4} & \frac{7(b^2-a^2)}{2} \\ \frac{2(b^5-a^5)}{5} & \frac{7(b^2-a^2)}{2} & \frac{2(b^3-a^3)}{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{B.72}$$

Vale la pena destacar una aplicación especial de la diferenciación de matrices debido a su frecuente aparición en el desarrollo de la teoría estructural. Supóngase que una variable escalar U se define en términos de un triple producto matricial:

$$U = \tfrac{1}{2}\lfloor x \rfloor [A]\{x\} \tag{B.73}$$

donde $\{x\}$ es una matriz columna que consta de n variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La matriz cuadrada [A] es una matriz simétrica. Si U se diferencia sucesivamente con respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y los resultados se arreglan en una matriz columna, el resultado es bastante sencillo:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_n} \end{Bmatrix} = [A]\{x\} \tag{B.74}$$

Otra diferenciación presenta:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = a_{i,j} \tag{B.75}$$

donde $a_{i,j}$ son los elementos de la matriz original [A]. Aunque la prueba de la ecuación (B.74) no se da aquí, un simple ejemplo bastará para comprobar su exactitud. Consideremos el siguiente triple producto matricial:

$$U = \tfrac{1}{2}\lfloor x_1 \quad x_2 \rfloor \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{B.76}$$

Al expandir U el resultado es

$$U = \tfrac{1}{2}(2x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2) \tag{B.77}$$

Al diferenciar U sucesivamente con respecto a x_1 y x_2 se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 2x_1 + 4x_2 \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= 4x_1 + 3x_2 \end{aligned} \tag{B.78}$$

Al disponer en forma matricial estos resultados se determina:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{B.79}$$

Este resultado corresponde a la ecuación B.74. Al diferenciar una vez más se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} &= 2 \qquad & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 x_2} &= 4 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 x_1} &= 4 \qquad & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} &= 3 \end{aligned} \tag{B.80}$$

Estos resultados concuerdan con la ecuación B.75.

La forma resultante del triple producto matricial dado por la ecuación B.73 se llama a veces *forma cuadrática* (debido a la aparición de las variables de segundo orden en el producto matricial). Las formas cuadráticas se encuentran con frecuencia en la teoría estructural cuando se emplea la energía de deformación para determinar la matriz de rigidez. Aunque las formas cuadráticas no se han empleado en este libro, el tema es importante en tratamientos más avanzados de la teoría estructural y se incluye aquí como futura referencia para los lectores interesados.

Apéndice C

Cargas eólica, sísmica y de nieve Tablas y figuras

TABLA C.1 CLASIFICACIÓN DE EDIFICIOS Y OTRAS ESTRUCTURAS PARA CARGAS DE INUNDACIÓN, VIENTO, NIEVE, TERREMOTO Y HIELO

Naturaleza de la ocupación	Categoría
Edificios y otras estructuras que representan un bajo riesgo para la vida humana en caso de falla incluyendo, pero no limitado a: ▪ Instalaciones agrícolas ▪ Ciertas instalaciones temporales ▪ Instalaciones menores de almacenaje	I
Todos los edificios y otras estructuras excepto aquellas listadas en las Categorías I, III y IV	II
Edificios y otras estructuras que representan un riesgo considerable para la vida humana en caso de falla incluyendo, pero no limitado a: ▪ Edificios y otras estructuras donde más de 300 personas se congregan en un área ▪ Edificios y otras estructuras con instalaciones de guardería con capacidad mayor a 150 ▪ Edificios y otras estructuras con instalaciones de escuela primaria o escuela secundaria con capacidad mayor a 250 ▪ Edificios y otras estructuras con una capacidad mayor de 500 para universidades o instalaciones de educación para adultos ▪ Instalaciones de salud con una capacidad de 50 o más pacientes residentes pero que no tengan instalaciones de cirugía o de tratamiento de emergencia ▪ Cárceles y reclusorios ▪ Estaciones de generación de energía y otras instalaciones de utilidad pública que no se incluyen en la Categoría IV Edificios y otras estructuras que no se incluyen en la Categoría IV (incluyendo, pero no limitado a instalaciones que manufacturan, procesan, manejan, almacenan, usan o disponen de sustancias tales como combustibles peligrosos, químicos peligrosos, residuos peligrosos o explosivos) que contienen suficientes cantidades de materiales peligrosos como para ser un riesgo para el público si se liberan. Los edificios y otras estructuras que contienen materiales peligrosos serán candidatos para clasificarse como estructuras de Categoría II si puede demostrarse a satisfacción de la autoridad que tenga jurisdicción mediante una evaluación de riesgo como se describe en la sección 1.5.2 de que una liberación del material peligroso no representa una amenaza para el público.	III
Edificios y otras estructuras diseñadas como instalaciones esenciales incluyendo, pero no limitado a: ▪ Hospitales y otras instalaciones de cuidado de la salud que tengan instalaciones de cirugía o de tratamiento de emergencia ▪ Estaciones de bomberos, rescate, ambulancias y de policía y garajes de vehículos de emergencia ▪ Refugios designados contra terremoto, huracanes u otros refugios de emergencia ▪ Centros designados para la alerta de emergencias, comunicaciones, y de operaciones y otras instalaciones que se requieren para una respuesta de emergencia ▪ Estaciones de generación de energía y otras instalaciones de utilidad pública que se requieren en una emergencia ▪ Estructuras auxiliares (incluyendo, pero no limitado a, torres de comunicación, tanques de almacenaje de combustibles, torres de enfriamiento, estructuras de subestaciones eléctricas, tanques de almacenaje de agua contra incendio u otras estructuras que alojan o sustentan agua u otro material o equipo de combate de incendios) que se requieren para la operación de estructuras de Categoría IV durante una emergencia ▪ Torres de control aéreo, centros de control de tráfico aéreo y hangares de aeronaves de emergencia ▪ Instalaciones de almacenamiento de agua y estructuras de bombeo que se requieren para mantener agua presurizada para la extinción de incendios ▪ Edificios y otras estructuras que tengan funciones críticas de la defensa nacional Edificios y otras estructuras (incluyendo, pero no limitado a, instalaciones que manufacturan, procesan, manejan, almacenan, usan o disponen de sustancias tales como combustibles peligrosos, químicos peligrosos, residuos peligrosos o explosivos) que contengan materiales en extremo peligrosos cuando la cantidad del material sobrepase a una cantidad de umbral establecida por la autoridad que tenga jurisdicción. Los edificios y otras estructuras que contengan materiales en extremo peligrosos serán candidatos para clasificarse como estructuras de Categoría II si puede demostrarse a satisfacción de la autoridad que tenga jurisdicción mediante una evaluación de riesgo como se describe en la sección 1.5.2 de que una liberación del material peligroso no representa una amenaza para el público. Esta clasificación reducida no se permitirá si los edificios o las otras estructuras también funcionan como instalaciones esenciales.	IV

Fuente: American Society of Civil Engineers, Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, ASCE 7-02, 2002. Reproducido con autorización de la American Society of Civil Engineers.

TABLA C.2 CATEGORÍAS DE RUGOSIDAD SUPERFICIAL

Rugosidad superficial B: Áreas urbanas y suburbanas, áreas boscosas u otro terreno con numerosos obstáculos poco espaciados que tengan el tamaño de viviendas unifamiliares o más grandes.

Rugosidad superficial C: Terreno llano con obstáculos dispersos que tengan alturas generalmente menores de 30 pies (9.1 m). Esta categoría incluye al campo abierto plano, pastizales y todas las superficies hidráulicas en regiones propensas a los huracanes.

Rugosidad superficial D: Áreas planas sin obstáculos y superficie hidráulicas fuera de las regiones propensas a huracanes. Esta categoría incluye planicies lisas de lodo, planicies salinas y hielo sin fragmentar.

Nota: Anteriormente existía una Categoría A para áreas urbanas muy densas pero ha sido eliminada por la ASCE.

TABLA C.3 FACTOR DE AJUSTE PARA LA ALTURA Y LA EXPOSICIÓN DEL EDIFICIO, λ

Altura media del techo (pies)	Exposición		
	B	C	D
15	1.00	1.21	1.47
20	1.00	1.29	1.55
25	1.00	1.35	1.61
30	1.00	1.40	1.66
35	1.05	1.45	1.70
40	1.09	1.49	1.74
45	1.12	1.53	1.78
50	1.16	1.56	1.81
55	1.19	1.59	1.84
60	1.22	1.62	1.87

Conversión de unidades: 1.0 pie = 0.3048 m.

TABLA C.4 FACTOR DE IMPORTANCIA, I

Categoría	Regiones no propensas a huracanes y regiones propensas a huracanes con V = 85 – 100 millas por hora y Alaska	Regiones propensas a huracanes con V > 100 millas por hora
I	0.87	0.77
II	1.00	1.00
III	1.15	1.15
IV	1.15	1.15

Nota: Las categorías de clasificación de edificio y de estructura se listan en la Tabla C.1

Fuente: American Society of Civil Engineers, Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, ASCE 7-02, 2002. Reproducido con autorización de la American Society of Civil Engineers.

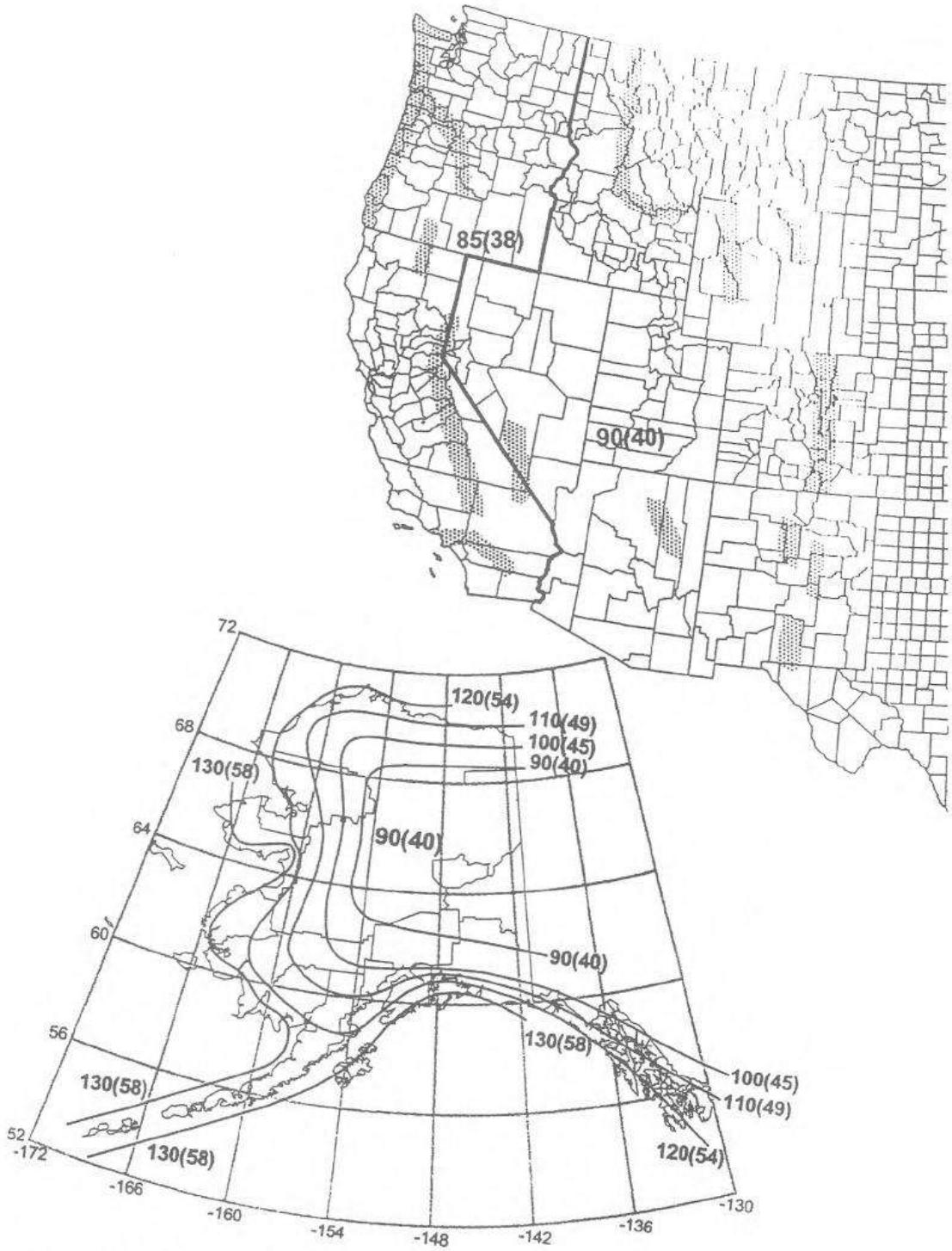
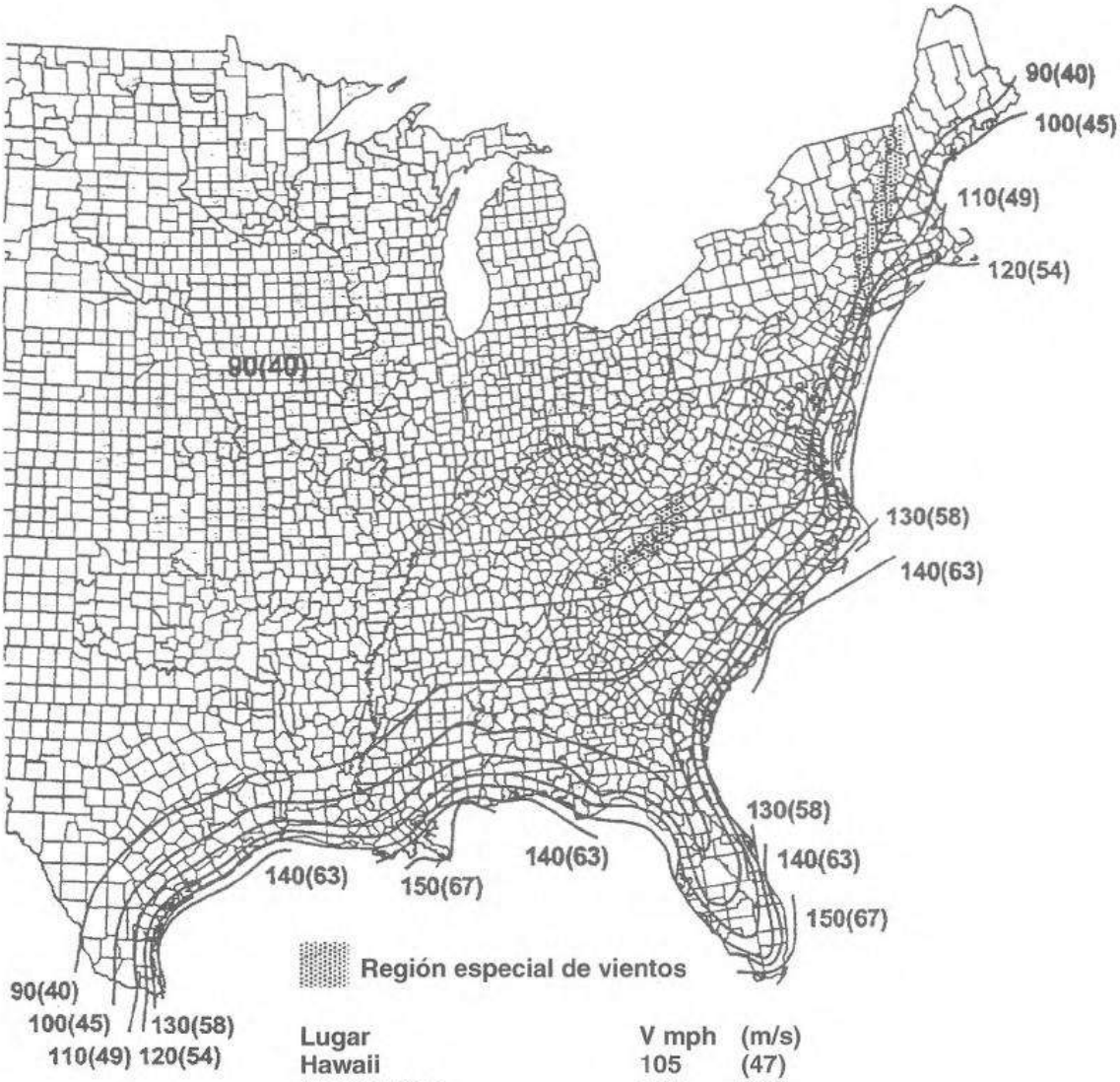


Figura C.1 Velocidad básica del viento.

Fuente: American Society of Civil Engineers, Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, ASCE 7-02, 2002. Reproducido con autorización de la American Society of Civil Engineers.



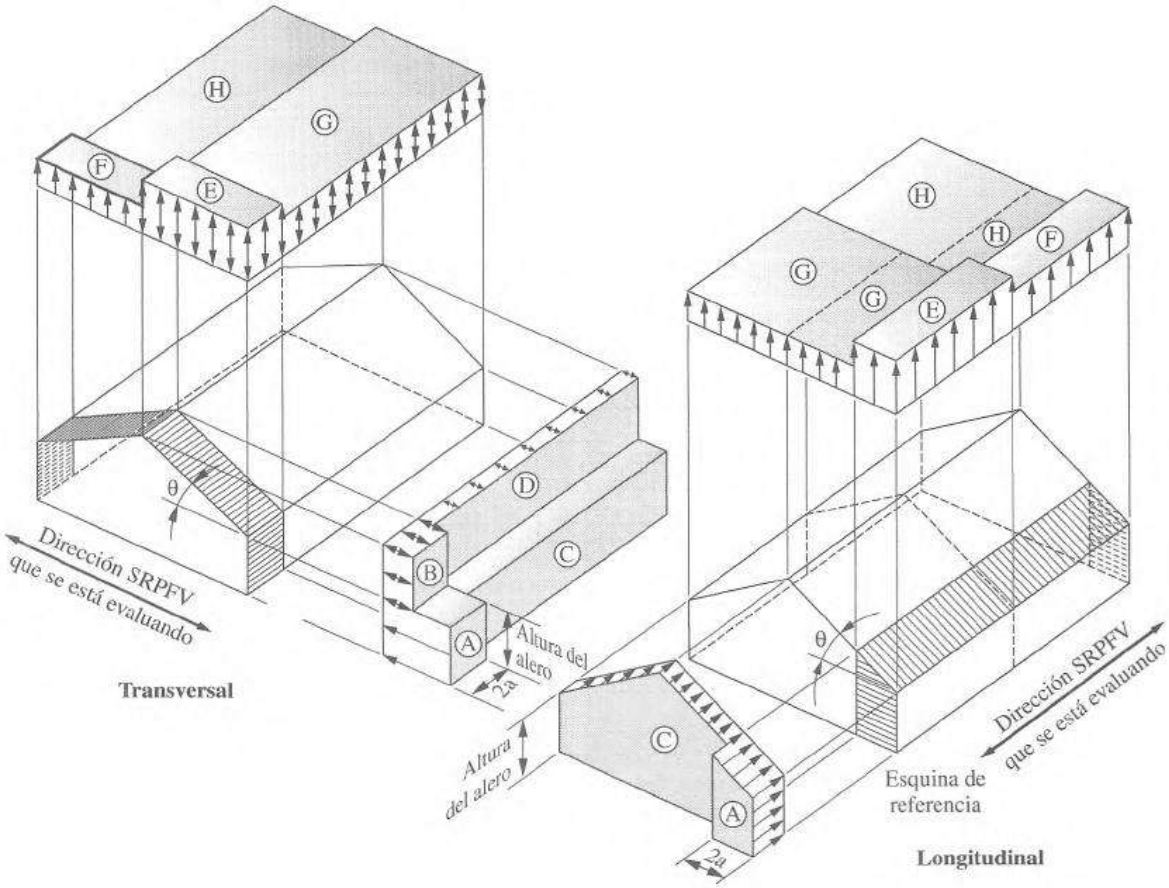
Lugar	V mph	(m/s)
Hawaii	105	(47)
Puerto Rico	145	(65)
Guam	170	(76)
Islas Vírgenes	145	(65)
Samoa estadounidense	125	(56)

Notas:

1. Los valores son velocidades de viento en ráfaga de diseño de 3 segundos en millas por hora (m/h) a 33 pies (10 m) arriba del terreno para una categoría de exposición C.
2. Se permite la interpolación lineal entre curvas isoeólicas.
3. Para las islas y áreas costeras fuera de la última curva isoeólica se usará la última curva de velocidad del viento del área costera.
4. Se examinarán los terrenos montañosos, los desfiladeros, los promontorios en los océanos y las regiones eólicas especiales para las condiciones extraordinarias de viento.

Figura C.1 *(Continuación)*

Figura C.2 Sistema resistente a la principal fuerza del viento – Método 1.



Presión del viento simplificada de diseño, P_{S30} (lb/pie^2). (*Exposición B h = 30 pies con I = 1.0.*)

Velocidad básica del viento (mph)	Ángulo del techo (grados)	Caso de carga	Zonas									
			Presiones horizontales				Presiones verticales				Saledizos	
			A	B	C	D	E	F	G	H	EOH	GOH
85	0 a 5°	1	11.5	−5.9	7.6	−3.5	−13.8	−7.8	−9.6	−6.1	−19.3	−15.1
	10°	1	12.9	−5.4	8.6	−3.1	−13.8	−8.4	−9.6	−6.5	−19.3	−15.1
	15°	1	14.4	−4.8	9.6	−2.7	−13.8	−9.0	−9.6	−6.9	−19.3	−15.1
	20°	1	15.9	−4.2	10.6	−2.3	−13.8	−9.6	−9.6	−7.3	−19.3	−15.1
	25°	1	14.4	2.3	10.4	2.4	−6.4	−8.7	−4.6	−7.0	−11.9	−10.1
		2	—	—	—	—	−2.4	−4.7	−0.7	−3.0	—	—
	30 a 45	1	12.9	8.8	10.2	7.0	1.0	−7.8	0.3	−6.7	−4.5	−5.2
		2	12.9	8.8	10.2	7.0	5.0	−3.9	4.3	−2.8	−4.5	−5.2
90	0 a 5°	1	12.8	−6.7	8.5	−4.0	−15.4	−8.8	−10.7	−6.8	−21.6	−16.9
	10°	1	14.5	−6.0	9.6	−3.5	−15.4	−9.4	−10.7	−7.2	−21.6	−16.9
	15°	1	16.1	−5.4	10.7	−3.0	−15.4	−10.1	−10.7	−7.7	−21.6	−16.9
	20°	1	17.8	−4.7	11.9	−2.6	−15.4	−10.7	−10.7	−8.1	−21.6	−16.9
	25°	1	16.1	2.6	11.7	2.7	−7.2	−9.8	−5.2	−7.8	−13.3	−11.4
		2	—	—	—	—	−2.7	−5.3	−0.7	−3.4	—	—
	30 a 45	1	14.4	9.9	11.5	7.9	1.1	−8.8	0.4	−7.5	−5.1	−5.8
		2	14.4	9.9	11.5	7.9	5.6	−4.3	4.8	−3.1	−5.1	−5.8

Fuente: American Society of Civil Engineers, Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, ASCE 7-02, 2002. Reproducido con autorización de la American Society of Civil Engineers.

Figura C.2 *(Continuación)*

Velocidad básica del viento (mph)	Ángulo del techo (grados)	Caso de carga	Zonas									
			Presiones horizontales				Presiones verticales				Saledizos	
			A	B	C	D	E	F	G	H	EOH	GOH
100	0 a 5°	1	15.9	−8.2	10.5	−4.9	−19.1	−10.8	−13.3	−8.4	−26.7	−20.9
	10°	1	17.9	−7.4	11.9	−4.3	−19.1	−11.6	−13.3	−8.9	−26.7	−20.9
	15°	1	19.9	−6.6	13.3	−3.8	−19.1	−12.4	−13.3	−9.5	−26.7	−20.9
	20°	1	22.0	−5.8	14.6	−3.2	−19.1	−13.3	−13.3	−10.1	−26.7	−20.9
	25°	1	19.9	3.2	14.4	3.3	−8.8	−12.0	−6.4	−9.7	−16.5	−14.0
		2	—	—	—	—	−3.4	−6.6	−0.9	−4.2	—	—
	30 a 45	1	17.8	12.2	14.2	9.8	1.4	−10.8	0.5	−9.3	−6.3	−7.2
		2	17.8	12.2	14.2	9.8	6.9	−5.3	5.9	−3.8	−6.3	−7.2
110	0 a 5°	1	19.2	−10.0	12.7	−5.9	−23.1	−13.1	−16.0	−10.1	−32.3	−25.3
	10°	1	21.6	−9.0	14.4	−5.2	−23.1	−14.1	−16.0	−10.8	−32.3	−25.3
	15°	1	24.1	−8.0	16.0	−4.6	−23.1	−15.1	−16.0	−11.5	−32.3	−25.3
	20°	1	26.6	−7.0	17.7	−3.9	−23.1	−16.0	−16.0	−12.2	−32.3	−25.3
	25°	1	24.1	3.9	17.4	4.0	−10.7	−14.6	−7.7	−11.7	−19.9	−17.0
		2	—	—	—	—	−4.1	−7.9	−1.1	−5.1	—	—
	30 a 45	1	21.6	14.8	17.2	11.8	1.7	−13.1	0.6	−11.3	−7.6	−8.7
		2	21.6	14.8	17.2	11.8	8.3	−6.5	7.2	−4.6	−7.6	−8.7
120	0 a 5°	1	22.8	−11.9	15.1	−7.0	−27.4	−15.6	−19.1	−12.1	−38.4	−30.1
	10°	1	25.8	−10.7	17.1	−6.2	−27.4	−16.8	−19.1	−12.9	−38.4	−30.1
	15°	1	28.7	−9.5	19.1	−5.4	−27.4	−17.9	−19.1	−13.7	−38.4	−30.1
	20°	1	31.6	−8.3	21.1	−4.6	−27.4	−19.1	−19.1	−14.5	−38.4	−30.1
	25°	1	28.6	4.6	20.7	4.7	−12.7	−17.3	−9.2	−13.9	−23.7	−20.2
		2	—	—	—	—	−4.8	−9.4	−1.3	−6.0	—	—
	30 a 45	1	25.7	17.6	20.4	14.0	2.0	−15.6	0.7	−13.4	−9.0	−10.3
		2	25.7	17.6	20.4	14.0	9.9	−7.7	8.6	−5.5	−9.0	−10.3
130	0 a 5°	1	26.8	−13.9	17.8	−8.2	−32.2	−18.3	−22.4	−14.2	−45.1	−35.3
	10°	1	30.2	−12.5	20.1	−7.3	−32.2	−19.7	−22.4	−15.1	−45.1	−35.3
	15°	1	33.7	−11.2	22.4	−6.4	−32.2	−21.0	−22.4	−16.1	−45.1	−35.3
	20°	1	37.1	−9.8	24.7	−5.4	−32.2	−22.4	−22.4	−17.0	−45.1	−35.3
	25°	1	33.6	5.4	24.3	5.5	−14.9	−20.4	−10.8	−16.4	−27.8	−23.7
		2	—	—	—	—	−5.7	−11.1	−1.5	−7.1	—	—
	30 a 45	1	30.1	20.6	24.0	16.5	2.3	−18.3	0.8	−15.7	−10.6	−12.1
		2	30.1	20.6	24.0	16.5	11.6	−9.0	10.0	−6.4	−10.6	−12.1
140	0 a 5°	1	31.1	−16.1	20.6	−9.6	−37.3	−21.2	−26.0	−16.4	−52.3	−40.9
	10°	1	35.1	−14.5	23.3	−8.5	−37.3	−22.8	−26.0	−17.5	−52.3	−40.9
	15°	1	39.0	−12.9	26.0	−7.4	−37.3	−24.4	−26.0	−18.6	−52.3	−40.9
	20°	1	43.0	−11.4	28.7	−6.3	−37.3	−26.0	−26.0	−19.7	−52.3	−40.9
	25°	1	39.0	6.3	28.2	6.4	−17.3	−23.6	−12.5	−19.0	−32.3	−27.5
		2	—	—	—	—	−6.6	−12.8	−1.8	−8.2	—	—
	30 a 45	1	35.0	23.9	27.8	19.1	2.7	−21.2	0.9	−18.2	−12.3	−14.0
		2	35.0	23.9	27.8	19.1	13.4	−10.5	11.7	−7.5	−12.3	−14.0
150	0 a 5°	1	35.7	−18.5	23.7	−11.0	−42.9	−24.4	−29.8	−18.9	−60.0	−47.0
	10°	1	40.2	−16.7	26.8	−9.7	−42.9	−26.2	−29.8	−20.1	−60.0	−47.0
	15°	1	44.8	−14.9	29.8	−8.5	−42.9	−28.0	−29.8	−21.4	−60.0	−47.0
	20°	1	49.4	−13.0	32.9	−7.2	−42.9	−29.8	−29.8	−22.6	−60.0	−47.0
	25°	1	44.8	7.2	32.4	7.4	−19.9	−27.1	−14.4	−21.8	−37.0	−31.6
		2	—	—	—	—	−7.5	−14.7	−2.1	−9.4	—	—
	30 a 45	1	40.1	27.4	31.9	22.0	3.1	−24.4	1.0	−20.9	−14.1	−16.1
		2	40.1	27.4	31.9	22.0	15.4	−12.0	13.4	−8.6	−14.1	−16.1
170	0 a 5°	1	45.8	−23.8	30.4	−14.1	−55.1	−31.3	−38.3	−24.2	−77.1	−60.4
	10°	1	51.7	−21.4	34.4	−12.5	−55.1	−33.6	−38.3	−25.8	−77.1	−60.4
	15°	1	57.6	−19.1	38.3	−10.9	−55.1	−36.0	−38.3	−27.5	−77.1	−60.4
	20°	1	63.4	−16.7	42.3	−9.3	−55.1	−38.3	−38.3	−29.1	−77.1	−60.4
	25°	1	57.5	9.3	41.6	9.5	−25.6	−34.8	−18.5	−28.0	−47.6	−40.5
		2	—	—	—	—	−9.7	−18.9	−2.6	−12.1	—	—
	30 a 45	1	51.5	35.2	41.0	28.2	4.0	−31.3	1.3	−26.9	−18.1	−20.7
		2	51.5	35.2	41.0	28.2	19.8	−15.4	17.2	−11.0	−18.1	−20.7

Conversión de unidades: 1.0 lb/pie^2 = 0.0479 kN/m^2

Fuente: American Society of Civil Engineers, Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, ASCE 7-02, 2002. Reproducido con autorización de la American Society of Civil Engineers.

Notas:

1. Las presiones mostradas se aplican a las proyecciones horizontal y vertical, para la exposición B, para $h = 30$ pies (9.1 m), para $I = 1.0$. Ajuste para otras exposiciones y alturas con el factor de ajuste λ.
2. Los patrones de carga mostrados se aplicarán a cada esquina del edificio que a su vez sea la esquina de referencia. (Véase la figura 6-10.)
3. Para el diseño del SRPFV use $\theta = 0°$, y localice la frontera de zona E/F, G/H a la mitad de la longitud del edificio.
4. Los casos de carga 1 y 2 deben revisarse para $25° < \theta \leq 45°$. El caso de carga 2 a 25° se proporciona solamente para la interpolación entre 25° a 30°.
5. Los signos más y menos implican a las presiones que actúan hacia y apartándose de las superficies proyectadas, respectivamente.
6. Para las inclinaciones de techo diferentes de las mostradas se permite la interpolación lineal.
7. La carga horizontal total no será menor que aquella determinada suponiendo $p_s = 0$ en las zonas B & D.
8. Las presiones de zona representan lo siguiente:
   Zonas de presión horizontal–Suma de las presiones netas de barlovento y sotavento (suma de presiones internas y externas) en la proyección vertical de:
   - A- Zona de extremo del muro
   - B- Zona de extremo del techo
   - C- Zona interior del muro
   - D- Zona interior del techo

   Zonas verticales–Presiones netas (suma de presiones internas y externas) en la proyección horizontal de:
   - E- Zona de extremo del techo a barlovento
   - F- Zona de extremo del techo a sotavento
   - G- Zona interior del techo a barlovento
   - H- Zona interior del techo a sotavento
9. Si la zona E o G se sitúan en un saledizo de techo en el lado de barlovento del edificio, use E_{OH} y G_{OH} para la presión sobre la proyección horizontal del saledizo. A los saledizos en las orillas a sotavento y lateral se les aplicará la presión básica de zona.
10. Notación:
    - a: 10 por ciento de la dimensión horizontal menor o 0.4h, el que sea menor, pero no menor que ya sea 4% de la dimensión horizontal menor o 3 pies (0.9 m).
    - h: Altura media del techo, en pies (metros), excepto que se usará la altura del alero para ángulos de techo $< 10°$.
    - θ: Ángulo del plano del techo con respecto a la horizontal, en grados.

Fuente: American Society of Civil Engineers, Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, ASCE 7-02, 2002. Reproducido con autorización de la American Society of Civil Engineers.

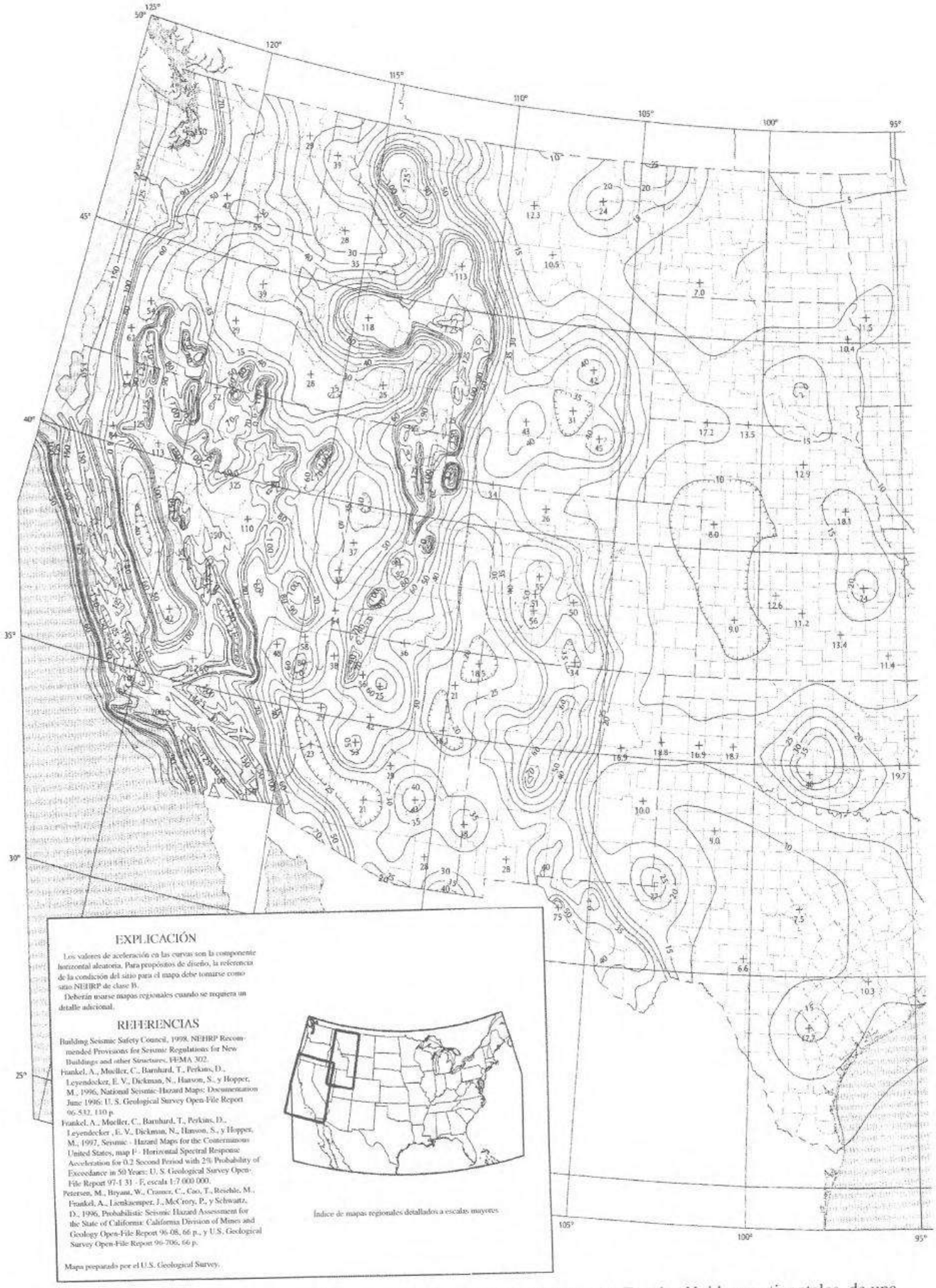


Figura C.3 Movimiento del suelo máximo considerado para un terremoto para Estados Unidos continentales, de una aceleración de respuesta espectral de 0.2 s (5% de amortiguamiento crítico), sitio clase B.

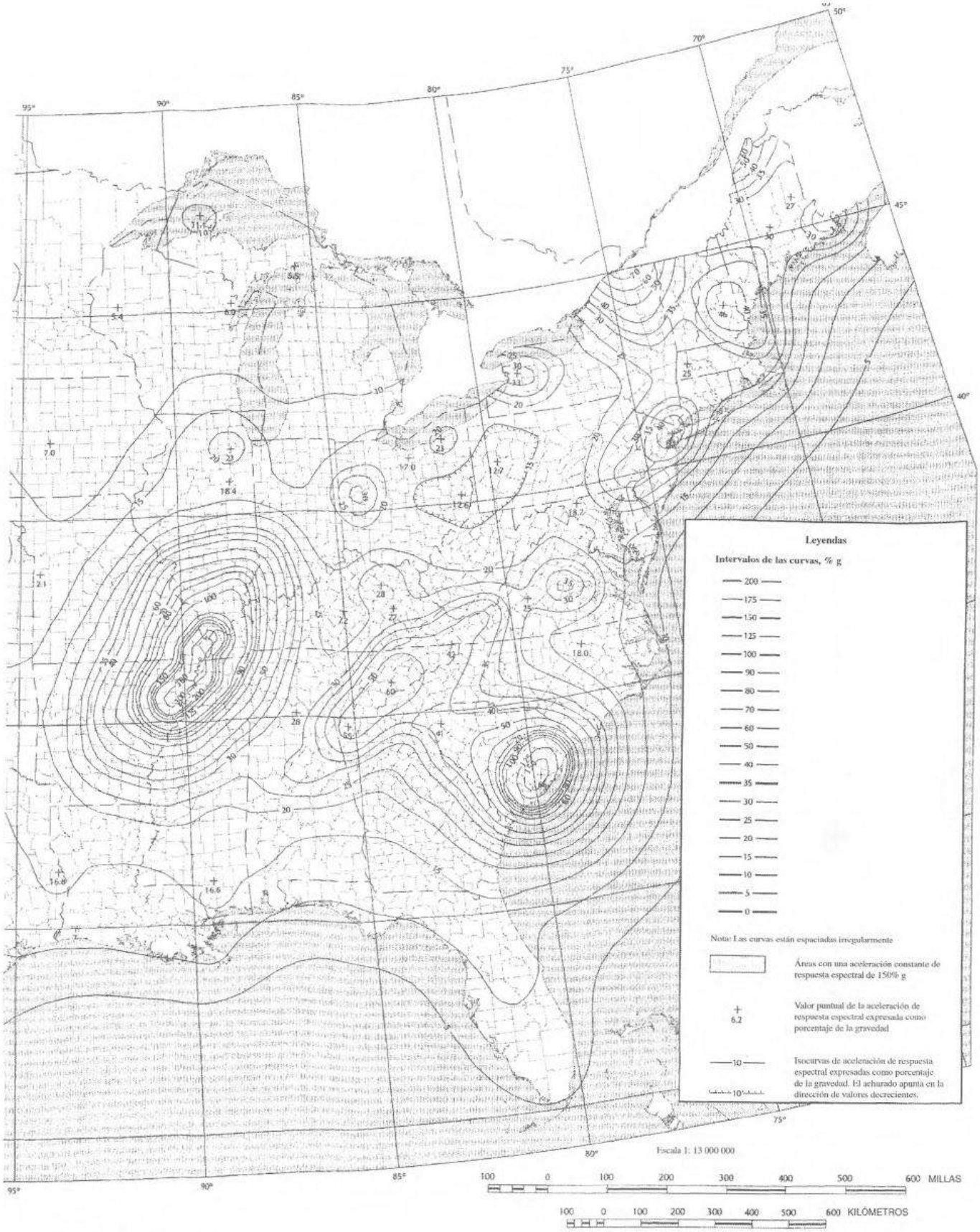


Figura C.3 *(Continuación)*

Fuente: American Society of Civil Engineers, Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, ASCE 7-02, 2002. Reproducido con autorización de la American Society of Civil Engineers.

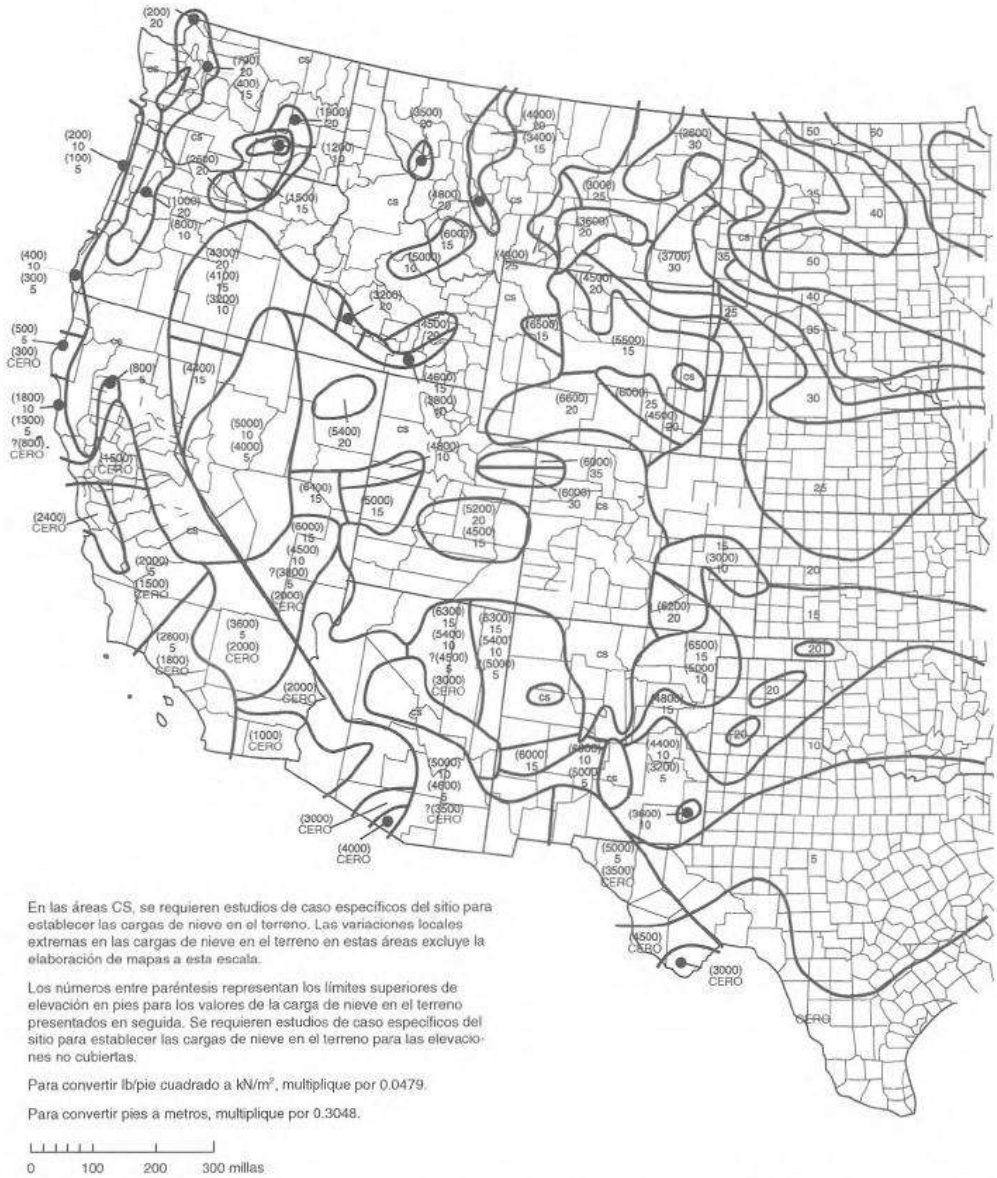


Figura C.4a Cargas de nieve en el terreno, p_g para la parte occidental de Estados Unidos (lb/pie^2).

Fuente: American Society of Civil Engineers, Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, ASCE 7-02, 2002. Reproducido con autorización de la American Society of Civil Engineers.

Figura C.4b Cargas de nieve en el terreno, p_g para la parte oriental de Estados Unidos (lb/pie^2).

Fuente: American Society of Civil Engineers, Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, ASCE 7-02, 2002. Reproducido con autorización de la American Society of Civil Engineers.

Apéndice D

Análisis por computadora de diversas estructuras con SAP2000

D.1 INTRODUCCIÓN

Como se mencionó en el capítulo 1, se dispone en nuestra plataforma, de una versión limitada del programa comercial ampliamente usado para estructuras, SAP2000. Es uno de los tipos generales de programas de computadora que el estudiante usará si trabaja para una compañía de diseño estructural después de titularse.

En este apéndice, se analizan seis tipos diferentes de estructuras con el software SAP2000. El autor presenta muy poca descripción de la entrada de datos para los problemas. Él supone que si usted lee las columnas HELP para cada uno de los tipos de problemas, entenderá fácilmente cómo hacer el análisis. Además, el usuario deberá observar que la entrada completa a la computadora para cada uno de los ejemplos está dada en la sección de ejemplo de SAP2000 en el sitio Web.

D.2 ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS PLANAS

En esta sección el autor presenta el análisis de una armadura plana con el ejemplo D.1. Se presentan varios comentarios en la parte de Soluciones del problema que deberán ser de utilidad para el estudiante al hacer el análisis.

EJEMPLO D.1

Usando SAP2000, determine las fuerzas en las barras de la armadura que se muestra en la figura D.1. Esta misma armadura se analizó anteriormente en el ejemplo 6.2 por el método de los nudos y en el ejemplo 7.5 por el método de secciones y nudos. Para este análisis las unidades usadas son kilolibras y pulgadas. Todas las barras tienen áreas transversales de 4 plg^2 y módulos de elasticidad de 29 000 klb/plg^2. Los momentos de inercia son constantes y pueden tomarse como 1.

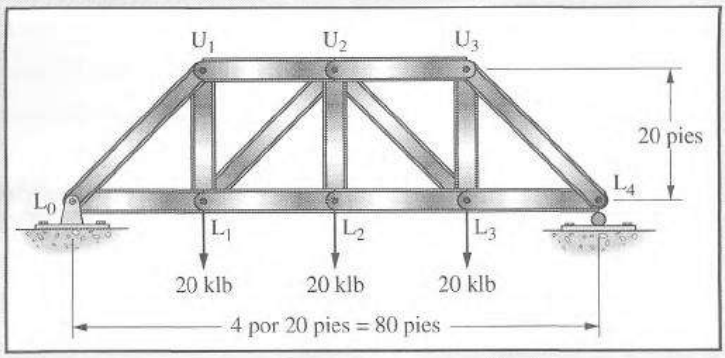


Figura D.1

Solución. Para iniciar el análisis el usuario debe asignar un número a cada uno de los miembros y de los nudos en la armadura. El esquema de numeración que se usa en este análisis se muestra en la figura D.2. Estos números se usan para identificar los nudos y las barras cuando se ingresan los datos a la computadora y se interpretan los resultados del análisis.

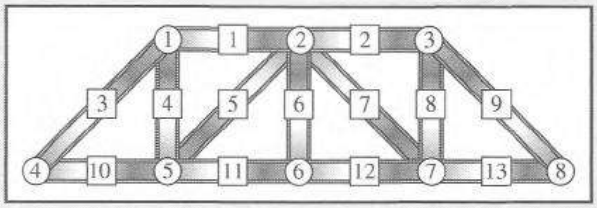


Figura D.2

Como no se consideran rotaciones en el análisis de las armaduras, se restringe el grado de libertad de las rotaciones en cada nudo. Además se restringen los grados de libertad de traslación X y Y en el nudo 4 y el grado de libertad de traslación Y en el nudo 8, ya que éstos son los apoyos estructurales. Se supone que una barra pasador-pasador está conectada con pasadores en ambos extremos. En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos de la computadora para las primeras cuatro barras.

Viga	Caso	Extremo	Axial	Fuerza cortante Y	Momento Z
1	1	i	30.00	0.0	0.0
		j	−30.00	0.0	0.0
2	1	i	30.00	0.0	0.0
		j	−30.00	0.0	0.0
3	1	i	42.43	0.0	0.0
		j	−42.43	0.0	0.0
4	1	i	−30.00	0.0	0.0
		j	30.00	0.0	0.0

Observe que la fuerza cortante y el momento flexionante en cada extremo de cada barra son iguales a cero. Esto es como se esperaba y es consistente con nuestra hipótesis acerca del comportamiento. También observe de los resultados calculados que la fuerza axial en uno de los extremos de cada barra es positiva mientras que la fuerza axial en el otro extremo es negativa. Para determinar si una barra está sujeta a tensión axial o a compresión axial debemos referirnos al sistema local de coordenadas especificado para la barra. De la información de HELP en SAP2000, podemos ver que el sistema local de coordenadas es como se muestra en la figura D.3. Éstas son las direcciones de fuerzas positivas en cada extremo de la barra.

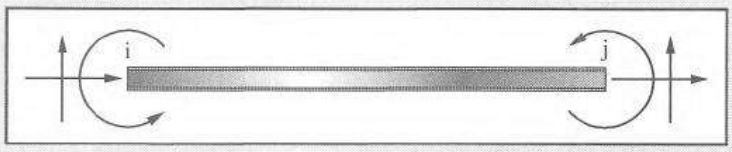


Figura D.3

A partir de este croquis del sistema local de coordenadas, deberá ser obvio que una fuerza axial positiva en el extremo izquierdo de la barra indica compresión axial mientras que una

fuerza axial positiva en el extremo derecho indica tensión axial. El autor usa el resultado indicado en el extremo derecho de la barra, el extremo j, para interpretar la magnitud y el sentido (tensión o compresión) de las fuerzas axiales en las barras. ■

D.3 ANÁLISIS DE ARMADURAS ESPACIALES

El análisis de las armaduras espaciales con SAP2000 se maneja casi de la misma manera como se hizo con la armadura plana del ejemplo D.1. El ejemplo D.2 ilustra este hecho.

EJEMPLO D.2

Analice la armadura espacial mostrada en la figura D.4 usando SAP2000.

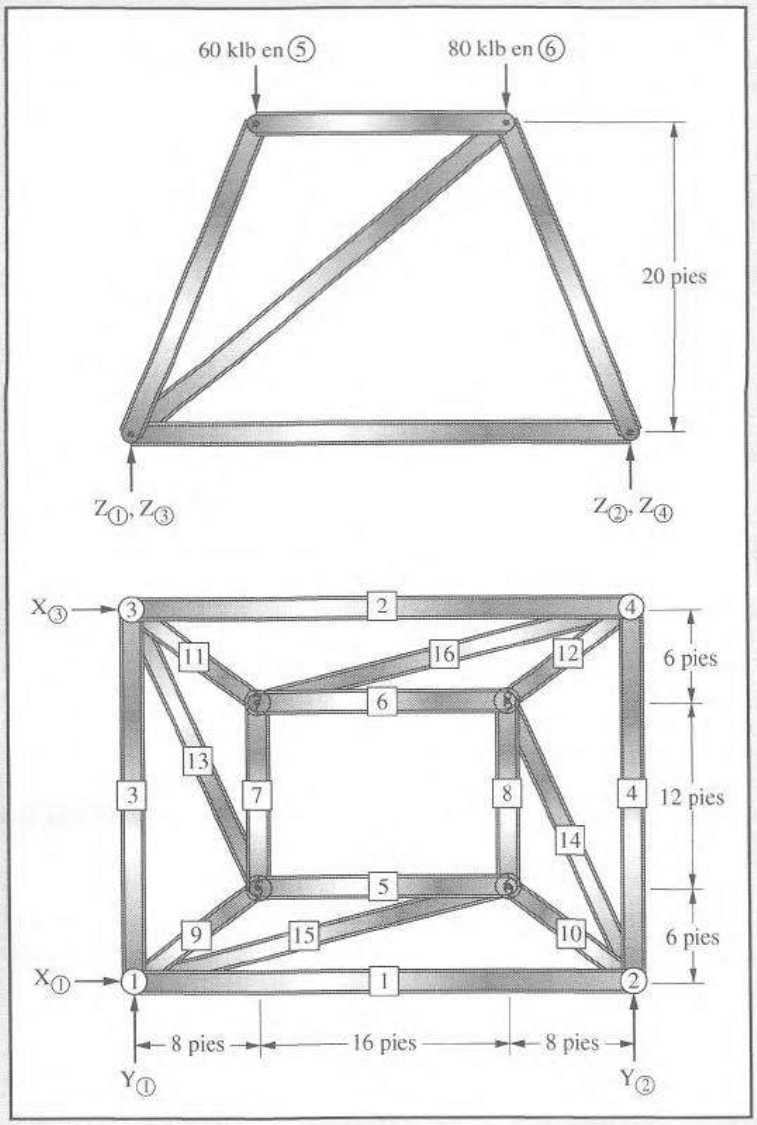


Figura D.4

Solución. Para analizar esta armadura usando SAP2000, debemos establecer primero la geometría estructural. Para hacerlo, establezca una retícula que tenga 4 espacios de 8 pies en la dirección x y cuatro espacios de 6 pies en la dirección y. Hay un espacio en la dirección z que tiene 20 pies de altura. En seguida, se designa la conectividad de los elementos como lo fue en el ejemplo D.1. En la figura se muestra la geometría de nudos y de elementos de marco. Una vez más, el archivo completo de datos de entrada está contenido en la carpeta del ejemplo con el programa tal como está dado en el sitio Web del libro.

Para analizar esta armadura, es necesario estudiar dos consideraciones de modelación. Primero, como se supone que los elementos de la armadura cargan solamente fuerza axial, es necesario que cada uno de los miembros en esta estructura tenga los extremos liberados contra la rotación en cada dirección. También es necesario que los miembros tengan la torsión liberada al inicio del miembro. Estas liberaciones conducirán a un miembro estable que solamente pueda sustentar carga axial.

Segundo, es necesario restringir los tres grados de libertad de rotación en cada uno de los nudos. A menos que se restrinjan, la computadora pensará que la estructura es inestable, lo que no es el caso. La restricción de estos grados de libertad no tiene efecto sobre las fuerzas en las barras, ya que las fuerzas de rotación no pueden transferirse a las barras debido a la manera en que hemos liberado los extremos. En la tabla siguiente se muestran las fuerzas en cada una de las barras.

Barra	Fuerza axial (k)	Barra	Fuerza axial (k)
1	22.00	9	−50.31
2	8.00	10	−83.85
3	13.50	11	0.00
4	6.00	12	−22.36
5	−24.00	13	−21.05
6	0.00	14	28.07
7	0.00	15	−7.95
8	−24.00	16	0.00

El usuario deberá exhibir la forma deformada en la pantalla de la computadora y luego ponerla en movimiento para desarrollar una comprensión de cómo se deforma la estructura bajo la carga. Esto se logra seleccionando la forma deformada del menú de exhibición y haciendo clic en el botón de animación en la esquina inferior derecha de la pantalla. ■

D.4 ANÁLISIS DE ARMADURAS PLANAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Las armaduras planas estáticamente indeterminadas se manejan con el programa SAP2000 de la misma manera en que se manejan las armaduras planas estáticamente determinadas. El ejemplo D.3 representa el análisis de una armadura plana que es estáticamente indeterminada internamente.

EJEMPLO D.3

Determine las fuerzas en la armadura de la figura D.5 usando SAP2000. Ésta es la misma armadura que se analizó anteriormente en el ejemplo 16.2. En la figura el número mostrado junto a cada barra es el área de esa barra (plg^2).

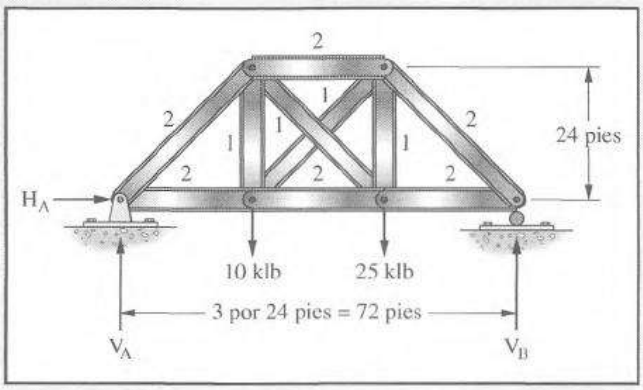


Figura D.5

Solución. Esta armadura se modeló en la figura D.6 de la misma manera que las armaduras en los capítulos anteriores. Se liberaron los grados de libertad de flexión en los extremos de cada barra, así como lo fueron los grados de libertad de torsión en el inicio de cada barra.

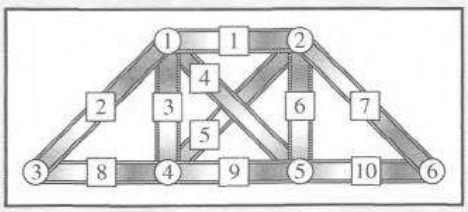


Figura D.6

Las fuerzas en las barras que resultaron del análisis se muestran en la tabla.

		Inicio		Final	
Barra	P	M	V	M	V
1	−21.54	0	0	0	0
2	−21.21	0	0	0	0
3	8.46	0	0	0	0
4	9.25	0	0	0	0
5	2.18	0	0	0	0
6	18.46	0	0	0	0
7	−28.28	0	0	0	0
8	15.00	0	0	0	0
9	13.46	0	0	0	0
10	20.00	0	0	0	0

■

D.5 ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS COMPUESTAS

En esta sección el autor usa el término estructura compuesta para representar una estructura que tiene diferentes tipos de miembros. Por ejemplo, en el ejemplo D.4 la estructura consiste en un miembro que es un cable y otro que es una viga.

EJEMPLO D.4

Usando SAP2000, determine la tensión total en el cable y las fuerzas cortantes y momentos flexionantes en la viga de la estructura mostrada en la figura D.7. Para esta estructura E es igual a 29 000 klb/plg^2.

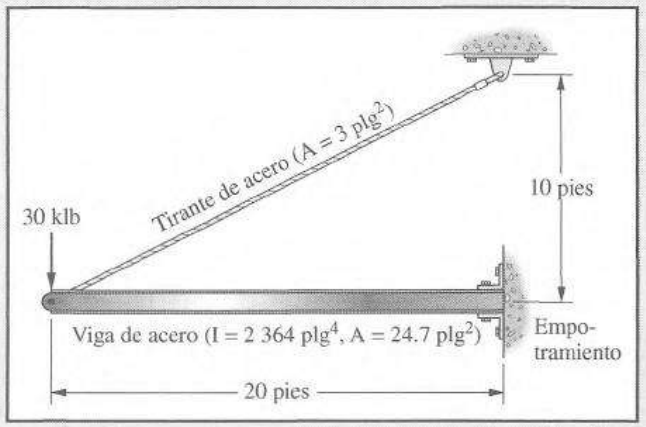


Figura D.7

Solución. El modelo de computadora que se usa en la solución de este problema se muestra en la figura D.8. El cable de acero se trata como un miembro de la armadura y como tal, se liberaron los grados de libertad de flexión en cada extremo del miembro, así como lo fue el grado de libertad de torsión en el inicio del miembro. Observe que el miembro 2 es una viga de acero.

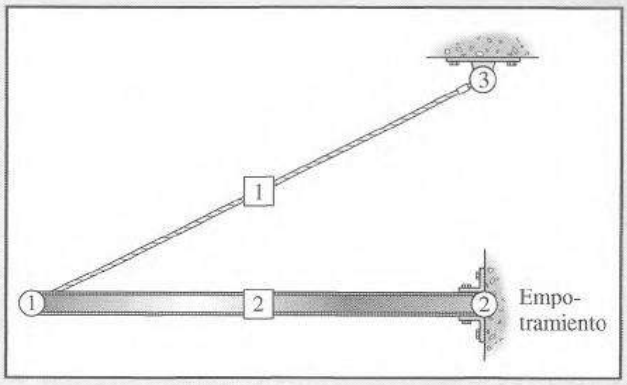


Figura D.8

Al hacer el análisis, las fuerzas en las barras se encuentran como sigue:

		Inicio		Final	
Barra	P	M	V	M	V
1	43.42	0	0	0	0
2	−34.73	0	3.95	−947.8	3.95

■

D.6 ANÁLISIS DE VIGAS Y MARCOS CONTINUOS

En esta sección se presentan los ejemplos D.5 y D.6. El primero de éstos es para una viga continua, mientras que el segundo es para un marco rígido.

EJEMPLO D.5

Determine los momentos finales para la viga de la figura D.9 usando SAP2000. Ésta es la viga anteriormente analizada por distribución de momentos en el ejemplo 20.6.

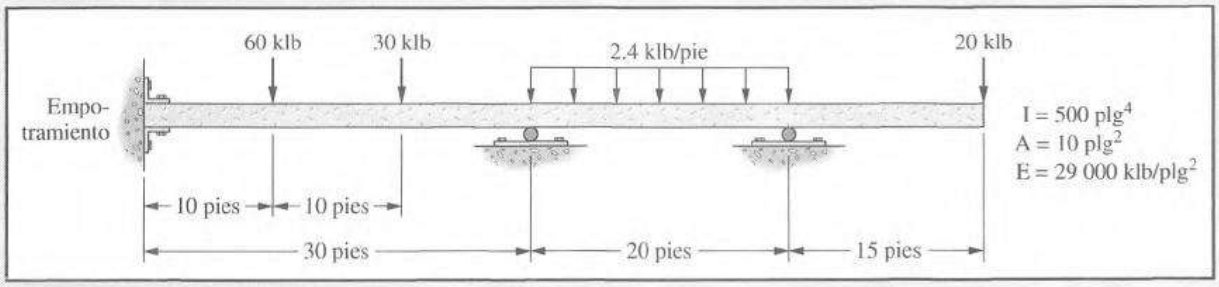


Figura D.9

Solución. El modelo estructural que se usa para la solución se muestra en la figura D.10. Observe que las cargas que actúan sobre los claros de la viga son una combinación de cargas puntuales y de cargas uniformemente distribuidas. Las propiedades de los miembros se especifican creando un nuevo tipo de sección llamado "general". El archivo de datos de entrada está disponible con el programa tal como se da en el sitio Web del libro.

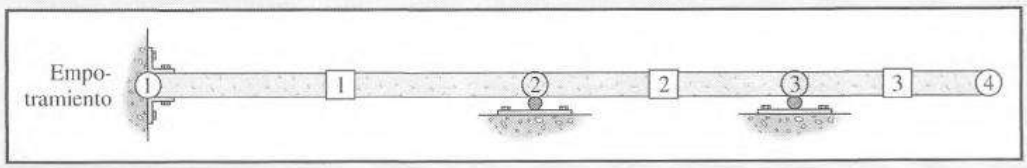


Figura D.10

Los resultados del análisis para los miembros de la viga se dan en la tabla que sigue. Observe que los resultados son los mismos que los que se obtuvieron con la distribución de momentos.

		Inicio		Final	
Barra	P	M	V	M	V
1	0.0	−4 835.9	−59.21	−1 523.4	30.79
2	0.0	−1 523.4	−15.35	−3 600.0	32.65
3	0.0	−3 600.0	−20.0	0.0	−20.0

■

En el ejemplo D.6 se analiza el marco con elementos inclinados de la figura D.11. El lector observará que se proporciona más información con esta solución de computadora que la que se obtiene directamente con la distribución de momentos. Con la distribución de momentos, sólo los momentos extremos se obtienen directamente y otras fuerzas como las cortantes, reacciones y fuerzas axiales se obtienen con cálculos adicionales. Toda esta información se obtiene al mismo tiempo con la solución de computadora.

EJEMPLO D.6

Determine los momentos extremos, las fuerzas cortantes y las fuerzas axiales en el marco de la figura D.11. Éste es el marco analizado anteriormente en el ejemplo 21.6.

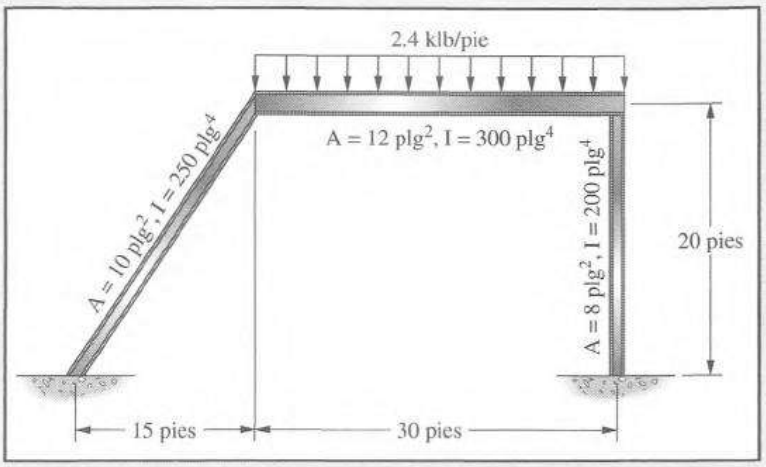


Figura D.11

Solución. El modelo de computadora que se usa para el análisis se muestra en la figura D.12. Éste es un marco rígido para el cual no hay liberaciones en los extremos de los miembros.

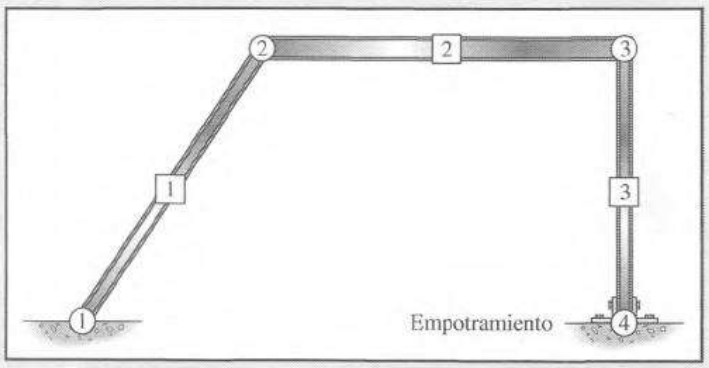


Figura D.12

Los resultados del análisis se resumen en la siguiente tabla:

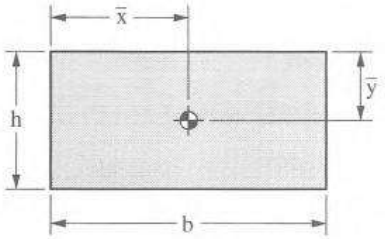
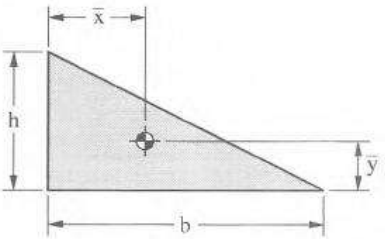
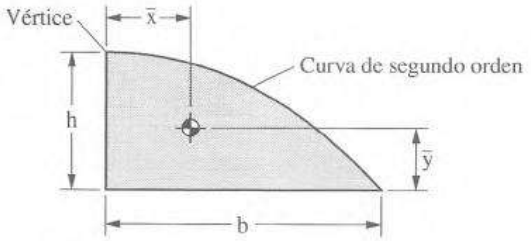
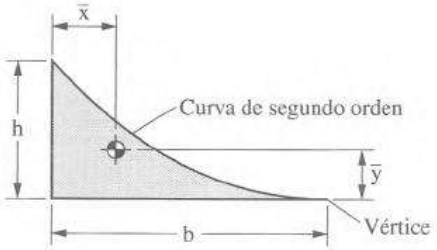
		Inicio		Final	
Barra	P	M	V	M	V
1	−35.24	−667.07	−1.59	−201.41	−1.59
2	−19.88	−201.41	−29.14	−2 670.04	42.86
3	−42.86	2 099.98	19.88	−2 067.04	19.88

■

Momentos de empotramiento en vigas

Carga en la viga	Momentos de empotramiento
Empotramiento, w, L, Empotramiento	$wL^2/12$; $wL^2/12$
Empotramiento, P, a, b, L, Empotramiento	Pab^2/L^2 ; Pa^2b/L^2
Empotramiento, P, a, b, w, L, Empotramiento	$wL^2/12 + Pab^2/L^2$; $wL^2/12 + Pa^2b/L^2$
Empotramiento, w, L, Empotramiento	$wL^2/20$; $wL^2/30$
Empotramiento, w, L/2, L, Empotramiento	$23wL^2/960$; $7wL^2/960$
Empotramiento, w, L/2, L, Empotramiento	$5wL^2/96$; $5wL^2/96$
Empotramiento, w, a, b, L, Empotramiento	$(wb^3/12L)(4 - 3b/L)$; $(wb^2/12)(6 - 8b/L + 3b^2/L^2)$
Empotramiento, Δ, L, Empotramiento	$6EI\Delta/L^2$; $6EI\Delta/L^2$

Propiedades de figuras comúnmente usadas

Área geométrica	Propiedades del área
	$A = bh$ $\bar{x} = b/2$ $\bar{y} = h/2$
	$A = bh/2$ $\bar{x} = b/3$ $\bar{y} = h/3$
	$A = 2bh/3$ $\bar{x} = 3b/8$ $\bar{y} = 2h/5$
	$A = bh/3$ $\bar{x} = b/4$ $\bar{y} = 3h/10$

Unidades SI (Standard International)

UNIDADES Y CANTIDADES TÍPICAS SI

Cantidad	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Área	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cúbico	m^3
Fuerza	newton	N
Peso	newton por metro cúbico	N/m^3

Cantidad	Unidad	Símbolo
Esfuerzo	pascal (N/m^2)	Pa
Momento	newton metro	N · m
Trabajo	newton metro	Nm
Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
Masa	kilogramo	kg

PREFIJOS SI

Prefijos	Símbolo	Factor multiplicativo
tera	T	$10^{12} =$ 1 000 000 000 000
giga	G	$10^{9} =$ 1 000 000 000
mega	M	$10^{6} =$ 1 000 000
kilo	k	$10^{3} =$ 1 000
mili	m	$10^{-3} =$ 0.001
micro	μ	$10^{-6} =$ 0.000 001
nano	n	$10^{-9} =$ 0.000 000 001
pico	p	$10^{-12} =$ 0.000 000 000 001

CONVERSIÓN DE UNIDADES COMUNES EN EUA A UNIDADES SI

Unidades comunes en EUA	Unidades SI
1 plg	25.400 mm = 0.025 400 m
1 plg^2	645.16 mm^2 = 6.451 600 $m^2 \times 10^{-4}$
1 pie	304.800 mm = 0.304 800 m
1 lb	4.448 222 N
1 klb	4 448.222 N = 4.448 222 kN
1 lb/plg^2	6.894 757 kN/m^2 = 0.006 895 MN/m^2 = 0.006 895 N/mm^2
1 lb/pie^2	47.880 N/m^2 = 0.047 800 kN/m^2
1 klb/plg^2	6.894 757 MN/m^2 = 6.894 757 MPa
1 lb · plg	0.112 985 N · m
1 lb · pie	1.355 818 N · m
1 klb · plg	112.985 N · m
1 klb · pie	1 355.82 N · m = 1.355 82 kN · m