Análisis exacto de estructuras estáticamente indeterminada

ANÁLISIS ESTRUCTURAL 1

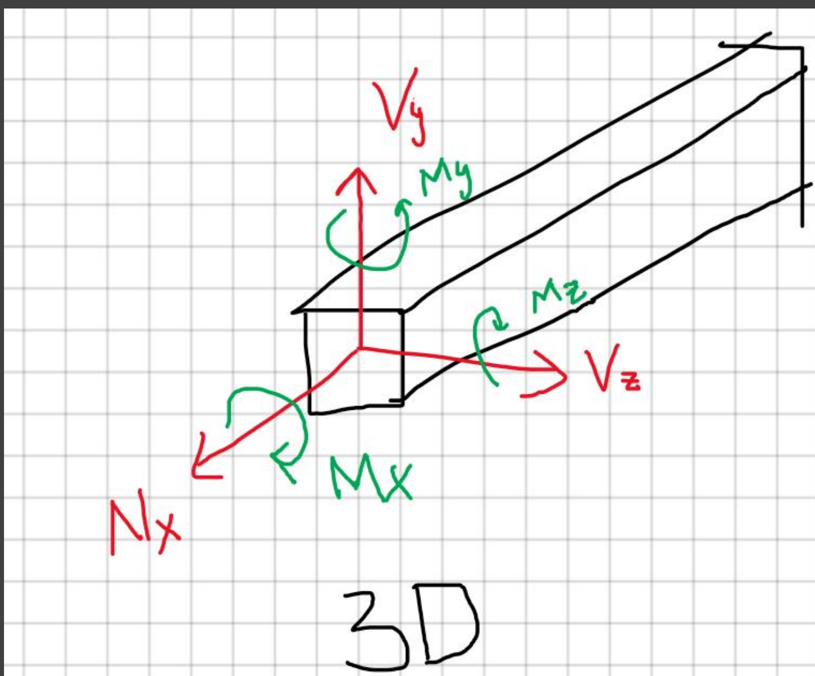
DEFINICIONES

Rigidez:

Propiedad intrínseca de un cuerpo que provee capacidad de resistencia a la deformación provocada por cargas externas.

En el análisis lineal la rigidez se mantiene constante. Por lo que la ley de Hooke es ampliamente utilizada en este análisis

En un sistema tridimensional se pueden tener 6 tipos de fuerzas internas y por ende 6 grados de libertad. Por lo que aplicando la ley de Hooke se tiene:



$$Nx = Kn * \Delta x$$ → Rigidez axial

$$Vy = Kv * \Delta y$$
$$Vz = Kv * \Delta z$$
Rigidez cortante

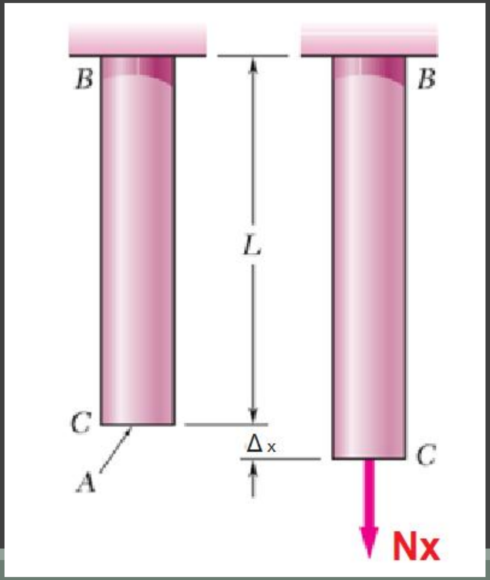
$$Mx = Kt * \theta x$$ → Rigidez Torsional

$$My = Kf * \theta y$$
$$Mz = Kf * \theta z$$
Rigidez rotacional, angular o flexionante

Rigidez axial y torsional

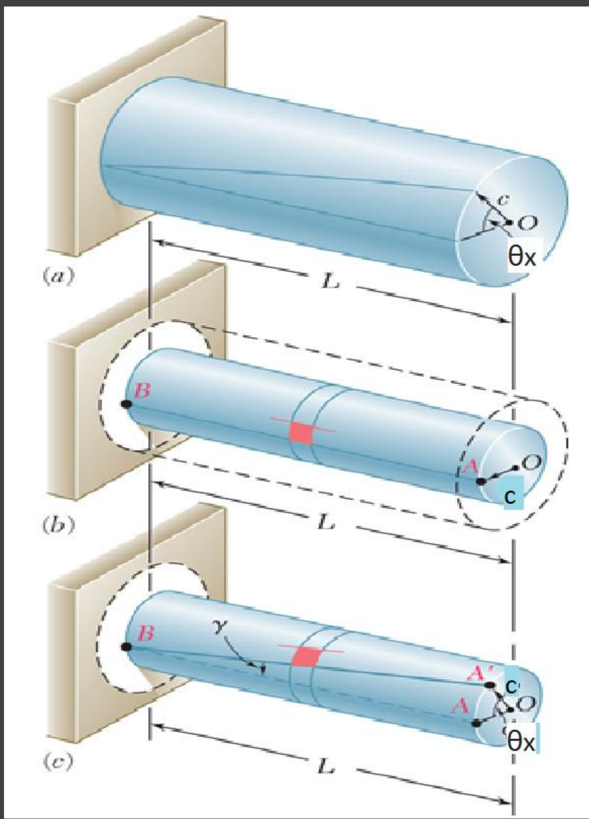
Aplicando la ley de Hooke se tiene lo siguiente:

$$\sigma = \frac{Nx}{A} \longrightarrow \varepsilon = \frac{\Delta x}{L} \longrightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \longrightarrow E = \frac{\frac{Nx}{A}}{\frac{\Delta x}{L}} \longrightarrow E = \frac{Nx * L}{A * \Delta x}$$



$$\boldsymbol{Nx = \frac{EA}{L}\Delta x}$$

Donde:
Nx= Fuerza normal
Δx= Deformación longitudinal
E= Modulo de elasticidad del material
A= Área de la sección
L= Longitud del elemento



$$\tau = \frac{Mx * c}{J} \longrightarrow \gamma = \frac{\delta}{L} = \frac{\theta x * c}{L} \longrightarrow G = \frac{\tau}{\gamma} \longrightarrow G = \frac{\frac{Mx * c}{J}}{\frac{\theta x * c}{L}} \longrightarrow G = \frac{Mx * L}{J * \theta x}$$

$$\boldsymbol{Mx = \frac{GJ}{L}\theta x}$$

Donde:
Mx= Momento torsional
θx= Angulo de deformación torsional
G= Modulo de rigidez del material
J= Modulo de torsión o inercia polar
(solo para secciones circulares)
L= Longitud del elemento

Método de la viga conjugada (Formulación de rigidez rotacional y traslacional)

H. Müller-Breslau desarrollo el método de la viga conjugada en 1865. En esencia, requiere la misma cantidad de cálculos que los teoremas de área-momento, para determinar la pendiente o la deflexión de una viga. Este método se basa en la relación estática de ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\frac{dV}{dx} = w \qquad \frac{d^2M}{dx^2} = w$$

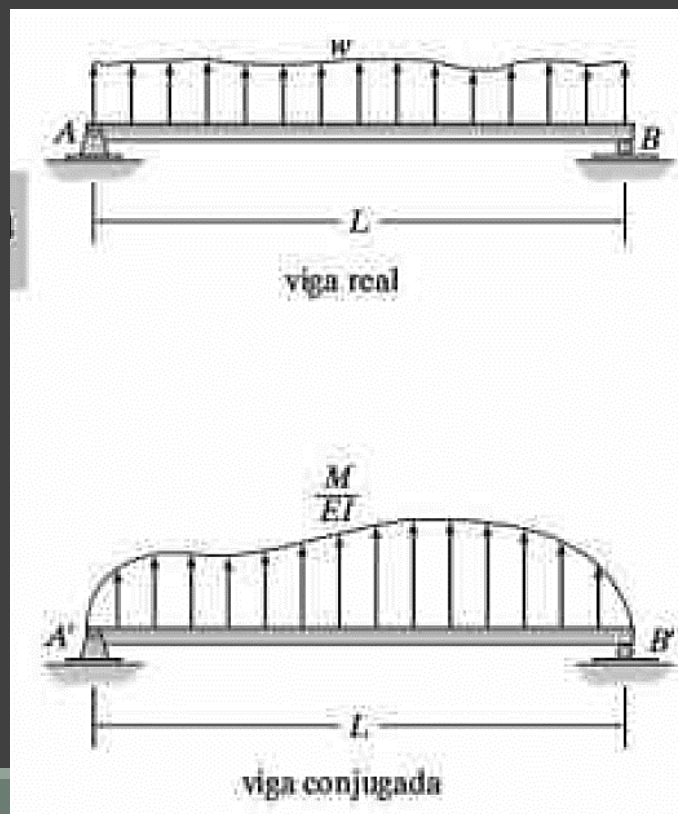
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

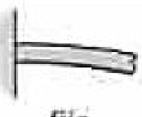
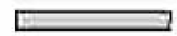
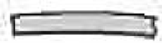
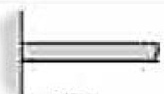
$$V = \int w\,dx \qquad M = \int\left[\int w\,dx\right]dx$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

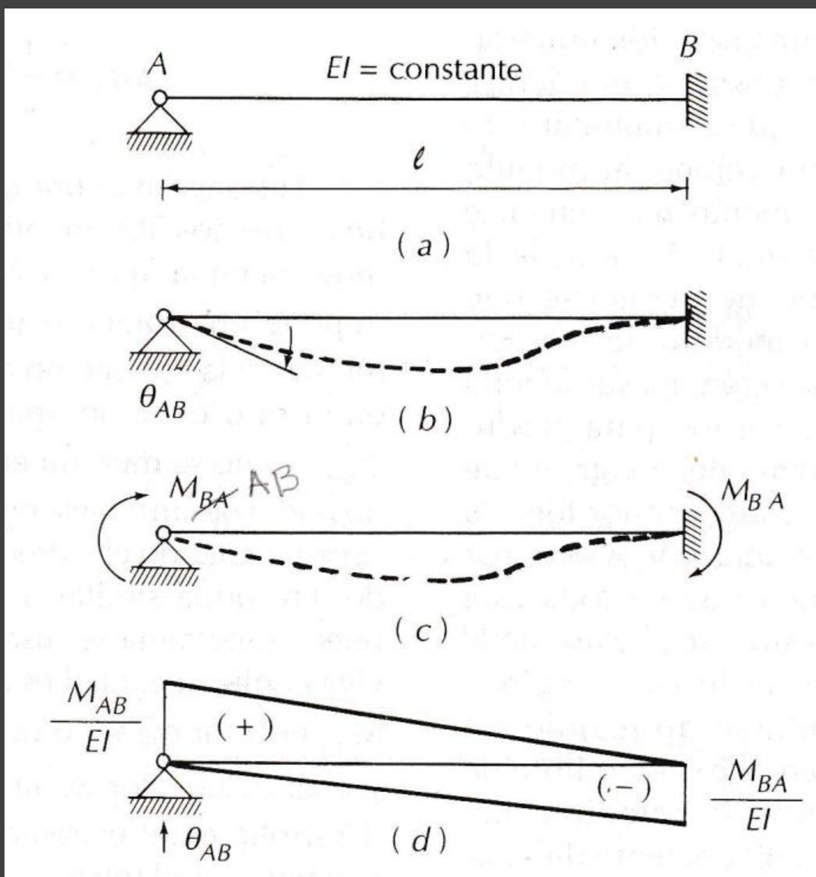
$$\theta = \int\left(\frac{M}{EI}\right)dx \qquad v = \int\left[\int\left(\frac{M}{EI}\right)dx\right]dx$$

Viga conjugada, es una viga equivalente que relaciona la carga con el diagrama de momentos:



	Viga real		Viga conjugada	
1)	θ $\Delta = 0$	 pasador	V $M = 0$	 pasador
2)	θ $\Delta = 0$	 rodillo	V $M = 0$	 rodillo
3)	$\theta = 0$ $\Delta = 0$	 fijo	$V = 0$ $M = 0$	 libre
4)	θ Δ	 libre	V M	 fijo
5)	θ $\Delta = 0$	 pasador interno	V $M = 0$	 bisagra
6)	θ $\Delta = 0$	 rodillo interno	V $M = 0$	 bisagra
7)	θ Δ	 bisagra	V M	 rodillo interno

Determinación de la rigidez angular de una viga con extremo empotrado o continuo



Factor de transporte

De $\sum M_A = 0$:

$$\frac{1}{2}\frac{M_{AB}}{EI}\cdot \ell \cdot \frac{\ell}{3} - \frac{1}{2}\frac{M_{BA}}{EI}\ell \cdot \frac{2}{3}\ell = 0 \qquad \text{(Ec.1)}$$

$$M_{BA} = \frac{1}{2}M_{AB} \qquad \text{(Ec.2)}$$

De $\sum M_B = 0$:

$$\theta_{AB}\cdot \ell - \frac{1}{2}\frac{M_{AB}}{EI}\cdot \ell \cdot \frac{2}{3}\ell + \frac{1}{2}\frac{M_{BA}}{EI}\cdot \ell \cdot \frac{1}{3}\ell = 0 \qquad \text{(Ec.3)}$$

Sustituyendo M_{BA}, obtenido de la ecuación 2, en la ecuación 3 y despejando M_{AB}:

$$M_{AB} = \frac{4EI\,\theta_{AB}}{\ell} \qquad \text{(Ec.4)}$$

Si $\theta_{AB} = 1$:

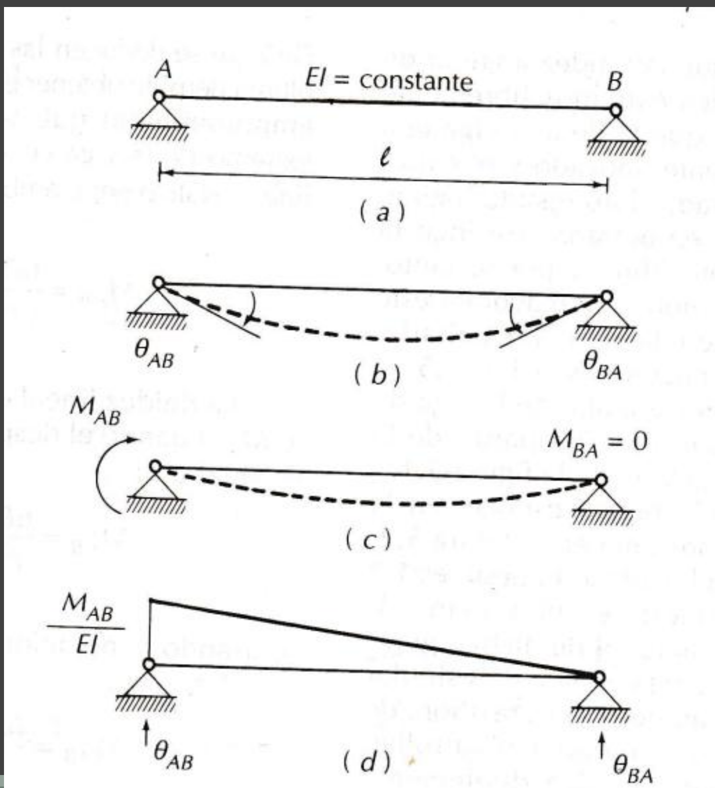
$$\boxed{M_{AB} = \frac{4EI}{\ell}} \qquad \text{(Ec.5)}$$

$$My = \frac{4EIy}{L}\theta y$$

$$Mz = \frac{4EIz}{L}\theta z$$

Rigidez angular apoyo empotrado o continuo

Determinación de la rigidez angular de una viga con extremo articulado y factor de transporte



De $\sum M_A = 0:$

$$\frac{1}{2}\frac{M_{AB}}{EI}\cdot \ell \cdot \frac{\ell}{3} - \theta_{BA}\ell = 0 \qquad \text{(Ec.1)}$$

De $\sum M_B = 0:$

$$\theta_{AB}\,\ell - \frac{1}{2}\frac{M_{AB}}{EI}\cdot \ell \cdot \frac{2\ell}{3} = 0 \qquad \text{(Ec.2)}$$

$$M_{AB} = \frac{3EI\,\theta_{AB}}{\ell} \qquad \text{(Ec.3)}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 1 y despejando θ_{BA}:

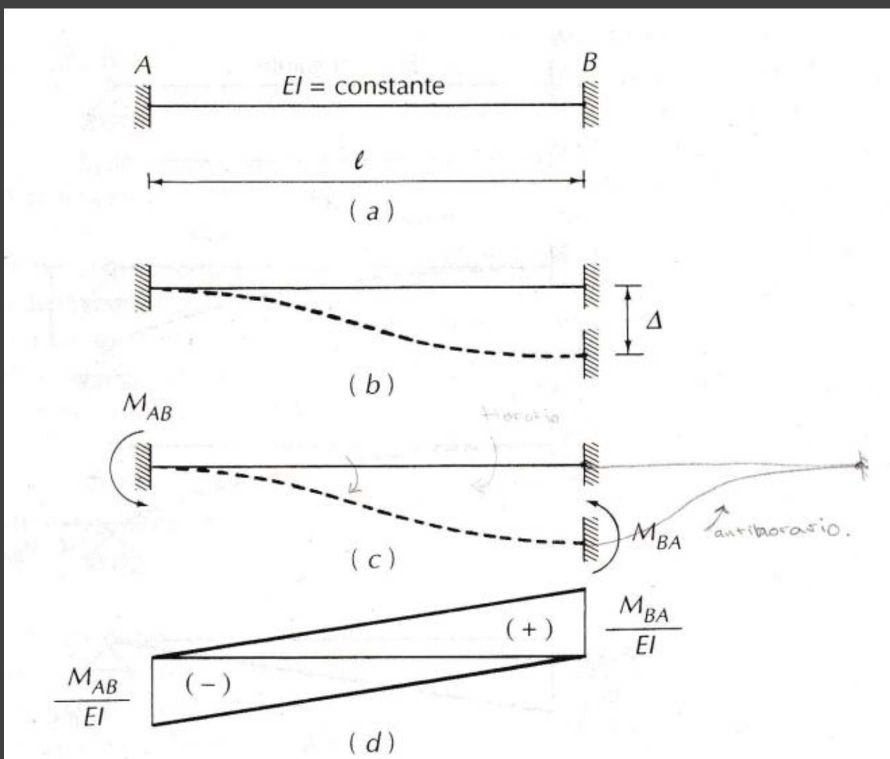
$$\theta_{BA} = \frac{1}{2}\theta_{AB} \qquad \text{(Ec.4)}$$

$$My = \frac{3EIy}{L}\theta y$$

$$Mz = \frac{3EIz}{L}\theta z$$

Rigidez angular apoyo articulado

Determinación de la rigidez traslacional o lineal viga con ambos extremos empotrados ó continuos



Para que $\theta_{AB} = \theta_{BA} = 0$,

$$M_{AB} = M_{BA} \qquad \text{(Ec.1)}$$

Para que la deflexión en B sea igual a Δ :

$$M_B = \Delta = \frac{1}{2}\frac{M_{AB}}{EI}\cdot \ell \cdot \frac{2}{3}\ell - \frac{1}{2}\frac{M_{BA}}{EI}\cdot \ell \cdot \frac{\ell}{3}$$

$$\Delta = \frac{M_{AB}}{EI}\left(\frac{1}{3}\ell^2 - \frac{1}{6}\ell^2\right)$$

$$\Delta = \frac{1}{6}\frac{M_{AB}\ell^2}{EI} \qquad \text{(Ec.2)}$$

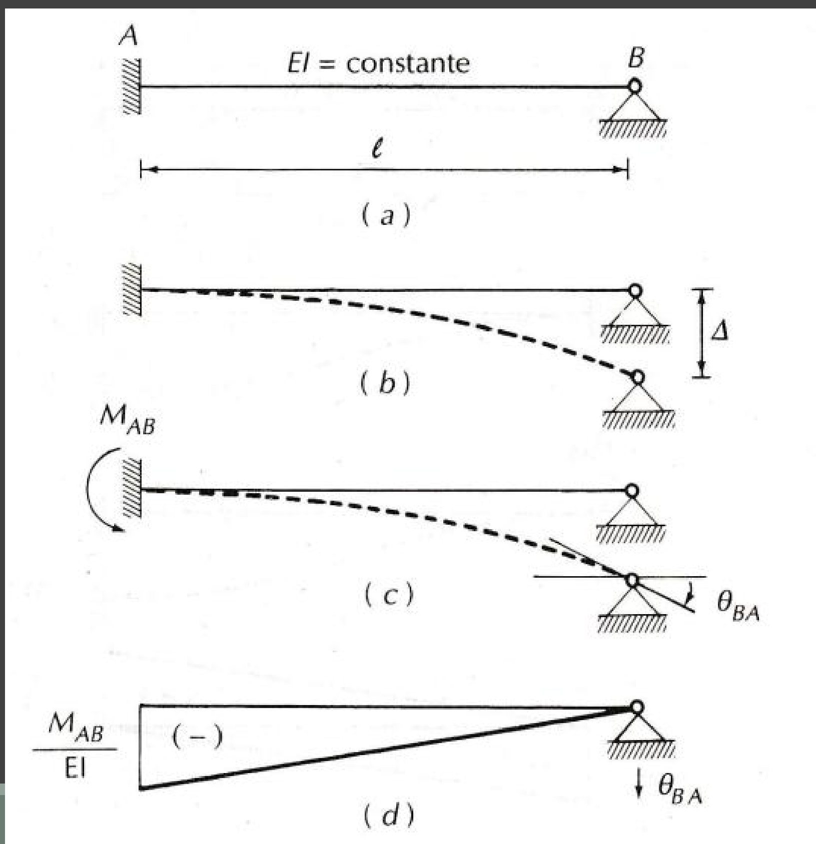
$$M_{AB} = \frac{6EI\Delta}{\ell^2} \qquad \text{(Ec.3)}$$

$$My = \frac{6EIy}{L^2}\Delta y$$

$$Mz = \frac{6EIz}{L^2}\Delta z$$

Rigidez traslacional o lineal con apoyos empotrados o continuos

Determinación de la rigidez traslacional o lineal viga con apoyo empotrado y articulado



Para que $\theta_A = 0$,

$$\theta_{BA} = \frac{1}{2}\frac{M_{AB}}{EI}\ell \qquad \text{(Ec. 1)}$$

Para que la deflexión en B sea igual a Δ:

$$M_B = \Delta = \frac{1}{2}\frac{M_{AB}}{EI}.\ell.\frac{2}{3}\ell$$

$$M_{AB} = \frac{3EI\Delta}{\ell^2} \qquad \text{(Ec. 2)}$$

Si $\Delta = 1$:

$$M_{AB} = \frac{3EI}{\ell^2} \qquad \text{(Ec. 3)}$$

$$My = \frac{3EIy}{L^2}\Delta y$$

$$Mz = \frac{3EIz}{L^2}\Delta z$$

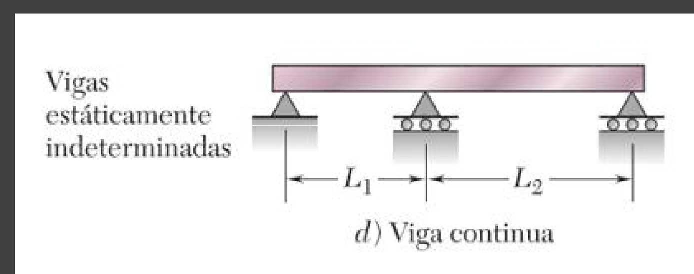
Rigidez traslacional o lineal con apoyo empotrado y articulado

METODO DE CROSS PARA VIGAS CONTINUAS

- Método numérico de aproximaciones sucesivas
- Para la resolución de estructuras hiperestáticas
- Basado en el método de las deformaciones

El método de Cross:

- Evita la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones
- Permite verificar las condiciones de equilibrio en cualquier etapa del proceso de solución.
- Permite entender el funcionamiento de una estructura, la forma en que las cargas aplicadas producen momentos flexionantes y fuerzas cortantes en diferentes medios de la estructura, y el concepto de equilibrio en cada nudo de la estructura y en la estructura en su conjunto.



d) Viga continua

FUNDAMENTOS

RIGIDEZ ANGULAR: momento que debe aplicarse en el extremo de un miembro estructural para producir una rotación unitaria en dicho extremo, el valor de ese momento (que produce la rotación unitaria) es:

$$M_{AB} = 4EI/L \qquad \theta=1$$

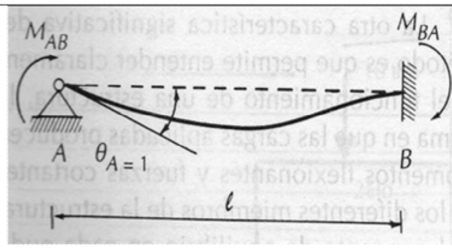
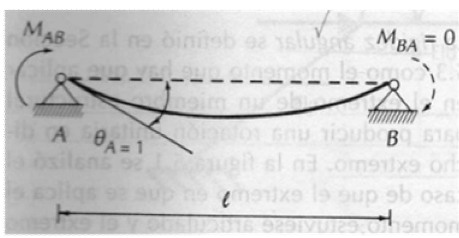
A este momento también se le denomina RIGIDEZ ANGULAR ABSOLUTA, tomando en cuenta que regularmente se trabaja la viga con el mismo material el término “4E” se vuelve constante y surge el concepto de RIGIDEZ ANGULAR RELATIVA O SIMPLIFICADA, siendo esta:

$$K = I/L$$

Donde I = momento de inercia y L = longitud del tramo de viga

El término anterior aplica para vigas con un extremo articulado y el otro empotrado, pero si la viga cuenta con sus dos extremos articulados, la rigidez angular absoluta es de $M_{AB} = 3EI/L$ y la relativa o simplificada (en ocasiones llamada rigidez modificada) es de

$$K' = 3I/4L$$

MODELO	Rigidez angular absoluta	Rigidez angular relativa	Factor de transporte (FT)	Momento transportado
	$M_{AB} = 4EI/L$	**K = I/L**	M_{BA}/M_{AB} = FT = ½	M_{BA} = ½ M_{AB}
	$M_{AB} = 3EI/L$	**K'= 3I/4L**	M_{BA}/M_{AB} = FT = 0	M_{BA} = 0

FACTOR DE TRANSPORTE (FT): se define como la relación entre el momento que se desarrolla en el extremo de un miembro cuando se aplica un momento en el otro extremo y el valor del momento aplicado.

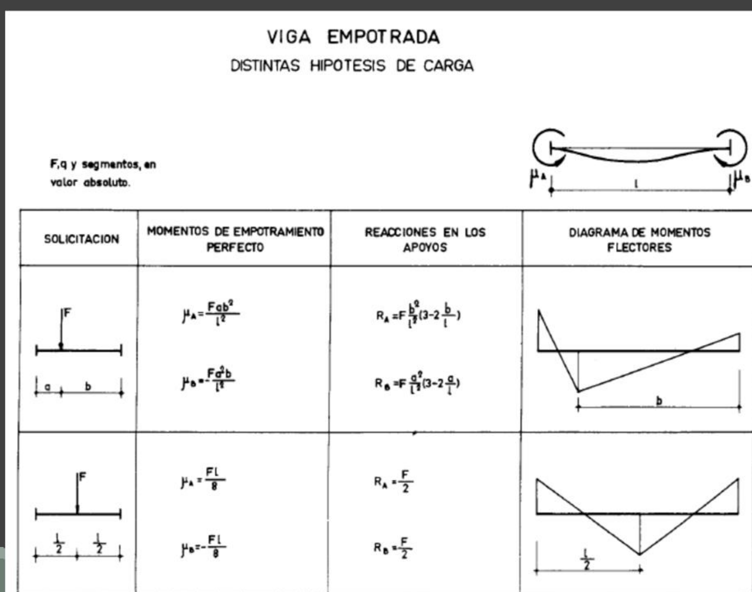
MOMENTO TRASPORTADO: momento que se desarrolla en el extremo de un miembro como consecuencia de la aplicación de un momento en el otro extremo.

FACTORES DE DISTRIBUCION (FD): corresponde a la rigidez relativa del miembro estructural dividida entre la suma de las rigideces relativas de los elementos que concurren en el nudo.

$$FD_i = K_i/\sum K_i$$

MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO:

Son los momentos que se obtiene a partir de analizar un tramo de viga como doblemente empotrada.

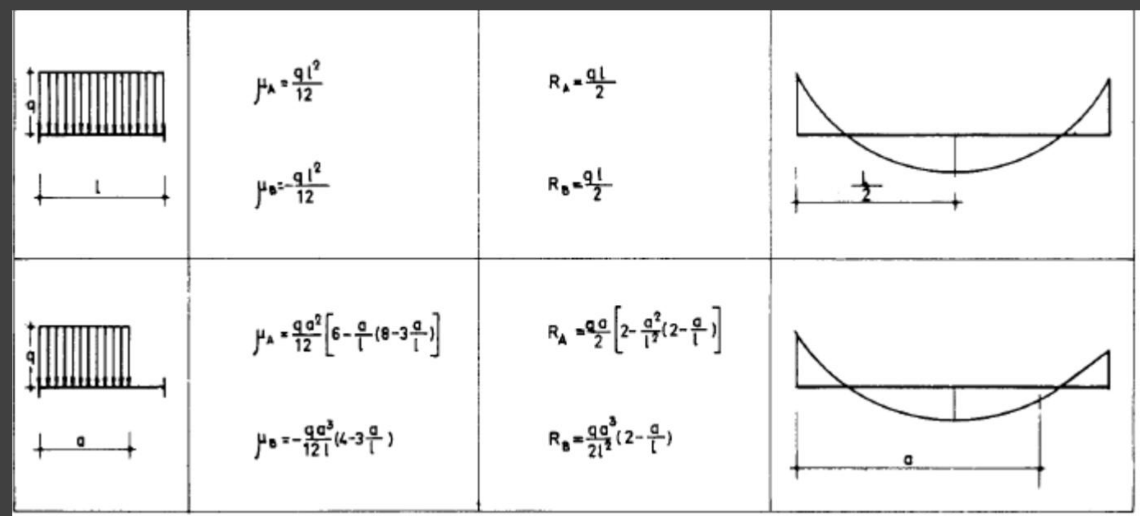


VIGA EMPOTRADA

DISTINTAS HIPOTESIS DE CARGA

F,q y segmentos, en valor absoluto.

SOLICITACION	MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO	REACCIONES EN LOS APOYOS	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES
F; a, b	$\mu_A = \frac{Fab^2}{l^2}$ $\mu_B = -\frac{Fa^2b}{l^2}$	$R_A = F\frac{b^2}{l^2}(3-2\frac{b}{l})$ $R_B = F\frac{a^2}{l^2}(3-2\frac{a}{l})$	b
F; $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$	$\mu_A = \frac{Fl}{8}$ $\mu_B = -\frac{Fl}{8}$	$R_A = \frac{F}{2}$ $R_B = \frac{F}{2}$	$\frac{l}{2}$



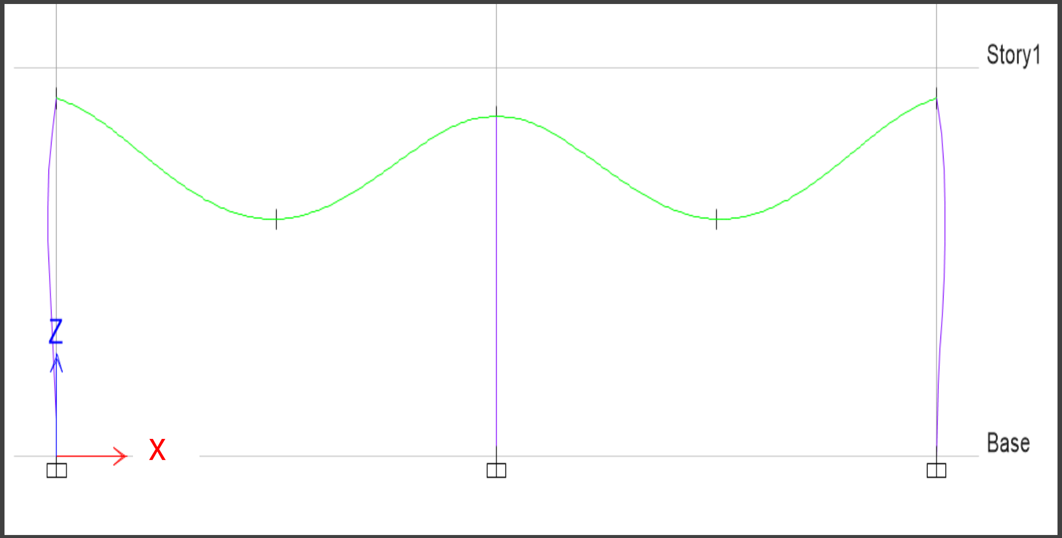
q; l	$\mu_A = \frac{ql^2}{12}$ $\mu_B = -\frac{ql^2}{12}$	$R_A = \frac{ql}{2}$ $R_B = \frac{ql}{2}$	$\frac{l}{2}$
q; a	$\mu_A = \frac{qa^2}{12}\left[6-\frac{a}{l}(8-3\frac{a}{l})\right]$ $\mu_B = -\frac{qa^3}{12l}(4-3\frac{a}{l})$	$R_A = \frac{qa}{2}\left[2-\frac{a^2}{l^2}(2-\frac{a}{l})\right]$ $R_B = \frac{qa^3}{2l^2}(2-\frac{a}{l})$	a

METODOLOGIA

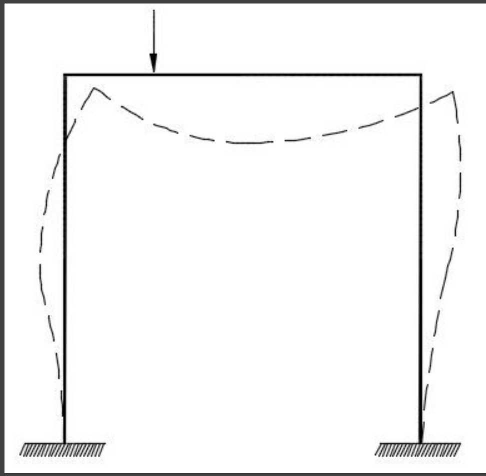
1) Calcular rigideces angulares relativas de cada miembro (K = I/L ó K’ = 3I/4L), estas son únicas para cada miembro.
2) Calcular los factores de distribución para cada extremo de cada miembro. La sumatoria de los factores de distribución en cada nudo es igual a 1.
3) Determine los momentos de empotramiento perfecto o momentos fijos en cada miembro (MF). Utilice la tabla indicada a continuación. En esta etapa se supone que todos los extremos de los miembros están empotrados, como se indica en la tabla.
4) Se determinan los momentos de desequilibrio de cada nudo.
5) Inician las iteraciones. El procedimiento iterativo va convergiendo a momentos cada vez más pequeños. Por esta razón, se puede detener en cualquier etapa y sumar todos los momentos de cada columna para obtener los momentos finales. Se recomienda detener el proceso iterativo en la etapa de distribución pues en este punto todos los nudos se encuentran en equilibrio.
6) Obtenga los momentos finales.
7) Determine las reacciones en los extremos de cada miembro a partir de las cargas externas aplicadas y de los momentos finales en los extremos ya calculados. Grafique los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

METODO DE CROSS PARA MARCOS DE UNO O VARIOS NIVELES SIN LADEO

Al igual que el análisis estructural de vigas, la solución de marcos sin ladeo viene dado por la misma metodología y algoritmo. Lo que debemos tener claro es que todos los marcos presentan un desplazamiento lateral como mínimo el cual en el siguiente tema se estudiaran las razones de dicho desplazamiento. Para este caso se anulara el grado de libertad traslacional ux.

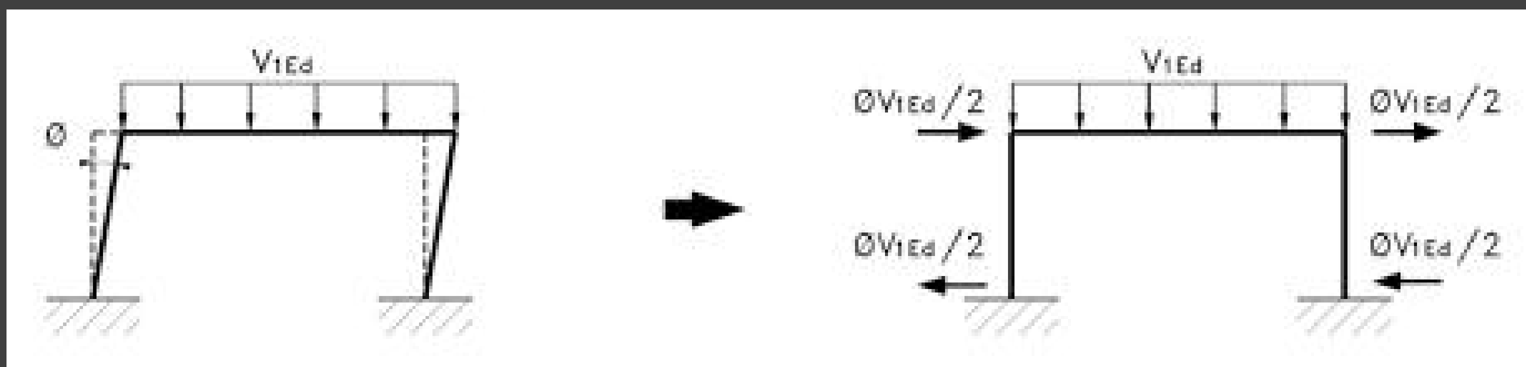


Marco sin ladeo

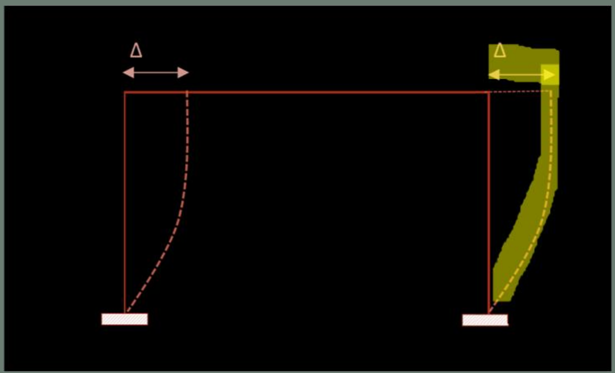


Marco con ladeo

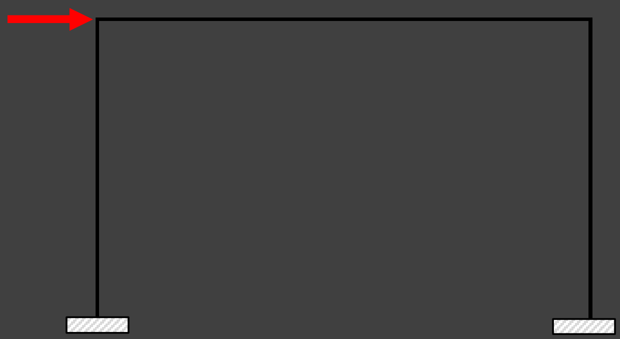
METODO DE CROSS PARA MARCOS DE UN NIVEL CON LADEO



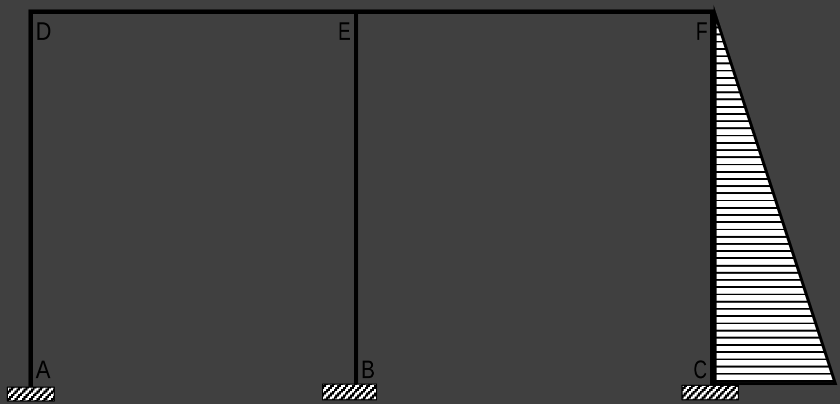
Marcos con desplazamiento lateral
(Con ladeo)



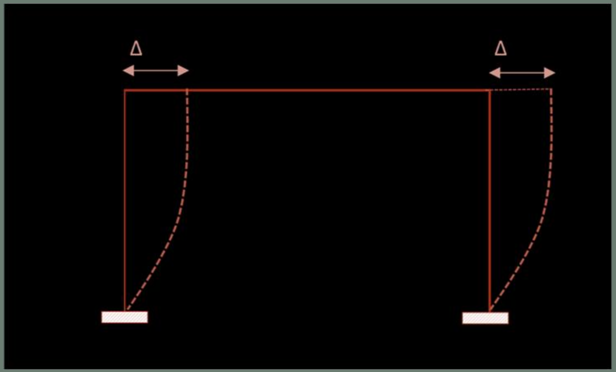
Los marcos tienen ladeo por:



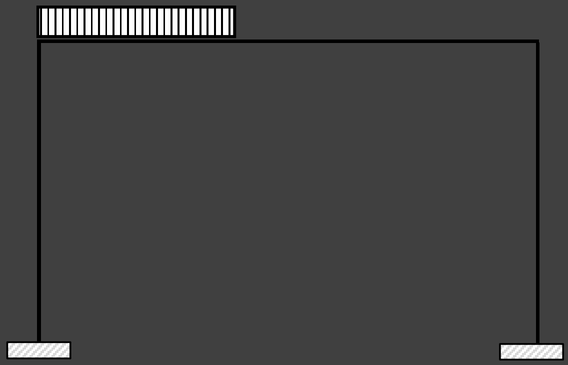
❖Aplicación de cargas laterales



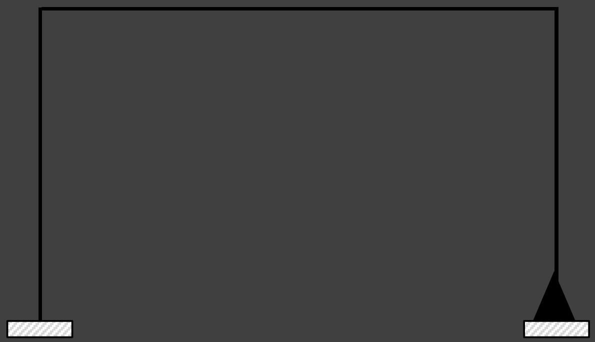
Marcos con desplazamiento lateral (Con ladeo)



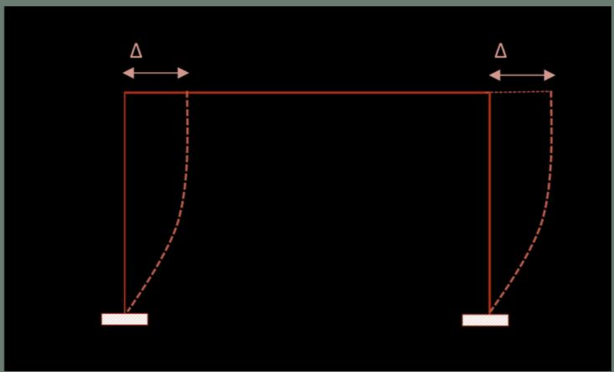
- Asimetría de cargas



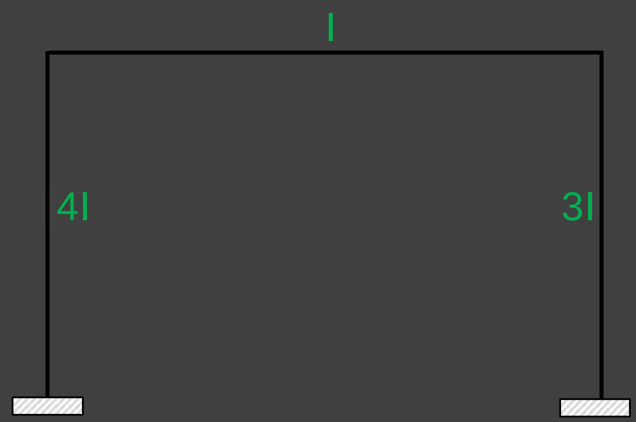
- Asimetría de apoyos



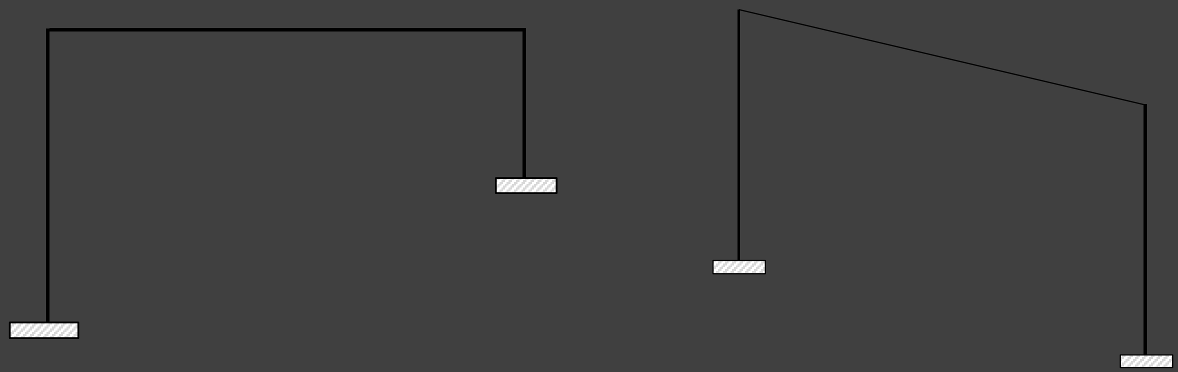
Marcos con desplazamiento lateral (Con ladeo)



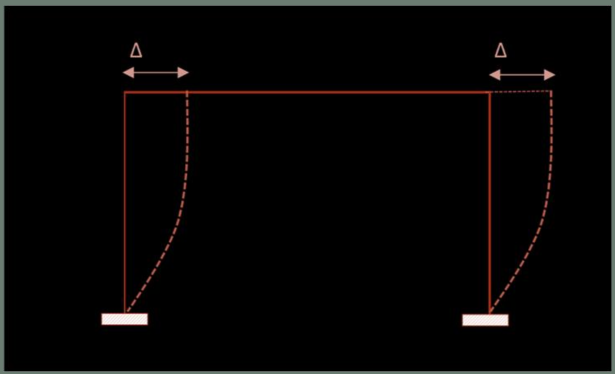
❖Asimetría de rigidez



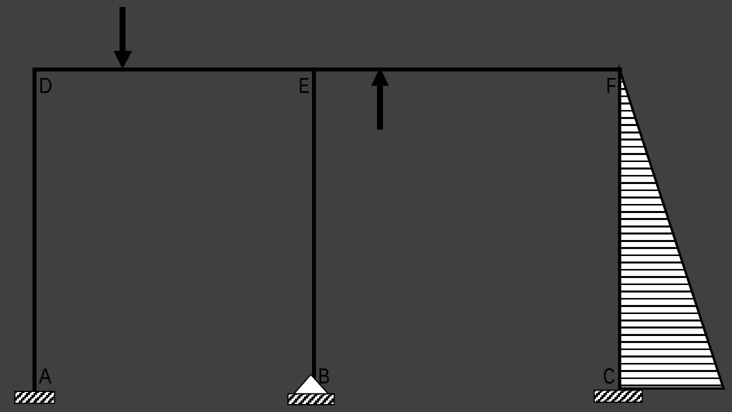
❖Asimetría geométrica



Marcos con desplazamiento lateral (Con ladeo)

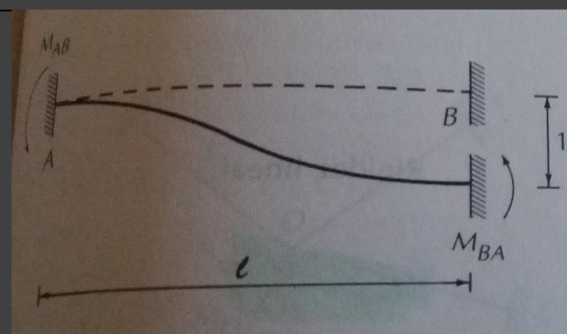
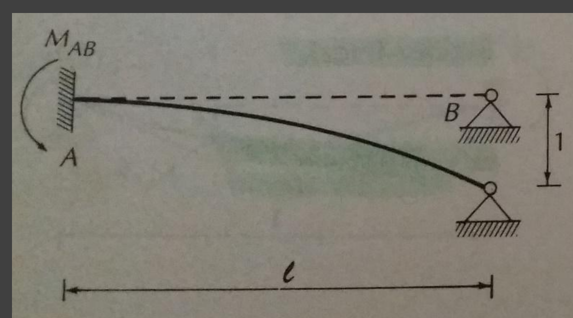


❖Combinación de asimetrías



CONCEPTOS FUNDAMENTALES

__RIGIDEZ LINEAL:__ valor de los momentos que se desarrollan en el extremo de un miembro cuando se impone un desplazamiento lineal unitario entre dichos extremos.

MODELO	Rigidez lineal absoluta	Rigidez lineal relativa
	$M_{AB} = M_{BA} = \frac{6EI}{\ell^2}$	K = I/L²
	$M_{AB} = \frac{3EI}{\ell^2}$	K = ½ (I/L²)