

# ANALISIS DE ESTRUCTURAS

Métodos clásico  
y matricial

McCormac  
Elling

Contiene  
 disquete para el  
ANALISIS DE  
ESTRUCTURAS  
con método  
matricial



Alfaomega



# **ANALISIS DE ESTRUCTURAS**

---

**Métodos clásico y matricial**



# **ANALISIS DE ESTRUCTURAS**

---

**Métodos clásico y matricial**

Jack McCormac

Rudolf E. Elling

*Clemson University*



**Versión en español:**

*José de la Cera Alonso*

Dipl. en Ing., Universidad Tecnológica, Munich, Alemania

Prof. de la Universidad Autónoma Metropolitana

**Programadores:**

*M. en C. Amador Terán Gilmore*

*M. en I. Hugón Júarez García*

Profesores de la Universidad Autónoma Metropolitana

**Al cuidado de la edición:**

*Enrique García Carmona*

Jefe de ediciones

**Revisores:**

*Francisco Javier Rodríguez*

*Leticia Castañeda Molinar*

**Versión en español de la obra:**

Structural Analysis, a classical and matrix approach, 1a. ed.

por Jack McCormac y Rudolf E. Elling

Publicada originalmente por © Harper & Row, Publishers, Inc.

10 East 53d Street, Nueva York, NY 10022

© 1994 Ediciones Alfaomega, S. A. de C. V.

Apartado postal 7-1032, 06700 México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial,

Registro No. 663

**Derechos reservados**

Esta obra es propiedad intelectual de su autor y los derechos de publicación en lengua española han sido legalmente transferidos al editor. Prohibida su reproducción parcial o total por cualquier medio, sin permiso por escrito del propietario de los derechos del copyright.

**ISBN 968-6223-92-4**

ISBN 0-06-044341-3, Harper & Row, Publishers, Inc.

**Impreso en México - Printed in Mexico.**

**Nota importante**

La información contenida en esta obra tiene un fin exclusivamente didáctico y, por lo tanto, no está previsto su aprovechamiento a nivel profesional o industrial. Las indicaciones técnicas y programas incluidos, han sido elaborados con gran cuidado por el autor y reproducidos bajo estrictas normas de control. EDICIONES ALFAOMEGA, S.A. de C.V. no será jurídicamente responsable por: errores u omisiones; daños y perjuicios que se pudieran atribuir al uso de la información que contiene este libro y el disquete adjunto, ni por el uso indebido que pudiera dársele.



---

## Prólogo

El objetivo de este libro es iniciar al estudiante en los principios elementales del análisis estructural de vigas, armaduras y marcos. Se incluye suficiente información para un entendimiento completo de las estructuras estáticamente determinadas y para un primer curso de estructuras estáticamente indeterminadas.

Las estructuras estáticamente determinadas se tratan en los capítulos 1 al 9, mientras que las estáticamente indeterminadas se estudian en los capítulos 10 al 15. En estos últimos capítulos se presentan procedimientos aproximados de análisis, junto con métodos especiales clásicos "exactos".

Debido a que en las últimas décadas aumentó el uso de las computadoras digitales, ha cambiado completamente la aplicación práctica del análisis estructural. En vez de usar métodos clásicos especializados, ahora los ingenieros usan, en la práctica, programas de computadora que se basan en métodos matriciales.

Los capítulos 16 al 19 presentan una introducción al análisis matricial, y el 20 se destina a la aplicación de programas de computadora escritos con ecuaciones matriciales. Esos programas que pueden usarse en microcomputadoras IBM o compatibles con IBM, están contenidos en un disco que se anexa en este libro. Con su ayuda el lector puede, en un tiempo muy corto (minutos, no horas), aprender a analizar las vigas, armaduras y marcos que se estudian en este libro.

Los métodos modernos de análisis que usan matrices y computadoras permiten al ingeniero analizar estructuras, grandes y pequeñas, con rapidez increíble. Sin embargo, la belleza matemática de tales análisis tiende a ocultar los principios básicos del análisis estructural. Se espera que con esto los estudiantes que usen este libro lleguen a entender y "sentir" las estructuras, cosa que no se lograría si tales métodos no se incluyesen.

Agradecemos la ayuda que recibimos de varias fuentes, en particular de Nadim M. Aziz, Kenneth E. Buttry, Achintya Haldar, James R. Moran, James G. Orbison, Paul N. Roschke, J.C.S Smith y Mardith Thomas quienes con sus sugerencias y críticas, contribuyeron directamente a la preparación de este manuscrito.

Jack McCormac  
Rudolf E. Elling



---

# Contenido

Prólogo

vii

## 1

### Introducción

1

- 1.1 Análisis y diseño estructural 1
- 1.2 Tipos de estructuras 2
- 1.3 Elementos estructurales 3
- 1.4 Armaduras y marcos 3
- 1.5 Cargas 4
- 1.6 Cargas muertas 4
- 1.7 Cargas vivas 4
- 1.8 Selección de las cargas de diseño 11
- 1.9 Unidades SI 12
- 1.10 Diagramas lineales 14
- 1.11 Exactitud de los cálculos 14
- 1.12 Verificación de los problemas 16
- 1.13 Computadoras 16
- 1.14 Acceso a las computadoras 16
- Referencia bibliográfica 17

## 2

### Reacciones

19

- 2.1 Equilibrio 19
- 2.2 Cuerpos móviles 20
- 2.3 Cálculo de las incógnitas 20
- 2.4 Tipos de soporte 20
- 2.5 Estructuras estáticamente determinadas 23
- 2.6 Inestabilidad geométrica 23
- 2.7 Convención de signos 26
- 2.8 Componentes horizontal y vertical 26
- 2.9 Diagramas de cuerpo libre 26
- 2.10 Reacciones obtenidas por proporciones 27
- 2.11 Reacciones calculadas con las ecuaciones de la Estática 28
- 2.12 Principio de superposición 31
- 2.13 Voladizo simple 31
- 2.14 Estructuras con voladizos 32

2.15	Cálculo de las reacciones en estructuras con voladizos	34
2.16	Arco de tres articulaciones	36
2.17	Usos de arcos y estructuras con voladizos	41
2.18	Cables	42
	Problemas	45
	Referencia bibliográfica	56

**3****Diagramas de fuerza cortante  
y momento flexionante**

57

3.1	Introducción	57
3.2	Diagramas de fuerza cortante	59
3.3	Diagramas de momento	60
3.4	Relaciones entre cargas, cortantes y momentos	60
3.5	Diagramas de momento a partir de los diagramas de cortante	62
	Problemas	69

**4****Introducción al estudio de  
las armaduras planas**

75

4.1	Generalidades	78
4.2	Hipótesis para el análisis de armaduras	79
4.3	Efecto de las hipótesis	80
4.4	Notación para las armaduras	80
4.5	Armaduras para techos	81
4.6	Armaduras para puentes	82
4.7	Disposición o arreglo de los elementos de una armadura	87
4.8	Determinación estática de armaduras	87
4.9	Uso de secciones	90
4.10	Componentes horizontal y vertical	91
4.11	Convención de flechas	91
4.12	Método de los nudos	92
	Problemas	97
	Referencia bibliográfica	104

**5****Armaduras planas (continuación)**

105

5.1	Método de los momentos	105
5.2	Fuerzas en elementos cortados por secciones	105
5.3	Aplicación del método de los momentos	107
5.4	Método de las fuerzas cortantes	113
5.5	Cuando las hipótesis no son correctas	115
5.6	Armaduras simples	116
5.7	Armaduras compuestas	117
5.8	Armaduras complejas	118

5.9	Estabilidad	120
5.10	Ecuaciones de condición	122
5.11	Soluciones con computadora	126
	Problemas	126
	Referencia bibliográfica	134

**6****Armaduras tridimensionales  
o espaciales**

135

6.1	Generalidades	135
6.2	Principios básicos	136
6.3	Ecuaciones de la Estática	138
6.4	Teoremas especiales aplicables a las armaduras tridimensionales	139
6.5	Tipos de apoyos	140
6.6	Ejemplos ilustrativos	141
6.7	Armaduras espaciales más complicadas	145
6.8	Análisis con ecuaciones simultáneas	149
6.9	Soluciones con computadora	153
	Problemas	153
	Referencia bibliográfica	158

**7****Líneas de Influencia**

159

7.1	Introducción	159
7.2	Definición de la línea de influencia	160
7.3	Líneas de influencia para las reacciones de una viga simple	161
7.4	Líneas de influencia para fuerzas cortantes en vigas simples	161
7.5	Líneas de influencia para momentos en vigas simples	163
7.6	Líneas de influencia cualitativas	165
7.7	Usos de las líneas de influencia; cargas cocentradadas	168
7.8	Usos de las líneas de influencia; cargas uniformes	170
7.9	Fórmulas para vigas simples obtenidas con líneas de influencia	171
7.10	Colocación de las cargas vivas para obtener valores máximos con ayuda de las líneas de influencia	171
7.11	Colocación de las cargas vivas para causar valores máximos con base en la curvatura máxima	172
7.12	Líneas de influencia para armaduras	175
7.13	Disposición de los sistemas de piso para puentes	175
7.14	Líneas de influencia para las reacciones de armaduras	177
7.15	Líneas de influencia para elementos de armaduras de cuerdas paralelas	178
7.16	Líneas de influencia para barras de armaduras con cuerdas no paralelas	179
7.17	Líneas de influencia para armaduras tipo K	181
7.18	Determinación de las fuerzas máximas	182
7.19	Contradiagonales en armaduras de puentes	185
7.20	Cargas vivas para puentes carreteros	186
7.21	Cargas vivas para puentes ferroviarios	189

- 7.22 Cargas de impacto 190  
 7.23 Valores máximos para cargas móviles 191  
 Problemas 194  
 Referencia bibliográfica 206

## **8 Deflexiones y rotaciones; métodos geométricos**

207

- 8.1 Introducción 207  
 8.2 Razones para calcular deflexiones 207  
 8.3 Teoremas del área del diagrama de momento 209  
 8.4 Aplicación de los teoremas del área del diagrama de momento 212  
 8.5 Método de la carga elástica 221  
 8.6 Aplicación del método de la carga elástica 222  
 8.7 Limitaciones del método de la carga elástica 226  
 8.8 Método de la viga conjugada 227  
 8.9 Resumen de las relaciones entre vigas 230  
 8.10 Aplicación del método de la viga conjugada a vigas 231  
 8.11 Deflexiones de larga duración 233  
 8.12 Aplicación de la viga conjugada a marcos 234  
 Problemas 236  
 Referencia bibliográfica 245

## **9 Deflexiones y rotaciones; métodos de energía**

246

- 9.1 Introducción a los métodos de energía 246  
 9.2 Trabajo virtual 246  
 9.3 Deflexiones en armaduras logradas con el trabajo virtual 247  
 9.4 Aplicación del trabajo virtual en las armaduras 249  
 9.5 Cálculo de deflexiones en vigas y marcos  
     mediante el método del trabajo virtual 252  
 9.6 Ejemplos de la aplicación del trabajo virtual en vigas y marcos 254  
 9.7 Cálculo de rotaciones por medio del trabajo virtual 261  
 9.8 Teorema de Maxwell sobre las deflexiones recíprocas 263  
 9.9 Introducción a los teoremas de Castigliano 264  
 9.10 Primer teorema de Castigliano 265  
 9.11 Segundo teorema de Castigliano 271  
 Problemas 271  
 Referencia bibliográfica 281

## **10**

### **Introducción a las estructuras estáticamente indeterminadas, métodos aproximados de análisis**

282

- 10.1 Generalidades 282  
 10.2 Estructuras continuas 283

10.3	Ventajas de las estructuras hiperestáticas	285
10.4	Desventajas de las estructuras hiperestáticas	287
10.5	Análisis aproximado de estructuras hiperestáticas	288
10.6	Armaduras con dos diagonales en cada tablero	290
10.7	Análisis de estructuras industriales	291
10.8	Arriostramiento lateral en puentes	296
10.9	Vigas continuas	298
10.10	Análisis de estructuras de edificios por cargas verticales	301
10.11	Análisis de estructuras de edificios para cargas laterales	303
10.12	Análisis de la armadura Vierendeel	313
	Problemas	316
	Referencia bibliográfica	321

**11****Método de las fuerzas para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas**

323

11.1	Métodos para analizar estructuras estáticamente indeterminadas	323
11.2	Vigas y marcos con una redundante	324
11.3	Vigas y marcos con dos o más redundantes	335
11.4	Asentamiento de apoyos	337
11.5	Análisis de armaduras con redundantes externas	340
11.6	Análisis de armaduras con redundantes internas	345
11.7	Análisis de armaduras con redundantes internas y externas	348
11.8	Cambios de temperatura, contracción, errores de fabricación, etc.	350
11.9	Soluciones con la computadora	352
	Problemas	352
	Referencia bibliográfica	361

**12****Líneas de influencia para estructuras estáticamente indeterminadas**

362

12.1	Líneas de influencia para vigas estáticamente indeterminadas	362
12.2	Líneas de influencia cualitativas	368
12.3	Líneas de influencia para armaduras estáticamente indeterminadas	370
	Problemas	375
	Referencia bibliográfica	377

**13****Métodos de análisis por desplazamientos  
método pendiente - deflexión**

378

13.1	Introducción	378
13.2	Deducción de las ecuaciones de pendiente-deflexión	378
13.3	Aplicación de las ecuaciones de pendiente-deflexión a vigas continuas	378

13.4	Análisis de marcos sin desplazamiento lateral (ladeo)	388
13.5	Análisis de marcos con desplazamiento lateral (ladeo)	391
13.6	Análisis de marcos con columnas inclinadas	398
13.7	Soluciones con la computadora	398
	Problemas	398
	Referencia bibliográfica	403

**14****Distribución de momentos en vigas****404**

14.1	Generalidades	404
14.2	Introducción	405
14.3	Relaciones básicas	407
14.4	Definiciones	409
14.5	Convención de signos	410
14.6	Momentos de empotramiento para diversas cargas	410
14.7	Aplicación de la distribución de momentos	412
14.8	Modificación de la rigidez para el caso de apoyos simples	415
14.9	Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante	417
14.10	Soluciones con la computadora	420
	Problemas	420
	Referencia bibliográfica	424

**15****Distribución de momentos: marcos continuos****425**

15.1	Marcos sin desplazamiento lateral	425
15.2	Marcos con desplazamiento lateral	427
15.3	Momentos debidos al desplazamiento lateral	429
15.4	Marcos con elementos inclinados	438
15.5	Marcos de muchos niveles	442
15.6	Soluciones con la computadora	447
	Problemas	447
	Referencia bibliográfica	456

**16****Introducción a los métodos matriciales****457**

16.1	Análisis estructural usando la computadora	457
16.2	Métodos matriciales	457
16.3	Repaso del álgebra matricial	457
16.4	Métodos de análisis de las fuerzas y de los desplazamientos	459
16.5	Introducción al método de las fuerzas o de las flexibilidades	460
	Problemas	466
	Referencia bibliográfica	468

**17****Fundamentos del método  
de los desplazamientos o de la rigidez**

469

- 17.1 Introducción 469
- 17.2 Relaciones generales 469
- 17.3 Ecuaciones de rigidez para elementos con fuerza axial 472
- 17.4 Ecuaciones de rigidez para elementos a flexión 478
- 17.5 Matriz de rigidez para elementos con carga axial y flexión 488
- 17.6 Características de las matrices de rigidez 491
- 17.7 Relación entre matrices de rigidez y de flexibilidad 492
- Problemas 494

**18****Matrices de rigidez  
para elementos inclinados**

499

- 18.1 Generalidades 499
- 18.2 Elementos con fuerza axial 499
- 18.3 Elementos a flexión 506
- 18.4 Cargas aplicadas entre los nodos 517
- Problemas 523

**19****Técnicas matriciales adicionales**

528

- 19.1 Generalidades 528
- 19.2 Suma de ecuaciones de rigidez 528
- 19.3 Matrices de rigidez para elementos inclinados 530
- 19.4 Ecuaciones de rigidez para estructuras con desplazamientos impuestos 533
- 19.5 Ecuaciones de rigidez para estructuras sujetas a cambios de temperatura 535
- 19.6 Ecuaciones de rigidez para estructuras con elementos con longitudes incorrectas 537
- 19.7 Aplicaciones de la subdivisión de matrices 538
- 19.8 Condensación 539
- 19.9 Ancho de banda de matrices de rigidez para estructuras en general 514
- Problemas 544

**20****Análisis estructural  
con microcomputadoras**

547

- 20.1 Generalidades 78
- 20.2 Programa Pacm 547
- 20.3 Análisis de armaduras planas 549

20.4	Análisis de armaduras espaciales o tridimensionales	559
20.5	Análisis de vigas continuas	561
20.6	Análisis de marcos	567
20.7	Preparación de archivos de datos para usarse con los programas ARMA2D, ARMA3D y MARCO	572
20.8	Advertencia: Peligro	574
	Problemas	575
	Bibliografía	580

## Apéndices

### A

#### Segundo teorema de Castigliano

581

A.1	Introducción	581
-----	--------------	-----

### B

#### Algebra matricial

592

B.1	Introducción	592
B.2	Definición y propiedades de las matrices	592
B.3	Tipos especiales de matrices	593
B.4	Determinante de una matriz cuadrada	594
B.5	Matriz adjunta	596
B.6	Aritmética matricial	597
B.7	Método de Gauss para resolver ecuaciones simultáneas	602
B.8	Temas especiales	604
	Referencia bibliográfica	609

### C

#### Instalación del programa PAEM

610

C.1	Introducción	610
-----	--------------	-----

---

# Introducción

## 1.1 ANALISIS Y DISEÑO ESTRUCTURAL

La aplicación de cargas a una estructura produce fuerzas y deformaciones en ella. La determinación de estas fuerzas y deformaciones se llama *análisis estructural*.

*El diseño estructural* incluye el arreglo y dimensionamiento de las estructuras y sus partes, de tal manera que las mismas soporten satisfactoriamente las cargas colocadas sobre ellas. En particular, el diseño estructural implica lo siguiente: la disposición general de las estructuras; estudio de los posibles tipos o formas estructurales que representen soluciones factibles; consideración de las condiciones de carga; análisis y diseño preliminares de las soluciones posibles; selección de una solución y análisis y diseño estructural final de la estructura, incluyendo la preparación de planos.

Este libro se dedica al análisis estructural con sólo algunas observaciones oportunas relativas a otras fases del diseño estructural. El análisis estructural puede ser tan interesante para algunas personas, que quizás decidan dedicarse por completo a su estudio. Aunque analizar y predecir el comportamiento de las estructuras y sus partes es una etapa sumamente importante del diseño estructural, en realidad sólo se trata de uno de varios pasos importantes interrelacionados. En consecuencia, es poco común que una persona se dedique exclusivamente al análisis estructural. La persona probablemente se ocupará de varias o todas las fases del diseño estructural.

Se dice que Robert Louis Stevenson estudió ingeniería estructural durante algún tiempo de su vida, pero aparentemente encontró que la "ciencia de los esfuerzos y las deformaciones" era demasiado aburrida para su fértil imaginación, y por ello dedicó su vida a escribir prosa y poesía [1]. Después de leer algunas de sus obras (*La isla del tesoro*, *Secuestrado*, etc.), la mayoría de nosotros estamos de acuerdo en que el mundo es un mejor sitio para vivir debido a su decisión. Sin embargo, hay muchos que pensamos que el análisis y el diseño estructural son temas muy interesantes. Esperamos que este libro aumente el número de personas que estén de acuerdo con esta idea.



Puente White Bird Canyon, White Bird, Idaho. (Cortesía del American Institute of Steel Construction, Inc.)

## 1.2 TIPOS DE ESTRUCTURAS

La ingeniería estructural abarca una extensa variedad de estructuras aparte de puentes y edificios. Entre ellas podemos citar estadios, torres de transmisión de energía eléctrica, torres de radio y televisión, cables, arcos, tanques de agua, pavimentos de concreto y muchas más. Los tamaños varían desde marcos pequeños con pocas vigas y columnas, hasta la Torre Sears de 440 m de altura en Chicago y el puente del estuario Humber en Inglaterra con su claro colgante de 1 400 m.

Para enfrentarse a esta amplia variedad de tamaños y tipos de estructuras, no parece aconsejable, para aquellos que se inician en el campo de las estructuras, el aprender a tratar uno o dos casos especiales de las mismas. Deben aprender los principios básicos, que se aplican no sólo a las estructuras mencionadas en el párrafo anterior, sino también a estructuras de tipos que no se encuentran necesariamente dentro del campo de la ingeniería civil, por ejemplo barcos y aeroplanos.

Las leyes de la Estática, que son el fundamento del análisis estructural, se enfatizan a lo largo de todo el libro. Este énfasis debe dar a los lectores una base sólida para un estudio más avanzado, convencerlos de que la teoría estructural no es difícil y de que es innecesario memorizar casos especiales. Podría parecer que algunas de las estructuras por analizarse tienen formas rebuscadas; éstas no se incluyen para confundir, sino para hacer ver que los principios básicos se aplican a todas las estructuras independientemente del tamaño o de la forma.



Figura 1.1

### 1.3 ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Los tipos básicos de elementos estructurales que consideraremos son los siguientes.

**Vigas.** Son aquellos elementos sometidos a flexión. Se trata de elementos generalmente usados en posición horizontal y sujetos a cargas por gravedad o verticales.

**Tirantes.** Son elementos sometidos sólo a tensión axial.

**Puntales.** Son elementos sujetos sólo a compresión axial. (Se incluyen entre ellos a las columnas y a los montantes cargados axialmente.)

### 1.4 ARMADURAS Y MARCOS

La armadura (articulada en sus nudos) y el marco (con nudos resistentes a momentos) son los dos tipos estructurales básicos construidos a base de elementos estructurales.

Una **armadura** consta de un grupo de tirantes y puntales diseñados y conectados de tal manera que forman una estructura que actúa como una viga de gran tamaño. Los elementos forman comúnmente uno o varios triángulos en un solo plano y están dispuestos en forma tal que las cargas externas se aplican en los nudos, por lo que teóricamente sólo causan tensión o compresión axial en los elementos. Se supone que los elementos están conectados en sus nudos por medio de pasadores sin fricción, los cuales permiten que los extremos de los miembros giren libremente. En la fig. 1.1 se muestra un tipo común de armadura.

Inicialmente consideraremos armaduras contenidas en un solo plano; sin embargo, en el capítulo 6 analizaremos armaduras con elementos en planos no comunes. Estas armaduras se llaman tridimensionales o espaciales. (Dos tipos de armaduras espaciales que se ven con frecuencia son las torres de transmisión y los domos.)

Los elementos de un **marco con juntas o nudos resistentes a momento** están conectados rígidamente en sus extremos. Cuando se aplican cargas a esa estructura, ésta se deformará y sus nudos rotarán, pero los elementos que se unen en un nudo particular no se moverán entre sí (o sea, los ángulos entre los extremos de los elementos no cambiarán). En la fig. 1.2 se muestran varios marcos con nudos re-



Figura 1.2

sistentes a momento. Veremos luego que el uso de nudos resistentes a momento, incrementa la capacidad de carga de una estructura.

### 1.5 CARGAS

La estimación precisa de las cargas que pueden aplicarse a una estructura durante su periodo de vida útil, es tal vez la tarea más importante y difícil del diseñador de estructuras. No pueden dejar de considerarse cargas que puedan presentarse con cierta probabilidad razonable. Una vez estimadas las cargas, el siguiente problema consiste en determinar cuál será la peor o más desfavorable combinación de éstas que pueda presentarse en un momento dado. Por ejemplo, un puente carretero, ¿podría estar completamente cubierto con hielo o nieve y también sujeto a las cargas dinámicas de camiones pesados viajando a gran velocidad en todos los carriles y además soportar un viento lateral de 150 km/h, o es más factible una combinación menor de esas cargas?

Las dos secciones siguientes de este capítulo proporcionan una breve introducción a los tipos de cargas que el diseñador de estructuras debe conocer. El propósito de estas secciones no es analizar las cargas en gran detalle, sino dar al lector una idea general del tema. Como veremos, las cargas se clasifican en muertas y vivas.

### 1.6 CARGAS MUERTAS

Las cargas muertas son cargas de magnitud constante que permanecen en un mismo lugar; constan del peso propio de la estructura y de otras cargas que están permanentemente unidas a ella. En un edificio con estructura de acero algunas de las cargas muertas son la estructura en sí, las paredes, los pisos, las tuberías y los accesorios.

Para diseñar una estructura es necesario estimar los pesos o cargas muertas de las diversas partes para considerarlas en el diseño. Los tamaños y pesos exactos de las partes no se conocen hasta que se ha hecho el análisis estructural y se han seleccionado los elementos para la estructura. Los pesos obtenidos en el diseño deben compararse con los pesos estimados. Si se encuentran grandes discrepancias, será necesario repetir el análisis y diseñar usando pesos mejor estimados.

Pueden obtenerse estimaciones razonables de pesos estructurales comparando estructuras de tipo similar o fórmulas y tablas contenidas en la mayoría de los manuales de ingeniería civil. Un ingeniero experimentado puede estimar con mucha precisión los pesos de la mayoría de los elementos estructurales e invertirá poco tiempo en repetir diseños con estimaciones deficientes.

### 1.7 CARGAS VIVAS

Las cargas vivas son cargas que pueden cambiar en magnitud y en posición. Simplemente dicho, todas las cargas que no son muertas son vivas. Las cargas vivas que se mueven con su propia fuente de energía, como camiones, personas y grúas

se denominan móviles, mientras que las cargas que pueden ser movidas, como muebles, materiales de un almacén y la nieve se llaman móviles. Otras cargas vivas son las causadas por las operaciones de la construcción, el viento, la lluvia, los sismos, las explosiones, los suelos y los cambios de temperatura. Sigue a continuación una breve descripción de algunas de esas cargas:

1. *Hielo y nieve.* Las cargas ocasionadas por el hielo y la nieve en las regiones geográficas de baja temperatura son con frecuencia de mucha importancia. Diez centímetros de nieve equivalen aproximadamente a  $10 \text{ kg/m}^2$ , pero puede ser mayor, a menores elevaciones, donde la nieve es más densa. Para el diseño de techos se usan cargas de nieve de entre  $50$  y  $200 \text{ kg/m}^2$ , dependiendo esta magnitud de la pendiente del techo y en menor grado, del carácter de la superficie del mismo. Los valores mayores se usan para techos horizontales y los menores para techos con pendiente. La nieve tiende a resbalar de los techos lisos, particularmente de aquellos con superficies metálicas o de pizarra. Podría usarse una carga de  $50 \text{ kg/m}^2$  para pendientes de  $45^\circ$  y una de  $200 \text{ kg/m}^2$  para techos horizontales. En ciertas áreas con inviernos muy intensos, como en el norte del estado de Maine, se han detectado cargas de nieve de hasta  $500 \text{ kg/m}^2$ . En Estados Unidos estos factores se rigen por normas establecidas por la American National Standards Institute (ANSI) [2].



Edificio de oficinas de PROBURSA, S.A. de C.V. en Periférico Sur, Cd. de México.  
(Cortesía de ILIDEM, S.A.)

La carga máxima de nieve que se usa para el diseño de una estructura en particular depende de la carga de nieve en el suelo de la localidad, de la exposición de la estructura al viento, de la importancia de la estructura y de otros factores.

La nieve es una carga variable que puede cubrir el techo entero o sólo parte de él. Puede haber acumulaciones contra las paredes, en zonas intermedias o entre parapetos. La nieve puede resbalar de un techo a otro situado más abajo. El viento puede barrerla de un lado de un techo inclinado, o bien permanecer en él aun durante vientos muy intensos.

Los puentes generalmente no se diseñan para cargas de nieve, ya que la magnitud de estas cargas no son apreciables. En todo caso, es dudoso que se presente simultáneamente una carga total de ésta junto con una carga máxima de tránsito. En ocasiones, los puentes y torres quedan recubiertos con capas de hielo de 3 a 5 cm de espesor. El peso del hielo que se forma es de 50 kg/m<sup>2</sup>, aproximadamente. Otro factor que debe considerarse es el incremento en área expuesta al viento en los elementos recubiertos de hielo.

2. *Lluvia*. Aunque las cargas de nieve presentan un problema más severo que las cargas por lluvia en techos inclinados, la situación puede invertirse en los techos horizontales, particularmente en climas cálidos. Si el agua sobre un techo se acumula más rápidamente de lo que puede ser drenada, el resultado se denomina *encharcamiento*; la carga incrementada sobre el techo deflexiona a éste, dándole la forma de un plato que puede contener más agua que a su vez ocasiona mayores deflexiones, etc. Este proceso se repite hasta que se excede el equilibrio y la estructura se desploma. En Estados Unidos ocurren cada año derrumbes de estructuras debido al encharcamiento.

El encharcamiento puede ocurrir hasta cierto grado en cualquier techo horizontal aun cuando se disponga de drenes pluviales; éstos pueden resultar insuficientes durante fuertes tormentas o atascarse total o parcialmente. El mejor método para impedir el encharcamiento es tener una pendiente adecuada en el techo (2 cm/m o mayor) junto con un buen sistema de drenes. Además del encharcamiento ordinario, puede presentarse otro problema en techos horizontales muy grandes (4 000 m<sup>2</sup> o más de área). Durante tormentas intensas pueden presentarse también vientos muy fuertes. Si se tiene una gran cantidad de agua sobre el techo, un viento fuerte puede desplazar una parte de ella hacia un extremo, con el consiguiente incremento en la carga debido a la profundidad adquirida por el agua en esa zona. Para remediar tales situaciones, se usan a veces *imbornales*; éstos son grandes agujeros o tubos en las paredes o los parapetos, para que el agua que sobrepase cierto nivel se drene rápidamente fuera del techo.

3. *Cargas de tránsito para puentes*. Los puentes están sometidos a una serie de cargas concentradas de magnitud variable provenientes de los ejes de camiones o trenes. En el capítulo 7 se presenta un análisis detallado de ese tipo de cargas.

4. *Cargas de impacto*. Las cargas de impacto son causadas por las vibraciones de las cargas móviles. Es claro que un bulto que se deja caer sobre el piso de una bodega o un camión rebotando sobre un pavimento irregular, ocasiona fuerzas mayores que las que se presentarían si las cargas respectivas se aplicasen gradualmente.

## 1.7 Cargas vivas

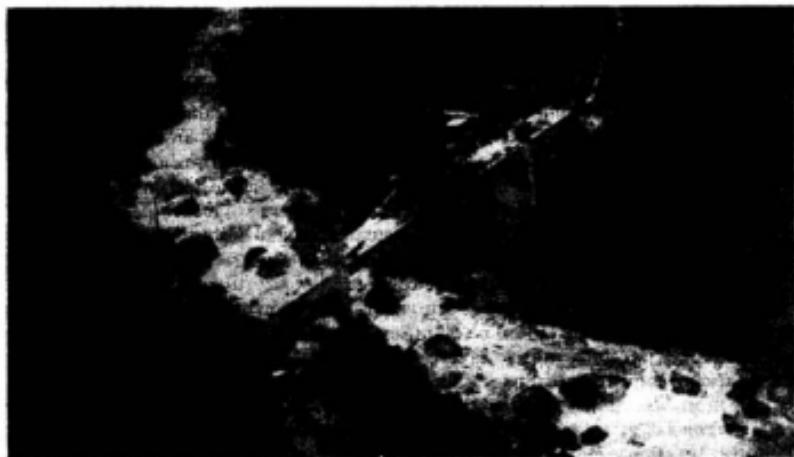
7

Las cargas de impacto son iguales a la diferencia entre la magnitud de las cargas realmente causadas y la magnitud de las cargas si éstas hubiesen sido muertas. En el capítulo 7 se dan varias expresiones comúnmente usadas para estimar el impacto.

5. *Cargas laterales*. Las cargas laterales son de dos tipos principales: por viento y por sismo. Muchas fallas estructurales han sido ocasionadas por el viento. Una de las más conocidas es tal vez la ocurrida en el puente Tay en Escocia en 1879 (murieron 75 personas); el derrumbe del puente Tacoma en el Estado de Washington es también muy conocido. Han ocurrido también fallas desastrosas en edificios debidos al viento, como la del edificio Union Carbide en Toronto en 1958. Muchas de las fallas en edificios han ocurrido durante el proceso de montaje [3].

a. *Cargas de viento*. Muchas investigaciones se han llevado a cabo en años recientes relativas a las cargas de viento. Sin embargo, queda mucho por hacer, ya que la estimación de tales cargas de ninguna manera puede considerarse como una ciencia exacta. Las magnitudes de las cargas del viento varían con la localidad geográfica, la altura sobre el terreno, el tipo de terreno que rodea al edificio, incluyendo otras estructuras aledañas y con otros factores.

Las presiones del viento se suponen en general uniformemente aplicadas a la superficie de barlovento de los edificios y se considera que pueden provenir de cualquier dirección. Estas hipótesis no son muy correctas porque las presiones del viento no son uniformes sobre grandes áreas; las presiones cerca de las esquinas de los edificios alcanzan probablemente ahí sus intensidades máximas. Por lo tanto, desde



Puente de cables de la hidroeléctrica San Carlos, Colombia. (Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)

un punto de vista práctico, es imposible considerar todas las variaciones posibles en el diseño, aunque las especificaciones actuales tienden a ser más detalladas en la formulación de sus requisitos.

Cuando el ingeniero se encuentra diseñando grandes estructuras estacionarias y hace estimaciones erróneas del viento, los resultados probablemente no serán muy serios, pero no será tal el caso cuando tenga que diseñar edificios altos y esbeltos (o grandes puentes flexibles). Durante años, muchos ingenieros han ignorado la fuerza del viento en edificios cuyas alturas no eran por lo menos el doble de sus dimensiones laterales mínimas. En tales casos se pensaba que los pisos y las paredes proporcionaban suficiente rigidez lateral para eliminar la necesidad de usar un sistema de arriostramiento (contraventeo). Sin embargo, es mejor considerar todas las posibles condiciones de carga que una estructura en particular tenga que resistir. Si una o más de esas condiciones (por ejemplo, la carga de viento) resulta de poca importancia, puede entonces eliminarse. Si los edificios tienen sus paredes y pisos construidos con materiales de peso ligero y/o se encuentran sometidos a cargas de viento sumamente grandes (un caso común en zonas montañosas o costeras), ellos tendrán probablemente que ser diseñados por carga de viento, aun si la relación de la altura a la dimensión mínima lateral es menor que 2.

Los reglamentos de construcción no proporcionan usualmente las fuerzas estimadas durante un tornado. Muchos ingenieros consideran que las fuerzas suscitadas a lo largo de la ruta de un tornado son tan grandes que no es factible, desde un punto de vista económico, diseñar estructuras que las resistan. Sin embargo, esta idea está cambiando, ya que se ha encontrado que la resistencia al viento de las estructuras (aun de casas pequeñas) puede incrementarse considerablemente a un precio razonable uniendo firmemente entre sí las diversas partes de la estructura, tales como techos, paredes y cimentación.

Las fuerzas del viento actúan como presiones sobre las superficies verticales a barlovento, como presiones o succiones en superficies inclinadas (el signo depende de la pendiente) y como succiones en superficies horizontales, en superficies verticales a sotavento y en superficies inclinadas (debido a la formación de presiones negativas o vacíos). Este efecto lo habrá observado por la succión cuando se levantan las tejas o las cubiertas de techos en las superficies a sotavento de edificios. La succión puede comprobarse fácilmente sosteniendo una hoja de papel por dos de sus esquinas y soplando por encima de ella. En algunas estructuras comunes la succión puede ser de 100 a 150 kg/m<sup>2</sup> o mayor.

Durante el paso de un huracán ocurre una reducción considerable de la presión atmosférica. Esta reducción no se manifiesta en el interior de edificios herméticos y las presiones interiores, al ser mayores que las exteriores, generan fuerzas dirigidas hacia afuera contra los techos y paredes.

El promedio de los reglamentos de construcción en Estados Unidos no hacen referencia a las velocidades del viento, ni a las formas de los edificios ni a otros factores. En ellos se pide, en general, el uso de cierta presión de viento para el diseño, por ejemplo 100 kg/m<sup>2</sup> sobre superficies proyectadas verticalmente con elevaciones de hasta 100 m con un incremento de 12 kg/m<sup>2</sup> por cada incremento de 30 m

en la elevación. Los valores dados en esos reglamentos se consideran algo imprecisos para el diseño estructural moderno.

El Comité para el estudio de las fuerzas del viento de la Sociedad de Ingenieros Civiles de Estados Unidos (ASCE, American Society of Civil Engineers), realizó durante varios años un importante estudio de las fuerzas del viento, cuya obra tituló *Wind Forces on Structures* [4] que presentó en 1961. Como lo indicó en su informe, el propósito fue suministrar una información sucinta que fuese útil para los profesionales de la ingeniería civil.

Presenta datos relativos a coeficientes de presión por el viento para varios tipos de estructuras, así como las velocidades máximas en diversas áreas geográficas en Estados Unidos. Lo anterior para hacer posible el calcular las fuerzas reales ocasionadas por el viento.

La presión del viento en un edificio puede estimarse con la siguiente expresión, en la que  $p$  es la presión en  $\text{kg/m}^2$  actuando sobre superficies verticales,  $C_s$  es un coeficiente de forma y  $V$  es la velocidad del viento en  $\text{km/h}$ , estimada de acuerdo con los registros locales meteorológicos.

$$p = 0.004824 C_s V^2$$

El coeficiente  $C_s$  depende de la forma de la estructura y principalmente de la del techo. Para estructuras tipo cajón,  $C_s = 1.3$ , del cual 0.8 corresponde a la presión en el lado de barlovento y 0.5 a la succión en el lado de sotavento. Para tales edificios la presión total sobre las dos superficies es igual, aproximadamente, a  $100 \text{ kg/m}^2$  para una velocidad del viento de  $125 \text{ km/h}$ .

Como se vio en los párrafos anteriores, la determinación exacta de la carga de viento más crítica sobre un edificio o puente es extraordinariamente difícil. Sin embargo, se dispone en la actualidad de suficiente información que permite efectuar estimaciones satisfactorias sobre bases razonablemente sencillas.

b. *Cargas sísmicas*. Muchas áreas del mundo están en territorio sísmico y en esas áreas es necesario considerar fuerzas sísmicas en el diseño de los edificios, ya sean éstos altos o bajos. Un sismo ocasiona aceleraciones en la superficie del terreno. Estas aceleraciones pueden descomponerse en sus componentes verticales y horizontales. Normalmente la componente vertical es insignificante, pero la horizontal puede ser de magnitud considerable.

La mayoría de los edificios pueden diseñarse con poco costo extra para resistir las fuerzas generadas por un sismo de regular intensidad. Por otra parte, los sismos de años recientes han mostrado claramente que los edificios diseñados sin considerar las fuerzas sísmicas pueden ser destruidos por sismos de pequeña intensidad. La práctica usual es diseñar los edificios por cargas laterales adicionales (que representan las estimaciones de las fuerzas sísmicas) que son iguales a cierto porcentaje (5 a 10%) del peso del edificio y su contenido. Una excelente referencia sobre el tema de las fuerzas sísmicas es una publicación de la Structural Engineers Association of California titulada *Recommended Lateral Force Requirements and Commentary* [5].

Algunas personas consideran las cargas sísmicas de diseño sólo como incremen-

tos porcentuales de las cargas de viento. Esta idea no es correcta, ya que las cargas sismicas difieren en su manera de actuar respecto de las cargas de viento; éstas no son proporcionales al área expuesta, sino al peso del edificio arriba del nivel considerado.

El efecto de la aceleración horizontal crece con la distancia por encima del terreno debido al efecto vibratorio del sismo, por lo que las cargas de diseño deben incrementarse proporcionalmente. Es claro que torres, tanques de agua y penthouses en las azoteas de edificios ocupan posiciones precarias durante un sismo.

La fig. 1.3 muestra las tres principales zonas de peligrosidad sismica en México y su equivalente aproximado en la escala de Mercalli [6].

6. *Cargas longitudinales.* Las cargas longitudinales son otro tipo de cargas que necesitan considerarse en el diseño de algunas estructuras. Al detenerse un tren o un camión en un puente se producen en éste fuerzas longitudinales. No es difícil imaginar la tremenda fuerza longitudinal desarrollada en un puente por un camión de 40 toneladas viajando a 100 km/h si a éste se le aplican repentinamente los frenos. Hay otras situaciones de carga longitudinal, por ejemplo la que se suscita cuando un barco golpea un muelle durante su atraque o la debida al movimiento de una grúa viajera soportada por los marcos de una estructura.

7. *Otras cargas vivas.* Entre los otros tipos de cargas vivas a las que el diseñador de estructuras tendrá que enfrentarse en la práctica de su profesión, se encuentran las *presiones del suelo* (presión lateral de la tierra sobre muros, presión hacia arriba



Presa Jicalán, Michoacán, México. (Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)

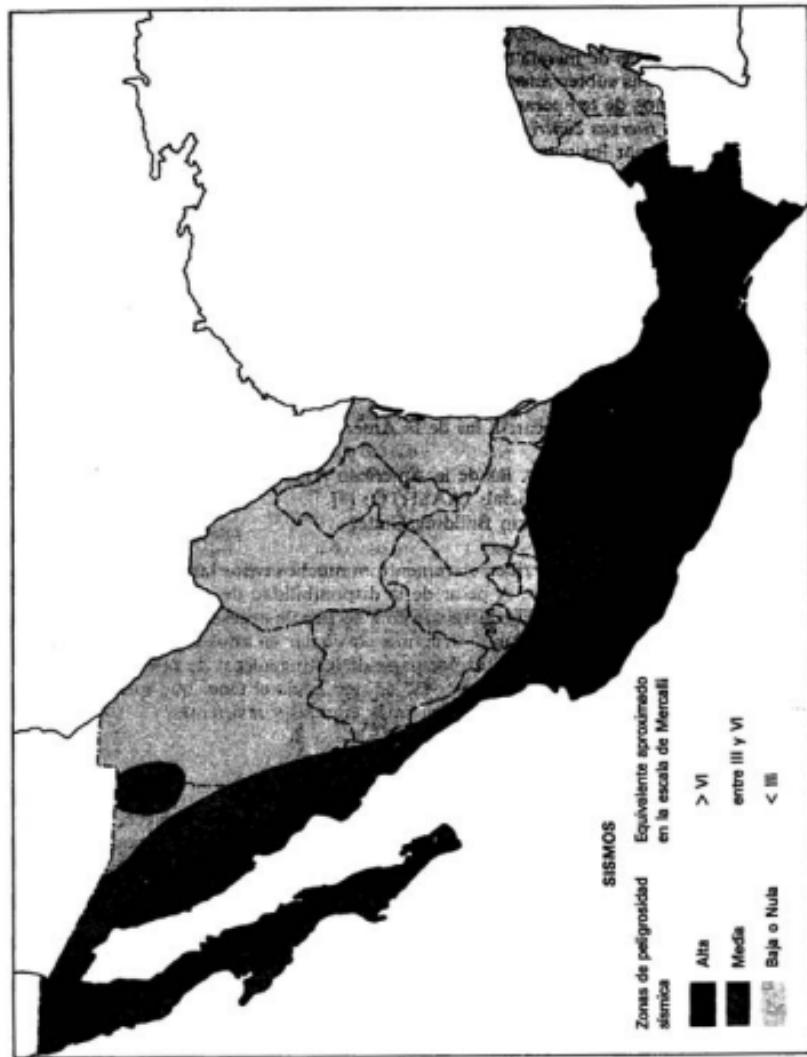


Figura 1-3. Carta simplificada de Fendones geológicos del Atlas Nacional de México, editado por el Instituto de Geografía de la Universidad Nacional Autónoma de México.

sobre cimentaciones); las *presiones hidrostáticas* (presión del agua sobre la cortina de una presa, fuerzas de inercia de grandes masas de agua durante sismos, subpresiones en estructuras subterráneas); las *cargas por explosiones*; las *fuerzas térmicas* (debidas a cambios de temperatura que ocasionan deformaciones y fuerzas en las estructuras); las *fuerzas centrífugas* (como las causadas por camiones y trenes en puentes curvos o por los carros de montañas rusas, etc.).

## 1.8 SELECCIÓN DE LAS CARGAS DE DISEÑO

Para ayudar al ingeniero a estimar las magnitudes de las cargas vivas necesarias para diseñar estructuras, se han elaborado a través de los años una serie de especificaciones y reglamentos de construcción. Estos documentos proporcionan estimaciones conservadoras de las magnitudes de las cargas vivas para diversas situaciones. Una de las especificaciones para cargas de diseño más ampliamente usada, es la publicada por el American National Standards Institute (ANSI). Otras también muy usadas son:

1. Para puentes de ferrocarril, las de la American Railway Engineering Association (AREA) [7].
2. Para puentes carreteros, las de la American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO) [8].
3. Para edificios, el Uniform Building Code.

Estas especificaciones describen claramente en muchos casos las cargas con que deben diseñarse las estructuras. A pesar de la disponibilidad de esta información, el ingenio y conocimientos del ingeniero son con frecuencia necesarios para predecir qué cargas tendrá que soportar una estructura particular en años venideros. En el pasado, las estimaciones insuficientes por parte de los ingenieros de puentes de las futuras cargas de tránsito, han tenido como consecuencia el tener que reemplazar una gran cantidad de estructuras por otras más amplias y resistentes.

## 1.9 UNIDADES SI

La Oficina Internacional de Pesas y Medidas tiene como objetivo establecer un sistema de unidades racional, coherente y de uso universal. En 1960, tal Organización llamó a este sistema el "Sistema Internacional de Unidades", con la abreviatura SI en todos los idiomas. Las unidades SI, en curso de ser adoptadas por la mayoría de países, incluyendo los de habla inglesa (Gran Bretaña, Australia, Canadá, África del Sur y Nueva Zelanda), difieren del sistema métrico usado actualmente en la mayoría de los países europeos y en muchas otras partes del mundo.

El sistema SI tiene la gran ventaja de que sólo admite una unidad para cada cantidad física, por ejemplo el metro (m) para longitudes, el kilogramo (kg) para masas, el segundo (s) para el tiempo, el newton (N) para fuerzas, etc. De estas unidades básicas se obtienen otras, como sigue:

área	metro cuadrado ( $m^2$ )
aceleración	metro por segundo cuadrado ( $m/s^2$ )
fuerza	kilogramo-metro por segundo cuadrado ( $kg \cdot m/s^2$ ) = newton (N)
esfuerzo	newton por metro cuadrado ( $N/m^2$ ) = pascal (Pa)

Los múltiplos de esas unidades, según el sistema decimal, se expresan en potencias de 10, cuyos exponentes son múltiplos de 3; en la tabla 1.1 se muestra esto para las unidades de longitud. En otras palabras, se recomiendan múltiplos y submúltiplos de 1 000. Obsérvese que el centímetro no se muestra, porque su valor (que sería de  $10^{-2}$  en la tabla) es inconsistente con la teoría de tener prefijos que sean potencias de 10, cuyos exponentes son múltiplos de tres.

TABLA 1.1 MULTIPLOS DECIMALES DEL SISTEMA SI

Símbolo SI	Nombre	Multiplicador	Ejemplo (metros)
G	giga	1 000 000 000	Gm = 1 000 000 000
M	mega	1 000 000	Mm = 1 000 000
k	kilo	1 000	km = 1 000
m	milí	0.001	mm = 0.001
$\mu$	micro	0.000 001	$\mu m = 0.000 001$
n	nano	0.000 000 001	nm = 0.000 000 001



Acercamiento de un claro con vigas de acero del Puente Milwaukee Harbor.  
(Cortesía de Wisconsin Department of Transportation.)

En muchas partes del mundo se usa la coma para indicar un decimal; para evitar confusión, en el sistema SI se usan espacios en vez de comas. Para un número con cuatro o más dígitos, éstos se separan en grupos de tres, contando hacia la derecha o hacia la izquierda desde el punto decimal. Por ejemplo, 3,245,621 se escribe 3 245 621 y 2.015.3216 se escribe 2 015.321 6.

Cuando deben multiplicarse unidades entre sí, se usa un punto para separarlas. El momento flexionante es un término usado frecuentemente en el análisis estructural. En unidades SI se expresa en newton-metros. Debe escribirse  $N \cdot m$  (no  $mN$ , que significa milinewtons). El proyectista debe ser muy cuidadoso con el uso de los símbolos; por ejemplo, es correcto escribir 100 metros, pero en forma abreviada debe usarse 100 m y no 100 ms, que significa 100 milisegundos.

La unidad de esfuerzo en el sistema SI es el newton por metro cuadrado ( $N/m^2$ ), que se llama también un pascal (Pa). Un megapascal (MPa) es aproximadamente igual a  $10 \text{ kg/cm}^2$ .

## 1.10 DIAGRAMAS LINEALES

Para calcular las fuerzas en una estructura con relativa sencillez, es necesario hacer un esquema con una serie de líneas que representen los ejes centrales de cada elemento estructural. Esta convención ocasiona algunas discrepancias con las condiciones reales, pero los errores quedan generalmente dentro de límites razonables.

Los diagramas de líneas son una representación de las estructuras reales que el lector puede encontrar en cualquier parte, por ejemplo, en su localidad; sugerimos por ello que intente visualizar la configuración de tales estructuras. La fig. 1.4(a) muestra una serie de viguetas de madera soportadas por una viga maestra que a su

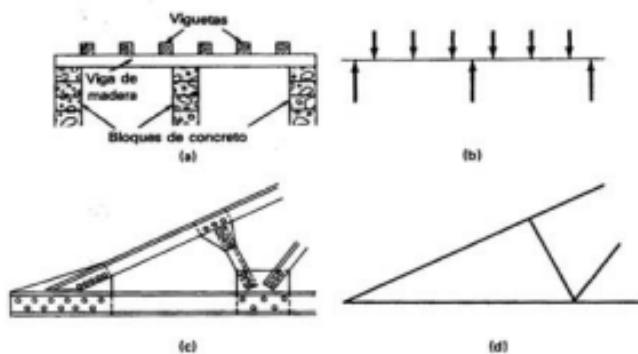


Figura 1.4

vez está soportada en muros de bloques de concreto. En la fig. 1.4(b) se muestra el diagrama lineal para la viga, sus apoyos y las cargas aplicadas a ella. La carga transmitida por una vigueta a la viga maestra en realidad está distribuida sobre el ancho de la vigueta, pero el diagrama sólo muestra una flecha actuando en el centro de ésta. Una situación similar se presenta en el apoyo suministrado por los muros a la viga maestra.

En la fig. 1.4(c) se muestra una sección de una armadura de acero para techo con sus conexiones usuales; su diagrama lineal se muestra en la fig. 1.4(d).



Edificio de la oficina matriz de la Pacific Gas and Electric Company, San Francisco. (Cortesía de Bethlehem Steel Co.)

### 1.11 EXACTITUD DE LOS CALCULOS

Un punto muy importante que es difícil de entender, es que el análisis estructural no es una ciencia exacta en la que puedan calcularse respuestas confiables con ocho o más cifras significativas. Los resultados obtenidos con tres cifras significativas son probablemente más precisos que las estimaciones de las resistencias de los materiales y que las magnitudes de las cargas usadas para el análisis y el diseño estructural. Los materiales usados comúnmente en las estructuras (madera, acero, concreto y algunos otros) tienen resistencias últimas que sólo pueden estimarse aproximadamente. Las cargas aplicadas a las estructuras pueden conocerse sólo con cierta aproximación (en algunos casos de cientos de kilos), por lo que parece inconsistente emplear cálculos de fuerzas y momentos con más de tres cifras significativas.

Haremos algunas hipótesis sólo parcialmente ciertas sobre la construcción de armaduras; por ejemplo, que los elementos de éstas están conectados por medio de pasadores sin fricción, que las deformaciones de los elementos, las barras, de la armadura cargada son tan pequeñas, que no causarán ningún efecto en las fuerzas aplicadas, etc. Estas discrepancias de las condiciones reales, enfatizan que es de poca utilidad efectuar el análisis estructural con demasiadas cifras significativas; el hacerlo así, puede dar una impresión de falsa exactitud.

### 1.12 VERIFICACION DE LOS PROBLEMAS

Una característica del análisis estructural es la posibilidad de efectuar verificaciones matemáticas de éste, usando algún otro método al empleado inicialmente o bien, usando el mismo método, pero desde otra ubicación en la estructura. El lector debería ser capaz, en casi todas las situaciones, de poder determinar si su trabajo ha sido hecho correctamente.

Desafortunadamente, en toda persona existe la tendencia a cometer errores exasperantes, y lo más que podemos hacer es tratar de reducirlo a un mínimo. La aplicación de ciertas revisiones aritméticas sencillas, que se sugieren en los próximos capítulos, eliminará muchos de tales costosos errores. El mejor ingeniero estructural no es el que comete menos errores, sino el que descubre la mayor parte de ellos y los corrige.

### 1.13 COMPUTADORAS

Cuando hoy en día un estudiante termina sus estudios formales y empieza a trabajar en una compañía de estructuras, tendrá a su alcance una gran variedad de computadoras (minis, micros, de bolsillo, etc.) que pueden programarse para efectuar análisis y diseño estructural. Además, los programas y equipo disponibles aumentan a un ritmo vertiginoso.

Como resultado de esta proliferación de equipo electrónico, el lector podría pre-guntarse, ¿para qué necesito aprender las teorías del análisis estructural si puedo

hacer el trabajo con un programa ya existente de computadora en unos cuantos minutos? Si una persona no tiene conocimientos de análisis estructural, no tendrá modo de saber si los resultados proporcionados por la computadora son o no correctos. Estos resultados serán sólo un conjunto de números que pueden ser razonables o totalmente falsos. Estos maravillosos artefactos electrónicos pueden usarse para eliminar gran parte del trabajo tedioso y de detalle implícito en el cálculo estructural, pero no pueden suplir la responsabilidad que los ingenieros tienen con sus estructuras. El ingeniero debe tomar decisiones respecto a la aplicación de un programa específico y a la confianza en sus respuestas.

### 1.14 ACCESO A LAS COMPUTADORAS

Sólo las compañías muy importantes pueden tener una computadora de gran tamaño, ya que su costo puede ascender a varios millones de pesos mensuales. Muchas empresas han encontrado que el costo de tener computadoras de gran tamaño en sus oficinas es demasiado grande para la cantidad de tiempo que las computadoras utilizan realmente para correr los programas de ingeniería. Sin embargo, los ingenieros necesitan acceso a las computadoras para ciertos problemas específicos, por lo que muchas compañías recurren a empresas que proporcionan servicios de cómputo, ya sea individual o en tiempo compartido; últimamente se ha popularizado el uso de las microcomputadoras y el de las calculadoras programables. Cuando se recurre a empresas que prestan servicios de cómputo, el proyectista no necesita saber computación o los programas que usan; él sólo debe proporcionar los datos a tales empresas; quienes escogen el programa adecuado y le entregan la solución. Los datos suministrados incluyen generalmente dimensiones, materiales, especificaciones, condiciones de carga y tipos de soporte. El tiempo empleado para este tipo de servicio varía entre uno o dos días y una semana y el precio para el cliente se estima generalmente con base en el número de horas utilizado con la computadora.

Entre las computadoras "de casa" y las empresas que ofrecen servicios de computación, se encuentra el servicio con tiempo compartido. Una compañía puede tener una terminal instalada en su oficina que le permita el acceso a una computadora que está en otra parte, cuyo costo es una pequeña fracción del necesario para instalar una computadora propia. El sistema de tiempo compartido consiste en un gran número de terminales remotas conectadas por teléfono a una computadora.

Prácticamente cada día se introducen al mercado nuevos modelos de microcomputadoras que tienen mayor capacidad y que son, sin embargo, más pequeñas, más rápidas y más económicas. Parece ser entonces que la microcomputadora será la estación de trabajo de los futuros ingenieros y los análisis por computadora en este libro están enfocados principalmente al uso de tales computadoras.

En este libro se ha intentado analizar estructuras con sólo unas cuantas incógnitas de manera que las teorías del análisis estructural queden claramente ilustradas sin ser ocultadas por la complejidad de los cálculos. Los problemas más largos (así como los cortos) pueden resolverse con computadora. En varios lugares el autor

hace indicaciones sobre los cálculos en los que la ayuda de la computadora es particularmente efectiva.

El capítulo 20 se dedica completamente a la aplicación de un conjunto de programas de computadora que se suministran en un disquete anexo a este texto. Con estos programas pueden resolverse rápidamente casi todos los problemas estructurales presentados en el libro.

## REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. *Proceedings of the First United States Conference on Prestressed Concrete* (Cambridge, Mass.: Instituto Tecnológico de Massachusetts, 1951), pág. 1.
2. *American National Standard Building Code Requirements for Minimum Design Loads in Buildings and Other Structures* (Nueva York: American Standards Institute, 1982), ANSI A58.1—1982.
3. Wind Forces on Structures, Task Committee on Wind Forces, Committee on Loads and Stresses, Structural Division, ASCE, Final Report, *Transactions ASCE* 126, Part II (1961): 1124-1125.
4. Ibid., págs. 1124-1198.
5. *Recommended Lateral Force Requirements and Commentary* (San Francisco, Calif.: Structural Engineers Association of California [SEAOC], 1975).
6. *Atlas Nacional de México*, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito exterior, Ciudad Universitaria, Apdo. Postal 20-850, 01000 México, D.F. Fax: 548-40-86
7. *Specifications for Steel Railway Bridges* (Chicago: American Railway Engineering Association [AREA], 1980).
8. *Standard Specifications for Highway Bridges*, 12a. ed. (Washington, D.C.: American Association of State Highway and Transportation Officials [AASHTO], 1983).

## Capítulo 2

# Reacciones

### 2.1 EQUILIBRIO

Se dice que un cuerpo en reposo está en *equilibrio*. La resultante de las cargas externas y reacciones que actúan sobre el cuerpo es igual a cero. No sólo debe ser cero la suma de todas las fuerzas (o de sus componentes) actuando en cualquier dirección posible, sino también la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a cualquier eje.

Para que una estructura o parte de ella esté en equilibrio bajo la acción de un sistema de cargas, debe satisfacer las seis ecuaciones de equilibrio de la Estática. Usando los ejes cartesianos  $x$ ,  $y$  y  $z$ , las ecuaciones pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 & \Sigma F_y &= 0 & \Sigma F_z &= 0 \\ \Sigma M_x &= 0 & \Sigma M_y &= 0 & \Sigma M_z &= 0\end{aligned}$$

Para fines de análisis y diseño, la mayoría de las estructuras pueden considerarse planas, sin pérdida de exactitud. En esos casos la suma de las fuerzas en las direcciones  $x$  y  $y$ , así como la suma de los momentos respecto a un eje perpendicular al plano debe ser *zero*:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_i = 0$$

Estas ecuaciones se escriben a veces de la siguiente manera:

$$\Sigma H = 0 \quad \Sigma V = 0 \quad \Sigma M = 0$$

Estas ecuaciones no se pueden demostrar algebraicamente; sólo describen la afirmación de sir Isaac Newton de que para cada acción sobre un cuerpo en reposo,

hay una reacción igual y opuesta. Si la estructura bajo consideración es una viga, una armadura, un marco rígido, etc., las ecuaciones de la Estática deben satisfacerse para que tal estructura permanezca en equilibrio.

Las estructuras estudiadas en los cinco primeros capítulos de este texto son estructuras planas; en el capítulo 6 se estudian las armaduras tridimensionales o espaciales.

## 2.2 CUERPOS MOVILES

En la sección anterior se afirmó que un cuerpo en reposo está en equilibrio. Sin embargo, es posible que una estructura entera se mueva y aún esté en equilibrio. Un avión o un barco se mueven, pero sus partes individuales no se mueven entre sí.

Para que las ecuaciones de la Estática sean aplicables a un cuerpo móvil, deben incluirse fuerzas adicionales. Estas son las fuerzas de inercia; incluidas en las ecuaciones, puede considerarse para los fines del análisis estructural que el cuerpo está sometido a un conjunto de fuerzas en equilibrio.

## 2.3 CALCULO DE LAS INCOGNITAS

Para identificar completamente a una fuerza, es necesario determinar tres características de ella: su magnitud, su sentido y su línea de acción. Todos estos valores se conocen para las cargas externas, pero para una reacción sólo se conoce el punto de aplicación y tal vez también la dirección.

El número total de incógnitas que pueden obtenerse con las ecuaciones de la Estática, está determinado por el número de ecuaciones disponibles. No hay ninguna diferencia entre cuántas reacciones tenga una estructura bidimensional o cuántas incógnitas tenga cada reacción; hay tres ecuaciones de la Estática que pueden usarse para determinar sólo tres incógnitas en cada estructura. La determinación de más de tres incógnitas necesita emplear ecuaciones adicionales a las de la Estática. Veremos que en algunos casos, debido a características especiales de la construcción, se dispone de ecuaciones de condición además de las ecuaciones usuales.

## 2.4 TIPOS DE SOPORTE

Las estructuras pueden soportarse por medio de articulaciones, rodillos, empotramientos o eslabones. Estos soportes se analizan en los siguientes párrafos.

Una *articulación* o soporte tipo pasador (representado aquí por el símbolo ) se supone que está conectada a la estructura por medio de un pasador sin fricción. Este tipo de soporte impide el movimiento en dirección vertical u horizontal, pero no impide ligeras rotaciones alrededor del pasador. Hay dos fuerzas desconocidas en una articulación: la magnitud de la fuerza necesaria para impedir el movimiento horizontal y la magnitud de la fuerza necesaria para impedir el movimiento vertical. (El soporte proporcionado por una articulación también puede considerarse como



Puente Coatzacoalcos II, Veracruz, México. (Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)



Puente El Bayano, Panamá. (Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)

una fuerza inclinada, que sería la resultante de las fuerzas horizontal y vertical en el soporte. Se tienen de todas maneras dos incógnitas: la magnitud y la dirección de la resultante inclinada.)

Un soporte de *rodillo* (representado aquí por el símbolo ), ofrece resistencia al movimiento sólo en una dirección perpendicular a la superficie de apoyo bajo el rodillo. No presenta resistencia a ligeras rotaciones respecto al eje del rodillo, o a movimientos paralelos a la superficie de apoyo. La única incógnita es la magnitud de la fuerza que evite el movimiento perpendicular a la superficie de apoyo. Los rodillos pueden instalarse de manera que impidan el movimiento hacia, o alejándose de la superficie de apoyo.

Un *empotramiento* (representado aquí por el símbolo ), ofrece resistencia a la rotación alrededor del soporte y al movimiento horizontal y vertical. Se tienen aquí tres incógnitas: la magnitud de la fuerza para impedir el movimiento horizontal, la magnitud de la fuerza para impedir el movimiento vertical y la magnitud del momento para impedir la rotación.

Un soporte tipo *eslabón* (representado aquí por el símbolo  ) es similar en su acción al rodillo, ya que los pasadores en cada extremo se suponen sin fricción. La línea de acción de la fuerza resistente debe tener la dirección del eslabón. Sólo se tiene una incógnita: la magnitud de la fuerza en la dirección del eslabón.



Estructuras industriales. Obra en México. (Cortesía de EISA.)

## 2.5 ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS

Al analizar los soportes vimos que en un empotramiento se tienen tres componentes de reacción desconocidas, dos en una articulación y sólo una en un rodillo o en un eslabón. Si para una estructura en particular, el número total de componentes de reacción es igual al número de ecuaciones disponibles, las incógnitas pueden calcularse y se dice entonces que la estructura es estáticamente determinada. Si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones disponibles la estructura es estáticamente indeterminada externamente; si es menor, es inestable externamente.

El arreglo interno de algunas estructuras es tal que permite disponer de una o más ecuaciones de condición. El arco de la fig. 2.11 tiene un pasador interno (o articulación) en C. El momento interno en este pasador "sin fricción" es cero porque no puede transmitirse ninguna rotación entre las partes adyacentes de la estructura. Se tiene aquí una condición especial porque el momento interno en el pasador debe ser cero, independientemente de la carga. No puede decirse lo mismo de otras secciones continuas de la estructura.

Por definición, una articulación no transmite rotaciones, y las tres ecuaciones de la Estática más la ecuación  $\Sigma M = 0$  en el pasador C permiten encontrar las cuatro componentes de la reacción en A y B. La omisión de una barra en la armadura de la fig. 5.15, se verá que da otra ecuación de condición. Si el número de ecuaciones de condición más las tres ecuaciones de la Estática es igual al número de incógnitas, la estructura es estáticamente determinada; si es mayor, es inestable y si es menor, es estáticamente indeterminada.

En la tabla 2.1 se clasifican varias estructuras respecto a su estaticidad. La viga e en la tabla, soportada en sus extremos con rodillos, es estable bajo cargas verticales, pero es inestable bajo cargas inclinadas. Una estructura puede ser estable bajo un arreglo de cargas, pero si no es estable para cualquier conjunto de cargas, entonces es inestable. A esta condición se le llama a veces *equilibrio inestable*. La estructura f tiene dos articulaciones internas y por ello dos ecuaciones de condición. Se tienen cinco ecuaciones disponibles y cinco componentes desconocidas de reacción; la estructura es estáticamente determinada. Si una de las articulaciones de soporte se cambiase por un rodillo, la estructura resultaría inestable.

## 2.6 INESTABILIDAD GEOMÉTRICA

La capacidad de una estructura para soportar adecuadamente las cargas aplicadas a ella depende no sólo del número de componentes de reacción sino también de la disposición de éstas. Es posible que una estructura tenga tantas o más componentes de reacción que el número de ecuaciones disponibles y ser, sin embargo, inestable. Esta condición se llama *inestabilidad geométrica*.

El marco de la fig. 2.1(a) tiene tres componentes de reacción y se dispone de tres ecuaciones para encontrarlas; sin embargo, al analizar el nudo B, vemos que la estructura es inestable. La línea de acción de la reacción en A pasa por B, y a menos que la línea de acción de la fuerza P pase por el mismo punto, la suma de los mo-

TABLA 2.1 CLASIFICACION ESTATICA DE ESTRUCTURAS

Estructura	Número de incógnitas	Número de ecuaciones	Condición estática
a 	3	3	Estáticamente determinada (llamada viga simple)
b 	5	3	Estáticamente indeterminada de grado 2 (viga continua)
c 	2	3	Inestable
d 	3	3	Determinada estáticamente (viga en voladizo)
e 	6	3	Estáticamente indeterminada de grado 3 (viga doblemente empotrada)
f 	4	3	Estáticamente indeterminada de grado 1 (viga apuntalada)
g 	3	3	Estáticamente determinada
h 	4	4	Estáticamente determinada
i 	7	3	Estáticamente indeterminada de grado 4
j 	5	5	Estáticamente determinada

mentos respecto a  $B$  no puede ser cero. No hay resistencia a la rotación alrededor de  $B$ , y el marco empezará inmediatamente a rotar. Tal vez no se desplome, pero rotará hasta que se establezca una situación estable; esta condición se alcanzará cuando la línea de acción de la reacción en  $A$  pase a una pequeña distancia de  $B$ . Es

## 2.6 Inestabilidad geométrica.

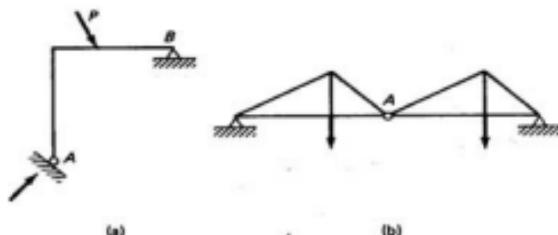


Figura 2.1

de primordial importancia para el ingeniero que las estructuras mantengan su posición bajo cargas; esto no se puede lograr si la estructura es inestable.

En la fig. 2.1(b) se muestra otra estructura inestable. Se dispone de cuatro ecuaciones para calcular las cuatro reacciones desconocidas, pero una rotación se presentará inmediatamente alrededor de la articulación en *A*. Después de haber una pequeña deflexión vertical en *A*, la estructura probablemente adquiera una condición estable.



Nave industrial con grúa viajera para Aceros de Tlaxcala, Tlaxcala, México.  
(Cortesía de ILIDEM, S.A.)

## 2.7 CONVENCION DE SIGNOS

La convención particular de signos usada para tensión, compresión, etc., es de poca importancia, mientras se use un sistema consistente. Los autores usan los siguientes signos en sus cálculos:

1. Para *tensión* se usa un signo positivo, considerando que los elementos sujetos a tensión se alargan, o sea, que su longitud se incrementa positivamente.
2. Para *compresión* se usa un signo negativo, porque los elementos sujetos a compresión se acortan, es decir, ocasiona a su longitud un incremento negativo.
3. Para momentos se usa un signo positivo si es en el sentido de las manecillas del reloj y para momentos con sentido opuesto un signo negativo. Este sistema es de menor importancia que el de la tensión y la compresión; lo que importa es usar siempre la misma convención de signos para los momentos a lo largo de un problema a fin de evitar confusiones.
4. En muchos casos es posible determinar el sentido de una *reacción* por inspección, pero cuando esto no es posible, se supone un sentido y se escribe la ecuación correspondiente de equilibrio. Si al resolver la ecuación, el valor numérico para la reacción es positivo, el sentido supuesto fue correcto; si el valor resulta negativo, el sentido supuesto fue incorrecto.

## 2.8 COMPONENTES HORIZONTAL Y VERTICAL

Al realizar un cálculo es conveniente descomponer cada reacción inclinada en sus componentes horizontal y vertical. Si no se sigue esta práctica, tendrán que calcularse las distancias de las líneas de acción de las fuerzas inclinadas al punto respecto al cual se tomen momentos. El cálculo de estas distancias suele ser complicado y la posibilidad de cometer errores aumenta considerablemente.

## 2.9 DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

Para que una estructura esté en equilibrio, toda y cada parte de ella debe estar en equilibrio. Si las ecuaciones de la Estática son aplicables a toda la estructura, deben ser también aplicables a cualquier parte de la misma, sin importar qué tan grande o pequeña sea.

Es posible entonces dibujar un diagrama de cualquier parte de una estructura y aplicar las ecuaciones de la Estática a esa parte. El resultado, llamado *diagrama de cuerpo libre*, debe incluir todas las fuerzas aplicadas a esa parte de la estructura. Esas fuerzas son las reacciones y cargas externas así como las fuerzas internas aplicadas desde las partes adyacentes de la estructura.

En la fig. 2.2 una viga simple está cortada en dos cuerpos libres. Los efectos de la parte derecha de la viga sobre la parte izquierda se muestran en el diagrama de cuerpo libre izquierdo y viceversa. Por ejemplo, la parte derecha de la viga tiende a empujar al cuerpo libre izquierdo hacia arriba, mientras que la parte izquierda tiende a empujar al cuerpo libre derecho hacia abajo.

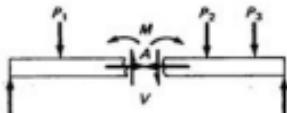


Figura 2.2

Aislar ciertas secciones de las estructuras y considerar las fuerzas aplicadas a esas secciones es la base de todo el análisis estructural. El lector descubrirá que el análisis de los cuerpos libres abre el camino a la solución de los problemas estructurales.

## 2.10 REACCIONES OBTENIDAS POR PROPORCIONES

El cálculo de reacciones es fundamentalmente un asunto de proporciones. Para ilustrar este punto, nos referiremos a la fig. 2.3(a). La carga  $P$  está colocada a tres cuartas partes del claro del apoyo  $A$ . Por proporción, el apoyo derecho tomará tres cuartas partes de la carga y el apoyo izquierdo tomará el restante cuarto de la carga.

Similamente, en la viga de la fig. 2.3(b), la carga de 10 kN está aplicada a la mitad de la distancia entre  $A$  y  $B$  y cada apoyo tomará la mitad de ella, o sea 5 kN. La carga de 20 kN está aplicada a las tres cuartas partes de la distancia de  $A$  a  $B$ . El apoyo  $B$  tomará tres cuartas partes de ella, o sea 15 kN y el apoyo  $A$  una cuarta parte, o sea 5 kN. De esta manera, la reacción total en el apoyo  $A$  será de 10 kN y la reacción total en el apoyo  $B$  de 20 kN.

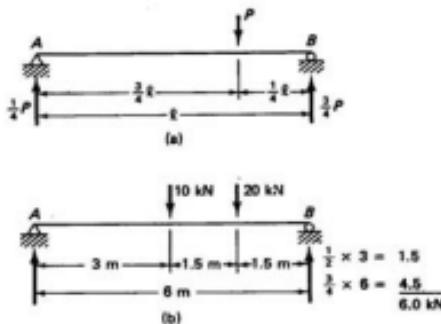


Figura 2.3

## 2.11 REACCIONES CALCULADAS CON LAS ECUACIONES DE LA ESTÁTICA

El cálculo de reacciones por medio de las ecuaciones de la Estática se ilustran en los ejemplos 2.1 al 2.3. Al aplicar la ecuación  $\Sigma M = 0$ , puede seleccionarse un punto como centro de momentos, tal que las líneas d' acción de todas menos una de las incógnitas pasen por él. La incógnita se determina con la ecuación de momentos y las otras componentes de reacción se encuentran aplicando las ecuaciones  $\Sigma H = 0$  y  $\Sigma V = 0$ .

La viga del ejemplo 2.1 tiene tres componentes desconocidas de reacción; una vertical y una horizontal en *A* y una vertical en *B*. Se toman momentos respecto a *A* para encontrar el valor de la componente vertical en *B*. Se iguala a cero la suma de todas las fuerzas verticales y se encuentra así la componente de reacción vertical en *A*. Se escribe una ecuación similar para las fuerzas horizontales aplicadas a la estructura y se encuentra que la reacción horizontal en *A* es igual a cero.

La solución de los problemas de cálculo de reacciones puede verificarse tomando momentos con respecto al otro apoyo, como se ilustra en el ejemplo 2.1. En ejemplos futuros no se presentará la comprobación de los cálculos. Sin embargo, ningún problema se considerará completo en tanto no se haya efectuado una verificación de esta naturaleza.

El rodillo del marco del ejemplo 2.3 está soportado por una superficie inclinada. Las ecuaciones de la Estática aún son aplicables, porque se conoce el sentido de reacción en *B* (perpendicular a la superficie de apoyo). Si se conoce el sentido de la reacción, la relación entre la componente vertical, la componente horizontal y la reacción misma está determinada. La reacción tiene una pendiente de 4 a 3, que es la pendiente inversa de la superficie de apoyo, que es de 3 a 4. Se toman momentos respecto al apoyo izquierdo, obteniéndose una ecuación que incluye a las componentes horizontal y vertical de la reacción en el rodillo inclinado. Pero ambas componentes están en términos de esa reacción; por lo tanto, sólo una incógnita,  $R_B$ , está presente en la ecuación y puede calcularse su valor fácilmente.

### EJEMPLO 2.1

Calcular las componentes de reacción para la viga mostrada en la fig. 2.4.

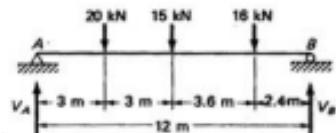


Figura 2.4

*Solución*

$$\Sigma M_A = 0$$

$$(20)(3) + (15)(6) + (16)(9.6) - 12V_B = 0$$

$$V_B = 25.3 \text{ kN } \uparrow$$

$$\Sigma V = 0$$

$$20 + 15 + 16 - 25.3 - V_A = 0$$

$$V_A = 25.7 \text{ kN } \uparrow$$

Comprobación:  $\Sigma M_B = 0$

$$(V_A)(12) - (20)(9) - (15)(6) - (16)(2.4) = 0$$

$$V_A = 25.7 \text{ kN } \uparrow$$

### EJEMPLO 2.2

Encontrar todas las componentes de reacción en la estructura mostrada en la fig. 2.5.

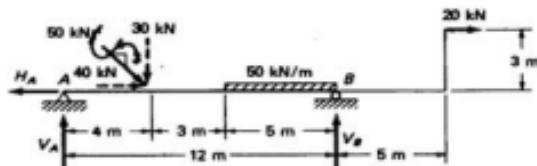


Figura 2.5

*Solución*

$$\Sigma M_A = 0$$

$$(30)(4) + (50 \times 5)(9.5) + (20)(3) - (V_B)(12) = 0$$

$$V_B = 212.9 \text{ kN } \uparrow$$

$$\Sigma V = 0$$

$$30 + 250 - 212.9 - V_A = 0$$

$$V_A = 67.1 \text{ kN } \uparrow$$

$$\Sigma H = 0$$

$$40 + 20 - H_A = 0$$

$$H_A = 60 \text{ kN } \leftarrow$$

**EJEMPLO 2.3**

Calcular las reacciones del marco mostrado en la fig. 2.6.

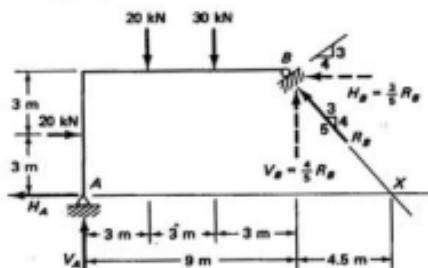


Figura 2.6

*Solución*

$$\Sigma M = 0$$

$$(20)(3) + (20)(3) + (30)(6) - (H_B)(6) - (V_A)(9) = 0 \\ 60 + 60 + 180 - (\frac{3}{5}R_B)(6) - (\frac{4}{5})(R_B)(9) = 0 \\ R_B = 27.8 \text{ kN } \uparrow$$

$$V_B = \frac{4}{5}R_B = 22.2 \text{ kN } \uparrow$$

$$H_B = \frac{3}{5}R_B = 16.7 \text{ kN } \leftarrow$$

$$\Sigma V = 0$$

$$20 + 30 - 22.2 - V_A = 0 \\ V_A = 27.8 \text{ kN } \uparrow$$

$$\Sigma H = 0$$

$$20 - 16.7 - H_A = 0$$

$$H_A = 3.3 \text{ kN } \leftarrow$$

*Solución alternativa*

Si se prolonga la línea de acción de  $R_B$  hasta que interseque la horizontal que pasa por A en el punto X, tendremos otro punto conveniente para tomar momentos; al hacerlo así, sólo aparecerá en la ecuación una incógnita ( $V_A$ ). Este procedimiento es más sencillo que el empleado antes.

$$\Sigma M_x = 0$$

$$(V_A)(13.5) + (20)(3) - (20)(10.5) - (30)(7.5) = 0 \\ V_A = 27.8 \text{ kN } \uparrow$$

■ ■

## 2.12 PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Al avanzar en su estudio del análisis estructural, se encontrarán estructuras sujetas a un gran número y tipos de fuerzas (concentradas, uniformes, triangulares, muertas, vivas, de impacto, etc.). Para ayudarlo en tales situaciones existe una herramienta extraordinariamente útil, el *principio de superposición*.

El principio dice lo siguiente: si el comportamiento estructural es linealmente elástico, las fuerzas que actúan sobre una estructura pueden separarse o dividirse en cualquier forma conveniente para analizar luego la estructura para cada caso por separado. Los resultados finales pueden obtenerse entonces sumando los resultados individuales. Los autores usaron previamente este principio en la figura 2.3(b), cuando las reacciones para las dos cargas se determinaron por proporciones en forma separada y luego se sumaron para obtener los valores finales. El principio se aplica no sólo a reacciones, sino también a cortantes, momentos, esfuerzos, deformaciones y desplazamientos.

Hay dos casos importantes en los que el principio de superposición no es válido. El primero es cuando la geometría de la estructura cambia considerablemente bajo la acción de las cargas. El segundo ocurre cuando la estructura es de un material para el cual los esfuerzos no son directamente proporcionales a las deformaciones. Este último caso se presenta cuando el material se esfuerza más allá de su límite elástico o cuando el material no sigue la ley de Hooke en ninguna parte de su curva esfuerzo contra deformación.

## 2.13 VOLADIZO SIMPLE

El voladizo simple de la fig. 2.7 tiene tres componentes desconocidas de reacción en el empotramiento; éstas son las fuerzas necesarias para impedir los movimientos horizontal, vertical y de rotación. Pueden determinarse con las ecuaciones de la Estática como se ilustra en el ejemplo 2.4.

### EJEMPLO 2.4

Encontrar todas las componentes de reacción para la viga en voladizo mostrada en la fig. 2.7.

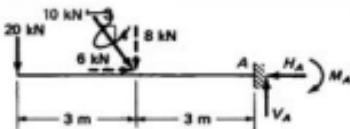


Figura 2.7

*Solución*

$$\Sigma V = 0$$

$$20 + 8 - V_A = 0$$

$$V_A = 28 \text{ kN } \uparrow$$

$$\Sigma H = 0$$

$$6 - H_A = 0$$

$$H_A = 6 \text{ kN } \leftarrow$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$(20)(6) + (8)(3) - M_A = 0$$

$$M_A = 144 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

■ ■

**2.14 ESTRUCTURAS CON VOLADIZO**

Los momentos en vigas simplemente apoyadas crecen rápidamente conforme aumenta el tamaño de los claros. Veremos después que la flexión aumenta en forma directamente proporcional al cuadrado del claro. Entonces se necesitan estructuras más fuertes y caras para resistir los mayores momentos. En claros muy largos, los mo-



Puente vehicular en la avenida Marina Nacional, Cd. de México. (Cortesía de EISA.)

mentos resultan tan grandes que conviene, desde un punto de vista económico, introducir tipos especiales de estructuras que reduzcan la magnitud de tales momentos. Uno de esos tipos es la construcción con voladizos, como la mostrada en la fig. 2.8(b).

Las tres vigas simplemente apoyadas de la fig. 2.8(a) se sustituyen por una estructura con voladizos, haciendo continua la viga sobre los apoyos interiores *B* y *C* e introduciendo dos articulaciones en el claro central como se indica en (b). Se dispo-

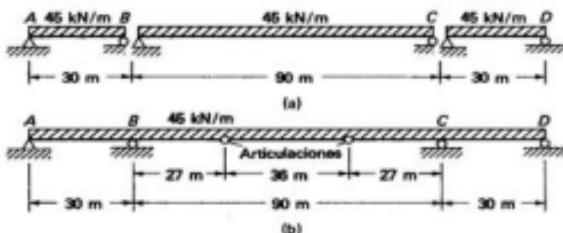


Figura 2.8



Ampliación de la planta de Ford Motor Company en Chihuahua, Chih., México.  
(Cortesía de ILIDEM, S.A.)

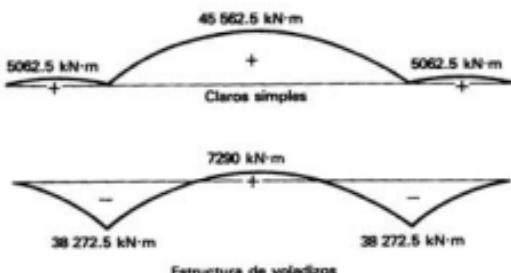


Figura 2.9

ne de una ecuación de condición ( $\Sigma M_{\text{ext.}} = 0$ ) en cada articulación, lo que da un total de cinco ecuaciones y cinco incógnitas; la estructura es estáticamente determinada.

Las ventajas que resultan respecto a los momentos con estos cambios se ilustran en la fig. 2.9. Los diagramas mostrados aquí dan la variación del momento en cada una de las vigas de la estructura de la fig. 2.8, debido a una carga uniforme de 45 kN/m sobre todos los claros. El momento flexionante máximo para este tipo de estructura con voladizos resulta ser considerablemente menor que para la de vigas simples, lo cual permite diseñar una construcción más ligera y económica. El trazo de diagramas de momentos flexionantes se explica con todo detalle en el capítulo 3. Para la viga con voladizos de la fig. 2.8(b) es posible reducir aún más el momento máximo, moviendo las articulaciones hacia los apoyos B y C.

## 2.15 CALCULO DE LAS REACCIONES EN ESTRUCTURAS CON VOLADIZOS

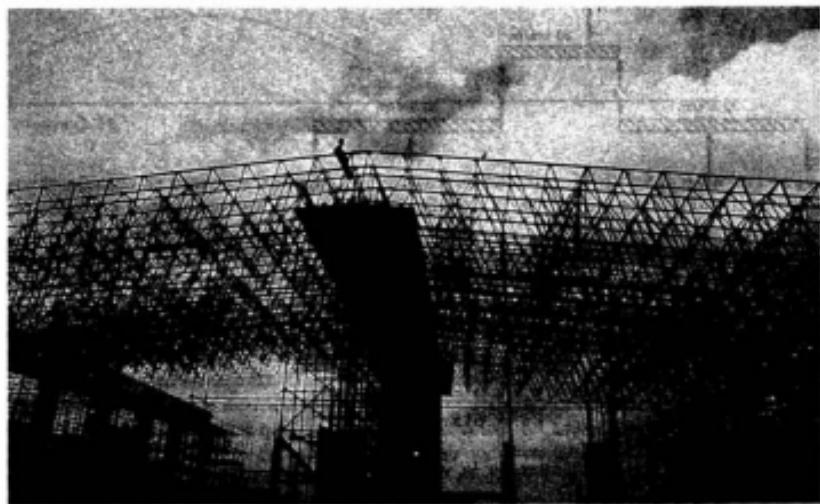
Las construcciones con voladizos constan esencialmente de dos vigas simples, cada una de las cuales tiene uno de sus extremos en voladizo, como se indica a continuación:



con otra viga simple entre ellas soportada en dichos extremos:



El primer paso para determinar las reacciones en una estructura de este tipo es aislar la viga central y calcular las fuerzas necesarias para soportarla en cada extremo. El segundo paso consiste en aplicar esas fuerzas actuando hacia abajo sobre



Estructura metálica que cubre claros de gran extensión. Obra en México.  
(Cortesía de RSI.)

los respectivos voladizos y finalmente, determinar las reacciones en los extremos de las vigas. El ejemplo 2.5 ilustra todo el proceso.

#### EJEMPLO 2.5

Calcular todas las reacciones para la estructura mostrada en la fig. 2.10.

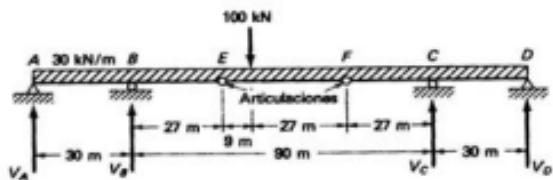
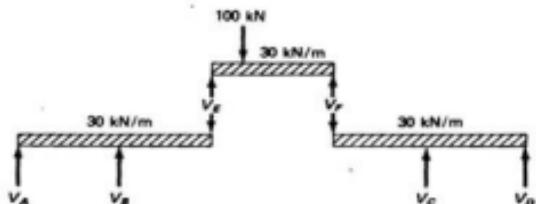


Figura 2.10

*Solución*

Aislamos la sección central de las dos secciones extremas:



Calculamos las reacciones en la viga central:

$$\sum M_E = 0 \\ (100)(9) + (30 \times 36)(18) - 36V_F = 0 \\ V_F = 565 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0 \\ 100 + 1080 - 565 - V_E = 0 \\ V_E = 615 \text{ kN}$$

Calculamos las reacciones en la viga izquierda:

$$\sum M_A = 0 \\ (30 \times 57)(28.5) + (615)(57) - 30V_B = 0 \\ V_B = 2793 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum V = 0 \\ 1710 + 615 - 2793 - V_A = 0 \\ V_A = 468 \text{ kN} \downarrow$$

Calculamos similarmente las reacciones en la viga derecha y obtenemos:

$$V_C = 2698 \text{ kN} \uparrow \\ V_D = -423 \text{ kN} \downarrow$$

## 2.16 ARCOS DE TRES ARTICULACIONES

Las reacciones en las estructuras analizadas previamente, que tenían apoyos horizontales, resultaron ser verticales y paralelas bajo la acción de cargas verticales. Los arcos son estructuras que producen reacciones horizontales al estar sometidos a carga vertical. Ellos tienden a aplandarse al estar sometidos a carga y deben fijarse contra movimientos horizontales en sus apoyos.

Los arcos pueden construirse con tres, dos o una articulación, o bien, sin articulaciones (caso común en arcos de concreto reforzado). Analizaremos aquí el arco con tres articulaciones por ser el único estáticamente determinado.

Examinando el arco de tres articulaciones de la fig. 2.11, vemos que tiene dos

## 2.16 Arcos de tres articulaciones

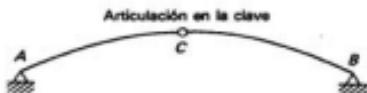


Figura 2.11

componentes de reacción en cada apoyo, cuatro en total. Disponemos de tres ecuaciones de la Estática y una ecuación de condición ( $\sum M_C = 0$ ), para hallar las incógnitas.

El arco del ejemplo 2.6 se analiza tomando momentos en uno de los apoyos, para obtener la componente vertical de reacción en el otro. Como los apoyos están al mismo nivel, la componente horizontal de reacción en el segundo apoyo pasa por el punto respecto al cual se están tomando momentos. Cuando una componente vertical de reacción ha sido encontrada, la otra puede obtenerse con la ecuación  $\sum V = 0$ . Las componentes horizontales de reacción se obtienen tomando momentos en la articulación intermedia de todas las fuerzas que actúan a la derecha o a la izquierda de ella; la única incógnita que aparece en cada ecuación es la componente horizontal de reacción correspondiente a cada lado y su valor se obtiene despejándolo de la ecuación. La otra componente horizontal se encuentra con la ecuación  $\sum H = 0$ , planteada para toda la estructura. Una vez que las reacciones han sido determinadas, es posible calcular las fuerzas axiales y momento en cualquier punto del arco por Estática.

El cálculo de las reacciones del arco del ejemplo 2.7 es algo más complicado porque los apoyos no están al mismo nivel. Tomando momentos con respecto a uno de los apoyos se obtiene una ecuación que incluye las componentes horizontal y vertical de reacción del otro. Pueden tomarse momentos ahora respecto a la articulación intermedia de las fuerzas situadas en el mismo lado en que se encuentran ambas incógnitas, dando por resultado una ecuación que contiene a estas últimas. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones se obtienen los valores de las componentes; luego, con ayuda de las ecuaciones  $\sum H = 0$  y  $\sum V = 0$  se obtienen los valores de las componentes restantes.

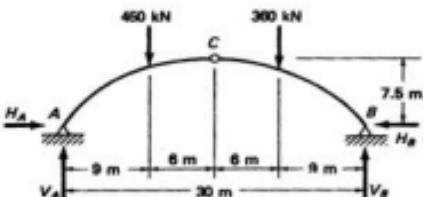


Figura 2.12



Edificio central de Petróleos Mexicanos, Cd. de México. (Cortesía de RSI.)

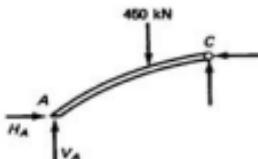
**EJEMPLO 2.6**

Calcular todas las componentes de reacción para el arco triarticulado mostrado en la fig. 2.12.

*Solución*

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0 \\ (450)(9) + (360)(21) - 30V_B &= 0 \\ V_B &= 387 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma V &= 0 \\ 450 + 360 - 387 - V_A &= 0 \\ V_A &= 423 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$



Usando el diagrama de cuerpo libre mostrado al lado, se obtiene,

$$\begin{aligned}\Sigma M_C \text{ (a la izquierda)} &= 0 \\ (423)(15) - (450)(6) - 7.5H_A &= 0 \\ H_A &= 486 \text{ kN} \rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma H &= 0 \\ 486 - H_B &= 0 \\ H_B &= 486 \text{ kN} \leftarrow\end{aligned}$$
■ ■

**EJEMPLO 2.7**

Calcular las componentes de reacción en los dos apoyos de la estructura mostrada en la fig. 2.13.

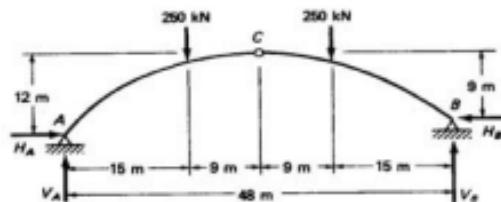
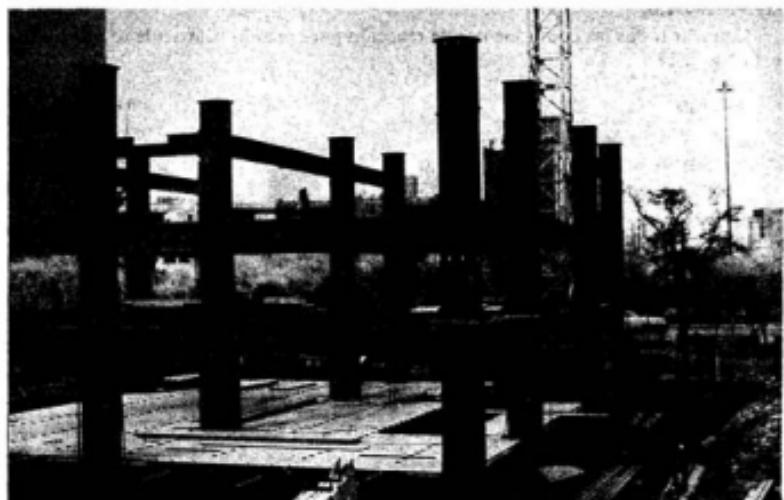


Figura 2.13

*Solución*

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0 \\ (250)(15) + (250)(33) - 3H_B - 48V_B &= 0 \\ 3H_B + 48V_B &= 12000\end{aligned}\tag{1}$$



Edificio de 20 pisos para oficinas en Insurgentes y Reforma, Cd. de México.  
(Cortesía de ILIDEM, S.A.)

$$\begin{aligned} \Sigma M_C \text{ (a la derecha)} &= 0 \\ (250)(9) + 9H_B - 24V_B &= 0 \\ 9H_B - 24V_B &= -2250 \end{aligned} \tag{2}$$

Resolviendo las ecs. (1) y (2) simultáneamente se obtiene:

$$\begin{aligned} H_B &= 357.14 \text{ kN} \leftarrow \\ V_B &= 227.68 \text{ kN} \uparrow \\ \Sigma H &= 0 \\ 357.14 - H_A &= 0 \\ H_A &= 357.14 \text{ kN} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma V &= 0 \\ 250 + 250 - 227.68 - V_A &= 0 \\ V_A &= 272.32 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

■ ■

Las reacciones del arco del ejemplo 2.7 pueden calcularse sin tener que recurrir a ecuaciones simultáneas. Los ejes horizontal y vertical (respecto a los cuales se escribieron las ecuaciones  $\Sigma H = 0$  y  $\Sigma V = 0$ ) pueden rotarse de modo que el eje horizontal pase por las dos articulaciones de los apoyos (fig. 2.14). Se calculan en-

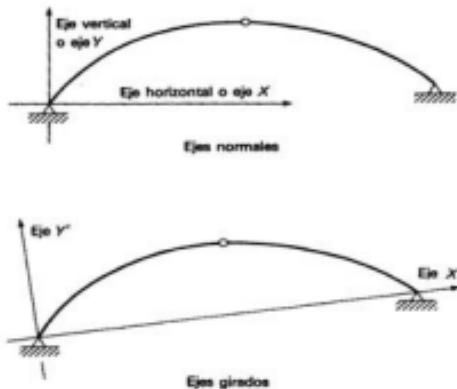


Figura 2.14

tonces las componentes de las fuerzas paralelas a los ejes  $X'$  y  $Y'$  y se plantean las ecuaciones  $\Sigma X' = 0$  y  $\Sigma Y' = 0$ ; sin embargo, la cantidad de trabajo puede ser mayor que con el primer procedimiento.

## 2.17 USOS DE ARCOS Y ESTRUCTURAS CON VOLADIZOS

Los arcos triarticulados de acero se usan para puentes de claros cortos y medios de hasta aproximadamente 180 m de longitud. Se usan también para edificios en los que son necesarios grandes claros libres, como hangares, gimnasios, arsenales, etc. Los arcos de acero de dos articulaciones son generalmente económicos para puentes de 180 a 270 m de longitud; existen algunos con claros excepcionalmente largos de poco más de 500 m de longitud. Los arcos de concreto reforzado sin articulaciones se usan para puentes con claros de 30 a 120 m de longitud. Los puentes tipo voladizo se utilizan para claros desde aproximadamente 150 m, hasta claros como el del tramo central de 540 m del puente de Quebec en Canadá.

Un arco es una estructura que necesita cimientos o apoyos capaces de resistir las grandes reacciones horizontales, o empujes, sobre los mismos. En arcos empleados en edificaciones es posible tomar los coceos con tirantes de acero (como se ilustra en la fig. 2.15), con perfiles estructurales de acero o con pisos especialmente diseñados. A este tipo de arcos se les llama *atirantados*. En algunos lugares se prefiere el arco triarticulado a los arcos estáticamente indeterminados, debido a las deficiencias condiciones del suelo en donde deben cimentarse estos últimos. Se verá en ca-

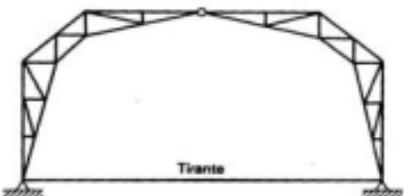


Figura 2.15

pítulos posteriores que los asentamientos de la cimentación pueden generar grandes esfuerzos en las estructuras estáticamente indeterminadas. La facilidad del montaje es otra ventaja de los arcos triarticulados. Con frecuencia es conveniente construir y transportar las dos mitades de un arco en forma separada y armárlas en la obra. Anteriormente se demostró el hecho de que con las estructuras con voladizos se reducen enormemente los momentos flexionantes en el caso de grandes claros. En las construcciones con arcos, los momentos flexionantes también se reducen, porque las reacciones de sus apoyos tienden a flexionar un arco en sentido contrario al de la flexión que producen las cargas hacia abajo. Debido a esta característica de tener momentos flexionantes pequeños, los arcos fueron usados ampliamente por los constructores de obras de mampostería de la antigüedad.

## 2.18 CABLES

Los cables de acero se usan para soportar cargas sobre grandes claros, por ejemplo, en puentes colgantes, teleféricos, etc. Además se usan como tirantes en grúas, torres de radio y estructuras similares. Los cables de acero se fabrican económicamente a partir de alambres de acero de alta resistencia, tal vez con la relación más baja de costo a resistencia de todos los elementos estructurales comunes. Ellos se manejan y montan fácilmente aun en claros muy grandes.

En el análisis que sigue no se tomará en cuenta el peso del cable. Cuando un cable de longitud dada se suspende entre dos apoyos, la forma que toma queda determinada por las cargas aplicadas a él. De hecho, cuando las cargas aplicadas son verticales, el cable tomará la forma del diagrama de momentos flexionantes (véase el capítulo 3) de una viga simplemente apoyada, del mismo claro, sujeta a las mismas cargas. Por ejemplo, si un cable se somete a un grupo de cargas concentradas como las mostradas en la fig. 2.16, los segmentos del cable formarán líneas rectas. (Esta forma es en realidad inversa a la forma de los diagramas de momentos dibujados en capítulos posteriores de este libro.)

Un cable que soporte una carga uniforme horizontal formará una parábola. Los cables que soportan la superficie de rodamiento de puentes colgantes toman apro-

ximadamente esta forma (las cargas están aplicadas a él en forma concentrada por medio de cables colgantes). Un cable que soporta una carga uniforme a lo largo de su longitud (como en el caso de una línea de transmisión), tomará la forma de una catenaria. A menos que la flecha de un cable sea muy grande, en comparación con la longitud, puede suponerse que su forma es parabólica, simplificándose así considerablemente el análisis.

Se supone que los cables son tan flexibles que éstos no resisten flexión o compresión. En consecuencia, éstos trabajan a tensión directa y se dispone entonces para el análisis de la ecuación de condición  $\Sigma M = 0$ , respecto a cualquier punto del cable. Si se conoce la deflexión en un punto cualquiera de un cable, las reacciones en los extremos y la deflexión en cualquier otro punto pueden determinarse con esas ecuaciones. A continuación se presenta un ejemplo numérico de este caso; se supondrá en el ejemplo que el peso del cable es insignificante.

### EJEMPLO 2.8

Determinar las reacciones del cable mostrado en la fig. 2.16 y la flecha bajo la carga de 176 kN.

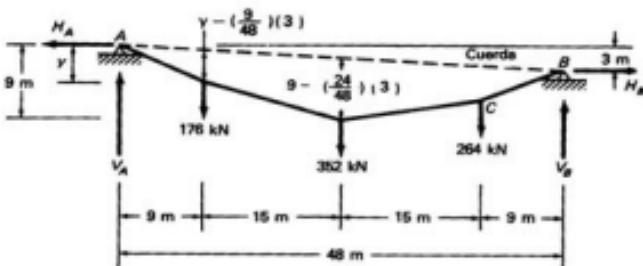


Figura 2.16

*Solución*

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0 \\ 48V_A - 3H_A - (264)(9) - (352)(24) - (176)(39) &= 0 \\ 48V_A - 3H_A &= 17\,688 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{352} \text{ (a la izquierda de la carga de 352 kN)} &= 0 \\ 24 - 9H_A - (176)(15) &= 0 \\ 24V_A - 9H_A &= 2640 \end{aligned} \quad (2)$$

Resolviendo las ecs. (1) y (2) simultáneamente se obtiene:



Cable de anclaje del Puente Sitka Harbor, Sitka, Alaska. (Cortesía del Departamento de Transporte de Alaska.)

$$\begin{aligned}H_A &= 827.2 \text{ kN} \leftarrow \\V_A &= 420.2 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

Con  $\Sigma V = 0$  y  $\Sigma H = 0$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}H_B &= 827.2 \text{ kN} \rightarrow \\V_B &= 371.8 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

$\Sigma M$  (a la izquierda de la carga de 176 kN) = 0; llamamos  $y$  a la flecha bajo esa carga.

$$\begin{aligned}9V_A - H_A y &= 0 \\(9)(420.2) - (827.2)(y) &= 0 \\y &= 4.57 \text{ m}\end{aligned}$$
■ ■

La tensión resultante en cualquier punto puede obtenerse con la siguiente ecuación, en la que  $H$  y  $V$  son las componentes horizontales y verticales de la fuerza de tensión en ese punto del cable:

$$T = \sqrt{(H)^2 + (V)^2}$$

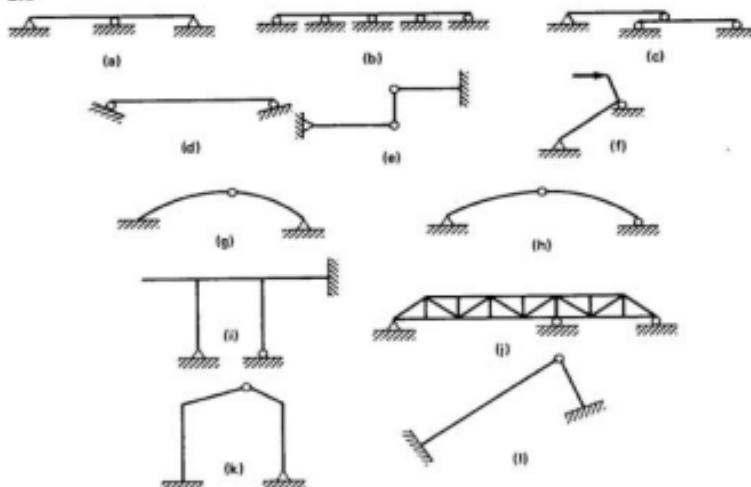
En esta ecuación puede verse que la tensión varía a lo largo del cable. Si sólo actúan cargas verticales, el valor de  $H$  será constante en todo el cable y la máxima fuerza de tensión puede determinarse sustituyendo el valor máximo de la fuerza vertical en la ecuación.

Se supone que la deformación o la deflexión de la mayor parte de las estructuras es mínima al calcular las fuerzas generadas en esas estructuras. Sin embargo, tal suposición no es correcta en muchas estructuras de cables, particularmente en los muy planos, en los que una pequeña flecha puede afectar considerablemente las tensiones en el cable. Este tópico no se trata en este texto, pero está muy bien analizado en un libro de Firmage [1]. Los cables planos ocasionan componentes de reacción horizontal muy grandes y por ello la tensión en ellos es muy grande.

## PROBLEMAS

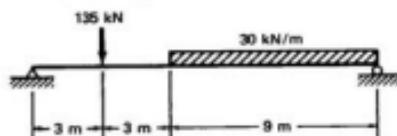
En el problema 2.1, determinar cuáles de las estructuras mostradas en la figura son estáticamente determinadas, estáticamente indeterminadas (indicando el grado de indeterminación) e inestables respecto a las fuerzas externas.

2.1



En los problemas 2.2 al 2.38, calcular las reacciones en las estructuras mostradas.

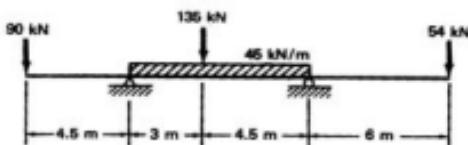
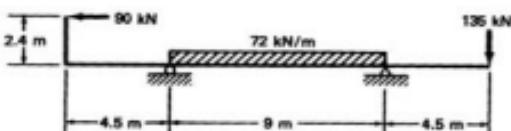
2.2 (Resp.:  $V_L = 189 \text{ kN} \uparrow$ ,  $V_R = 216 \text{ kN} \uparrow$ )



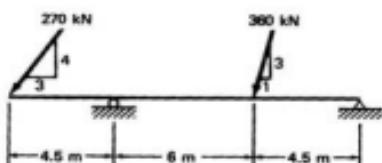
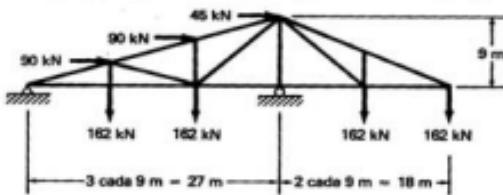
46

2/Reacciones

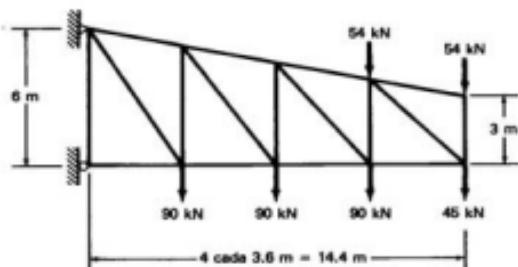
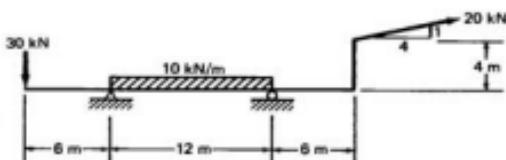
2.3

2.4 (Resp.:  $V_L = 280.5 \text{ kN} \downarrow$ ,  $V_R = 502.5 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_R = 90 \text{ kN} \rightarrow$ )

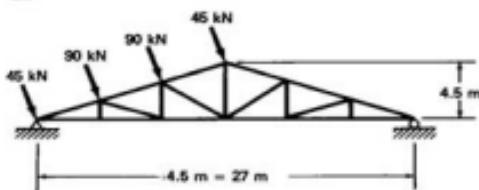
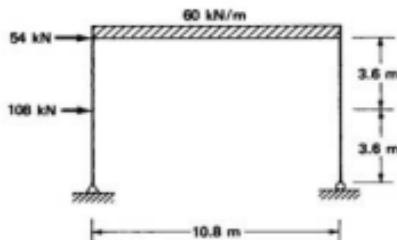
2.5

2.6 (Resp.:  $V_L = 45 \text{ kN} \downarrow$ ,  $H_L = 225 \text{ kN} \leftarrow$ ,  $V_R = 693 \text{ kN} \uparrow$ )

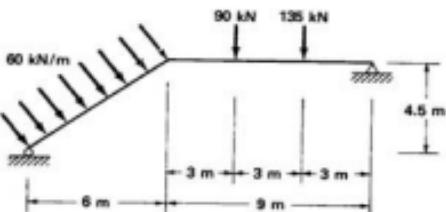
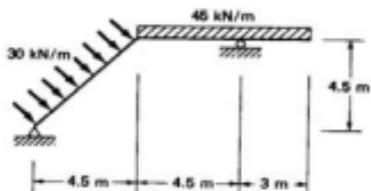
2.7

2.8 (Resp.:  $V_L = 100.95 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_L = 19.40 \text{ kN} \leftarrow$ ,  $V_R = 44.19 \text{ kN} \uparrow$ )

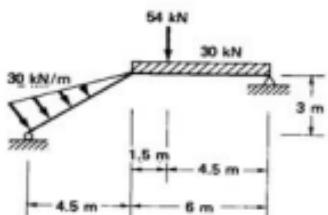
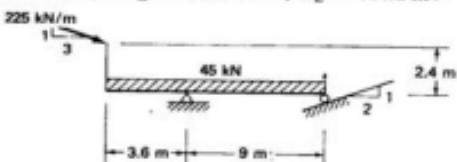
2.9

2.10 (Resp.:  $V_L = 252 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_L = 162 \text{ kN} \leftarrow$ ,  $V_R = 396 \text{ kN} \uparrow$ )

2.11

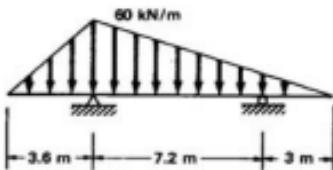
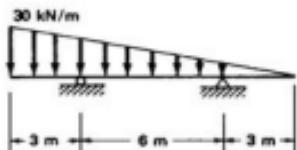
2.12 (Resp.:  $V_L = 95.6 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_L = 135 \text{ kN} \leftarrow$ ,  $V_R = 376.8 \text{ kN}$ )

2.13

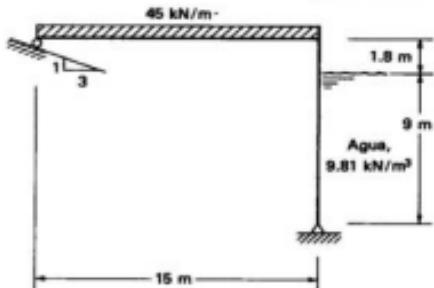
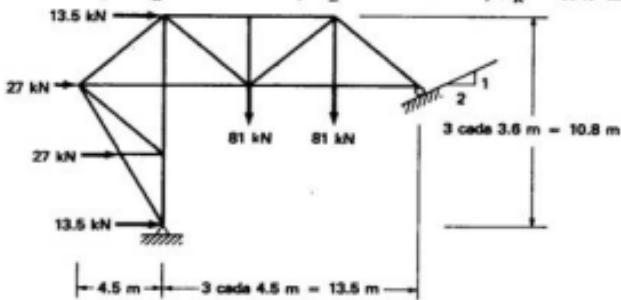
2.14 (Resp.:  $V_L = 439.6 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_L = 114.2 \text{ kN} \leftarrow$ ,  $V_R = 198.6 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_R = 99.3 \text{ kN} \leftarrow$ )

## Problemas

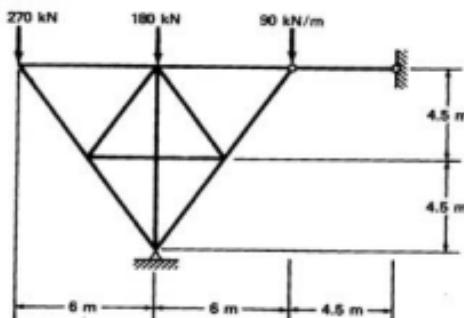
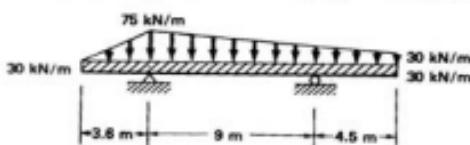
2.15

2.16 (Resp.:  $V_L = 150 \text{ kN} \uparrow$ ,  $V_R = 30 \text{ kN} \uparrow$ )

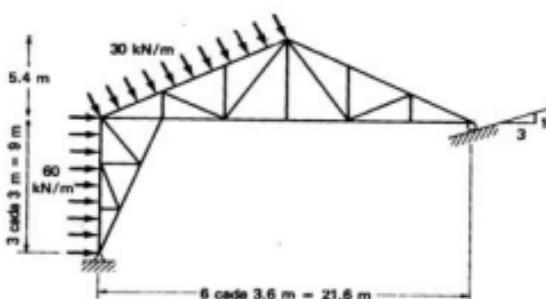
2.17 Considerar sólo 1 m de longitud de marco.

2.18 (Resp.:  $V_L = 72.5 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_L = 36.2 \text{ kN} \leftarrow$ ,  $V_R = 89.5 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_R = 44.8 \text{ kN} \leftarrow$ )

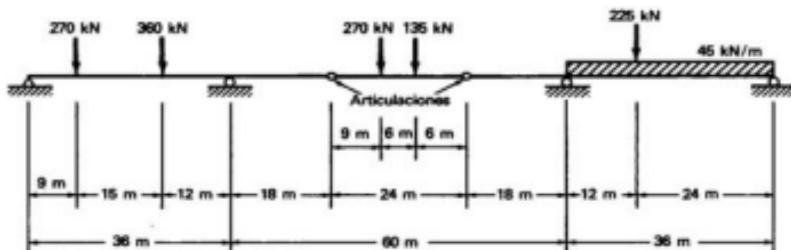
2.19

2.20 (Resp.:  $V_L = 636.97 \text{ kN} \uparrow$ ,  $V_R = 719.78 \text{ kN} \uparrow$ )

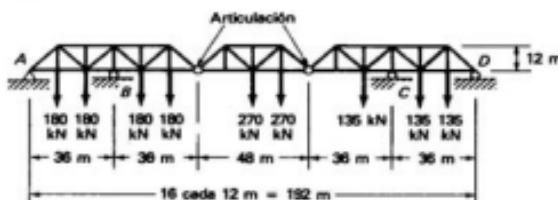
2.21



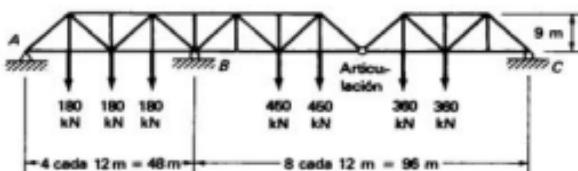
2.22 (Resp.:  $V_A = 212.82 \text{ kN t}$ ,  $V_B = 636.56 \text{ kN t}$ ,  $V_C = 1238.44 \text{ kN t}$ )



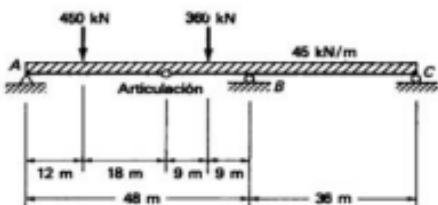
2.23



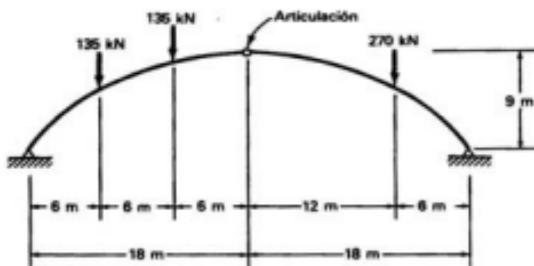
2.24 (Resp.:  $V_A = 742.5 \text{ kN t}$ ,  $V_B = 2632.5 \text{ kN t}$ ,  $V_C = 270 \text{ kN t}$ )



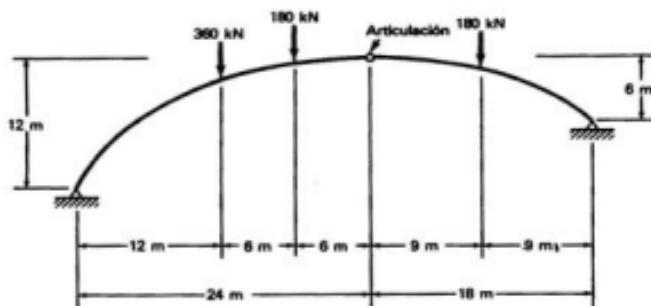
2.25



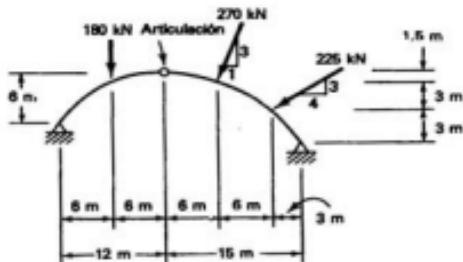
2.26 (Resp.:  $V_L = 247.5 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_L = 225 \text{ kN} \rightarrow$ ,  $V_R = 292.5 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_R = 225 \text{ kN} \leftarrow$ )



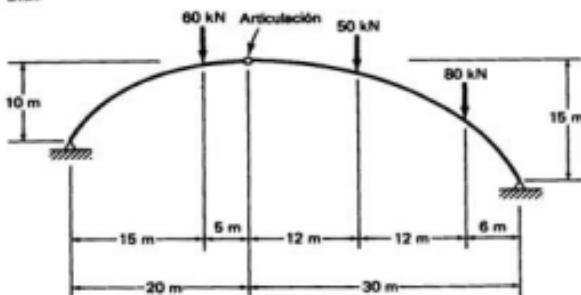
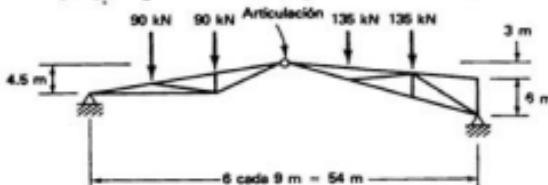
2.27



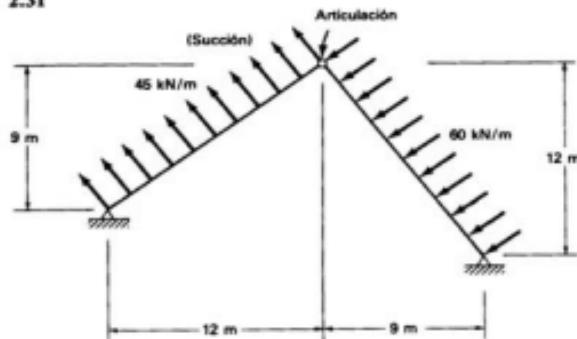
2.28 (Resp.:  $V_L = 260.42 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_L = 340.83 \text{ kN} \rightarrow$ ,  $V_R = 310.72 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_R = 75.45 \text{ kN} \leftarrow$ )



2.29

2.30 (Resp.:  $V_L = 165 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_L = 450 \text{ kN} \rightarrow$ ,  $V_R = 285 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_R = 450 \text{ kN} \rightarrow$ )

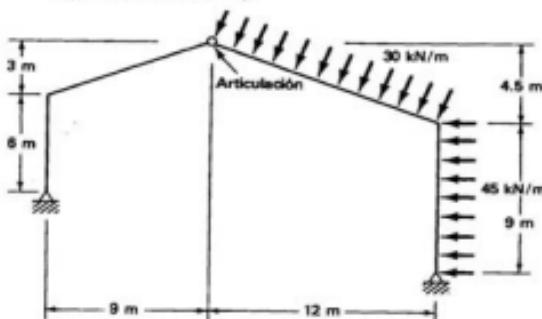
2.31



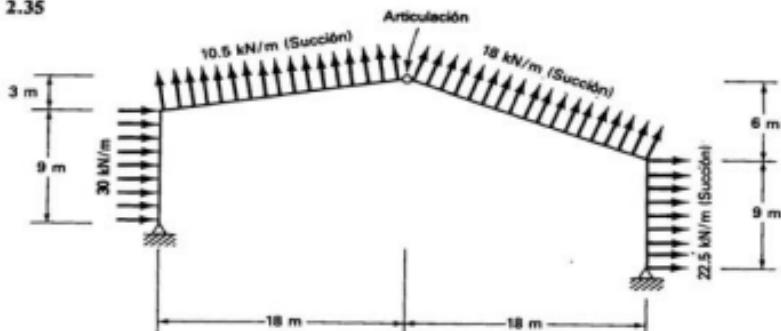
2.32 Resolver el problema 2.31, si la carga de  $45 \text{ kN/m}$  se reduce a  $30 \text{ kN/m}$  y la de  $60 \text{ kN/m}$  se incrementa a  $90 \text{ kN/m}$ . (Resp.:  $V_L = 225 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_L = 675 \text{ kN} \rightarrow$ ,  $V_R = 225 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_R = 675 \text{ kN} \rightarrow$ )

2.33 Resolver el problema 2.32, si se elimina la carga de 30 kN/m.

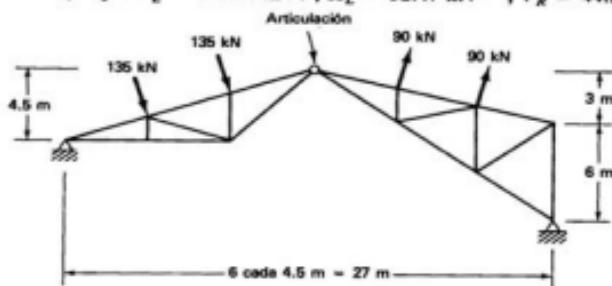
2.34 (Resp.:  $V_L = 215.75 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_L = 215.67 \text{ kN} \leftarrow$ ,  $V_R = 144.25 \text{ kN} \downarrow$ ,  $H_R = 324.33 \text{ kN} \rightarrow$ )



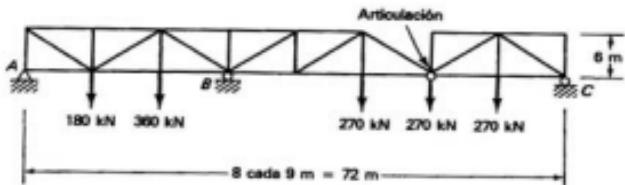
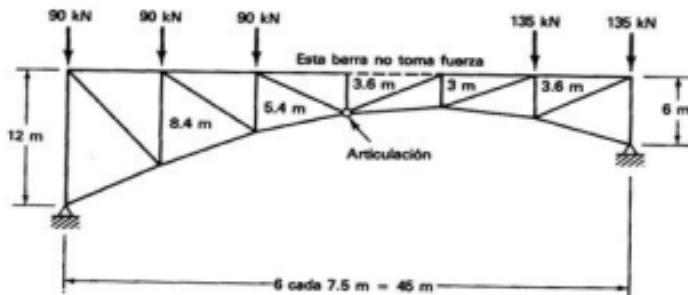
2.35



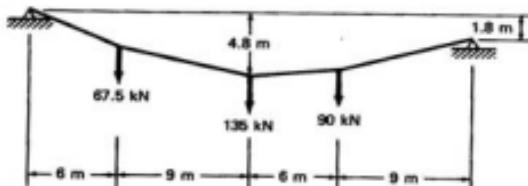
2.36 (Resp.:  $V_L = 124.74 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_L = 52.47 \text{ kN} \leftarrow$ ,  $V_R = 44.28 \text{ kN} \downarrow$ ,  $H_R = 72 \text{ kN} \rightarrow$ )

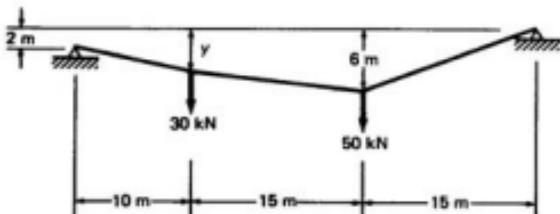


2.37

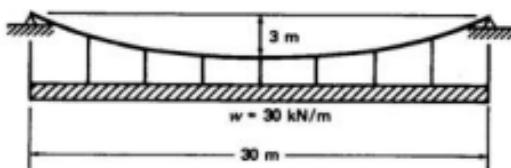
2.38 (Resp.:  $V_L = 285 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_L = 281.25 \text{ kN} \rightarrow$ ,  $H_R = 281.25 \text{ kN} \leftarrow$ ,  $V_R = 255 \text{ kN} \uparrow$ )

2.39 Determinar las componentes de reacción, las flechas bajo las cargas de 67.5 y 90 kN y la fuerza máxima de tensión en el cable.

2.40 Determinar las componentes de reacción, la flecha del cable bajo la carga de 30 kN y la fuerza máxima de tensión en el cable. (Resp.:  $V_A = 35.7 \text{ kN} \uparrow$ ,  $V_B = 44.3 \text{ kN} \uparrow$ ,  $H_A = 110.8 \text{ kN} \leftarrow$ ,  $y = 5.22 \text{ m}$ )



2.41 Determinar las componentes de reacción para la flecha mostrada. Repetir el cálculo para una flecha de 1.20 m.



#### REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. D. A. Firmage, *Fundamental Theory of Structures* (Nueva York: Wiley, 1963), págs. 258-265.

# Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante

### 3.1 INTRODUCCION

Una fase importante de la ingeniería estructural es la comprensión de los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante, así como la elaboración de éstos. Probablemente no exista ningún otro punto en el cual un estudio cuidadoso rinda más frutos en el conocimiento de una estructura, que el relacionado con estos diagramas, cuya utilidad es inapreciable, pues de ellos se pueden obtener directamente los valores de fuerza cortante y de momento flexionante en cualquier punto de una viga.

Para examinar las condiciones internas de una estructura, debe considerarse y estudiarse un cuerpo libre en el que se evidencien qué fuerzas deben estar presentes para que él permanezca en equilibrio. La fuerza cortante y el momento flexionante son dos acciones de las cargas externas sobre una estructura que necesitan ser entendidas para estudiar propiamente las fuerzas internas.

La *fuerza cortante* se define como la suma algebraica de las fuerzas externas perpendiculares al eje de la viga situadas a la izquierda o bien a la derecha de la sección considerada. En este libro se considerará positiva si la suma de las fuerzas a la izquierda de la sección está dirigida hacia arriba o si la suma de las fuerzas a la derecha está dirigida hacia abajo. En el ejemplo 3.1 se muestra el cálculo de la fuerza cortante en dos secciones de una viga simple. En cada caso las sumas se efectúan tanto a la izquierda como a la derecha para mostrar que se obtienen resultados idénticos en ambos casos. Es conveniente efectuar la suma en el lado de la sección que contenga menos cargas.

#### EJEMPLO 3.1

Encontrar la fuerza cortante en las secciones *a-a* y *b-b* de la viga mostrada en la fig. 3.1.

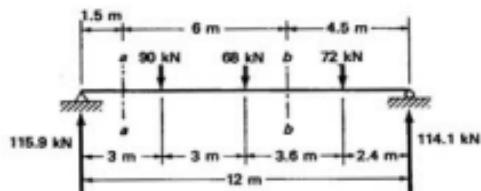


Figura 3.1

*Solución*Cortante en la sección *a-a*:

$$V_{a-a} \text{ a la izquierda} = 115.9 \text{ kN} \downarrow, o + 115.9 \text{ kN}$$

$$V_{a-a} \text{ a la derecha} = 90 + 68 + 72 - 114.1 = 115.9 \text{ kN} \downarrow, o + 115.9 \text{ kN}$$

Cortante en la sección *b-b*:

$$V_{b-b} \text{ a la izquierda} = 115.9 - 90 - 68 = 42.1 \text{ kN} \downarrow = -42.1 \text{ kN}$$

$$V_{b-b} \text{ a la derecha} = 72 - 114.1 = 42.1 \text{ kN} \uparrow = -42.1 \text{ kN}$$
■ ■

*El momento flexionante* es la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas externas a la derecha o a la izquierda de una sección particular, respecto a un eje que pase por el centroide de la sección transversal. Un signo positivo aquí indica que el momento a la izquierda es en el sentido de las manecillas del reloj o que el momento a la derecha es en sentido contrario al de las manecillas. Analizando la fig. 3.7 vemos que un momento positivo en una sección causa tensiones en las fibras inferiores y compresión en las fibras superiores de la viga en esa sección. Si el elemento estructural considerado es vertical, una convención muy generalizada es considerar la parte derecha de éste como el lado inferior.

Los momentos flexionantes en las secciones *a-a* y *b-b* de la viga del ejemplo 3.1 se calculan de la siguiente manera:

Momento en la sección *a-a*:

$$M_{a-a} \text{ a la izquierda} = (115.9)(1.5) = 173.85 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft, o + 173.85 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned} M_{a-a} \text{ a la derecha} &= (114.1)(10.5) - (72)(8.1) - (68)(4.5) - (90)(1.5) \\ &= 173.85 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft, o + 173.85 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Momento en la sección *b-b*:

$$\begin{aligned} M_{b-b} \text{ a la izquierda} &= (115.9)(7.5) - (90)(4.5) - (68)(1.5) = 362.25 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft, \\ &o + 362.25 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$



The Tridge, puente peatonal de tres vías construido de madera aglomerada y laminada, Midland, Michigan. (Cortesía de Unit Structures, Inc.)

$$M_{b,b} \text{ a la derecha} = (114.1)(4.5) - (72)(2.1) = 362.25 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft, \text{ o } + 362.25 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Posteriormente, cuando en este texto se presenten métodos para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas, se dará una convención de signos más detallada para las fuerzas axiales y cortantes y para los momentos flexionantes. Esto es particularmente necesario cuando el análisis se hace empleando métodos matriciales (capítulos 16 al 20).

### 3.2 DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE

Los diagramas de fuerza cortante se dibujan muy fácilmente en la mayoría de los casos. El método más común es comenzar desde el extremo izquierdo y proceder hacia la derecha. Al aparecer una fuerza o reacción concentrada, se traza una línea vertical para representar la magnitud y dirección de la fuerza. Entre las fuerzas se traza una línea horizontal para indicar que no hay cambio en la fuerza cortante.

Cuando aparecen fuerzas uniformes, la fuerza cortante cambia a razón constante y puede representarse entonces por una recta inclinada en el diagrama. Una ordenada positiva en el diagrama se asocia con cortantes positivas en la viga. En el ejemplo 3.2 se traza el diagrama de cortante para una viga simple.

#### EJEMPLO 3.2

Dibujar el diagrama de fuerza cortante para la viga mostrada en la fig. 3.2.

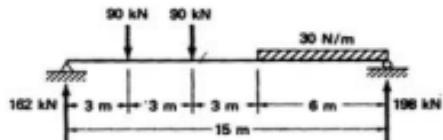
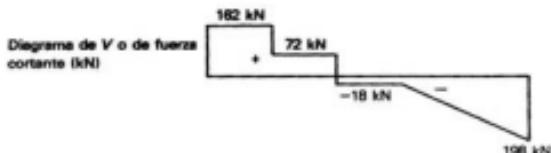


Figura 3.2

*Solución*

### 3.3 DIAGRAMAS DE MOMENTO

Los momentos en varios puntos de una estructura, necesarios para trazar el diagrama de momentos flexionantes, pueden obtenerse algebraicamente tomando momentos en esos puntos, pero el procedimiento es muy tedioso si hay más de dos o tres cargas aplicadas a la estructura. El método desarrollado en la siguiente sección es mucho más práctico.

### 3.4 RELACIONES ENTRE CARGAS CORTANTES, Y MOMENTOS FLEXIONANTES

Existen importantes relaciones matemáticas entre las cargas, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en una viga. Estas relaciones se analizan en los siguientes párrafos haciendo referencia a la fig. 3.3.

La fuerza cortante y el momento flexionante en la sección 1-1 pueden escribirse de la siguiente manera:

$$V_{1-1} = R_A - P - wa$$

y

$$M_{1-1} = R_A x - P(a + b) - \frac{w a^2}{2}$$

La fuerza cortante y el momento flexionante en la sección 2-2, situada ésta a una distancia  $dx$  a la derecha de la sección 1-1, son:

## 3.4 Relaciones entre cargas cortantes, y momentos flexionantes

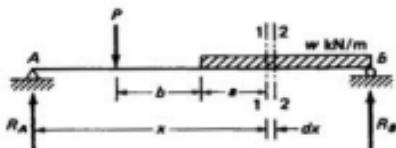


Figura 3.3

$$V_{2-2} = V_{1-1} + dV = R_A - P - wa - w dx$$

$$M_{2-2} = M_{1-1} + dM = R_A x - P(a + b) - \frac{wa^2}{2} + V_{1-1} dx - \frac{wdx^2}{2}$$

De estas ecuaciones se obtienen los cambios en el cortante y en el momento en una distancia  $dx$ ; las expresiones correspondientes son:

$$\frac{dV}{dx} = -w$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \text{omitiendo el infinitesimal } \frac{wdx^2}{2}$$

Estas dos relaciones son muy útiles para el ingeniero de estructuras. La primera indica que la razón de cambio del cortante en cualquier punto es igual a la carga por unidad de distancia en ese punto, o sea, que la pendiente de la curva de cortante en cualquier punto es igual a la carga en ese punto. La segunda ecuación indica que la razón de cambio del momento en cualquier punto es igual al cortante, es decir, la pendiente de la curva de momento en cualquier punto es igual al cortante.

El procedimiento para trazar diagramas de cortante y momento, que será descrito en la sección 3.5, se basa en las ecuaciones anteriores y es aplicable a todas las estructuras, sean cuales sean los claros y las cargas. Antes de describir el procedimiento, conviene examinar las ecuaciones con más detalle. Un valor particular de  $dV/dx$  o de  $dM/dx$ , es válido sólo para la parte de la estructura en la que la función es continua. Por ejemplo, en la viga del ejemplo 3.4, la razón de cambio del cortante de  $A$  a  $B$  es igual a la carga uniforme de 60 kN/m. Bajo la carga de 120 kN, que se supone actuando en un punto, la razón de cambio del cortante y la pendiente en el diagrama de cortante son infinitas, y se dibuja una línea vertical en el diagrama para señalar que ahí existe una fuerza concentrada. La razón de cambio del momento de  $A$  a  $B$  es constante, pero en  $B$  el cortante cambia bruscamente, así como la razón de cambio del momento. En otras palabras, la expresión para el cortante o para el momento de  $A$  a  $B$ , no es la misma que para el cortante o el momento de  $B$  a  $C$ . Las ecuaciones de los diagramas no son continuas más allá de un punto en donde la función es discontinua.

### 3.5 DIAGRAMAS DE MOMENTOS A PARTIR DE LOS DIAGRAMAS DE CORTANTE

Se ha mostrado que el cambio en el momento entre dos puntos de una estructura es igual al cortante entre esos puntos multiplicado por la distancia entre ellos ( $dM = Vdx$ ); por esto, el cambio en momento es igual al área del diagrama de cortante entre los puntos.

La relación entre el cortante y el momento simplifica considerablemente el trazo de los diagramas de momento. Para determinar el momento en una sección particular, sólo es necesario calcular el área total bajo la curva de cortante a la izquierda o bien a la derecha de la sección, tomando en cuenta los signos algebraicos de segmentos de la curva de cortante.

Los diagramas de cortante y de momento son autocomprobantes. Si éstos se inicián en un extremo de una estructura, usualmente se acostumbra empezar por el izquierdo, y se llega al valor correcto en el otro extremo, el diagrama está probablemente bien trazado.

Los autores encuentran conveniente calcular el área de cada parte de un diagrama de cortante e indicar ese valor sobre la parte considerada. Este procedimiento se sigue en los ejemplos de este capítulo, en donde los valores encerrados en los diagramas de cortante representan áreas. Estos valores registrados, simplifican bastante la elaboración de diagramas de momento.

Vimos antes que la razón de cambio del momento en un punto es igual al cortante en ese punto ( $dM/dx = V$ ). Siempre que el cortante pasa por cero, la razón de cambio del momento debe también ser cero ( $dM/dx = 0$ ) y en esa sección el momento adquiere un valor máximo o mínimo. Si el diagrama de momentos se traza de izquierda a derecha y el diagrama de cortante cambia de positivo a negativo, el momento alcanzará un valor máximo en ese punto. Más allá de ese punto comienza a disminuir al añadirse el cortante negativo.

Si el diagrama de cortante cambia de negativo a positivo, el momento alcanza un máximo negativo y luego comienza a disminuir al añadirse el área de cortante positivo.

Esta teoría, de que el momento máximo ocurre en donde el cortante es cero, no es siempre aplicable. En algunos casos (en el extremo de una viga o en un punto de discontinuidad) el momento máximo puede ocurrir donde el cortante no es cero.

En una viga en voladizo con cargas por gravedad, el cortante máximo y el momento máximo se presentan en el extremo empotrado.

Al trazar diagramas de cortante y momento de elementos estructurales inclinados, deben considerarse las componentes de las cargas y de las reacciones perpendiculares a los ejes centroidales de los elementos y los diagramas deben dibujarse paralelos a éstos.

Los ejemplos del 3.3 al 3.5 ilustran el procedimiento de trazar los diagramas de cortante y de momento en vigas comunes. Al estudiar estos diagramas debe ponerse atención especial a la forma de éstos bajo cargas uniformes, entre cargas concentradas, etc.

**EJEMPLO 3.3**

Dibujar los diagramas de cortante y momento para la viga mostrada en la fig. 3.4.

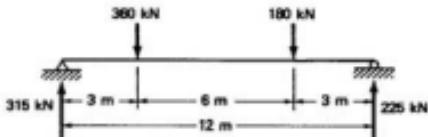
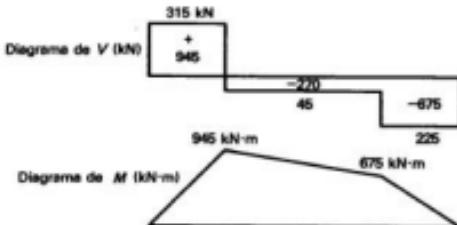


Figura 3.4

*Solución***EJEMPLO 3.4**

Dibujar los diagramas de cortante y momento para la estructura mostrada en la fig. 3.5.

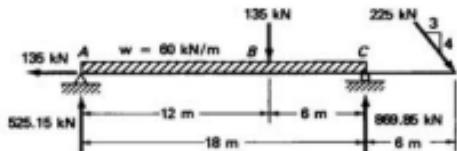
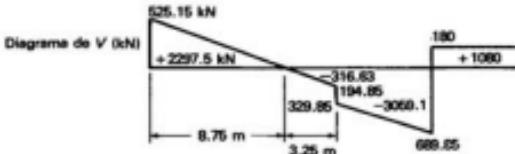
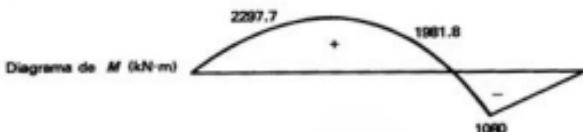
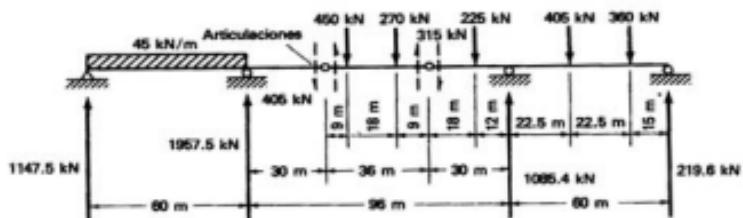
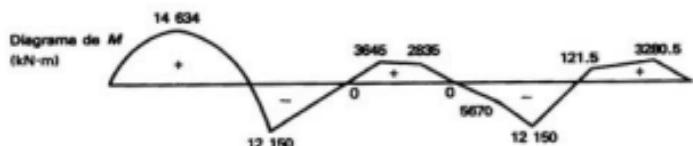
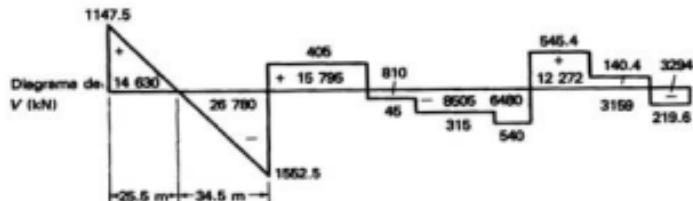


Figura 3.5

*Solución*

**EJEMPLO 3.5**

Dibujar los diagramas de cortante y momento para la estructura mostrada en la fig. 3.6.

**Figura 3.6****Solución**



Puente peatonal en el Pullen Park, Raleigh, Carolina del Norte. (Cortesía del American Institute of Timber Construction.)

Algunas estructuras tienen brazos rígidos (por ejemplo paredes) unidos a ellas. Si se aplican cargas horizontales o inclinadas a esos brazos, se inducirá un momento concentrado en la estructura en el punto de la conexión. El hecho de que el momento se toma respecto a un eje, a través del centroide de la sección, resulta importante porque los brazos de palanca de las fuerzas aplicadas deben medirse hasta ese centroide. Para trazar el diagrama de momento en el punto de la conexión, es necesario determinar el valor del momento a una distancia infinitesimal a la izquierda del punto y luego añadir el momento aplicado por el brazo. El momento exactamente en el punto de la conexión es discontinuo y no puede determinarse, pero si el momento inmediatamente más allá del punto.

La convención usual para el signo de los momentos positivos y negativos se aplica para decidir si hay que sumar o restar el momento inducido. Puede verse en la fig. 3.7 qué fuerzas a la izquierda de una sección, que tienden a generar momentos en el sentido de las manecillas del reloj, producen tensión en las fibras inferiores (momento positivo, +), mientras que fuerzas a la izquierda que tienden a generar momentos en sentido opuesto al de las manecillas del reloj producen tensión en las fibras superiores (momento negativo, -). Similarmente, un momento contrario a las manecillas del reloj, a la derecha de la sección, produce tensión en las fibras inferiores y un momento en el sentido de las manecillas del reloj produce tensión en las fibras superiores.

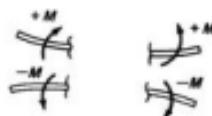


Figura 3.7

En la fig. 3.6 se muestran los diagramas de cortante y momento de una viga que tiene un momento inducido en un punto por un brazo rígido al cual se aplica un par. El diagrama de momento se traza de izquierda a derecha. Considerando el momento de las fuerzas a la izquierda de una sección ubicada inmediatamente a la derecha del brazo rígido, puede verse que el par genera un momento en sentido de las manecillas del reloj o positivo, cuyo valor se suma al momento obtenido al sumar las áreas del diagrama de cortante que se extienden hasta el brazo rígido.

### EJEMPLO 3.6

Trazar los diagramas de cortante y momento para la viga mostrada en la fig. 3.8.

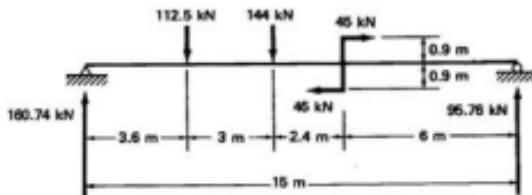
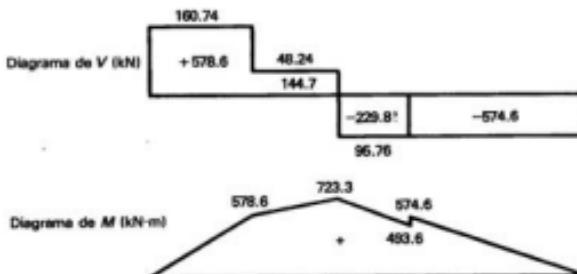


Figura 3.8

*Solución*



Al principio se pueden tener algunas dificultades al intentar trazar los diagramas de cortante y momento de estructuras sujetas a cargas triangulares. El ejemplo 3.7 se presenta para mostrar cómo tratar esos casos. Se calculan las reacciones para la viga mostrada en la fig. 3.9 y se esboza el diagrama de cortante. Obsérvese, sin embargo, que el punto de cortante nulo no se conoce; lo mostramos en la figura a una distancia  $x$  del apoyo izquierdo.

La ordenada en el diagrama de carga en este punto la llamamos  $y$ , así como su valor en términos de  $x$  está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{30}$$

$$y = \frac{10}{3}x$$

En este punto de cortante nulo, la suma de las fuerzas verticales a la izquierda puede expresarse como la reacción hacia arriba de 45 kN, menos la carga hacia abajo que varía uniformemente hacia la izquierda.

$$45 - \left(\frac{1}{2}\right)(x)\left(\frac{10}{3}x\right) = 0$$

$$x = 5.2 \text{ m}$$

De esta ecuación,  $x = 5.2 \text{ m}$ . Este valor de  $x$  puede también determinarse escribiendo una expresión para el momento en la viga a una distancia  $x$  del apoyo y luego haciendo  $dM/dx = 0$ , de donde se despeja el valor de  $x$ .

Finalmente, el momento en un punto particular puede determinarse calculando (a la derecha o a la izquierda del punto) la suma de los productos de las fuerzas por sus respectivos brazos de palanca.

Para este ejemplo, el momento a 5.2 m es:

$$M = 45(5.2) - \frac{5}{9}(5.2)^3$$

$$= 155.88 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Podría preguntarse por qué los autores (una vez determinada  $x$ ) no sólo sumaron el área bajo el diagrama de cortante desde el apoyo izquierdo hasta el punto de cortante nulo. Tal procedimiento es correcto pero hay que asegurarse que la determinación del área está bien hecha.

Cuando se tienen tramos de parábolas es necesario calcular las áreas con cálculo integral en vez de usar las fórmulas usuales contenidas en los manuales. Por ello es con frecuencia más sencillo tomar momentos.

**EJEMPLO 3.7**

Trazar los diagramas de cortante y momento para la viga mostrada en la fig. 3.9.

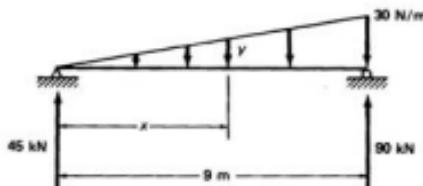
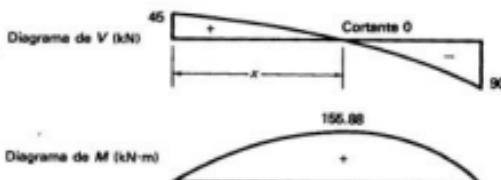


Figura 3.9

*Solución*



Las reacciones para la viga del ejemplo 3.8 no pueden obtenerse usando sólo ecuaciones de la Estática. Estas se calcularon con un método expuesto más adelante, y los diagramas de cortante y momento se trazaron para mostrar que las relaciones entre carga, cortante y momento son aplicables a todas las estructuras.

**EJEMPLO 3.8**

Trazar los diagramas de cortante y momento para la viga continua mostrada en la fig. 3.10, en la que se indican las reacciones.

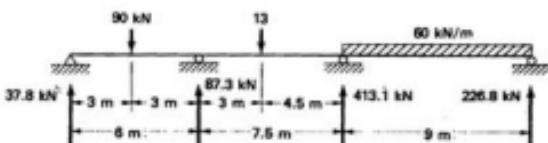
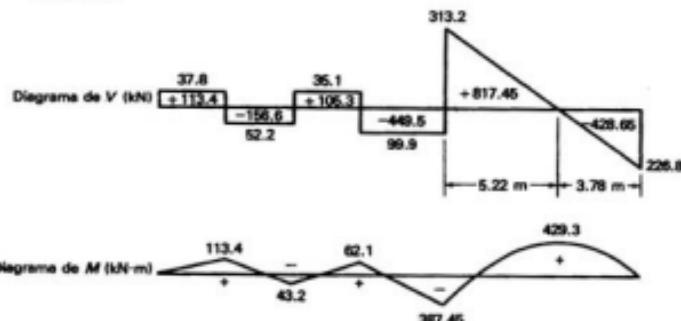
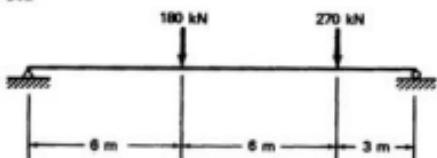
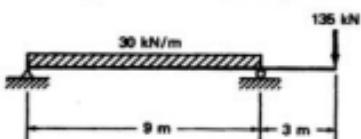


Figura 3.10

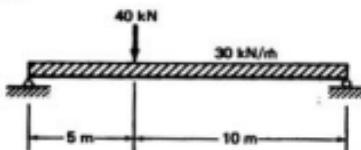
*Solución***PROBLEMAS**

En los problemas 3.1 al 3.37 trazar los diagramas de cortante y momento para las estructuras mostradas.

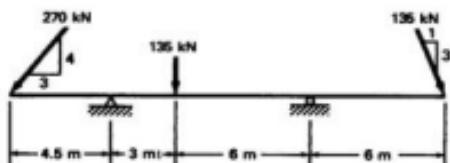
3.1

3.2 (Resp.:  $\max V = 180 \text{ kN}$ ,  $\max M = 405 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

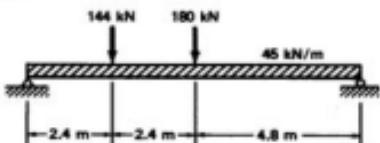
3.3



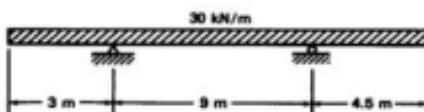
3.4 (Resp.: máx  $V = 216 \text{ kN}$ , máx  $M = 972 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



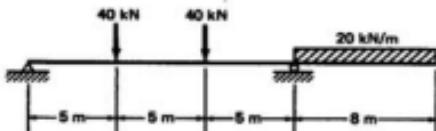
3.5



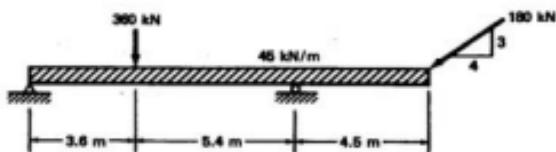
3.6 (Resp.: máx  $V = 153.76 \text{ kN}$ , máx  $M = 303.75 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



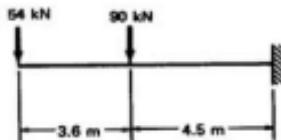
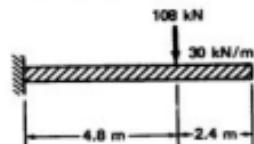
3.7



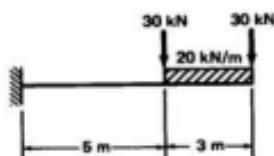
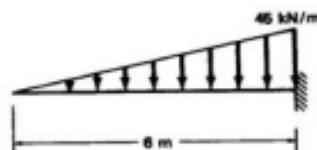
3.8 (Resp.: máx  $V = 451.12 \text{ kN}$ , máx  $M = 941.62 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



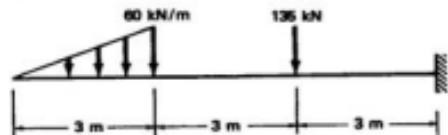
3.9

3.10 (Resp.: máx  $V = 324 \text{ kN}$ , máx  $M = 1296 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

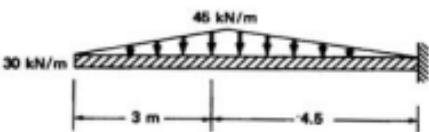
3.11

3.12 (Resp.: máx  $V = 135 \text{ kN}$ , máx  $M = 270 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

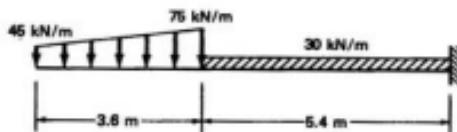
3.13



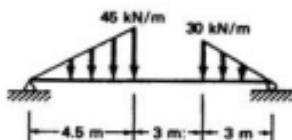
3.14 (Resp.: máx  $V = 393.75 \text{ kN}$ , máx  $M = 1518.75 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



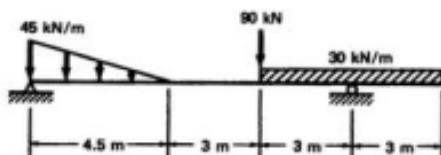
3.15



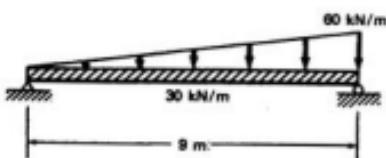
3.16 (Resp.: máx  $V = 80.91 \text{ kN}$ , máx  $M = 216.95 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



3.17

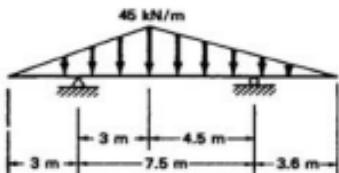
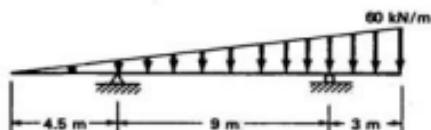


3.18 (Resp.: máx  $V = 315 \text{ kN}$ , máx  $M = 611.55 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

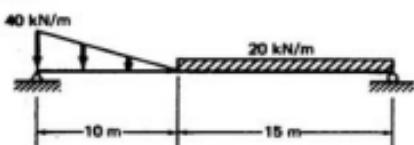
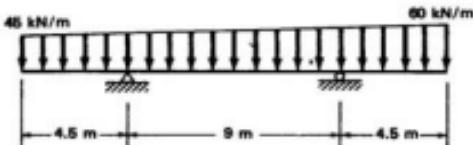


## Problemas

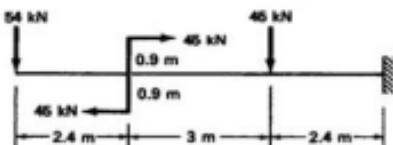
3.19

3.20 (Resp.: máx  $V = 193.95 \text{ kN}$ , máx  $M = 253.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

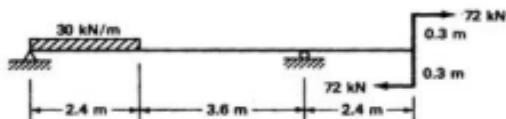
3.21

3.22 (Resp.: máx  $V = 261.58 \text{ kN}$ , máx  $M = 594.81 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

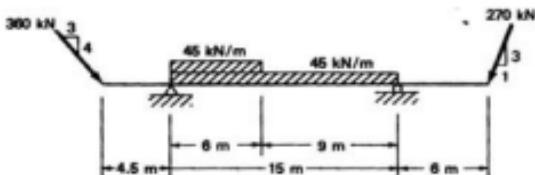
3.23



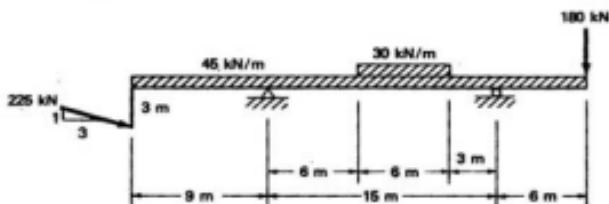
3.24 (Resp.:  $\text{máx } V = 50.4 \text{ kN}$ ,  $\text{máx } M = 43.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



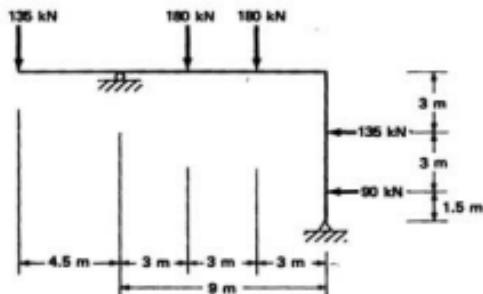
3.25



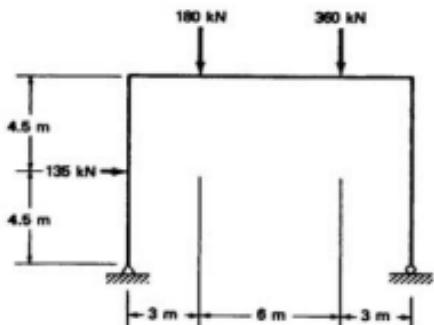
3.26 (Resp.:  $\text{máx } V = 490.36 \text{ kN}$ ,  $\text{máx } M = -3103.11 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



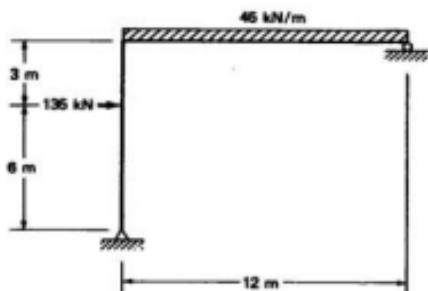
3.27



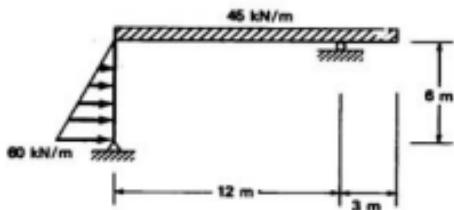
3.28 (Resp.: máx  $V = 365.625 \text{ kN}$ , máx  $M = 1130.625 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



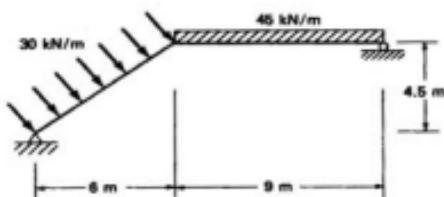
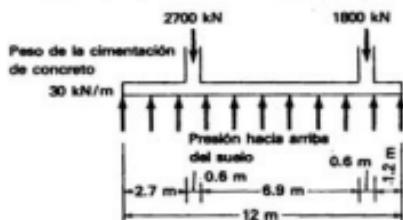
3.29



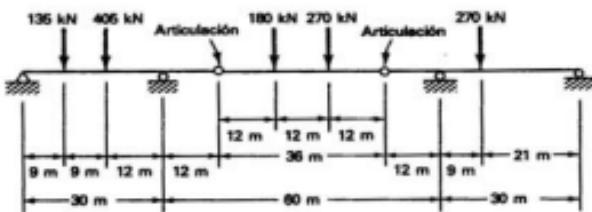
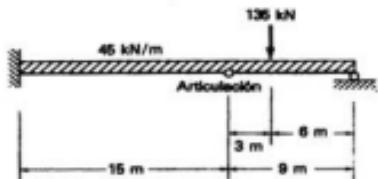
3.30 (Resp.: máx  $V = -316.875 \text{ kN}$ , máx  $M = 913.16 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

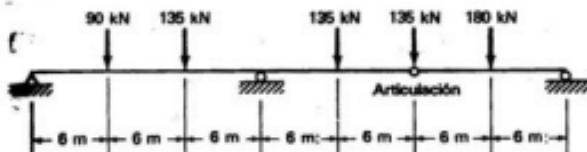


3.31

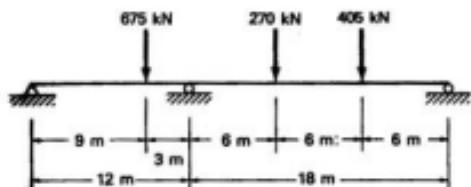
3.32 (Resp.: máx.  $V = 1462.5 \text{ kN}$ , máx.  $M = 1620 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

3.33

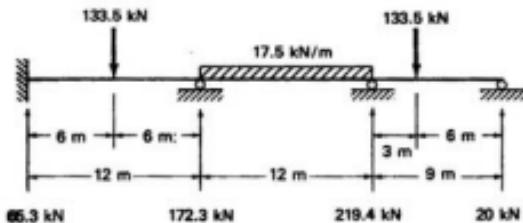
3.34 (Resp.: máx.  $V = 967.5 \text{ kN}$ , máx.  $M = 9450 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

**3.35**

**3.36** Se da: momento flexionante en el apoyo interior = -1720 kN·m  
 (Resp.: máx  $V = 649.6$  kN, máx  $M = -1720$  kN·m)



**3.37** Se da: momento flexionante en el empotramiento = -200 kN·m. Se dan también las otras reacciones en la figura.



# Introducción al estudio de las armaduras planas

### 4.1 GENERALIDADES

Se cree que un arquitecto italiano, Andrea Palladio (1518-1580), fue quien analizó y construyó las primeras armaduras. Sus extensas notas sobre arquitectura incluyen descripciones detalladas y dibujos de armaduras de madera bastante similares a las usadas actualmente [1].

En el capítulo 1 se definió una armadura como una estructura formada por un grupo de elementos estructurales dispuestos en forma de uno o más triángulos. Como se supone que los elementos están conectados entre sí por medio de pasadores sin fricción, el triángulo es la única forma estable. Analizando la armadura de la fig. 4.1(a), vemos que es imposible que el triángulo cambie de forma bajo carga a menos que uno o más lados se flexionen o se quiebren. Configuraciones de cuatro o más lados no son estables y pueden fallar bajo carga, como se muestra en la fig. 4.1(b) y (c). Estas estructuras pueden ser deformadas sin cambiar la longitud de ninguno de sus elementos. Sin embargo, se mostrará que hay muchas estructuras estables que contienen una o más figuras que no son triángulos. Un estudio cuidadoso mostrará que éstas constan de grupos separados de triángulos conectados entre sí de acuerdo con ciertas reglas, formando entonces figuras no triangulares pero estables.



Figura 4.1



Hospital General de Zona del IMSS en el sur de la ciudad de México.  
(Cortesía de ILIDEM, S.A.)

## 4.2 HIPOTESIS PARA EL ANALISIS DE ARMADURAS

Para simplificar el análisis de las armaduras se hacen las siguientes hipótesis:

1. Los elementos de las armaduras están conectados por medio de pasadores sin fricción. (Las conexiones con pasadores se usan en muy pocas estructuras fabricadas en la actualidad, y no existen pasadores sin fricción. Una conexión fuertemente atornillada o soldada dista mucho de ser un pasador sin fricción.)
2. Los elementos de la estructura son rectos. (Si no lo fuesen, las fuerzas axiales ocasionarían en ellos momentos flexionantes.)
3. Las deformaciones de una armadura cargada, causadas por los cambios en la longitud de los elementos individuales, no son de suficiente magnitud para ocasionar cambios apreciables en la forma y dimensiones generales de la armadura. Debe darse atención especial a las armaduras muy largas y flexibles.
4. Los elementos están dispuestos de manera que las cargas y las reacciones se aplican sólo en los nudos de las armaduras.

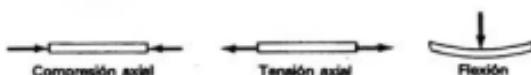


Figura 4.2

La observación de las armaduras de techos y puentes, mostrará que esta última hipótesis se cumple en general. En edificios con armaduras en el techo, las vigas, columnas y elementos de arriostramiento se conectan directamente a los nudos de la armadura. Las cargas del techo se transmiten a las armaduras por medio de vigas horizontales llamadas largueros que salvan los claros entre armaduras. El techo lo soportan directamente los largueros o largueros secundarios que corren paralelamente a las armaduras y se apoyan en los largueros principales. Los largueros se colocan sobre los nudos de la armadura a menos que la longitud de los tableros de la cuerda superior resulte demasiado larga; en tales casos a veces es económico colocar largueros entre los nudos, aunque entonces la cuerda superior estará sometida también a flexión. (Algunos tipos de techos, como las láminas de acero corrugado, las losas de yeso y otros, pueden colocarse directamente sobre los largueros; éstos deben espaciarse sobre la cuerda superior de manera que proporcionen un claro modulado, acorde con el tipo de techo que soportarán.) Las cargas soportadas por un puente carretero se transmiten a los nudos de las armaduras por medio de vigas situadas bajo la superficie de rodamiento, como se muestra en la fig. 7.16 y describe en la sección 7.13.

### 4.3 EFECTO DE LAS HIPÓTESIS

El efecto de las hipótesis anteriores es producir una armadura ideal cuyos elementos trabajan sólo a fuerzas axiales. Un elemento con sólo fuerza axial está sometido a tensión o bien a compresión, pero no a flexión, como se ilustra en la fig. 4.2. (Aun en el caso en donde todas las hipótesis se cumplieran exactamente, se tendría algo de flexión en un elemento debido al peso propio de éste.)

Las fuerzas obtenidas con base en esas hipótesis simplificadas son en la mayoría de los casos muy satisfactorias y se denominan *fuerzas primarias*. Las estructuras se analizan a veces sin la ayuda de algunas o de ninguna de esas hipótesis. Las fuerzas causadas por condiciones no consideradas en el análisis de fuerzas primarias se denominan *fuerzas secundarias*.

### 4.4 NOTACION PARA LAS ARMADURAS

Un sistema conveniente para designar los elementos de una armadura se ilustra en la fig. 4.3. Se numeran los nudos de izquierda a derecha; a los inferiores se les asigna la letra *L* (*lower* = inferior) y a los superiores la letra *U* (*upper* = superior). Si

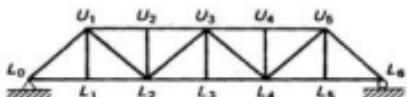


Figura 4.3

existieran nudos intermedios entre los superiores y los inferiores, como en cierto tipo de estructuras más complicadas, se les asignaría la letra  $M$  (middle = intermedio). Cada una de estas letras recibe un subíndice numérico.

Los elementos o barras de una armadura reciben los siguientes nombres (véase la fig. 4.3):

- Cuerdas:* son las barras que forman el perímetro de la armadura, por ejemplo las barras  $U_1, U_2$  y  $L_4, L_5$ .
- Verticales:* son las barras que por su orientación dentro de la armadura reciben este nombre, por ejemplo las barras  $U_1, L_1$  y  $U_3, L_3$ .
- Diagonales:* son las barras que por su orientación dentro de la armadura reciben este nombre, por ejemplo las barras  $U_1, L_2$  y  $L_4, U_5$ .
- Elementos de alma o celosía:* comprende las barras verticales y las diagonales de una armadura; algunos ingenieros incluyen dentro de éstas a las diagonales extremas como las  $L_0, U_1$  y  $U_3, L_6$ .

Existen otros sistemas de notación para armaduras. Por ejemplo, en los programas para computadora es conveniente asignar un número a cada nudo y a cada barra de una armadura. Tal sistema se ilustra en el capítulo 20 de este texto.

## 4.5 ARMADURAS PARA TECHOS

El propósito de las armaduras para techos es darle soporte a éstos, así como a las partes mecánicas (ductos, tuberías) y arquitectónicas (plafones, lámparas) que cuelgan bajo ellas.

El ingeniero de estructuras se enfrenta con frecuencia al problema de tener que seleccionar una armadura o una viga para salvar un claro dado. Si no existen otros factores, la decisión se basará probablemente en consideraciones económicas. Para un claro dado, una armadura necesitará casi siempre la menor cantidad de material estructural; sin embargo, el costo de fabricación y montaje de las armaduras será mayor que para las vigas en ciertos casos. En claros cortos el costo total de las vigas (material, fabricación, montaje) será menor, pero al crecer los claros, los mayores costos de fabricación y montaje de las armaduras quedarán compensados por el ahorro en material. Una ventaja adicional de las armaduras es que para la misma cantidad de material, éstas son más rígidas que las vigas.

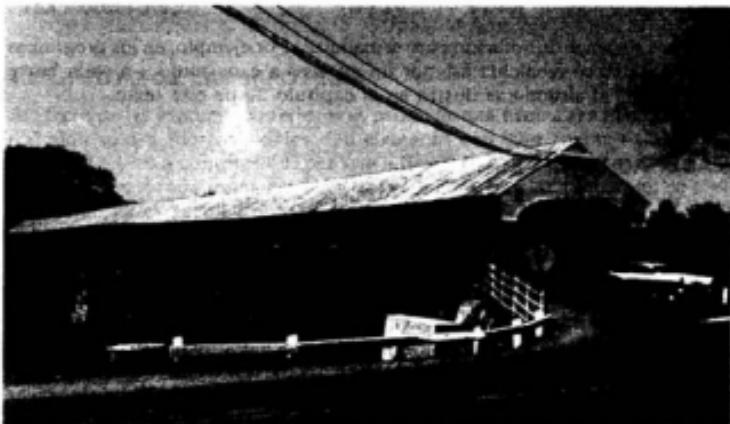
Es imposible dar un límite inferior para el claro económico de las armaduras; las cuales se usan para claros que varían entre 10 y 120 metros. En algunos casos las vigas pueden resultar económicas para claros mucho mayores que el límite inferior mencionado para las armaduras.

Las armaduras para techos pueden ser de lomo plano o de lomo en punta. En el pasado, las armaduras de lomo en punta se han usado más en edificios de claros cortos y las armaduras de lomo plano para los de claros mayores. La tendencia actual es usar en ambos casos las de lomo plano; la razón para esto es de carácter estético y económico.

La figura 4.4 muestra algunos de los tipos de armaduras para techos que se han usado con frecuencia en el pasado.

#### 4.6 ARMADURAS PARA PUENTES

A medida que los claros por cubrir y las cargas por soportar van siendo mayores, las armaduras comienzan a competir con otros tipos de estructuras para puentes. Las primeras armaduras para puentes se construyeron de madera, pero tenían varias desventajas. Primero, estaban sujetas al deterioro por el viento y el agua; por esto se introdujeron los puentes cubiertos y tales estructuras duraban con frecuencia largos períodos. Otro enemigo de las armaduras para puentes de madera era el fuego, especialmente en puentes para ferrocarril. Además, con el paso de los años y el in-



Puente cubierto Cornish-Windsor sobre el río Connecticut, entre Vermont y Nueva Hampshire. (Cortesía de New Hampshire Department of Public Works and Highways.)

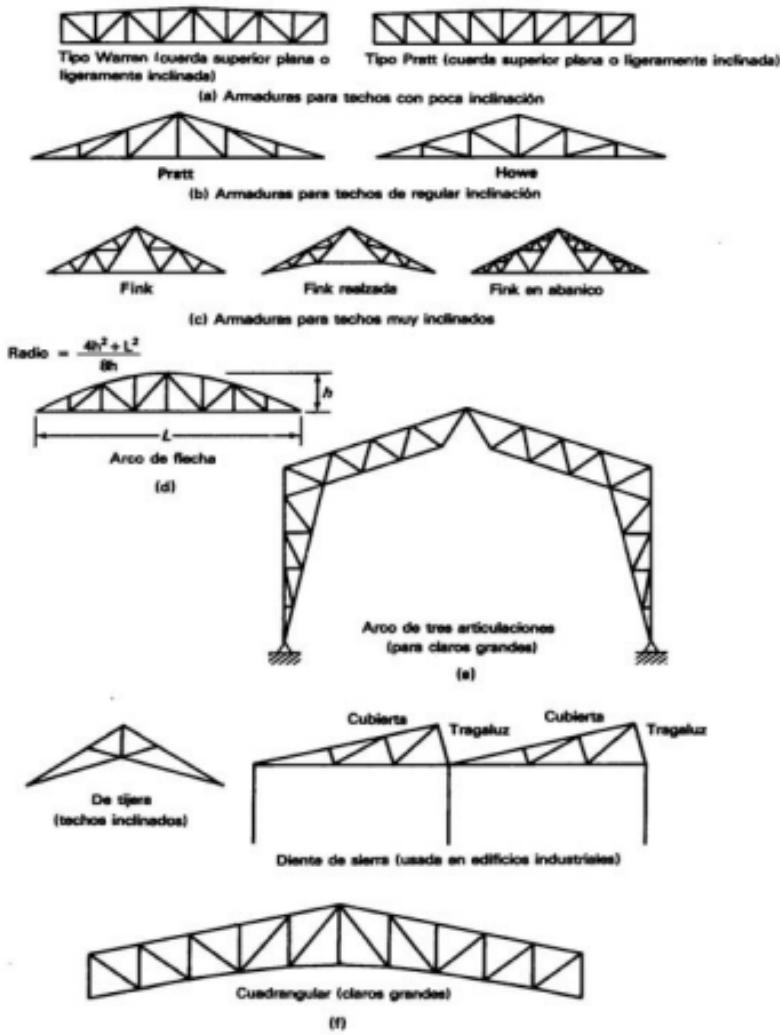


Figura 4.4

creimiento de la magnitud de las cargas, se presentaban problemas debido al aflojamiento de los pernos de unión.

Como resultado de todas estas desventajas, las armaduras de madera para puentes dejaron de usarse hacia fines del siglo XIX, viiniendo a ser sustituidas por las estructuras de acero; éstas no necesitan tanta protección contra los elementos y sus nudos tienen resistencias más altas a la fatiga. En el pasado se llegaron a construir también armaduras de hierro para puentes.

Actualmente las armaduras existentes de acero para puentes están siendo reemplazadas por puentes de vigas de acero, de concreto precolado o de concreto preesforzado. Parece ser que ha pasado la edad de las armaduras de acero para puentes, excepto en claros de cientos de metros (un pequeño porcentaje del total).

El lector quizás habrá visto puentes carreteros, cuyas armaduras se colocan a los lados. Conforme se avanza por el puente se advierten, al mirar hacia arriba, los elementos estructurales que entrelazan las armaduras. A este tipo de puente se le llama *de calzada inferior*. El sistema de piso está soportado por vigas que van bajo la calzada y se apoyan en los nudos de las cuerdas inferiores de las armaduras.

En los puentes *de calzada superior*, la vía de tránsito se coloca sobre las armaduras o sobre trabes. Este tipo de construcción tiene muchas ventajas sobre la



Puente El Bayano, Panamá. (Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)

de paso inferior, excepto en la reducción del espacio libre en la parte de abajo. En este tipo de puentes, las distancias libres horizontal y vertical son ilimitadas; además, cualquier eventual ampliación es más fácil de realizar. Otra ventaja muy importante es que las armaduras o tráves de apoyo pueden acercarse más entre sí, de manera que es posible reducir los momentos laterales en el sistema de piso. Otras ventajas de este tipo de puente son los sistemas simplificados de piso y la posible reducción en las dimensiones de las pilas y los estribos de apoyo, debido a la disminución en sus alturas. Finalmente, el mejor aspecto de este tipo de estructuras es otra razón para su creciente popularidad.

Actualmente el ingeniero de puentes trata de evitar cualquier sensación de encierro en los usuarios de la obra. Para alcanzar esta meta se esfuerza en eliminar todo tipo de refuerzo estructural en lo alto, o bien, cualquier elemento de armadura o arriostramiento que sobresalga del nivel de la superficie de tránsito. El resultado es, de nuevo, que el puente de calzada superior resulta ser el más conveniente, a menos que las exigencias en el paso libre por debajo de tal estructura impidan su uso, o bien, que los claros sean tan grandes que su aplicación no resulte práctica.

En ocasiones, las armaduras para los puentes de calzada inferior, de claro corto eran tan bajos, que no se disponía de una altura suficiente para proporcionar arriostramiento por la parte superior y al mismo tiempo dejar una altura libre suficiente para el tránsito vehicular. Por ello, el arriostramiento se colocaba bajo la superficie

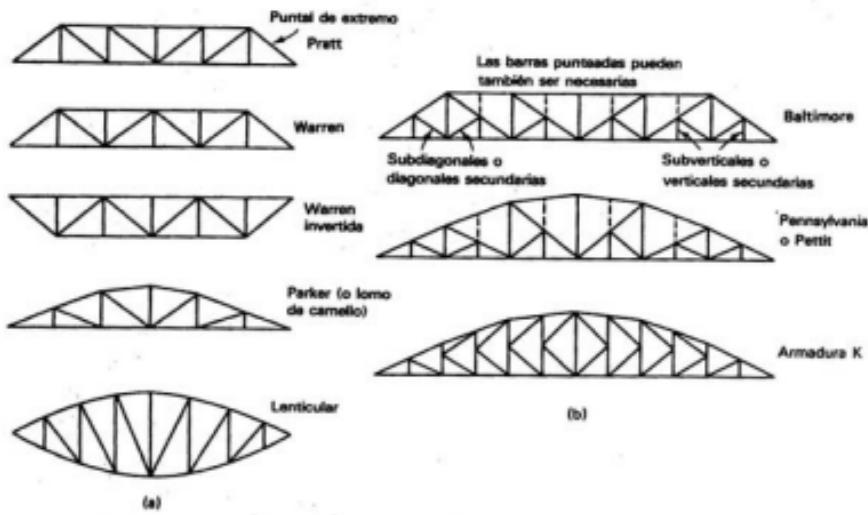


Figura 4.5

de rodamiento. Los puentes de calzada inferior sin arriostramiento en la parte superior se denominan *puentes tipo pony* o *puentes rebajados*. Un problema que se presenta en estos puentes es la dificultad de proporcionar un arriostramiento lateral adecuado para los elementos a compresión de la cuerda superior. Es poco probable que hoy en día resulte económico un puente de este tipo cuando se dispone de soluciones alternativas a base de tráves de alma llena.

La fig. 4.5(a) muestra algunos de los tipos de armaduras para puentes que se usaron en el pasado para claros medios.

Cuanto mayor peralte tenga una armadura, con iguales dimensiones de sus cuerdas, tanto mayores serán sus momentos resistentes. Si se varía el peralte de la armadura a lo largo del claro en proporción a los momentos flexionantes, se obtendrá una estructura más ligera, pero su costo de fabricación será mayor que para una de cuerdas paralelas. A medida que los claros van siendo mayores, el peso ahorrado al variar el peralte importará más que los costos adicionales de fabricación y entonces las "armaduras de cuerdas curvas" resultan económicas.

La fig. 4.5(b) muestra algunos tipos de armaduras que se han usado con frecuencia para claros grandes. Las armaduras tipo Baltimore y Pennsylvania se denominan armaduras subdivididas, ya que las longitudes sin soporte lateral de algunos



Estructura metálica utilizada en obras ligeras. Obra en México. (Cortesía de RSI.)

de sus elementos se han reducido por la introducción de elementos cortos llamados subdiagonales y subverticales.

#### 4.7 DISPOSICION O ARREGLO DE LOS ELEMENTOS DE UNA ARMADURA

Hemos visto que el triángulo es la forma geométrica básica a partir de la cual se construyen las armaduras, debido a que es la única forma estable. Otras formas, como las mostradas en las figs. 4.6(a) y (b), obviamente son inestables y pueden fallar bajo carga. Sin embargo, estructuras como esas pueden volverse estables por alguno de los siguientes procedimientos:

1. Añadiendo elementos de manera que las formas queden subdivididas en triángulos. Las estructuras de las figs. 4.6(a) y (b) se muestran estabilizadas de esta manera en las figs. 4.6(c) y (d), respectivamente.
2. Usando un elemento para unir la estructura inestable a un apoyo estable. El elemento *AB* cumple esta función en la fig. 4.6(e).
3. Haciendo rígidos uno o todos los nudos de una estructura inestable de manera que puedan resistir momentos. Sin embargo, una estructura con nudos resistentes a momento no satisface la definición de una armadura (o sea que los elementos deben estar conectados por medio de pasadores sin fricción, etc.).

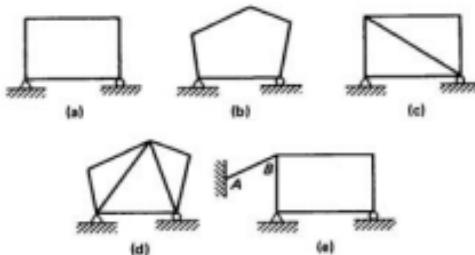


Figura 4.6

#### 4.8 DETERMINACION ESTATICA DE LAS ARMADURAS

En la fig. 4.7(a) se muestra la armadura más sencilla posible, es decir, un simple triángulo. Para determinar las fuerzas y reacciones desconocidas en esta armadura, es posible aislar los nudos y escribir para cada uno las siguientes dos ecuaciones,  $\Sigma H = 0$  y  $\Sigma V = 0$ .

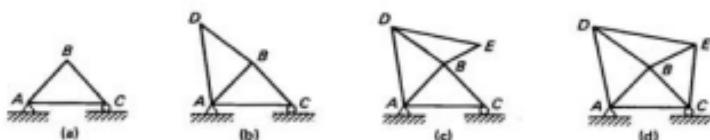


Figura 4.7

La armadura de un solo triángulo puede ampliarse a una armadura de dos triángulos añadiendo dos nuevos elementos y un nuevo nudo. En la fig. 4.7(b), las barras  $AD$  y  $BD$  unidas en el nudo  $D$  forman el nuevo triángulo  $ABD$ . En (c) se forma un nuevo triángulo con la adición de las barras  $BE$  y  $DE$  unidas en el nudo  $E$ . Para cada uno de los nuevos nudos  $D$  y  $E$ , se dispone de un nuevo par de ecuaciones para calcular las fuerzas en los dos elementos adicionales. En tanto que se siga este procedimiento para expandir la armadura, ésta será estáticamente determinada internamente. Si se adicionan nuevas barras sin añadir nuevos nudos, como la barra  $CE$  en la fig. 4.7(d), la armadura se convertirá en estáticamente indeterminada porque no se dispone entonces de nuevas ecuaciones de nudo para calcular las fuerzas en las nuevas barras.

Con base en este análisis es posible expresar la relación que debe existir entre el número de nudos, el de barras y el de componentes de reacción, para que una armadura sea estáticamente determinada. (La identificación de estructuras determinadas externamente se analizó previamente.) En el análisis que sigue,  $m$  es el número de barras,  $j$  el de nudos y  $r$  el de componentes de reacción.

Si el número de ecuaciones disponibles ( $2j$ ) es suficiente para obtener las incógnitas, la estructura es estáticamente determinada y puede escribirse la siguiente relación:

$$2j = m + r$$

O como se escribe más a menudo:

$$m = 2j - r$$

Antes de tratar de aplicar tal ecuación es necesario tener una estructura exteriormente estable, pues de lo contrario los resultados carecerán de sentido; por lo tanto,  $r$  es el número mínimo de componentes de reacción necesarias para tener estabilidad externa. Si la estructura tuviese más componentes de reacción externas que las indispensables para lograr la estabilidad (y ser entonces estáticamente indeterminada externamente), el valor de  $r$  seguirá siendo el del mínimo número de componentes de reacción necesarias para darle estabilidad externa. Esto significa que  $r$  será igual a 3, por las ecuaciones usuales de la Estática, más el número total de cualesquiera ecuaciones adicionales de condición que pudiera haber.

Es posible construir armaduras que tengan demasiadas barras que puedan analizarse por Estática, en cuyo caso serán indeterminadas internamente, y  $m$  excederá a  $2j - r$  porque habrá más barras que las absolutamente necesarias para haber estabilidad. Las barras adicionales se llaman redundantes. Si  $m$  es mayor en 3 unidades que  $2j - r$ , habrá tres barras redundantes y la armadura es estáticamente indeterminada internamente de tercer grado. Si  $m$  es menor que  $2j - r$ , no se tienen suficientes barras para garantizar la estabilidad.

Normalmente se puede determinar por inspección si una armadura es estáticamente indeterminada. Las que tengan barras que se crucen o que sirvan de lados para más de dos triángulos, probablemente serán estáticamente indeterminadas. Sin embargo, en caso de duda sobre la estaticidad de una armadura, deberá recurrirse a la expresión  $2j - r$ , pues no es raro cometer equivocaciones en este sentido. La fig. 4.8 muestra varias armaduras y la aplicación a cada una, de la expresión anterior. Los círculos pequeños sobre las armaduras representan los nudos.

En la mayoría de las armaduras mostradas no es necesaria mayor explicación, pero en algunas tal vez sea conveniente aclarar ciertos detalles. La armadura de la fig. 4.8(e) tiene cinco componentes de reacción y es indeterminada externamente de segundo grado; dos de las componentes de reacción podrían removérse y dejar una estructura con suficientes reacciones para garantizar su estabilidad. El número mínimo de componentes de reacción por estabilidad es 3,  $m$  es igual a 21 y  $j$  igual a 12; aplicando la ecuación  $m = 2j - r$ , se obtiene

$$21 = 24 - 3 = 21 \text{ y es estáticamente determinada internamente.}$$

La armadura de la fig. 4.8(j) es indeterminada externamente porque tiene cinco componentes de reacción y sólo se dispone de cuatro ecuaciones. Con  $r = 4$ , se ve que la estructura es determinada internamente. El arco triarticulado de la fig. 4.8(k) tiene cuatro componentes de reacción, que es el número mínimo de componentes de reacción necesarios para ser estable; por lo que  $r = 4$ . Aplicando la ecuación, se ve que el arco es estáticamente determinado internamente.

En el capítulo 11, en el que se analizan las estructuras estáticamente indeterminadas, se verá que los valores de las redundantes pueden obtenerse resolviendo ciertas ecuaciones simultáneas. El número de ecuaciones simultáneas es igual al número total de redundantes, ya sean éstas externas, internas o de ambos tipos. Por tanto, tal vez parezca absurdo distinguir entre determinación interna y externa. La distinción es particularmente cuestionable para algunos tipos de armaduras con redundantes externas e internas, en las que no es posible encontrar las reacciones independientemente de las fuerzas que actúan en las barras y viceversa.

Si una armadura es determinada externamente e indeterminada internamente, sus reacciones pueden obtenerse por Estática. Si la armadura es indeterminada externamente y determinada internamente, las reacciones son dependientes de las fuerzas en las barras internas y no pueden determinarse independientemente de esas fuerzas. Si la armadura es indeterminada externa e internamente, las fuerzas en las barras y las reacciones se encuentran simultáneamente. (En algunos de estos casos,

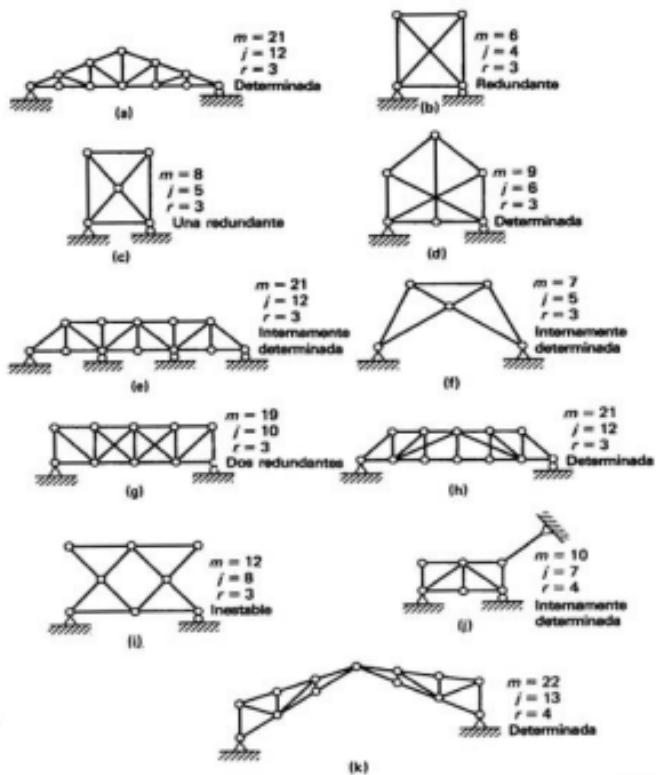


Figura 4.8

puede ser posible obtener algunas de las fuerzas por Estática, sin tener que recurrir a los procedimientos de análisis indeterminado necesario para un análisis completo.) Este tema se analizará en detalle en capítulos posteriores.

#### 4.9 USO DE SECCIONES

Una parte indispensable del análisis de armaduras y de vigas, es la separación de la estructura en dos partes por medio de una sección imaginaria. La parte de la ar-

madura a un lado de la sección se remueve y se estudia independientemente. Las cargas aplicadas a este cuerpo libre incluyen las fuerzas axiales de las barras cortadas por la sección y todas las fuerzas y reacciones que se le apliquen externamente.

La aplicación de las ecuaciones de la Estática a cuerpos libres aislados permite determinar las fuerzas en los elementos cortados, si se escogen cuidadosamente los cuerpos libres de manera que las secciones no pasen a través de demasiados elementos cuyas fuerzas sean desconocidas. La Estática sólo proporciona tres ecuaciones, por lo que en una sección no pueden determinarse más de tres incógnitas.

Después de que haya analizado unas cuantas armaduras, en la mayoría de los casos tendrá poca dificultad para seleccionar lugares satisfactorios para las secciones. Se recomienda no tratar de memorizar lugares específicos para las secciones en armaduras específicas, aunque con el paso del tiempo se puede adquirir inconscientemente ese hábito. En esta etapa de su aprendizaje se debe considerar cada caso individualmente sin referencia a otras armaduras similares.

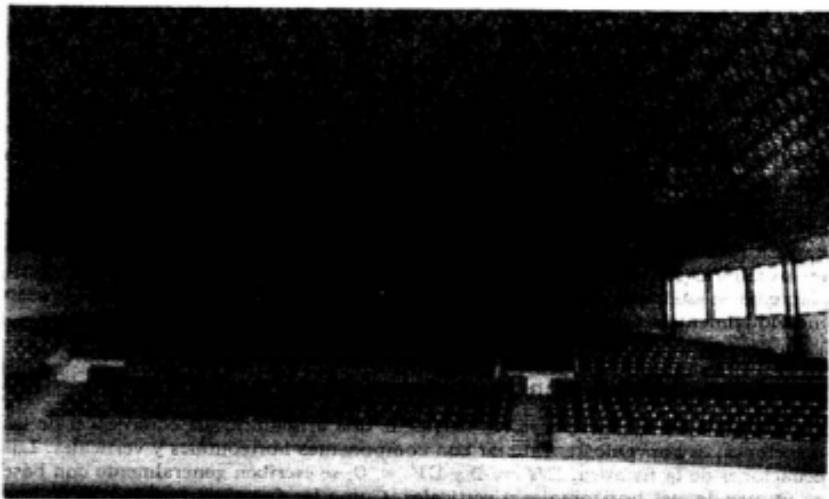
#### 4.10 COMPONENTES HORIZONTAL Y VERTICAL

En el cálculo de las fuerzas en las barras de una armadura, así como en el de las reacciones, es conveniente trabajar con componentes horizontales y verticales. Las ecuaciones de la Estática,  $\Sigma H = 0$  y  $\Sigma V = 0$ , se escriben generalmente con base en un par de ejes horizontales y verticales. Como las fuerzas en las barras de una armadura se determinan sucesivamente a lo largo de ésta, se ahorrará bastante tiempo si las componentes vertical y horizontal de las fuerzas en elementos inclinados se registran para usarse al aplicar las ecuaciones a otros elementos. El uso de componentes se ilustra claramente en los ejemplos de la sección siguiente.

#### 4.11 CONVENCION DE FLECHAS

La convención de signos para las fuerzas de tensión y compresión (+ y -, respectivamente) ya ha sido mencionada. Las flechas se usan en todo este texto también para representar el carácter de las fuerzas. Las flechas indican qué están haciendo las barras para resistir las fuerzas axiales aplicadas a éstas por el resto de la armadura. Por ejemplo, si una armadura está comprimiendo una cierta barra en cada extremo ( $\rightarrow \text{---} \leftarrow$ ), la barra empujará contra las fuerzas de compresión ( $\leftarrow \text{---} \rightarrow$ ). Esta convención de flechas se usa para barras a compresión. La convención de flechas para una barra a tensión es justamente lo contrario, porque una barra que está siendo estirada en sus extremos ( $\leftarrow \text{---} \rightarrow$ ) resistirá jalando en sentido contrario ( $\rightarrow \text{---} \leftarrow$ ).

Después de adquirir cierta práctica en el análisis de armaduras, es posible determinar por inspección el carácter de las fuerzas en muchos elementos de ellas. El lector debe tratar de imaginar si un elemento está trabajando a tensión o a compresión antes de proceder con los cálculos. De esta manera se obtendrá un mejor entendimiento acerca del comportamiento de las armaduras sujetas a cargas. Los



Estructura metálica apropiada para estadios, auditorios y gimnasios. Obra en México.  
(Cortesía de RSI.)

siguientes párrafos mostrarán que es posible determinar enteramente por medios matemáticos el carácter así como el valor numérico de las fuerzas.

#### 4.12 METODO DE LOS NUDOS

Puede pasarse una sección imaginaria alrededor de un nudo de una armadura, independientemente de su ubicación, aislándolo del resto de la armadura. El nudo se convierte entonces en un cuerpo libre, en equilibrio, bajo la acción de las fuerzas aplicadas a él. Las ecuaciones  $\Sigma H = 0$  y  $\Sigma V = 0$  pueden aplicarse al nudo para determinar las fuerzas desconocidas en las barras que concurren a él. Es evidente que no pueden determinarse más de dos incógnitas en un nudo con esas dos ecuaciones.

Quien estudia el método de los nudos, puede inicialmente encontrar necesario tener que dibujar un cuerpo libre para cada nudo de la armadura que esté analizando. Sin embargo, después de calcular las fuerzas en dos o tres armaduras, sólo le será necesario dibujar los diagramas de unos cuantos nudos, ya que podrá visualizar con facilidad los cuerpos libres implicados. El punto más importante que el principiante debe recordar es que hay que resolver nudo por nudo; las cargas y fuerzas en los otros nudos no deben considerarse en el nudo en estudio. Otro consejo muy útil

es el relativo a *dibujar los diagramas de cuerpo libre a un buen tamaño*. En el ejemplo 4.1 se ilustra el método de los nudos.

### EJEMPLO 4.1

Encontrar por el método de los nudos, todas las fuerzas en las barras de la armadura mostrada en la fig. 4.9.

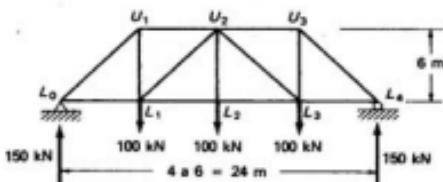


Figura 4.9

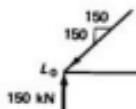
*Solución*

Análisis del nudo  $L_0$ :

$$\Sigma V = 0$$

$$150 - V_{L_0 U_1} = 0$$

$V_{L_0 U_1} = 150 \text{ kN}$  (compresión)

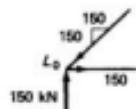


Vemos que en el nudo actúa una reacción vertical hacia arriba de 150 kN. La ecuación  $\Sigma V = 0$  indica que las barras que concurren a él deben suministrar 150 kN hacia abajo. Una barra horizontal como la  $L_0 L_1$  no puede tener una componente vertical de fuerza; por ello  $L_0 U_1$  debe suministrar los 150 kN por medio de su componente vertical. La convención de flechas muestra que  $L_0 L_1$  trabaja a compresión. Como su pendiente es de 1:1, la componente horizontal también será de 150 kN.

$$\Sigma H = 0$$

$$-150 + F_{L_0 L_1} = 0$$

$F_{L_0 L_1} = 150 \text{ kN}$  (tensión)



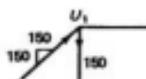
La aplicación de la ecuación  $\Sigma H = 0$  muestra que  $L_0 U_1$  está empujando horizontalmente hacia la izquierda contra el nudo con una fuerza de 150 kN. Por equilibrio,  $L_0 L_1$  debe jalar hacia la derecha desde el nudo con la misma fuerza. La convención de flechas muestra que la fuerza es de tensión.

Análisis del nudo  $U_1$ :

$$\Sigma V = 0$$

$$150 - F_{U_1 L_1} = 0$$

$$F_{U_1 L_1} = 150 \text{ kN (tensión)}$$

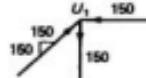


Encontramos antes que la fuerza en  $L_2$   $U_1$  es de compresión con componentes horizontal y vertical de 150 kN cada una. Como está empujando hacia arriba en el nudo  $U_1$ , con una fuerza de 150 kN,  $U_1$ ,  $L_1$  (el otro único elemento en el nudo que tiene una componente vertical) debe jalar hacia abajo con una fuerza de 150 kN para satisfacer la ecuación  $\Sigma V = 0$

$$\Sigma H = 0$$

$$150 - F_{U_1 U_2} = 0$$

$$F_{U_1 U_2} = 150 \text{ kN (compresión)}$$



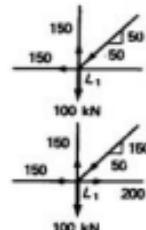
La barra  $L_2$   $U_1$  está empujando hacia la derecha horizontalmente con una fuerza de 150 kN. Por equilibrio,  $U_1$ ,  $U_2$  empuja hacia la izquierda con 150 kN.

Análisis del nudo  $L_1$ :

$$\Sigma V = 0$$

$$150 - 100 - F_{L_1 U_2} = 0$$

$$F_{L_1 U_2} = 50 \text{ kN (compresión)}$$

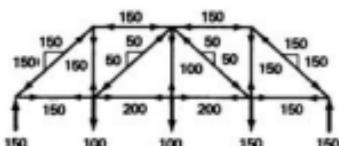


$$\Sigma H = 0$$

$$-150 - 50 - + F_{L_1 L_2} = 0$$

$$F_{L_1 L_2} = 200 \text{ kN (tensión)}$$

Las fuerzas en todas las barras de la armadura pueden calcularse similarmente con los siguientes resultados:



Las fuerzas resultantes en las barras inclinadas pueden determinarse con la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes vertical y horizontal de fuerza. Una manera más sencilla es establecer relaciones, comparando la fuerza axial

resultante de una barra y su componente horizontal o vertical, con la longitud verdadera de la barra y su componente horizontal o vertical. Si  $F$ ,  $H$  y  $V$  son la fuerza y sus componentes, y  $l$ ,  $h$  y  $v$  son la longitud y sus componentes, pueden establecerse las relaciones mostradas en la fig. 4.10.

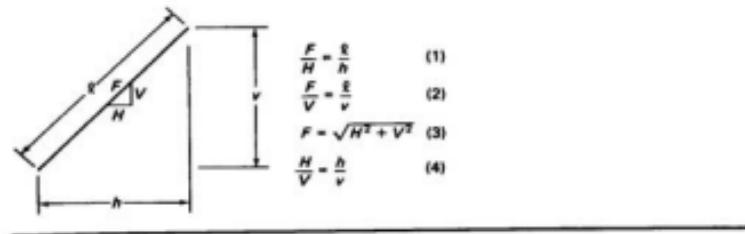


Figura 4.10

El método de los nudos puede usarse para calcular las fuerzas en todas las barras de muchas armaduras. Las armaduras de los ejemplos 4.2 y 4.3 y todos los problemas al final de este capítulo pertenecen a esta categoría. Sin embargo, hay un gran número de armaduras que necesitan ser analizadas por una combinación del método de las juntas y de los métodos presentados en el capítulo 5. Los autores prefieren calcular tantas fuerzas como sea posible con el método de los nudos. En los nudos donde encuentran alguna dificultad, toman momentos para obtener una o dos fuerzas, como se describe en el capítulo 5. Luego continúan los cálculos con el método de los nudos hasta que encuentran una nueva dificultad y toman momentos nuevamente, etc.

**EJEMPLO 4.2**

Encontrar todas las fuerzas en la armadura de la fig. 4.11.

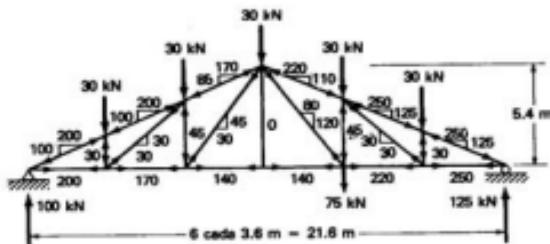


Figura 4.11

**EJEMPLO 4.3**

Encontrar todas las fuerzas en la armadura de la fig. 4.12.

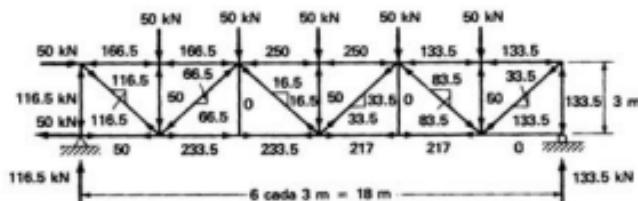


Figura 4.12

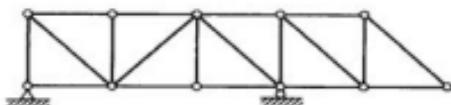


Clinica del IMSS en Vía Gustavo Baz, Tlalnepantla, Edo. de México.  
(Cortesía de ILIDEM, S.A.)

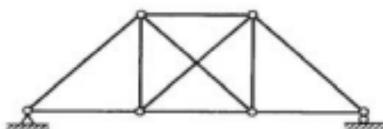
**PROBLEMAS**

En los problemas del 4.1 al 4.15, clasificar las estructuras con base en su estabilidad y determinación tanto externa como interna. En las estructuras estáticamente indeterminadas, indicar el grado de redundancia interno o externo, según sea el caso. (Los pequeños círculos sobre las armaduras representan los nudos.)

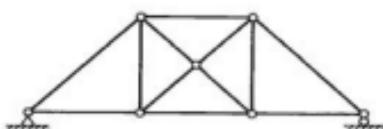
4.1



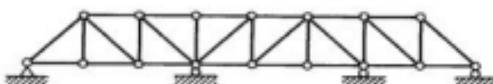
4.2 (Resp.: Estáticamente indeterminada internamente de grado 1)



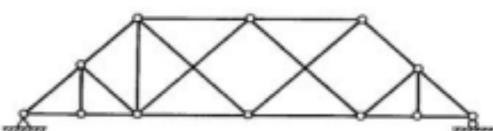
4.3



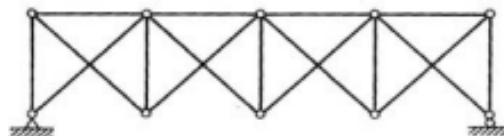
4.4 (Resp.: Estáticamente indeterminada externamente de grado 2)



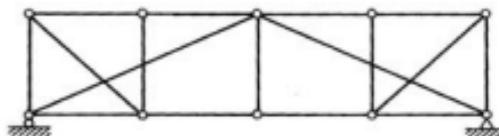
4.5



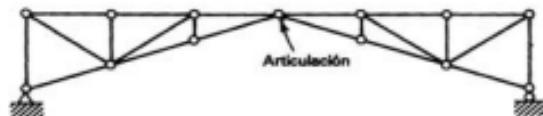
**4.6 (Resp.: Estáticamente determinada externa e internamente)**



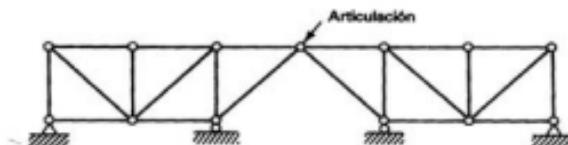
**4.7**



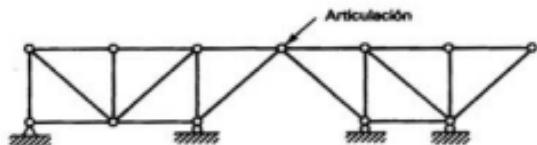
**4.8 (Resp.: Estáticamente determinada externa e internamente)**



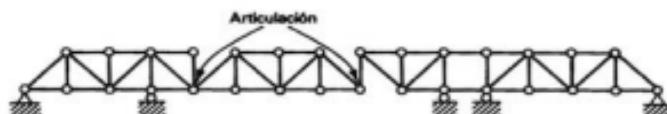
**4.9**



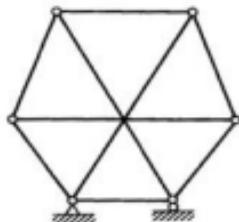
4.10 (*Resp.: Estáticamente determinada externa e internamente*)



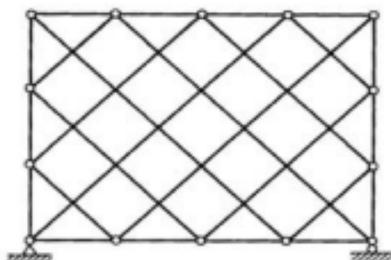
4.11



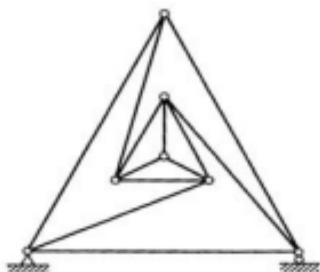
4.12 (*Resp.: Estáticamente determinada externa e internamente*)



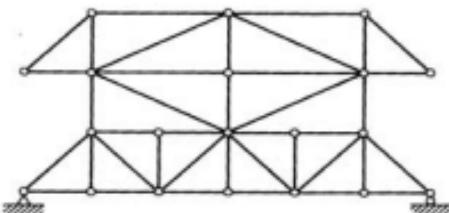
4.13



**4.14 (Resp.: Estáticamente indeterminada internamente de grado 1)**

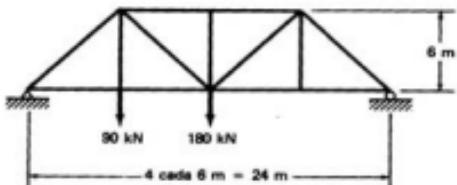


**4.15**



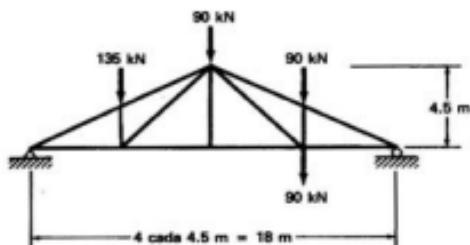
En los problemas 4.16 al 4.29, calcular las fuerzas en todas las barras de las armaduras mostradas empleando el método de los nudos.

**4.16 (Resp.:  $L_1L_2 = +157.5 \text{ kN}$ ,  $L_2U_3 = +159.3 \text{ kN}$ ,  $U_2U_1 = -225 \text{ kN}$ )**

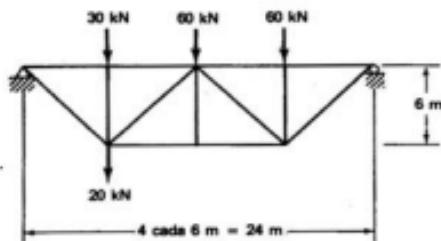


4.17 Resolver el problema 4.16 con la altura de la armadura reducida a 4.5 m y las cargas duplicadas.

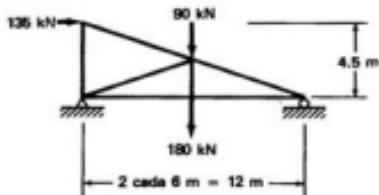
4.18 (Resp.:  $L_0L_1 = +382.5$  kN,  $U_1U_2 = -427.5$  kN,  $L_1L_2 = +247.5$  kN)



4.19

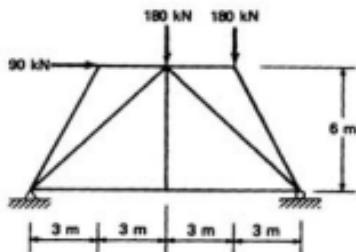


4.20 (Resp.:  $U_0L_0 = +50.6$  kN,  $L_0U_1 = -384.48$  kN,  $L_1L_2 = +495$  kN)

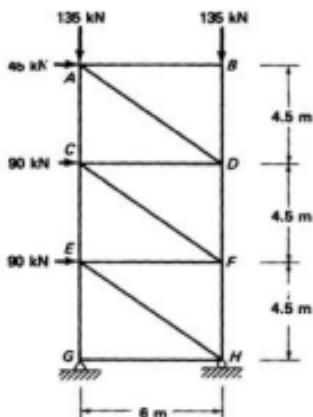


- 4.21 Resolver el problema 4.20 suponiendo que el rodillo de soporte toma un tercio (debido a la fricción, a la corrosión, etc.) de la fuerza horizontal total resistente necesaria, los dos tercios restantes lo toma el otro apoyo.

- 4.22 (Resp.:  $L_2 L_4 = +180 \text{ kN}$ ,  $U_2 U_3 = -90 \text{ kN}$ ,  $U_2 L_4 = -127.35 \text{ kN}$ )

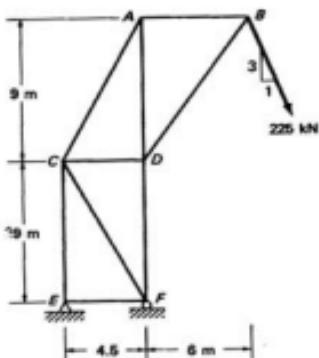


4.23

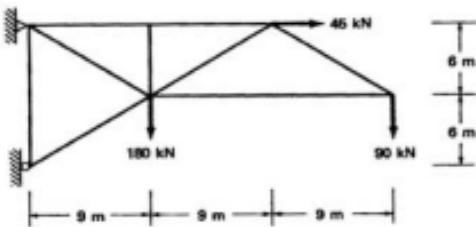


## Problemas

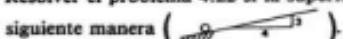
4.24 (Resp.:  $AB = +213.3$  kN,  $CD = -142.2$  kN,  $DF = -640.35$  kN)



4.25

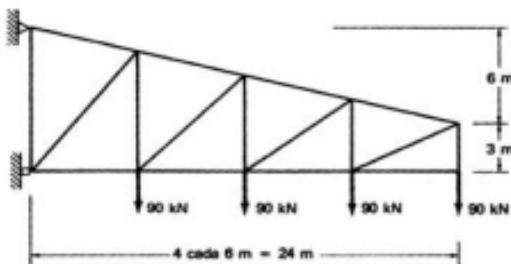
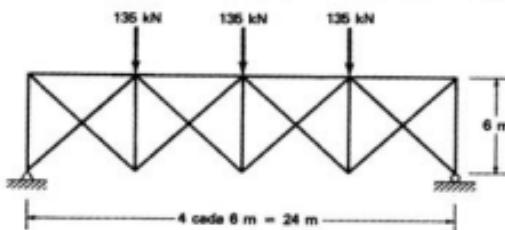


4.26 Resolver el problema 4.22 si la superficie de soporte bajo el rodillo se modifica de la siguiente manera ( ).

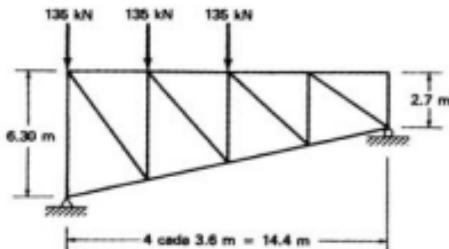


(Resp.:  $L_0U_1 = 0$ ,  $L_0U_2 = -127.35$  kN,  $U_2U_3 = -90$  kN,  $L_2L_4 = -22.5$  kN)

4.27

4.28 (Ans.  $U_2L_2 = -90^k$ ,  $U_2U_4 = -105^k$ ,  $L_2M_3 = +63.6^k$ )

4.29



#### REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. L.E. Grinter, *Theory of Modern Steel Structures* (Nueva York: Macmillan, 1962), pág. 7.

# Armaduras planas (continuación)

### 5.1 METODO DE LOS MOMENTOS

El equilibrio de cuerpos libres es la base del cálculo de fuerzas por el método de los momentos así como lo es también del cálculo por el método de los nudos. Para obtener el valor de la fuerza en un elemento particular, se pasa una sección imaginaria a través de la armadura que la divide en dos cuerpos libres. La sección se elige de tal manera que corte al elemento cuya fuerza se busca y al menor número de miembros como sea posible.

El momento de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo libre bajo consideración, respecto a cualquier punto en el plano de la armadura, es igual a cero. Si es posible tomar momentos de las fuerzas respecto a un punto de manera que sólo una fuerza desconocida aparezca en la ecuación, podrá obtenerse el valor de esa fuerza inmediatamente. Este objetivo puede usualmente alcanzarse seleccionando un punto sobre la línea de acción de una o más de las fuerzas de los otros elementos. Algunas armaduras comunes tienen localidades especiales para situar las secciones que simplifican considerablemente el trabajo necesario. Estos casos se analizarán en las páginas que siguen.

Una ventaja del método de los momentos es que si se desea la fuerza en sólo uno de los elementos de una armadura y éste no está cerca del extremo de ella, puede obtenerse directamente tal fuerza, en la mayoría de los casos, sin tener que determinar primero las fuerzas en los otros elementos. Si se usara el método de los nudos, sería necesario calcular las fuerzas en las barras, nudo por nudo, desde el extremo de la armadura hasta que se alcance el elemento en consideración.

### 5.2 FUERZAS EN ELEMENTOS CORTADOS POR SECCIONES

Si se cortan elementos a tensión y a compresión, los resultados serán como se describe en los párrafos siguientes y como se muestra en la fig. 5.1.

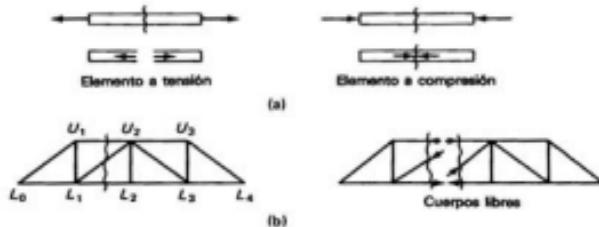


Figura 5.1

1. Una barra a tensión está siendo estirada, y si se cortase, tendería a recuperar su longitud original dejando un hueco en la sección. En la fig. 5.1(a) una barra a tensión tira del cuerpo libre.
2. Una barra a compresión está siendo acortada, y si se cortase, tendería a recuperar su longitud original, o trataría de alargarse. En la fig. 5.1(a) una barra a compresión empuja contra el cuerpo libre desde el exterior.



Sistema Skyway Fairview-St. Mary, Minneapolis, Minnesota. (Cortesía de American Institute of Steel Construction, Inc.)

En la fig. 5.1(b), una armadura se halla dividida en dos cuerpos libres. Se supone que las barras  $U_1U_2$  y  $L_1L_2$  están en compresión y que la  $L_1L_2$  está en tensión. Se muestran las direcciones de las fuerzas en los dos cuerpos libres de acuerdo con estas suposiciones.

### 5.3 APPLICACION DEL METODO DE LOS MOMENTOS

Los ejemplos 5.1 al 5.5 ilustran en detalle el cálculo de las fuerzas con la ecuación  $\Sigma M = 0$ . Al escribir la ecuación de momentos, obsérvese que la fuerza desconocida puede suponerse en tensión o en compresión. Si en la solución matemática aparece un signo negativo, el sentido de la fuerza es opuesto al considerado. La respuesta numérica es correcta independientemente del signo. Probablemente siempre es más sencillo suponer que la fuerza desconocida trabaja a tensión, o sea, jalando al cuerpo libre. Si la solución resulta positiva, la fuerza es de tensión; si se obtiene un número negativo, la fuerza es de compresión. Por consiguiente, el signo siempre concuerda con la convención normal de signos, + para tensión y - para compresión. En este libro se sigue este procedimiento en todos los problemas ilustrativos.

#### EJEMPLO 5.1

Encontrar por momentos las fuerzas en las barras  $L_1L_2$  y  $U_2U_3$  de la armadura mostrada en la fig. 5.2.

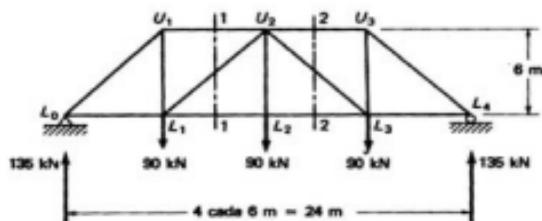
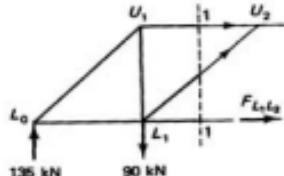


Figura 5.2

#### Solución

Barra  $L_1L_2$ . Se pasa la sección 1-1 a través de la armadura y se considera como cuerpo libre la parte de ella que queda a la izquierda de la sección. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son la reacción de 135 kN, la carga de 90 kN en  $L_1$  y las fuerzas axiales en las barras cortadas por la sección ( $U_1U_2$ ,  $L_1U_2$  y  $L_1L_2$ ). Se toman momentos de esas fuerzas respecto a  $U_2$ , que es el punto de intersección de  $L_1U_2$  y  $U_1U_2$ . La ecuación de momentos contiene una fuerza incógnita,  $L_1L_2$ , y su valor se encuentra resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned}\Sigma M_{U_2} &= 0 \\ (135)(12) - (90)(6) - 6F_{L_1L_2} &= 0 \\ F_{L_1L_2} &= +180 \text{ kN (tensión)}\end{aligned}$$



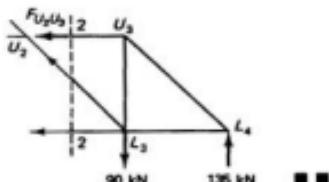
Barra  $U_2U_3$ . Se pasa la sección 2-2 a través de la armadura y se considera como cuerpo libre la parte de la armadura que queda a la derecha de la sección. Las barras  $U_2U_3$ ,  $U_2L_3$  y  $L_2L_3$  son cortadas por la sección. Tomando momentos en la intersección de  $L_2L_3$  y  $U_2L_3$  en  $L_3$  se eliminan esas barras de la ecuación porque las líneas



Vista de la Siderúrgica Monclova en Monclova, Coahuila, México. (Cortesía de EISA.)

de acción de sus fuerzas pasan por el centro de momentos. La fuerza en  $U_2U_3$  es la única incógnita que aparece en la ecuación y se determina a continuación:

$$\begin{aligned} \Sigma M_{L_4} &= 0 \\ -(135)(6) - 6F_{U_2U_3} &= 0 \\ F_{U_2U_3} &= -135 \text{ kN (compresión)} \end{aligned}$$



### EJEMPLO 5.2

Encontrar las fuerzas en todas las barras de la armadura mostrada en la fig.5.3. Usese según convenga el método de los nudos y el método de los momentos.

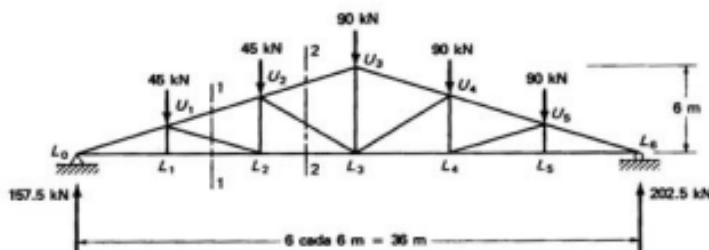


Figura 5.3

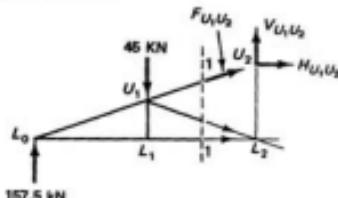
#### Solución

Las fuerzas en las barras que concurren a  $L_0$  y a  $L_1$  se determinan rápidamente por el método de los nudos. Para calcular la fuerza en  $U_1U_2$ , se pasa la sección 1–1 y se toman momentos en  $L_2$ . Como  $U_1U_2$  es una barra inclinada, la fuerza se resuelve en sus componentes vertical y horizontal. Las componentes de una fuerza pueden suponerse actuando en cualquier punto a lo largo de su línea de acción. Es conveniente en este caso descomponer la fuerza en el nudo  $U_2$ , porque la componente vertical pasará así por el centro de momentos y la ecuación puede entonces resolverse enseguida para la componente horizontal de la fuerza.

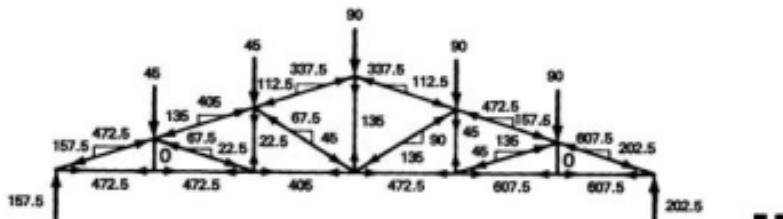
$$\Sigma M_{L_2} = 0$$

$$(157.5)(12) - (45)(6) + 4H_{U_1U_2} = 0$$

$$H_{U_1U_2} = -405 \text{ kN (compresión)}$$



Las fuerzas desconocidas en las barras que concurren a  $U_1$  y a  $L_2$ , pueden ahora obtenerse por el método de los nudos. Se pasa la sección 2–2 a través de la armadura y se toman momentos en  $L_3$  para encontrar la fuerza en  $U_2U_3$ . Conociendo esta fuerza, las fuerzas restantes en la armadura pueden encontrarse por el método de los nudos; a continuación se muestra el resultado:



### EJEMPLO 5.3

Determinar las fuerzas en todas las barras de la armadura mostrada en la fig. 5.4. Las unidades de fuerza se dan en kN.

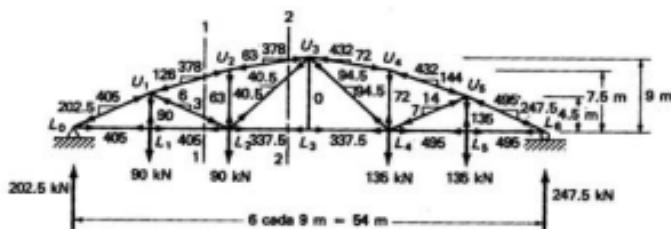


Figura 5.4

**Solución**

$$\Sigma M_{L_2} = 0; \text{ cuerpo libre a la izquierda de la sección } 1-1$$

$$(202.5)(18) - (90)(9) + 7.5H_{U_1U_2} = 0$$

$$H_{U_1U_2} = -378 \text{ kN (compresión)}$$

$$\Sigma M_{U_3} = 0; \text{ cuerpo libre a la izquierda de la sección } 2-2$$

$$(202.5)(27) - (90)(9) - (90)(18) - 9F_{L_3L_3} = 0$$

$$F_{L_3L_3} = +337.5 \text{ kN tensión}$$

■ ■

**EJEMPLO 5.4**

Determinar las fuerzas en todas las barras de la armadura Fink mostrada en la fig. 5.5. Las unidades de fuerza se dan en kN.

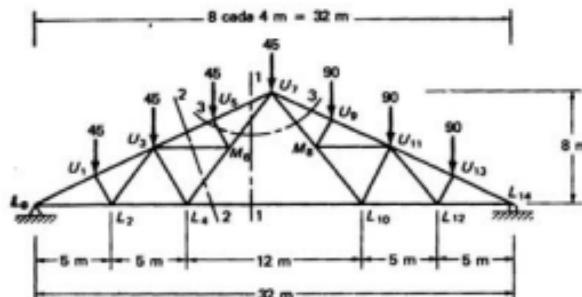
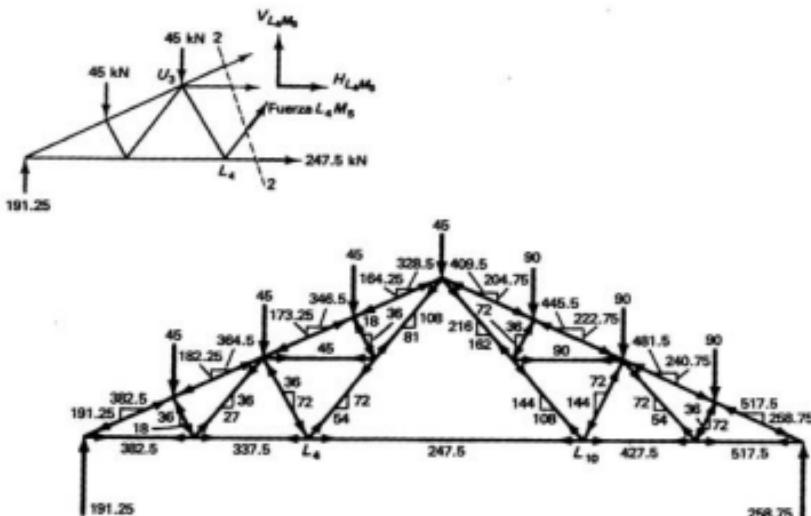


Figura 5.5

**Solución**

Las fuerzas en las barras que concurren a los nudos  $L_0$ ,  $L_2$  y  $U_1$  pueden encontrarse por los métodos de los nudos y los momentos sin ninguna dificultad. En cada uno de los dos nudos siguientes,  $U_3$  y  $L_4$  hay tres fuerzas desconocidas que no pueden determinarse directamente por secciones. Es conveniente calcular las fuerzas en algunas barras más allá de esta región y luego regresar a estos nudos. Las secciones numeradas 1-1, 2-2 y 3-3 pueden usarse ventajosamente para este fin. De la primera de esas secciones, las fuerzas en cualquiera de las tres barras cortadas puede obtenerse por momentos. Usando la sección 2-2 y tomando momentos en  $U_3$ , la fuerza en la barra  $L_4M$ , puede encontrarse. Es importante observar que cuatro barras han sido cortadas por la sección y sólo dos de ellas pasan por el punto respecto al cual se están tomando momentos; sin embargo, la fuerza en una de esas barras,  $L_4L_{10}$ , se encontró previamente con la sección 1-1, y solamente una incógnita permanece en la ecuación. Las fuerzas restantes en la armadura pueden calcularse con los métodos usuales. Esas dos secciones son suficientes para analizar la armadura,



pero también podría considerarse una sección como la 3-3. Con esta sección la fuerza en  $U_7M_8$  puede encontrarse tomando momentos en  $U_7$ , porque todas las otras barras cortadas por la sección pasan por  $U_7$ . Se muestran las fuerzas en todas las barras de la armadura.

■ ■

### EJEMPLO 5.5

Calcular la fuerza en la barra *cg* de la armadura mostrada en la fig. 5.6. Las unidades de fuerza se dan en kN.

#### Solución

La fuerza en esta barra no puede determinarse inmediatamente por nudos o momentos. Es necesario conocer las fuerzas en otras barras antes de poder conocer la fuerza en *cg*. Las fuerzas en las barras *ba*, *bc*, *dc* y *de* pueden encontrarse por el método de los nudos y la fuerza en la barra *ac* por el de momentos. Se puede considerar la sección 1-1 y el cuerpo libre a su izquierda y luego tomar momentos alrededor de *g*. Puede escribirse la siguiente ecuación observando que la fuerza en *bc* es de compresión y suponiendo que la barra *ac* trabaja a tensión. La fuerza desconocida se descompone en sus componentes vertical y horizontal en *c*.

$$\Sigma M_g = 0$$

$$(135)(3) - (90)(3) - (45)(12) + (H_{ac})(12) = 0$$

$$H_{ac} = +33.75 \text{ kN (tensión)}$$

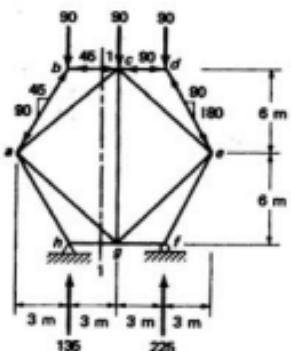
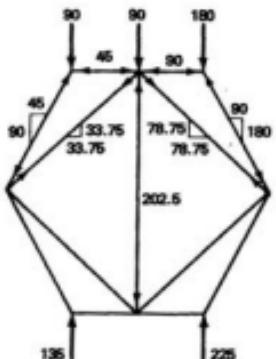


Figura 5.6

Conocida la fuerza en  $ac$ , las fuerzas en  $ce$  y  $cg$  pueden determinarse con el método de los nudos.



#### 5.4 METODO DE LAS FUERZAS CORTANTES

Debe quedar claro por ahora que si se pasa una sección vertical a través de una armadura y ésta queda dividida en dos cuerpos libres separados, la suma de las fuerzas verticales a la izquierda de la sección debe ser igual y opuesta en dirección a la suma de las fuerzas verticales a la derecha de la sección. La suma de esas fuerzas a la izquierda o a la derecha de una sección, se ha definido como *fuerza cortante*.

Las barras inclinadas cortadas por una sección deben tener componentes verticales iguales y opuestas al cortante en esa sección, porque las barras horizontales no tienen componente vertical de fuerza. En la mayoría de las armaduras de cuerdas paralelas sólo se tiene una barra inclinada en cada tablero, y la componente vertical de fuerza en esa barra inclinada debe ser igual y opuesta al cortante en ese tablero. Las componentes verticales de fuerza se calculan por cortante para las diagonales de la armadura de cuerdas paralelas del ejemplo 5.6.

#### EJEMPLO 5.6

Determinar las componentes verticales de fuerza en las diagonales de la armadura mostrada en la fig. 5.7. Usar el método de la fuerza cortante.

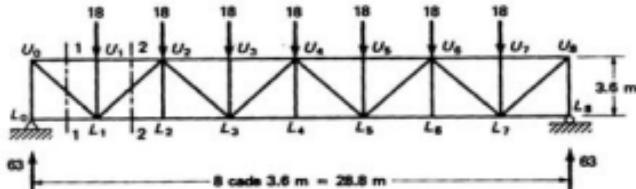
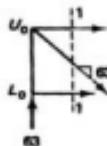


Figura 5.7

#### Solución

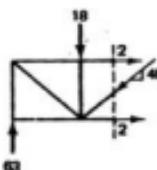
Considerando la sección 1–1 y el cuerpo libre a la izquierda de ella, el cortante es de 63 kN ↑

$$V_{U_0 U_1} = 63 \text{ kN } \uparrow \text{ (tensión, jalando al cuerpo libre)}$$

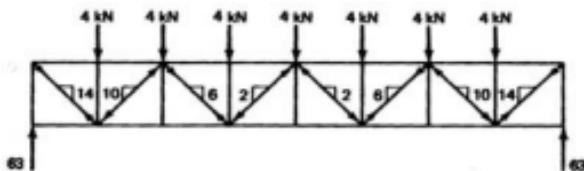


Considerando la sección 2–2 y el cuerpo libre a la izquierda de ella, el cortante es de 45 kN ↑

$$V_{U_1 U_2} = 45 \text{ kN } \uparrow \text{ (compresión, empujando al cuerpo libre)}$$



Las componentes verticales de fuerza en todas las diagonales se muestran a continuación:



Las armaduras de cuerdas no paralelas tienen dos o más diagonales en cada tablero, y pueden tener todas ellas componentes verticales de fuerza; sin embargo, su suma debe ser igual y opuesta a la fuerza cortante en el tablero. Si se conocen todas las fuerzas diagonales en un tablero excepto una, ésta puede determinarse por cortantes como se ilustra en el ejemplo. 5.7.

#### EJEMPLO 5.7

Con referencia a las secciones 1–1 y 2–2 del ejemplo 5.3 y suponiendo que las fuerzas en las barras  $U_1U_2$  y  $U_2U_3$ , son conocidas, encontrar las componentes verticales de fuerza en  $U_1L_2$  y  $L_2U_3$ , por el método de la fuerza cortante.

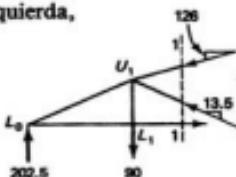
*Solución*

Considerando la sección 1–1 y el cuerpo libre a la izquierda,

$$\text{fuerza cortante a la izquierda} = 112.5 \text{ kN} \uparrow$$

$$V_{U_1U_2} = 126 \text{ kN} \downarrow$$

$$V_{U_1L_2} = 13.5 \text{ kN} \uparrow, \text{ compresión}$$

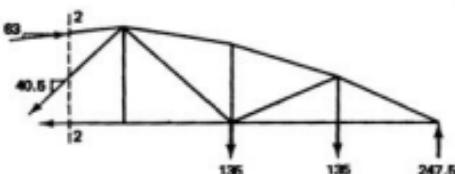


Considerando la sección 2–2 y el cuerpo libre a la derecha, fuerza cortante

$$\text{a la derecha} = 22.5 \text{ kN} \downarrow$$

$$V_{U_2U_3} = 63 \text{ kN} \uparrow$$

$$V_{L_2U_3} = 40.5 \text{ kN} \downarrow, \text{ tensión}$$



#### 5.5 CUANDO LAS HIPÓTESIS NO SON CORRECTAS

El ingeniero proyectista debe darse cuenta que a menudo sus hipótesis relativas al comportamiento de una estructura (nudos articulados, cargas aplicadas sólo en los

nudos, rodillos sin fricción, etc.) no son enteramente válidas. En consecuencia él debe considerar qué puede pasarle a una estructura si las suposiciones hechas en el análisis son erróneas en alguna medida. Tal vez un mecanismo de expansión o rodillo resistirá (debido a la fricción) una gran proporción de las fuerzas horizontales presentes. ¿Cómo afectará esto a las fuerzas en las barras de una armadura particular? Es por esto que se incluyó al final del capítulo 4 la armadura del problema 4.21, donde se supuso que la mitad de la carga horizontal era resistida por el rodillo.

Los tipos reales de soportes en los extremos pueden tener un efecto considerable en la magnitud de las fuerzas en las barras de una armadura causadas por fuerzas laterales.

En armaduras muy cortas para techos, generalmente no se toman medidas para la expansión y contracción y ambos extremos de las armaduras se anclan firmemente a sus soportes. Las armaduras así construidas son estáticamente indeterminadas, pero la práctica usual es suponer que las cargas horizontales se dividen en partes iguales en ambos soportes.

En armaduras muy largas de techo, se considera necesario tomar medidas para la expansión y contracción de éstas. Generalmente, los pernos en uno de los extremos se colocan en agujeros ovalados que proporcionan espacio para los cambios anticipados de longitud. Se proporciona también en este extremo una placa de base sobre la cual la armadura puede resbalar.

En realidad es imposible proporcionar un apoyo sin fricción. Desde un punto de vista práctico, el valor máximo de la reacción horizontal en el extremo de expansión es igual a la reacción vertical multiplicada por el coeficiente de fricción (aproximadamente igual a 0.33). Si se presenta corrosión, impidiéndose así el movimiento (lo cual es muy posible), una división en partes iguales de las cargas laterales tal vez sea la mejor solución.

Los autores leyeron en alguna ocasión sobre un caso interesante en el que los propietarios de un edificio con un techo soportado por una serie de armaduras Fink, decidieron que la barra inferior central ( $L_4L_{10}$  en la fig. 5.5) les estorbaba. Ellos, por consiguiente, removieron la barra de un buen número de armaduras y para sorpresa del proyectista, el techo no se desplomó. Aparentemente el rodillo o artefacto de expansión en un extremo de las armaduras (tal vez pernos en agujeros ovalados) permitió muy poco o ningún movimiento. Como resultado, cada una de las armaduras se comportó aparentemente como un arco de tres articulaciones (fig. 5.8). En muchas situaciones en donde las hipótesis no resultan ser correctas, los resultados pueden ser más serios que para estas armaduras Fink.

## 5.6 ARMADURAS SIMPLES

Hemos visto que el primer paso para formar una armadura es conectar tres barras en sus extremos para formar un triángulo. Se forman figuras subsecuentes añadiendo dos barras en un nudo; las nuevas barras se juntan en el nuevo nudo y cada una

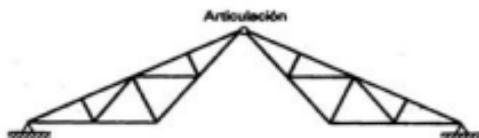


Figura 5.8

se articula en sus extremos opuestos a uno de los nudos existentes. Las armaduras formadas de esta manera se denominan *armaduras simples*. (Sin embargo, algunas de esas armaduras no son tan simples de analizar.)

### 5.7 ARMADURAS COMPUESTAS

Una *armadura compuesta* es una armadura formada al conectar dos o más armaduras simples. Las armaduras simples pueden estar conectadas por tres eslabones no paralelos y no concurrentes, por un nudo y un eslabón, por una armadura de conexión, por dos o más nudos, etc. Puede formarse de esta manera un número casi ilimitado de armaduras. Un ejemplo de éstas es la armadura Fink mostrada en la fig. 5.9(a), que consta de las dos armaduras sombreadas conectadas por un nudo y un eslabón. En las figs. 5.9(b) y (c) se muestran otras armaduras compuestas. La ecuación  $2j - r =$  se aplica tanto a las armaduras simples como a las compuestas.

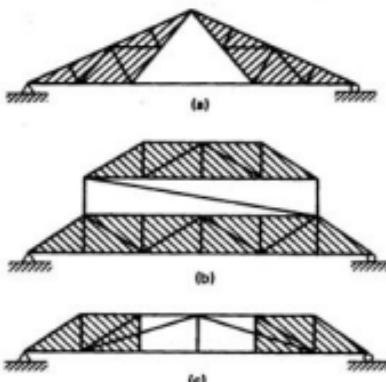


Figura 5.9

## 5.8 ARMADURAS COMPLEJAS

Hay unas cuantas armaduras que son estáticamente determinadas, pero que no cumplen con los requisitos necesarios para ser clasificadas como simples o compuestas. A estas armaduras se les llama *complejas*. Las barras de las armaduras simples y compuestas están usualmente dispuestas de manera que pueden pasarse secciones a través de tres barras simultáneamente, tomarse momentos en la intersección de dos de éstas y encontrarse la fuerza en la tercera.

Las armaduras complejas no pueden analizarse de esta manera. Ni el método de momentos ni el de nudos y cortantes sirven en estos casos. La dificultad reside en el hecho de que hay tres barras concurriendo a casi cada nudo y, por lo tanto, se tienan demasiadas incógnitas en todo lugar de la armadura para que sea posible pasar una sección y obtener la fuerza en cualquier barra directamente por las ecuaciones de la Estática. En la fig. 5.10 se muestran dos armaduras complejas. El número de nudos y barras es suficiente para que éstas sean estáticamente determinadas.

Un método para calcular las fuerzas en las armaduras complejas es escribir las ecuaciones  $\Sigma H = 0$  y  $\Sigma V = 0$  en cada nudo, obteniéndose un total de  $2j$  ecuaciones simultáneas. Estas ecuaciones pueden ser resueltas simultáneamente para las fuerzas en las barras y reacciones externas. (Con frecuencia es posible calcular las reacciones externas inicialmente y usar sus valores como una comprobación de los resultados obtenidos de la solución de las ecuaciones simultáneas.) Este método funciona para cualquier armadura compleja, pero la solución de las ecuaciones es muy tediosa a menos que se disponga de una computadora digital y usualmente otros métodos son más convenientes.

Un procedimiento, aplicable a muchas armaduras complejas, es suponer la fuerza en una de la barras de la armadura. Se selecciona una barra y se supone una fuerza  $X$  actuando en ella. Las fuerzas en las barras aledañas se calculan en términos de  $X$ . El proceso se continúa hasta que es posible pasar una sección completamente a través de la armadura y escribir una de las ecuaciones de la Estática para el cuerpo libre de manera que las únicas barras que aparezcan en la ecuación tengan fuerzas que hayan sido calculadas en términos de  $X$ . La solución de la ecuación resultante dará el valor de  $X$ , y las otras fuerzas se calculan por Estática. Sin embargo, este método no es fácil de aplicar en muchas armaduras complejas.

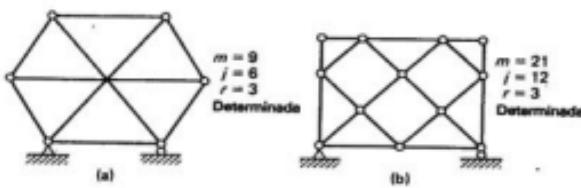
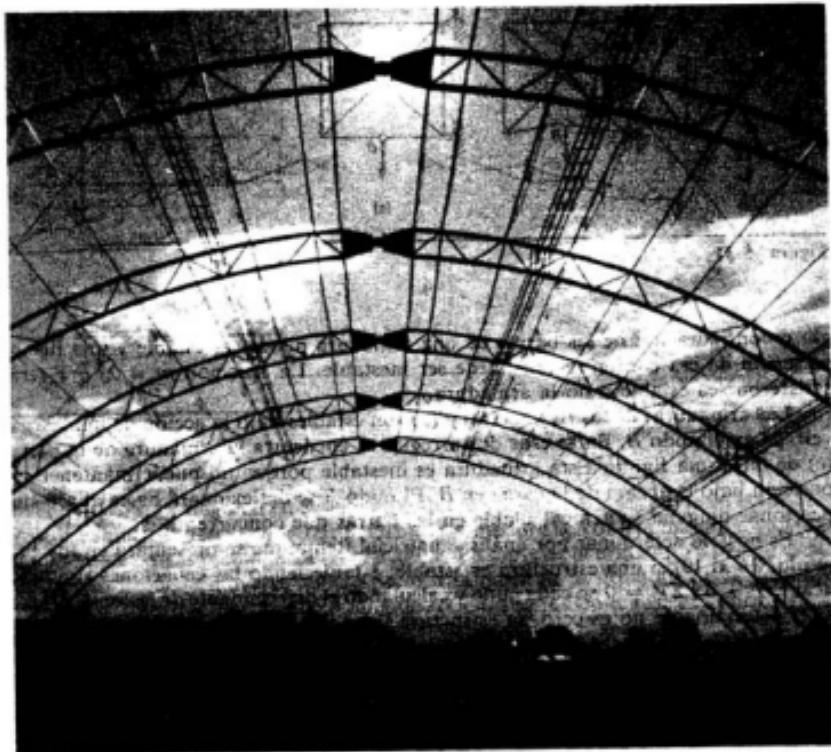


Figura 5.10



Estructuras industriales. Obra en México. (Cortesía de EISA.)

La ecuación  $m = 2j - r$  puede usarse para determinar si una armadura compleja es estáticamente determinada o indeterminada; pero determinar si es estable o inestable, no es tan sencillo. Las armaduras complejas constan a menudo no sólo de triángulos, sino también de otras figuras geométricas, por lo que son particularmente susceptibles a la inestabilidad geométrica. Pueden ser totalmente inestables y sin embargo, su inestabilidad no ser obvia hasta que se intente encontrar las fuerzas en sus barras. Si se efectúa un análisis en una armadura inestable, los resultados siempre serán inconsistentes o incompatibles.

Si la armadura es geométricamente inestable, se dice de ella que tiene *forma crítica*. La forma crítica de una armadura puede o no ser obvia, por lo que tendrá que efectuarse un análisis de ella antes de poder determinarse si es estable. Un arre-

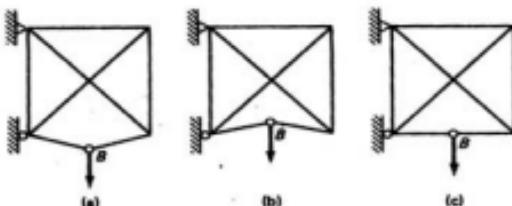


Figura 5.11

glo o configuración de las barras de una armadura puede ser estable y una ligera variación de esa configuración puede ser inestable. La ecuación  $m = 2j - r$  será satisfecha sea estable o no la armadura.

Las armaduras de las figs. 5.11(a) y (b) son estables bajo la acción de una carga vertical en el nudo  $B$ . Entre esos dos arreglos se encuentra la armadura de la parte (c) de la misma figura. Esta armadura es inestable porque no puede mantener su posición bajo la acción de la carga en  $B$ . El nudo  $B$  se deflexionará hacia abajo sin ocasionar ninguna fuerza calculable en las barras que concurren a él.

Es posible determinar por análisis matricial (tema que se presentará en los capítulos 16 al 19) si una estructura es estable, estableciendo las ecuaciones simultáneas  $\Sigma H = 0$  y  $\Sigma V = 0$  en cada nudo y calculando el determinante de las ecuaciones. Si el determinante no es cero, la estructura tiene una solución única y es estable. Sin embargo, si el determinante es cero, la estructura es inestable, ya que habrá un conjunto infinito de respuestas que satisfarán a las ecuaciones simultáneas.

Para un análisis más completo de las armaduras complejas, el lector puede ver el método de las barras en falsa posición descrito en el libro *Theory of Structures* de S. Timoshenko y D. H. Young [1].

En general puede decirse que hay poca justificación para el uso de armaduras complejas, ya que es posible utilizar armaduras simples o compuestas que cumplan el mismo propósito satisfactoriamente.

## 5.9 ESTABILIDAD

En los siguientes párrafos se analizan varias situaciones que pueden conducir a una estructura a ser inestable.

### **Menos de $2j - r$ barras**

Una armadura con menos de  $2j - r$  barras es obviamente inestable internamente, pero una armadura puede tener  $2j - r$  o más barras y aún ser inestable. La armadura de la fig. 5.12(a) satisface la relación  $2j - r$  y es estáticamente determinada y estable;

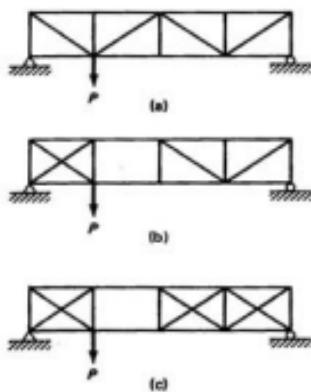


Figura 5.12

sin embargo, si la diagonal en el segundo tablero se remueve y se coloca en el primer tablero como se muestra en la fig. 5.12(b), la armadura se volverá inestable aunque el número de barras permanezca igual a  $2j - r$ . La parte de la armadura a la izquierda del tablero 2 puede moverse con respecto a la parte de la armadura a la derecha del tablero 2 porque éste es un rectángulo. (Como se indicó antes, una forma rectangular es inestable a menos que se restrinja de alguna manera.)

Similamente, la adición de diagonales a los tableros 3 y 4, como se ve en la fig. 5.12(c), no impedirá que la armadura continúe siendo inestable. Hay más que  $2j - r$  barras y la armadura es aparentemente estáticamente indeterminada de grado 2, pero en realidad es inestable por serlo así el tablero 2.

### Armaduras en las que no todas sus figuras son triángulos

Conforme el lector vaya conociendo las armaduras, le será más fácil con un solo vistazo determinar si las armaduras son estables o inestables. Por ahora sería más conveniente para él estudiar con todo detalle las armaduras en las que sospeche la posibilidad de inestabilidades. Cabe esperar tal posibilidad cuando una armadura no consista enteramente en triángulos. Las armaduras de las figs. 5.12(b) y (c) son de este tipo.

La falacia de esta idea es que en realidad el número de armaduras perfectamente estables que pueden formarse sin constar enteramente de triángulos es infinito. Como ejemplo, consideremos la armadura de la fig. 5.13(a). El triángulo básico  $ABC$  ha sido ampliado con la adición del nudo  $D$  y de las barras  $AD$  y  $CD$ , permaneciendo estable la armadura aunque la fig.  $ABCD$  no es un triángulo. El nudo  $D$  se mantiene

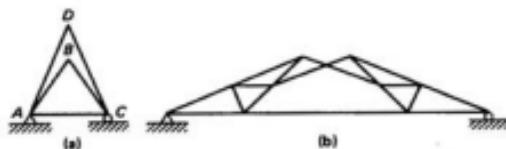


Figura 5.13

firme en su posición y no puede moverse sin cambiar la longitud de una o más barras. Las armaduras compuestas como las de las figs. 4.8(h) e (i) y las de tipo subdividido de la fig. 4.5(b) no constan exclusivamente de triángulos pero son, sin embargo, estables. Otro caso se muestra en la fig. 5.13(b). Las estructuras de este tipo tienen los nudos que rodean a las figuras no triangulares unidos al resto de la armadura en forma tal que no pueden moverse libremente. Si una armadura consta de figuras que no son todas triángulos, deberá examinarse cuidadosamente para ver si alguno de los nudos puede moverse en cualquier dirección sin ocasionar cambios de longitud en una o más barras de la armadura.

### Apoyos inestables

Una estructura no puede ser estable si sus soportes son inestables. Para ser estable ella debe estar soportada por lo menos por tres fuerzas no paralelas y no concurrentes. Este tema se trató en el capítulo 2.

## 5.10 ECUACIONES DE CONDICIÓN

En algunas ocasiones dos o más estructuras separadas están conectadas entre sí de manera que sólo un tipo de fuerza puede transmitirse a través de la conexión. Vimos que el arco de tres articulaciones y las estructuras con voladizos del capítulo 2 caen dentro de este tipo por estar conectadas por medio de articulaciones internas que no transmiten rotaciones.

Tal vez la manera más sencilla de producir una articulación en una armadura sea omitir la barra de una de las cuerdas en un tablero, como se muestra en la fig. 5.14(a). Es claro que el momento de todas las fuerzas externas que actúan sobre la armadura a la izquierda o a la derecha del nudo  $L$ , debe ser cero. La armadura es estáticamente determinada porque disponemos de tres ecuaciones de la Estática más una ecuación de condición para calcular las cuatro componentes de reacción.

La omisión de barras en algunas otras situaciones puede producir ecuaciones de condición. En la fig. 5.14(b) una diagonal de la armadura se ha omitido entre los dos soportes internos. Ninguna barra en este tablero tiene una componente vertical de fuerza, por lo que no puede transmitirse cortante en él; esto nos da una ecuación de condición. Los soportes a cada lado de la forma rectangular, que usualmente es inestable, impiden el colapso del tablero.

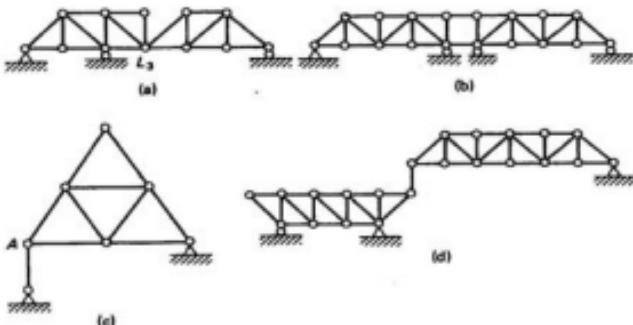


Figura 5.14

Desde un punto de vista práctico, las barras que se consideran omitidas probablemente no se eliminan en absoluto, debido a que, por un lado, alterarían el aspecto de la estructura, y por otro, podrían ser útiles en su montaje. Se ensamblan con frecuencia de modo que puedan hacerse inactivas una vez que la armadura haya sido completamente montada.

En las figs. 5.14(c) y (d) se muestran dos situaciones más en donde se producen ecuaciones de condición. En la primera de estas figuras se tienen cuatro componentes de reacción y la estructura parece ser externamente indeterminada; sin embargo, el nudo en A, fig. 5.14(c), está conectado con un pasador y no permite la transmisión de rotación. Esta ecuación de condición hace que la estructura sea externamente determinada. La fig. 5.14(d) muestra dos armaduras separadas conectadas por un eslabón. El eslabón proporciona dos ecuaciones de condición, porque en sus dos extremos no se transmite ninguna rotación.

E.M. Wichert patentó en 1932 un tipo de armadura continua estáticamente determinada. En esta armadura se omiten las barras verticales sobre los apoyos interiores. (Muller-Breslau, siendo profesor en Berlín, analizó esta forma de armadura en 1887[2]). La armadura Wichert de la fig. 5.15 con 32 barras, 18 nudos y 4 componentes de reacción es estáticamente determinada, ya que:

$$\begin{aligned}m &= 2j - r \\32 &= 36 - 4 \\32 &= 32\end{aligned}$$

Se recuerda al lector que la ecuación  $m = 2j - q$  es una condición *necesaria*, pero *no suficiente* para que una estructura sea estáticamente determinada. A menos que esta condición se satisfaga, la estructura no puede ser estáticamente determinada. Si se satisface, la estructura puede ser estáticamente determinada o puede ser

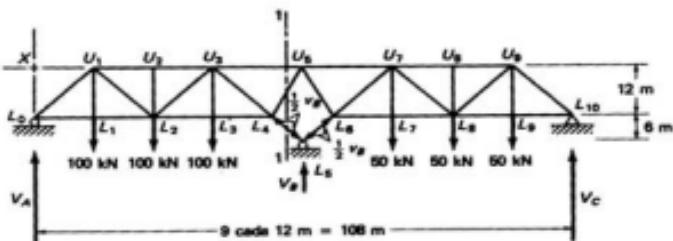


Figura 5.15

inestable. La estructura será estáticamente determinada y estable si las ecuaciones tienen una solución única.

En el capítulo 10 se analizarán las ventajas y desventajas de las estructuras determinadas y de las indeterminadas estáticamente. La armadura Wichert continua, pero estáticamente determinada, tiene todas las ventajas de las estructuras estáticamente determinadas (facilidad de análisis y diseño) pero ninguna de las desventajas de las estáticamente indeterminadas continuas (grandes variaciones en los esfuerzos causados por los asentamientos de los apoyos, errores de fabricación, etc.). El método de análisis se basa en las condiciones del apoyo interior. El apoyo en  $L_1$ , en la armadura de la fig. 5.15 es un rodillo, y la reacción en él es vertical sin ninguna componente horizontal; por lo tanto, las componentes horizontales de fuerza en las barras  $L_4L_5$  y  $L_5L_6$  deben ser iguales y opuestas (ambas a tensión o ambas a compresión). Las barras que tienen igual pendiente e iguales componentes horizontales de fuerza deben tener las mismas fuerzas, así como las mismas componentes verticales. Suponiendo que la reacción  $V_B$  en el rodillo sea hacia arriba, las dos fuerzas serán de compresión y la suma de sus componentes verticales será igual y opuesta a la reacción. Esta relación puede expresarse de la siguiente manera:

$$V_{L_4L_5} = V_{L_5L_6} = \frac{1}{2}V_B$$

Las componentes horizontales de las dos fuerzas pueden expresarse en términos de las componentes verticales, que están en términos de  $V_B$ . En esta estructura particular las barras tienen una inclinación de  $45^\circ$ , y las componentes horizontales y verticales son iguales, como se muestra en las barras de la figura. Se pueden tomar momentos alrededor del nudo  $U_5$  de todas las fuerzas a la izquierda de la sección 1-1. Como las componentes de fuerza en  $L_4L_5$  están expresadas en términos de  $V_B$ , la ecuación contendrá dos incógnitas,  $V_A$  y  $V_B$ . Se puede entonces tomar momentos respecto a  $L_{10}$  de todas las fuerzas externas que actúan sobre la armadura. La ecuación resultante tiene las mismas dos incógnitas,  $V_A$  y  $V_B$ , y sus valores pueden determinarse resolviendo las dos ecuaciones simultáneamente. Una vez que se ob-

tienen dos de las reacciones, el análisis puede completarse con los métodos usuales de la Estática. En el ejemplo 5.8 se presenta un análisis completo de esta armadura.

El análisis de varias armaduras Wichert de diferentes geometrías mostrará que bajo ciertas circunstancias se pueden presentar fenómenos de inestabilidad. Esta situación se presentará cuando las barras de la cuerda inferior que concurren al apoyo interior tengan muy poca inclinación y la inestabilidad se evidenciará por los enormes valores de las fuerzas en esas barras. Existe una pendiente específica de las barras de la cuerda inferior para la cual la armadura se vuelve inestable; si la barra  $L_4L_5$  para la armadura de la fig. 5.15 fuese tan plana que su línea de acción intersectase la línea de acción de la cuerda superior en el punto X en la figura, la armadura sería inestable.

Las armaduras Wichert con más de dos claros son muy laboriosas de analizar aunque sean estáticamente determinadas. El Dr. D.B. Steinman en su libro *The Wichert Truss* [3], presenta un análisis detallado de los diferentes tipos de armaduras, incluyendo métodos de análisis y diseño.

### EJEMPLO 5.8

Calcular las reacciones y las fuerzas en las barras de la armadura Wichert mostrada en la fig. 5.15.

*Solución*

$$\Sigma M_{L_1} = 0 \text{ (a la izquierda de la sección 1-1)}$$

$$\begin{aligned} 54V_A - (100)(18 + 30 + 42) + 18H_{L_4L_5} &= 0 \\ 54V_A - 9000 + (18)(\frac{1}{2}V_B) &= 0 \\ 54V_A + 9V_B &= 9000 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Sigma M_{L_{10}} = 0 \text{ (toda la estructura)}$$

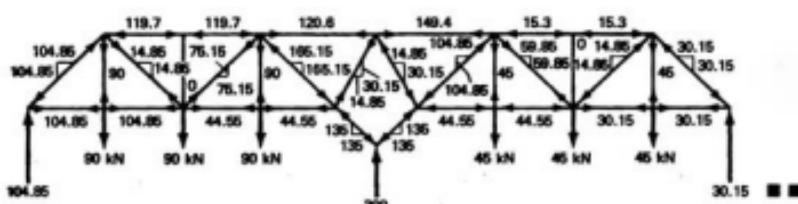
$$\begin{aligned} -(50)(12 + 24 + 36) - (100)(72 + 84 + 96) \\ + 108V_A + 54V_B &= 0 \\ 108V_A + 54V_B &= 28800 \end{aligned} \quad (2)$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) simultáneamente se obtiene:

$$V_A = 116.66 \text{ kN} ; V_B = 300 \text{ kN}$$

$$\text{Por } \Sigma V = 0 ; V_c = 33.34 \text{ kN}$$

Por Estática se obtienen las siguientes fuerzas:



### 5.11 SOLUCIONES CON LA COMPUTADORA

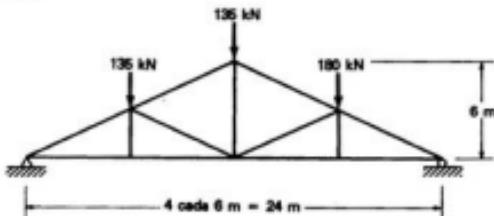
En este punto algunos lectores podrían querer analizar armaduras planas utilizando una microcomputadora. Esto lo podrán hacer fácilmente con el disco incluido en este libro. Aunque los métodos usados para preparar los programas en el disco no se analizan hasta los capítulos 16 al 19, los programas pueden aplicarse desde ahora sin dificultad.

En el capítulo 20 se describen con todo detalle las instrucciones para utilizar el disco y en el ejemplo 20.1 se analiza una armadura plana con él. Los ejemplos subsecuentes del capítulo 20 presentan los análisis de armaduras tridimensionales, de armaduras, vigas y marcos estáticamente indeterminados.

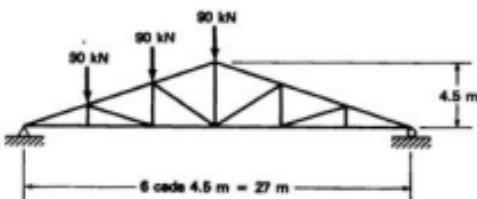
### PROBLEMAS

En los problemas 5.1 al 5.27, determinar las fuerzas en todas las barras de las armaduras mostradas.

5.1



5.2 (Resp.:  $U_1U_2 = -427.05$  kN,  $U_3L_3 = +90$  kN,  $L_3L_4 = +270$  kN)

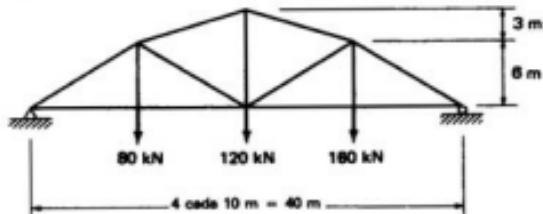
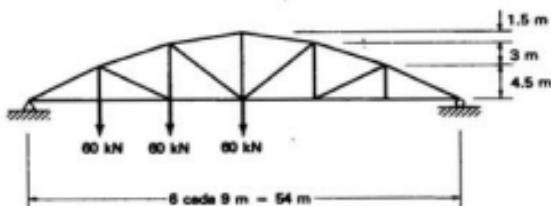


5.3 Resolver el problema 5.1 cambiando la longitud de todos los tableros de 6 m a 4.5 m y cambiando la carga de 180 kN a 360 kN.

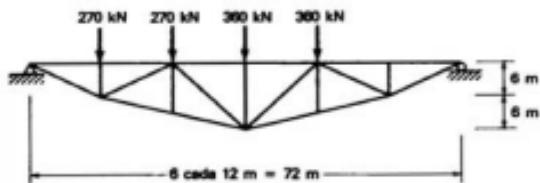
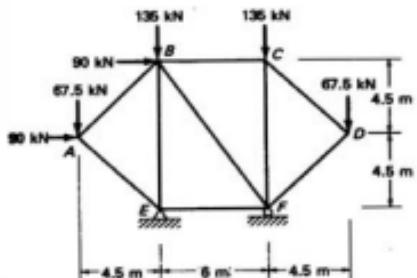
5.4 Resolver el problema 5.1 con una carga adicional uniforme de 30 kN/m aplicada sobre todo el claro; esta carga deberá aplicarse en los nudos de la cuerda inferior.  
(Resp.:  $L_1L_2 = +967.5$  kN,  $U_1U_2 = -729.4$  kN,  $L_2L_3 = +1012.5$  kN)

## Problemas

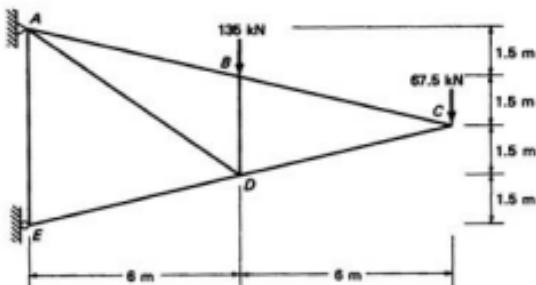
5.5

5.6 (Resp.:  $U_2L_2 = +324 \text{ kN}$ ,  $L_3L_4 = +648 \text{ kN}$ ,  $U_3L_4 = -54 \text{ kN}$ )

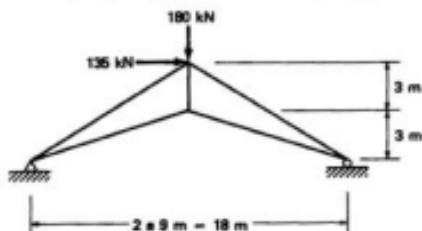
5.7

5.8 (Resp.:  $AB = -15.75 \text{ kN}$ ,  $BC = +33.75 \text{ kN}$ ,  $BF = -243.45 \text{ kN}$ )

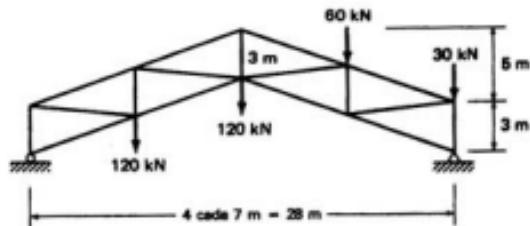
5.9



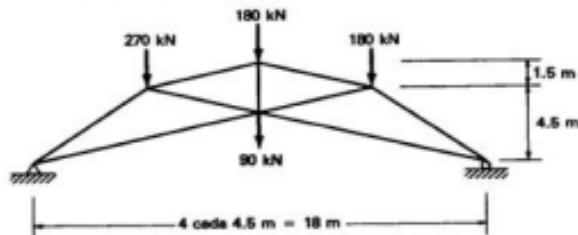
5.10 (Resp.:  $L_0U_1 = -324.45$  kN,  $U_1L_2 = -486.9$  kN)



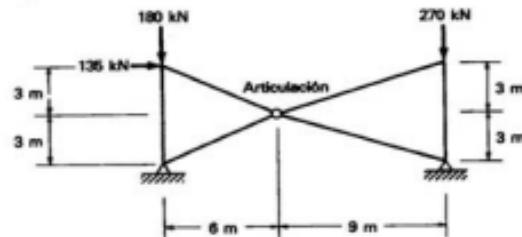
5.11



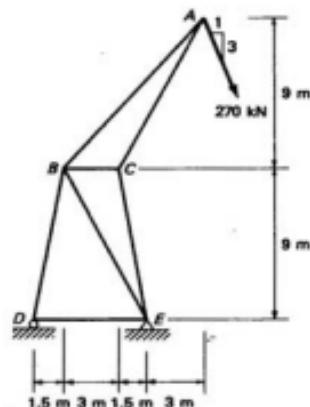
5.12 (Resp.:  $L_0L_2 = + 604.8 \text{ kN}$ ,  $U_2L_2 = + 315 \text{ kN}$ ,  $L_2U_3 = + 249.3 \text{ kN}$ )



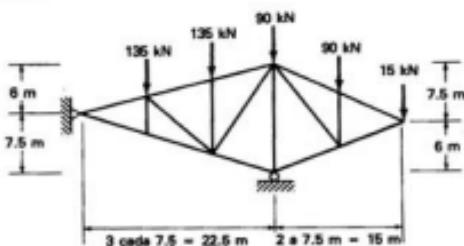
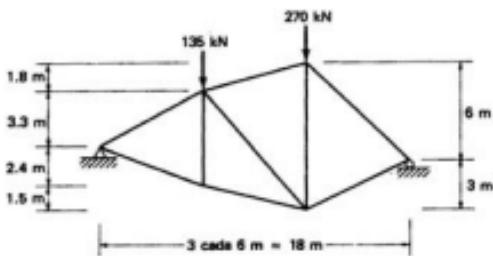
5.13



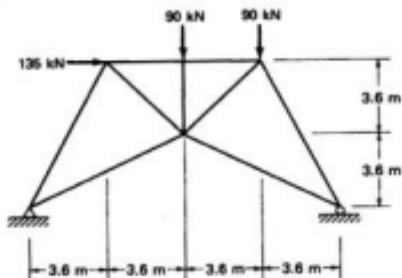
5.14 (Resp.:  $AC = -1002.15 \text{ kN}$ ,  $BC = -597.6 \text{ kN}$ )



5.15

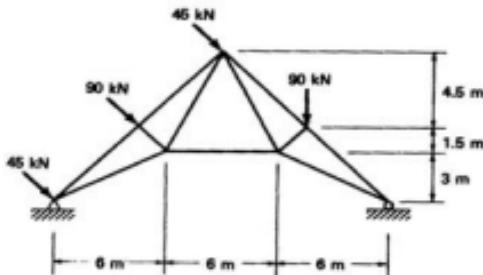
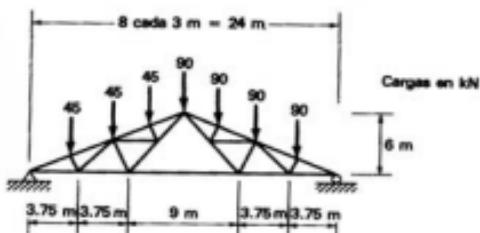
5.16 (Resp.:  $L_0L_1 = + 204.3$  kN,  $U_1L_1 = -28.35$  kN,  $U_2L_3 = -211.95$  kN)

5.17

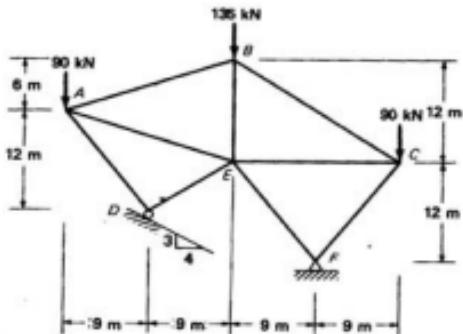


5.18 Resolver el problema 5.17 con el rodillo de soporte inclinado como se muestra (Resp.:  $U_1U_2 = -180$  kN,  $\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}\right)$ ,  $L_2U_3 = + 127.35$  kN)

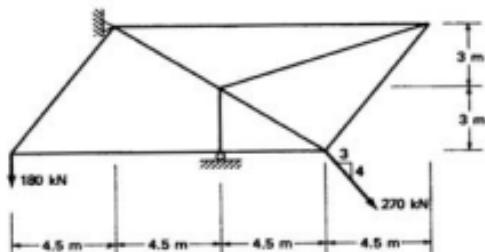
5.19

5.20 (Resp.:  $L_2L_4 = +382.5$  kN,  $U_1M_6 = +45$  kN,  $U_7U_9 = -508.05$  kN)

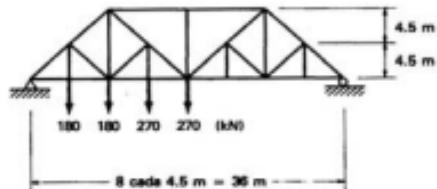
5.21



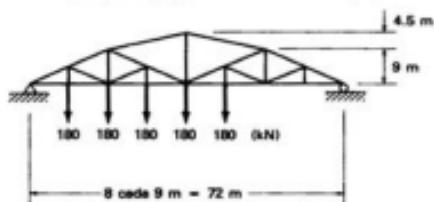
5.22 (Resp.:  $L_0L_2 = -135 \text{ kN}$ ,  $U_1M_2 = +324.45 \text{ kN}$ ,  $L_3U_4 = +14.85 \text{ kN}$ )



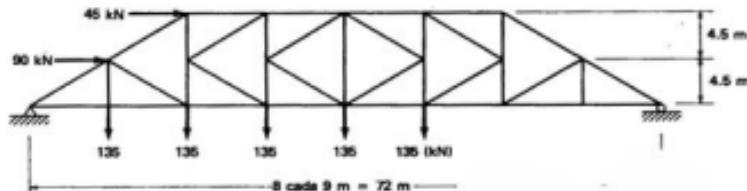
5.23



5.24 (Resp.:  $M_1U_2 = -1057.5 \text{ kN}$ ,  $U_4L_4 = +389.7 \text{ kN}$ ,  $M_5U_6 = +117.4 \text{ kN}$ )

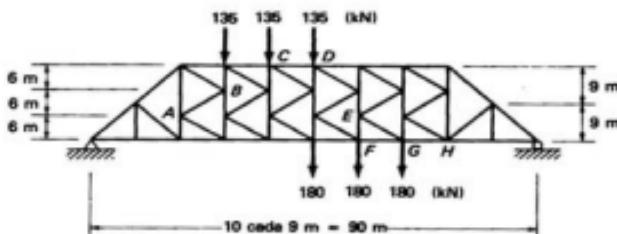


5.25

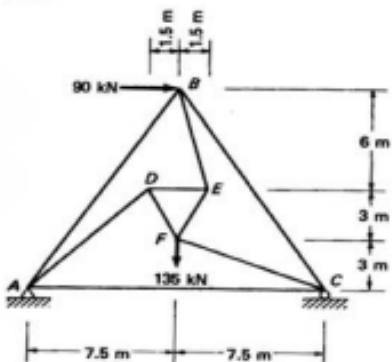


## Problemas

- 5.26 (Resp.:  $AB = -275.4 \text{ kN}$ ,  $CD = -945 \text{ kN}$ ,  $EF = +221.85 \text{ kN}$ ,  $GH = +729 \text{ kN}$ )



5.27



En los problemas 5.28 al 5.32, determinar directamente las fuerzas en las barras indicadas empleando el método de momentos.

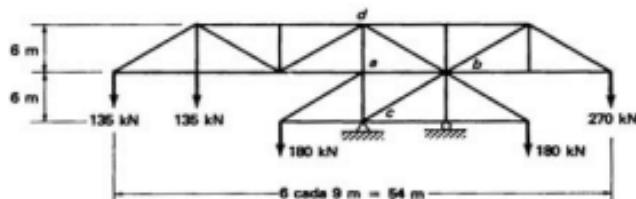
- 5.28 Barras  $U_2U_3$ ,  $L_2L_3$  y  $U_2L_3$  de la armadura del problema 5.2. (Resp.:  $U_2U_3 = -351 \text{ kN}$ ,  $L_2L_3 = +324 \text{ kN}$ ,  $U_2L_3 = -140.4 \text{ kN}$ )

- 5.29 Barras  $L_2L_3$ ,  $U_3U_4$  y  $U_2L_3$  de la armadura del problema 5.6.

- 5.30 Barras  $U_2U_4$ ,  $L_1L_3$  y  $U_2L_3$  de la armadura del problema 5.7. (Resp.:  $U_2U_4 = -382.5 \text{ kN}$ ,  $L_1L_3 = +389.7 \text{ kN}$ ,  $U_2L_3 = +8.1 \text{ kN}$ )

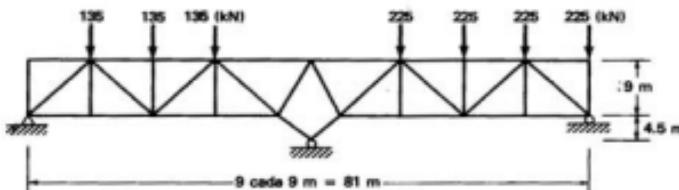
- 5.31 Barras  $L_0U_1$ ,  $U_1U_2$  y  $U_1L_3$  de la armadura del problema 5.16.

5.32 Barras  $ab$ ,  $bc$  y  $ad$ . (Resp.:  $ab = -742.5$  kN,  $bc = 0$ ,  $ad = -405$  kN)

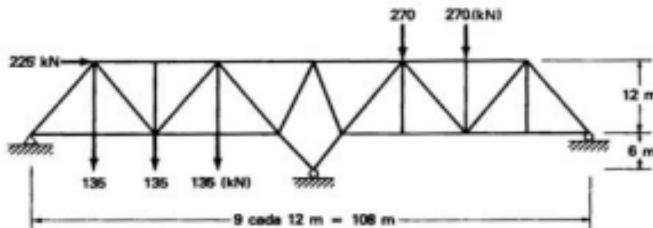


En los problemas 5.33 y 5.34, determinar las fuerzas en todas las barras.

5.33



5.34 (Resp.:  $L_0L_1 = +267.48$  kN,  $U_5U_7 = +380.16$  kN,  $L_9L_{10} = +107.5$  kN)



## REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. S. Timoshenko y D.H. Young, *Theory of Structures* (Nueva York: McGraw-Hill, 1965), págs. 92-103.
2. H. Sutherland y H.L. Bowman, *Structural Theory* (Nueva York: Wiley, 1954), cap. 5.
3. D.B. Steinman, *The Wichert Truss* (Nueva York: D. Van Nostrand, 1932).

# Armaduras espaciales o tridimensionales

### 6.1 GENERALIDADES

Casi todas las estructuras son por naturaleza tridimensionales. Sin embargo, pueden descomponerse en otros sistemas de armaduras independientes alojadas en planos perpendiculares. La fig. 6.1(a) muestra que es posible el análisis independiente de cada armadura. En la figura se muestran dos barras,  $AB$  y  $BC$ , perpendiculares entre sí. Es evidente que una fuerza en  $AB$  no tiene efecto en la fuerza de  $BC$ , porque la componente de una fuerza a  $90^\circ$  es cero. Similarmente, las fuerzas en una armadura no tienen efecto en las fuerzas de otra armadura que está unida perpendicularmente a ella.

Los elementos que unen a dos sistemas sirven como elementos de ambos, y su fuerza total se obtiene combinando las fuerzas desarrolladas en cada uno. Un ejemplo de esto son las barras extremas de las armaduras de puentes que tienen portales en sus extremos (figs. 10.9 y 10.10). Estas barras sirven como postes extremos de las armaduras del puente y como columnas del portal.

Muchas torres, cúpulas y grúas son estructuras tridimensionales formadas por elementos dispuestos de manera que es imposible separarlos en sistemas diferentes con el fin de analizarlos en forma individual. La diferencia de estos casos estriba cuando los sistemas de armaduras no se encuentran en planos perpendiculares entre

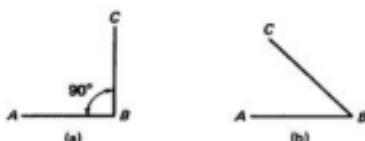


Figura 6.1

sí. Las fuerzas en una armadura unida a otra con un ángulo distinto de  $90^\circ$ , afectan a las fuerzas en esta armadura, del mismo modo que una fuerza en el elemento  $AB$  de la fig. 6.1(b) ocasiona una fuerza en el elemento  $BC$ . En armaduras de este tipo es necesario analizar toda la estructura como una unidad, en vez de considerar los diferentes sistemas en varios planos individuales. Este capítulo se dedica a estos tipos de armaduras.

El ingeniero estructural está tan acostumbrado a visualizar las estructuras en un solo plano, que cuando es necesario analizar armaduras espaciales comete errores, porque su mente suele considerar todo sobre la base de un solo plano. Si la disposición general de una armadura espacial no es completamente clara, la construcción de un pequeño modelo probablemente aclare la situación. Aun modelos sencillos de papel, cartón o alambre pueden resultar útiles en estos casos.

## 6.2 PRINCIPIOS BASICOS

Antes de presentar un método para analizar armaduras espaciales, es necesario considerar algunos principios básicos relacionados con este tipo de estructuras. Se supone que las armaduras tridimensionales, así como las planas están formadas por elementos sujetos sólo a fuerza axial. En otras palabras, se supone que las armaduras están formadas por elementos rectos entre sus juntas, que las cargas están aplicadas sólo en los nudos, que los extremos de los elementos pueden girar libremente (para que esta situación se tuviera en efecto, los elementos tendrían que estar conectados mediante juntas universales, o por lo menos con pasadores sin fricción), etc. Los análisis basados en estas hipótesis son usualmente bastante satisfactorios, no obstante que las conexiones usadas en la práctica son a base de pernos o soldadura.

Un sistema de fuerzas concurrentes en un punto, aunque no todas necesariamente en un mismo plano, puede combinarse en una fuerza resultante equivalente. Similarmente, puede verse que una fuerza inclinada tiene tres componentes coordenados, y usaremos tres planos de referencia para considerarlos. Los tres planos que usaremos aquí son, uno horizontal y dos verticales, mutuamente ortogonales entre sí. Las intersecciones de estos planos constituyen los tres ejes coordinados,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ . La fuerza en cualquier elemento inclinado respecto a estos ejes puede resolverse en componentes a lo largo de ellos y sus magnitudes son proporcionales a la longitud de sus proyecciones sobre los ejes. La fuerza inclinada  $F$  en la fig. 6.2, está resuelta gráficamente en componentes  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$ .

Los mismos valores pueden calcularse algebraicamente a partir de la siguiente relación: la fuerza en un elemento es a la longitud de éste como las componentes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  de fuerza son a las correspondientes componentes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  de longitud.

$$\frac{F}{\ell} = \frac{F_x}{\ell_x} = \frac{F_y}{\ell_y} = \frac{F_z}{\ell_z}$$

$$\ell^2 = \ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2$$

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$$

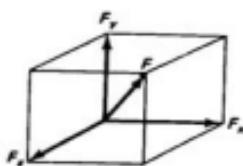


Figura 6.2



Montaje de una columna exterior en edificio de estacionamiento, Cd. de México.  
(Cortesía de ILIDEM, S.A.)

Las armaduras espaciales pueden ser estáticamente determinadas o estáticamente indeterminadas; consideraremos aquí sólo las primeras. Los métodos expuestos en capítulos posteriores para estructuras indeterminadas, se aplican también a las armaduras tridimensionales y a las planas.

### 6.3 ECUACIONES DE LA ESTÁTICA

Existen más ecuaciones de la Estática para determinar las reacciones de estructuras tridimensionales, porque se tienen dos ejes más para tomar momentos y un nuevo eje para sumar fuerzas. Por equilibrio, la suma de las fuerzas a lo largo de cada uno de los ejes de referencia es igual a cero, así como la suma de los momentos de todas las fuerzas alrededor de cada uno de los ejes. Se dispone de un total de seis ecuaciones ( $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$ ,  $\Sigma Z = 0$ ,  $\Sigma M_x = 0$ ,  $\Sigma M_y = 0$  y  $\Sigma M_z = 0$ ) y seis componentes de reacción pueden determinarse con ellas.

Si una estructura tiene más de seis componentes de reacción, será estáticamente indeterminada externamente; si tiene menos de seis, será inestable y si tiene seis, será estáticamente determinada externamente. Sin embargo, muchas armaduras espaciales tienen más de seis componentes de reacción y son estáticamente determinadas en su conjunto. El ejemplo 6.2 muestra que las reacciones para este tipo de estructuras pueden determinarse resolviéndolas conjuntamente con las fuerzas en las barras usando sólo ecuaciones de la Estática.

La figura básica de una armadura espacial es el triángulo. Un triángulo puede ampliarse para formar una armadura espacial, añadiéndole tres barras y un nudo. Cada una de las nuevas barras se conecta a un nudo del triángulo básico y los otros extremos se juntan para formar un nuevo nudo. La armadura espacial elemental así formada tiene seis barras y cuatro nudos. Esta puede ampliarse con la adición de tres barras y un nudo. En cada nudo de una armadura espacial se dispone de tres ecuaciones para el cálculo de las incógnitas ( $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$  y  $\Sigma Z = 0$ ). Si  $j$  es el número de nudos,  $m$  el número de barras y  $r$  el número de componentes de reacción, puede verse que para que una armadura espacial sea estáticamente determinada, debe cumplirse la siguiente relación:

$$3j = m - r$$

En caso de que hubiera nudos en la armadura donde todas las barras estuviesen en un mismo plano, sólo se dispondría de dos ecuaciones en cada uno de los nudos y sería necesario restar una unidad del miembro izquierdo de la ecuación por cada nudo. La omisión de una barra para cada componente de reacción en exceso de seis, hará que se satisfaga esta ecuación y la armadura será estáticamente determinada internamente. Cuando se presenta esta situación, es posible calcular por Estática tridimensional las fuerzas y reacciones de la armadura, aunque ésta sea estáticamente indeterminada externamente.

La regla general para que exista estabilidad, por lo que respecta a fuerzas externas, es que la proyección de la estructura sobre cualquiera de los tres planos coor-

## 6.4 Teoremas especiales aplicables a las armaduras tridimensionales

139

denados sea también estable; por tanto, igual que para las estructuras planas, debe haber por lo menos tres componentes de reacción no concurrentes en cualquier plano. Los resultados del cálculo de las reacciones serán inconsistentes para cualquier otro caso.

En los párrafos anteriores, tanto la estabilidad y la determinación externas como la estabilidad y la determinación internas, han sido tratadas como si fueran conceptos totalmente independientes. Los dos han sido separados para mayor facilidad de comprensión por parte del lector que no ha encontrado antes armaduras espaciales. Sin embargo, el lector verá en los ejemplos siguientes, que es imposible en la mayoría de los casos, considerar los dos conceptos por separado. Por ejemplo, muchas armaduras son estáticamente indeterminadas externamente y estáticamente determinadas internamente y no obstante, pueden analizarse por completo utilizando la Estática. Pocas estructuras planas son de este tipo.

#### **6.4 TEOREMAS ESPECIALES APLICABLES A LAS ARMADURAS TRIDIMENSIONALES**

De los principios de la Estática elemental pueden deducirse dos teoremas útiles para el análisis de las armaduras tridimensionales, ellos son los siguientes:



Domo del auditorio de Northern Arizona University, Flagstaff, Arizona.  
(Cortesía de American Institute of Timber Construction.)

1. La componente de una fuerza sobre un eje a  $90^\circ$  es cero, porque por grande que sea la fuerza, al multiplicarse ésta por el coseno de  $90^\circ$ , el resultado será cero. Una fuerza no puede tener componentes en un plano normal al que la contiene. Además, una fuerza no puede causar momentos respecto a ningún eje en su plano, porque o bien interseca al eje o es paralela a él.

De lo anterior es evidente que si varias barras de una armadura se unen en un nudo, de las cuales todas excepto una se encuentran en el mismo plano, la componente de la fuerza en esta barra, normal al plano de las otras barras, debe ser igual a la suma de las componentes de las fuerzas externas en el nudo, normales al mismo plano. Si no hay fuerzas externas presentes, la barra no tiene fuerza.

2. Las ecuaciones de la Estática muestran claramente que si hay un nudo en una armadura que no contiene cargas externas y en el que se ha visto que todas excepto dos barras no tienen fuerza, entonces esas dos barras también deben tener fuerza nula, a menos que sean colineales.

## 6.5 TIPOS DE APOYOS

Se ha supuesto que las armaduras planas están apoyadas sobre rodillos o articulaciones capaces de proporcionar una o dos componentes de reacción. En las armaduras tridimensionales se usan los mismos tipos de apoyos, pero el número de componentes de reacción puede variar entre uno y tres.

1. *La articulación* puede tener tres componentes de reacción porque puede resistir fuerzas en las direcciones  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ .

2. *El apoyo guiado* tiene libertad de moverse en una dirección paralela a la superficie de soporte. En la otra dirección paralela a la superficie de soporte el movimiento está impedido, así como en la dirección perpendicular a la superficie, dando un total de dos componentes de reacción.

3. *Los rodillos planos, las placas planas y las esferas de acero* presentan resistencia sólo al movimiento perpendicular a la superficie de soporte, dando una sola componente de reacción.

De lo anterior se ve que es posible seleccionar un tipo de apoyo que proporcione tres componentes de reacción, o bien, uno en el que se elimine una o dos de tales componentes. Reflexionando un poco sobre el tema se puede ver la ventaja de limitar el número de componentes de reacción en una armadura espacial. Una armadura que sea estáticamente indeterminada externamente, puede hacerse determinada internamente si se limitan a seis sus componentes de reacción. (Las ventajas de las estructuras determinadas y de las indeterminadas se analizan en el capítulo 10.) En algunas estructuras es conveniente eliminar las componentes de reacción en ciertas direcciones. El caso más obvio se presenta cuando una armadura está apoyada sobre muros a los cuales no se quiere transmitir empujes normales a ellos.

En lo sucesivo las direcciones de las componentes de reacción posibles se indican por medio de líneas de trazo grueso, como se muestra en los diagramas de las estructuras analizadas en los ejemplos 6.1 al 6.3.

## 6.6 EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Los ejemplos 6.1 y 6.2 ilustran la aplicación de los principios anteriores a las armaduras espaciales. El ejemplo 6.1 considera una estructura apoyada en tres puntos con seis componentes de reacción que pueden calcularse directamente. El segundo ejemplo presenta una armadura espacial apoyada en cuatro puntos con siete componentes de reacción que no pueden resolverse directamente.

### EJEMPLO 6.1

Determinar las reacciones y fuerzas en las barras de la armadura espacial mostrada en la fig. 6.3.

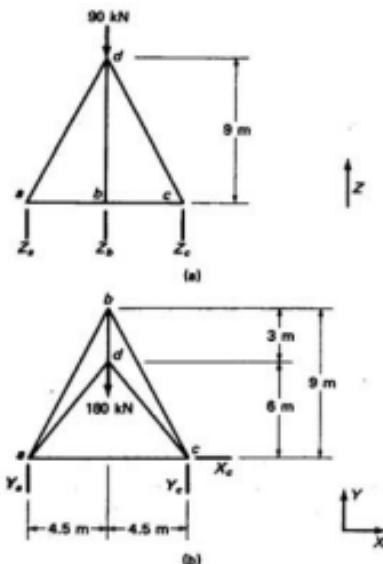


Figura 6.3

#### Solución

La armadura es estáticamente determinada y estable externamente porque hay un total de seis componentes de reacción, tres no concurrentes en cada plano. En el interior es estáticamente determinada como se evidencia con la ecuación de nudo.

$$3j = m + r$$

$$12 = 6 + 6$$

$$12 = 12$$

Para una armadura con tres componentes verticales de reacción, se pueden tomar momentos con respecto a un eje perpendicular a la línea de acción de dos cualesquier de éstas para calcular la tercera.

$$\Sigma M_x = 0, \text{ respecto a } ac$$

$$(180)(9) - (90)(6) + 9Z_b = 0$$

$$Z_b = -120 \text{ kN} \downarrow$$

$$\Sigma M_y = 0, \text{ respecto a la línea de acción de } Y_s$$

$$(90)(4.5) + (120)(4.5) - 9Z_c = 0$$

$$Z_c = +105 \text{ kN} \uparrow$$

$$\Sigma Z = 0$$

$$-90 - 120 + 105 + Z_s = 0$$

$$Z_s = +105 \text{ kN} \uparrow$$

Similarmente, cuando se tienen tres componentes horizontales desconocidas, pueden tomarse momentos respecto a un eje vertical que pase por el punto de intersección de dos de las componentes.

$$\Sigma M_z = 0, \text{ respecto a la línea de acción de } Z_c$$

$$-(180)(4.5) + 9Y_s = 0$$

$$Y_s = +90 \text{ kN} \uparrow$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$90 - 180 + Y_c = 0$$

$$Y_c = +90 \text{ kN} \uparrow$$

$$\Sigma X = 0$$

$$0 + X_c = 0$$

$$X_c = 0$$

Cuando se han encontrado las reacciones, las fuerzas en las barras pueden calcularse fácilmente con el método de los nudos. En el nudo *a* la barra *ad* es la única que tiene una componente *Z* de longitud; por ello su componente debe ser igual y opuesta a *Z<sub>s</sub>*, o sea de 105 kN, en compresión. Las componentes *X* y *Y* de *ad* son proporcionales a sus componentes de longitud en esas direcciones. Elaborando una tabla como la mostrada, se simplifican los cálculos de las componentes y de las fuerzas resultantes.

Considerando el nudo *a*, la componente *Y* de fuerza en la barra *ab* puede determinarse por equilibrio ya que se conoce la componente *Y* de *ad*.

$$\Sigma Y = 0, \text{ en el nudo } a$$

$$90 - 70.2 - Y_{ab} = 0$$

$$Y_{ab} = -19.8 \text{ kN, compresión}$$

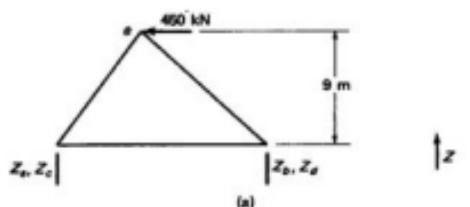
TABLA 6.1

Barra	Proyección			Longitud	Componente de fuerza			Fuerza
	X	Y	Z		X	Y	Z	
ab	4.5	9	0	10.06	-9.9	-19.8	0	-22.14
ad	4.5	6	9	11.72	-52.65	-70.2	-105.3	-137.25
ac	9	0	0	9.00	+62.55	0	0	+62.55
bc	4.5	9	0	10.06	-9.9	-20.25	0	-22.59
bd	0	3	9	9.49	0	+40.05	+120.15	+126.45
cd	4.5	6	9	11.72	-52.65	-69.75	-104.85	-136.35

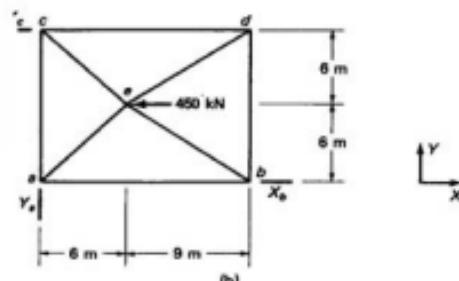
Las fuerzas en las otras barras se calculan con el método de los nudos y se muestran en la tabla 6.1.

### EJEMPLO 6.2

Encontrar todas las reacciones y fuerzas en las barras de la armadura espacial mostrada en la fig. 6.4.



(a)



(b)

Figura 6.4

**Solución**

Examinando la armadura vemos que es estáticamente indeterminada externamente porque hay siete componentes de reacción y sólo seis ecuaciones de la Estática. Sin embargo, es estáticamente determinada internamente como se demuestra y puede analizar por Estática.

$$3j = m + r$$

$$15 = 8 + 7$$

$$15 = 15$$

Aunque la armadura es estáticamente indeterminada externamente, hay sólo tres componentes de reacción desconocidas en el plano  $XY$ , y éstas pueden determinarse inmediatamente. Las otras cuatro componentes se encontrarán junto con las fuerzas en las barras.

$$\Sigma M_c = 0, \text{ respecto a la línea de acción de } Z_a$$

$$-(450)(6) + 12X_c = 0 \\ X_c = +225 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\Sigma X = 0$$

$$+225 - 450 + X_b = 0 \\ X_b = +225 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$0 + Y_e = 0 \\ Y_e = 0$$

Si se conociese el valor de una de las componentes de reacción en  $Z$ , los valores de las otras tres se podrían determinar por Estática. Suponemos que  $Z_d$  tiene un valor  $S$  hacia abajo y las componentes de reacción se calculan en términos de  $S$ .

$$\Sigma M_s = 0, \text{ respecto a } ac$$

$$-(450)(9) + 15S + 15Z_b = 0 \\ Z_b = 270 - S$$

$$\Sigma M_s = 0, \text{ respecto a } ab$$

$$+12S - 12Z_c = 0 \\ Z_c = +S$$

$$\Sigma Z = 0$$

$$+S - S - (270 - S) + Z_a = 0 \\ Z_a = 270 - S$$

Comprobación con  $\Sigma M_s = 0$  respecto a  $cd$

$$(270 - S)(12) - 12Z_e = 0 \\ Z_e = 270 - S$$

El cálculo de las fuerzas en las barras puede efectuarse ahora en términos de  $S$  a partir de las componentes de reacción. Estos cálculos continúan hasta que las

fuerzas en ambos extremos de una barra se determinan en términos de  $S$ . Los dos valores deben ser iguales y de esta condición se obtiene el valor correcto de  $S$ .

La componente de fuerza en  $Z$  de  $de$ , es de tensión e igual a  $S$ , mientras que la de  $be$  es igual a  $270 - S$ , y también es de tensión. La componente en  $Y$  de  $de$  es  $(6/9)(S) = 2/3 S$ , y la de  $be$  es  $(6/9)(270 - S) = 180 - 2/3 S$ . Con  $\Sigma Y = 0$  en el nudo  $d$ , vemos que  $bd$  trabaja a compresión con una fuerza de  $\frac{2}{3}S$ . Igualmente, con  $\Sigma Y = 0$  en el nudo  $b$ , vemos que  $bd$  trabaja a compresión con una fuerza de  $180 - \frac{2}{3}S$ . Igualando las dos expresiones obtenemos el valor de  $S$ .

$$\frac{2}{3}S = 180 - \frac{2}{3}S$$

$$\frac{4}{3}S = 180$$

$$S = 135 \text{ kN}$$

Los valores numéricos de las componentes de reacción en  $Z$  ahora pueden encontrarse a partir de  $S$  y las fuerzas en las barras de la armadura se determinan con el método de los nudos. Conviene elaborar una tabla que contenga las componentes de longitud y fuerza. Los resultados se muestran en la tabla 6.2. ■ ■

## 6.7 ARMADURAS ESPACIALES MAS COMPLICADAS

El método de los nudos se usó para determinar las fuerzas en las armaduras sencillas analizadas en la sección 6.6. En armaduras espaciales más complicadas, aun si se conocen las reacciones, el analista puede tener dificultades en el cálculo de las fuerzas con el método de los nudos. La armadura de la fig. 6.5 queda dentro de esta clase.

Es posible calcular todas las reacciones inmediatamente, pero ninguna fuerza puede determinarse con el método de los nudos como se vio en los ejemplos 6.1 y 6.2. La aplicación del principio de la barra con fuerza nula del párrafo (1) de la sección 6.4, sin embargo, demostrará que varias barras no tienen fuerza. Por ejemplo, en el nudo  $f$  las barras  $fc$ ,  $fb$  y  $fe$  se encuentran en el mismo plano; la barra  $fd$  no es coplanaar con éstas y tiene una componente de fuerza perpendicular al plano

**TABLA 6.2**

Barra	Proyección			Longitud	Componente de fuerza			Fuerza
	X	Y	Z		X	Y	Z	
$ab$	15	0	0	15	+90	0	0	+90
$ae$	6	6	9	12.36	-90	-90	-135	-185.4
$ac$	0	12	0	12	0	+90	0	+90
$be$	9	6	9	14.07	+135	+90	+135	+211.05
$bd$	0	12	0	12	0	-90	0	-90
$de$	9	6	9	14.07	+135	+90	+135	+211.05
$cd$	15	0	0	15	-135	0	0	-135
$ce$	6	6	9	12.36	-90	-90	-135	-185.4

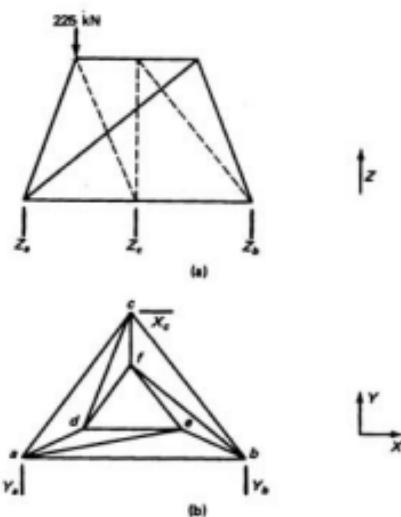


Figura 6.5

de las otras tres. Esta componente debe ser igual y opuesta a todas las componentes perpendiculares al plano de las cargas externas aplicadas al nudo. Como no hay cargas presentes, la barra  $fd$  no tiene fuerza. Puede hacerse un análisis similar en el nudo  $e$  para mostrar que la fuerza en la barra  $fe$  es nula.

Se ha demostrado que dos de las cuatro barras que concurren al nudo  $f$  no tienen fuerza. Las dos barras restantes no son colineales y tampoco deben tener fuerza, ya que no hay cargas externas aplicadas al nudo [párrafo (2) de la sección 6.4]. Ahora es posible calcular las fuerzas en las barras restantes por el método de los nudos en el caso de esta armadura particular.

En otras estructuras, el empleo del principio de la barra con fuerza nula no será suficiente (si es que tuviera algún valor) para determinar las fuerzas. En este último tipo de armadura, probablemente el empleo de momentos permitirá al lector efectuar el análisis. La armadura de la fig. 6.5 podría analizarse tomando momentos. Si se pasase una sección completamente alrededor del nudo  $e$  y se aislarase como cuerpo libre, se podrían tomar momentos respecto a la línea  $ab$  para encontrar la fuerza en la barra  $ef$ . Las fuerzas en  $ae$  y  $eb$  intersecan a la línea  $ab$  y la línea de acción de  $ed$  es paralela a  $ab$ . En el ejemplo 6.3 se usan varias ecuaciones de momento de este tipo. Al volverse más complicadas las estructuras espaciales, es posible que no pueda calcularse ni una sola fuerza por medio de los métodos expuestos hasta ahora.

Si a una barra se le asigna arbitrariamente una fuerza  $F$ , será posible calcular las fuerzas en varias barras en términos de  $F$ . Una vez que la fuerza en cada uno de los extremos de una barra se conozca en función de  $F$ , esta incógnita podrá despejarse igualando ambos valores, lo que permitirá efectuar el análisis de toda la armadura.

### EJEMPLO 6.3

Analizar la armadura espacial de la fig.6.6.

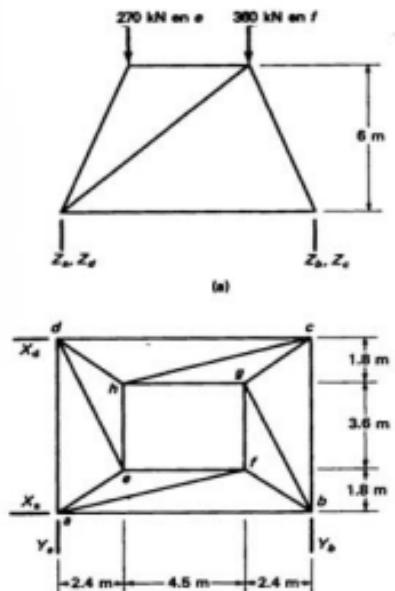


Figura 6.6

#### Solución

Aunque hay ocho componentes de reacción, la estructura es estáticamente determinada.

$$3j = m + r$$

$$(3)(8) = 16 + 8$$

$$24 = 24$$

Una inspección rápida de la estructura, mostrará que ésta tiene cuatro barras con fuerza nula. En el nudo *h*, la barra *eh* no tiene fuerza y en el nudo *g* ocurre lo mismo con la barra *gh*; por consiguiente, las barras *hd* y *hc*, que concurren al nudo *h*, tendrán también fuerzas nulas.

Aislando al nudo *e* como cuerpo libre y tomando momentos respecto a la línea *ad*, se determina la fuerza en *ef*, y tomando momentos respecto a la línea *ab*, se encuentra la fuerza de *de*. Luego, con el método de los nudos, se obtienen las fuerzas en *ae* y *da*.

$$\Sigma M_e = 0, \text{ respecto a la línea } ad$$

$$(270)(2.4) - 6F_{ef} = 0$$

$$F_{ef} = 108 \text{ kN, compresión}$$

$$\Sigma M_e = 0, \text{ respecto a la línea } ab$$

$$(270)(1.8) - 6Y_{de} - 1.8Z_{de} = 0$$

$$486 - 6Y_{de} - (1.8)(6/5.4)(Y_{de}) = 0$$

$$Y_{de} = 60.75 \text{ compresión}$$

$$\Sigma Y = 0, \text{ en el nudo } e$$

$$Y_{ee} = 60.75 \text{ kN, compresión}$$

$$\Sigma Y = 0, \text{ en el nudo } d$$

$$Y_{de} = 60.75 \text{ kN, tensión}$$

Pasamos una sección imaginaria alrededor del nudo *f* y tomamos momentos respecto a la línea *ab* para encontrar la fuerza en *fg*. Usando el mismo cuerpo libre, tomamos momentos respecto a la línea *bc* para encontrar la fuerza en *af*.

$$\Sigma M_f = 0, \text{ respecto a la línea } ab$$

$$(360)(1.8) - 6F_{fg} = 0$$

$$F_{fg} = 108 \text{ kN, compresión}$$

$$\Sigma M_f = 0, \text{ respecto a la línea } bc$$

$$-(360)(2.4) + (108)(6) + 6X_{af} + 2.4Z_{af} = 0$$

$$X_{af} = 26.55 \text{ kN, compresión}$$

Puede usarse un procedimiento similar de momentos con el nudo *g* como cuerpo libre para determinar la fuerza en la barra *bg* y los valores de todas las fuerzas restantes pueden encontrarse con el método de los nudos. La suma de los resultados se da en la tabla 6.3.

Reacciones:

$$Z_a = 225 \uparrow \quad X_a = 9 \rightarrow$$

$$Z_b = 247.5 \uparrow \quad X_d = 9 \leftarrow$$

$$Z_e = 90 \uparrow \quad Y_e = 6.75 \uparrow$$

$$Z_d = 67.5 \uparrow \quad Y_b = 6.75 \downarrow$$

TABLA 6.3

Barra	Proyección			Longitud	Componente de fuerza			Fuerza
	X	Y	Z		X	Y	Z	
ab	9.3	0	0	9.3	+ 90	0	0	+ 99
bc	0	7.2	0	7.2	0	+ 27	0	+ 27
cd	9.3	0	0	9.3	+ 36	0	0	+ 36
da	0	7.2	0	7.2	0	+ 60.75	0	+ 60.75
ae	2.4	1.8	6	6.72	- 81	- 60.75	- 202.5	- 226.8
af	6.9	1.8	6	9.33	- 26.55	- 6.75	- 22.95	- 35.55
bf	2.4	1.8	6	6.72	- 135	- 101.25	- 337.5	- 378
bg	2.4	5.4	6	8.43	+ 36	+ 81	+ 90	+ 126.45
cg	2.4	1.8	6	6.72	- 36	- 27	- 90	- 100.8
ch	6.9	1.8	6	9.33	0	0	0	0
dh	2.4	1.8	6	6.72	0	0	0	0
de	2.4	5.4	6	8.43	- 27	- 60.75	- 67.5	- 94.95
ef	4.5	0	0	4.5	- 108	0	0	- 108
fg	0	3.6	0	3.6	0	- 108	0	- 108
gh	4.5	0	0	4.5	0	0	0	0
he	0	3.6	0	3.6	0	0	0	0

## 6.8 ANALISIS CON ECUACIONES SIMULTANEAS

En cada nudo de una armadura espacial pueden escribirse tres ecuaciones de equilibrio ( $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$  y  $\Sigma Z = 0$ ). Si la armadura es estáticamente determinada, las ecuaciones pueden resolverse para las fuerzas en las barras y para las componentes de reacción. Aunque el procedimiento matricial para resolver ecuaciones simultáneas se estudia en los capítulos 16 al 19, en este capítulo usaremos el método de solución por eliminación. Este método es en realidad bastante rápido en armaduras espaciales pequeñas, a pesar del gran número de ecuaciones, debido a las pocas incógnitas que aparecen en cada ecuación.

Antes de considerar la preparación de las ecuaciones simultáneas para toda una estructura, veremos la formulación de las ecuaciones correspondientes a un solo nudo. Si en un nudo se tienen solamente tres fuerzas desconocidas, es posible obtener sus valores escribiendo las tres ecuaciones de la Estática para ese nudo. (A veces este procedimiento no funcionará, porque las ecuaciones pueden ser linealmente dependientes.)

La preparación y solución de ecuaciones simultáneas para armaduras espaciales puede simplificarse utilizando *coeficientes de tensión* [1]. El coeficiente de tensión de una barra es igual a su fuerza dividida entre por su longitud. En cada una de las siguientes expresiones para componentes de fuerza, el valor  $F/\ell$  se reemplaza por  $T$  que es dicho coeficiente.

$$F_x = \frac{\ell_x}{\ell} F - \frac{F}{\ell} \ell_x = T \ell_x$$

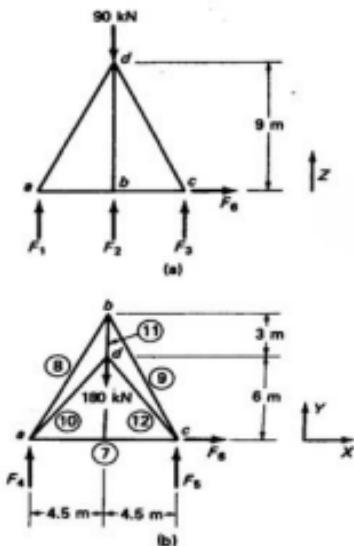


Figura 6.7

$$F_y = \frac{\ell_y}{\ell} F = \frac{F}{\ell} \ell_y = T \ell_y$$

$$F_z = \frac{\ell_z}{\ell} F = \frac{F}{\ell} \ell_z = T \ell_z$$

La armadura espacial de la fig. 6.3 se ha vuelto a dibujar en la fig. 6.7 y por conveniencia en la preparación de las ecuaciones, las barras se han numerado como se muestra en la figura. Las siguientes ecuaciones están escritas para el nudo *d* usando coeficientes de tensión y suponiendo que todas las barras trabajan a tensión. Las reacciones se suponen actuando en las direcciones mostradas.

$$\Sigma X = -4.5T_{10} + 4.5T_{12} = 0$$

$$\Sigma Y = -6T_{10} + 3T_{11} - 6T_{12} = 180$$

$$\Sigma Z = -9T_{10} + 9T_{11} - 9T_{12} = 90$$

La manera usual de resolver estas ecuaciones por eliminación no debe presentar ningún problema; sin embargo, el procedimiento de eliminación descrito aquí [2]

presenta ventajas cuando se tiene un número grande de ecuaciones. Primero, los coeficientes de ambos miembros de la ecuación se escriben de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc} -4.5 & 0 & 4.5 & 0 \\ -6 & 3 & -6 & 180 \\ -9 & -9 & -9 & 90 \end{array}$$

Cada ecuación se divide entre su primer coeficiente no nulo, resultando:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -0.5 & 1 & -30 \\ 1 & 1 & 1 & -10 \end{array}$$

La primera ecuación se deja tal cual y cada una de las otras ecuaciones que no comiencen con un coeficiente nulo, se restan de la primera:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0.5 & -2 & 30 \\ 0 & -1 & -2 & 10 \end{array}$$

Estas ecuaciones se dividen cada una entre su primer coeficiente no nulo con los siguientes resultados:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 60 \\ 0 & 1 & 2 & -10 \end{array}$$

El proceso se repite sustrayendo del segundo renglón (fila) todos los demás (del tercero en adelante) en los que el segundo término no sea cero y dividiendo los renglones resultantes entre su primer término no nulo. El resultado final es:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 60 & \\ 1 & & -11.667 & \end{array}$$

Estos renglones tienen ahora la forma de una matriz triangular (véase el apéndice B) y corresponden a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} T_{10} & - T_{12} = 0 \\ T_{11} & - 4T_{12} = 60 \\ & T_{12} = -11.667 \end{aligned}$$

El valor de  $T_{12}$  se calcula con la última ecuación;  $T_{11}$ , con la penúltima, etc. Los resultados son:  $T_{12} = -11.667$ ;  $T_{11} = 13.332$  y  $T_{10} = -11.667$ . Las fuerzas

en las barras se obtienen multiplicando los coeficientes de tensión por las longitudes de éstas.

$$F_{10} = (11.72)(-11.667) = -136.74 \text{ kN}$$

$$F_{11} = (-9.49)(-13.332) = +126.52 \text{ kN}$$

$$F_{12} = (11.72)(-11.667) = -136.74 \text{ kN}$$

De la misma manera se escriben al final de este párrafo las ecuaciones para toda la armadura espacial de la fig. 6.7. Cuando no se disponga de una computadora y se use el procedimiento anterior de solución, es más práctico comenzar en nudos que tengan sólo tres incógnitas, determinar sus valores y usarlos en las últimas ecuaciones en vez de considerar todas las ecuaciones para toda la estructura al mismo tiempo. Aquí agruparemos todas las ecuaciones para la armadura de la fig. 6.7 en la forma siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{Nudo } a \\ \left\{ \begin{array}{rcl} 9T_7 + 4.5T_8 + 4.5T_{10} & = & 0 \\ F_4 + 9T_8 + 6T_{10} & = & 0 \\ F_1 + 9T_{10} & = & 0 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{ll} (7) \\ (4) \\ (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Nudo } b \\ \left\{ \begin{array}{rcl} -4.5T_8 + 4.5T_9 & = & 0 \\ -9T_8 - 9T_9 - 3T_{11} & = & 0 \\ F_2 + 9T_{11} & = & 0 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{ll} (8) \\ (9) \\ (2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Nudo } c \\ \left\{ \begin{array}{rcl} F_6 - 9T_7 - 4.5T_9 - 4.5T_{12} & = & 0 \\ F_3 + 9T_9 + 6T_{12} & = & 0 \\ F_3 + 9T_{12} & = & 0 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{ll} (6) \\ (5) \\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Nudo } d \\ \left\{ \begin{array}{rcl} -4.5T_{10} + 4.5T_{12} & = & 0 \\ -6T_{10} + 3T_{11} - 6T_{12} & = & 180 \\ -9T_{10} - 9T_{11} - T_{12} & = & 90 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{ll} (12) \\ (11) \\ (10) \end{array}$$

Para facilitar la solución de las ecuaciones es muy importante ordenarlas adecuadamente. Si no se procede así, el trabajo implicado en resolverlas resulta muy grande. Las ecuaciones deben arreglarse lo más posible a la forma matricial triangular final deseada. En la tabla 6.4, las ecuaciones están ordenadas de acuerdo con los números dados a la derecha de cada una de las ecuaciones precedentes. Cada ecuación se ha dividido entre su primer coeficiente no nulo.

Estas ecuaciones están ordenadas casi en la forma deseada final. Siguiendo el procedimiento previamente descrito, pueden obtenerse los resultados mostrados en la tabla 6.5. Se obtienen por supuesto los mismos resultados que en el ejemplo 6.1.

TABLA 6.4

$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$T_7$	$T_8$	$T_9$	$T_{10}$	$T_{11}$	$T_{12}$	Carga
1	1	1	1	1	1		9		9	9	9	
							9		6		6	
								9	-4.5		-4.5	
									0.5			
										0.5		
											0.33	
											1	-10
											1	-30
											1	
												-1

## 6.9 SOLUCIONES CON LA COMPUTADORA

El disco incluido en este libro contiene un programa para analizar armaduras espaciales; en el capítulo 20 se usará para analizar una estructura de ese tipo.

## PROBLEMAS

En los problemas 6.1 al 6.8, calcular las componentes de reacción y las fuerzas en las barras de las armaduras espaciales mostradas.

5.1

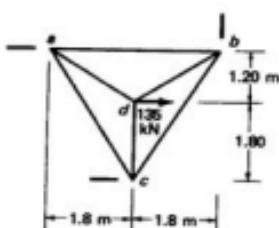
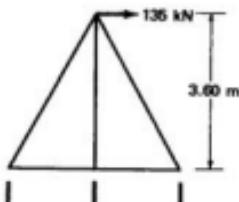
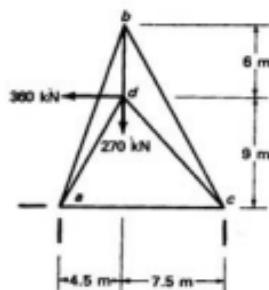
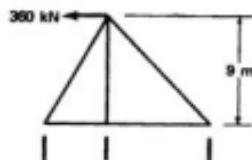


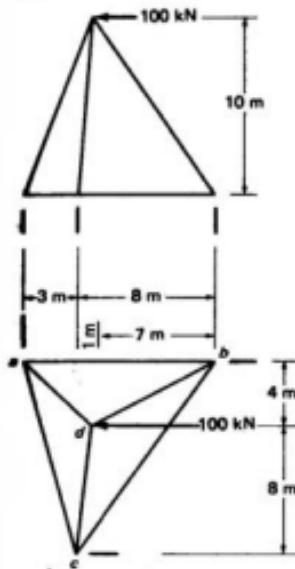
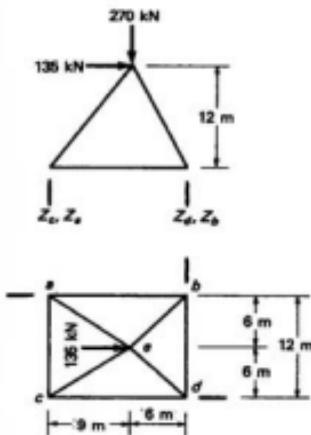
TABLA 6.5

$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$T_7$	$T_8$	$T_9$	$T_{10}$	$T_{11}$	$T_{12}$	Carga
1								9		9		
	1		1				9		6		9	
		1		1		9		6		6		
			1	1	-9		-4.5		0.5	-4.5		
				1	0.5							
					1	-1						
						1	0.17					
							1	1	1	-10		
								1		13.33		
									1	-11.67		

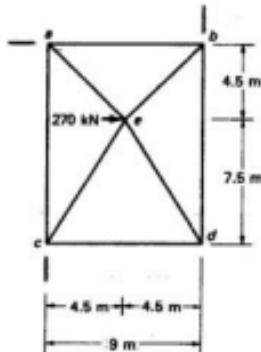
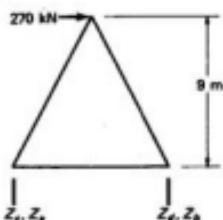
6.2 (Resp.:  $Z_b = 162 \text{ kN} \downarrow$ ,  $Y_c = 168.75 \text{ kN} \downarrow$ ,  $ad = -557.1 \text{ kN}$ ,  $bc = -45.45 \text{ kN}$ ,  $bd = +194.4 \text{ kN}$ )



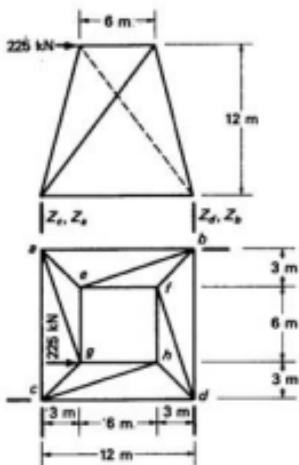
6.3

6.4 (Resp.:  $X_a = 67.5 \text{ kN} \leftarrow$ ,  $Z_b = 135 \text{ kN} \uparrow$ ,  $ab = 67.5 \text{ kN}$ ,  $ce = 0$ ,  $be = -165.6 \text{ kN}$ )

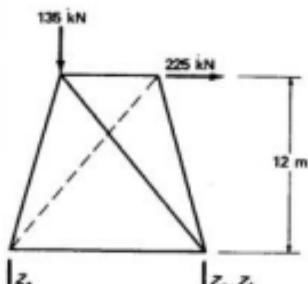
6.5



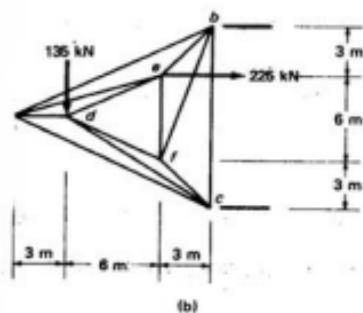
6.6 (Resp.:  $cd = +56.25 \text{ kN}$ ,  $gh = -225 \text{ kN}$ ,  $bf = 0$ ,  $ch = +286.65 \text{ kN}$ ,  $Z_c = 225 \text{ kN} \downarrow$ ,  $Y_d = 56.25 \text{ kN} \uparrow$ )



6.7

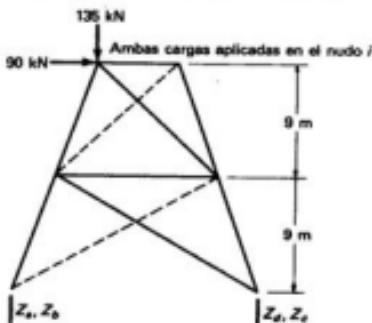


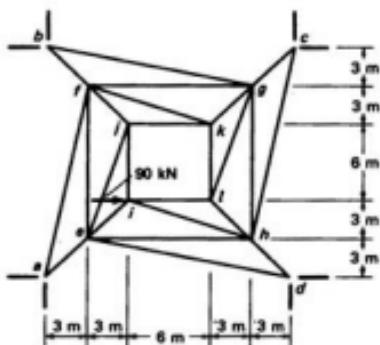
(a)



(b)

- 6.8 (Resp.:  $de = -66.6 \text{ kN}$ ,  $eh = +67.5 \text{ kN}$ ,  $fi = -37.35 \text{ kN}$ ,  $hi = -147.15 \text{ kN}$ ,  $X_b = 14.98 \text{ kN} \rightarrow$ ,  $Y_d = 30 \text{ kN} \downarrow$ )





6.9 Resolver el problema 6.1 empleando ecuaciones simultáneas para toda la armadura

6.10 Resolver el problema 6.3 empleando ecuaciones simultáneas para toda la armadura. (Resp.:  $X_b = 66.7 \text{ kN} \rightarrow$ ,  $Z_s = 90.9 \text{ kN} \uparrow$ ,  $ad = -104.5 \text{ kN}$ ,  $bc = -43.7 \text{ kN}$ ,  $cd = 0$ ).

#### REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. R. V. Southwell, "Primary Stress Determination in Space Frames," *Engineering* 109 (1920) 165.
2. G. L. Rogers y M. L. Causey, *Mechanics of Engineering Structures* (Nueva York Wiley, 1962), págs. 27-31.

## Capítulo 7

# Líneas de influencia

### 7.1 INTRODUCCION

En los capítulos anteriores analizamos estructuras que soportaban cargas fijas en un lugar. Ya se tratase de vigas, marcos o armaduras o si las funciones buscadas eran cortantes, reacciones, fuerzas en los elementos etc., las cargas eran siempre estacionarias. Sin embargo, el ingeniero en la práctica rara vez tiene que tratar con estructuras que soportan únicamente cargas fijas. Casi todas las estructuras están sujetas a cargas que se mueven a lo largo de sus claros. Tal vez el ejemplo más evidente sea el de los puentes sujetos al tránsito vehicular, pero los edificios industriales con grúas viajeras, los edificios de oficinas con cargas de mobiliario y humanas, las estructuras que soportan bandas transportadoras etc., se clasifican en la misma categoría.

Todo elemento de una estructura debe diseñarse para las condiciones más severas que puedan desarrollarse en él. El ingeniero coloca las cargas vivas en las posiciones donde producirán esas condiciones. Las posiciones críticas para colocar las cargas vivas no son las mismas en todos los elementos. Por ejemplo, la carga máxima en una barra de una armadura de puente puede ocurrir cuando se tenga una línea de camiones de extremo a extremo del puente, mientras que la fuerza máxima en alguna otra barra puede ocurrir cuando los camiones se encuentren situados en una sola parte del puente. Las fuerzas máximas en ciertas vigas y columnas de un edificio ocurrirán cuando las cargas vivas se concentren en ciertas partes del edificio, mientras que las fuerzas máximas en otras vigas y columnas ocurrirán cuando las cargas estén colocadas en algún otro lugar.

En algunas ocasiones es posible, por inspección, determinar dónde colocar las cargas para obtener las fuerzas críticas, pero en muchas otras ocasiones es necesario recurrir a ciertos criterios y diagramas para encontrar esas localidades. El más útil de estos recursos es la línea de influencia.



Puente Tennessee-Tombigbee sobre vía fluvial en Mississippi. (Cortesía del Departamento de Caminos del Edo. de Mississippi.)

## 7.2 DEFINICIÓN DE LA LÍNEA DE INFLUENCIA

La línea de influencia, usada por primera vez en Berlín en 1867 por el Profesor E. Winkler [1], muestra gráficamente cómo el movimiento de una carga unitaria a lo largo de una estructura afecta los elementos mecánicos en ésta. Los elementos mecánicos que pueden representarse son momentos flexionantes, fuerzas cortantes y normales, etc., así como reacciones y deflexiones.

**Una línea de influencia puede definirse como un diagrama cuyas ordenadas muestran la magnitud y carácter de algún elemento mecánico de una estructura cuando una carga unitaria se mueve a lo largo de ésta. Cada ordenada del diagrama da el valor del elemento mecánico cuando la carga está situada en el lugar asociado a esa ordenada particular.**

Las líneas de influencia se usan principalmente para determinar dónde colocar las cargas vivas para que éstas causen fuerzas máximas. También pueden usarse para calcular esas fuerzas. El procedimiento para dibujar los diagramas es simplemente graficar los valores de la función en estudio como ordenadas para varias posiciones de la carga unitaria a lo largo del claro y luego conectar esas ordenadas en forma continua. El lector debe tratar de representarse mentalmente a la carga móvil en el claro e imaginar qué le sucede a la función en estudio durante el movimiento. El estudio de las líneas de influencia puede incrementar considerablemente el conocimiento de lo que le pasa a una estructura bajo diferentes condiciones de carga.

El estudio de las siguientes secciones debe aclarar con precisión qué cosa es una línea de influencia. La parte mecánica de desarrollar los diagramas es muy sencilla una vez que se ha entendido perfectamente la definición. No se introducirá aquí

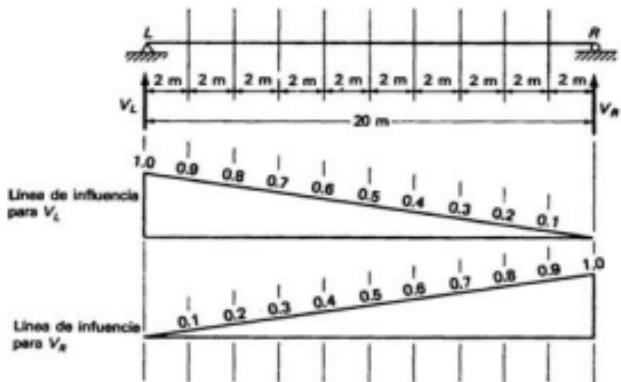


Figura 7.1

ningún principio básico nuevo; más bien se presenta un método de procesar información en una forma útil y conveniente.

### 7.3 LINEAS DE INFLUENCIA PARA LAS REACCIONES DE UNA VIGA SIMPLE

En la fig. 7.1 se muestran las líneas de influencia para las reacciones de una viga simple. Se considera primero la variación de la reacción izquierda  $V_L$  al moverse una carga unitaria de izquierda a derecha a lo largo de la viga. Cuando la carga está directamente sobre el apoyo izquierdo,  $V_L = 1$ ; cuando está a 2 metros del apoyo izquierdo,  $V_L = 18/20$  o sea 0.9; cuando está a 4 metros a la derecha,  $V_L = 16/20$  o sea 0.8; etc.

Los valores de  $V_L$  se muestran a intervalos de 2 metros al moverse la carga unitaria a lo largo del claro. Estos valores se encuentran sobre una línea recta porque ellos cambian uniformemente para intervalos iguales de la carga. Para cada intervalo de 2 metros, las ordenadas cambian en 0.1. Los valores de  $V_R$ , de la reacción derecha, están graficados igualmente a intervalos de 2 metros para la carga unitaria móvil. Para cada lugar de la carga unitaria la suma de las ordenadas de los dos diagramas en cualquier punto es igual a 1.

### 7.4 LINEAS DE INFLUENCIA PARA FUERZAS CORTANTES EN VIGAS SIMPLES

En la fig. 7.2 se muestran las líneas de influencia para la fuerza cortante en dos secciones de una viga simple. La siguiente convención de signos se usará aquí para

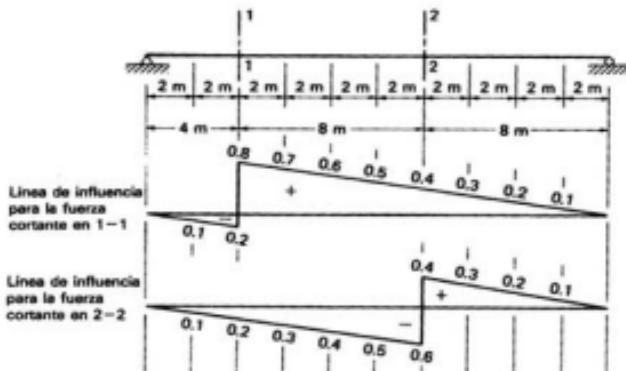
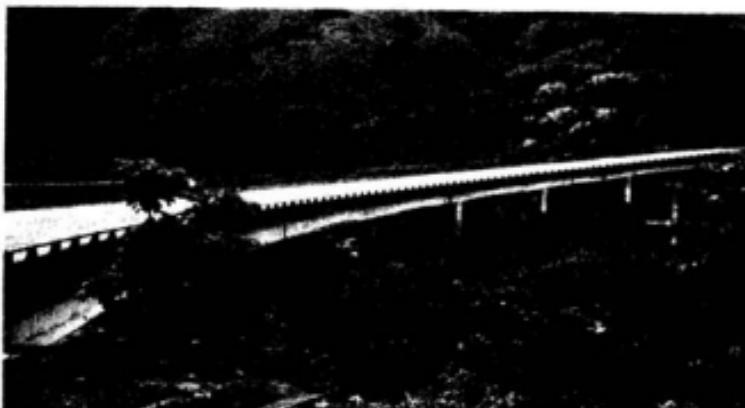


Figura 7.2

la fuerza cortante: se tendrá una fuerza cortante positiva cuando la resultante de las fuerzas transversales a la izquierda de una sección esté dirigida hacia arriba, o cuando la resultante de las fuerzas a la derecha de la sección esté dirigida hacia abajo.



Puente Kalihiwai de concreto prevaciado cerca de Kilavea, Kauai, Hawaii.  
(Cortesía Departamento de Transporte de Hawai.)

Al colocar la carga unitaria sobre el apoyo izquierdo, no se genera fuerza cortante en ninguna de las dos secciones. Al mover la carga unitaria 2 metros hacia la derecha del apoyo izquierdo resulta una reacción en este apoyo de 0.9, y la suma de las fuerzas a la izquierda de la sección 1 – 1 es de 0.1 hacia abajo, lo que da una cortante de – 0.1. Cuando la carga está 4 metros a la derecha del apoyo izquierdo y a una distancia infinitesimal a la izquierda de la sección 1 – 1, la fuerza cortante a la izquierda es de – 0.2. Si la carga se mueve una distancia muy pequeña a la derecha de la sección 1 – 1, la resultante de las fuerzas a la izquierda de la sección será de 0.8 dirigida hacia arriba, lo que da una fuerza cortante de + 0.8. Si continuamos moviendo la carga hacia el apoyo derecho variarán los valores de la fuerza cortante en la sección 1 – 1. Estos valores están graficados a intervalos de 2 metros para la carga unitaria. La línea de influencia para la fuerza cortante en la sección 2 – 2 se desarrolla de la misma manera.

Obsérvese que la pendiente de la línea de influencia de la fuerza cortante, a la izquierda de la sección considerada, debe ser igual a la pendiente de la línea de influencia a la derecha de la sección. Por ejemplo, en la fig. 7.2 para la línea de influencia en la sección 1 – 1, la pendiente a la izquierda es  $0.2/4 = 0.05$ , mientras que la pendiente a la derecha es de  $0.8/16 = 0.05$ . Esta información es muy útil al dibujar otras líneas de influencia de fuerza cortante.

## 7.5 LINEAS DE INFLUENCIA PARA MOMENTOS EN VIGAS SIMPLES

En la fig. 7.3 están graficadas las líneas de influencia para el momento flexionante en las mismas secciones de la viga usada en la fig. 7.2 para la fuerza cortante. A manera de repaso, un momento positivo causa tensión en las fibras inferiores de

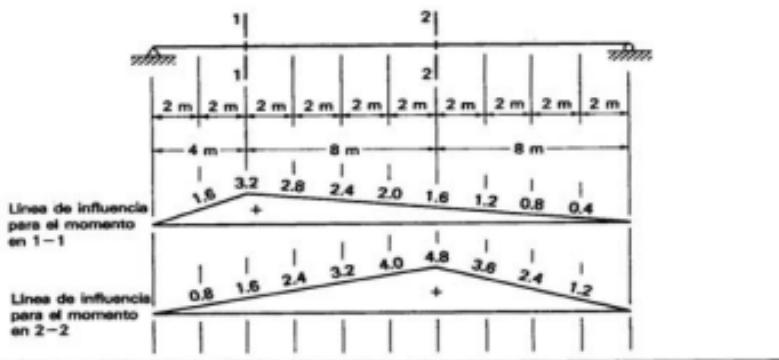


Figura 7.3

una viga, y ocurre en una sección particular cuando la suma de los momentos de todas las fuerzas a la izquierda tienen el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, o cuando la suma a la derecha tiene sentido opuesto. Los momentos se consideran en cada sección para intervalos de 2 metros de la carga unitaria.

La diferencia principal entre los diagramas de cortante y momento comparados con las líneas de influencia debe ser ahora clara. *Un diagrama de cortante o de momento, muestra la variación de estos elementos mecánicos a lo largo de toda la estructura para cargas fijas en un lugar. Una línea de influencia para el cortante o el momento, muestra la variación de esa función en una sección de la estructura causada por el movimiento de una carga unitaria de un extremo al otro de la estructura.*

Las líneas de influencia para funciones de estructuras estáticamente determinadas consisten en un conjunto de líneas rectas. Un ingeniero experimentado será capaz de calcular los valores de la función en estudio en unas cuantas posiciones críticas, y conectar los valores graficados con líneas rectas. Sin embargo, se debe ser muy cuidadoso y deberá calcular el valor de la función para suficientes posiciones de la carga unitaria. Las formas de las líneas de influencia para las fuerzas en las barras de una armadura, son con frecuencia engañosas en su aparente simplicidad. Es mejor graficar ordenadas para varias posiciones adicionales de la carga que no hacerlo con un valor esencial.

En la fig. 7.4 están graficadas varias líneas de influencia de momentos, cortantes y reacciones para una viga con voladizos.

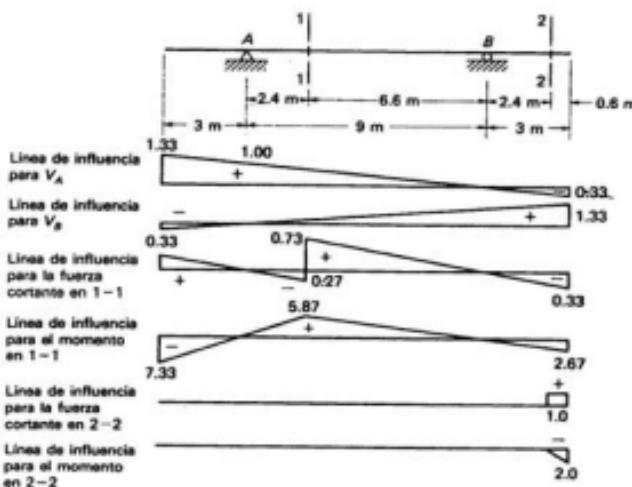


Figura 7.4

## 7.6 LINEAS DE INFLUENCIA CUALITATIVAS

Las líneas de influencia trazadas en las secciones anteriores con ayuda de ciertos valores numéricos se denominan *líneas de influencia cuantitativas*. Sin embargo, es posible bosquejar esos diagramas con suficiente precisión para muchos fines prácticos sin tener que calcular ningún valor numérico. Estos diagramas se denominan *líneas de influencia cualitativas*.

Un análisis detallado de los principios en que se basan estos bosquejos se presenta en el capítulo 12 junto con consideraciones de su utilidad. Tal análisis se difiere hasta que se aprenda algo sobre el cálculo de flexiones. Las líneas de influencia cualitativas están basadas en un principio propuesto por el profesor alemán Heinrich Müller-Breslau. El principio dice lo siguiente: **La línea elástica de una estructura representa a cierta escala la línea de influencia de una función, tal como una reacción, una fuerza cortante, un momento flexionante etc., si se permite que la función considerada actúe a lo largo de una pequeña distancia o ángulo.** En otras palabras, la estructura traza su propia línea de influencia cuando se le da un cierto desplazamiento.

Como primer ejemplo consideraremos la línea de influencia cualitativa para la reacción izquierda de la viga mostrada en la fig. 7.5(a). Se remueve la restricción en el apoyo izquierdo y se le da a la viga en ese lugar un desplazamiento en la dirección de la reacción tal como se muestra en la parte (b) de la figura. Cuando el extremo izquierdo de la viga se empuja hacia arriba, el área entre las posiciones original y final de la viga es la línea de influencia a cierta escala para  $V_L$ .

De manera similar se bosquejan las líneas de influencia para las reacciones izquierda y derecha de la viga en la fig. 7.6.

Como tercer ejemplo trazaremos la línea de influencia para el momento en la sección 1 - 1 de la viga de la fig. 7.7. Este diagrama puede obtenerse cortando la viga en la sección considerada y aplicando momentos en los extremos cortados. Puede verse en la figura que el momento en cada lado de la sección es positivo con respecto al segmento de la viga en ese lado de la sección. La línea elástica resultante es la línea de influencia cualitativa para el momento en la sección 1 - 1.

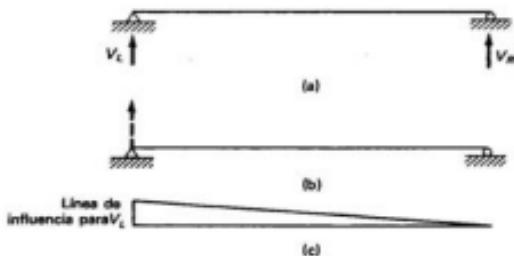


Figura 7.5

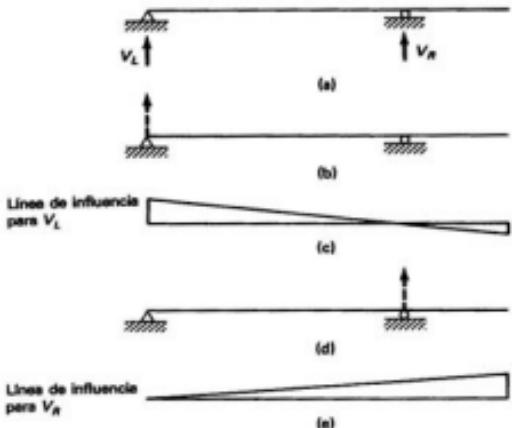


Figura 7.6

Para trazar una línea de influencia cualitativa para la fuerza cortante, se supone a la viga cortada en la sección bajo consideración y se aplican fuerzas verticales, a cada lado de la sección cortada, de la naturaleza necesaria para generar una fuerza cortante positiva [véase la fig. 7.8(b)]. Para entender la dirección usada para esas fuerzas, obsérvese que éstas se aplican a la izquierda y a la derecha de la sección

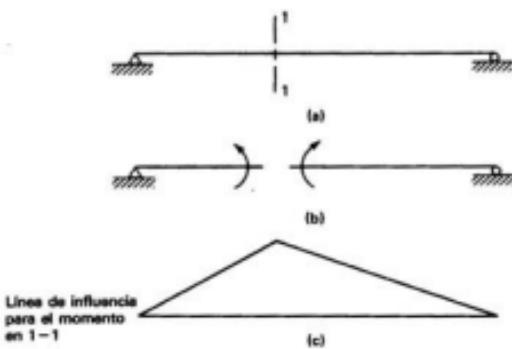


Figura 7.7

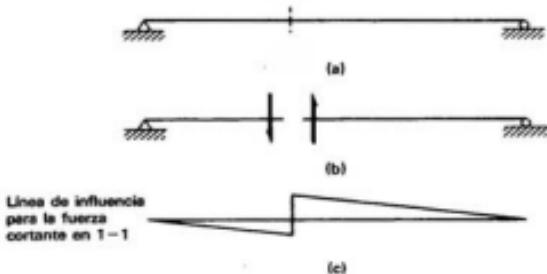


Figura 7.8

cortada de manera que produzcan un cortante positivo en cada segmento. En otras palabras, la fuerza en el segmento izquierdo tiene la dirección de una fuerza cortante positiva aplicada desde el lado derecho ( $\downarrow$ ) y viceversa. En la fig. 7.9 se presentan ejemplos adicionales de líneas de influencia cualitativas.

El principio de Müller-Breslau es útil para bosquejar líneas de influencia de estructuras estáticamente determinadas, pero su mayor utilidad es en las estáticamente

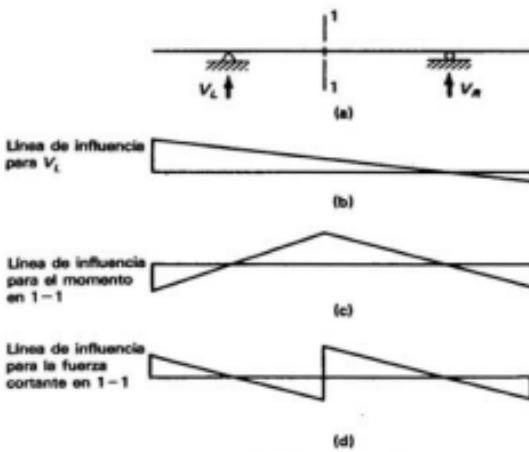


Figura 7.9

indeterminadas. Aunque los diagramas se trazan exactamente igual que antes, debe observarse que ahora constan de líneas curvas en vez de rectas, como en el caso de las estructuras estáticamente determinadas. La fig. 7.10 muestra varios ejemplos de tales casos.

### 7.7 USOS DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA; CARGAS CONCENTRADAS

Las líneas de influencia son los valores graficados de funciones estructurales para varias posiciones de una carga unitaria. Si se tiene la línea de influencia para una función particular de una estructura, puede obtenerse inmediatamente el valor de la función para una carga concentrada en cualquier punto de la estructura. La viga de la fig. 7.1 se muestra con su reacción izquierda y la línea de influencia para su reacción izquierda se usan para ilustrar esta afirmación. Una carga concentrada de 1 kN a 2 m a la derecha del apoyo izquierdo ocasiona una  $V_L$  igual a 0.8 kN. Si se colocase una carga de 800 kN en el mismo lugar,  $V_L$  sería de 800 veces el valor de 0.8 o 640 kN.

El valor de una función debido a una serie de cargas concentradas se obtiene rápidamente multiplicando cada carga concentrada por la correspondiente ordenada

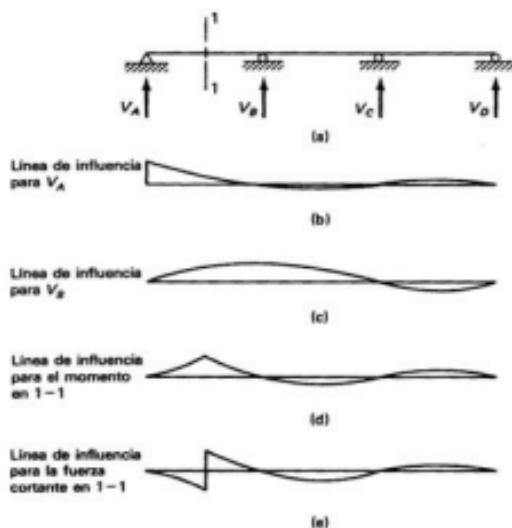
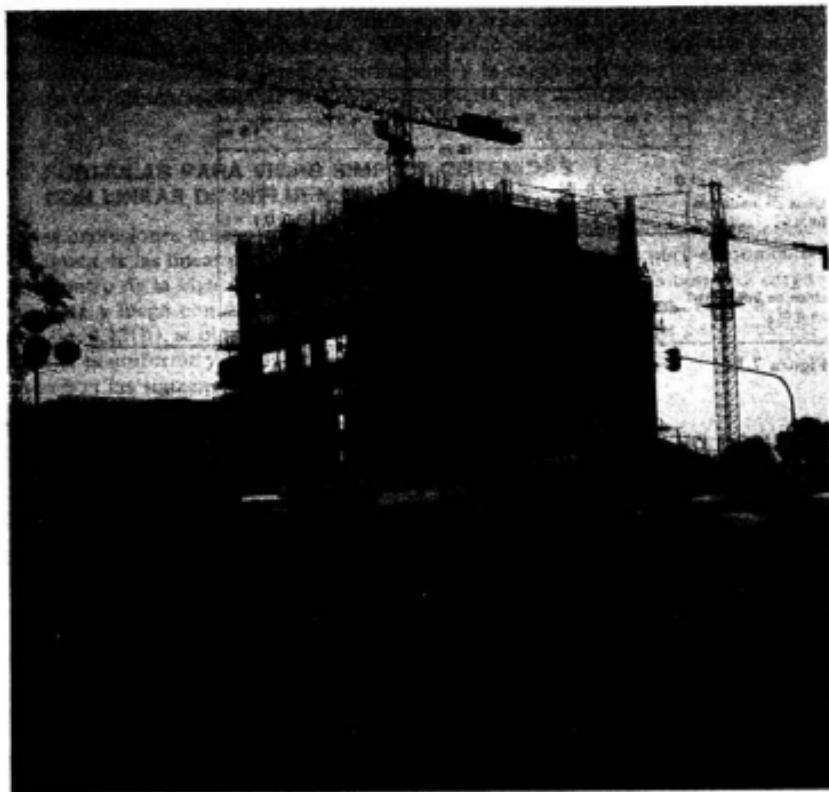


Figura 7.10



Edificio del hotel México Plaza en la Cd. de México, (Cortesía de RSI.)

de la línea de influencia para esa función. Cargas de 675 kN a 3 m a la derecha de  $L$  en la fig. 7.1 y de 900 kN a 8 m a la derecha de  $L$ , ocasionan una  $V_L$  igual a  $(675)(0.7) + (900)(0.2)$ , o 652.5 kN.

En la fig. 7.11 se muestran las líneas de influencia para la reacción izquierda y para el momento flexionante en el centro del claro de una viga simple; los valores de esas funciones se calculan para las cargas mostradas.

$$V_L = (90)(0.8) + (135)(0.4) + (135)(0.1) = 139.5 \text{ kN}$$

$$M_E = (90)(1.5) + (135)(2.5) + (135)(0.75) = 573.75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

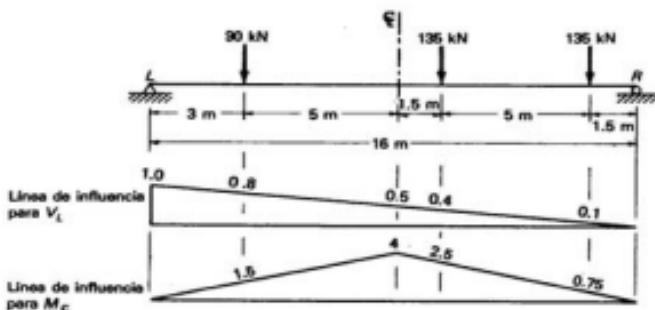


Figura 7.11

### 7.8 USOS DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA; CARGAS UNIFORMES

El valor de una cierta función de una estructura puede obtenerse a partir de la línea de influencia, cuando la estructura está cargada uniformemente, multiplicando el área de la línea de influencia por la intensidad de la carga uniforme. El siguiente análisis mostrará que esto es correcto.

Una carga uniforme de intensidad  $w$  kN/m es equivalente a una serie de cargas más pequeñas continuas de  $(w)(1/10)$  kN sobre cada 1/10 m, o  $w dx$  kN sobre cada  $dx$  de longitud. Considerando cada longitud de  $dx$  cargada con una carga concentrada igual a  $w dx$ , el valor de la función en estudio para una de esas pequeñas cargas es  $(w dx)(y)$ , donde  $y$  es la ordenada de la línea de influencia en ese punto. El efecto de todas esas cargas concentradas es igual a  $\int wy dx$ . Esta expresión muestra que el efecto de una carga uniforme en cierta función de una estructura es igual a la intensidad de la carga uniforme ( $w$ ) por el área de la línea de influencia ( $\int y dx$ ) a lo largo de la parte de la estructura cargada con la carga uniforme.

Suponiendo que la viga de la fig. 7.11 está cargada con una carga uniforme de 50 kN/m en todo el claro, los valores de  $V_L$  y  $M_E$  serán los siguientes:

$$V_L = (50)(1/2 \times 1.0 \times 16) = 400 \text{ kN}$$

$$M_E = (50)(1/2 \times 4.0 \times 16) = 1600 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Si la carga uniforme se extiende desde el extremo izquierdo hasta el centro de la viga, los valores de  $V_L$  y  $M_E$  serán:

$$V_L = (50) \left( \frac{1.0 + 0.5}{2} \times 8 \right) = 300 \text{ kN}$$

$$M_E = (50) \left( \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \right) = 800 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Si una estructura soporta carga uniforme y cargas concentradas, el valor de la función en estudio puede encontrarse multiplicando cada carga concentrada por su respectiva ordenada en la línea de influencia, y la carga uniforme por el área de la línea de influencia opuesta a la sección cubierta por la carga uniforme.

### 7.9 FORMULAS PARA VIGAS SIMPLES OBTENIDAS CON LINEAS DE INFLUENCIA

Varias expresiones útiles para los momentos en vigas simples pueden determinarse con ayuda de las líneas de influencia. Se obtendrán aquí fórmulas para el momento en el centro de la viga de la fig. 7.12(a), cargando primero la viga con una carga uniforme y luego con una carga concentrada en el centro del claro. Para la viga de la fig. 7.12(b), se obtendrán fórmulas para el momento en cualquier punto cuando la carga es uniforme y cuando la carga está concentrada en dicho punto. Estas fórmulas son las siguientes:

(a) Carga uniforme	(b) Carga uniforme
$M_{\text{C}} = (w) \left( \frac{1}{2} \times \ell \times \frac{\ell}{4} \right) = \frac{w\ell^2}{8}$	$M_{1-1} = (w) \left( \frac{1}{2} \times \frac{ab}{\ell} \times \ell \right) = \frac{wab}{2}$
Carga concentrada $P$ en el centro	Carga concentrada $P$ en la del claro: sección 1-1:
$M_{\text{C}} = \frac{Pt}{4}$	$M_{1-1} = \frac{Pab}{\ell}$

### 7.10 COLOCACION DE LAS CARGAS VIVAS PARA OBTENER VALORES MAXIMOS CON AYUDA DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA

Las vigas deben diseñarse para soportar satisfactoriamente los valores máximos de las fuerzas cortantes y momentos causados por las cargas a las que estén sometidas. Para ilustrar esto, la viga de la fig. 7.9 y su línea de influencia para el momento en la sección 1-1 se presentan nuevamente en la fig. 7.13(a) y (b). Se desea obtener el máximo momento positivo posible en la sección 1-1, para una carga muerta uniforme y una carga viva uniforme, más impacto.

La carga muerta uniforme, que es el peso de la estructura, se colocará de extremo a extremo de la viga como se muestra en la parte (c) de la figura. La carga unitaria causó momento positivo en la sección 1-1 sólo cuando estaba colocada entre los apoyos  $A$  y  $B$ . Entonces en (c), la carga viva uniforme incrementada por el porcentaje de impacto sólo se coloca entre  $A$  y  $B$ . Si se hubiese tenido una carga viva concentrada, se habría colocado junto con el porcentaje de impacto en la sec-

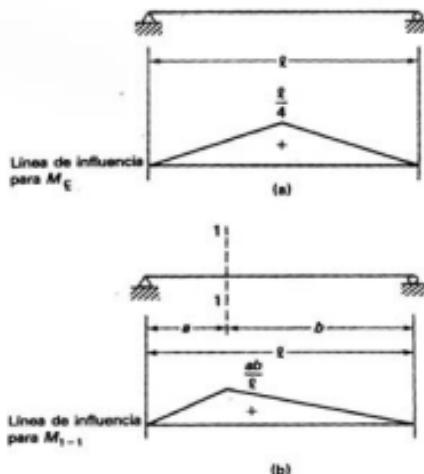


Figura 7.12

ción 1–1 (ya que la carga unitaria causó el máximo momento positivo cuando se colocó en ese punto). Ahora que las cargas se han situado para causar el máximo momento positivo en la sección 1–1, ese momento puede calcularse usando las ordenadas de la línea de influencia o las ecuaciones de la Estática.

De la misma manera suponemos ahora que se necesita el máximo momento negativo en la sección 1–1. Para este caso, las cargas se colocarían como se muestra en la fig. 7.13(d). Si se hubiese tenido una carga viva concentrada, se habría colocado en alguno de los extremos de la viga, o sea, en aquel con la mayor ordenada de la línea de influencia.

### 7.11 COLOCACION DE LAS CARGAS VIVAS PARA CAUSAR VALORES MAXIMOS CON BASE EN LA CURVATURA MAXIMA

En la sección anterior se usó una línea de influencia para determinar las posiciones críticas de las cargas vivas para obtener momentos máximos. Los mismos resultados pueden obtenerse (y tal vez más fácilmente en muchos casos) considerando la línea elástica o curvatura de un elemento bajo carga. Si las cargas vivas se colocan de manera que causen la máxima curvatura en un punto particular, éstas flexionarán al elemento al máximo en ese punto, lo que significa que habrán generado ahí el mayor momento posible.

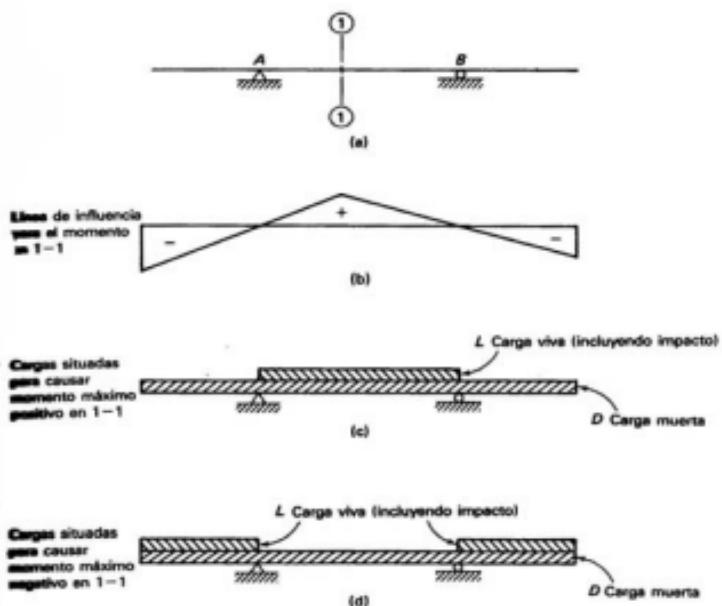


Figura 7.13

Como primera ilustración, se desea causar el momento positivo máximo en la sección 1–1 de la viga de la fig. 7.14 con las mismas cargas consideradas en la sección anterior. En la parte (b) de la figura está dibujada la forma deflexionada de la viga en la sección 1–1 cuando ocurre ahí un momento positivo; el resto de la viga deflexionada se muestra con líneas interrumpidas. La carga muerta se coloca a lo largo de toda la viga mientras que la carga viva incrementada por impacto, sólo se coloca en aquellas localidades donde exagerarán la forma deflexionada, o sea, entre *A* y *B*.

Una situación similar se muestra en la parte (c) de la figura, donde se desea obtener el máximo momento negativo en la sección 1–1. Se dibuja la forma deflexionada de la viga cuando se presenta un momento negativo en 1–1. Para exagerar esta deflexión negativa hacia arriba, las cargas vivas deben colocarse en los voladizos de la viga.

En la viga de cuatro claros de la fig. 7.15 se desea colocar las cargas vivas de modo que causen momento máximo negativo en el apoyo *B* y momento máximo

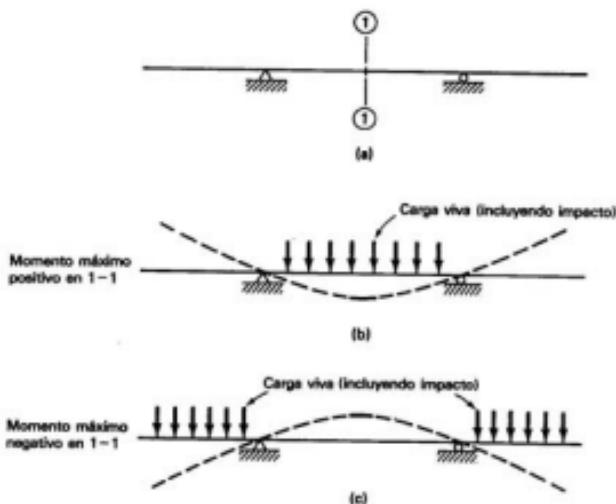


Figura 7.14

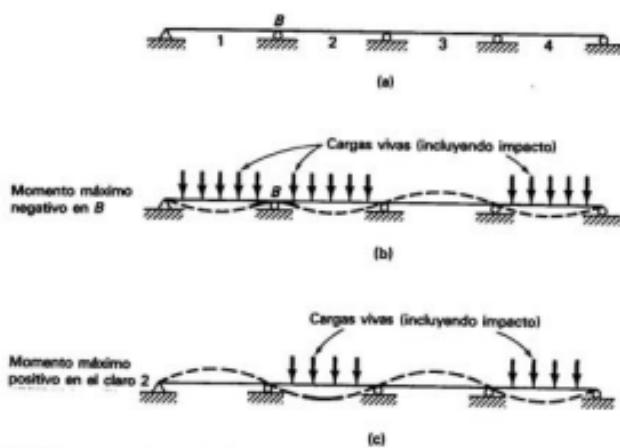


Figura 7.15

positivo en el claro 2. En la parte (b) de la figura está dibujada la forma deflexionada de la viga sobre  $B$  cuando actúa ahí un momento negativo; el resto de la viga deflexionada se ha trazado con una línea interrumpida. Puede verse que las cargas vivas deben colocarse en los claros 1, 2 y 4 para exagerar el momento negativo en  $B$ . En la parte (c) de la figura se desea obtener el momento máximo positivo en el claro 2. Se sigue un procedimiento similar y se encuentra que las cargas vivas deben colocarse en los claros 2 y 4.

## 7.12 LINEAS DE INFLUENCIA PARA ARMADURAS

La variación de las fuerzas en las barras de una armadura, debido a cargas móviles, es de gran importancia. Las líneas de influencia pueden dibujarse y usarse para calcular las fuerzas, o pueden esbozarse sin calcular los valores de las ordenadas y sólo usarse para situar las cargas móviles para que causen fuerzas máximas o mínimas.

El procedimiento usado para preparar líneas de influencia en armaduras es muy parecido al usado en vigas. En la siguiente sección se describe la manera exacta de aplicar cargas a una armadura de puente. La aplicación de cargas a una armadura de techo es parecida.

## 7.13 DISPOSICION DE LOS SISTEMAS DE PISO PARA PUENTES

La disposición de los elementos de piso de un puente debe estudiarse con todo cuidado para entender bien cómo se aplican las cargas a una armadura. Probablemente, el sistema de piso más común consiste en una losa de concreto sostenida por medio de largueros de acero colocados paralelamente a las armaduras. Dichos largueros se extienden totalmente en cada panel y están apoyados en sus extremos en vigas transversales que se unen a los puntos de conexión o nudos de la armadura (fig. 7.16).

La explicación anterior indica con toda claridad que los largueros se apoyan en las vigas de piso y éstas sobre las armaduras. Este tipo de descripción se ha empleado para destacar el modo como se transmiten las cargas de la superficie de rodamiento a las armaduras, pero generalmente los elementos están conectados entre sí en forma directa. Se supone, de manera conservadora, que los largueros están simplemente apoyados, pero en realidad hay alguna continuidad en su estructuración.

En la fig. 7.16 se muestra una armadura a la cual se aplica una carga de 450 kN en la losa de piso del quinto panel. La carga se transmite de la losa a los largueros; de éstos a las vigas transversales y finalmente a los nudos  $L_4$  y  $L_5$  de las armaduras. La parte de carga que soporta cada larguero depende del lugar en que se coloque la carga entre ellos; si se encuentra a la mitad, cada uno toma la mitad de la carga. Similarmente, la proporción de carga transmitida de los largueros a las vigas transversales dependerá del lugar en que esté la carga en el panel.

La fig. 7.17 muestra los cálculos necesarios para determinar la transmisión de la carga de 450 kN a las armaduras. Las reacciones finales que se indican para las vigas transversales, corresponden a las cargas aplicadas hacia abajo en los nudos

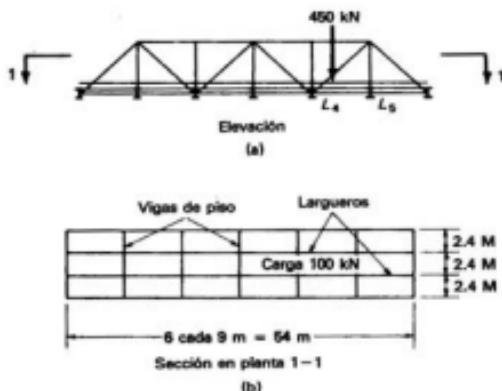
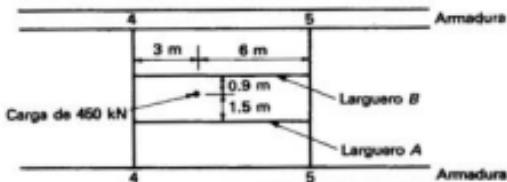


Figura 7.16

de cada armadura. El cálculo de las cargas sobre las armaduras es generalmente un proceso mucho más sencillo que el descrito aquí.



Carga transmitida a cada larguero:

$$A = \frac{3}{8} \times 450 = 168.75 \text{ kN}$$

$$B = \frac{5}{8} \times 450 = 281.25 \text{ kN}$$

Carga transmitida del larguero *A* a las vigas transversales:

$$4-4 = \frac{6}{9} \times 168.75 = 112.5 \text{ kN}$$

$$5-5 = \frac{3}{9} \times 168.75 = 56.25 \text{ kN}$$

Carga transmitida del larguero *B* a las vigas transversales:

$$4-4 = \frac{6}{9} \times 281.25 = 187.5 \text{ kN}$$

$$5-5 = \frac{3}{9} \times 281.25 = 93.75 \text{ kN}$$

Las vigas transversales se encuentran cargadas como sigue:

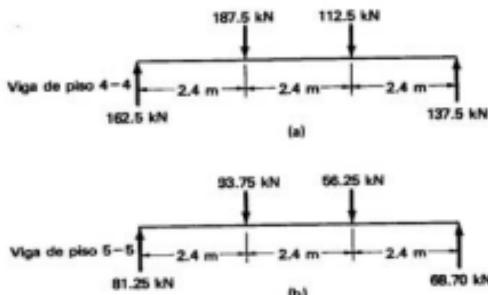


Figura 7.17

#### 7.14 LINEAS DE INFLUENCIA PARA LAS REACCIONES DE ARMADURAS

Las líneas de influencia para las reacciones de armaduras simplemente apoyadas se usan para determinar las cargas máximas que pueden aplicarse a los soportes. Aunque su preparación es muy sencilla, éstas ofrecen una buena introducción a la elaboración de las líneas de influencia de las barras de la armadura.

En la fig. 7.18 se dan las líneas de influencia para ambos soportes de una armadura con un voladizo. Las cargas sólo pueden aplicarse a la armadura por medio de las vigas transversales en los extremos de los paneles, y se supone que tales vigas

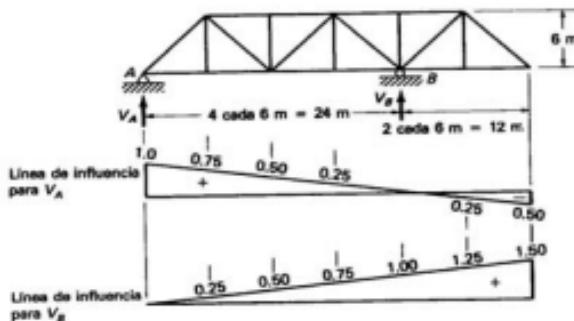


Figura 7.18

están presentes en cada nudo, incluidos los extremos. Una carga aplicada en un extremo de la armadura entre los nudos extremos del último panel, será transmitida a dichos nudos por la viga transversal extrema.

### 7.15 LINEAS DE INFLUENCIA PARA ELEMENTOS DE ARMADURAS DE CUERDAS PARALELAS

Las líneas de influencia para las fuerzas en las barras de armaduras pueden construirse de la misma manera que para las diversas funciones de viga. La carga unitaria se mueve a lo largo de la armadura y las ordenadas para la fuerza en la barra considerada pueden calcularse con la carga colocada en cada nudo. En muchos casos no es necesario colocar la carga en cada nudo y calcular el valor resultante de la fuerza, porque puede verse que ciertas partes de la línea de influencia constan de líneas rectas a lo largo de varios paneles.

Un método usado para calcular las fuerzas en una barra de una de las cuerdas consiste en pasar una sección a través de la armadura que corte la barra considerada y tomar momentos en la intersección de las otras barras cortadas por la sección. La fuerza resultante en la barra es igual al momento dividido por el brazo de palanca; por consiguiente, la línea de influencia para la barra de una cuerda tiene la misma forma que la línea de influencia para el momento en su centro de momentos.

La armadura de la fig. 7.19 se usa para ilustrar este punto. La fuerza en la barra  $L_1L_2$  se determina pasando la sección 1-1 y tomando momentos en  $U_1$ . Se mues-

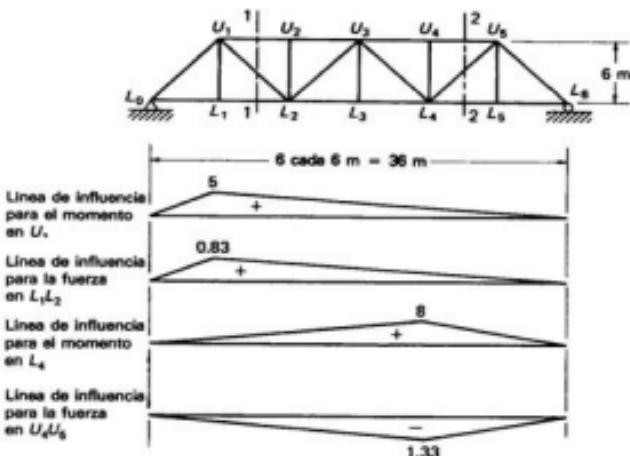


Figura 7.19

tra la línea de influencia para el momento en  $U_1$  y la de la fuerza en  $L_1L_2$ , siendo las ordenadas de esta última las de la primera, divididas por el brazo de palanca. Similarmente, se pasa la sección 2-2 para calcular la fuerza en  $U_4U_5$ ; se muestran las líneas de influencia para el momento en  $L_4$  y para la fuerza en  $U_4U_5$ .

Las fuerzas en las diagonales de armaduras de cuerdas paralelas pueden calcularse a partir del cortante en cada tablero. La línea de influencia para la fuerza cortante en un tablero tiene la misma forma que la de la fuerza en la diagonal, porque la componente vertical de la fuerza en la diagonal es numéricamente igual a la fuerza cortante en el tablero. La fig. 7.20 ilustra esto para dos diagonales de la misma armadura considerada antes en la fig. 7.19. Para algunas posiciones de las cargas unitarias, las diagonales trabajan a compresión y para otras a tensión.

Las componentes verticales de fuerza en las diagonales pueden convertirse en las fuerzas en las barras en función de sus pendientes. La convención de signos para cortantes positivos y negativos es la misma que se usó previamente.

## 7.16 LINEAS DE INFLUENCIA PARA BARRAS DE ARMADURAS CON CUERDAS NO PARALELAS

Las ordenadas de las líneas de influencia para las barras de las cuerdas en este tipo de armaduras se determinan pasando una sección vertical por el tablero y tomando

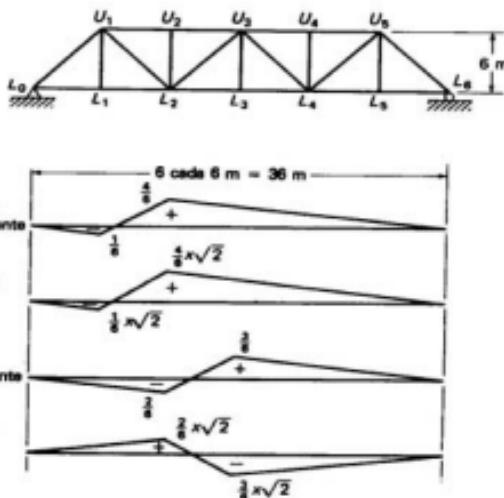


Figura 7.20

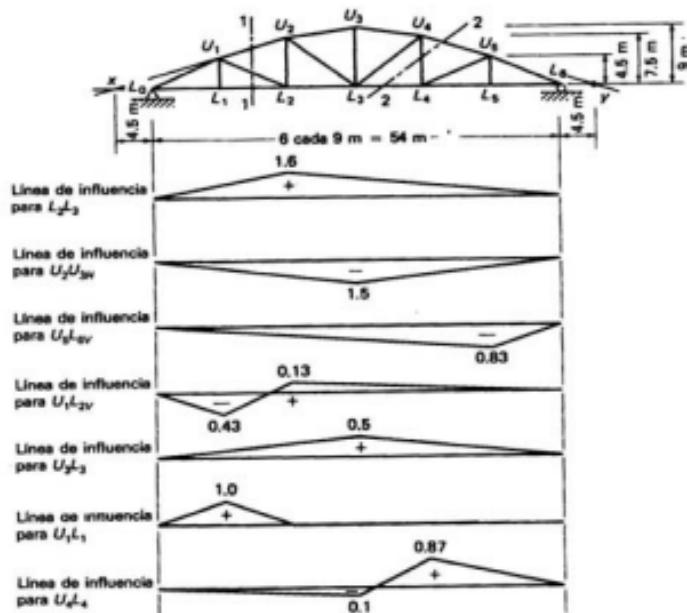


Figura 7.21

momentos en la intersección de la diagonal y la otra cuerda. Se muestran varias líneas de influencia para algunas barras de la armadura tipo Parker en la fig.7.21.

Las ordenadas de la línea de influencia para la fuerza en una diagonal, pueden obtenerse pasando una sección vertical por el tablero y tomando momentos en la intersección de las dos cuerdas, como se ilustra en la fig.7.21, donde la fuerza en  $U_1L_2$  se obtiene pasando la sección 1-1 y tomando momentos en la intersección de las cuerdas  $U_1U_2$  y  $L_1L_2$  en el punto x. La línea de influencia está dibujada para la componente vertical de la fuerza en la barra inclinada. En las siguientes páginas se han dibujado más líneas de influencia tanto para las componentes vertical como horizontal de las fuerzas en barras inclinadas. Estas componentes de fuerza obtenidas de los diagramas, pueden convertirse rápidamente en la fuerza resultante en función de la pendiente de la barra.

La línea de influencia para el montante  $U_3L_3$  se obtiene indirectamente calculando las componentes verticales de las fuerzas en  $U_2U_3$  y  $U_3U_4$ . Las ordenadas para  $U_3L_3$  se encuentran sumando esas componentes. Las líneas de influencia para las

## 7.17 Líneas de influencia para armaduras tipo K

181

otras verticales se dibujan más fácilmente. La barra  $U_1L_1$  sólo puede tener una fuerza cuando la carga unitaria se encuentra entre  $L_0$  y  $L_2$ . No tiene fuerza si la carga está sobre alguno de estos nudos, pero tendrá una tensión unitaria cuando la carga esté sobre  $L_1$ . Las líneas de influencia para montantes verticales como  $U_4L_4$  pueden trazarse de dos maneras. Se pasa una sección como la 2-2 y se toman momentos en la intersección de las cuerdas en el punto  $y$ , o si se tiene la línea para  $U_4U_5$ , sus componentes verticales pueden usarse para calcular las ordenadas de  $U_4L_4$ .

## 7.17 LINEAS DE INFLUENCIA PARA ARMADURAS TIPO K

La fig. 7.22 muestra líneas de influencia para varias barras de una armadura tipo K. Los cálculos necesarios para preparar los diagramas para las barras de las cuerdas son equivalentes a los indicados antes para otros tipos de armaduras. Los valores

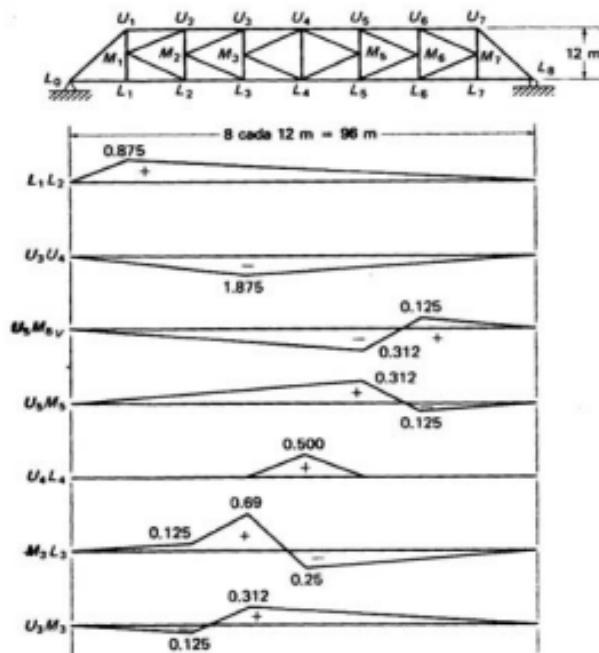


Figura 7.22

necesarios para graficar los diagramas para las barras verticales y diagonales son ahora un poco más difíciles de obtener.

Las fuerzas en las dos diagonales de cada tablero pueden obtenerse a partir del cortante en el tablero. Sabiendo que las componentes horizontales son iguales y opuestas, la relación entre las componentes verticales puede encontrarse en función de sus pendientes. Si las pendientes son iguales, la fuerza cortante se reparte en partes iguales entre las dos. Las líneas de influencia para las verticales, como la  $U_5M_5$ , pueden determinarse con las líneas de influencia de las diagonales adjuntas, una vez conocidas éstas. Por otra parte, las ordenadas pueden calcularse independientemente para varias posiciones de la carga unitaria. El lector debe hacer una comparación cuidadosa de las líneas de influencia para las verticales superiores e inferiores, como las dadas para las barras  $M_3L_3$  y  $U_3M_3$  en la figura.

La línea de influencia para la vertical  $U_4L_4$  puede obtenerse calculando las componentes verticales de fuerza en  $M_3L_4$  y en  $L_4M_5$ , o bien en  $M_3U_4$  y en  $U_4M_5$ , para cada posición de la carga unitaria. Las componentes verticales de fuerza en cada una de estas parejas de barras se cancelan entre sí, a menos que la fuerza cortante en el tablero 4 sea diferente a la fuerza cortante en el tablero 5, lo que es posible sólo si la carga unitaria está en  $L_4$ .

### 7.18 DETERMINACION DE LAS FUERZAS MAXIMAS

Las barras de una armadura se diseñan para resistir las fuerzas máximas causadas por cualquier combinación de carga viva, muerta e impacto que pueda presentarse en la armadura. La carga viva consiste probablemente en una serie de cargas concentradas móviles que representan las cargas de las ruedas de vehículos usando la estructura, pero para simplificar el análisis de las fuerzas, con frecuencia sólo se usa una carga viva uniforme aproximadamente equivalente a una o dos cargas concentradas. En las secciones 7.20 a la 7.22 se analizan con detalle las cargas vivas usadas en el diseño de puentes carreteros y de ferrocarril, así como las expresiones más comunes para el impacto.

La carga muerta, que representa el peso de la estructura y accesorios permanentes de ella, se extiende por toda la longitud de la armadura, pero las cargas vivas uniformes y concentradas se colocan en aquellos puntos de la línea de influencia en donde causarán la máxima fuerza del tipo en estudio. Si se está considerando la fuerza de tensión, la carga viva uniforme se coloca sobre la sección de la armadura correspondiente a la sección positiva o de tensión de la línea de influencia, y las cargas vivas concentradas se colocan en los puntos de ordenadas máximas positivas del diagrama.

Las barras cuyas líneas de influencia tengan ordenadas tanto positivas como negativas pueden trabajar a tensión para una combinación de cargas y a compresión para otra. Una barra sujeta a inversión en el signo de su fuerza, debe diseñarse para resistir tanto una compresión náxima como una tensión máxima.

En las barras  $U_1U_2$ ,  $U_1L_2$  y  $U_2L_3$  de la armadura de la fig. 7.23 se desea encontrar las fuerzas máximas posibles debidas a las siguientes cargas:

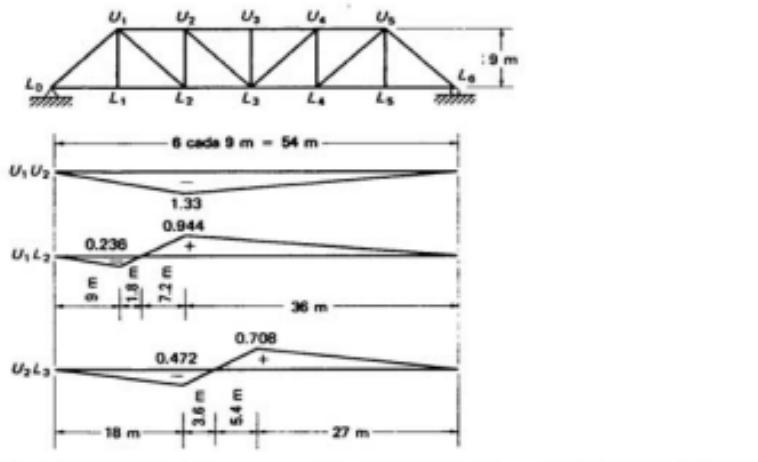


Figura 7.23

1. Carga muerta uniforme de 22.5 kN/m
2. Carga viva uniforme de 30 kN/m
3. Carga móvil concentrada de 90 kN
4. Impacto de 24.4%

Se han dibujado las líneas de influencia y las fuerzas se han calculado por el método exacto como se describe en los siguientes párrafos.

### ***U<sub>1</sub>, U<sub>2</sub>***

La barra trabaja a compresión para cualquier posición de la carga unitaria; por esto, la carga muerta uniforme y la carga viva uniforme se colocan sobre todo el claro. La carga móvil concentrada de 90 kN se coloca en la ordenada de la línea de influencia de compresión máxima. El factor de impacto se multiplica por las cargas vivas y se suma al total.

$$\begin{aligned}
 CM &= (22.5)(54)(-1.33)(1/2) &= -807.98 \\
 CV &= (30)(54)(-1.33)(1/2) &= -1077.30 \\
 &+ (90)(-1.33) &= -119.70 \\
 I &= (0.244)(-1077.30 - 119.70) &= -292.07 \\
 &\text{fuerza total} &= -2297.05 \text{ kN, compresión}
 \end{aligned}$$

***U<sub>1</sub>L<sub>2</sub>***

Analizando la línea de influencia para  $U_1L_2$  se ve que para algunas posiciones de la carga unitaria trabaja a compresión y en otras a tensión. Las cargas vivas deben colocarse sobre la parte positiva del diagrama y las muertas sobre toda la estructura, para obtener la fuerza de tensión máxima posible. Análogamente, las cargas vivas deben colocarse sobre la parte negativa del diagrama y las muertas sobre toda la estructura, para obtener la fuerza de compresión máxima posible.

Tensión máxima:

$$\begin{aligned} CM &= (22.5)(43.2)(+0.944)(1/2) = + 458.78 \\ &\quad + (22.5)(10.8)(-0.236)(1/2) = - 28.67 \\ CV &= (30)(43.2)(+0.944)(1/2) = + 611.71 \\ &\quad + (90)(+0.944) = + 84.96 \\ I &= (0.244)(611.71 + 84.96) = \underline{\underline{+ 169.99}} \\ &\quad \text{fuerza total} = + 1296.77 \text{ kN, tensión} \end{aligned}$$

Compresión máxima:

$$\begin{aligned} CM &= (22.5)(43.2)(+0.944)(1/2) = + 458.78 \\ &\quad + (22.5)(10.8)(-0.236)(1/2) = - 28.67 \\ CV &= (30)(10.8)(-0.236)(1/2) = - 38.23 \\ &\quad + (90)(-0.236) = - 21.24 \\ I &= (0.244)(-38.23 - 21.24) = \underline{\underline{- 14.51}} \\ &\quad \text{fuerza total} = + 356.13 \text{ kN, tensión} \end{aligned}$$

***U<sub>2</sub>L<sub>3</sub>***

Los cálculos para  $U_1L_2$  mostraron que esta barra sólo puede trabajar a tensión independientemente del lugar donde estén las cargas vivas. Los siguientes cálculos muestran que en la barra  $U_2L_3$  puede presentarse una inversión del signo de las fuerzas.

Tensión máxima:

$$\begin{aligned} CM &= (22.5)(32.4)(+0.708)(1/2) = + 258.07 \\ &\quad + (22.5)(21.6)(-0.472)(1/2) = - 114.70 \\ CV &= (30)(32.4)(+0.708)(1/2) = + 344.09 \\ &\quad + (90)(+0.708) = + 63.72 \\ I &= (0.244)(+344.09 + 63.72) = \underline{\underline{+ 99.51}} \\ &\quad \text{fuerza total} = + 650.69 \text{ kN, tensión} \end{aligned}$$

Compresión máxima:

$$\begin{aligned} CM &= (22.5)(32.4)(+0.708)(1/2) = + 258.07 \\ &\quad + (22.5)(21.6)(-0.472)(1/2) = - 114.70 \\ CV &= (30)(21.6)(-0.472)(1/2) = - 152.93 \\ &\quad + (90)(-0.472) = - 42.48 \\ I &= (0.244)(-152.93 - 42.48) = \underline{\underline{- 47.68}} \\ &\quad \text{fuerza total} = - 99.72 \text{ kN, compresión} \end{aligned}$$

## 7.19 CONTRADIAGONALES EN ARMADURAS DE PUENTES

El hecho de que una barra que trabaja a compresión esté en peligro de flexionarse o pandearse, reduce su resistencia y hace que su diseño se vuelva un tanto problemático. El diseño de una barra de 6 metros de largo para una fuerza de tensión de 450 kN, daria por resultado una sección transversal mucho menor que la necesaria para una barra de la misma longitud sujeta a una fuerza de compresión de la misma magnitud. La capacidad de una barra para resistir cargas de compresión depende de su rigidez, que se mide por medio de la *relación de esbeltez*. Esta es la relación entre la longitud de una barra y su radio de giro mínimo. Al aumentar la longitud de la barra, o sea, al aumentar su relación de esbeltez, el peligro del pandeo será mayor, y será necesaria una sección mayor para resistir la misma carga.

Este análisis muestra que hay una considerable ventaja en hacer trabajar, siempre que sea posible, a las diagonales de una armadura a tensión. Si una armadura sólo estuviera sometida a cargas muertas, sería muy sencillo hacer que todas sus diagonales trabajaran a tensión. Todas las diagonales de la armadura Pratt de la fig. 7.24(a) trabajarian a tensión para una carga muerta uniforme sobre todo el claro. Sin embargo, los cálculos de la Sección 7.18 mostraron que la presencia de cargas vivas puede ocasionar que las fuerzas en algunas de las diagonales de una armadura de puente trabajen alternadamente a tensión y a compresión. El paso constante de trenes o camiones en uno y otro sentido ocasionará que en algunas diagonales las fuerzas cambien continuamente de tensión a compresión, y de nuevo a tensión. Las posibilidades de inversión del sentido de la fuerza son mucho mayores en las diagonales cercanas al centro de una armadura. La razón de esto puede verse en la armadura de la fig. 7.23, donde una fuerza cortante positiva obviamente causa tensión en las barras  $U_1L_2$  y  $U_2L_3$ . La fuerza cortante positiva por carga muerta es mucho menor en el tablero 3 que en el 2, y es más probable que la carga viva se encuentre en un punto que cause una fuerza cortante negativa, suficientemente grande para vencer a la fuerza cortante positiva y producir compresión en la diagonal.

Hace algunas décadas, cuando era usual que las barras de las armaduras estuvieran realmente conectadas mediante pasadores, las diagonales no eran sino varillas redondas capaces de resistir muy poca compresión. La misma situación respecto a

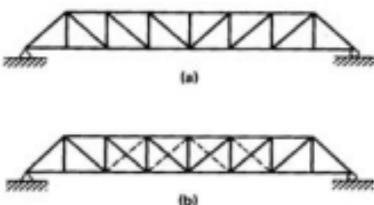


Figura 7.24

las fuerzas existe ahora en las armaduras construidas con diagonales formadas por un par de elementos angulares de acero estructural de sección pequeña, o de algún otro tipo de perfil laminado de poca rigidez. Antiguamente era común añadir una diagonal resistente a la tensión en los tableros en donde pudiera presentarse una inversión en el sentido de la fuerza de una barra, en forma tal que la diagonal de refuerzo estuviese colocada entre los nudos del tablero no conectados de antemano. Estas barras llamadas *contradiagonales* pueden verse en muchos puentes antiguos, pero muy rara vez en los modernos.

En la fig. 7.24(b) se muestra una armadura Pratt a la que se le han añadido contradiagonales en los cuatro tableros centrales; éstas están indicadas con líneas interrumpidas. Cuando se utilizan contradiagonales en un tablero, ambas barras pueden consistir en elementos relativamente esbeltos y ligeros, ninguno de los cuales tiene que ser capaz de resistir fuerzas apreciables de compresión. Se supone que con diagonales esbeltas y ligeras, la fuerza cortante total en el tablero es resistida por la diagonal que resulte sujeta a tensión, mientras que la otra diagonal se encontrará descargada o libre de fuerza. Puede considerarse que las dos barras diagonales del tablero son cables sin ninguna capacidad de resistir compresiones. Si se aplicara una carga de compresión a uno de ellos, se aflojaría mientras que el otro quedaría tensado. Una armadura con contradiagonales es estáticamente indeterminada a menos que tales barras se ajusten para que permanezcan descargadas bajo carga muerta.

Los puentes modernos se diseñan con diagonales capaces de resistir inversiones en el sentido de sus fuerzas. De hecho, todas las barras de una armadura de puente, estén sujetas a inversiones o no, deben ser capaces de resistir los grandes cambios en sus fuerzas que ocurren bajo el tránsito vehicular. Una barra sujeta a cambios frecuentes de fuerza; con inversión o sin ella, está en peligro de fallar por fatiga a menos que se diseñe específicamente para tal situación.

Las especificaciones modernas de acero estipulan un intervalo máximo permisible de esfuerzos para cada elemento de una armadura. El intervalo de esfuerzos se define como la diferencia algebraica de los esfuerzos máximo y mínimo. Para este cálculo, a los esfuerzos de tensión se les da un signo algebraico opuesto al de los esfuerzos de compresión. Las especificaciones AASHTO y AISC estipulan un intervalo permisible de esfuerzos que depende del número estimado de ciclos de esfuerzos, del tipo y ubicación del elemento considerado y del tipo de su conexión. Obviamente, entre más crítica sea la condición del elemento, menor será su intervalo permisible de esfuerzos.

## 7.20 CARGAS VIVAS PARA PUENTES CARRETEROS

Aunque los puentes carreteros deben soportar varios tipos de vehículos, las cargas más pesadas posibles son causadas por una serie de camiones. La AASHTO especifica que este tipo de puentes debe diseñarse considerando filas de camiones que ocupen carriles de 3 metros de ancho. Sólo un camión se coloca en cada carril en cada claro. Las cargas especificadas de camión se designan con un prefijo H

## 7.20 Cargas vivas para puentes carreteros

167

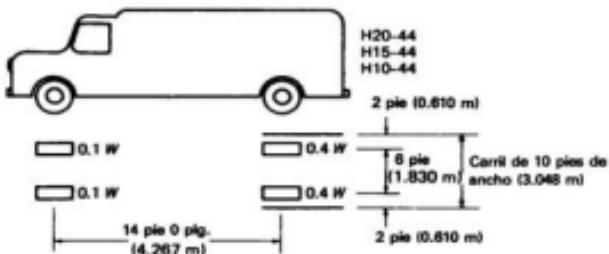


Figura 7.25

seguido de un número que indica el peso total del camión en toneladas inglesas (9 kN = 1 ton inglés). El peso puede estar seguido por otro número que indica el año de las especificaciones. Por ejemplo, una carga H20-44 significa un camión de 20 toneladas de peso y especificaciones de 1944. En la fig. 7.25 se muestra el esquema de un camión y las distancias entre centros de ejes, entre ruedas, etc.

La selección de la carga particular de camión por usarse en el diseño depende de la ubicación del puente, del tránsito esperado, etc. Estas cargas pueden clasificarse en los tres grupos siguientes:

### Camiones de dos ejes: H20, H15 y H10

Se supone que el peso de un camión H se reparte según una relación de 1 a 4 entre sus ejes delantero y trasero (o sea, 4 y 16 toneladas). Los ejes tienen una separación longitudinal de 4.3 m, aproximadamente, y la separación lateral entre ruedas es de 1.8 m aproximadamente. Si se tratara de un camión con diferente carga, podría utilizarse uno que tuviera cargas sobre ejes en proporción directa a los estándares anteriores. Una carga tan pequeña como la del H10 puede usarse sólo para puentes con un tránsito muy ligero.

### Camiones de dos ejes más un semirremolque de un eje: HS15-44 y HS20-44

Para los puentes de las carreteras modernas, con alta intensidad de tránsito de camiones, la especificación más común de diseño es la de un camión de dos ejes con un semirremolque de un eje, con peso del 80% del peso del camión. El camión HS20-44 tiene 4 toneladas en el eje delantero, 16 en el trasero y 16 en el eje del remolque. La distancia entre el eje trasero del camión y el eje del remolque varía entre 4 y 9 metros, aproximadamente, dependiendo de qué espaciamiento cause las condiciones más desfavorables.

### Carga uniforme de carril

El cálculo de las fuerzas originadas por una fila de cargas concentradas que representen camiones de dos ejes, o bien camiones de dos ejes con remolque de un eje, es un trabajo tedioso, por lo que frecuentemente se emplea una carga de carril que produzca en forma aproximada las mismas fuerzas. La carga de carril consiste en una carga uniforme más una sola carga concentrada móvil. Este sistema de cargas representa una línea de tránsito semipesado, con un camión de gran peso en algún punto de dicha línea. La carga uniforme por metro es igual a 0.053 veces el peso total del camión al cual equivale aproximadamente la carga. La carga concentrada es igual a 0.45 veces el peso del camión para el cálculo de momentos y 0.65 veces el peso del camión para el cálculo de fuerzas cortantes. Estos valores para una carga H20 (equivalente a 180 kN) serían los siguientes: carga uniforme  $0.053 \times 180 = 9.5$  kN/m; carga concentrada para momento,  $0.45 \times 180 = 81$  kN y carga concentrada para fuerza cortante,  $0.65 \times 180 = 117$  kN.

En claros continuos, otra carga concentrada de igual peso debe colocarse en uno de los otros claros en posición tal, que produzca un momento máximo negativo. Para el momento positivo, sólo una carga concentrada debe usarse por carril con la carga uniforme colocada en tantos claros como sea necesario para producir el valor máximo positivo.



Autopista Sabana-Escazú, Costa Rica. (Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)

La carga de carril se maneja más cómodamente, pero no debe utilizarse a menos que produzca momentos flexionantes o fuerzas cortantes iguales o mayores que los producidos por la carga H correspondiente. Con base en la información que se presentará posteriormente en este capítulo, pueden realizarse cálculos que demuestran que la carga equivalente de carril para un camión H20-44, producirá mayores momentos en claros simples de 44 m o más y fuerzas cortantes mayores en claros de 39 m o más. El apéndice A de las especificaciones AASHTO contiene tablas que dan los momentos y cortantes máximos en claros simples para diferentes cargas H o para sus cargas equivalentes de carril, de acuerdo a la que domine.

La posibilidad de tener una serie continua de camiones muy pesados en cada carril de un puente con más de dos carriles, no parece tan grande como para un puente que sólo tenga dos. Por esto la AASHTO permite que los valores producidos por cargas completas en cada carril se reduzcan con un cierto factor si el puente tiene más de dos carriles.

### Sistemas de cargas en las carreteras interestatales de Estados Unidos

Otro sistema de carga puede usarse en vez del HS20-44 para el diseño de estructuras del sistema de carreteras interestatales de Estados Unidos. Este sistema alternativo que consta de un par de ejes cargados con 108 kN cada uno y espaciados a 1.20 m, es crítico sólo en claros cortos. Se puede demostrar que esta carga producirá momentos máximos en claros simples de 3.5 m a 11.5 m y fuerzas cortantes máximas en claros de 1.8 m a 6.7 m. Para otros claros, la carga HS20-44 o su carga de carril equivalente será crítica.

## 7.21 CARGAS VIVAS PARA PUENTES FERROVIARIOS

Los puentes de ferrocarril se analizan comúnmente para una serie de cargas ideadas por Theodore Cooper. Sus cargas, denominadas cargas E, representan dos locomotoras seguidas por una línea de carros de carga. Para las locomotoras se usa una serie de cargas concentradas y para los carros de carga una carga uniforme. T. Cooper introdujo su sistema de cargas en 1894; fue llamado la carga E-40 que se muestra en la fig. 7.26. Se supone que el tren tiene una carga de 40 kips (180 kN) en el eje motor de la máquina. Desde que se introdujo este sistema, el peso de los trenes se ha incrementado considerablemente, al grado que en la actualidad las cargas que sirven de base para el diseño de los puentes ferroviarios son del orden de la E-72 y no es raro el uso de las cargas E-80 y E-90.

Existen diversas tablas que proporcionan información detallada respecto a las cargas Cooper, como las cargas en los ejes, momentos flexionantes y fuerzas cortantes. Si se dispone de la información para una carga E, la información para cualquier otra carga E puede obtenerse por proporción directa. Las cargas de eje para una E-75, son 75/40 veces mayores que las de una E-40; las de una E-60, son 60/72 veces menores que las de una E-72, y así sucesivamente. Estas tablas em-

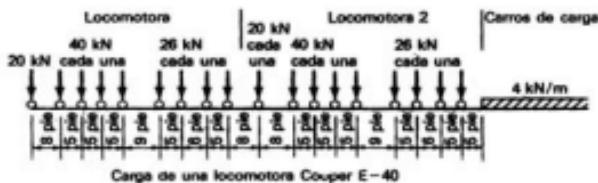


Figura 7.26

pleadas junto con los criterios relativos a los máximos valores posibles que se presentarán después en este capítulo, reducen considerablemente los cálculos.

Las cargas Cooper no describen con exactitud el efecto de los trenes modernos, pero todavía es de uso general, no obstante la disponibilidad de sistemas de cargas más modernos y realistas como el llamado M-60 del Dr. D.B. Steinman [2].

## 7.22 CARGAS DE IMPACTO

La aplicación de las cargas dinámicas producidas por camiones y trenes a los puentes carreteros y ferroviarios, no se efectúa de manera suave y gradual, sino violenta, lo cual produce incrementos notables en las fuerzas internas de la estructura. Por esta razón se deben considerar cargas adicionales, denominadas *cargas de impacto*, las cuales se toman en cuenta incrementando las cargas vivas en algún porcentaje que se obtiene de expresiones empíricas. Se han propuesto numerosas fórmulas para estimar el impacto. Una de éstas es la siguiente fórmula AASHTO para puentes carreteros, en la que  $I$  es el porcentaje de impacto y  $L$  es la longitud del claro en metros sobre la que se coloca la carga viva para obtener un esfuerzo máximo. La AASHTO considera que no es necesario usar un porcentaje de impacto mayor de 30%, independientemente del valor dado por la fórmula. Obsérvese que entre más grande es el claro, resulta menor el impacto.

$$I = \frac{50}{L + 125} \quad o \quad \frac{15.24}{L + 38} \quad \text{si } L \text{ es en metros}$$

Los factores o porcentajes de impacto para puentes ferroviarios son mayores que para los puentes carreteros, debido a las vibraciones mucho mayores causadas por las ruedas de un tren en comparación con la relativa suavidad de rodamiento de los neumáticos. Sólo se necesita estar cerca de un puente ferroviario unos cuantos segundos, mientras pasa un tren rápido y pesadamente cargado, para apreciar la diferencia. Algunas pruebas han demostrado que el impacto en puentes ferroviarios puede ser hasta del 100% o mayor. Un tren no sólo ocasiona un impacto directo u oscilatorio en dirección vertical, sino que también produce cargas de choque por

su movimiento de vaivén en dirección horizontal, a lo largo de la vía. Se dan a continuación algunas fórmulas de impacto propuestas por la AREA:

Efecto vertical directo en vigas, tráves, vigas transversales (piezas de puente), etc.:

$$I = 60 - \frac{L^2}{46.5} \text{ para } L < 30 \text{ m}$$

$$I = \frac{548.8}{L-12.2} + 10 \quad \text{para } L = 30 \text{ metros o más}$$

Efecto vertical directo para armaduras:

$$I = \frac{1219.5}{L+7.6} + 15$$

Las especificaciones AISC establecen que a menos que se indique lo contrario, las cargas vivas deberán incrementarse en un cierto porcentaje. Algunos de estos porcentajes son: 100% para elevadores, 33% para colgantes de soporte de piso y balcones, no menos del 50% para maquinaria de movimiento alternativo o en unidades de potencia, etc.

## 7.23 VALORES MAXIMOS PARA CARGAS MOVILES

En las páginas anteriores de este capítulo se ha indicado repetidas veces que para diseñar vigas, tráves, armaduras o cualquier otra estructura que soporte cargas móviles, el ingeniero debe ser capaz de determinar en qué posiciones esas cargas causan los mayores momentos y cortantes en varios puntos de la estructura. Si uno puede colocar las cargas en esas posiciones de máximos momentos y cortantes, no será necesario preocuparse por cualesquiera otras posiciones que puedan tomar las cargas sobre la estructura. Si una estructura va a estar cargada con una carga uniforme viva y no más de una o dos cargas concentradas móviles, las posiciones críticas para las cargas serán obvias en las líneas de influencia.

Sin embargo, si la estructura va a soportar una serie de cargas concentradas de diversas magnitudes, tales como grupos de ruedas de trenes o camiones, el problema ya no será tan sencillo. Por supuesto, la línea de influencia indicará los lugares aproximados en que deberán colocarse las cargas, porque es razonable suponer que las cargas más pesadas deberán agruparse en la vecindad de las mayores ordenadas del diagrama.

No se considerarán aquí todas las situaciones que pueden surgir en el análisis estructural. Sin embargo, pensamos que la determinación del momento máximo absoluto causado en una viga por una serie de cargas concentradas debe incluirse en este texto.

Se considera que el momento máximo absoluto en una viga simplemente apoyada aparece en el centro de la misma. Dicho máximo se produce efectivamente en

el punto medio si la viga está sometida a una carga uniforme o a una sola carga concentrada. Sin embargo, puede ser necesario que una viga trabaje con una serie de cargas móviles concentradas como las que aplican las ruedas de un tren; entonces, el momento máximo absoluto aparecerá, con toda seguridad, en cualquier ubicación distinta de la central.

Se deberá determinar el máximo momento flexionante posible, pues la viga debe ser capaz de resistir las condiciones más adversas. Para calcular dicho momento, es necesario determinar el punto donde se produce y la ubicación de las cargas que lo originan. Es razonable suponer que el mayor momento flexionante ocurrirá en el punto medio en vigas de grandes claros; pero esta suposición podría ser muy errónea en vigas de claros pequeños. Por lo tanto, es necesario contar con un procedimiento definido para determinar el momento máximo absoluto.

El diagrama de momentos flexionantes para una viga simplemente apoyada sujeta a la acción de un grupo de cargas concentradas, estará formado por un conjunto de líneas rectas, independientemente de la colocación de las cargas; por lo tanto, el momento máximo absoluto que se produce durante el movimiento de dichas cargas a lo largo del claro, ocurrirá en el punto de aplicación de una de las cargas que suele ser la más cercana al centro de gravedad del grupo. La viga de la fig. 7.27 y la serie de cargas  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , etc., se analizarán en los siguientes párrafos. Se supone que la carga  $P_3$  es la más cercana al centro de gravedad de las cargas sobre el claro y que está ubicada a la distancia  $l_1$  de  $P_R$  (la resultante de todas las cargas sobre el claro) y a una distancia  $l_2$  de  $P_{1-2}$  (la resultante de las cargas  $P_1$  y  $P_2$ ). La reacción izquierda,  $R_L$ , está a una distancia  $x$  de  $P_R$ . En lo que sigue se supone que el momento máximo flexionante ocurre en  $P_3$ , y se desarrollará un método preciso para localizar la carga que da origen al máximo. El momento flexionante en  $P$  puede expresarse de la siguiente manera:

$$M = R_R(\ell - x - l_1) - (P_{1-2})(\ell_2)$$

Sustituyendo el valor de  $R_R$ , o sea,  $P_Rx/\ell$ , se obtiene:

$$M = \left( \frac{P_Rx}{\ell} \right) (\ell - x - l_1) - (P_{1-2})(\ell_2)$$

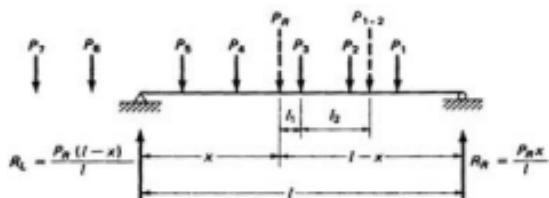


Figura 7.27

## 7.23 Valores máximos para cargas móviles

193

Se desea encontrar el valor de  $x$  para el cual el momento en  $P_3$  será máximo. El momento máximo en  $P_3$ , que ocurre cuando la fuerza cortante es nula, puede encontrarse diferenciando la expresión para el momento respecto a  $x$ , igualando el resultado a cero, y despejando a  $x$ :

$$\frac{dM}{dx} = \ell - 2x - \ell_1 = 0$$

$$x = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell_1}{2}$$

De la deducción anterior puede establecerse una regla general para el momento máximo absoluto: El máximo momento flexionante en una viga cargada con una serie de cargas concentradas en movimiento, ocurrirá en la carga más cercana al centro de gravedad de las cargas sobre la viga, cuando el centro de gravedad esté a una distancia a un lado del centro de la viga, igual a la de la carga más cercana al centro de gravedad de las cargas respecto de dicho centro.

Si la carga más cercana al centro de gravedad de las cargas fuese relativamente pequeña, el momento máximo absoluto podría ocurrir en alguna otra carga cercana. En ocasiones se tienen que considerar otras dos cargas para encontrar el valor mayor; sin embargo, el problema no es difícil, porque debe cumplirse otra condición de momento no descrita aquí (la carga promedio a la izquierda es igual a la carga promedio a la derecha) y no será gran problema determinar cuál de las cargas cercanas será la que domine. (Se puede demostrar que el momento máximo absoluto ocurre bajo la carga que se colocaría en el centro de la viga para occasionar ahí el máximo momento flexionante, cuando dicha carga se encuentre tan distante a un lado del centro, como lo esté el centro de gravedad de todas las cargas al otro lado del centro) [3].

Como ejemplo, se desea determinar el momento máximo absoluto que puede ocurrir en la viga simple de 15 m de claro de la fig. 7.28, cuando la serie de cargas concentradas mostradas se mueve sobre el claro. El centro de gravedad de las cargas está a:

$$\frac{225 \times 1.5 + 270(4.5 + 7.5 + 10.5)}{1260} = 5.08 \text{ m}$$

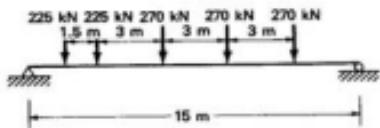
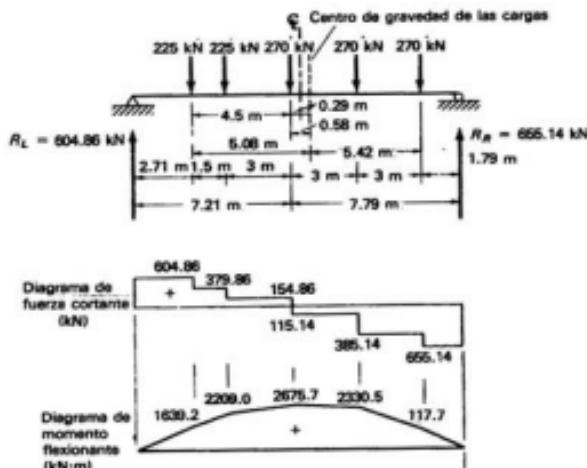


Figura 7.28

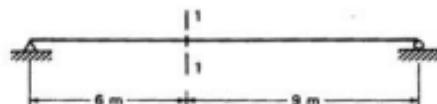
Se colocan las cargas como se muestra a continuación y se trazan los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante correspondientes. El momento máximo absoluto es de 2675.7 kN·m.



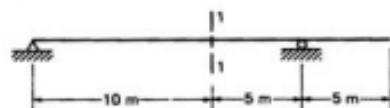
## PROBLEMAS

En los problemas 7.1 al 7.6 dibújense líneas de influencia cualitativas para todas las reacciones, para la fuerza cortante y el momento en la sección 1-1 de cada viga mostrada.

**7.1**



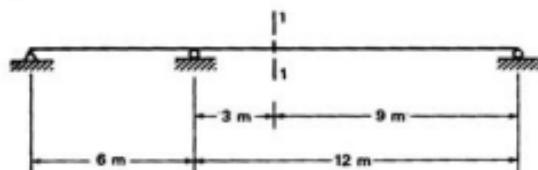
**7.2**



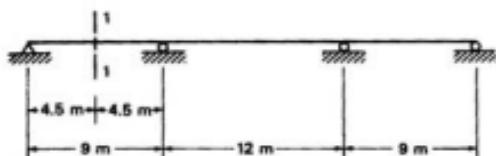
7.3



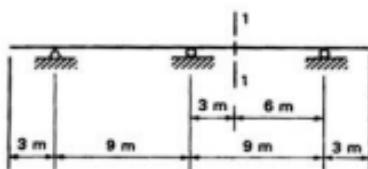
7.4



7.5

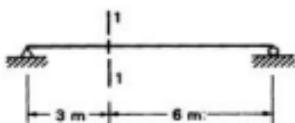


7.6

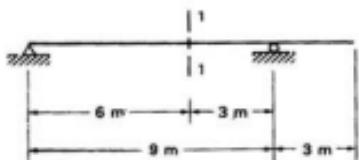


En los problemas 7.7 al 7.18, dibújense líneas de influencia cualitativas para las situaciones indicadas.

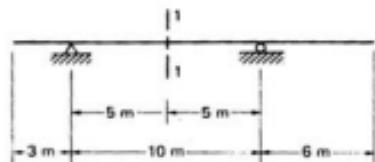
7.7 Ambas reacciones, cortante y de momento en la sección 1-1



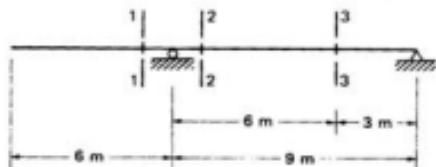
- 7.8 Ambas reacciones, cortante y de momento en la sección 1–1. (Resp.:  $V_L = 0.33 \downarrow$ ,  $V_R = 1.33 \uparrow$ ,  $V_{1-1} = -0.33$ ,  $M_{1-1} = -2.00$ )



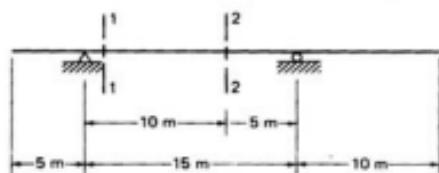
- 7.9 Ambas reacciones, cortante y de momento en la sección 1–1



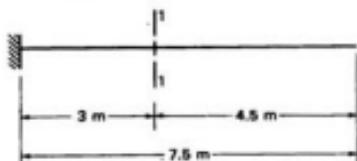
- 7.10 Ambas reacciones y cortante en las secciones 1–1, 2–2 (justo a la izquierda y derecha del apoyo izquierdo) y 3–3 (Resp.: Carga en el extremo izquierdo;  $V_L = 1.67 \uparrow$ ,  $V_R = 0.67 \downarrow$ ,  $V_{1-1} = -1.00$ ,  $V_{2-2} = +0.67$ ,  $V_{3-3} = +0.67$ )



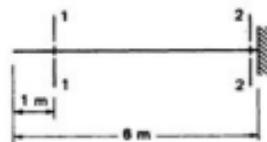
- 7.11 Ambas reacciones, cortante en las secciones 1–1 y 2–2, y de momento en la sección 2–2.



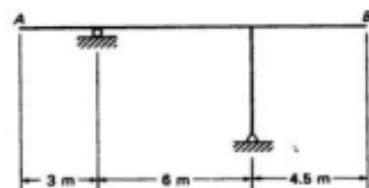
- 7.12 Reacción vertical y de momento en el empotramiento, cortante y de momento en la sección 1-1. (Resp.: Carga en el extremo libre;  $V_L = 1.00 \text{ t}$ ,  $M_L = -7.5$ ,  $V_{1-1} = +1.00$ ,  $M_{1-1} = -4.5$ )



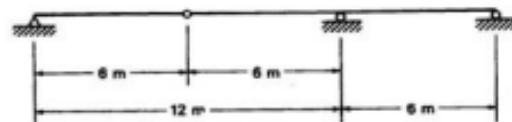
- 7.13 Cortante y momento en las secciones 1-1 y 2-2



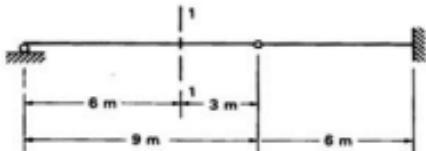
- 7.14 Ambas reacciones al moverse la carga de A a B. (Resp.: Carga en B;  $V_L = 0.75 \text{ t}$ ,  $V_R = 1.75 \text{ t}$ )



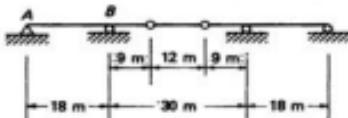
- 7.15 Todas las reacciones



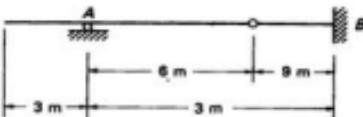
- 7.16 Todas las reacciones verticales, momento y cortante en la sección 1-1. (Resp.: Carga justo a la izquierda de la sección 1-1;  $V_L = 0.33 t$ ,  $V_R = 0.67 t$ ,  $V_{1-1} = -0.67$ ,  $M_{1-1} = +2.00$ )



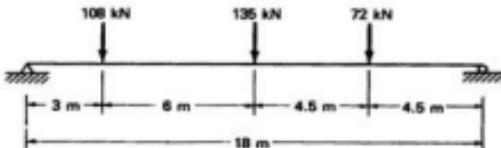
- 7.17 Reacciones en los apoyos *A* y *B*



- 7.18 Reacciones verticales en los apoyos *A* y *B*. (Resp.: Carga en el extremo libre;  $V_A = 1.50 t$ ,  $V_B = 0.50 t$ )

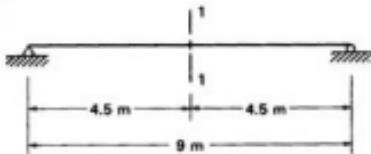


- 7.19 Trazar las líneas de influencia para ambas reacciones, para la fuerza cortante justo a la izquierda de la carga de 72 kN y para el momento bajo la carga de 72 kN. Determinar la magnitud de cada una de esas funciones, usando las líneas de influencia para las cargas fijas en las posiciones mostradas en la figura.

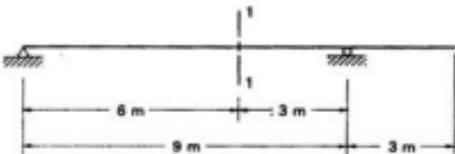


En los problemas 7.20 al 7.26, usando líneas de influencia, determinar las cantidades pedidas para una carga muerta uniforme de 30 kN/m, una carga uniforme móvil de 45 kN/m y una carga viva móvil concentrada de 90 kN. Suponer impacto = 25% en cada caso.

- 7.20 Reacción izquierda máxima y cortante máximo positivo en la sección 1–1. (Resp.:  $V_L = +500.625 \text{ kN}$ ,  $V_{1-1} = +119.53 \text{ kN}$ ,  $M_{1-1} = +1126.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

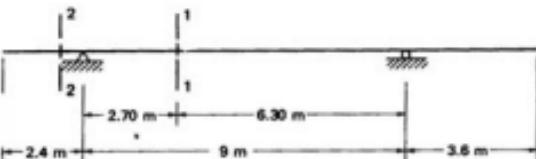


- 7.21 Valores máximos positivos de la reacción izquierda, de la fuerza cortante y el momento en la sección 1–1.

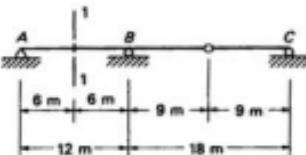


- 7.22 Valores máximos negativos del cortante y del momento en la sección 1–1 de la viga del problema 7.13, del cortante justo a la izquierda del apoyo y del momento en el apoyo. (Resp.:  $V_{1-1} = -198.75 \text{ kN}$ ,  $M_{1-1} = -155.625 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $V_{2-2} = -630 \text{ kN}$ ,  $M_R = -2227.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

- 7.23 Cortante y momento máximos negativos en las secciones 1–1 y 2–2. La sección 2–2 está justo a la izquierda del apoyo.



- 7.24 Valores máximos hacia arriba de las reacciones en A y B; cortante y momento máximos negativos en la sección 1–1. (Resp.:  $V_A = 427.5 \text{ kN} \uparrow$ ,  $V_B = -2460.94 \text{ kN} \uparrow$ ,  $V_{1-1} = -750.94 \text{ kN}$ ,  $M_{1-1} = -3459.37 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

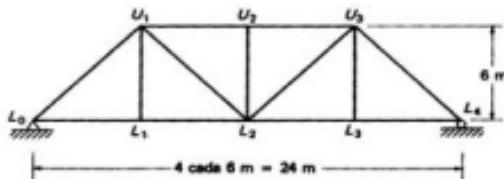


**7.25** Valores máximos positivos y negativos del cortante y el momento en la sección 1–1 en la viga del problema 7.9.

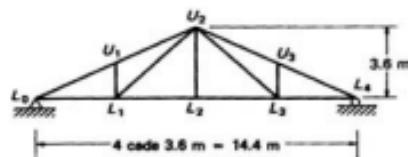
**7.26** Cortante positivo máximo en la articulación, momento negativo máximo en el apoyo *B* y valor máximo hacia abajo de la reacción en *A*, para la viga del problema 7.24. (*Resp.*: +*V* en la articulación no apoyada = +500.62 kN, *M<sub>B</sub>* = -7998.75 kN·m, *V<sub>A</sub>* = -486.56 kN)

En los problemas 7.27 al 7.44 trazar las líneas de influencia para las barras indicadas.

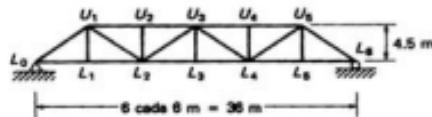
**7.27** *L<sub>0</sub>U<sub>1</sub>*, *L<sub>0</sub>L<sub>1</sub>*, *U<sub>1</sub>L<sub>1</sub>*, *U<sub>1</sub>U<sub>2</sub>*.



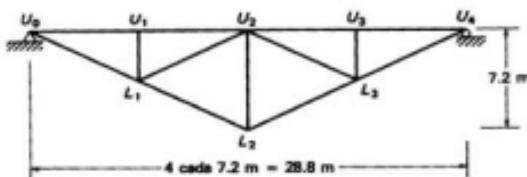
**7.28** *L<sub>0</sub>L<sub>1</sub>*, *U<sub>1</sub>U<sub>2</sub>*, *L<sub>1</sub>U<sub>2</sub>*. (*Resp.*: *L<sub>0</sub>L<sub>1</sub>* + 1.50 en *L<sub>1</sub>*; *U<sub>1</sub>U<sub>2</sub>* - 1.50 en *L<sub>1</sub>*; *L<sub>1</sub>U<sub>2</sub>* + 1.00 en *L<sub>1</sub>*, 0 en *L<sub>2</sub>*)



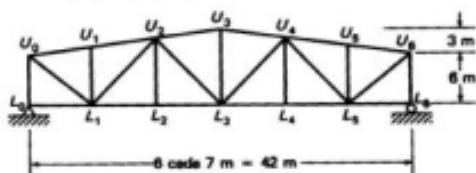
**7.29** *U<sub>1</sub>U<sub>2</sub>*, *L<sub>1</sub>L<sub>2</sub>*, *U<sub>1</sub>L<sub>2</sub>*, *L<sub>2</sub>U<sub>3</sub>*



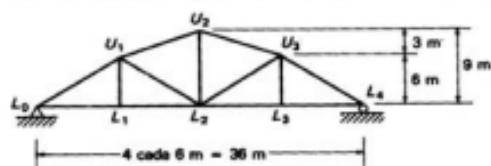
**7.30** *L<sub>1</sub>L<sub>2</sub>*, *U<sub>2</sub>L<sub>2</sub>*, *U<sub>2</sub>L<sub>3</sub>*, *L<sub>3</sub>U<sub>4</sub>* al moverse la carga unitaria por encima de la armadura (*Resp.*: *L<sub>1</sub>L<sub>2</sub>* + 1.00 en *U<sub>2</sub>*; *U<sub>2</sub>L<sub>2</sub>* - 1.00 en *U<sub>2</sub>*; *U<sub>2</sub>L<sub>3</sub>*, 0 en *U<sub>2</sub>* + 0.50 en *U<sub>3</sub>*; *L<sub>3</sub>U<sub>4</sub>*, + 0.75 en *U<sub>3</sub>*)



7.31  $U_1U_2$ ,  $U_2L_3$ ,  $U_3L_4$ ,  $L_4L_5$

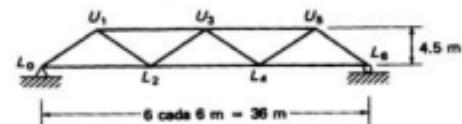


7.32  $L_0U_1$ ,  $L_1L_2$ ,  $U_1U_2$  (Resp.:  $L_0U_{1v} = 0.75$  en  $L_1$ ;  $L_1L_2 + 1.125$  en  $L_1$ ;  $U_1U_{2H} = 1.00$  en  $L_2$ )

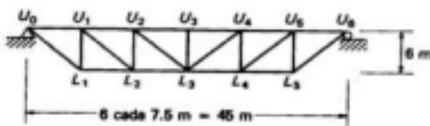


7.33 Barras  $L_3L_4$ ,  $U_1L_2$  y  $U_2L_2$  de la armadura del problema 7.32.

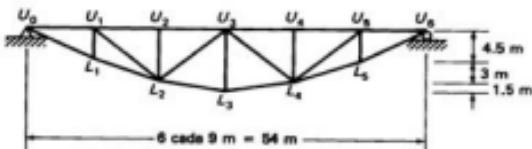
7.34  $U_1U_3$ ,  $L_2L_4$ ,  $L_2U_3$ ,  $L_4U_3$ . (Resp.:  $U_1U_3 = 1.78$  en  $L_2$ ;  $L_2L_4 + 1.33$  en  $L_2$  y  $L_4$ ;  $L_2U_{3v} + 0.33$  en  $L_2$ ;  $L_4U_{3v} + 0.67$  en  $L_4$ )



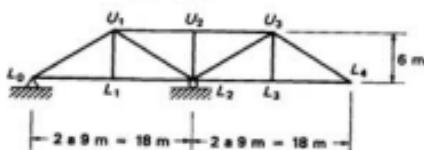
7.35  $U_0L_1, U_1U_2, U_1L_2, L_2U_4$  al moverse la carga unitaria sobre la parte superior de la armadura



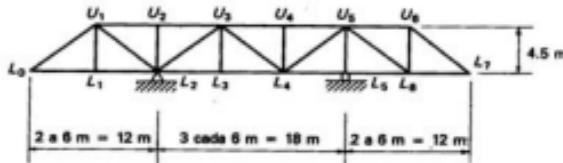
7.36  $L_1L_2, U_1L_1, U_1L_2, U_3L_4$  al moverse la carga unitaria sobre la parte superior de la armadura (Resp.:  $L_1L_{2v} + 1.67$  en  $U_1$ ;  $U_1L_1 - 0.28$  en  $U_1$ ;  $U_1L_{2v} + 0.222$  en  $U_2$ ;  $U_3L_{4v} - 0.25$  en  $U_3$ )



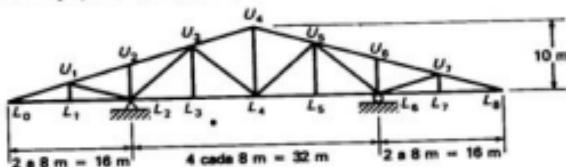
7.37  $L_0L_1, U_1L_2, U_2U_3$



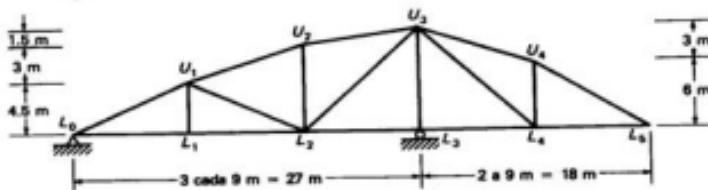
7.38  $L_0U_1, U_1L_{2v}, U_3L_4, U_5U_6$  (Resp.:  $L_0U_{1v} + 1.0$  en  $L_0$ , 0 en  $L_1$ ;  $U_1L_{2v} - 1.0$  en  $L_0$  y  $L_1$ , 0 en  $L_2$ ;  $U_3L_{4v} + 0.667$  en  $L_0$ ,  $-0.333$  en  $L_3$ ,  $+0.333$  en  $L_4$ ,  $-0.667$  en  $L_7$ ;  $U_5U_6$  0 en  $L_4$ ,  $+1.33$  en  $L_7$ )



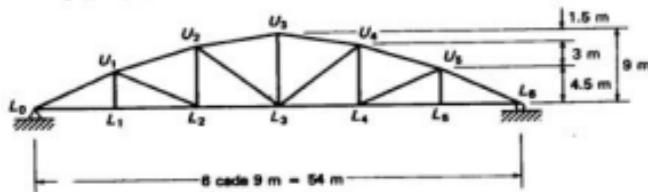
7.39  $L_0U_1$ ,  $U_1L_3$ ,  $U_3L_4$ ,  $U_5U_6$



7.40  $U_1L_2$ ,  $L_2L_3$ ,  $U_3L_4$  (Resp.:  $U_1L_{2r} - 0.467$  en  $L_1$ ;  $L_2L_3 - 2.00$  en  $L_5$ ;  $U_3L_{4r} + 0.5$  en  $L_5$ )

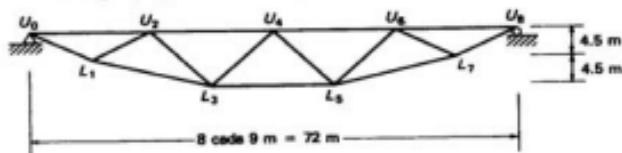


7.41  $U_1U_2$ ,  $U_2L_3$ ,  $U_3L_4$

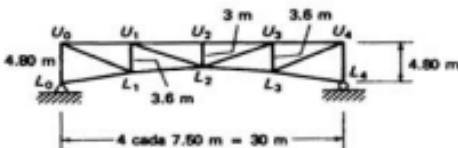


7.42  $U_2U_4$ ,  $L_2L_3$ ,  $U_4L_5$ ,  $L_5U_6$  al moverse la carga unitaria sobre la armadura

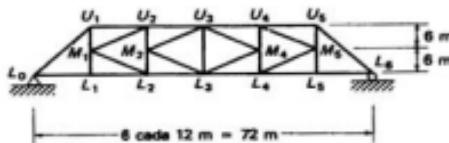
(Resp.:  $U_2U_{4r} - 1.25$  en  $U_3$ ,  $-1.50$  en  $U_4$ ;  $L_2L_3 + 2.00$  en  $U_4$ ;  $U_4L_{5r} - 0.50$  en  $U_4$ ,  $+ 0.25$  en  $U_6$ ;  $L_5U_{6r} + 0.167$  en  $U_4$ ,  $-0.75$  en  $U_6$ )



- 7.43  $U_1U_2$ ,  $U_1L_1$ ,  $L_2U_3$ . Suponer que la carga unitaria se mueve sobre la parte superior de la armadura



- 7.44  $U_2U_3$ ,  $M_1L_2$ ,  $M_3L_2$ ,  $U_3L_3$  (Resp.:  $U_2U_3 - 1.33$  en  $L_3$ ;  $M_1L_2 = -0.083$  en  $L_1$ , +0.33 en  $L_2$ ;  $M_3L_2 + 0.083$  en  $L_1$ , +0.67 en  $L_2$ , -0.25 en  $L_3$ ;  $U_3L_3 + 0.50$  en  $L_3$ , 0 en  $L_2$  y  $L_4$ )

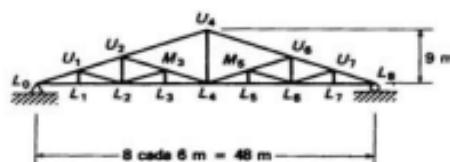


- 7.45 Calcular las fuerzas máximas y mínimas en  $L_2U_3$  de la armadura del problema 7.29 para una carga muerta uniforme de 15 kN/m, una carga móvil uniforme de 30 kN/m, una carga móvil concentrada de 90 kN y un factor de impacto de 27%.

- 7.46 Determinar si es posible una inversión en el signo de la fuerza de la barra  $U_1L_2$  de la armadura del problema 7.41 para las cargas y factor de impacto usadas en el problema 7.45 (Resp.: Sí; -434.07 kN, y +220.36 kN son las fuerzas resultantes)

En los problemas 7.47 al 7.50, trazar las líneas de influencia para las barras indicadas.

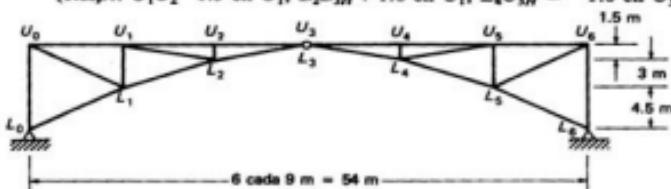
- 7.47  $U_1U_2$ ,  $M_3L_4$ ,  $U_4L_4$ ,  $U_6L_6$



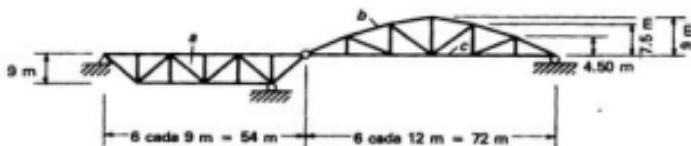
## Problemas

## 205

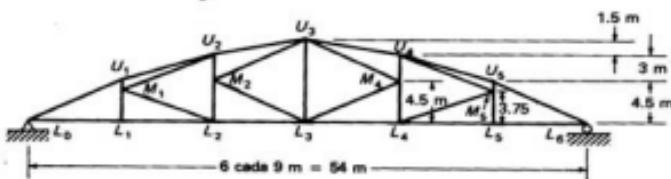
- 7.48  $U_1U_2$ ,  $L_2L_3$ ,  $L_4U_5$  al moverse la carga unitaria sobre la parte superior del claro  
 (Resp.:  $U_1U_2 = -1.5$  en  $U_1$ ;  $L_2L_{3H} + 1.0$  en  $U_1$ ;  $L_4U_{5H} = -1.0$  en  $U_5$ )



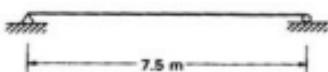
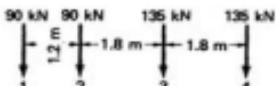
- 7.49 Barras *a*, *b* y *c*



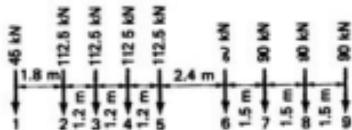
- 7.50  $U_2U_3$ ,  $U_2M_2$ ,  $M_2L_2$ ,  $U_3L_3$  (Resp.:  $U_2U_{3H} = -1.6$  en  $L_2$ ,  $U_2M_2 = +0.06$  en  $L_1$ ,  $M_2L_2 = +0.889$  en  $L_2$ )



- 7.51 Determinar el cortante y el momento máximos absolutos posibles en una viga simple de 15 m de claro para el sistema de carga mostrado.



- 7.52 Una viga simple con claro de 16 m soporta un par de cargas de 60 kN móviles separadas entre sí 4 m. Calcular el momento máximo posible en el centro de la viga y el momento máximo absoluto que puede presentarse en la viga (Resp.: 360 kN·m, 367.5 kN·m)
- 7.53 ¿Qué momento máximo posible puede presentarse en una viga simple de 18 m de claro, cuando el sistema de carga mostrado se desplaza sobre ella?



#### REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. J. S. Kinney, *Indeterminate Structural Analysis* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957), Capítulo 1.
2. "Locomotive Loadings for Railway Bridges," *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 86 (1923): 606–636.
3. A. A. Jakkula y H. K. Stephenson, *Fundamentals of Structural Analysis* (Nueva York: Van Nostrand, 1953), págs. 241–242.

# Deflexiones y rotaciones; métodos geométricos

### 8.1 INTRODUCCION

En este capítulo se calculan los desplazamientos empleando los métodos de área-momento y de la viga conjugada. Estos métodos se denominan *geométricos* porque las deflexiones se obtienen directamente de las deformaciones en la estructura. En otras palabras, los desplazamientos (deflexiones y giros) en un punto particular se determinan sumando los efectos de las deformaciones en la estructura. En el capítulo 9 los desplazamientos se determinarán con métodos basados en la conservación de la energía.

### 8.2 RAZONES PARA CALCULAR DEFLEXIONES

Los elementos que forman una estructura están hechos de materiales que se deforman al cargarlos. Si sus deflexiones exceden los valores permisibles, ello puede repercutir en la apariencia estética de las estructuras y los materiales fijados a tales elementos pueden resultar dañados. Por ejemplo, una vigueta de piso que se defleccione en exceso puede causar grietas en el plafón situado bajo ella, o si soporta pisos de concreto o de losetas, la superficie de éstas puede resultar agrietada. Además, un piso apoyado sobre vigas que "ceden" considerablemente, no inspirará confianza alguna, aunque las vigas sean perfectamente seguras. En pisos de este tipo pueden ocurrir vibraciones excesivas, particularmente si éstos soportan maquinaria.

La práctica normal en los Estados Unidos es limitar las deflexiones causadas por carga viva a 1/360 del claro. Esta cifra se originó probablemente en vigas que servían de sostén a plafones de yeso y se consideró suficiente para evitar grietas en el aplanado. (Aunque una gran parte de las deflexiones en un edificio se deben a cargas muertas, tales deflexiones ocurren antes de la colocación de los acabados.)

La deflexión de 1/360 es sólo uno de los muchos valores de deflexión máxima en uso; esto se debe a las diferentes situaciones de carga, a los diferentes proyectistas y a las diversas especificaciones. Para los casos en que se soporta maquinaria delicada y de precisión, las deflexiones máximas pueden limitarse a 1/1500 o 1/2000 de la longitud del claro. Las especificaciones AASHTO de 1983 limitan las deflexiones en vigas y tráves de acero debidas a carga viva e impacto a 1/800 del claro. Este valor, que es aplicable tanto a claros simples como continuos, se reduce en ocasiones



Puente para canal de embarcaciones en Houston, Texas. (Cortesía del Departamento de Caminos y Transporte Público del Edo. de Texas.)

a 1/1000 en puentes de zonas urbanas que son usados parcialmente por peatones. Los valores correspondientes de la AASHTO para voladizos son 1/300 y 1/375.

Los elementos estructurales sujetos a grandes deflexiones verticales dan con frecuencia un mal aspecto y pueden aun alarma a los usuarios de la estructura. A tales elementos se les puede dar cierta *curvatura* para que sus deflexiones no resulten tan grandes. Los elementos se construyen con una forma tal que toman su forma teórica bajo alguna condición de carga (generalmente carga muerta). Una viga simple podría construirse con una cierta convexidad de manera que bajo cargas por gravedad tome una configuración recta como se supone en los cálculos. Algunos proyectistas toman en cuenta tanto la carga viva como la muerta para estimar la magnitud de la curvatura.

Los cálculos de las deflexiones pueden usarse para evaluar las reacciones en vigas y armaduras estáticamente indeterminadas así como las fuerzas en las barras redundantes de armaduras. Rara vez es necesario calcular las deformaciones con el propósito de corregir las dimensiones originales en que se basaron los cálculos de una estructura. Las deformaciones de los materiales usados en la construcción ordinaria son muy pequeñas comparadas con las dimensiones globales. Por ejemplo, la deformación unitaria que ocurre en una sección de acero con módulo de elasticidad de 200 GPa y sometida a un esfuerzo de 140 MPa, es sólo de

$$\epsilon = \frac{f}{E} = \frac{140 \times 10^6}{200 \times 10^9} = 0.0007$$

o sea 0.07 % de la longitud del elemento.

Existe un gran número de métodos para calcular deflexiones. Es conveniente que el ingeniero proyectista esté familiarizado con varios de ellos. En algunas estructuras será más fácil aplicar determinado método, y en otras, algún otro podría ser más satisfactorio. Además, la capacidad de resolver cualquier problema estructural empleando más de un método, es muy importante para comprobar los resultados.

En este capítulo y en el próximo, se presentan los siguientes métodos para el cálculo de deflexiones y giros:

1. Teoremas del área del diagrama de momento
2. Método de la viga conjugada
3. Método del trabajo virtual
4. Primer teorema de Castigiano

### 8.3 TEOREMAS DEL AREA DEL DIAGRAMA DE MOMENTO

El primer método que se presenta para el cálculo de deflexiones es el interesante y valioso procedimiento del área del diagrama de momento flexionante introducido por Charles E. Greene de la Universidad de Michigan en 1873. Bajo cargas varia-

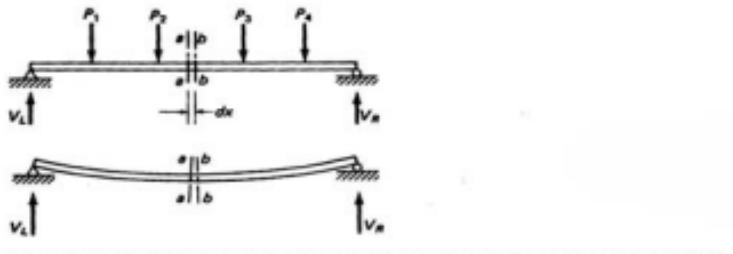


Figura 8.1

bles, el eje neutro de un elemento estructural cambia de forma, de acuerdo con las posiciones y magnitudes de las cargas. La curva elástica de un elemento es la forma que adquiere el eje neutro de éste, al someterlo a cargas. Los teoremas del profesor Greene se basan en la forma de la curva elástica y en la relación entre el momento flexionante y la tasa de cambio de la pendiente en un punto de la curva.

Para deducir los teoremas consideraremos la viga simple de la fig. 8.1. Bajo las cargas  $P_1$  a  $P_4$ , la viga se deflexiona hacia abajo como se muestra en la figura.

En la fig. 8.2 se muestra la sección  $dx$ , limitada en sus extremos por las secciones  $a-a$  y  $b-b$ . El tamaño, la curvatura y la distorsión del segmento se muestran

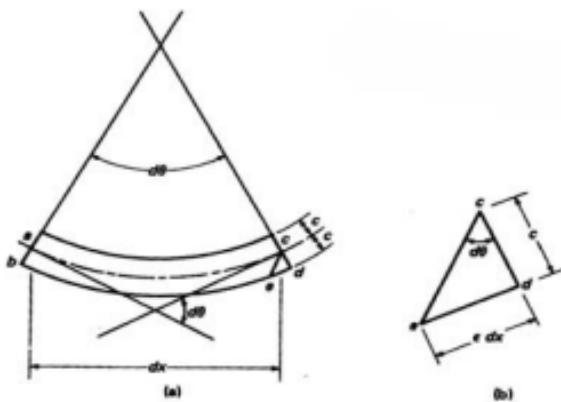


Figura 8.2

muy exagerados, de manera que puedan observarse fácilmente las pendientes y las deflexiones que se van a analizar. La línea  $ac$  a lo largo del eje neutro de la viga no cambia de longitud. Se traza la línea  $ce$  paralela a la  $ab$ ; entonces  $be$  es igual a  $ac$  y  $de$  representa el alargamiento de la fibra inferior de la porción  $dx$ . La fig. 8.2 (b) muestra a mayor escala el triángulo  $cde$  y el ángulo  $d\theta$ , que es el cambio en pendiente de la tangente a la curva elástica en el extremo izquierdo del segmento respecto a la tangente en el extremo derecho. Se dispone ahora de información suficiente para determinar  $d\theta$ . Debe recordarse en la deducción que sigue, que el ángulo  $d\theta$  es muy pequeño y que entonces el seno, la tangente y dicho ángulo en radianes se pueden considerar iguales en magnitud. Es muy ilustrativo comprobar en unas tablas trigonométricas, la amplia variedad de ángulos para los cuales coinciden tales funciones.

Los momentos flexionantes ocasionados por las cargas externas son positivos y producen acortamientos en las fibras superiores de la viga y alargamientos en las inferiores. Los cambios en las longitudes de las fibras ocasionan el cambio  $d\theta$  en la pendiente. El módulo de elasticidad se conoce y el esfuerzo en cualquier punto puede determinarse con la fórmula de la flexión; por lo tanto, la deformación unitaria en cualquier fibra puede encontrarse dividiendo el esfuerzo entre el módulo de elasticidad. El valor de  $d\theta$  puede expresarse como sigue:

$$\tan d\theta = d\theta \text{ en radianes (rad)} = \frac{\text{(deformación unitaria)}}{c} = \frac{ed}{cd}$$

$$d\theta = \frac{\epsilon dx}{c}$$

Sustituyendo el valor de  $\epsilon$ ,

$$d\theta = \frac{(f/E) dx}{c}$$

Pero  $f$  es igual a  $Mc/I$ , y

$$d\theta = \frac{(Mc/EI) dx}{c} = \frac{M dx}{EI}$$

El cambio en pendiente en una distancia  $dx$  es igual a  $Mdx/EI$ , y el cambio total de la pendiente entre un punto  $A$  y otro  $B$  en la viga, puede expresarse como la suma de todos los cambios  $d\theta$  en las distancias  $dx$  entre los dos puntos:

$$\theta_{AB} = \int_A^B \frac{M dx}{EI}$$

Si se dibuja el diagrama  $M/EI$  para la viga, se verá que el integrando anterior es igual a la distancia  $dx$  entre  $A$  y  $B$  multiplicada por su ordenada respectiva  $M/EI$ .

La suma de estos productos es el área del diagrama entre los dos puntos. De acuerdo con esto, el primer teorema del área del diagrama de momento puede expresarse como sigue: **el cambio de pendiente entre las tangentes en dos puntos de la elástica es igual al área del diagrama  $M/EI$  entre los dos puntos.**

Una vez que se tiene un método para calcular el cambio de pendiente entre las tangentes en dos puntos de la elástica, es fácil desarrollar un procedimiento para calcular distancias verticales entre las tangentes. En una distancia  $dx$ , el eje neutro cambia de dirección en una magnitud  $d\theta$ . La deflexión de un punto sobre la viga con respecto a la tangente en otro punto debido a este cambio angular, es igual a  $x$  (la distancia del punto cuya deflexión se busca a la distancia diferencial particular) multiplicada por  $d\theta$ .

$$d\delta = x \, d\theta$$

El valor de  $d\theta$  obtenido con el primer teorema se sustituye en esta expresión:

$$d\delta = x \frac{M \, dx}{EI} = \frac{Mx \, dx}{EI}$$

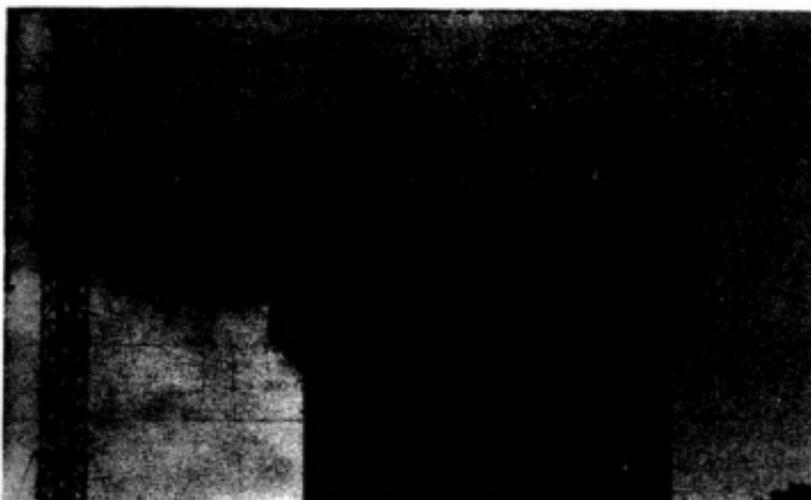
Para determinar la deflexión total desde la tangente en un punto  $A$  hasta la tangente en otro punto  $B$  sobre la viga, se necesita determinar la suma de los productos de cada ángulo  $d\theta$  (entre  $A$  y  $B$ ) por la distancia al punto donde se busca la deflexión. Lo anterior constituye un enunciado del segundo teorema del área del diagrama de momento flexionante.

$$\delta_{AB} = \int_A^B \frac{Mx \, dx}{EI}$$

La deflexión de una tangente a la curva elástica de una viga con respecto a una tangente en otro punto es igual al momento del diagrama  $M/EI$  entre los dos puntos, respecto al punto donde se busca la deflexión.

#### 8.4 APPLICACION DE LOS TEOREMAS DEL AREA DEL DIAGRAMA DE MOMENTO

En los párrafos que siguen se mostrará que el método del área del diagrama de momento tiene su utilización más conveniente en la determinación de pendientes y deflexiones en vigas para las que se conoce la tangente a la curva elástica en uno o más puntos, como es el caso de las vigas en voladizo, en las que la tangente en el extremo empotrado no cambia de posición. El método se aplica con facilidad a vigas sujetas a cargas concentradas, porque el diagrama de momento consta sólo de líneas rectas. Estos diagramas pueden descomponerse en triángulos y rectángulos facilitándose así el trabajo matemático. Pueden también analizarse vigas con car-



Parte superior de una de las torres de captación de la hidroeléctrica San Carlos, Colombia. (Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)

gas uniformes o que varíen uniformemente, pero el álgebra resulta un poco más complicada.

En la fig. 8.3 se dan las propiedades de varias figuras que simplifican el trabajo con los diagramas  $M/EI$ .

Los ejemplos 8.1 al 8.6 ilustran la aplicación de los teoremas del área del diagrama de momento. En ocasiones es posible simplificar la matemática dibujando el diagrama de momento y efectuando los cálculos en función de símbolos; por ejemplo,  $P$  para una carga concentrada,  $w$  para una carga uniforme,  $\ell$  para la longitud de un claro, etc., como se hace en los ejemplos 8.1 al 8.3. Los valores numéricos de cada símbolo se sustituyen en el paso final para obtener la pendiente o deflexión buscada.

Debe tenerse cuidado de usar unidades consistentes en los cálculos. El procedimiento usado aquí consiste en utilizar metros para todas las distancias y kilonewtons para todas las cargas y reacciones. Las deflexiones resultantes se darán en metros y las pendientes en radianes. (Hay  $2\pi$  radianes en  $360^\circ$ ).

Para evitar errores en la aplicación de los teoremas del área de momento, debe tenerse presente que las pendientes y deflexiones se obtienen respecto a tangentes a la curva elástica en los puntos considerados. Los teoremas no dan directamente la pendiente o la deflexión en un punto de la viga respecto a la posición descargada

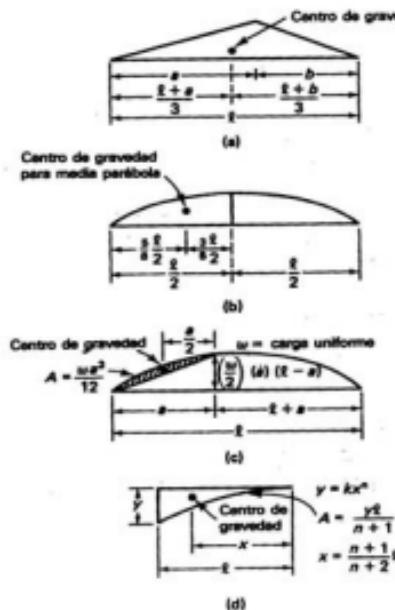


Figura 8.3

de ésta (excepto en uno o dos casos especiales); éstos dan el cambio de pendiente de la curva elástica de un punto a otro o la deflexión de la tangente en un punto con respecto a la tangente en otro.

Si una viga o una estructura tiene varias cargas aplicadas, puede no ser conveniente trabajar con un solo diagrama de  $M/EI$ . Los cálculos pueden simplificarse dibujando diagramas separados para cada una de las cargas y determinar las pendientes y deflexiones para cada uno de ellos. Los resultados finales para un punto particular pueden encontrarse sumando los resultados para todas las cargas. El principio de superposición es aplicable al método del área del diagrama de momento así como a los demás métodos usados para determinar pendientes y deflexiones que se tratarán en las páginas siguientes.

**Si una viga o una estructura soportan tanto cargas concentradas como uniformes, se recomienda separar los diagramas de momento para las cargas uniformes de los correspondientes a las cargas concentradas.** Tal separación es conveniente por la dificultad de determinar las propiedades (áreas y centros de gravedad) de los

diagramas combinados resultantes, necesarios en la aplicación de los teoremas del área de momento así como en el procedimiento de la viga conjugada que se verá en las próximas páginas.

El ejemplo 8.6 muestra que el método del área de momento puede usarse para determinar los momentos de empotramiento de una viga, que es estáticamente indeterminada de tercer grado.

### EJEMPLO 8.1

Determinar la pendiente y la deflexión del extremo libre en la viga mostrada en la fig. 8.4.

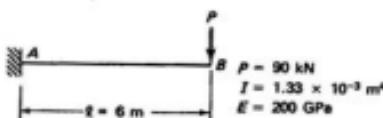


Figura 8.4

*Solución:*

Una tangente a la curva elástica en el extremo empotrado es horizontal; por lo tanto, los cambios en pendiente y deflexión de una tangente en el borde libre con respecto a una tangente en el extremo empotrado son la pendiente y la deflexión en ese punto.

$$\text{Diagrama de } M \quad P\ell$$

$$\text{Diagrama de } \frac{M}{EI} \quad \frac{P\ell}{EI}$$

La pendiente en *B* es igual al área del diagrama  $M/EI$  entre *A* y *B*.

$$\theta_B = \left(\frac{1}{2}\right) (\ell) \left(\frac{P\ell}{EI}\right) = \frac{P\ell^2}{2EI}$$

$$= \frac{(90\,000)(36)}{(2)(200 \times 10^9)(1.33 \times 10^{-3})} = 0.00609 \text{ rad} = 34.9^\circ$$

La deflexión en *B* es igual al momento del diagrama de  $M/EI$  entre *A* y *B* respecto a *B*.

$$\delta_B = \left(\frac{1}{2}\right) (\ell) \left(\frac{P\ell}{EI}\right) \left(\frac{2}{3} \ell\right) = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

$$= \frac{(90\,000)(216)}{(3)(200 \times 10^9)(1.33 \times 10^{-3})} = 0.024 \text{ m}$$

■ ■

**EJEMPLO 8.2**

Determinar la pendiente y la deflexión en *B*, situado a 3 m del extremo izquierdo de la viga mostrada en la fig. 8.5.

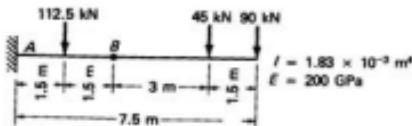
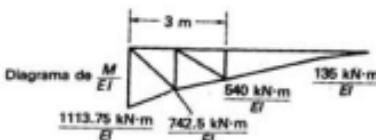


Figura 8.5

*Solución:*

El extremo izquierdo está empotrado; la pendiente en *B* es igual al área del diagrama de  $M/EI$  entre *A* y *B*; la deflexión en *B* es igual al momento del diagrama de  $M/EI$  entre *A* y *B* respecto a *B*. El diagrama se ha subdividido en triángulos para facilitar los cálculos.



Pendiente:

$$\theta_s = \frac{(1)(1113.75)(1.5) + (1)(742.5)(1.5) + (1)(742.5)(1.5) + (1)(540)(1.5)}{EI}$$

$$= \frac{2354 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} = \frac{2354}{(200 \times 10^6)(1.83 \times 10^{-3})}$$

$$= 0.00643 \text{ rad} = 0.37^\circ$$

Deflexión:

$$\delta_s = \frac{(1)(1113.75)(1.5)(2.5) + (1)(742.5)(1.5)(2) + (1)(742.5)(1.5)(1.0) + (1)(540)(1.5)(0.5)}{EI}$$

$$= \frac{2640.93 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} = \frac{2640.93}{(200 \times 10^6)(1.83 \times 10^{-3})}$$

$$= 0.00072 \text{ m}$$



**EJEMPLO 8.3**

Determinar la pendiente y la deflexión en el borde libre de la viga mostrada en la fig. 8.6.

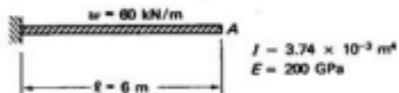
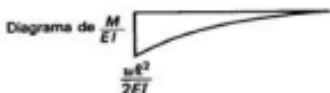


Figura 8.6

*Solución:*



Pendiente:

$$\theta_A = \left(\frac{1}{3}\right) (\ell) \left(\frac{w\ell^2}{2EI}\right) = \frac{w\ell^3}{6EI}$$

$$= \frac{(60)(6^3)}{(6)(200 \times 10^6)(3.74 \times 10^{-3})} = 0.00289 \text{ rad} = 0.165^\circ$$

Deflexión:

$$\delta_A = \left(\frac{1}{3}\right) (\ell) \left(\frac{w\ell^2}{2EI}\right) \left(\frac{3}{4} \ell\right) = \frac{w\ell^4}{8EI}$$

$$= \frac{(60)(6^4)}{(8)(200 \times 10^6)(3.74 \times 10^{-3})} = 0.013 \text{ m}$$

■ ■

**EJEMPLO 8.4**

Calcular la pendiente y la deflexión en el borde libre de la viga mostrada en la fig. 8.7.

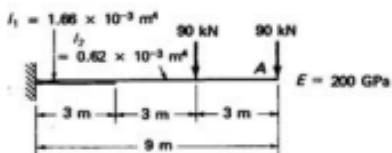


Figura 8.7

**EJEMPLO 8.3**

Determinar la pendiente y la deflexión en el borde libre de la viga mostrada en la fig. 8.6.

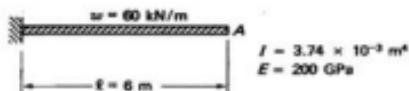


Figura 8.6

*Solución:*



Pendiente:

$$\theta_A = \left(\frac{1}{3}\right) (\ell) \left(\frac{w\ell^2}{2EI}\right) = \frac{w\ell^3}{6EI}$$

$$= \frac{(60)(6^3)}{(6)(200 \times 10^6)(3.74 \times 10^{-3})} = 0.00289 \text{ rad} = 0.165^\circ$$

Deflexión:

$$\delta_A = \left(\frac{1}{3}\right) (\ell) \left(\frac{w\ell^2}{2EI}\right) \left(\frac{3}{4} \ell\right) = \frac{w\ell^4}{8EI}$$

$$= \frac{(60)(6^4)}{(8)(200 \times 10^6)(3.74 \times 10^{-3})} = 0.013 \text{ m}$$

■ ■

**EJEMPLO 8.4**

Calcular la pendiente y la deflexión en el borde libre de la viga mostrada en la fig. 8.7.

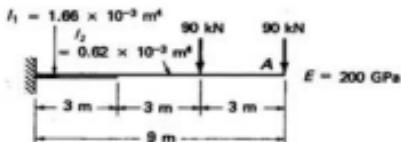
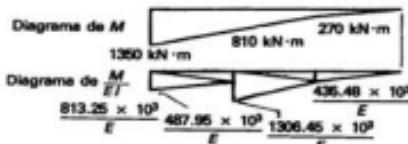


Figura 8.7

*Solución:*

El momento de inercia de la viga se ha incrementado cerca del apoyo, donde el momento flexionante es máximo. El diagrama de  $M/EI$  está dibujado manteniendo la  $E$  constante como símbolo, pero con las ordenadas divididas por los correspondientes momentos de inercia. La figura resultante se subdivide en triángulos para facilitar los cálculos.



Pendiente:

$$\theta_A = \frac{\textcircled{1}(813.25 \times 10^3)(3) + \textcircled{1}(487.95 \times 10^3)(3) + \textcircled{1}(1306.45 \times 10^3)(3) +}{E} + \frac{\textcircled{1}(435.48 \times 10^3)(3)(2)}{E}$$

$$= \frac{5217.92 \times 10^3}{E} = \frac{5217.92 \times 10^3}{200 \times 10^6} = 0.0261 \text{ rad} = 1.49^\circ$$

Deflexión:

$$\delta_A = \frac{\textcircled{1}(813.25 \times 10^3)(3)(8) + \textcircled{1}(487.95 \times 10^3)(3)(7) + \textcircled{1}(1306.45 \times 10^3)(3)(5) +}{E} + \frac{\textcircled{1}(435.48 \times 10^3)(3)(4) + \textcircled{1}(435.48)(3)(2)}{E}$$

$$= \frac{28\ 600.17 \times 10^3 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{E} = \frac{28\ 600.17 \times 10^3}{200 \times 10^6} = 0.143 \text{ m}$$

### EJEMPLO 8.5

Calcular la deflexión en el centro del claro de la viga simple uniformemente cargada que se muestra en la fig. 8.8.

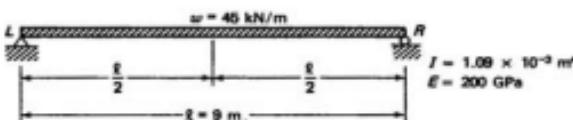
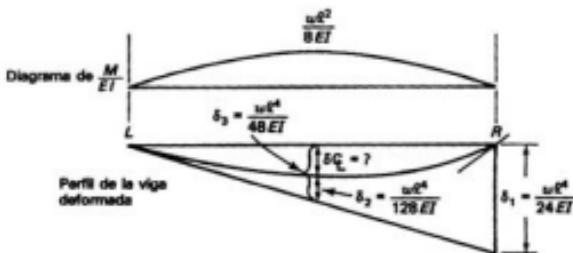


Figura 8.8

**Solución:**

Las tangentes a la línea elástica en cada extremo de la viga son inclinadas; es fácil determinar la deflexión entre una tangente en el centro del claro y una tangente en un extremo, pero el resultado no es la deflexión verdadera en el centro de la viga. Para lograr la deflexión correcta es necesario proceder en forma indirecta, como sigue:

1. Se determina la deflexión  $\delta_1$  de la tangente en el extremo derecho respecto a la tangente en el extremo izquierdo.
2. Se determina la deflexión  $\delta_2$  de una tangente en el centro del claro respecto a una tangente en el extremo izquierdo.
3. Por proporciones es posible calcular la distancia vertical  $\delta_3$  desde el centro del claro en la posición original de la viga hasta la tangente en el extremo izquierdo. La diferencia entre  $\delta_3$  y  $\delta_2$  es la deflexión en el centro de la viga.



$$\delta_1 = \left(\frac{2}{3}\right) (\ell) \left(\frac{w\ell^2}{8EI}\right) \left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{w\ell^4}{24EI}$$

$$\delta_2 = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{\ell}{2}\right) \left(\frac{w\ell^2}{8EI}\right) \left(\frac{3}{8}\right) \left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{w\ell^4}{128EI}$$

$$\delta_3 = \frac{1}{2} \times \delta_1 = \frac{1}{2} \times \frac{w\ell^4}{24EI} = \frac{w\ell^4}{48EI}$$

$$\delta_4 = \frac{w\ell^4}{48EI} - \frac{w\ell^4}{128EI} = \frac{5w\ell^4}{384EI}$$

$$\delta_{Q_L} = \frac{(5)(45)(9^{\circ})}{(384)(200 \times 10^6)(1.09 \times 10^{-3})} = 0.0176 \text{ m}$$

**Nota:** El procedimiento seguido en este ejemplo es de carácter general, y es aplicable a muchos problemas; sin embargo, los cálculos para este problema en particular podrían abreviarse considerablemente calculando la deflexión de la tangente en el centro de la viga (la cual es horizontal debido a la simetría) respecto a uno de los apoyos tomando los momentos en ese apoyo como sigue:

$$\delta_q = \left( \frac{w\ell^2}{8EI} \right) \left( \frac{\ell}{2} \right) \left( \frac{2}{3} \right) \left( \frac{5\ell}{8} \right) = \frac{5w\ell^4}{384EI}$$

■ ■

**EJEMPLO 8.6**

Determine los momentos de la viga empotrada que se muestra en la figura 8.9;  $E$  e  $I$  son constantes.

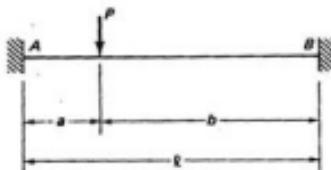
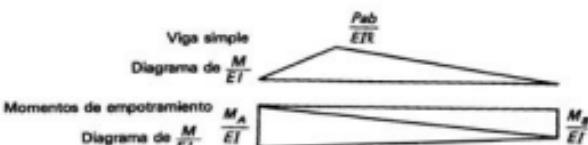


Figura 8.9

*Solución*

El examen de la viga no revela cambios en la pendiente y tampoco deflexión en el cálculo de pendiente entre las tangentes en  $A$  y en  $B$  ni deflexión entre esos puntos; por tanto, el área total del diagrama  $M/EI$  entre  $A$  y  $B$  es cero, y el momento del diagrama respecto a cualquier extremo es también cero.

El diagrama  $M/EI$  puede dibujarse en dos partes: el diagrama de la viga simple, cuyas ordenadas son conocidas y el diagrama producido por los momentos desconocidos en los extremos  $M_A$  y  $M_B$ . Para cada uno de los momentos últimos se puede dibujar un diagrama triangular y con la combinación de ambos formar un trapezoide. Los teoremas del área de momento se escriben para expresar el cambio en la pendiente y la deflexión desde  $A$  hasta  $B$ . Ambas ecuaciones contienen las dos incógnitas  $M_A$  y  $M_B$  y se resuelven simultáneamente.

**Teorema 1:**

$$\left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{Pab}{EI\ell} \right) (\ell) + \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{M_A}{EI} \right) (\ell) + \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{M_B}{EI} \right) (\ell) = 0$$

$$\frac{Pab}{2EI} + \frac{M_A\ell}{2EI} + \frac{M_B\ell}{2EI} = 0 \quad (1)$$

Teorema 2 (tomando momentos respecto al extremo A):

$$\begin{aligned} \left(\frac{Pab}{2EI}\right)\left(\frac{\ell+a}{3}\right) + \left(\frac{M_A\ell}{2EI}\right)\left(\frac{1}{3}\ell\right) + \left(\frac{M_B\ell}{2EI}\right)\left(\frac{2}{3}\ell\right) &= 0 \\ \frac{Pab\ell}{6EI} + \frac{Pa^2b}{6EI} + \frac{M_A\ell^2}{6EI} + \frac{M_B\ell^2}{3EI} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Resolviendo simultáneamente las ecs.(1) y (2) para  $M_A$  y  $M_B$  se obtiene:

$$M_A = -\frac{Pab^2}{\ell^2} \quad M_B = -\frac{Pa^2b}{\ell^2}$$
■ ■

## 8.5 METODO DE LA CARGA ELASTICA

Un estudio cuidadoso del procedimiento empleado al aplicar los teoremas del área de momento, revelará un método más simple y práctico para calcular pendientes y deflexiones en las vigas. Consideraremos la viga y el diagrama  $M/EI$  de la fig. 8.10 para explicar este método.

Si  $A$  es el área del diagrama  $M/EI$ , la deflexión de la tangente en  $R$  respecto a la tangente en  $L$  es igual a  $Ay$  y el cambio de pendiente entre las dos tangentes es  $A$ . Se aplica a una viga imaginaria una carga representada por el diagrama  $M/EI$  como se muestra en la fig. 8.11 y se determinan las reacciones  $R_L$  y  $R_R$ . Estas son  $Ay/\ell$  y  $Ax/\ell$ , respectivamente.

En la fig. 8.10 las pendientes de las tangentes a la curva elástica en cada extremo de la viga ( $\theta_L$  y  $\theta_R$ ) son iguales a las deflexiones entre las tangentes en cada extremo divididas por la longitud del claro, como sigue:

$$\theta_L = \frac{\delta_R}{\ell} \quad \theta_R = \frac{\delta_L}{\ell}$$

Los valores de  $\delta_L$  y  $\delta_R$  se han encontrado previamente iguales a  $Ax$  y a  $Ay$ , respectivamente, y pueden sustituirse en esas expresiones.

$$\theta_L = \frac{Ay}{\ell} \quad \theta_R = \frac{Ax}{\ell}$$

Las pendientes en los extremos son exactamente iguales que las reacciones para la viga de la fig. 8.11. En ambos extremos de la viga ficticia, la fuerza cortante es igual a la reacción y, por tanto, a la pendiente en la viga real. Experimentos adicionales mostrarán que la fuerza cortante en cualquier punto de la viga cargada con el diagrama  $M/EI$  es igual a la pendiente en ese punto de la viga real.

Puede hacerse un razonamiento similar en relación con el cálculo de las deflexiones, encontrándose que la deflexión en la viga real es igual al momento flexionante.

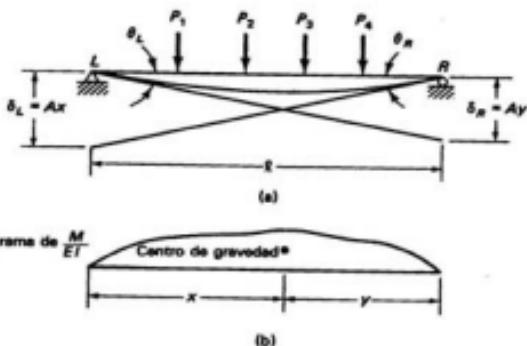


Figura 8.10

nante en la viga ficticia. Los dos teoremas del método de la carga elástica se establecen en detalle como sigue:

1. La pendiente en un punto de la elástica de una viga, medida con respecto a una cuerda entre los apoyos, es igual a la fuerza cortante en ese punto si la viga se carga con el diagrama  $M/EI$ .

2. La deflexión en un punto de la elástica de una viga, medida con respecto a una cuerda entre los apoyos, es igual al momento flexionante en ese punto si la viga se carga con el diagrama  $M/EI$ .

## 8.6 APPLICACION DEL METODO DE LA CARGA ELASTICA

El método de la carga elástica en su forma presente es aplicable sólo a vigas simplemente apoyadas en ambos extremos. Al utilizar el método se verá que las deflexiones máximas en la viga real ocurren en puntos de fuerza cortante nula en la viga imaginaria. El razonamiento es el mismo que el expuesto para los diagramas de fuer-

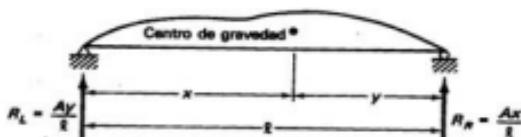


Figura 8.11

za cortante y momento flexionante en la sección 3.5, donde se encontró que los momentos máximos ocurren en puntos de fuerza cortante nula.

No se ha tomado en cuenta para nada, el aspecto de la convención de signos en los métodos del área de momento y carga elástica. El lector podrá captar sin dificultad el sentido de las pendientes y las deflexiones mediante el estudio de las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en la viga ficticia. Una fuerza cortante positiva en ésta indica que el lado izquierdo es empujado hacia arriba con respecto al lado derecho, o que la viga se inclina hacia abajo, considerándola de izquierda a derecha. Análogamente, un momento flexionante positivo (véase la fig. 3.7) indica que la deflexión es hacia abajo.

Los ejemplos 8.7 al 8.10 ilustran la aplicación del método de la carga elástica.

### EJEMPLO 8.7

Determinar la deflexión en el centro de la viga mostrada en la fig. 8.12.

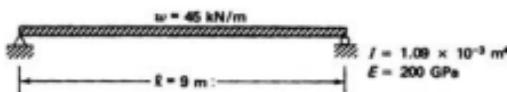
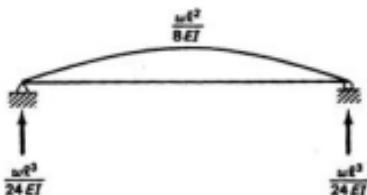


Figura 8.12

*Solución:*



Deflexión en el centro del claro:

$$\delta_q = \text{momento}_q = \left( \frac{w\ell^3}{24EI} \right) \left( \frac{\ell}{2} \right) - \left( \frac{2}{3} \right) \left( \frac{\ell}{2} \right) \left( \frac{w\ell^2}{8EI} \right) \left( \frac{3\ell}{16} \right)$$

$$= \frac{5w\ell^4}{384EI} = \frac{(5)(45)(9^4)}{(384)(200 \times 10^9)(1.09 \times 10^{-3})} = 0.0176 \text{ m}$$

■ ■

**EJEMPLO 8.8**

Determinar la pendiente y la deflexión en el centro de la viga mostrada en la fig. 8.13.

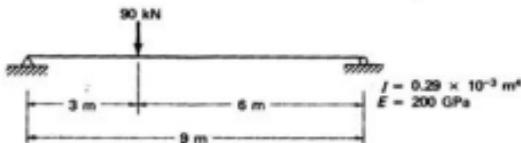
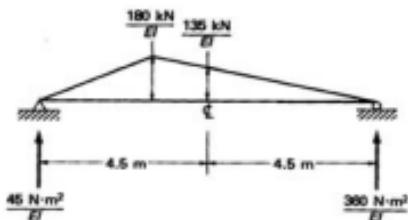


Figura 8.13

Solución:



Deflexión

$$\delta_Q = \frac{(360)(4.5) - (45)(4.5)(135)(1.5)}{EI} = \frac{1164.375 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$= \frac{1164.375}{(200 \times 10^9)(0.29 \times 10^{-3})} = 0.020 \text{ m}$$

Pendiente

$$\theta_Q = \frac{-360 + (45)(135)(4.5)}{EI} = -\frac{56.25 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$= -\frac{56.25}{(200 \times 10^9)(0.29 \times 10^{-3})} = -0.00097 \text{ rad}$$

$$= -0.055^\circ \text{ (pendiente negativa /)}$$

## 8.6 Aplicación del método de la carga elástica

225

**EJEMPLO 8.9**

Calcular la deflexión máxima en la viga mostrada en la fig. 8.14.

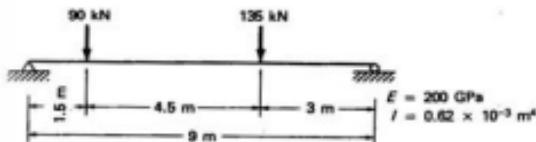
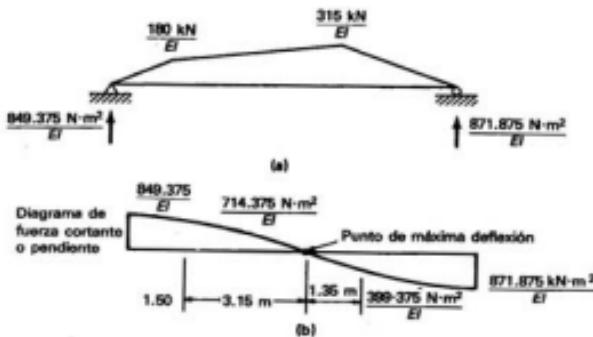


Figura 8.14

*Solución:*

$$\delta_{\max} = \frac{(849.375)(4.65) - (\frac{1}{2})(1.5)(180)(3.65) - (3.15)(180)(1.575) - (\frac{1}{2})(3.15)(94.74)(1.05)}{EI}$$

$$\delta_{\max} = \frac{2407.14 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{(200 \times 10^9)(0.62 \times 10^{-3})} = 0.0194 \text{ m}$$

**EJEMPLO 8.10**

Calcular la deflexión en el centro de la viga mostrada en la fig. 8.15.

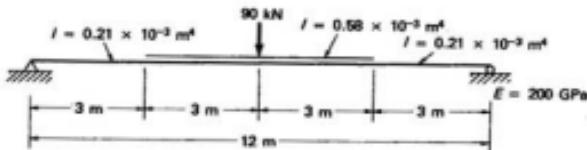
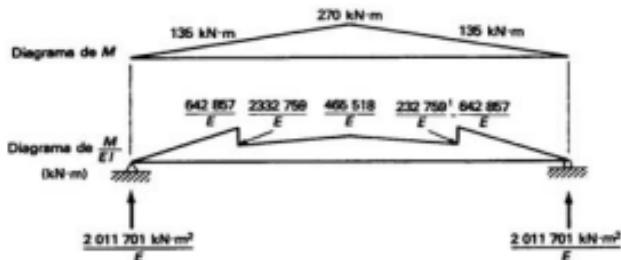


Figura 8.15

*Solución:*



$$E\delta_Q = 2.011\,701 \times 6 - (1/2) \times 3 \times 642\,857 \times 4 - (1/2) \times 232\,759 \times 3 \times 2 \\ - (1/2) \times 465\,518 \times 3 \times 1 = 6\,816\,510$$

$$\delta_Q = \frac{6\,816\,510}{E} = \frac{6\,816\,510}{200 \times 10^6} = 0.034 \text{ m}$$

■ ■

## 8.7 LIMITACIONES DEL METODO DE LA CARGA ELASTICA

El método de la carga elástica fue ideado para vigas simplemente apoyadas y en su forma presente no es aplicable a voladizos, a vigas con partes voladas, a vigas doblemente empotradas ni a vigas continuas. Los teoremas del área de momento se utilizan para determinar la pendiente y la deflexión correctas en el extremo libre de la viga cargada uniformemente de la fig. 8.16.

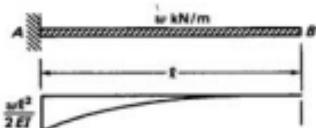


Figura 8.16

$$\theta_Q = \left(\frac{1}{3}\right) (\ell) \left(\frac{w\ell^2}{2EI}\right) = \frac{w\ell^3}{6EI}$$

$$\delta_Q = \left(\frac{1}{3}\right) (\ell) \left(\frac{w\ell^2}{2EI}\right) \left(\frac{3}{4} \ell\right) = \frac{w\ell^4}{8EI}$$

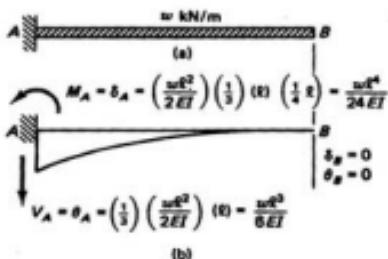


Figura 8.17

Si el método de la carga elástica se usara como alternativa para calcular la pendiente y la deflexión en los extremos de la misma viga, los resultados serían pendiente y deflexión nulas en el extremo libre y  $wL^3/6EI$  y  $wL^4/24EI$  en el empotramiento, como se muestra en la fig. 8.17.

La pendiente y la deflexión en el empotramiento *A* deben ser cero; pero la aplicación de carga elástica a la viga da como resultado una fuerza cortante y un momento flexionante que dan erróneamente una pendiente y una deflexión.

Si el extremo empotrado de la viga se desplazara al extremo libre y la viga resultante se cargara con el diagrama  $M/EI$ , las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes corresponderían exactamente a las pendientes y deflexiones en la viga real, como se determinó con el método del área de momento.

## 8.8 METODO DE LA VIGA CONJUGADA

El método de la viga conjugada hace uso de una viga "análoga" o "conjugada" a la que se aplicará carga elástica, en lugar de la viga real, con la que es incorrecto hacer lo anterior. La fuerza cortante y el momento flexionante en la viga imaginaria, cargada con el diagrama  $M/EI$ , deberán corresponder exactamente a la pendiente y a la deflexión de la viga real.

La relación matemática correcta se determina para una viga simplemente apoyada en sus extremos si se carga con el diagrama  $M/EI$ . Si el método de las cargas elásticas se aplica a otros tipos de vigas, los momentos más grandes debidos a la carga  $M/EI$  ocurrirán en los apoyos, indicando incorrectamente que las deflexiones máximas se producen en esos puntos. Para la aplicación correcta de la carga elástica es necesario hacer uso de vigas conjugadas que tengan los apoyos cambiados, de modo que se determinen las relaciones correctas.

Las cargas y las propiedades de la viga real no tienen efecto en la forma como esté apoyada la viga conjugada. Los únicos factores que afectan a los apoyos de la viga imaginaria son los apoyos de la viga real. Las longitudes de las dos vigas

son iguales. En los párrafos siguientes se explican las diversas condiciones de apoyo que deben emplearse en las vigas conjugadas para que pueda aplicarse el método de las cargas elásticas. La demostración matemática de estas condiciones se explica en detalle en textos sobre resistencia de materiales.

### Extremo libre

El extremo libre de una viga se inclina y desplaza cuando la viga se carga. La viga conjugada debe tener fuerza cortante y momento flexionante en ese extremo cuando se carga con el diagrama de  $M/EI$ . El único tipo de apoyo que es capaz de proporcionar fuerza cortante y momento flexionante es el empotramiento. *Un extremo libre en la viga real se convierte en uno empotrado en la viga conjugada.*

### Empotramiento

Se puede elaborar una explicación similar en sentido inverso para el caso de un empotramiento. Ni pendiente ni deflexión pueden ocurrir en un empotramiento, por lo que en ese punto de la viga conjugada no debe tenerse ni fuerza cortante ni momento flexionante. *Un empotramiento en la viga real se convierte en un extremo libre en la viga conjugada.*

### Apoyo simple de extremo

En apoyos de este tipo, el extremo de la viga se inclina, pero no se desplaza cuando se carga la viga. En la viga imaginaria habrá fuerza cortante, pero no momento flexionante en ese punto, situación que sólo se presenta en un apoyo simple. *Un extremo simplemente apoyado en la viga real permanece igual en la viga conjugada.*

### Apoyo simple interior

No existe deflexión en un apoyo simple interior ni en un extremo simplemente apoyado. Cuando la viga se carga, en ambos hay inclinación, pero las situaciones son un poco distintas. La inclinación en un apoyo simple interior es continua a través de éste, es decir, no se produce cambio brusco de pendiente. Este efecto no se presenta en un extremo con apoyo simple, donde repentinamente cambia la pendiente. (Véase la curva elástica de la viga de la fig. 8.18). Si en un apoyo simple interior no existen cambios de pendiente, no puede haber variación de la fuerza cortante en el apoyo correspondiente en la viga conjugada. Cualquier tipo de apoyo externo en ese punto originaría un cambio en la fuerza cortante; por tanto, ahí es



Figura 8.18

necesaria una articulación interna libre. *Un apoyo simple interior en la viga real se convierte en una articulación interior libre en la viga conjugada.*

### Articulación interna libre

En una articulación interna libre existe tanto pendiente como deflexión, lo cual implica que el apoyo correspondiente en la viga conjugada también debe tener fuerza cortante y momento flexionante. *Una articulación interna libre en la viga real se convierte en un apoyo simple en la viga conjugada.*

### Resumen

La fig. 8.19 muestra varios tipos de vigas comunes y sus correspondientes vigas conjugadas.

### Equilibrio

Las reacciones, los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes de la viga conjugada se calculan fácilmente por estática, ya que tal viga siempre es estáticamente determinada, aun cuando la viga real pueda ser hiperestática. Algunas veces la viga conjugada puede aparecer como completamente inestable. El ejemplo más notorio es la viga conjugada para una viga doblemente empotrada (fig. 8.20), que no tiene ningún tipo de apoyo. Al observar con más detalle las áreas del diagrama de  $M/EI$ , se ve que estas áreas están equilibradas con tanta precisión entre las cargas hacia abajo y hacia arriba (áreas positivas y negativas, respectivamente), que no se necesita ningún apoyo. Cualquier apoyo que pudiera parecer necesario tendría reacciones nulas, y se proporcionaría fuerzas cortantes y momentos flexionantes adecuados para coincidir con las verdaderas pendientes y deflexiones. Aun una viga real continua sobre varios apoyos simples tiene una viga conjugada con apoyos simples en sus extremos.

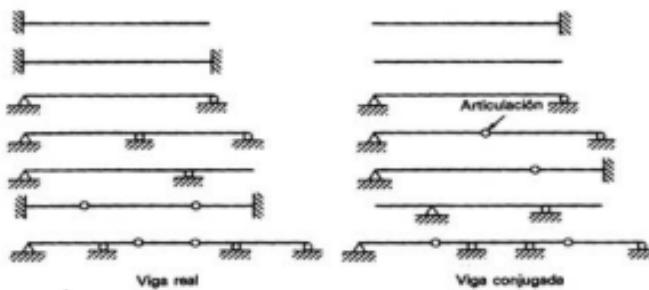


Figura 8.19

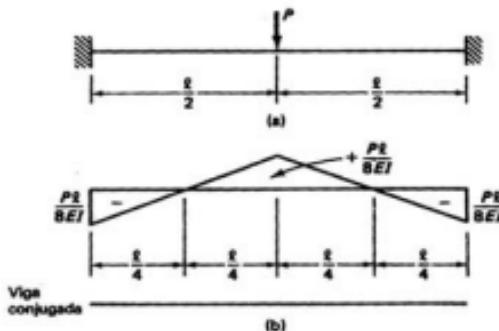


Figura 8.20

### 8.9 RESUMEN DE LAS RELACIONES ENTRE VIGAS

En la fig. 8.21 se presenta un breve resumen de las relaciones que existen entre cargas, momentos, fuerzas cortantes, cambios de pendiente y deflexiones. Las relaciones

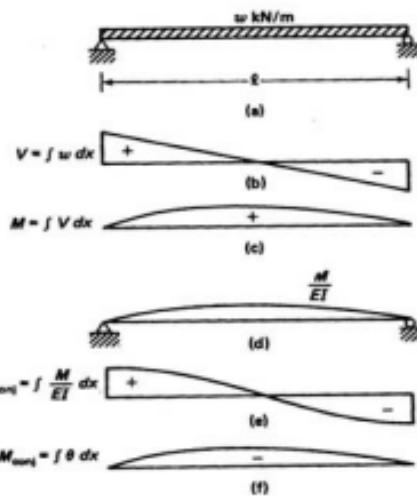


Figura 8.21

## 8.10 Aplicación del método de la viga conjugada a vigas

231

se muestran para el caso de una viga con carga uniforme, pero son aplicables a cualquier tipo de carga. Para los dos conjuntos de curvas mostrados, la ordenada en una curva es igual a la pendiente en ese punto en la curva siguiente. De estas figuras se deduce que las mismas relaciones matemáticas que existen entre carga, fuerza cortante y momento flexionante se verifican para la carga, la pendiente y la deflexión según  $M/EI$ .

### 8.10 APPLICACION DEL METODO DE LA VIGA CONJUGADA A VIGAS

Los ejemplos 8.11 y 8.12 ilustran cómo emplear la viga conjugada para calcular pendientes y deflexiones en vigas. El procedimiento, en lo referente a símbolos y unidades utilizadas en la aplicación del método, en general es el mismo que el que se empleó en los métodos del área de momento y el de la carga elástica. Las deflexiones máximas aparecen en puntos de fuerza cortante nula en la estructura conjugada. Por ejemplo, el punto de cortante nula en la viga de la fig. 8.20 está en el centro del claro. La deflexión será como sigue:

$$\delta_Q = \text{momento}_Q$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\ell}{4}\right)\left(\frac{P\ell}{8EI}\right)\left(\frac{5}{12}\ell\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\ell}{4}\right)\left(\frac{P\ell}{8EI}\right)\left(\frac{\ell}{12}\right) = \frac{P\ell^3}{192EI}$$

#### EJEMPLO 8.11

Determinar la pendiente y la deflexión del punto *A* en la viga de la fig. 8.22.

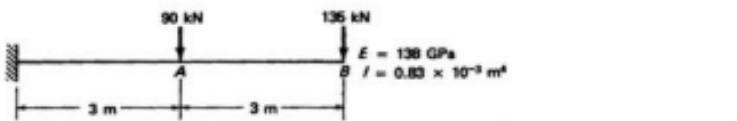
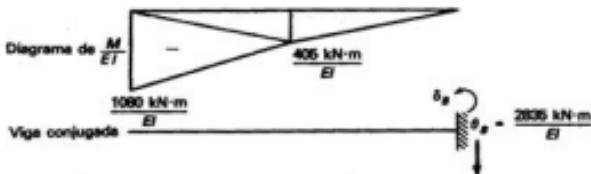


Figura 8.22

*Solución:*



Pendiente:

$$\theta_A = \frac{(\textcircled{1})(1080)(3) + (\textcircled{2})(405)(3)}{EI} = \frac{2227.5 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$= \frac{2227.5}{(138 \times 10^6)(0.83 \times 10^{-3})} = 0.019 \text{ rad} = 1.11^\circ$$

Deflexión:

$$\delta_A = \frac{(\textcircled{1})(1080)(3)(2) + (\textcircled{2})(405)(3)(1)}{EI} = \frac{3847.5 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$= \frac{3847.5 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{(138 \times 10^6)(0.83 \times 10^{-3})} = 0.033 \text{ m} \blacksquare \blacksquare$$

### EJEMPLO 8.12

Determinar las deflexiones en los puntos *A* y *B* de la viga mostrada en la fig. 8.23.

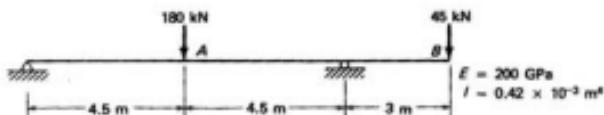
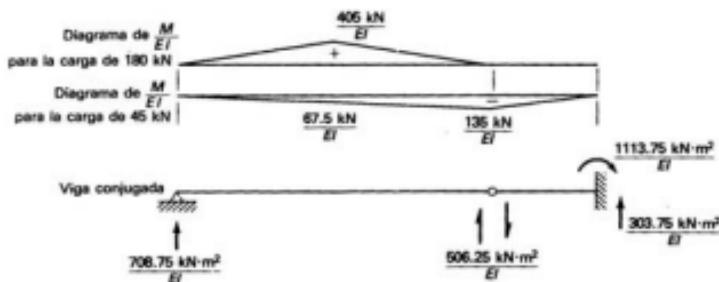


Figura 8.23

Solución:

Se traza el diagrama de  $M/EI$  y se coloca sobre la viga conjugada, la cual tiene una articulación interior. Se determinan las reacciones tal como se hizo para las vi-





Puente sobre la avenida Harrison, Beaumont, Texas.  
(Cortesía de Bethlehem Steel Company.)

gas con voladizos del capítulo 2. La sección de la viga a la izquierda de la articulación se trata como viga simplemente apoyada, determinándose sus reacciones. La reacción en la articulación se aplica como carga concentrada en el extremo del voladizo a la derecha de la articulación, actuando en la dirección opuesta, y se determinan luego las reacciones en el empotramiento. Para simplificar las operaciones matemáticas se traza un diagrama de momento para cada una de las cargas.

$$\delta_A = \frac{(708.75)(4.5) + (4)(4.5)(67.5)(1.5) - (4)(4.5)(405)(1.5)}{EI}$$

$$= \frac{2050.31 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{(200 \times 10^6)(0.42 \times 10^{-3})} = 0.0244 \text{ m} \dagger$$

$$\delta_B = \frac{(-506.25)(3) + (0.5)(135)(3)(2)}{EI} = \frac{-1113.75 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{(200 \times 10^6)(0.42 \times 10^{-3})}$$

$$= -0.0132 \text{ m} \ddagger$$

### 8.11 DEFLEXIONES DE LARGA DURACION

El concreto sujeto a cargas sostenidas continuará deformándose por largos períodos. Esta deformación adicional se llama *flujo* o *escorrimiento plástico*. Si se aplica una carga de compresión a un elemento de concreto, se presenta en éste un acortamiento inmediato o elástico. Si la carga se deja que actúe durante un largo tiempo, el elemento continuará acortándose a lo largo de varios años y la deformación final

puede llegar a ser tan grande como el doble o el triple (o más) de la deformación inicial. Algunos factores de los que depende el flujo plástico son: la humedad, la temperatura, las condiciones del curado, la edad del concreto en el momento en que se carga, la relación de los esfuerzos aplicados a la resistencia última, etc.

Cuando se aplican cargas sostenidas a vigas de concreto reforzado, sus zonas de compresión se acortan cada vez más con el paso del tiempo y la consecuencia es una mayor deflexión. El Instituto Americano del Concreto (ACI) [1] estipula que la deflexión total de larga duración en un elemento particular debe estimarse (1) calculando la deflexión instantánea causada por todas las cargas, (2) calculando la parte de la deflexión instantánea que es causada por las cargas sostenidas, (3) multiplicando este valor por un factor empírico contenido en el Reglamento del ACI, que depende del tiempo transcurrido y (4) sumando este valor a la deflexión instantánea que resulta.

Las cargas sostenidas de un edificio incluyen la carga muerta, más algún porcentaje de la carga viva. Para una casa o para un edificio de oficinas, tal vez sólo 20 o 25% de la carga viva debe considerarse como carga sostenida, en tanto que para un almacén, del 70 al 80% de la carga viva podría considerarse sostenida.

Una situación análoga se presenta en las estructuras de madera. Los elementos estructurales de madera sujetos a cargas de larga duración desarrollan deformaciones permanentes aproximadamente iguales al doble de la deformación calculada para cargas de corta duración de la misma magnitud [2].

### 8.12 APPLICACION DE LA VIGA CONJUGADA A MARCOS

Los marcos rígidos de la fig. 8.24 constan de elementos conectados rígidamente en sus nudos. Los nudos son resistentes a momento e impiden que los elementos giren libremente.

Las pendientes y deflexiones de marcos pueden calcularse con el método de la viga conjugada, tal como se hizo con las vigas. Sin embargo, el procedimiento es algo confuso y *los autores no recomiendan su empleo en los marcos comunes*. El método del trabajo virtual descrito en el capítulo 9 es un método más simple y lógico para el análisis de marcos.

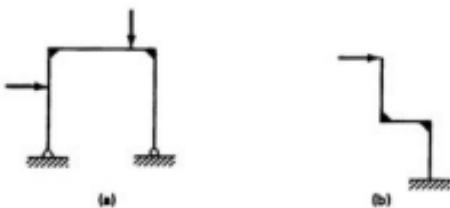


Figura 8.24

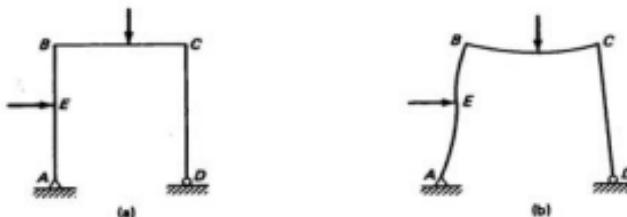


Figura 8.25

Si se desea aplicar el método de la viga conjugada a marcos deberán considerarse factores adicionales (a los encontrados en vigas) e incluirse en los cálculos.

Consideremos el marco de la fig. 8.25(a) en el que se busca la deflexión del punto  $E$ . La fig. 8.25(b) muestra un esbozo de la configuración deformada del marco. Puede verse que hay dos factores que afectan a la deformación total en  $E$ ; éstos son la deflexión en  $E$  cuando el nudo  $B$  está impedido de moverse lateralmente y el efecto del movimiento verdadero hacia la derecha del nudo  $B$ . El marco sufre un desplazamiento lateral hacia la derecha que incrementa la deflexión de  $E$ . De manera similar, para encontrar el cambio total en la pendiente o la rotación de un nudo particular en un marco complicado, puede ser necesario considerar las rotaciones de varios nudos.

La exposición anterior ha mostrado que el cálculo de deflexiones en un marco rígido, con el procedimiento usual de la viga conjugada, puede implicar el tomar momentos en la estructura cargada con el diagrama de  $M/EI$ , así como complicadas consideraciones de rotaciones en los nudos. En el ejemplo 8.13 se determina la pendiente y la deflexión en un marco elemental de acuerdo con estas ideas.

### EJEMPLO 8.13

Determinar las deflexiones en los puntos  $B$  y  $D$  del marco mostrado en la fig. 8.26.

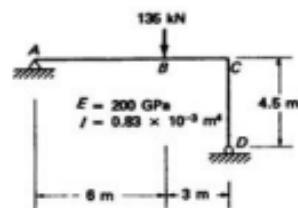
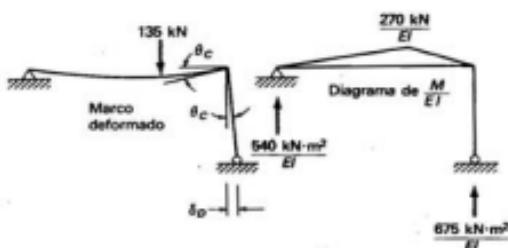


Figura 8.26

**Solución:**

Se muestran la forma estimada del marco deformado y su diagrama de  $M/EI$ . La deflexión del punto  $B$  se determina fácilmente con el procedimiento usual. La elástica de la estructura muestra que el elemento  $CD$  permanece recto porque no tiene momentos que actúen en él y que se inclina hacia afuera con un ángulo igual a  $\theta_c$ . La deflexión en  $D$  es igual a la longitud de  $CD$  multiplicada por  $\theta_c$ .



$$\delta_B = \frac{(540)(6) - (810)(2)}{EI} = \frac{1620 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{(200 \times 10^9)(0.83 \times 10^{-3})} = 0.00976 \text{ m} \rightarrow$$

$$\theta_C = \frac{675 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} = \frac{675 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{(200 \times 10^9)(0.83 \times 10^{-3})} = 0.004066 \text{ rad}$$

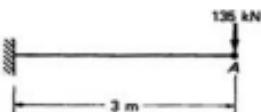
$$\delta_D = 4.5 \times 0.004066 = 0.0183 \text{ m} \rightarrow$$

El método de la viga conjugada aplicada a marcos es muy utilizado por algunos ingenieros. Los lectores interesados en el tema pueden consultar el texto de Kinney [3] donde se trata ampliamente.

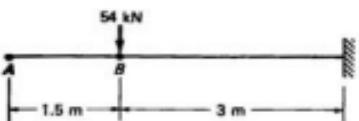
## PROBLEMAS

Utilizando el método del área del diagrama de momento, determinar las cantidades pedidas en los problemas 8.1 al 8.13.

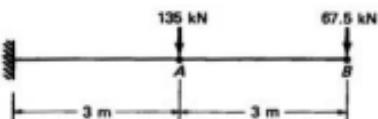
**8.1**  $\theta_A, \delta_A$ :  $E = 200 \text{ GPa}, I = 0.42 \times 10^{-3} \text{ m}^4$



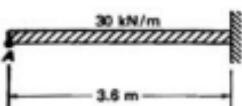
- 8.2**  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ ,  $\delta_A$ ,  $\delta_B$ ;  $E = 10.34 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.63 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  (Resp.:  $\theta_A = \theta_B = 0.0373 \text{ rad/}\ell$ ,  $\delta_A = 0.1305 \text{ m } \downarrow$ ,  $\delta_B = 0.0746 \text{ m } \downarrow$ )



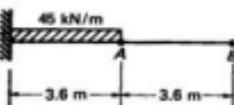
- 8.3**  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ ,  $\delta_A$ ,  $\delta_B$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 1.70 \times 10^{-3} \text{ m}^4$



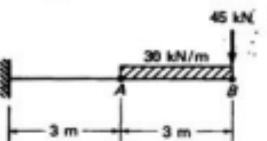
- 8.4**  $\theta_A$ ,  $\delta_A$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.35 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  (Resp.:  $\theta_A = 0.00333 \text{ rad/}\ell$ ,  $\delta_A = 0.00899 \text{ m } \downarrow$ )



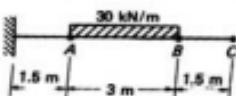
- 8.5**  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ ,  $\delta_A$ ,  $\delta_B$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.47 \times 10^{-3} \text{ m}^4$



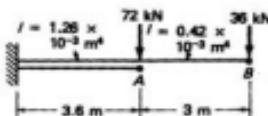
- 8.6**  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ ,  $\delta_A$ ,  $\delta_B$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 1.66 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  (Resp.:  $\theta_A = 0.0042 \text{ rad/}\ell$ ,  $\theta_B = 0.00529 \text{ rad/}\ell$ ,  $\delta_A = 0.0073 \text{ m } \downarrow$ ,  $\delta_B = 0.0222 \text{ m } \downarrow$ )



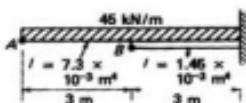
8.7  $\theta_A, \theta_B, \theta_C, \delta_A, \delta_B, \delta_C$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.55 \times 10^{-3} \text{ m}^4$



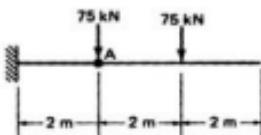
8.8  $\theta_A, \theta_B, \delta_A, \delta_B$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ , (Resp.:  $\theta_A = 0.00432 \text{ rad}^\circ$ ,  $\theta_B = 0.00625 \text{ rad}^\circ$ ,  $\delta_A = 0.00944 \text{ m}^\downarrow$ ,  $\delta_B = 0.0263 \text{ m}^\downarrow$ )



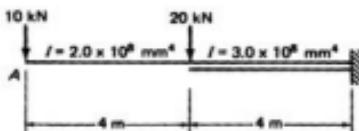
8.9  $\theta_A, \theta_B, \delta_A, \delta_B$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ .



8.10  $\theta_A, \delta_A$ ;  $E = 200\,000 \text{ MPa}$ ,  $I = 3.0 \times 10^8 \text{ mm}^4$  (Resp.:  $\theta_A = 0.01 \text{ rad}^\circ$ ,  $\delta_A = 11.67 \text{ mm}^\downarrow$ )



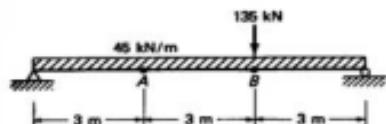
8.11  $\theta_A, \delta_A$ ;  $E = 200\,000 \text{ MPa}$



**8.12**  $\delta_A$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.63 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  (*Resp.*:  $\delta_A = 0.00321 \text{ rad}/\text{m}$ ,  $\delta_A = 0.0145 \text{ m}$ )

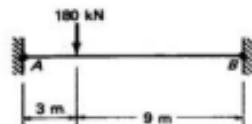


**8.13**  $\delta_A$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 1.33 \times 10^{-3} \text{ m}^4$

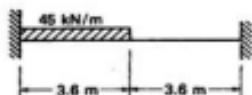


En los problemas 8.14 al 8.18, calcular los momentos de empotramiento en las vigas;  $E$  e  $I$  son constantes excepto en los casos indicados.

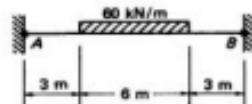
**8.14** (*Resp.*:  $M_A = -303.75 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = -101.25 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



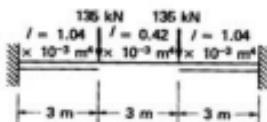
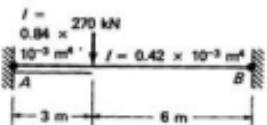
**8.15**



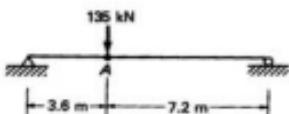
**8.16** (*Resp.*:  $M_A = M_B = -494.91 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



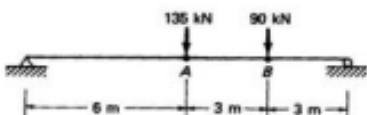
8.17

8.18 (Resp.:  $M_A = -436.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = -142.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

Use el método de la viga conjugada para resolver los problemas 8.19 al 8.44.

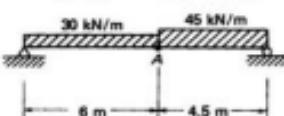
8.19  $\theta_A$ ,  $\delta_B$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.75 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ 

8.20 Determine la deflexión máxima en la viga del problema 8.19. (Resp.: 0.020 m ↑)

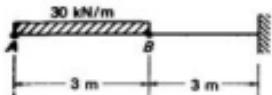
8.21  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ ,  $\delta_A$ ,  $\delta_B$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 1.66 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ 

8.22 Determine la deflexión máxima en la viga del problema 8.21. (Resp.: 0.019 m ↑)

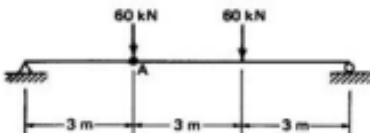
8.23 Determine la pendiente y la deflexión en los puntos A y B en la viga del problema 8.13.

8.24  $\theta_A$ ,  $\delta_A$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.98 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ . (Resp.:  $\theta_A = 0.00167 \text{ rad}/$ ,  $\delta_A = 0.0283 \text{ m } \uparrow$ )

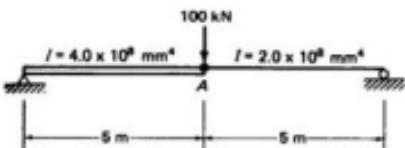
**8.25**  $\theta_A$ ,  $\delta_B$ ,  $\delta_A$ ,  $\delta_B$ :  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.76 \times 10^{-3} \text{ m}^4$



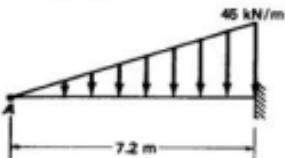
**8.26**  $\theta_A$ ,  $\delta_A$ :  $E = 200\,000 \text{ MPa}$ ,  $I = 6.0 \times 10^6 \text{ mm}^4$  (Resp.:  $\theta_A = 0.00225 \text{ rad/l}$ ,  $\delta_A = 11.25 \text{ mm/l}$ )



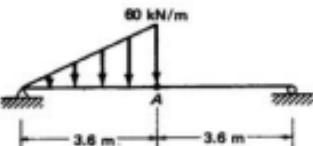
**8.27**  $\theta_A$ ,  $\delta_A$ :  $E = 200\,000 \text{ MPa}$



**8.28**  $\theta_A$ ,  $\delta_A$ :  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.66 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  (Resp.:  $\theta_A = 0.00535 \text{ rad/l}$ ,  $\delta_A = 0.0305 \text{ m/l}$ )

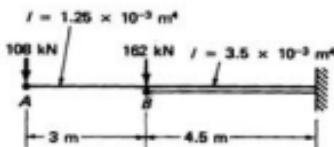


**8.29**  $\theta_A$ ,  $\delta_A$ :  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.21 \times 10^{-3} \text{ m}^4$

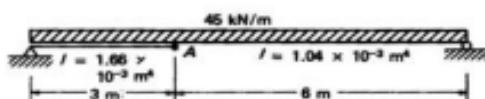


- 8.30 Repetir el problema 8.13 considerando que la viga es de concreto reforzado con  $I = 5.15 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  y con  $E = 21.8 \text{ GPa}$ . Suponer que la carga uniforme es de larga duración y que la carga concentrada de 135 kN es viva de corta duración. Suponer que el factor de carga de larga duración es de 2.0 (*Resp.*: 0.102 m ↑)

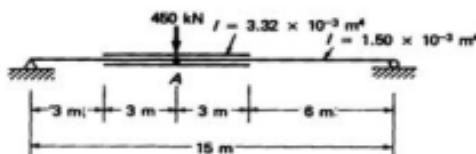
- 8.31  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ ,  $\delta_A$ ,  $\delta_B$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ .



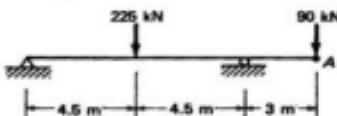
- 8.32  $\theta_A$ ,  $\delta_A$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$  (*Resp.*:  $\theta_A = 0.00344 \text{ rad} \backslash$ ,  $\delta_A = 0.0144 \text{ m } \dagger$ )



- 8.33  $\theta_A$ ,  $\delta_A$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$

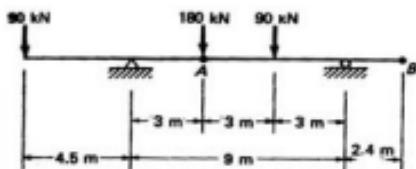


- 8.34  $\theta_A$ ,  $\delta_A$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.73 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  (*Resp.*:  $\theta_A = 0.00052 \text{ rad} \backslash$ ,  $\delta_A = -0.00121 \text{ m } \dagger$ )

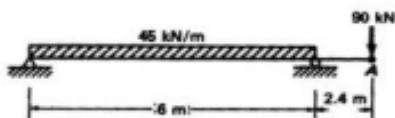


## Problemas

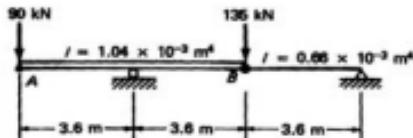
8.35  $\theta_A$ ,  $\delta_B$ ,  $\delta_A$ ,  $\delta_B$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.76 \times 10^{-3} \text{ m}^4$



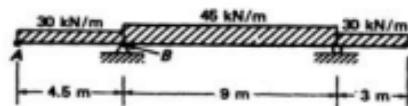
8.36  $\theta_A$ ,  $\delta_A$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.63 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  (Resp.:  $\theta_A = 0.00227 \text{ rad}^\downarrow$ ,  $\delta_A = 0.00381 \text{ m}^\downarrow$ )



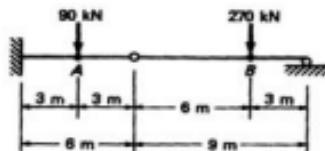
8.37  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ ,  $\delta_A$ ,  $\delta_B$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$



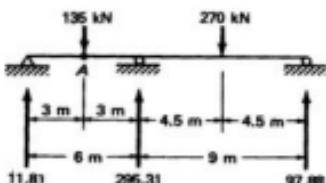
8.38  $\delta_A$ ,  $\theta_B$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.66 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  (Resp.:  $\delta_A = 0.00302 \text{ m}^\downarrow$ ,  $\theta_B = 0.00192 \text{ rad}^\downarrow$ )



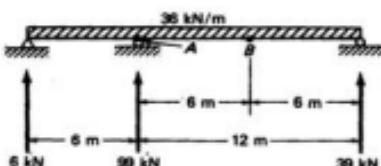
8.39  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ ,  $\delta_A$ ,  $\delta_B$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.63 \times 10^{-3} \text{ m}^4$



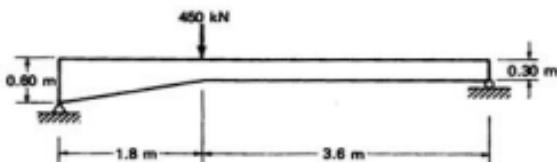
- 8.40  $\theta_A$ ,  $\delta_A$ : Se dan las reacciones,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 1.12 \times 10^{-3} \text{ m}^4$   
 (Resp.:  $\theta_A = 0.000373 \text{ rad}/$ ,  $\delta_A = 0.000644 \text{ m } \dagger$ )



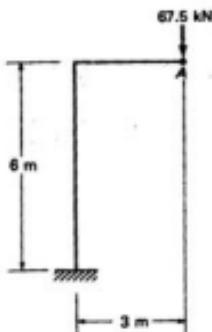
- 8.41  $\theta_A$ ,  $\delta_B$ :  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 1.18 \times 10^{-3} \text{ m}^4$



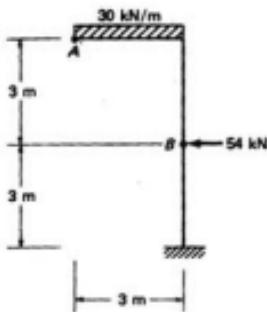
- 8.42 Determinar la pendiente y la deflexión bajo la carga de 450 kN en la viga mostrada. La viga tiene un ancho constante de 0.30 m y su peralte varía como se muestra. (Sugerencia: al trazar el diagrama de  $M/EI$ : dividase la parte de peralte variable de la viga en secciones de 0.60 m y utilice el momento de inercia del centro de cada sección.)  $E = 21.5 \text{ GPa}$ . (Resp.:  $\theta_{450} = 0.0246 \text{ rad}/$ ,  $\delta_{450} = 0.072 \text{ m } \dagger$ )



- 8.43  $\theta_A$ ,  $\delta_A$ :  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.50 \times 10^{-3} \text{ m}^4$



8.44  $\delta_{\text{vert}}$  en A,  $\delta_{\text{horiz}}$  en B:  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.58 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  (Resp.:  $\delta_A = 0.0298 \text{ m} \downarrow$ ,  $\delta_B = 0.00943 \text{ m} \leftarrow$ )



## REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. *Building Code Requirements for Reinforced Concrete*, ACI 318-83 (Detroit: American Concrete Institute). Sección 9.5.
2. W. F. Scofield y W. H. O'Brien (revisión por W. A. Oliver), *Modern Timber Engineering* (Nueva Orleans, La.: Southern Pine Association, 1963), pág. 97.
3. J. S. Kinney, *Indeterminate Structural Analysis* (Reading, Mass.: Addison-Wesley), págs. 143-162.

---

# Deflexiones y rotaciones; métodos de energía

## 9.1 INTRODUCCION A LOS METODOS DE ENERGIA

En el capítulo 8 se calcularon deflexiones y rotaciones empleando métodos geométricos (área del diagrama de momento y la viga conjugada). Estos procedimientos son satisfactorios para muchas estructuras, incluidas algunas bastante complicadas.

En este capítulo se mostrará que las mismas deflexiones y rotaciones pueden calcularse empleando el principio de la conservación de la energía. Se presentarán dos métodos basados en tal principio: el del trabajo virtual y el primer teorema de Castigliano. Estos métodos pueden resultar más convenientes que los geométricos para algunas estructuras complicadas, debido a la sencillez con que pueden establecerse las expresiones que nos permiten resolver el problema. Además, los métodos basados en la conservación de la energía son aplicables a un mayor número de tipos de estructuras.

## 9.2 TRABAJO VIRTUAL

El método del trabajo virtual, llamado a veces método de la carga unitaria ficticia, es el de aplicación más amplia de entre todos los métodos empleados para calcular deflexiones. Es aplicable a vigas, marcos y, sobre todo, a armaduras.

El trabajo virtual se basa en la ley de la conservación de la energía, según la cual el trabajo hecho por un grupo de cargas externas aplicadas gradualmente a una estructura es igual a la energía elástica interna almacenada en la estructura. Para emplear esta ley en las derivaciones que siguen, es necesario hacer las siguientes suposiciones:

1. Las fuerzas internas y externas están en equilibrio.
2. El límite elástico del material no se excede.
3. Los apoyos no tienen movimiento.

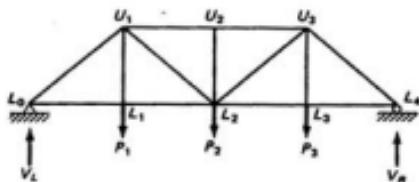


Figura 9.1

### 9.3 DEFLEXIONES EN ARMADURAS LOGRADAS CON EL TRABAJO VIRTUAL

Tomaremos como referencia para el siguiente análisis la armadura de la fig.9.1. Se aplican a la armadura las cargas  $P_1$  a la  $P_3$ , como se muestra; éstas producen fuerzas en las barras. Cada barra de la armadura se acorta o se alarga dependiendo del carácter de la fuerza que actúe en ella. Estas deformaciones internas causan deflexiones externas y cada una de las cargas se desplaza una pequeña distancia. Ahora podemos establecer en detalle el principio de la conservación de la energía, según se aplica a la armadura. El trabajo externo efectuado por las cargas  $P_1$  a  $P_3$ , al moverse éstas a través de sus respectivos desplazamientos, es igual al trabajo interno efectuado por las fuerzas en las barras al desplazarse sobre sus respectivos cambios de longitud.

Para escribir una expresión del trabajo interno efectuado por una barra de la armadura, es necesario desarrollar una expresión para la deformación de la barra. Con este fin consideraremos la barra de la fig.9.2.

La fuerza aplicada a la barra produce en ésta un alargamiento de magnitud  $\Delta\ell$ . El alargamiento puede calcularse en función de las propiedades de la barra. El alargamiento unitario  $\epsilon$  es igual al alargamiento total dividido por la longitud de la barra y es también igual al esfuerzo que actúa en ésta, dividido por su módulo de elasticidad. Puede escribirse una expresión para  $\Delta\ell$  de la siguiente manera:

$$E = \frac{f}{\epsilon} = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell}$$

$$\Delta\ell = \frac{F\ell}{AE}$$

De acuerdo con las suposiciones previas, las barras de una armadura toman sólo fuerza axial. A éstas las llamaremos fuerzas  $F$  y cada barra sufrirá un cambio de longitud igual a  $F\ell/AE$ .

Queremos encontrar una expresión que nos dé la deflexión en un nudo de la armadura de la fig.9.1. Una manera conveniente de desarrollar tal expresión es qui-



Edificio de estacionamiento de oficinas en condominio, Cd. de México.  
(Cortesía de ILIDEM, S.A.)

tar las cargas externas de la armadura, colocar una carga unitaria en el nudo donde se desea la deflexión, volver a colocar las cargas externas y escribir una expresión para los trabajos interno y externo efectuados por la carga unitaria y las fuerzas producidas al volver a colocar las cargas externas.

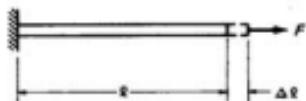


Figura 9.2

Las fuerzas producidas en las barras de la armadura por la carga unitaria se denominan fuerzas  $\mu$ . Estas fuerzas causan pequeñas deformaciones en las barras y pequeñas deformaciones externas en la armadura. Cuando las cargas externas se regresan a la armadura, la fuerza en cada una de las barras cambia de acuerdo a la fuerza  $F$  y la deformación de cada barra cambia de acuerdo a  $F\ell/AE$ . La armadura se deflecta y la carga unitaria se transmite una distancia  $\delta$ . El trabajo externo que realiza la carga unitaria cuando las cargas externas regresan a la estructura se puede expresar como sigue:

$$W_e = 1 \times \delta$$

Internamente, la fuerza  $\mu$  en cada barra se desplaza una distancia  $\Delta\ell = F\ell/AE$ . El trabajo interno efectuado por todas las fuerzas  $\mu$  al moverse esta distancia es

$$W_i = \sum \mu \frac{F\ell}{AE}$$

Igualando los trabajos interno y externo, la deflexión en un nudo de la armadura puede expresarse como sigue:

$$\delta = \sum \frac{F\mu\ell}{AE}$$

## 9.4 APPLICACION DEL TRABAJO VIRTUAL EN LAS ARMADURAS

Los ejemplos 9.1 y 9.2 ilustran las aplicaciones del trabajo virtual en las armaduras. En cada caso se calculan inicialmente las fuerzas debidas a las cargas externas. A continuación se retiran las cargas externas y se coloca una carga unitaria en el punto y en la dirección en donde se quiere tener la deflexión (no necesariamente horizontal o vertical). Se determinan las fuerzas debidas a la carga unitaria y por último, se encuentran los valores de  $F\mu\ell/AE$  para cada barra de la armadura. Para simplificar las numerosas multiplicaciones, el cálculo se efectúa en forma tabular. El módulo de elasticidad se maneja como una constante hasta que se hace la suma sobre todas las barras; sólo en esa etapa del cálculo es que se introduce su valor numérico. Si algunas barras tienen diferentes valores de  $E$ , es necesario considerar sus valores reales o relativos en las multiplicaciones individuales. Un valor positivo de  $\sum (F\mu\ell/AE)$  indica que la deflexión tiene el sentido de la carga unitaria.

### EJEMPLO 9.1

Determinar las componentes horizontal y vertical de deflexión en el nudo  $L_4$  de la armadura mostrada en la fig. 9.3. Los números encerrados en círculos indican áreas con las siguientes equivalencias:

$$\textcircled{1} = 25.8 \text{ cm}^2 \quad \textcircled{2} = 19.4 \text{ cm}^2, \quad \textcircled{3} = 12.9 \text{ cm}^2, \quad E = 200 \text{ GPa.}$$

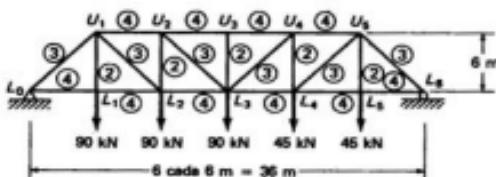
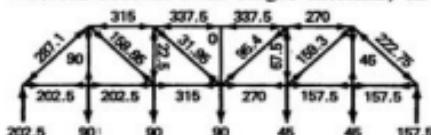
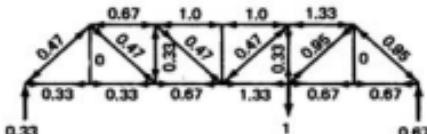
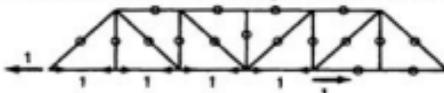


Figura 9.3

*Solución:*

Fuerzas debidas a las cargas externas, en kN:

Fuerzas debidas a una carga unitaria vertical en  $L_4$ :Fuerzas debidas a una carga unitaria horizontal en  $L_4$ :

Deflexión vertical:

$$E\delta_{L_4} = +73\ 407.2$$

$$\delta_{L_4} = \frac{73\ 407.2}{200 \times 10^2} = 3.67 \text{ cm} \leftarrow$$

Deflexión horizontal:

$$E\delta_{L_4} = +23\ 067.1$$

$$\delta_{L_4} = \frac{23\ 067.1}{200 \times 10^2} = 1.15 \text{ cm} \rightarrow$$



TABLA 9.1.

Barra	(m)	(cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>-1</sup> )	(kN)		$\mu_s$	$F\mu_s E/A$	$\mu_H$	$F\mu_H E/A$
$L_0L_1$	6	25.8	23.3	+ 202.5	+ 0.33	+ 1 557.0	+ 1.0	+ 4 718.3	
$L_1L_2$	6	25.8	23.3	+ 202.5	+ 0.33	+ 1 557.0	+ 1.0	+ 4 718.3	
$L_2L_3$	6	25.8	23.3	+ 315.0	+ 0.67	+ 4 917.5	+ 1.0	+ 7 339.5	
$L_3L_4$	6	25.8	23.3	+ 270.0	+ 1.33	+ 8 367.0	+ 1.0	+ 6 291.0	0
$L_4L_1$	6	25.8	23.3	+ 157.5	+ 0.67	+ 2 458.7	0	0	
$L_5L_4$	6	25.8	23.3	+ 157.5	+ 0.67	+ 2 458.7	0	0	
$L_6U_1$	8.5	19.4	43.8	- 287.1	- 0.47	+ 5 910.2	0	0	
$U_1U_2$	6	25.8	23.3	- 315.0	- 0.67	+ 4 917.5	0	0	
$U_2U_3$	6	25.8	23.3	- 337.5	- 1.0	+ 7 863.8	0	0	
$U_3U_4$	6	25.8	23.3	- 337.5	- 1.0	+ 7 863.8	0	0	
$U_4U_1$	6	25.8	23.3	- 270.0	- 1.33	+ 8 367.0	0	0	
$U_5L_6$	5	19.4	43.8	- 222.75	- 0.95	+ 9 268.6	0	0	
$U_6L_1$	6	12.9	46.6	+ 90.0	0	0	0	0	
$U_1L_2$	8.5	19.4	43.8	+ 158.85	+ 0.47	+ 3 270.1	0	0	
$U_2L_3$	6	12.9	46.6	- 22.5	- 0.33	+ 346.0	0	0	
$U_3L_4$	8.5	19.4	43.8	+ 31.95	+ 0.47	+ 657.7	0	0	
$U_4L_5$	6	12.9	46.6	0	0	0	0	0	
$L_1U_4$	8.5	19.4	43.8	+ 95.4	- 0.47	- 1 963.9	0	0	
$U_4L_4$	6	12.9	46.6	- 67.5	+ 0.33	- 1 038.0	0	0	
$L_4U_5$	8.5	19.4	43.8	+ 159.3	+ 0.95	+ 6 628.5	0	0	
$U_5L_5$	6	12.9	46.6	+ 45.0	0	0	0	0	
$\Sigma = + 73 407.2$						$\Sigma = + 23 067.1$			

**EJEMPLO 9.2**

Determinar la componente vertical de deflexión del nudo  $L_4$  en la armadura de la fig. 9.4 con el método del trabajo virtual. Los números encerrados en círculos indican áreas según la siguiente equivalencia: ① = 6.5 cm<sup>2</sup>; ③ = 9.8 cm<sup>2</sup>; ② = 13 cm<sup>2</sup>; ④ = 19.5 cm<sup>2</sup>; ⑤ = 26 cm<sup>2</sup>;  $E = 200$  GPa.

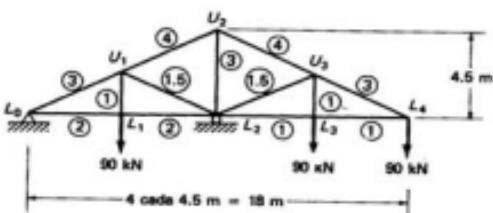


Figura 9.4

**Solución:**

Fuerzas debidas a las cargas externas:

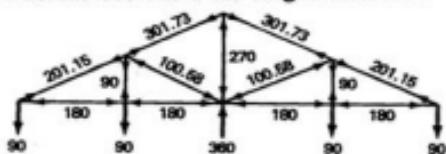
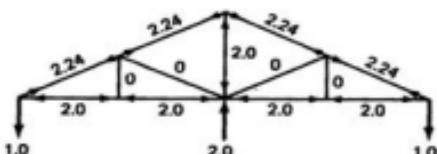
Fuerzas debidas a una carga vertical unitaria en  $L_4$ :

TABLA 9.2.

Barra	(m) $\ell$	(cm <sup>2</sup> ) $A$	(cm <sup>-1</sup> ) $\ell/A$	(kN) $F$	$\mu$	$F\mu\ell/AE$
$L_0L_1$	4.5	13.0	34.62	- 180.00	- 2.0	+ 12 463.2
$L_1L_2$	4.5	13.0	34.62	- 180.00	- 2.0	+ 12 463.2
$L_2L_3$	4.5	6.5	69.23	- 180.00	- 2.0	+ 24 922.8
$L_3L_4$	4.5	6.5	69.23	- 180.00	- 2.0	+ 24 922.8
$L_0U_1$	5	19.5	25.64	+ 201.15	+ 2.24	+ 11 552.8
$U_1U_2$	5	26.0	19.23	+ 301.73	+ 2.24	+ 12 997.1
$U_2U_3$	5	26.0	19.23	+ 301.73	+ 2.24	+ 12 997.1
$U_3L_4$	5	19.5	25.64	+ 201.15	+ 2.24	+ 11 552.8
$U_1L_1$	2.25	6.5	34.62	+ 90.00	0	0
$U_1L_2$	5	9.8	51.02	- 100.58	0	0
$U_2L_2$	4.50	19.5	23.08	- 270.00	- 2.00	+ 12 463.2
$L_2U_3$	5	9.8	51.02	- 100.58	0	0
$U_3L_3$	2.25	6.5	34.62	+ 90.00	0	0
						$\Sigma = \frac{136 335.0}{E}$

$$\text{deflexión vertical en } L_4 = \frac{136 335}{200 \times 10^2} = 6.82 \text{ cm} \downarrow$$

■ ■

## 9.5 CALCULO DE DEFLEXIONES EN VIGAS Y MARCOS MEDIANTE EL METODO DEL TRABAJO VIRTUAL

La ley de la conservación de la energía se puede emplear a fin de determinar una expresión para la deflexión en un punto cualquiera de una viga o marco. En la siguiente deducción se considera que cada fibra de la estructura es una "barra" o

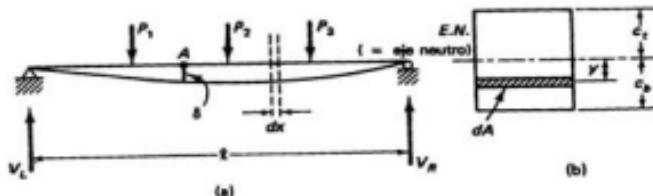


Figura 9.5

"elemento estructural" como los de las armaduras analizadas en las secciones precedentes. La suma del trabajo interno efectuado por la fuerza en cada una de las "barras" es igual al trabajo externo desarrollado por las cargas.

Para el análisis siguiente consideraremos la viga de la fig. 9.5(a). La parte (b) de la figura muestra la sección transversal de la viga. Se desea conocer la deflexión vertical  $\delta$  en el punto  $A$  de la viga, producida por las cargas externas  $P_1$  a  $P_3$ . Si se quitaran las cargas de la viga y se colocara una carga virtual unitaria en  $A$ , se producirían pequeñas fuerzas y deformaciones en las "barras" y aparecería una pequeña deflexión en  $A$ . Al colocar nuevamente las cargas externas se producirían incrementos en las fuerzas y en las deformaciones y la carga unitaria en  $A$  se desplazaría una cantidad adicional  $\delta$ . El trabajo interno desarrollado por las fuerzas producidas por la carga unitaria, al desplazarse según las deformaciones adicionales de las barras, es igual al trabajo externo realizado por la carga unitaria al desplazarse ésta la distancia adicional  $\delta$ .

Los siguientes símbolos se emplean para escribir una expresión para el trabajo interno desarrollado en una longitud  $dx$  de la viga:  $M$  es el momento en cualquier sección de la viga, debido a las cargas externas y  $m$  es el momento en cualquier sección debido a la carga unitaria. El esfuerzo en un área diferencial de la sección transversal de la viga, debido a la carga unitaria, puede encontrarse a partir de la ecuación de la flexión de la siguiente manera:

$$\text{esfuerzo unitario en } dA = \frac{my}{I}$$

$$\text{fuerza total en } dA = \frac{my}{I} dA$$

Al área  $dA$  corresponde una longitud diferencial  $dx$  que se deforma una cantidad  $\epsilon$  cuando las cargas externas se reintroducen a la estructura. La deformación es como sigue:

$$\text{esfuerzo unitario debido a las cargas externas} = f = \frac{My}{I}$$

$$\text{deformación en la longitud } dx = \epsilon dx = \frac{f}{E} dx = \frac{My}{EI} dx$$

La fuerza total en  $dA$  debida a la carga unitaria ( $my/I$ )  $dA$  se desplaza según esa deformación, y el trabajo que realiza es como sigue:

$$\text{trabajo en } dA = \left( \frac{my}{I} dA \right) \left( \frac{My}{EI} dx \right) = \frac{Mm y^2}{EI^2} dA dx$$

El trabajo total efectuado sobre la sección transversal es igual a la suma de los trabajos efectuados en cada área  $dA$  de la sección:

$$\text{trabajo} = \int_{C_s}^{C_t} \frac{Mm y^2}{EI^2} dA dx = \frac{Mm}{EI^2} \int_{C_s}^{C_t} y^2 dA dx$$

La expresión  $\int y^2 dA$  es bien conocida; se trata del momento de inercia de la sección, por lo que puede escribirse

$$\text{trabajo} = \frac{Mm}{EI} dx$$

Ahora es posible determinar el trabajo interno realizado en toda la viga, pues es igual a la integral de 0 a  $t$  de la expresión anterior:

$$W_i = \int_0^t \frac{Mm}{EI} dx$$

El trabajo externo efectuado por la carga unitaria al desplazarse ésta una distancia  $\delta$  es  $1 \times \delta$ . Igualando el trabajo externo con el interno, se tiene una expresión para la deflexión en cualquier punto de la viga.

$$\begin{aligned} W_e &= W_i \\ 1 \times \delta &= \int_0^t \frac{Mm}{EI} dx \\ \delta &= \int_0^t \frac{Mm}{EI} dx \end{aligned}$$

## 9.6 EJEMPLOS DE LA APLICACION DEL TRABAJO VIRTUAL EN VIGAS Y MARCOS

Los ejemplos 9.3 al 9.7 ilustran la aplicación del trabajo virtual a vigas y a marcos. Para aplicar el método se coloca una carga unitaria en el punto y en la dirección

## 9.6 Ejemplos de la aplicación del trabajo virtual en vigas y marcos

255

en que se busca la deflexión. Se escriben expresiones para  $M$  y  $m$  en toda la estructura y los resultados se integran entre 0 y  $\ell$ . Rara vez es posible escribir una expresión para  $M$  o una para  $m$  que sea correcta en toda la estructura. Por ejemplo, consideremos la viga de la fig. 9.6 en la que se busca la deflexión bajo la carga  $P_2$ . Se coloca una carga unitaria en este punto de la figura. Las reacciones  $V_L$  y  $V_R$  son debidas a las cargas  $P_1$  y  $P_2$ , en tanto que  $v_L$  y  $v_R$  son debidas a la carga unitaria.

Los valores de  $M$  y  $m$  se escriben con respecto a la distancia  $x$  desde el apoyo izquierdo. Del apoyo izquierdo a la carga unitaria,  $m$  puede representarse por una sola expresión,  $v_L x$ , pero la expresión para  $M$  no es constante en todo el tramo. Su valor es  $V_L x$  del apoyo izquierdo a  $P_1$  y  $V_L x - P_1(x - a)$  de  $P_1$  a  $P_2$ . La integración se efectúa de 0 hasta  $a$  para  $V_L x$  y  $v_L x$ , y de  $a$  hasta  $b$  para  $V_L x - P_1(x - a)$  y  $v_L x$ . A continuación se muestran las expresiones para todas las partes de la viga. El apoyo izquierdo se toma como el origen de  $x$ .

Para  $x = 0$  hasta  $a$ :

$$M = V_L x$$

$$m = v_L x$$

Para  $x = a$  hasta  $b$ :

$$M = V_L x - P_1(x - a)$$

$$m = v_L x$$

Para  $x = b$  hasta  $c$ :

$$M = V_L x - P_1(x - a) - P_2(x - a - b)$$

$$m = v_L x - 1(x - a - b)$$

$$S = \int_0^a \frac{Mm}{EI} dx + \int_a^{a+b} \frac{Mm}{EI} dx + \int_{a+b}^c \frac{Mm}{EI} dx$$

Se usa un signo positivo para un momento que produce tensión en las fibras inferiores de una viga. Si el resultado de la integración es positiva, la dirección usada para la carga unitaria es la dirección de la deflexión.

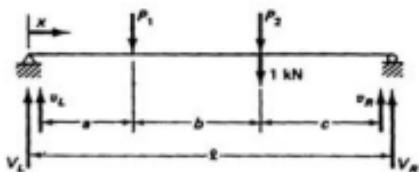


Figura 9.6

**EJEMPLO 9.3**

Determinar la deflexión en el punto *A* de la viga mostrada en la fig.9.7, empleando el método del trabajo virtual.

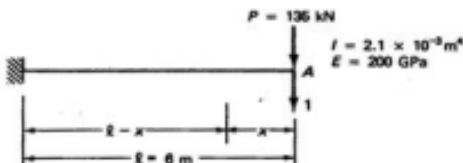


Figura 9.7

*Solución:*

Se escribe una expresión para *M* (el momento flexionante debido a la carga de 135 kN) en cualquier punto a una distancia *x* del extremo libre. Se coloca una carga unitaria en el extremo libre y se escribe una expresión para el momento *m* que ocurre en cualquier punto de la viga. El origen de las *x* puede fijarse en cualquier lugar, pero debe ser el mismo al escribir las expresiones para *M* y *m*.

$$M = -Px$$

$$m = -1x$$

$$\delta_A = \int_0^\ell \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^\ell \frac{(-Px)(-1x)}{EI} dx = \int_0^\ell \frac{Px^2}{EI} dx$$

$$\delta_A = \frac{P}{EI} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^\ell = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

$$\delta_A = \frac{(135)(6^3)}{(3)(200 \times 10^9)(2.1 \times 10^{-3})} = 0.023 \text{ m} \downarrow$$

■ ■

**EJEMPLO 9.4**

Determinar la deflexión en el punto *A* de la viga mostrada en la fig. 9.8.

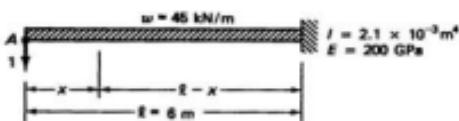


Figura 9.8

*Solución:*

$$M = -(w)(x) \left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{wx^2}{2}$$

$$m = -Ix$$

$$Mm = +\frac{wx^3}{2}$$

$$\delta_A = \int_0^\ell \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^\ell \frac{wx^3}{2EI} dx \\ = \frac{w}{2EI} \left(\frac{x^4}{4}\right)_0^\ell = \frac{w\ell^4}{8EI}$$

$$\delta_A = \frac{(45)(6^4)}{(8)(200 \times 10^9)(2.1 \times 10^{-3})} = 0.0174 \text{ m} \downarrow$$

■ ■

### EJEMPLO 9.5

Determinar la deflexión en el punto *B* de la viga mostrada en la fig. 9.9.

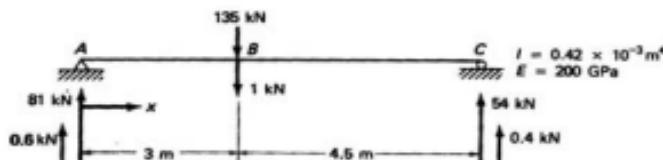


Figura 9.9

*Solución:*

Es necesario escribir una expresión para *M* de *A* a *B* y otra de *B* a *C*. Para *m* se debe proceder de la misma manera. Con frecuencia es posible simplificar el álgebra usando diferentes orígenes para la *x* en diferentes secciones de la viga. Se tendrían los mismos resultados si las expresiones para *M* y *m* entre *B* y *C* se hubiesen escrito con el origen en *C*. Las pequeñas reacciones en *A* y *C* son aquellas debidas a la carga unitaria.

Para *x* = 0 hasta 3:

$$M = 81x$$

$$m = 0.6x$$

$$Mm = 48.6x^2$$

Para *x* = 3 hasta 7.5:

$$M = 81x - (135)(x - 3) = -54x + 405$$

$$\begin{aligned}
 m &= 0.6x - 1(x - 3) = -0.4x + 3 \\
 Mm &= 21.6x^2 - 324x + 1215 \\
 \delta_B &= \int_0^3 \frac{48.6x^2}{EI} dx + \int_3^{7.5} \frac{(21.6x^2 - 324x + 1215)}{EI} dx \\
 &= \frac{1}{EI} [16.2x^3]_0^3 + \frac{1}{EI} [7.2x^3 - 162x^2 + 1215x]_3^{7.5} \\
 &= \frac{437.4}{EI} + \frac{13\,608 - 12\,951.9}{EI} \\
 &= \frac{1\,093.5 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} = 0.0130 \text{ m} \quad \blacksquare \blacksquare
 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 9.6**

Determinar la deflexión en el punto *B* de la viga del ejemplo 8.12, que se reproduce en la fig. 9.10.

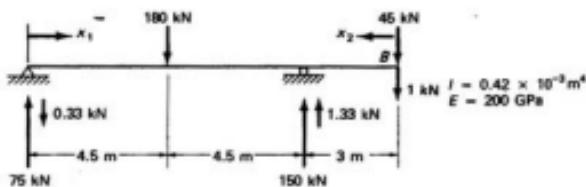


Figura 9.10

*Solución:*

Al escribir las expresiones para los momentos entre los apoyos, se usa el apoyo izquierdo como origen para *x*. Para la sección en voladizo de la viga, el borde libre se usa como origen.

Para  $x_1 = 0$  hasta 4.5:

$$M = 75x$$

$$m = -0.33x$$

$$Mm = -25x^2$$

Para  $x_1 = 4.5$  hasta 9:

$$M = 75x - (180)(x - 4.5)$$

$$M = -105x + 810$$

$$m = -0.33x$$

$$Mm = +35x^2 - 270x$$

Para  $x_2 = 0$  hasta 3:

$$\begin{aligned}
 M &= -45x \\
 m &= -x \\
 Mm &= +45x^2 \\
 \delta_B &= \frac{1}{EI} \int_0^{4.5} (-25x^2) dx + \frac{1}{EI} \int_{1.5}^9 (35x^2 - 270x) dx \\
 &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^3 (45x^2) dx \\
 &= \frac{1}{EI} [-8.33x^3]_0^{4.5} + \frac{1}{EI} [11.67x^3 - 135x^2]_{1.5}^9 + \frac{1}{EI} [15x^3]_0^3 \\
 &= \frac{-759.07}{EI} + \frac{-11\,998.43}{EI} + \frac{11\,241.18}{EI} + \frac{405}{EI} \\
 &= -\frac{1\,111.32 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} = -0.0132 \text{ m} \uparrow
 \end{aligned}$$

### EJEMPLO 9.7

Encontrar la deflexión horizontal en  $D$  en el marco mostrado en la fig. 9.11.

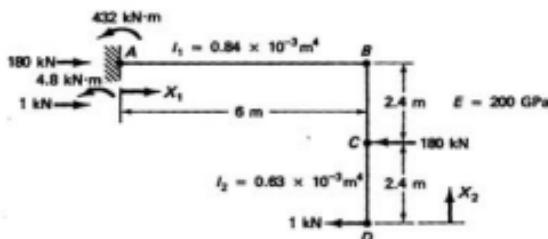


Figura 9.11

#### Solución:

Se coloca una carga unitaria que actúa horizontalmente hacia la izquierda en  $D$ . Se escriben las expresiones para  $M$  y  $m$  en el elemento  $AB$  con el origen para  $x$  en  $A$ . Para el elemento vertical, el origen se toma en  $D$  y se escribe un par de expresiones para  $M$  y  $m$  entre  $D$  y  $C$  y otra entre  $C$  y  $B$ . Los elementos no tienen el mismo momento de inercia y esto hay que considerarlo al escribir las expresiones para cada elemento.



Paso a desnivel I-40, I-240, Ciudad de Oklahoma, Oklahoma. (Cortesía del Departamento de Transporte del Edo. de Oklahoma.)

Para  $x_1$  desde 0 hasta 6:

$$M = -432$$

$$m = -4.8$$

$$Mm = +2\,073.6$$

Para  $x_2$  desde 0 hasta 2.4:

$$M = 0$$

$$m = -x$$

$$Mm = 0$$

Para  $x_2$  desde 2.4 hasta 4.8:

$$M = -180(x - 2.4)$$

$$m = -x$$

$$Mm = 180x^2 - 432x$$

$$\begin{aligned}\delta_D &= \int_0^6 \left( \frac{2\,073.6}{EI_1} \right) dx + \int_{2.4}^{4.8} \left( \frac{180x^2 - 432x}{EI_2} \right) dx \\ &= \frac{1}{EI_1} [2\,073.6x]_0^6 + \frac{1}{EI_2} \left( 60x^3 - 216x^2 \right) \Big|_{2.4}^{4.8} \\ &= \frac{12441.6 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI_1} + \frac{2073.6 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI_2} = +0.0905 \text{ m} \leftarrow\end{aligned}$$



## 9.7 Cálculo de rotaciones por medio del trabajo virtual

261

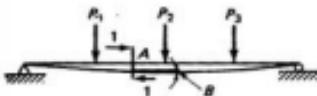


Figura 9.12

### 9.7 CALCULO DE ROTACIONES POR MEDIO DEL TRABAJO VIRTUAL

El método del trabajo virtual puede emplearse para determinar las rotaciones o pendientes en varios puntos de una estructura. Para encontrar la pendiente en el punto *A* de la viga de la fig. 9.12, se aplica un par unitario en *A*, sin que actúen las cargas externas. El valor del momento en un punto cualquiera de la viga causado por este par es *m*. Al actuar las cargas externas se tendrá un momento adicional en cualquier punto del valor *M*.

Si la aplicación de las cargas ocasiona una rotación  $\theta$  en el punto *A* de la viga, el trabajo externo realizado por el par es igual a  $1 \times \theta$ . El trabajo interno o la energía interna elástica almacenada es  $\int (Mm/EI) dx$ .

$$\theta = \int \frac{Mm}{EI} dx$$

Si el par unitario aplicado en la posición donde se busca la pendiente es positivo y el resultado de la integración es positiva, la rotación será también positiva, o sea que tendrá el mismo sentido rotacional que el par. Los ejemplos 9.8 y 9.9 ilustran el cálculo de pendientes con el método del trabajo virtual. Las pendientes que se especifican estarán en radianes.

#### EJEMPLO 9.8

Encontrar la pendiente en el borde libre *A* de la viga mostrada en la fig. 9.13.

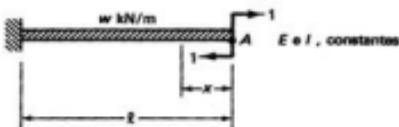


Figura 9.13

*Solución:*

$$M = -\frac{wx^2}{2}$$

$$m = -1$$

$$Mm = \frac{wx^2}{2}$$

$$\theta_A = \int_0^{\ell} \frac{wx^2}{2EI} dx$$

$$\theta_A = \left[ \frac{wx^3}{6EI} \right]_0^{\ell} = +\frac{w\ell^3}{6EI} \text{ en el sentido de las manecillas del reloj}$$

■ ■

### EJEMPLO 9.9

Encontrar la pendiente bajo la carga de 135 kN en la viga de la fig. 9.14.

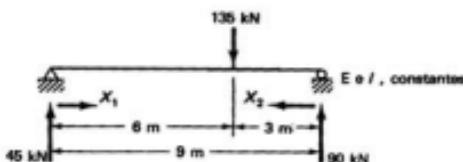
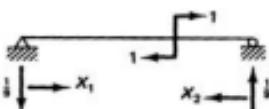


Figura 9.14

*Solución:*

Se dibuja por separado un diagrama para el par y las reacciones que éste produce. En la parte de la viga a la izquierda de la carga, el apoyo izquierdo se usa como origen de las  $x$ , y en la parte a la derecha se fija el origen en el apoyo derecho.



Para  $x_1$  desde 0 hasta 6:

$$M = 45x$$

$$m = -\frac{1}{9}x$$

$$Mm = -5x^2$$

Para  $x_2$  desde 0 hasta 3:

$$M = 90x$$

$$\begin{aligned}
 m &= -\frac{1}{9}x \\
 Mm &= 10x^2 \\
 \theta &= \int_0^6 \left( -\frac{-5x^2}{EI} \right) dx + \int_0^3 \left( \frac{10x^2}{EI} \right) dx \\
 &= \left[ -\frac{5x^3}{3EI} \right]_0^6 + \left[ \frac{10x^3}{3EI} \right]_0^3 = -\frac{360 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} + \frac{90 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \\
 &= -\frac{270 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}, \text{ sentido contrario al de las manecillas del reloj}
 \end{aligned}$$

■ ■

## 9.8 TEOREMA DE MAXWELL SOBRE LAS DEFLEXIONES RECIPROCAS

Existe una sorprendente relación entre las deflexiones de dos puntos en una estructura. Es posible que el lector haya observado esta relación, que fue publicada por primera vez por James Clerk Maxwell en 1864. El teorema de Maxwell puede enunciarse de la siguiente manera: **la deflexión en un punto  $A$  de una estructura debida a una carga aplicada en otro punto  $B$ , es exactamente la misma que la deflexión que se obtendría en  $B$  si la misma carga se aplicara en  $A$ .** Este teorema se aplica a cualquier tipo de estructura (armadura, viga, marco, etc.) que esté hecha de material elástico que obedezca la ley de Hooke. Los desplazamientos pueden ser causados por flexión, cortante o torsión. Este teorema tiene frecuente aplicación en la preparación de líneas de influencia de estructuras continuas, en el análisis de estructuras hiperestáticas y en el análisis de modelos.

El teorema no sólo es aplicable a deflexiones sino también a rotaciones. Por ejemplo, un par unitario en  $A$  producirá una rotación en  $B$  igual a la rotación producida en  $A$  si el mismo par se aplica en  $B$ .

En el ejemplo 9.10 se evidencia el teorema en una viga simplemente apoyada cuyas deflexiones se calculan con ayuda de la viga conjugada.

### EJEMPLO 9.10

Calcular las deflexiones en los puntos  $A$  y  $B$  para una carga aplicada primero en  $B$  y luego en  $A$  de la viga mostrada en la fig.9.15.

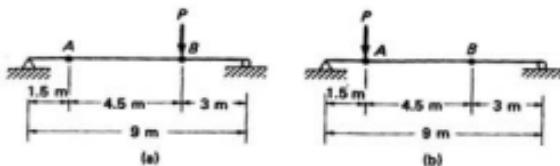
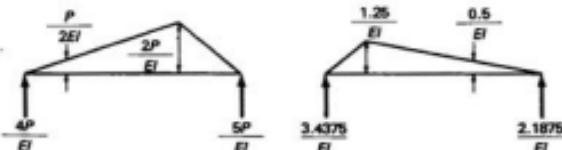


Figura 9.15

*Solución:*



La deflexión en *A* debida a la carga en *B* es:

$$\begin{aligned}\delta_A &= \left(\frac{4P}{EI}\right)(1.5) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{P}{2EI}\right)(1.5)(0.5) \\ &= \frac{6P}{EI} - \frac{1.5P}{8EI} \\ &= \frac{5.8125}{EI}\end{aligned}$$

La deflexión en *B* debida a la carga en *A* es:

$$\begin{aligned}\delta_B &= \left(\frac{2.1875P}{EI}\right)(3) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{0.5P}{EI}\right)(3)(1) \\ &= \frac{6.5625P}{EI} - \frac{0.75P}{EI} \\ &= \frac{5.8125P}{EI}\end{aligned}$$

■ ■

## 9.9 INTRODUCCIÓN A LOS TEOREMAS DE CASTIGLIANO

Alberto Castigliano, ingeniero de los ferrocarriles italianos, publicó en 1879 un original y elaborado tratado sobre las estructuras estáticamente indeterminadas. En este libro estaban incluidos los dos teoremas que actualmente se conocen como el primero y segundo teoremas de Castigliano. Ambos teoremas habían sido ya presentados por su autor en 1876 en una publicación científica. El segundo teorema fue presentado por Castigliano en 1873 como una tesis para recibir su diploma de ingeniero en la Universidad de Turín [1].

El primer teorema proporciona un método importante para el cálculo de deflexiones. Su aplicación implica igualar la deflexión a la primera derivada parcial del trabajo interno total de la estructura, respecto a una carga situada en el punto donde se busca la deflexión. El segundo teorema de Castigliano, conocido comúnmente como *el método del trabajo mínimo*, proporciona un método muy importante para el análisis de las estructuras estáticamente indeterminadas. En este teorema, la primera derivada parcial del trabajo interno con respecto a cada redundante se hace igual a cero.

Al presentar el método del trabajo virtual para vigas y marcos en la sección 9.5, los autores derivaron la ecuación para expresar el trabajo interno total realizado por los esfuerzos producidos por una carga unitaria colocada en el punto y en la dirección de la deflexión buscada, después de que las cargas externas se han vuelto a colocar sobre la estructura.

$$W = \int \frac{Mm}{EI} dx$$

El trabajo interno de los esfuerzos reales causado por la aplicación gradual de las cargas externas puede determinarse de manera análoga. El trabajo en cada fibra es igual al esfuerzo promedio,  $(My/2I) da$  (al variar las cargas externas de cero a su valor total) multiplicado por la deformación total en la fibra,  $(My/EI) dx$ . Integrando el producto de esas dos expresiones para la sección transversal del elemento sobre toda la estructura, se tiene el trabajo interno total o energía de deformación para la estructura completa.

$$W = \int_0^t \frac{M^2 dx}{2EI}$$

De manera similar, el trabajo interno en las barras de una armadura, debido a un conjunto de cargas aplicadas gradualmente puede expresarse como

$$W = \sum \frac{F^2 \ell}{2AE}$$

Estas expresiones serán usadas frecuentemente en la próxima sección en la que se analiza con detalle el primer teorema de Castigliano.

## 9.10 PRIMER TEOREMA DE CASTIGLIANO

En general, los otros métodos para el cálculo de deflexiones (viga conjugada y trabajo virtual) son un poco más sencillos en su aplicación y más populares que el primer teorema de Castigliano. Sin embargo, para ciertas estructuras este método es muy útil y su estudio sirve al lector de base para el muy importante segundo teorema.

La derivación del primer teorema (presentada en esta sección) es muy parecida a la realizada por Kinney [2]. La fig. 9.16 muestra una viga sujeta a las cargas gradualmente aplicadas  $P_1$  y  $P_2$ . Estas cargas producen las deflexiones  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . Se desea encontrar la deflexión  $\delta_1$  bajo la carga  $P_1$ .

El trabajo externo realizado durante la aplicación de las cargas es igual a la carga promedio multiplicada por la deflexión y es también igual a la energía de deformación interna de la viga.

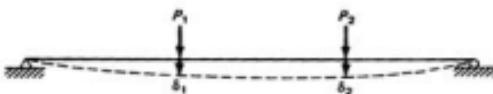


Figura 9.16

$$W = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} \quad (9.1)$$

Si la carga \$P\_1\$ se incrementa una pequeña cantidad \$dP\_1\$, la viga sufrirá una deflexión adicional. La fig.9.17 muestra las deflexiones adicionales \$d\delta\_1\$ y \$d\delta\_2\$ bajo cada una de las cargas.

El trabajo adicional realizado o energía de deformación almacenada durante la aplicación de \$dP\_1\$ es:

$$dW = \left( P_1 + \frac{dP_1}{2} \right) d\delta_1 + P_2 d\delta_2$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas e ignorando el producto de los diferenciales,

$$dW = P_1 d\delta_1 + P_2 d\delta_2 \quad (9.2)$$

Se procede de la misma manera, excepto que las cargas \$P\_1\$, \$P\_2\$ y \$dP\_1\$ se aplican todas al mismo tiempo y la energía total de deformación se denomina \$W'\$.

$$W' = \left( \frac{P_1 + dP_1}{2} \right) (\delta_1 + d\delta_1) + \left( \frac{P_2}{2} \right) (\delta_2 + d\delta_2)$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas e ignorando el producto de los diferenciales,

$$W' = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_1 d\delta_1}{2} + \frac{dP_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \frac{P_2 d\delta_2}{2} \quad (9.3)$$

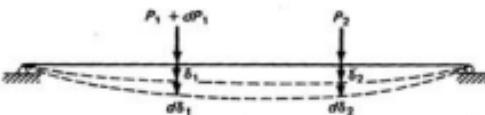


Figura 9.17

## 9.10 Primer teorema de Castigiano

267

Es claro que  $dW = W' - W$  y que puede determinarse restando la ecuación (9.1) de la (9.3):

$$\begin{aligned} dW &= \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_1 d\delta_1}{2} + \frac{dP_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \frac{P_2 d\delta_2}{2} - \frac{P_1 \delta_1}{2} - \frac{P_2 \delta_2}{2} \\ &= \frac{P_1 d\delta_1}{2} + \frac{dP_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 d\delta_2}{2} \end{aligned} \quad (9.4)$$

El valor de  $P_2 d\delta_2$  puede determinarse de la ec.(9.2) de la siguiente manera:

$$P_2 d\delta_2 = dW - P_1 d\delta_1$$

Sustituyendo este valor en la ec.(9.4) y despejando la deflexión  $\delta_1$ ,

$$\begin{aligned} dW &= \frac{P_1 d\delta_1}{2} + \frac{dP_1 \delta_1}{2} + \frac{dW}{2} - \frac{P_1 d\delta_1}{2} \\ \delta_1 &= \frac{dW}{dP_1} \end{aligned}$$



Puente sobre la carretera costera del Pacífico, México. (Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)

Como generalmente se aplica más de acción a una estructura, esta deflexión se escribe por lo común como una derivada parcial:

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial P}$$

Para determinar la deflexión en un punto de una viga o marco, el primer teorema se escribe del modo siguiente:

$$\delta = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{M^2}{2EI} dx$$

De acuerdo con esta expresión,  $M$  debe elevarse al cuadrado, integrarse y calcular luego la primera derivada parcial. Sin embargo, si  $M$  tiene una forma algebraica complicada, como es frecuente el caso, el proceso puede resultar muy tedioso. Por esta razón generalmente es más sencillo diferenciar bajo el signo de integral con el siguiente resultado:

$$\delta = \int M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$$

En una armadura es aconsejable seguir el mismo procedimiento, teniéndose entonces:

$$\delta = \frac{\partial}{\partial P} \sum \frac{F^2 \ell}{2AE}$$

$$\delta = \sum F \left( \frac{\partial F}{\partial P} \right) \frac{\ell}{AE}$$

Los ejemplos 9.11 al 9.14 ilustran la aplicación del primer teorema de Castigliano. Al aplicar el teorema a la carga situada en el punto donde se busca la deflexión se le llama  $P$ . Después de efectuar las operaciones algebraicas en las expresiones correspondientes se reemplaza en éstas el valor numérico de  $P$ . Si no se tiene una carga en el punto o en la dirección de la deflexión buscada, se coloca una fuerza  $P$  imaginaria en esa posición. Después de terminar las operaciones, el valor correcto de  $P$  (cero) se sustituye en la expresión (véase el ejemplo 9.12).

Si es una rotación o una pendiente lo que se busca, la derivada parcial se toma respecto a un momento supuesto  $P$  que actúa en el punto donde se quiere lograr el giro (véase ejemplo 9.14). Si la respuesta numérica resulta positiva, esto quiere decir que la rotación es en el mismo sentido que la supuesta para el momento  $P$ .

**EJEMPLO 9.11**

Determinar la deflexión vertical bajo la carga de 45 kN en la viga mostrada en la fig. 9.18.

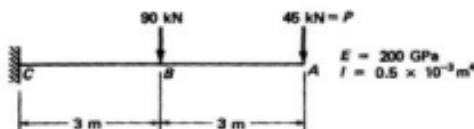


Figura 9.18

*Solución:*

Llamamos  $P$  a la carga de 45 kN.

TABLA 9.3

Sección	$M$	$\frac{\partial M}{\partial P}$	$M \frac{\partial M}{\partial P}$	$\int M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$
De $A$ a $B$	$-Px$	$-x$	$+Px^2$	$\int_0^3 (Px^2) \frac{dx}{EI} = \frac{9P}{EI}$
De $B$ a $C$	$-P(x + 3)$ $-90x$	$-x - 3$	$Px^2 + 6Px + 90x^2 + 9P + 270x$	$\int_0^3 (Px^2 + 6Px + 90x^2 + 9P + 270x) \frac{dx}{EI}$ $= \frac{63P + 2.025}{EI}$
$\Sigma$				$\frac{72P + 2.025}{EI}$

$$\delta = \frac{72P + 2.025}{EI} = \frac{5.256}{EI} = 0.0526 \text{ m} \quad \blacksquare \blacksquare$$

**EJEMPLO 9.12**

Determinar la deflexión vertical en el extremo libre de la viga en voladizo mostrada en la fig. 9.19.

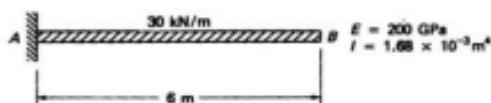


Figura 9.19

*Solución:*

Colocamos una carga imaginaria  $P$  en el extremo libre.

TABLA 9.4

Sección	$M$	$\frac{\partial M}{\partial P}$	$M \frac{\partial M}{\partial P}$	$\int M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$
De $B$ a $A$	$-Px - 15x^2$	$-x$	$Px^2 + 15x^3$	$\int_0^6 (Px^2 + x^3) \frac{dx}{EI} = \frac{4860}{EI}$
$\Sigma$				$\frac{4860}{EI}$

$$\delta = 0.0145 \text{ m} \quad \blacksquare \blacksquare$$

### EJEMPLO 9.13

Determinar la deflexión vertical bajo la carga de 135 kN en la viga de la fig. 9.20.

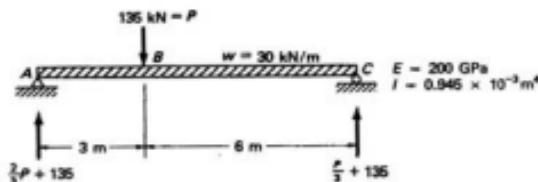


Figura 9.20

*Solución:*

La carga de 135 kN se reemplaza por  $P$ . Obsérvese que las reacciones de la viga se calculan con una carga de  $P$  en el punto  $B$  y no con una de 135 kN.

TABLA 9.5

Sección	$M$	$\frac{\partial M}{\partial P}$	$M \frac{\partial M}{\partial P}$	$\int M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$
De $A$ a $B$	$\frac{2}{3}Px + 135x - 15x^2$	$\frac{2}{3}x$	$\frac{4}{9}Px^2 + 90x^3 - \frac{10}{3}x^4$	$\frac{1}{EI} \int_0^3 \left( \frac{4}{9}Px^2 + 90x^3 - \frac{10}{3}x^4 \right) dx$
De $C$ a $B$	$\frac{P}{3}x + 135x - 15x^2$	$\frac{x}{3}$	$\frac{Px^2}{9} + 45x^3 - \frac{5}{3}x^4$	$\frac{1}{EI} \int_3^6 \left( \frac{Px^2}{9} + 45x^3 - \frac{5}{3}x^4 \right) dx$

Efectuando las operaciones indicadas se obtiene  $\delta = 0.02036 \text{ m} \quad \blacksquare \blacksquare$

**EJEMPLO 9.14**

Encontrar la pendiente en el extremo libre de la viga en voladizo del ejemplo 9.11. La viga está dibujada nuevamente en la fig. 9.21.

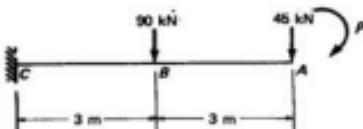


Figura 9.21

*Solución:*

Se supone un momento  $P$  horario actuando en el extremo libre como se muestra en la figura.

TABLA 9.6

Sección	$M$	$\frac{\partial M}{\partial P}$	$M \frac{\partial M}{\partial P}$	$\int M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$
De $A$ a $B$	$-45x - P$	$-1$	$45x + P$	$\frac{1}{EI} \int_0^3 (45x + P) dx$
De $B$ a $C$	$-135x - P$ $-135$	$-1$	$135x + P$ $+135$	$\frac{1}{EI} \int_3^6 (135x + P + 135) dx$

Efectuando las operaciones indicadas se tiene  $\theta = +0.0124$  rad. ■ ■

**9.11 SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO**

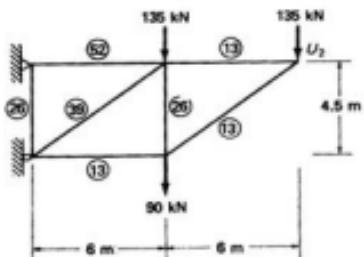
El segundo teorema de Castigliano, conocido comúnmente como el método del trabajo mínimo, ha desempeñado un papel histórico muy importante en el desarrollo del análisis estructural de las estructuras estáticamente indeterminadas. El método, hoy en día usado rara vez, está íntimamente relacionado con los métodos de análisis que se presentan en el capítulo 11 de este texto. Los lectores interesados en aprender el segundo teorema pueden consultar el apéndice A de este libro, donde se presenta junto con varios ejemplos numéricos.

**PROBLEMAS**

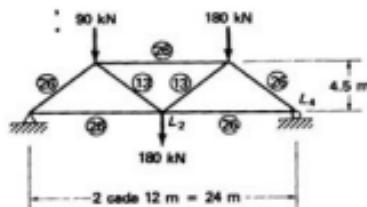
En los problemas 9.1 al 9.6, determine usando el método del trabajo virtual, las deflexiones en cada uno de los nudos indicados de las armaduras mostradas en las figuras correspondientes.

tes. Los números encerrados en círculos son áreas en centímetros cuadrados y  $E = 200 \text{ GPa}$ , excepto en los problemas que indiquen otro valor.

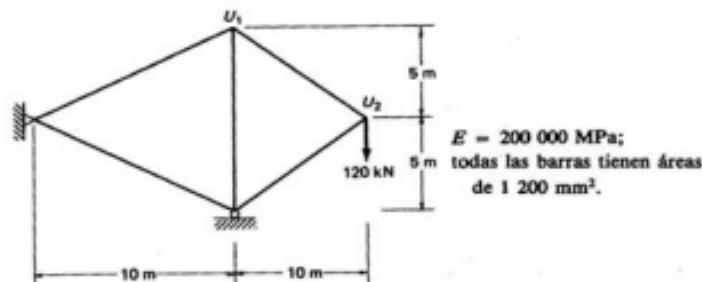
### 9.1 $U_2$ vertical, $U_2$ horizontal

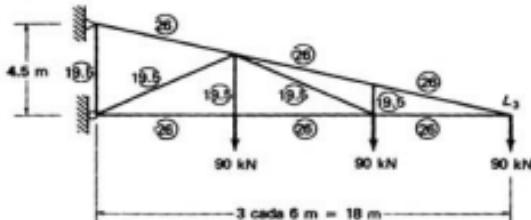
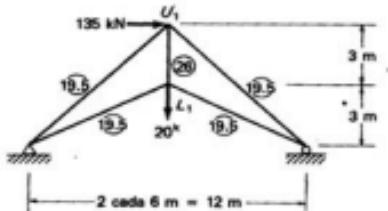
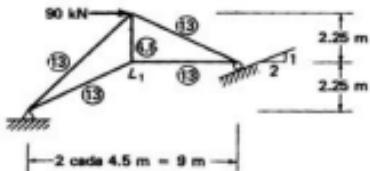


### 9.2 $L_2$ vertical, $L_4$ horizontal (Resp.: $L_2 = 3.84 \text{ cm}^{\frac{1}{2}}$ , $L_4 = 1.38 \text{ cm}^{\frac{1}{2}}$ →)

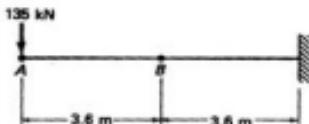


### 9.3 $U_2$ vertical, $U_1$ horizontal

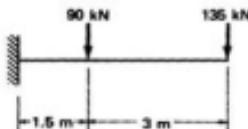


9.4  $L_3$  vertical (Resp.:  $L_3 = 13.91 \text{ cm} \downarrow$ )9.5  $U_1$  vertical,  $L_1$  horizontal9.6  $L_1$  vertical,  $L_1$  horizontal (Resp.:  $L_1 = 0.359 \text{ cm} \downarrow, 0.325 \text{ cm} \rightarrow$ )

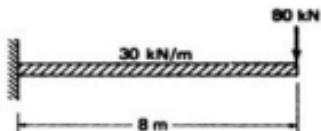
Usar el método del trabajo virtual para resolver los problemas 9.7 al 9.30.  $E = 200 \text{ GPa}$ , excepto donde se indique otro valor.

9.7 Determine la pendiente y la deflexión en los puntos  $A$  y  $B$  de la estructura mostrada en la figura.  $I = 0.84 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ 

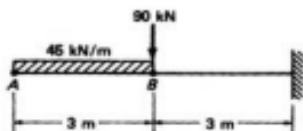
- 9.8 Determine la pendiente y la deflexión debajo de cada una de las cargas concentradas mostradas en la figura.  $I = 1.47 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  (Resp.:  $\theta_{90} = 0.00293 \text{ rad}$ ,  $\theta_{135} = 0.00499 \text{ rad}$ ,  $\delta_{90} = 0.00241 \text{ m}$ ,  $\delta_{135} = 0.0153 \text{ m}$ )



- 9.9 Encuentre la pendiente y la deflexión en el extremo libre de la viga mostrada en la figura.  $I = 2.35 \times 10^9 \text{ mm}^4$   $E = 200\,000 \text{ MPa}$ .



- 9.10 Encuentre las deflexiones en los puntos  $A$  y  $B$  de la viga mostrada en la figura.  $I = 1.47 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  (Resp.:  $\delta_A = 0.028 \text{ m}$ ,  $\delta_B = 0.00998 \text{ m}$ )

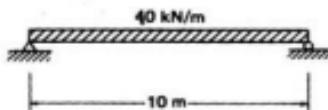


- 9.11 Resuelva el problema 8.19.

- 9.12 Determine la pendiente y la deflexión en el punto situado a 3.6 m del extremo derecho de la viga del problema 8.19. (Resp.:  $\theta_{3.6} = 0.00324 \text{ rad}$ ,  $\delta_{3.6} = 0.0163 \text{ m}$ )

- 9.13 Encuentre la pendiente y la deflexión bajo la carga de 135 kN del problema 8.21.

- 9.14 Calcule la pendiente y la deflexión en un punto situado a 3 m del apoyo izquierdo de la viga mostrada en la figura.  $I = 2.5 \times 10^8 \text{ mm}^4$   $E = 200\,000 \text{ MPa}$ . (Resp.:  $\theta = 0.00141 \text{ rad}$ ,  $\delta = 7.74 \text{ mm}$ )

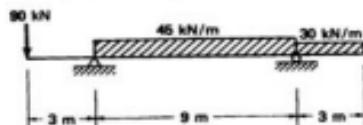


**9.15** Resuelva el problema 8.34.

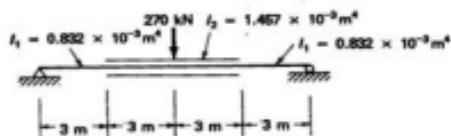
**9.16** Resuelva el problema 8.36. (Resp.:  $\theta = 0.00227 \text{ rad}^{\circ}$ ,  $\delta = 0.00381 \text{ m}^{\dagger}$ )

**9.17** Resuelva el problema 8.39.

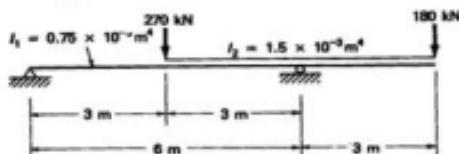
**9.18** Determine la deflexión en el centro y la pendiente en el extremo derecho de la viga mostrada en la figura.  $I = 0.874 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  (Resp.:  $\delta = 0.0103 \text{ m}^{\dagger}$ ,  $\theta = 0.00241 \text{ rad}^{\circ}$ )



**9.19** Calcule la deflexión bajo la carga de 270 kN en la estructura mostrada en la figura.



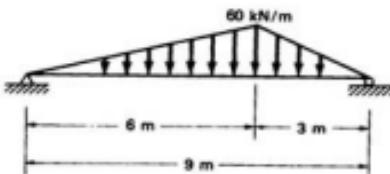
**9.20** Calcule la pendiente y la deflexión bajo la carga de 270 kN mostrada en la figura. (Resp.:  $\theta_{270} = 0.000675 \text{ rad}^{\circ}$ ,  $\delta_{270} = 0.000675 \text{ m}^{\dagger}$ )



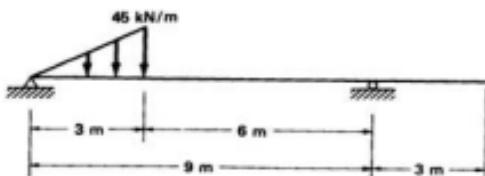
**9.21** Calcule la pendiente y la deflexión bajo la carga de 60 kN en la estructura mostrada en la figura.  $I = 1.46 \times 10^9 \text{ mm}^4$   $E = 200\,000 \text{ MPa}$ .



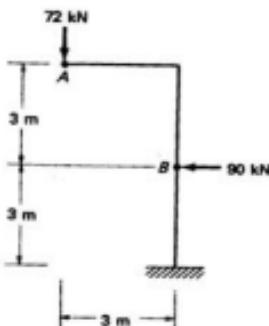
- 9.22 Encuentre la pendiente y la deflexión en un punto situado a 6 m del apoyo izquierdo de la viga mostrada.  $I = 0.94 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ . (Resp.:  $\theta_6 = 0.00287 \text{ rad/}^\circ$ ,  $\delta_6 = 0.0149 \text{ m}^\circ$ )



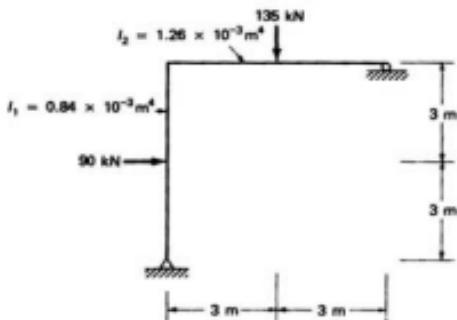
- 9.23 Calcule la pendiente y la deflexión en el extremo libre de la viga mostrada.  $I = 1.35 \times 10^{-3} \text{ m}^4$



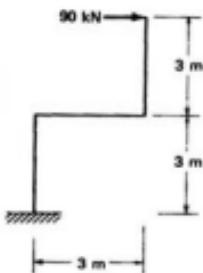
- 9.24 Encuentre la deflexión vertical en el punto *A* y la deflexión horizontal en el punto *B* del marco mostrado.  $I = 1.66 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ . (Resp.:  $\delta_A = 0.0173 \text{ m}^\downarrow$ ,  $\delta_B = 0.0054 \text{ m}^\leftarrow$ )



- 9.25 Determine la deflexión horizontal bajo la carga de 90 kN y la pendiente bajo la carga de 135 kN en el marco mostrado.



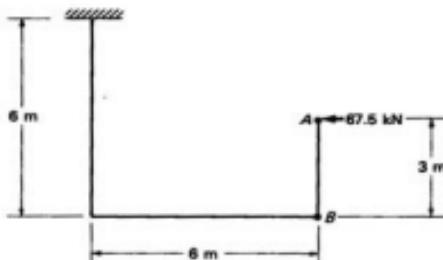
- 9.26 Encuentre las componentes horizontal y vertical de la deflexión bajo la carga de 90 kN en el marco mostrado.  $I = 0.63 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ . (Resp.:  $\delta_{90} = 0.0707 \text{ m} \rightarrow$ ,  $0.0386 \text{ m} \downarrow$ )



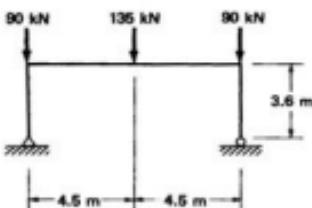
- 9.27 Determine las componentes vertical y horizontal de la deflexión en el extremo libre del marco mostrado.  $I = 2.60 \times 10^9 \text{ mm}^4$ .  $E = 200\,000 \text{ MPa}$ .



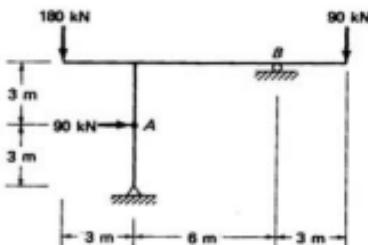
- 9.28 Encuentre la deflexión horizontal en el punto *A* y la deflexión vertical en el punto *B* en el marco mostrado.  $I = 0.504 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ . (Resp.:  $\delta_A = 0.0542 \text{ m} \rightarrow$ ,  $\delta_B = 0.0362 \text{ m} \downarrow$ )



- 9.29 Calcule la deflexión horizontal en el rodillo de apoyo y la deflexión vertical bajo la carga de 135 kN en el marco mostrado.  $I = 0.63 \times 10^{-3} \text{ m}^4$

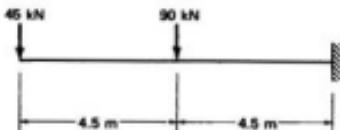


- 9.30 Encuentre las deflexiones horizontales en los puntos *A* y *B* del marco mostrado.  $I = 1.26 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ . (Resp.:  $\delta_A = 0.0032 \text{ m} \rightarrow$ ,  $\delta_B = 0.00161 \text{ m} \rightarrow$ )

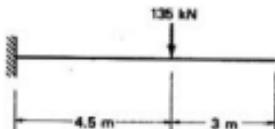


En los problemas 9.31 al 9.46 utilice el primer teorema de Castigiano para determinar las pendientes y las deflexiones indicadas.  $E = 200 \text{ GPa}$ . Las cifras encerradas en círculos son áreas de secciones transversales en centímetros cuadrados.

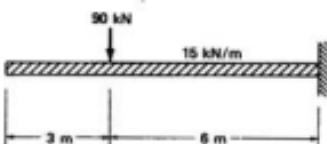
**9.31 Deflexión bajo cada carga;  $I = 1.365 \times 10^{-3} \text{ m}^4$**



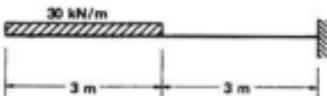
**9.32 Pendiente y deflexión en el extremo libre;  $I = 0.546 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ . (Resp.:  $\theta = 0.0125 \text{ rad}^\circ$ ,  $\delta = 0.0751 \text{ m}^\dagger$ )**



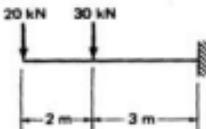
**9.33 Pendiente y deflexión bajo la carga de 90 kN;  $I = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^4$**



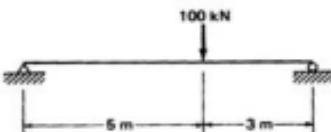
**9.34 Deflexión en cada extremo de la carga uniforme;  $I = 0.42 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ . (Resp.:  $\delta_1 = 0.049 \text{ m}^\dagger$ ,  $\delta_2 = 0.0168 \text{ m}^\dagger$ )**



9.35 Deflexión bajo cada carga;  $I = 40\,000 \text{ mm}^4$

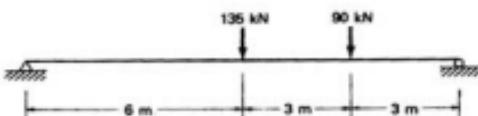


9.36 Pendiente y deflexión bajo la carga de 100 kN.  $I = 1.798 \times 10^8 \text{ mm}^4$ . (Resp.:  $\theta = -0.00348 \text{ rad}/$ ,  $\delta = 26.07 \text{ mm} \downarrow$ )

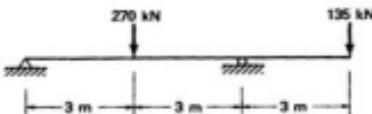


9.37 Resuelva el problema 8.8.

9.38 Deflexión bajo cada carga;  $I = 0.735 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ . (Resp.:  $\delta_{135} = 0.0482 \text{ m} \downarrow$ ,  $\delta_{90} = 0.0351 \text{ m} \downarrow$ )



9.39 Pendiente y deflexión bajo la carga de 270 kN.  $I = 1.134 \times 10^{-3} \text{ m}^4$



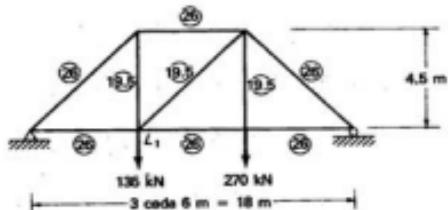
9.40 Resuelva el problema 8.43. (Resp.:  $\theta = 0.0150 \text{ rad} \backslash$ ,  $\delta = 0.0422 \text{ m} \downarrow$ )

9.41 Resuelva el problema 9.26.

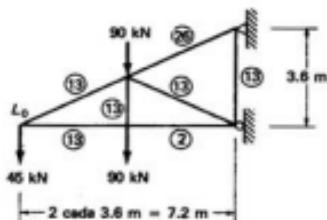
9.42 Resuelva el problema 9.23. (Resp.:  $\theta = -0.000700 \text{ rad} /$ ,  $\delta = 0.0021 \text{ m} \downarrow$ )

9.43 Resuelva el problema 9.27.

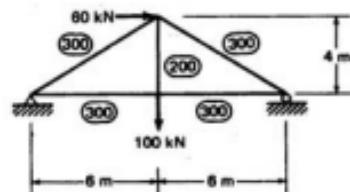
9.44 Deflexión vertical en el nudo  $L_1$ . (Resp.:  $\delta = 0.0164 \text{ m}^4$ )



9.45 Deflexión vertical y horizontal en  $L_0$



9.46 Deflexión vertical en  $L_1$  y deflexión horizontal en  $L_2$ . (Resp.:  $\delta_v = 45.2 \text{ mm}^4$ ,  $\delta_H = 21 \text{ mm}$  →)



## REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. J. S. Kinney, *Indeterminate Structural Analysis* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957), pág. 13.
2. *Ibid.* págs. 84-86.

---

# Introducción a las estructuras estáticamente indeterminadas, métodos aproximados de análisis

## 10.1 GENERALIDADES

Cuando una estructura tiene más reacciones externas o fuerzas internas que las que pueden determinarse con las ecuaciones de la estática, tal estructura es estáticamente indeterminada o hiperestática. Una carga situada en alguna parte de una estructura hiperestática o continua producirá fuerzas cortantes, momentos flexionantes y deflexiones en las otras partes de la estructura. En otras palabras, cargas aplicadas a una columna afectan a las vigas, a las losas, a otras columnas y viceversa.

Hasta ahora este texto se ha dedicado por completo a las estructuras determinadas y el lector podría considerar, equivocadamente que tales estructuras son las más comunes en la práctica. La verdad es que es difícil encontrar una viga real simplemente apoyada; las conexiones atornilladas o soldadas entre vigas y columnas no son en realidad condiciones verdaderas de apoyo simple con momento nulo.

Lo mismo puede decirse de las armaduras estáticamente determinadas. Los nudos atornillados o soldados no son en realidad pasadores sin fricción, como se supuso previamente con fines de análisis. Las otras suposiciones hechas sobre las armaduras en los primeros capítulos tampoco son totalmente verdaderas y, en un sentido estricto, todas las armaduras son estáticamente indeterminadas ya que contienen momentos y fuerzas secundarias.

Casi todas las estructuras de concreto reforzado son hiperestáticas. Las losas de concreto, las vigas de apoyo, así como parte de las columnas pueden colarse al mismo tiempo. Las barras de refuerzo se extienden de elemento a elemento estructural así como de claro a claro. Cuando se tienen juntas de construcción, las barras de refuerzo se dejan sobresalir del concreto para poder ser empalmadas a las barras del concreto por colarse posteriormente. Además, el concreto viejo se limpia de manera que el nuevo se adhiera a él tanto como sea posible. El resultado de todo esto es que las estructuras de concreto reforzado son generalmente monolíticas o continuas y por ello estáticamente indeterminadas.

Tal vez la única manera de construir una estructura de concreto reforzado estáticamente determinada sea a base de elementos prefabricados en una planta y ensamblados en el lugar de la obra. Sin embargo, aun estructuras como éstas tienen cierta continuidad en sus nudos.

Hasta los primeros años del siglo XX, los ingenieros en Estados Unidos evitaron, siempre que fue posible, el empleo de las estructuras estáticamente indeterminadas. Tres grandes desarrollos cambiaron esta actitud: (1) las estructuras monolíticas de concreto reforzado, (2) la soldadura de arco en las estructuras de acero y (3) los métodos modernos de análisis.

## 10.2 ESTRUCTURAS CONTINUAS

En la medida en que se incrementan los claros de las estructuras simples, sus momentos flexionantes aumentan rápidamente. Si el peso de una estructura por unidad de longitud permanece constante, independientemente del claro, el momento por carga muerta variará en proporción con el cuadrado de la longitud del mismo ( $M = wf^2/8$ ). Sin embargo, esta proporción no es correcta, debido a que el peso de las estructuras debe aumentar a medida que los claros son más grandes, con el fin de que sean lo suficientemente fuertes y resistan el incremento de los momentos flexionantes; por tanto, el momento por carga muerta crece más rápidamente que el cuadrado del claro.

Por economía, en el caso de grandes distancias entre apoyos se justifica la utilización de tipos de estructuras que tengan momentos menores que los de gran intensidad que aparecen en las estructuras simplemente apoyadas de grandes claros. En el capítulo 2 se presentó un tipo de estructura que reduce considerablemente los



Puente de arco sobre el río Colorado, Utah Ruta 95. (Cortesía de Utah Department of Transportation.)

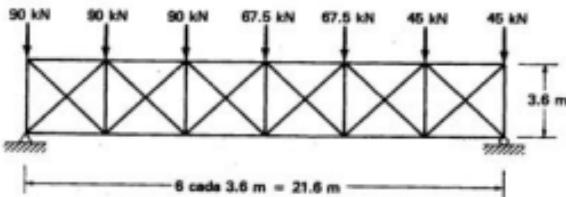


Figura 10.1

momentos flexionantes: la de voladizo. A continuación se presentan otros dos tipos de estructuras que reducen los momentos de flexión.

En ciertos casos es posible tener una viga con ambos extremos empotrados, en lugar de una viga simplemente apoyada. En la fig. 10.1 se comparan los momentos flexionantes desarrollados en una viga simplemente apoyada con carga uniforme, con los de una viga doblemente empotrada con carga también uniforme.

El momento flexionante máximo en la viga doblemente empotrada es sólo dos tercios del que se presenta en la viga simplemente apoyada. Por lo general, es difícil empotrar o fijar por completo los extremos de una viga, sobre todo en el caso de un puente; por esta razón se emplean a menudo claros laterales como se ve en la fig. 2.8. Estos claros fijan parcialmente a los soportes interiores, reduciéndose así el momento en el claro central. En la fig. 2.9 se presentan comparativamente los momentos flexionantes que se producen en tres vigas simples con carga uniforme (claros de 30, 90 y 30 m) y los que aparecen en una viga continua también con carga uniforme y con un claro de longitud igual a la suma de los valores anteriores.

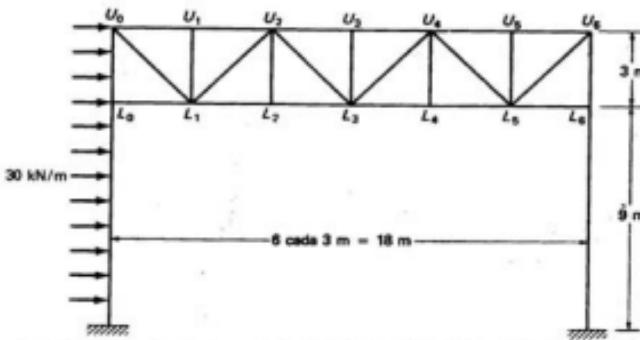
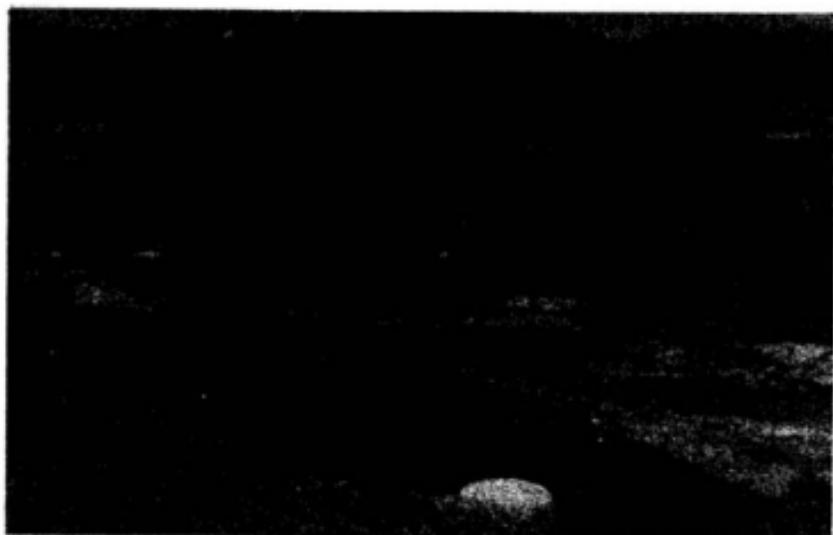


Figura 10.2



Puente sobre el río San Lorenzo, proyecto hidroeléctrico Jaguas, Rep. de Colombia.  
(Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)

El momento flexionante máximo en el caso de una viga continua es casi 43% menor que cuando se tienen las vigas simples. Desafortunadamente, no existe un correspondiente 43% de reducción en el costo total de la estructura. El factor real de reducción de costo probablemente sea de 2 o 3% del costo total, debido a que conceptos tales como cimentación, conexiones y sistemas de piso, no se reducen en forma importante al reducirse los momentos.

En la explicación anterior se vio que los momentos desarrollados en vigas se reducen bastante por la continuidad en la estructura. Esta disminución se produce en lugares donde las vigas están rigidamente unidas entre sí, o bien, donde las vigas se conectan en forma rígida a las columnas de una estructura. Existe continuidad de acción en la resistencia a una carga aplicada en cualquier parte de una estructura continua, debido a que su acción es resistida por el efecto combinado de todos los elementos del sistema.

### 10.3 VENTAJAS DE LAS ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS

Al comparar las estructuras hiperestáticas con las isostáticas, la primera consideración deberá corresponder al costo. Sin embargo, es imposible justificar económica-

mente la selección de uno u otro tipo de estructura sin ciertas reservas. Cada forma estructural presenta una situación diferente y, por tanto, deberán tenerse en cuenta todos los factores, ya sean de índole económica o de otro tipo. En general, las estructuras estáticamente indeterminadas tienen ciertas ventajas que se describen a continuación.

### Ahorro de materiales

Los menores momentos flexionantes desarrollados en las estructuras estáticamente indeterminadas permiten la utilización de elementos de menor escuadria, con un ahorro de material posiblemente del orden de 10 a 20% del acero utilizado en puentes. El gran número de inversiones en las fuerzas que se producen en puentes ferroviarios, permite sólo ahorros o economías de un 10 por ciento.

Un elemento estructural de dimensiones dadas podrá soportar más carga si es parte de una estructura continua, que si estuviese simplemente apoyado. La continuidad permite el uso de elementos de menores dimensiones para las mismas cargas y claros, o bien, un mayor espaciamiento de los apoyos para elementos de iguales dimensiones. La posibilidad de utilizar menos columnas en edificios, o un menor número de pilares en el caso de puentes, puede ocasionar una reducción global de los costos.

Las estructuras continuas de concreto o acero son menos costosas al no tener las articulaciones, apoyos libres y demás elementos requeridos para que sean estáticamente determinadas, como era la práctica en épocas pasadas. Las estructuras de concreto armado de tipo monolítico se erigen de manera que son naturalmente continuas y estáticamente indeterminadas. La instalación de articulaciones y otros mecanismos de apoyo necesarios para convertir tales sistemas estructurales en estructuras estáticamente determinadas, no sólo presentaría difíciles problemas de construcción sino que además, elevaría bastante los costos. Más aún, una construcción constituida por columnas y vigas simplemente apoyadas, necesariamente tendría que ser reforzada utilizando elementos diagonales entre sus juntas, con el fin de tener una estructura estable y rígida.

### Mayores factores de seguridad

Las estructuras estáticamente indeterminadas tienen con frecuencia mayores factores de seguridad que las estáticamente determinadas. El estudiante aprenderá en los cursos sobre estructuras de acero y de concreto reforzado que cuando partes de esas estructuras resultan sobrefatigadas, éstas tienen la capacidad de redistribuir parte de esos sobreesfuerzos a zonas menos fatigadas. Las estructuras estáticamente determinadas no tienen generalmente esta capacidad.

### Mayor rigidez y menores deflexiones

Las estructuras estáticamente indeterminadas son más rígidas que las estáticamente determinadas y sus deflexiones son menores. Gracias a su continuidad son más ri-

gidas y tienen mayor estabilidad frente a todo tipo de cargas (horizontal, vertical, móvil, etc.).

### Estructuras más atractivas

Es difícil imaginar a las estructuras estáticamente determinadas con la belleza arquitectónica de muchos arcos y marcos rígidos hiperestáticos que se construyen hoy en día.

### Adaptabilidad al montaje en voladizo

El método de montaje en voladizo de puentes es de gran valor cuando las condiciones en el sitio de erección (tráfico naval o niveles muy profundos del agua) obstaculizan la erección de la obra falsa. Los puentes continuos estáticamente indeterminados y los de tipo en voladizo pueden erigirse convenientemente con el método de montaje en voladizo.

## 10.4 DESVENTAJAS DE LAS ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS

Un análisis comparativo de las estructuras estáticamente determinadas, respecto de las estáticamente indeterminadas, pone de relieve que estas últimas poseen ciertas desventajas que las hacen poco prácticas en muchas aplicaciones. Estas desventajas se explican detalladamente en los párrafos siguientes.

### Asentamiento de los apoyos

Las estructuras hiperestáticas no son convenientes en todos aquellos casos donde las condiciones de cimentación sean impropias, pues los asentamientos o ladeos que se presenten en los apoyos de la estructura por leves que parezcan, pueden causar cambios notables en los momentos flexionantes, fuerzas cortantes, esfuerzos totales y reacciones. En casos donde se realice la construcción de puentes con estructura hiperestática, a pesar de condiciones de cimentación deficientes, suele ser necesario modificar las reacciones debidas a carga muerta. Los puntos de apoyo se levantan o se bajan mecánicamente hasta un nivel en donde se presente la reacción calculada, después de lo cual los apoyos de la estructura se construyen hasta dicho nivel.

### Aparición de otros esfuerzos

El hundimiento de los apoyos no es la única condición que altera los esfuerzos que se producen en estructuras estáticamente indeterminadas. Los cambios en la posición relativa de los elementos estructurales causados por variación de temperatura, fabricación deficiente o deformaciones internas por acción de la carga, pueden causar cambios graves en las fuerzas en toda la estructura.

### Dificultad de análisis y diseño

Las fuerzas en las estructuras estáticamente indeterminadas dependen no únicamente de sus dimensiones, sino también de sus propiedades elásticas (módulo de elasticidad, momentos de inercia, secciones transversales, etc.). Esta situación da lugar a una seria dificultad en cuanto a su diseño: no podrán determinarse las fuerzas sino hasta conocer las dimensiones de los elementos estructurales, y no podrán determinarse las dimensiones si no se conocen antes las fuerzas que actúan en ellos. El problema se resuelve suponiendo las dimensiones de sus elementos y calculando las fuerzas, diseñando los elementos para dichas fuerzas y evaluando las fuerzas para las nuevas dimensiones supuestas y así sucesivamente, hasta lograr el diseño final. El cálculo mediante este procedimiento (método de aproximaciones sucesivas) es más tardado que el que se requiere para diseñar una estructura isostática similar, pero el costo adicional sólo es una pequeña parte del costo total de la estructura. Tales diseños se llevan mejor a cabo por medio de una interacción con una computadora. Este tipo de interacción se usa ampliamente en la actualidad en la industria automotriz y aeronáutica.

### Inversión de las fuerzas

Generalmente en las estructuras hiperestáticas se produce un mayor número de inversiones de fuerza que en las estructuras isostáticas. En ocasiones se requiere de más material de refuerzo en ciertas secciones de la estructura, para resistir los diferentes estados de esfuerzo.

## 10.5 ANALISIS APROXIMADO DE ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS

Las estructuras estáticamente indeterminadas pueden ser analizadas ya sea en forma "exacta" o bien de modo "aproximado". En los capítulos del 11 al 19 se explican varios métodos "exactos" que se basan en deformaciones elásticas. En este capítulo se presentan métodos aproximados que exigen el empleo de hipótesis simplificadas. Tales procedimientos tienen muchas aplicaciones prácticas, como las siguientes:

1. Para la estimación de costos de diseños alternativos, los análisis aproximados en ocasiones son de mucha utilidad. Los análisis y diseños aproximados de diversas alternativas pueden efectuarse rápidamente y usarse en la estimación inicial de los costos.
2. Para diseñar los miembros de una estructura estáticamente indeterminada, es necesario hacer una estimación de sus tamaños antes de proceder a analizarla por medio de un método "exacto". Esto es necesario porque el análisis de una estructura estáticamente indeterminada se basa en las propiedades elásticas de sus miembros. Un análisis aproximado de la estructura mostrará

fuerzas a partir de las cuales podrán hacerse estimaciones iniciales razonables acerca del tamaño de sus miembros.

3. Actualmente se cuenta con computadoras que pueden efectuar análisis "exactos" y diseños de estructuras sumamente indeterminadas en forma rápida y económica. Al usar programas de computadora es aconsejable, desde un punto de vista económico, hacer algunas estimaciones preliminares acerca del tamaño de los miembros. Si ya se ha efectuado un análisis preliminar de la estructura, será posible hacer estimaciones muy razonables sobre el tamaño de los miembros. El resultado será un ahorro apreciable tanto de tiempo de computadora como de dinero.
4. Los análisis aproximados son muy útiles para comprobar en forma somera las soluciones "exactas" de la computadora (lo que es de gran importancia).
5. Un análisis "exacto" puede ser muy caro, sobre todo si se efectúan estimaciones y diseños preliminares. (Se supone que para tal situación se dispone de un método aproximado aceptable y capaz de proporcionar una solución aplicable.)
6. Una ventaja adicional de los métodos aproximados es que permiten al proyectista "sentir" el comportamiento de la estructura bajo varias condiciones de carga. Este recurso probablemente no se desarrollará a partir de soluciones elaboradas por computadora.

Para hacer un análisis "exacto" de una estructura complicada estáticamente indeterminada, es necesario que un proyectista competente "modele" la estructura, o sea, que haga ciertas hipótesis sobre su comportamiento. Por ejemplo, los nudos pueden suponerse simples o semirrígidos. Además pueden suponerse ciertas características del comportamiento del material así como de las condiciones de carga. La consecuencia de todas esas hipótesis es que todos los análisis son aproximados (o dicho de otra manera, aplicamos un método de análisis "exacto" a una estructura que en realidad no existe). Además, todos los métodos de análisis son aproximados en el sentido de que toda estructura se construye con ciertas tolerancias; ninguna estructura es perfecta ni su comportamiento puede determinarse con precisión.

Se espera que los métodos aproximados descritos en este capítulo proporcionen al lector un conocimiento de conjunto o le permitan "sentir" un gran número de tipos de estructuras indeterminadas estáticamente antes de considerar las técnicas "exactas" de solución. No todos los tipos de estructuras estáticamente indeterminadas se considerarán en este capítulo. Sin embargo, se espera que con base en las ideas presentadas aquí, el estudiante sea capaz de hacer hipótesis razonables cuando encuentre otros tipos de estructuras indeterminadas.

Existen muchos métodos diferentes para efectuar análisis aproximados. Se presentarán aquí algunos de los más comunes, especialmente los aplicables a marcos y a armaduras.

Para poder analizar una estructura por estática, no debe haber más incógnitas que ecuaciones de la estática. Si una armadura o marco tiene 10 incógnitas más que ecuaciones de la estática, será estáticamente indeterminada de grado 10. Para ana-

lizarla mediante un método aproximado, deberá hacerse una hipótesis por cada grado de indeterminación, o sea, un total de 10 hipótesis. Veremos que cada hipótesis proporciona una ecuación extra para usarse en los cálculos.

### 10.6 ARMADURAS CON DOS DIAGONALES EN CADA TABLERO

#### Diagonales con poca rigidez

La armadura de la fig. 10.3 tiene dos diagonales en cada tablero. Si una de estas diagonales se eliminase de cada uno de los seis tableros, la armadura se volvería isostática. La estructura es hiperestática de sexto grado.

Si las diagonales son relativamente largas y esbeltas, como las formadas por un par de perfiles angulares, podrán soportar tensiones razonablemente grandes, pero cargas de compresión insignificantes. En este caso es lógico suponer que la fuerza cortante en cada tablero es soportada totalmente por la diagonal que estaría en tensión con ese tipo de cortante. Se supone que la otra diagonal no toma ninguna fuerza. Estableciendo esta hipótesis para cada tablero se tienen en total seis hipótesis para las seis redundantes, pudiendo ahora usarse las ecuaciones de la estática para completar el análisis. Las fuerzas indicadas en la fig. 10.3 se obtuvieron con base en esta hipótesis.

#### Diagonales con rigidez considerable

En algunas armaduras las diagonales se construyen con rigidez suficiente para resistir cargas de compresión. En el caso de tableros con dos diagonales, puede considerarse que la fuerza cortante es resistida por ambas. La división del efecto de tal fuerza hace que una diagonal esté sometida a tensión y la otra a compresión. La aproximación acostumbrada consiste en suponer que cada diagonal toma 50% de la fuerza cortante. Sin embargo, es posible suponer otra forma de distribución

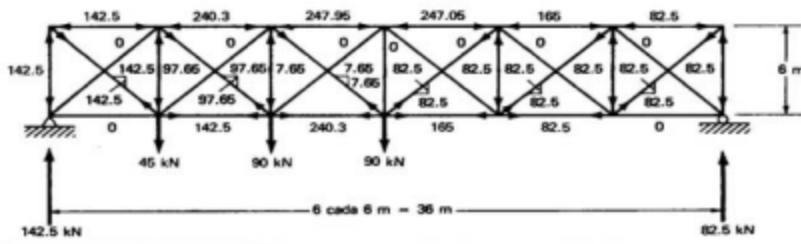


Figura 10.3

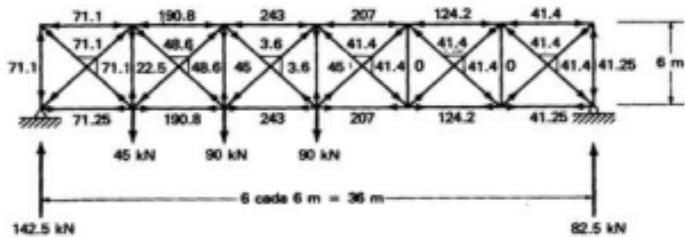


Figura 10.4

de la fuerza cortante, por ejemplo un tercio para la diagonal a compresión y dos tercios para la diagonal a tensión.

Las fuerzas calculadas para la armadura de la fig. 10.4 se basan en una división equitativa de la fuerza cortante en cada tablero.

## 10.7 ANALISIS DE ESTRUCTURAS INDUSTRIALES

Se ha supuesto que las armaduras analizadas en capítulos anteriores descansan sobre muros de mampostería o sobre las columnas laterales de edificios. Un tipo diferente, pero usual, de construcción, lo constituyen las estructuras industriales cuyas armaduras están unidas rígidamente a las columnas, por lo que ambas trabajan en conjunto. La fig. 10.5 muestra dos tipos de estructuraciones comúnmente usadas en las edificaciones industriales.

En cuanto a las cargas de gravedad, estas armaduras se analizan como si estuvieran simplemente apoyadas sobre muros en vez de estar unidas rígidamente a las columnas, pero en lo que respecta a cargas laterales, las columnas y las armaduras deben analizarse como una unidad. En edificios de oficinas de altura moderada, los muros y tabiques internos ofrecen considerable resistencia al efecto del viento,

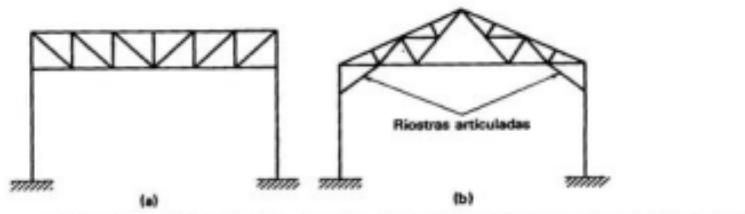


Figura 10.5

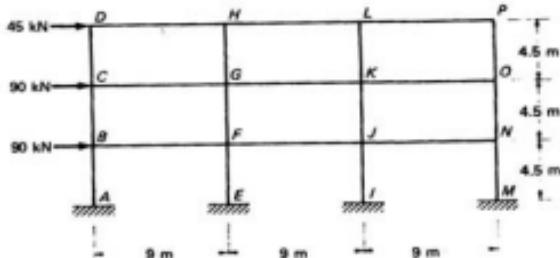


Figura 10.6

proporcionando en muchos casos la resistencia suficiente. Sin embargo, las estructuras industriales deben ser analizadas y diseñadas para resistir cargas de viento, ya que no contienen muros interiores que ayuden a resistir tales cargas. Además, en estas construcciones puede haber grúas viajeras cuyo funcionamiento provocará cargas laterales adicionales que necesitan tomarse en cuenta en el diseño. La estructura industrial de la fig. 10.5(a) se analiza para una carga de viento de  $15 \text{ kN/m}$ , distribuida a lo largo de su altura. En presencia de cargas debidas a grúas, éstas se manejarían exactamente de la misma manera.

Si las bases de las columnas están empotradas, en cada apoyo habrá tres reacciones desconocidas, teniendo así un total de seis incógnitas. La estructura es estáticamente indeterminada de tercer grado y para analizarla por algún método aproximado deben formularse tres hipótesis.

Cuando una columna se encuentra rígidamente unida a la cimentación, no puede haber giros en la base. Aun cuando el edificio estuviese sujeto a cargas de viento que lo inclinaran lateralmente, una tangente vertical a una columna en su base, permanecería vertical. Si la armadura apoyada sobre los remates de las columnas es muy rígida y está firmemente unida a ella, una tangente a una columna en su junta con la armadura, permanecerá vertical. Una columna empotrada en sus dos extremos, se deformaría según una curva en S por la acción de cargas laterales (fig. 10.7).

En un punto intermedio entre la base de la columna y la parte inferior de la armadura (o la cartela), el momento flexionante se anula porque cambia de un valor que produce tensión en un lado de la columna, a otro que la produce en el otro lado. El punto de momento nulo se llama punto de inflexión (o punto de contraflexión). Si cada columna contiene un punto de inflexión, se tendrán dos de las tres hipótesis necesarias (se dispondrá de dos ecuaciones de suma de momentos,  $\sum M = 0$ ).

El análisis de la ubicación de los puntos de inflexión se ha fundado en la hipótesis de que las bases de las columnas están empotradas. Si las columnas se encuentran ancladas a un cimiento profundo de concreto o a un muro de cimentación también de concreto, la hipótesis está justificada. Sin embargo, frecuentemente las

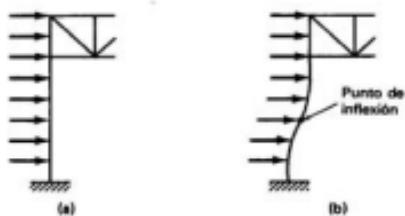


Figura 10.7

columnas se hallan ancladas a pequeñas zapatas de concreto que ofrecen poca resistencia al giro y las bases de las columnas actúan como articulaciones, caso en el cual los puntos de inflexión se encuentran ubicados en las mismas bases. La situación común probablemente se halla entre ambos extremos, o sea, que las bases de las columnas están sólo parcialmente fijas. Se supone a veces que los puntos de inflexión se encuentran entre 1/3 y 1/4 de la altura, entre la base de la columna y la base de la armadura, o bien, de la cartela en caso de que se emplee ésta.

La tercera hipótesis que se hace es que la fuerza cortante horizontal se reparte por igual entre ambas columnas en el plano de inflexión. Un análisis "exacto" demuestra que tal hipótesis es muy razonable si las columnas son aproximadamente del mismo tamaño. Si no son de dimensiones semejantes, puede suponerse que la fuerza cortante se reparte en una proporción ligeramente distinta, considerando que la columna más rígida absorbe mayor cantidad de cortante. Los métodos de análisis explicados en capítulos posteriores demuestran que la distribución de la fuerza cortante, en proporción a la relación  $I/l^3$ , es una hipótesis muy aceptable.

En la fig. 10.8 se analiza la estructura representada en la fig. 10.5(a) con base en las siguientes hipótesis: se supone que el plano de inflexión se encuentra a 1/3 de la altura de la columna, esto es, a 1.80 m arriba de su base y que la fuerza cortante total en el plano de inflexión, de 90 kN, se reparte de manera equitativa entre las dos columnas.

Para calcular la reacción vertical en la columna de la derecha, se toman momentos de las fuerzas situadas arriba del plano de inflexión, con respecto al punto de inflexión en la columna izquierda. De la condición  $\Sigma V = 0$  se logra la reacción vertical en la columna izquierda. Si el viento sopla de izquierda a derecha, la columna de la derecha (la que se encuentra a sotavento) está sometida a compresión, en tanto que la de la izquierda (la que se halla a barlovento), está sujeta a tensión.

El momento flexionante en la base de cada columna se determina tomando momentos respecto a la base de las fuerzas aplicadas a la columna en y abajo del punto de inflexión.

Por último, las fuerzas en la armadura se calculan mediante la estática. Al evaluar las fuerzas en los elementos de esta armadura que estén conectados a una columna, deben tomarse en cuenta todas las fuerzas que actúen sobre esta última, pues

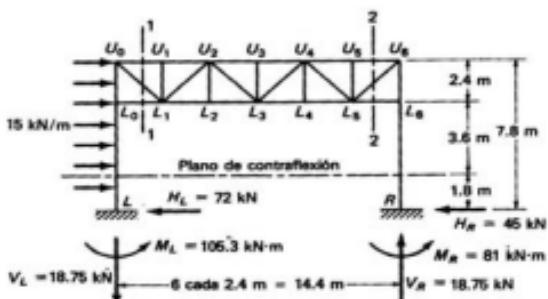


Figura 10.8

las columnas se hallan sujetas tanto a fuerza axial como a momento flexionante. Al pasar el corte 1–1 en la armadura, por equilibrio de momentos con respecto al nudo  $U_0$  se determina la fuerza en  $L_0L_1$ . Con el mismo corte o sección, por equilibrio de momentos con respecto al nudo  $L_1$  se determina la fuerza en  $U_0U_1$ . De manera similar, al pasar el corte 2–2 por la armadura, por equilibrio de momentos con respecto a  $U_6$  se calcula la fuerza en  $L_5L_6$ , y por momentos con respecto a  $L_5$ , la fuerza en  $U_5U_6$ . Las fuerzas restantes se pueden determinar mediante el método de los nudos.

$$\sum M_{\text{inq.P.I.}} = 0 \text{ de las fuerzas arriba del plano de inflexión}$$

$$(15)(6)(3) - 14.4V_R = 0 \\ V_R = 18.75 \text{ kN} \dagger = \text{fuerza axial en la columna derecha}$$

Por  $\Sigma V = 0$ ,

$$V_L = 18.75 \text{ kN} \ddagger = \text{fuerza axial en la columna izquierda}$$

Suponiendo que la fuerza cortante horizontal total por encima del plano de inflexión, igual a 90 kN, se reparte igualmente entre ambas columnas (a razón de 45 kN en cada una),

$$H_L = 45 + (15)(1.8) = 72 \text{ kN} \leftarrow \\ H_R = 45 \text{ kN} \leftarrow$$

Los momentos de reacción en cada columna se calculan por equilibrio de momentos de las fuerzas que actúan sobre la misma, entre su base y el punto de inflexión, con respecto a la base.



Detalle de junta de construcción en la planta de Ford Motor Company en Chihuahua, Chih., México. (Cortesía de ILIDEM, S.A.)

$$\begin{aligned}M_L &= (45)(1.8) + (15)(1.8)(0.9) = 105.3 \text{ kN}\cdot\text{m} \\M_R &= (45)(1.8) = 81 \text{ kN}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

Fuerza en  $L_0L_1$ :

$$\begin{aligned}\Sigma M_{U_0} &= 0 \\(45)(6) - (15)(6)(3) - 2.4L_0L_1 &= 0 \\L_0L_1 &= 0\end{aligned}$$

Fuerza en  $U_0U_1$ :

$$\begin{aligned}\Sigma M_{L_1} &= 0 \\2.4 U_0U_1 + (18.75)(2.4) + (15)(6)(0.6) - (45)(3.6) &= 0 \\U_0U_1 &= -26.25 \text{ kN}\end{aligned}$$

## 10.8 ARRIOSTRAMIENTO LATERAL EN PUENTES

Las armaduras de puentes se refuerzan o arriostran transversalmente por medio de sistemas de contraventeo o arriostamiento en los planos de las cuerdas superior e inferior, y también en planos verticales o inclinados. El contraventeo transversal une las armaduras principales, haciendo que toda la estructura actúe como un entramado rígido. Sirve para evitar vibraciones excesivas y resistir las cargas laterales producidas por viento, sismo, cabecero de locomotoras y por el efecto de fuerza centrífuga del tránsito de automóviles en puentes curvos. La fig. 10.9 muestra una armadura Warren para puente con los sistemas de arriostamiento que se usarían en los planos de las cuerdas superior e inferior.

Las cargas se aplican como cargas concentradas en los nudos de las armaduras laterales, lo cual permite el análisis con los métodos aproximados que se estudiaron en la sección 10.6. El contraventeo lateral superior por lo general está sujeto a cargas ligeras, siendo las diagonales probablemente esbeltas y capaces de resistir sólo fuerzas de tensión. Las cargas laterales de diseño tal vez son mayores en la parte inferior de la armadura, debiendo ser las diagonales o riostras del sistema de contraventeo inferior lo suficientemente grandes para absorber con seguridad alguna carga compresiva. Las cuerdas de los entramados transversales de refuerzo son las cuerdas de las armaduras principales, pero las especificaciones de la AASHTO no exigen un refuerzo de estos elementos, a menos que las fuerzas en éstos, como parte del sistema transversal, sean 25% mayores que sus fuerzas normales como parte de las armaduras principales.

A menudo se emplea un sistema de arriostamiento en el plano de los portales extremos, semejante al mostrado en las figuras 10.9 y 10.10. Este tipo de refuerzo recibe el nombre de contraventeo de pórtico. Un portal de puente tiene por objeto

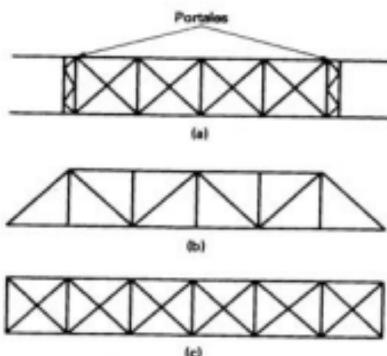


Figura 10.9 (a) Armadura lateral superior. (b) Planta. (c) Armadura lateral inferior.



Figura 10.10

proporcionar la reacción de extremo al sistema transversal superior, y transmitirla hasta los apoyos. La disposición de los contraventos o ríostras en los portales es muy semejante a la de las estructuras de tipo industrial, y es posible analizar dichos pórticos exactamente como si así lo fueran.

Los portales para puentes con tráves de alma llena pueden ser de los tipos que se muestran en la fig. 10.11, donde la viga horizontal está rígidamente conectada a las columnas (en realidad a las tráves laterales). Marcos semejantes son parte fundamental de las estructuras de acero para edificios, y también pueden analizarse con las mismas hipótesis empleadas para edificaciones industriales. En la fig. 10.11(a) se analiza un portal con las bases de sus columnas empotradas. En la fig. 10.11(b)

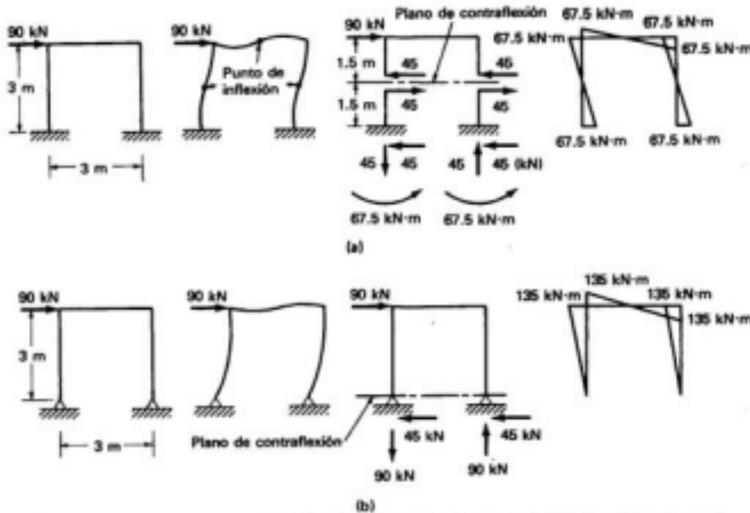


Figura 10.11

se muestra el análisis de un portal con las bases de sus columnas articuladas. En cada caso se muestran la configuración deformada, las reacciones y los diagramas de momento flexionante.

### 10.9 VIGAS CONTINUAS

Antes de comenzar un análisis "exacto" de una estructura es necesario estimar los tamaños de sus elementos. Los tamaños preliminares de las vigas pueden determinarse considerando sus momentos aproximados. Con frecuencia es práctico aislar una sección de un edificio y analizar esa parte de la estructura. Por ejemplo, uno o más claros de vigas pueden aislarse como cuerpo libre y hacer hipótesis sobre los momentos en esos claros. Para facilitar tal análisis, se muestran en la fig. 10.12 los diagramas de momentos flexionantes para diferentes vigas cargadas uniformemente.

Al analizar esta figura resulta obvio que el tipo de apoyo tiene un efecto considerable en la magnitud de los momentos. Por ejemplo, la viga simple con carga uniforme de la fig. 10.12(a) tiene un momento máximo de  $w\ell^2/8$ , en tanto que la viga doblemente empotrada con carga uniforme tendrá uno de  $w\ell^2/12$ . Para una viga continua cargada uniformemente se podría estimar un momento máximo con un valor intermedio entre los dos anteriores, digamos  $w\ell^2/10$ , y utilizar este valor para el dimensionamiento preliminar de la viga.

Un método muy común para analizar en forma aproximada estructuras de concreto reforzado continuas, estriba en emplear los coeficientes de momentos y fuerzas cortantes del Instituto Americano del Concreto (ACI) [1]. Estos coeficientes, que se reproducen en la tabla 10.1, proporcionan los momentos y cortantes estimados máximos para edificios de proporciones normales. Los valores calculados de esta manera serán en general un poco mayores que los que se logrían con un análisis exacto. Se considera que estos coeficientes son de máxima utilidad en marcos continuos que tengan más de tres o cuatro claros.

Para determinar estos coeficientes, los valores de los momentos negativos se redujeron para tomar en cuenta los anchos comunes de apoyo y también la redistribución plástica de los momentos que ocurre antes del colapso. Por esta última razón se incrementaron un tanto los momentos positivos. Se observará que los coeficientes toman en cuenta el hecho de que en la construcción monolítica los soportes no son simples y que se presentan momentos en los apoyos extremos, sobre todo cuando tales apoyos están constituidos por vigas o columnas.

En las expresiones para los momentos,  $w$  es la carga de diseño en tanto que  $\ell_n$  es el claro libre para calcular los momentos positivos y el promedio de claros adyacentes para calcular los momentos negativos. Estos valores se determinaron para miembros con claros aproximadamente iguales (el mayor de dos claros adyacentes no excede al menor en más de 20%) y para casos en los que la relación de la carga viva uniforme de servicio con la carga muerta uniforme, también de servicio, no es mayor que tres. Estos coeficientes no son aplicables a elementos de concreto preestirado. Si estas condiciones limitantes no se cumplen deberá usarse un método más preciso de análisis.

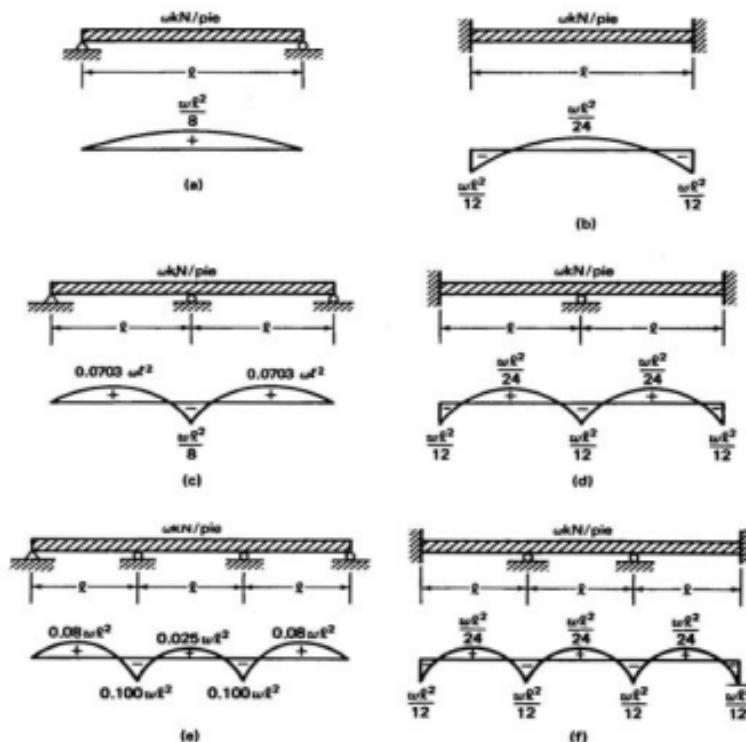


Figura 10.12

Para el diseño de una viga o una losa continua, los coeficientes de momentos proporcionan dos conjuntos de diagramas de momento flexionante para cada claro de la estructura. Un diagrama resulta de colocar las cargas vivas de manera que produzcan un momento máximo positivo en el claro, en tanto que el otro resulta de colocar las cargas vivas de manera que produzcan un momento máximo negativo en los apoyos. Sin embargo, no es posible producir momentos máximos negativos en ambos extremos de un claro, simultáneamente. Se necesita una posición de las cargas vivas para producir un momento máximo negativo en un extremo del claro y otra posición para producir un momento máximo negativo en el otro extremo.

TABLA 10.1

## Coeficientes del ACI

Momento positivo	
Claros extremos	
Si el extremo discontinuo no está restringido	$\frac{1}{8}w\ell_e^2$
Si el extremo discontinuo es monolítico con el apoyo	$\frac{1}{16}w\ell_e^2$
Claros interiores	$\frac{1}{16}w\ell_e^2$
Momento negativo en la cara exterior del primer apoyo interior	
Dos claros	$\frac{1}{8}w\ell_e^2$
Más de dos claros	$\frac{1}{16}w\ell_e^2$
Momento negativo en otras caras de apoyos interiores	$\frac{1}{16}w\ell_e^2$
Momento negativo en caras de todo apoyo para (a) losas con claros que no excedan de 3 m y (b) vigas y tráves donde la relación de la suma de las rigideces de las columnas con la rigidez de la viga excede de ocho en cada extremo del claro	$\frac{1}{16}w\ell_e^2$
Momento negativo en caras interiores de apoyos exteriores de elementos construidos monolíticamente con sus soportes	
Cuando el soporte es una viga de fachada o una trabe	$\frac{1}{8}w\ell_e^2$
Cuando el soporte es una columna	$\frac{1}{16}w\ell_e^2$
Fuerza cortante en elementos extremos, en la cara del primer apoyo interior	$\frac{1.15w\ell_e}{2}$
Fuerza cortante en las caras de todos los demás apoyos	$\frac{w\ell_e}{2}$

Sin embargo, la suposición de que ambos ocurren al mismo tiempo se encuentra del lado de la seguridad, porque el diagrama resultante tendrá valores críticos mayores que los producidos al considerar por separado las condiciones de carga.

Los coeficientes del ACI dan puntos máximos para una envolvente de momentos para cada claro de una estructura continua. En la fig. 10.13 se muestran envol-

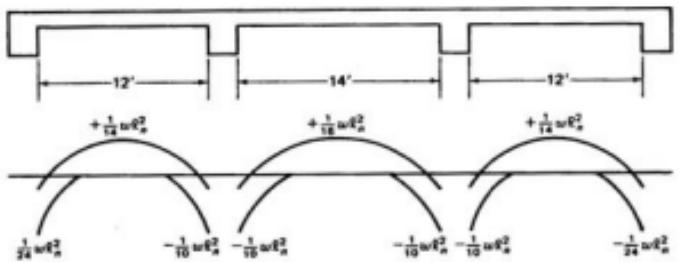


Figura 10.13 Envolventes de momentos para una losa continua construida monolíticamente con soportes exteriores consistentes en vigas de fachada.

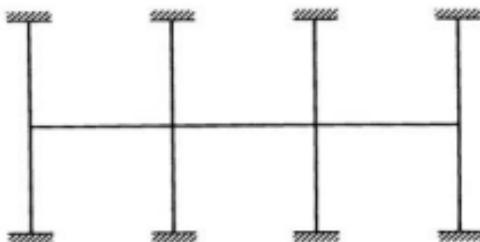


Figura 10.14

ventes típicas para una losa continua construida monolíticamente con sus apoyos externos que son en este caso tráves de fachada.

En algunas ocasiones el proyectista aislará una parte de una estructura que no sólo incluya las vigas sino también las columnas de los pisos superiores e inferiores, como se muestra en la fig. 10.14. Este procedimiento, llamado *método del marco equivalente*, es sólo aplicable a cargas de gravedad. Los tamaños de los elementos se estiman y se hace un análisis usando un método apropiado "exacto" tal como el de distribución de momentos de Cross que se describe en los capítulos 14 y 15.

#### **10.10 ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE EDIFICIOS POR CARGAS VERTICALES**

Un método aproximado para analizar estructuras de edificios considerando cargas verticales, consiste en suponer que en las tráves existen puntos de inflexión localizados aproximadamente a 1/10 de la longitud, desde cada extremo, y que además es nula la fuerza axial en dichas tráves [2].

Los supuestos anteriores tienen el efecto de crear una viga simplemente apoyada entre los puntos de inflexión, pudiendo determinarse por estática los momentos positivos en la viga. En las tráves aparecen momentos negativos entre sus extremos y los puntos de inflexión. El valor de tales momentos puede calcularse considerando que la parte de la viga hasta el punto de inflexión funciona como voladizo.

La fuerza cortante en el extremo de cada tráve contribuye a las fuerzas axiales en las columnas. Análogamente, los momentos flexionantes negativos de las tráves son transmitidos a las columnas. En el caso de columnas intermedias, los momentos flexionantes sobre las tráves de cada lado se oponen entre sí y pueden cancelarse. En las columnas exteriores hay momentos flexionantes únicamente en un lado, producidos por las tráves unidas a ellas, y deben considerarse en el diseño.

En la fig. 10.15, la viga AB de la estructura de edificio mostrada se analiza suponiendo puntos de inflexión en puntos localizados a 1/10 de la longitud, y apoyos empotrados en los extremos de las vigas.

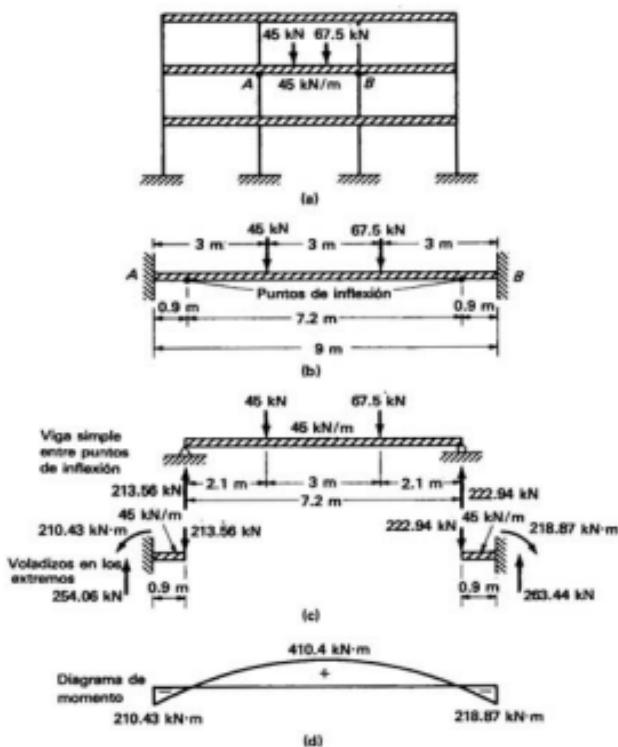


Figura 10.15

Para hacer estimaciones razonables sobre la posición de los puntos de inflexión, puede ser muy conveniente esbozar la curva elástica aproximada de la estructura. Como ilustración se dibuja a escala en la fig. 10.16(a) una viga continua y en la fig. 10.16(b) se esboza su curva elástica para las cargas mostradas. De tal esbozo puede estimarse la posición aproximada de los puntos de inflexión. Por último, en la parte (c) de la figura se aísla la parte de la viga comprendida entre los puntos de inflexión del claro central; esa parte de la viga se comporta como si estuviera simplemente apoyada.

Sería útil que el lector viera dónde se presentan los puntos de inflexión en unas cuantas vigas estáticamente indeterminadas. Esto lo ayudará en la estimación de las



Detalle de una estructura en la Siderúrgica Monclova en Monclova, Coahuila, México. (Cortesía de EISA.)

posiciones de tales puntos en estructuras más complicadas. En la fig. 10.17 se muestran los diagramas de momentos de varias vigas. Los puntos de inflexión ocurren obviamente donde los momentos cambian de signo.

### 10.11 ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE EDIFICIOS PARA CARGAS LATERALES

Las estructuras de edificios están sujetas tanto a cargas laterales como a cargas verticales. La necesidad de considerar cuidadosamente estas fuerzas aumenta con la altura del edificio. No sólo debe tener suficiente resistencia lateral para impedir el

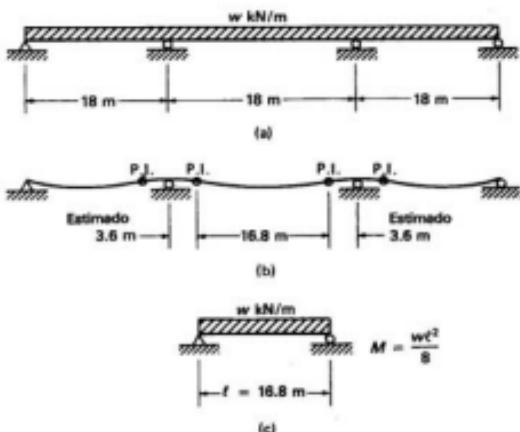


Figura 10.16

colapso, sino también la suficiente resistencia a la deformación, para evitar alteraciones inaceptables en sus diferentes partes.

Otro concepto importante es la provisión de suficiente rigidez lateral para dar a los ocupantes una sensación de seguridad, lo cual no podría ocurrir en edificios altos donde se produjese desplazamientos laterales notables debido a intensas fuerzas de viento. Suelen presentarse casos reales de personas que ocupan los pisos de mayor altura y quienes son aquejadas por mareo en días con vientos muy fuertes.

Las cargas laterales se pueden tomar por medio de arriostramientos en X o de otro tipo, por medio de muros de cortante o por conexiones resistentes a momento. En este capítulo sólo se considerará este último procedimiento.

Los edificios constituidos por marcos rígidos son sumamente hiperestáticos, y su análisis mediante los métodos "exactos" comunes es muy laborioso, por lo que se utilizan mucho los métodos aproximados. El grado total de indeterminación estática de un edificio (tanto interna como externa) se puede tener considerando que consta de pórticos independientes. En la fig. 10.19 se ve cómo se descompone en un conjunto de pórticos, un nivel de la estructura rígida mostrada en la fig. 10.18. Cada portal es estáticamente indeterminado de tercer grado y el grado total de indeterminación de un edificio es igual a tres veces el número de portales que constituyen la estructura.

Otro método para tener el grado de indeterminación es suponer que cada una de las tráves ha sido cortada por una sección imaginaria. Si para cada tráves se conocen los valores de los elementos mecánicos en la sección, la fuerza cortante, el momento flexionante y la fuerza axial, los diagramas de cuerpo libre resultantes se

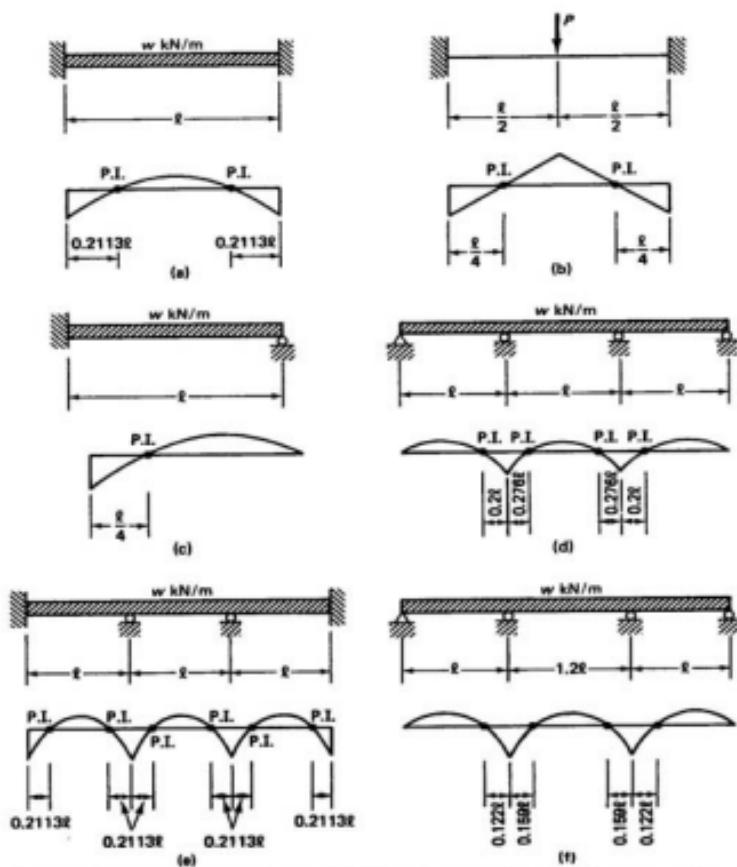
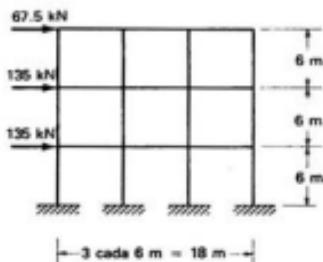
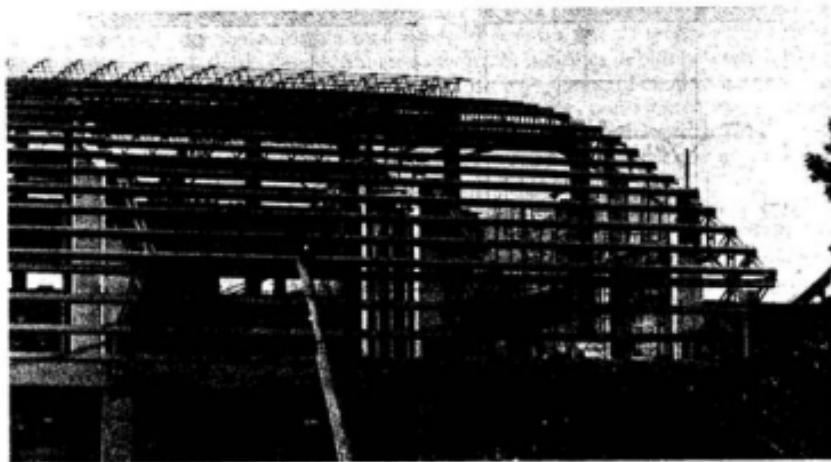


Figura 10.17

pueden analizar por medio de la estática. Así, el grado total de indeterminación será igual al triple del número de tráves.

En lo que sigue se analiza la estructura de un edificio mostrada en la fig. 10.18 mediante dos métodos aproximados, comparándose los resultados así obtenidos con los de uno de los métodos "exactos" que se explican en un capítulo posterior. Se seleccionaron las dimensiones y las cargas de manera que ilustren convenientemente

**Figura 10.18****Figura 10.19** Un nivel del marco de la fig. 10.18.

Vista exterior del edificio de PROBURSA, Cd. de México.  
(Cortesía de ILIDEM, S.A.)

los métodos aplicados y que los cálculos sean sencillos. Existen 9 trábes en la estructura, lo cual da un grado total de hiperestaticidad igual a 27, por lo que se necesitará un total de 27 hipótesis para poder tener una solución aproximada.

El lector debe tener presente que en la actualidad, con la existencia y disponibilidad de acceso de las calculadoras digitales, es factible realizar análisis "exactos" en un tiempo considerablemente menor que el requerido por los métodos aproximados (sin el uso de tales calculadoras). Los valores más precisos obtenidos permiten el empleo de elementos estructurales de menores dimensiones, por lo que el uso de la calculadora ahorra tanto tiempo en la realización de los cálculos, como en los materiales. Es posible analizar en unos cuantos minutos estructuras (tales como edificios altos) estáticamente indeterminadas con cientos o aun miles de redundantes, mediante el método de los desplazamientos. Los resultados para esas estructuras sumamente indeterminadas son bastante más precisos y pueden además, obtenerse en forma más económica que los suministrados por los análisis aproximados.

Los dos métodos considerados aquí son el del portal y el del voladizo. Ambos se emplearon con éxito en tantos diseños de edificios, que llegaron a convertirse en el procedimiento estándar de diseño de los ingenieros antes del empleo de las computadoras modernas. En ninguno de ellos se toman en cuenta las propiedades elásticas de los elementos estructurales. Estas omisiones pueden ser muy serias en marcos asimétricos y en edificios muy altos. A fin de ilustrar la seriedad del problema se expondrán los cambios que experimentan las dimensiones en un edificio muy alto. En tales edificaciones probablemente no hay grandes cambios en el tamaño de las vigas desde el piso más alto hasta el más bajo. Para las mismas cargas y claros los cambios dimensionales se deberían a los momentos flexionantes causados por el viento en los pisos inferiores. Sin embargo, la variación en el tamaño de las columnas entre los niveles extremos puede ser considerable. El resultado es que los tamaños relativos de columnas y vigas en los pisos superiores, son completamente diferentes a los de esos elementos en los pisos inferiores. Si no se considera este hecho, se originarán graves errores en el análisis.

Tanto en el método del portal como en el del voladizo se supone que las cargas producidas por el viento son resistidas totalmente por la estructura o marco principal del edificio, sin que los pisos y los muros contribuyan a la rigidez total. Se supone, además, que son insignificantes los cambios de longitud en trábes y columnas. Sin embargo, no lo son en el caso de edificios elevados y esbeltos, cuya altura sea unas cinco veces la dimensión horizontal mínima.

Si la altura del edificio es por lo menos cinco veces mayor que su mínima dimensión lateral, generalmente se considera que debería usarse un método más exacto que el del portal o el del voladizo. Existen varios excelentes métodos aproximados, los cuales emplean las propiedades elásticas de las estructuras y que dan valores muy cercanos a los que se tienen con los métodos "exactos". Entre ellos están: el método del factor [3], el método de Witmer [4] de los porcentajes  $K$  y el método de Spurr [5]. Si se deseara emplear un método "exacto" manual, podría recomendarse el método de la distribución de momentos o método de Cross que se estudiará en los capítulos 14 y 15.

### Método del portal

El método aproximado más común para analizar las estructuras de edificios sujetos a cargas laterales es el del portal. Debido a su sencillez, probablemente se ha empleado más que cualquier otro procedimiento aproximado para determinar las fuerzas internas producidas por carga de viento en estructuras de edificios. Se dice que este método, que fue expuesto por vez primera por Albert Smith en la publicación denominada *Journal of the Western Society of Engineers* (abril, 1915), es satisfactorio para edificios hasta de 25 pisos [6].

Deben formularse por lo menos tres hipótesis por cada marco o por cada trabe. En este método, la estructura se considera dividida en pórticos o marcos independientes (fig. 10.19), y se establecen los tres supuestos siguientes:

1. Las columnas se deforman de manera que en su punto medio se forma un punto de inflexión como se muestra en la fig. 10.11(a).
2. Las trabes se deforman de modo que en su punto medio se forma un punto de inflexión.
3. Las fuerzas cortantes horizontales en cada nivel están distribuidas arbitrariamente entre las columnas. Una distribución que se emplea comúnmente (ilustrada aquí) consiste en suponer que la fuerza cortante se reparte entre las columnas según la siguiente relación: una parte para las columnas exteriores y dos para las interiores. En la fig. 10.19 puede verse la razón de suponer esta relación. Cada columna interior forma parte de dos marcos, en tanto que una columna exterior sirve sólo para uno. Otra distribución común consiste en suponer que la fuerza cortante  $V$  tomada por cada columna es proporcional al área de piso que soporta. La distribución de cortante realizada mediante ambos procedimientos sería la misma para un edificio con claros de igual tamaño, pero en uno con claros desiguales, los resultados diferirían de los del método del área de piso, dando probablemente resultados más reales.

En esta estructura existen 27 redundantes; para determinar sus valores se ha formulado una hipótesis relacionada con la posición del punto de inflexión en cada una de las 21 columnas y trabes. Se establecen, además, tres supuestos en cada nivel respecto a la distribución de cortante en cada marco, o sea, que el número de hipótesis para cortante es menor en una unidad al número de columnas de cada nivel. Para la estructura se formulan 9 hipótesis de cortante, dando así un total de 30 con sólo 27 redundantes. Se han establecido entonces más hipótesis que las necesarias, pero esto es congruente con la solución (es decir, si sólo se usaran 27 y los valores restantes se obtuvieran por estática, los resultados serían idénticos).

### Análisis de la estructura

La estructura se analiza en la fig. 10.20 con base en las hipótesis anteriores. Las flechas mostradas en la figura dan el sentido de la fuerza cortante en las trabes y

## 10.11 Análisis de estructuras de edificios para cargas laterales

309

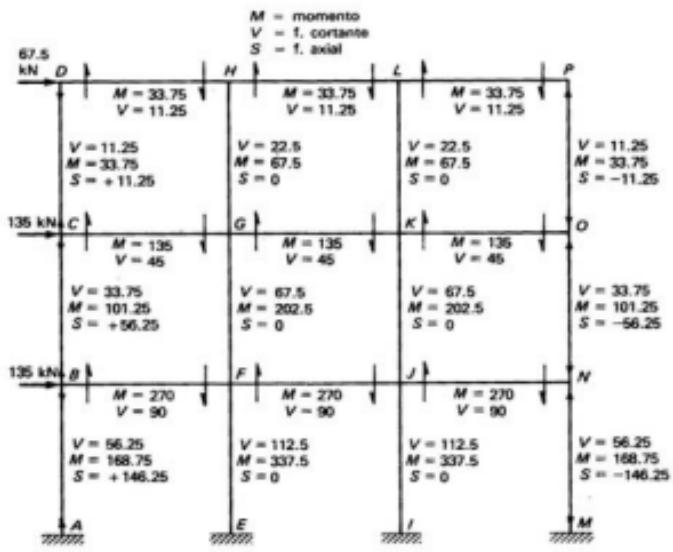


Figura 10.20

de la fuerza axial en las columnas. El lector puede visualizar la condición de esfuerzo en la estructura sólo con suponer que el empuje del viento es de izquierda a derecha, y produce así tensión en las columnas exteriores de la izquierda y compresión en las columnas exteriores de la derecha. En resumen, los cálculos se realizaron como sigue.

### 1. Cortante en las columnas

Se determinaron primero las fuerzas cortantes en cada columna para los diversos niveles. La fuerza cortante total en el nivel más alto vale 67.5 kN. Como existen dos columnas exteriores y dos interiores, se puede escribir la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} x + 2x + 2x + x &= 67.5 \text{ kN} \\ x &= 11.25 \text{ kN} \\ 2x &= 22.50 \text{ kN} \end{aligned}$$

La fuerza cortante en la columna *CD* vale 11.25 kN; en *GH* es de 22.5 kN, etc. Asimismo, se determinaron las fuerzas cortantes para las columnas de los niveles primero y segundo, donde las cortantes totales tienen valores de 337.5 y 202.5 kN, respectivamente.

## 2. Momentos en las columnas

Se supone que las columnas tienen puntos de inflexión en sus puntos medios; de ahí que el momento flexionante, en sus partes superior e inferior, es igual al producto de la fuerza cortante en la columna por la mitad de la altura.

## 3. Momentos y cortantes en tráves

En cualquier nudo de la estructura, la suma de los momentos flexionantes en las tráves es igual a la suma de los momentos en las columnas, los cuales han sido determinados previamente. Comenzando en la esquina superior izquierda del marco total, y avanzando de izquierda a derecha, por suma o resta de los momentos, según el caso, los momentos flexionantes en las tráves se determinaron en el siguiente orden:  $DH$ ,  $HL$ ,  $LP$ ,  $CG$ ,  $GK$ , etc. Se concluye que con los puntos de inflexión en el centro de cada trabe, la fuerza cortante en éstas es igual al momento flexionante correspondiente, dividido entre la mitad de la longitud de la trabe.

## 4. Fuerza axial en las columnas

La fuerza axial en las columnas se puede determinar directamente a partir de las fuerzas cortantes en las tráves. Comenzando en la esquina superior izquierda, la fuerza axial en la columna  $CD$  es numéricamente igual a la fuerza cortante en la trabe  $DH$ . La fuerza axial en la columna  $GH$  es igual a la diferencia entre las fuerzas cortantes en las tráves  $DH$  y  $HL$ , que es cero en este caso. (Si los marcos tienen el mismo ancho, las fuerzas cortantes en la trabe de un nivel serán iguales, y la fuerza axial en las columnas interiores será nula, ya que sólo se consideran las cargas laterales.)

## El método del voladizo

Otro método sencillo para analizar estructuras de edificios sujetos a fuerzas laterales, es el del voladizo, presentado por vez primera por A. C. Wilson en el *Engineering Record* de septiembre de 1908. Se dice que este método es algo más adecuado para edificios altos y de relativamente poca anchura, que el del portal, pudiéndose utilizar en forma satisfactoria para edificios con no más de 25 a 35 pisos [7]. Sin embargo, no es tan popular como el método del portal.

El método de Wilson emplea las hipótesis del método del portal relativas a las posiciones de los puntos de inflexión en columnas y tráves; sin embargo, la tercera hipótesis es algo diferente. En vez de suponer que la fuerza cortante en un nivel particular se reparte entre las columnas conforme a una cierta relación, se considera que la fuerza axial en cada columna es proporcional a su distancia al centro de gravedad de todas las columnas en ese nivel. Si se supone que las columnas en cada nivel tienen la misma área transversal (como se supondrá en todos los problemas relativos a este método en este capítulo), entonces sus fuerzas variarán en proporción a sus distancias al centro de gravedad. Las cargas de viento tienden a volcar el edificio, comprimiendo las columnas que se encuentran a sotavento y tensando las que están a barlovento. Cuanto mayor sea la distancia de una columna al centro de gravedad de todo el grupo, tanto mayor será su fuerza axial.

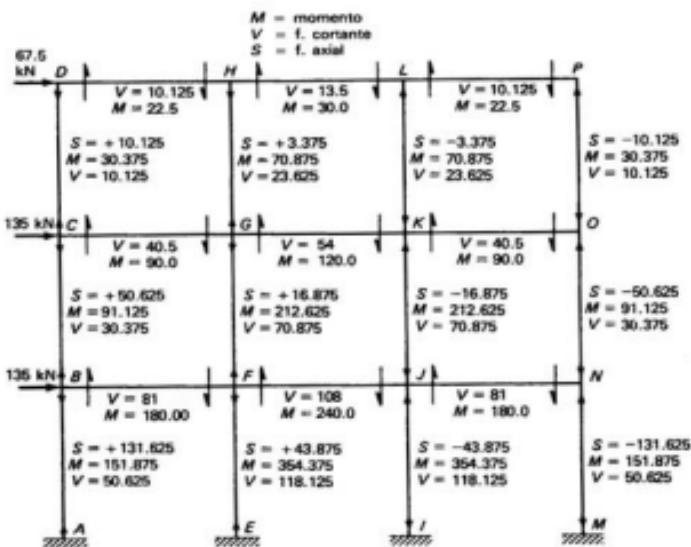


Figura 10.21

La nueva hipótesis equivale a formular un número de supuestos para fuerza axial igual al número de columnas en cada nivel, menos uno. Nuevamente, la estructura contiene 27 redundantes y 30 hipótesis (21 para la posición de los puntos de inflexión en tráves y columnas), pero las suposiciones sobrantes son congruentes con la solución.

### Análisis de la estructura

En la fig. 10.21 se muestra el análisis, mediante el método del voladizo, de la estructura analizada anteriormente por el procedimiento del portal. En resumen, los cálculos se efectuarán como sigue:

#### 1. Fuerza axial en columna

Considerando primero el nivel más alto, se toman momentos con respecto al punto de inflexión de la columna *CD*, de las fuerzas que se encuentran sobre el plano de inflexión en las columnas de ese nivel. Según la tercera hipótesis, la fuerza axial en *GH* será sólo 1/3 de la de *CD*, siendo de tensión en *GH* y *CD*, en tanto que en *KL* y *OP* es de compresión. La siguiente expresión se escribe, con respecto a la fig. 10.22, para determinar los valores de las fuerzas axiales en las columnas del piso más alto.

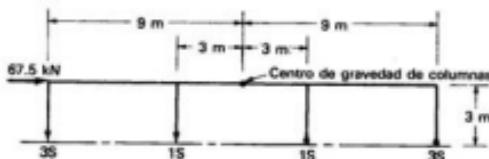


Figura 10.22

$$(67.5)(3) + (1S)(6) - (1S)(12) - (3S)(18) = 0$$

$$S = 3.375 \text{ kN}$$

$$3S = 10.125 \text{ kN}$$

La fuerza axial en *CD* vale 10.125 kN y en *GH* vale 3.375 kN, etc. Se efectúan cálculos semejantes para cada nivel, determinándose de esta manera las fuerzas axiales en las columnas.

## 2. Cortante en tráves

El siguiente paso consiste en determinar la fuerza cortante en las tráves a partir de las fuerzas axiales en las columnas. Estas fuerzas cortantes se determinan comenzando en la esquina superior izquierda, recorriendo el nivel más alto, y sumando o restando las fuerzas axiales en las columnas, según su signo. Este procedimiento es semejante al método de los nudos empleado para calcular las fuerzas en los elementos de una armadura.

## 3. Momentos en columnas y tráves y cortante en columnas

Los pasos finales se pueden resumir rápidamente. Los momentos flexionantes en las tráves, como antes, son iguales al producto de las fuerzas cortantes en ellas, por la mitad de su longitud. Los momentos flexionantes en las columnas se logran comenzando en la esquina superior izquierda, recorriendo sucesivamente cada nivel, y sumando o restando los momentos en tráves y en columnas, obtenidos previamente. La fuerza cortante en las columnas es igual al momento flexionante en éstas dividido entre la mitad de la altura de una columna.

La tabla 10.2 compara los momentos en los miembros de este marco determinados con los dos métodos aproximados y con el método de distribución de momentos, descrito en los capítulos 14 y 15. Obsérvese que para varios miembros los resultados aproximados difieren bastante de los resultados obtenidos con el método "exacto". Conforme se vaya adquiriendo experiencia en el análisis de estructuras indeterminadas por medio de métodos "exactos", se verá que los puntos de inflexión no se presentan exactamente en los puntos medios de los miembros. Usando una posición mejorada para tales puntos, se tendrán mejores resultados en el análisis. El método de Bowman [8] establece la posición de los puntos de inflexión en las columnas y en las tráves de acuerdo con un conjunto especificado de reglas que

TABLA 10.2 MOMENTOS EN LOS ELEMENTOS DEL MARCO

Elemento	Momento del portal	Momento del voladizo	Momento de Cross	Elemento	Momento del portal	Momento del voladizo	Momento de Cross
AB	168.75	151.875	268.65	JJ	337.50	354.375	329.4
BA	168.75	151.875	171.45	JJ	337.50	354.375	238.95
BC	101.25	91.125	83.7	JF	270.00	324.00	187.65
BF	270.00	243.00	255.15	JK	202.5	212.625	164.7
CB	101.25	91.125	124.2	JN	270.00	243.00	217.35
CD	33.75	30.375	13.5	KJ	202.5	212.625	190.35
CG	135.00	121.50	137.7	KG	135.00	162.00	112.05
DC	33.75	30.375	48.6	KL	67.5	70.875	45.90
DH	33.75	30.375	48.6	KO	135.00	121.50	125.55
EF	337.50	354.375	302.4	LK	67.5	70.875	75.6
FE	337.50	354.375	238.95	LH	33.75	40.5	35.1
FB	270.00	243.00	217.35	LP	33.75	30.375	40.5
FG	202.5	212.625	164.70	MN	168.75	151.875	268.65
FJ	270.00	324.00	187.65	NM	168.75	151.875	171.45
GF	202.5	212.625	190.35	NJ	202.5	243.00	255.15
GC	135.00	121.50	125.55	NO	101.25	91.125	83.7
GH	67.5	70.875	45.9	ON	101.25	91.125	124.2
GK	135.00	162.00	112.05	OK	135.00	121.5	137.7
HG	67.5	70.875	75.6	OP	33.75	30.375	13.5
HD	33.75	30.375	40.5	PO	33.75	30.375	48.6
HL	33.75	40.5	35.1	PL	33.75	30.375	48.6

dependen del número de pisos del edificio. Además, la fuerza cortante se divide entre las columnas de cada nivel, de acuerdo con un conjunto de reglas basadas tanto en los momentos de inercia de las columnas como en los anchos de los vanos o crucijas. La aplicación del método de Bowman proporciona resultados mucho mejores que los obtenidos por los métodos del portal y del voladizo.

## 10.12 ANALISIS DE LA ARMADURA VIERENDEEL

Una "armadura" frecuentemente empleada en Europa y ocasionalmente en Estados Unidos, es la desarrollada por M. Vierendeel en 1896. Este tipo de estructura, ilustrado en la fig. 10.23 no es realmente una armadura común y exige el empleo de nudos resistentes a momento flexionante. Las cargas están soportadas mediante la resistencia a la flexión de sus elementos cortos y fuertes. Aunque su análisis y diseño son muy difíciles, se trata de una estructura bastante eficiente.

Estas estructuras sumamente hiperestáticas se pueden analizar en forma aproximada con el método del portal o del voladizo, ya descritos en la sección precedente. La fig. 10.24 muestra los resultados logrados al aplicar el método del portal a una armadura Vierendeel\*. (En este caso simétrico el método del voladizo daría

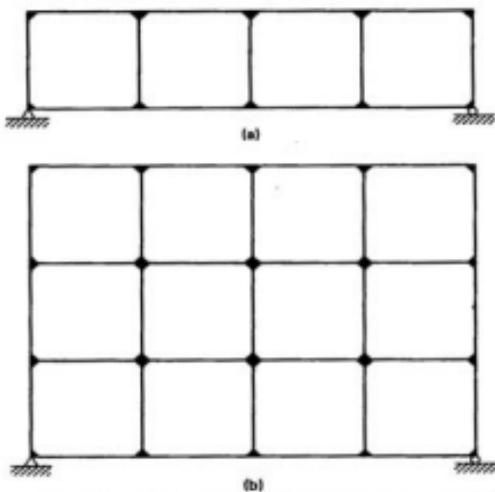


Figura 10.23

los mismos resultados.) Para seguir los cálculos, al lector puede facilitársele mirar la estructura de lado, porque la fuerza cortante considerada es vertical, en tanto que en las estructuras antes analizadas era horizontal.

Un análisis "exacto" de esta armadura realizado con el programa para computadora adjunto a este texto (véase el capítulo 20), da los valores mostrados en

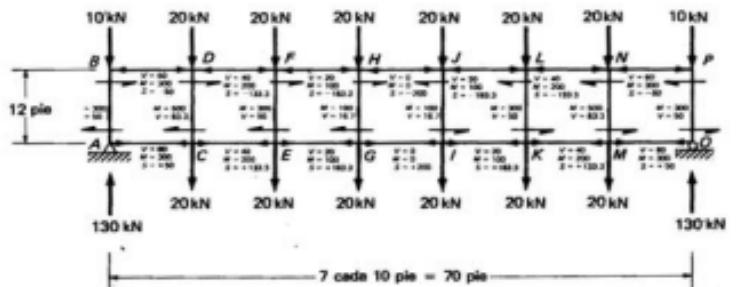
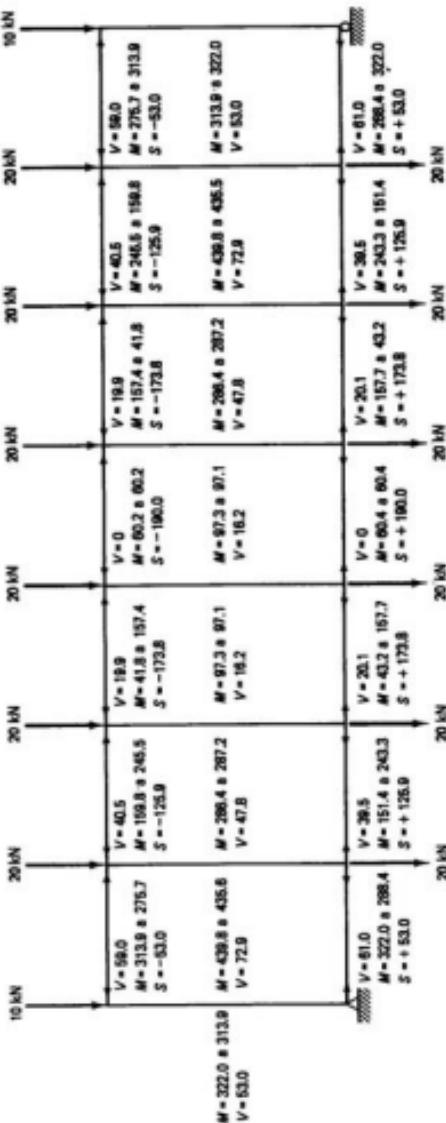


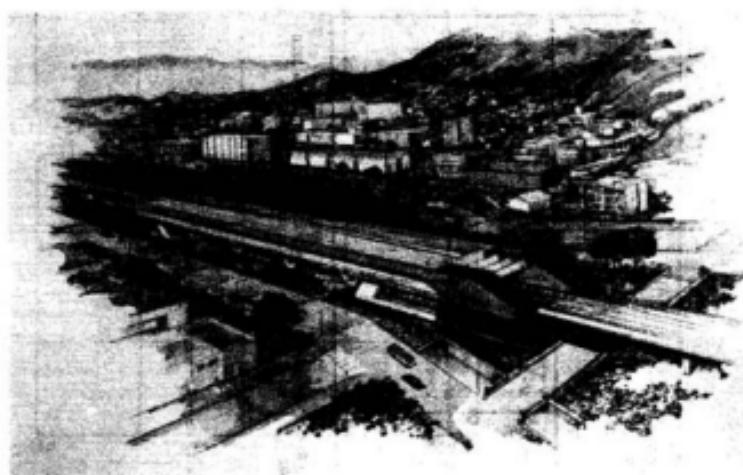
Figura 10.24

## 10.12 Análisis de la armadura Vierendeel



Nota: El análisis se hizo suponiendo  $A = 27.7 \text{ plg}^2$ ,  $I = 2700 \text{ plg}^4$  y  $E = 29 \times 10^3 \text{ ksi/plg}^2$  en todos los miembros.

Figura 10.25



Diseño del metro de Medellín, Rep. de Colombia. (Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)

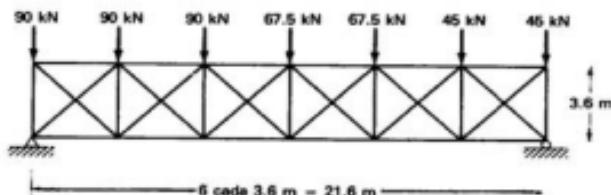
la fig. 10.25. En este programa se supuso que los elementos tienen áreas transversales y momentos de inercia constantes. Puesto que los puntos de inflexión no se encuentran exactamente a la mitad de los elementos, los momentos flexionantes en sus extremos varían hasta cierto punto, y ambos momentos se indican en la figura. Aunque los resultados obtenidos mediante el método del portal parecen muy razonables para esta armadura particular, podrían haberse mejorado ajustando ligeramente las posiciones supuestas para los puntos de inflexión.

En muchas estructuras Vierendeel, sobre todo las de varios pisos, los elementos horizontales inferiores pueden ser mucho más grandes y rígidos que los demás elementos horizontales. Para tener mejores resultados con los métodos del portal o del voladizo, se debe tener en cuenta la falta de uniformidad de las dimensiones, suponiendo que la mayor parte de la fuerza cortante es tomada por los elementos más rígidos.

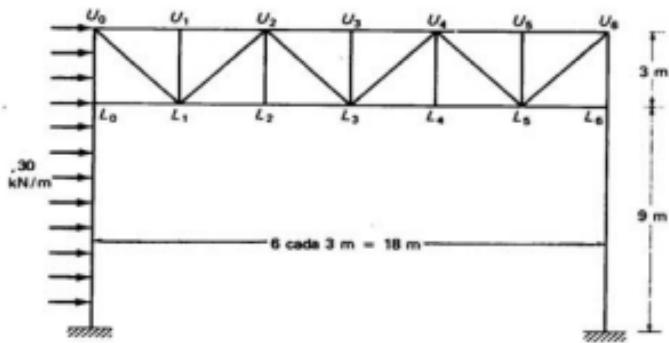
## PROBLEMAS

- 10.1 Calcular las fuerzas en las barras de la armadura mostrada para cada una de las siguientes condiciones: (a) las diagonales no pueden soportar compresión; (b) las dia-

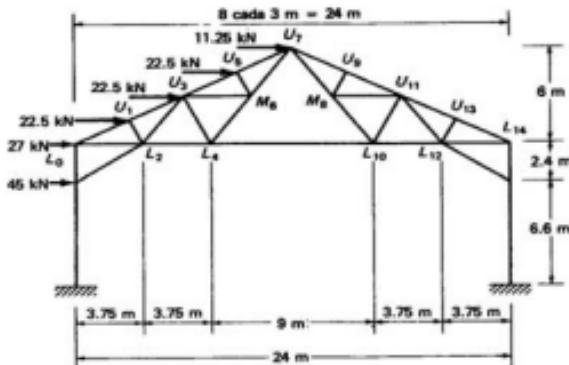
gonales que trabajen a compresión soportan la mitad de la fuerza cortante en el tablero;  
 (c) las diagonales que trabajen a compresión soportan la tercera parte de la fuerza cortante en el tablero.



- 10.2** Determine las fuerzas en todas las barras de la armadura mostrada suponiendo que los puntos de inflexión están localizados a 3.6 m por arriba de las bases de las columnas. (*Resp.:  $V_R = 58.8 \text{ kN}$ ,  $\uparrow U_1U_2 = -67.2 \text{ kN}$ ,  $L_2L_3 = -117.6 \text{ kN}$ ,  $U_4L_5 = -83.23 \text{ kN}$* )



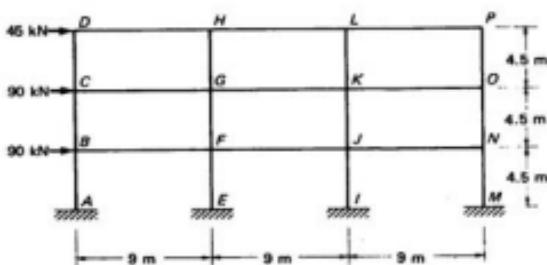
- 10.3** Resuelva el problema 10.2 suponiendo que los puntos de inflexión están localizados a 4.5 m por arriba de las bases de las columnas.
- 10.4** Determine las fuerzas en todos los elementos de la estructura mostrada, suponiendo que los puntos de inflexión están localizados a 3 m por arriba de las bases de las columnas. (*Resp.:  $L_0L_2 = -45.22 \text{ kN}$ ,  $U_1U_3 = -126 \text{ kN}$ ,  $L_4L_{10} = -61.92 \text{ kN}$* )



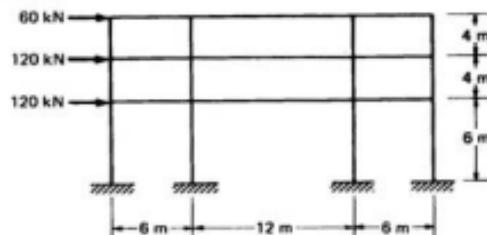
- 10.5 Resuelva el problema 10.4 suponiendo que los puntos de inflexión están localizados a 1.8 m por arriba de las bases de las columnas.

En los problemas 10.6 al 10.13, calcule los momentos, las fuerzas cortantes y axiales en todos los elementos de los marcos mostrados, (a) empleando el método del portal y (b) empleando el método del voladizo.

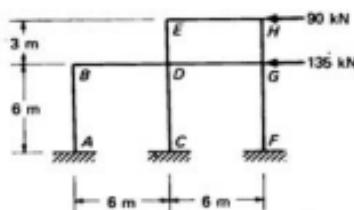
- 10.6 (Resp.: con el método del portal para BC:  $V = 22.5 \text{ kN}$ ,  $M = 50.625 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $S = +18.72 \text{ kN}$ ; con el método del voladizo para BC:  $V = 20.25 \text{ kN}$ ,  $M = 45.56 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $S = +16.88 \text{ kN}$ )



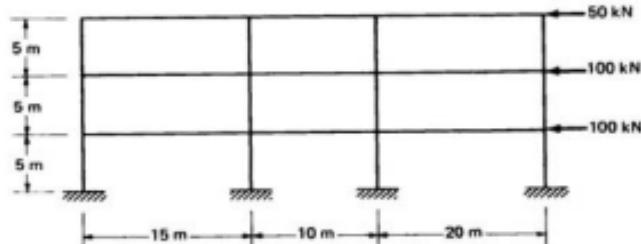
10.7



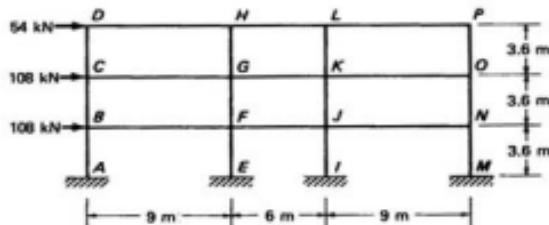
- 10.8 (Resp.: con el método del portal para FG:  $V = 56.25 \text{ kN}$ ,  $M = 168.75 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $S = +101.25 \text{ kN}$ ; con el método del voladizo para FG:  $V = 33.75 \text{ kN}$ ,  $M = 101.25 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $S = +78.75 \text{ kN}$ )



10.9

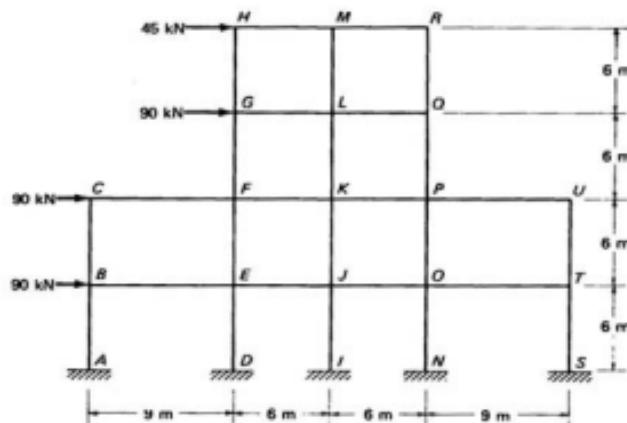


- 10.10 (Resp.: con el método del portal para FG:  $V = 54 \text{ kN}$ ,  $M = 97.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $S = +9 \text{ kN}$ ; con el método del voladizo para FG:  $V = 52.43 \text{ kN}$ ,  $M = 94.36 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $S = +4.77 \text{ kN}$ )

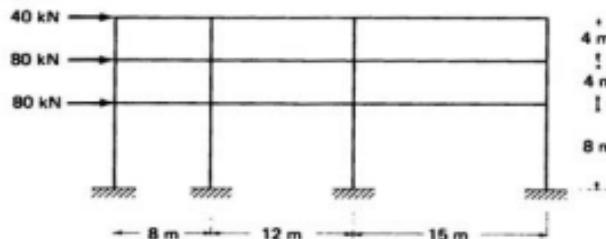


**10.11** Resuelva el problema 10.10 suponiendo que las bases de las columnas están articuladas.

**10.12** (*Resp.:* con el método del portal para  $OP$ :  $V = 56.25$  kN,  $M = 168.75$  kN·m,  $S = -99.36$  kN; con el método del voladizo para  $OP$ :  $V = 56.16$  kN,  $M = 168.48$  kN·m,  $S = -28.26$  kN)

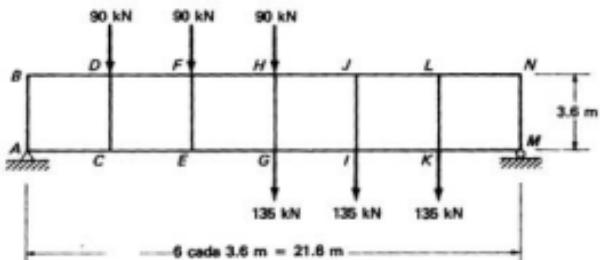


**10.13**

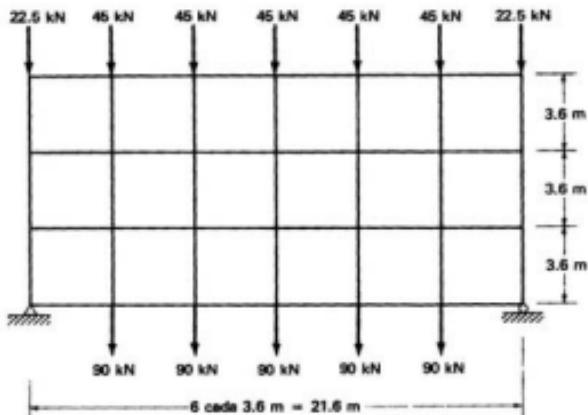


En los problemas 10.14 y 10.15 calcule los momentos, las fuerzas cortantes y axiales en todos los elementos de las armaduras Vierendeel empleando el método del portal.

- 10.14** (Resp.: para  $CD$ :  $V = 270 \text{ kN}$ ,  $M = 486 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ; para  $FH$ :  $V = 67.5 \text{ kN}$ ,  $M = 121.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $S = -607.5 \text{ kN}$ )



- 10.15**



## REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. *Building Code Requirements for Reinforced Concrete*, ACI 318-83 (Detroit: American Concrete Institute) Sección 8.33.
2. C. H. Norris, J. B. Wilbur y S. Utku, *Elementary Structural Analysis*, tercera edición. (Nueva York: McGraw-Hill, 1976), págs. 200-201.
3. *Ibid.*, págs. 207-212.

4. "Wind Bracing in Steel Buildings," *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 105 (1940): 1725-1727.
5. *Ibid*, págs. 1723-1725.
6. *Ibid*, pág. 1723
7. *Ibid*, pág. 1723
8. H. Sutherland y H. L. Bowman, *Structural Theory* (Nueva York: Wiley, 1950), págs. 295-301.

---

# Método de las fuerzas para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas

### 11.1 MÉTODOS PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Existen dos métodos generales para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas: el método de las fuerzas y el método de los desplazamientos; ambos se expondrán brevemente en esta sección.

**Método de las fuerzas.** En este método se suprime un número suficiente de redundantes (reacciones o fuerzas internas o ambas) de la estructura hiperestática, de modo que se logre una estructura estable y estáticamente determinada. Se calculan los desplazamientos (lineales o angulares) en la dirección de las redundantes canceladas. Las redundantes deben ser de una magnitud tal que fuercen a sus puntos de aplicación a volver a sus posiciones originales de deflexión nula. Se establece una ecuación para la condición de deflexión en cada redundante y éstas se despejan de las ecuaciones resultantes. Las secciones restantes de este capítulo se dedican al método de las fuerzas (llamado también método de las flexibilidades o método de las deflexiones compatibles); se considerarán vigas, marcos y armaduras estáticamente indeterminadas.

James Clerk Maxwell publicó en 1864 por primera vez un método de fuerzas para analizar estructuras hiperestáticas. Su método se basó en deflexiones, pero la presentación (que incluía el teorema de las deflexiones reciprocas) fue muy breve y no llamó mucho la atención. Diez años después Otto Mohr, independientemente, amplió la teoría casi a su estado actual de desarrollo. El análisis de estructuras redundantes empleando deflexiones se denomina en ocasiones como *el método de Maxwell-Mohr* o *el método de las deformaciones consistentes* [1,2].

**Método de los desplazamientos o de las rigideces.** En este método de análisis se establecen ecuaciones con los desplazamientos de los nudos (rotaciones y trasla-

ciones) necesarios para describir completamente la configuración deformada de la estructura, a diferencia de las ecuaciones del método de las fuerzas que contienen acciones redundantes. Resolviendo las ecuaciones simultáneas se encuentran esos desplazamientos que se sustituyen en las ecuaciones originales para determinar las diversas fuerzas internas. El método de los desplazamientos se presenta en los capítulos 13 al 19.

## 11.2 VIGAS Y MARCOS CON UNA REDUNDANTE

La viga de dos claros de la fig. 11.1(a) está construida con un material que obedece a la ley de Hooke. Esta estructura estáticamente indeterminada soporta las cargas  $P_1$  y  $P_2$  y está a su vez soportada por componentes de reacción en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . La supresión del apoyo  $B$  convierte a la viga en estáticamente determinada, lo que evidencia que la viga original es hiperestática de primer grado. Es muy sen-

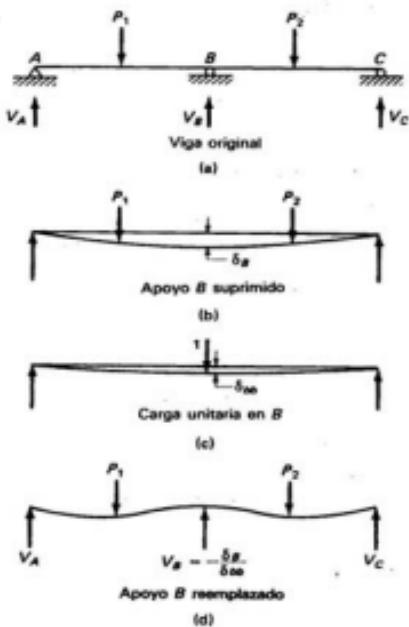
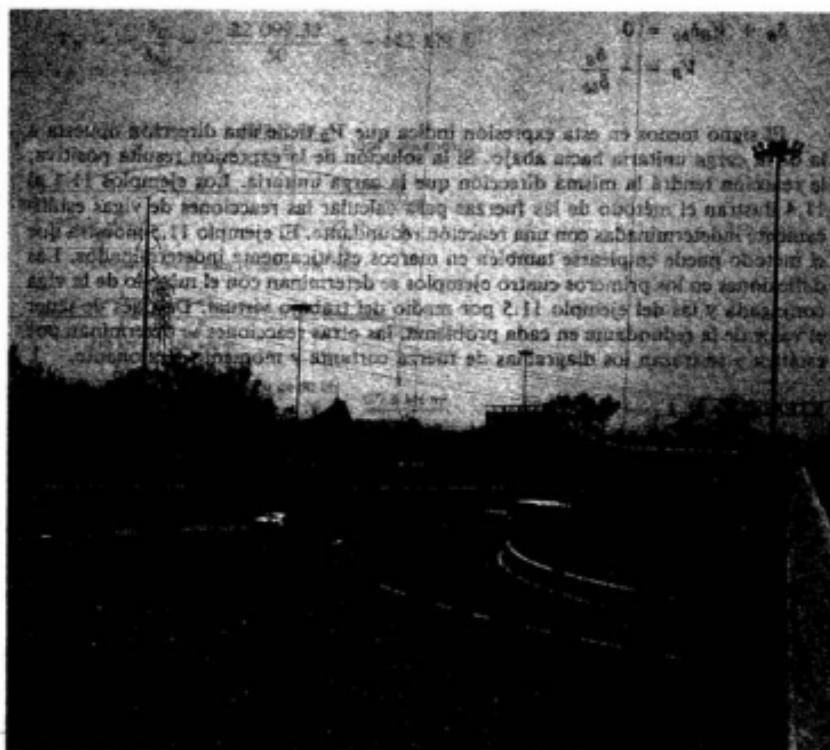


Figura 11.1

cillo determinar la deflexión en  $B$ ,  $\delta_B$  denominada en la fig. 11.1(b), producida por las cargas externas.

Si se retiran las cargas externas y se coloca una carga unitaria en el punto  $B$  de la viga, se tendrá una deflexión en  $B$  igual a  $\delta_{Bb}$ , como se indica en la fig. 11.1(c). Utilizaremos letras mayúsculas (subíndices) para designar a las deflexiones producidas por cargas externas. La deflexión en el punto  $C$  de una viga debida a cargas externas se denominará  $\delta_C$ . Las deflexiones debidas a la carga unitaria imaginaria se indicarán por medio de dos letras minúsculas (subíndices). La primera letra indica la posición de la deflexión y la segunda indica la posición de la carga unitaria. La deflexión en  $E$  producida por una carga unitaria en  $B$  se denominará  $\delta_{Bb}$ . Los des-



Puente vehicular sobre la avenida Insurgentes, Cd. de México. (Cortesía de RSI.)

plazamientos debidos a cargas unitarias se llaman *coeficientes de flexibilidad* (como se describe en el cap. 16).

El apoyo *B* no sufre asentamientos y supresión es meramente un artificio del análisis. En *B* existe una fuerza hacia arriba, suficiente para impedir cualquier deflexión o, en otras palabras, existe una fuerza en *B* de suficiente magnitud para hacer regresar dicho punto *B* a su posición original no desplazada. La distancia que el apoyo debe ser empujado es  $\delta_{bb}$ .

Una carga unitaria en *B* produce una deflexión en *B* igual a  $\delta_{bb}$ , y una carga de 10 kN en *B* producirá una deflexión de  $10\delta_{bb}$ . Análogamente una reacción hacia arriba en *B* de  $V_B$  empujará a *B* una distancia igual a  $V_B\delta_{bb}$ . La deflexión total en *B* debida a las cargas externas y a la reacción  $V_B$  es cero y puede expresarse como sigue:

$$\delta_B + V_B\delta_{bb} = 0$$

$$V_B = -\frac{\delta_B}{\delta_{bb}}$$

El signo menos en esta expresión indica que  $V_B$  tiene una dirección opuesta a la de la carga unitaria hacia abajo. Si la solución de la expresión resulta positiva, la reacción tendrá la misma dirección que la carga unitaria. Los ejemplos 11.1 al 11.4 ilustran el método de las fuerzas para calcular las reacciones de vigas estáticamente indeterminadas con una reacción redundante. El ejemplo 11.5 muestra que el método puede emplearse también en marcos estáticamente indeterminados. Las deflexiones en los primeros cuatro ejemplos se determinan con el método de la viga conjugada y las del ejemplo 11.5 por medio del trabajo virtual. Después de tener el valor de la redundante en cada problema, las otras reacciones se determinan por estática y se trazan los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

### EJEMPLO 11.1

Determinar las reacciones y dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga de dos claros mostrada en la fig. 11.2; considerar a  $V_B$  como la redundante;  $E$  e  $I$  son constantes.

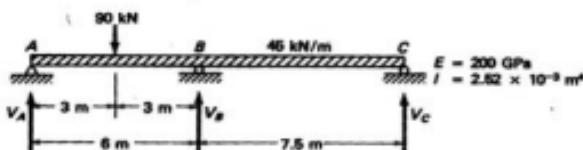


Figura 11.2

**Solución**De los diagramas de  $M/EI$  se obtiene:

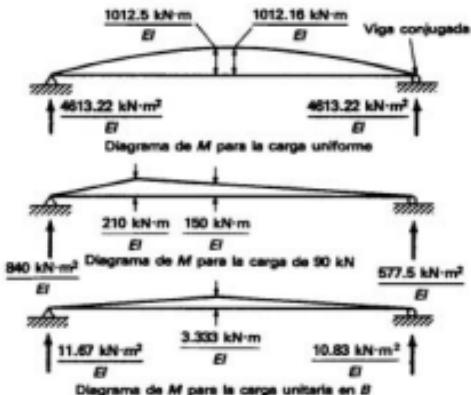
$$EI\delta_B = (6)(4613.22) - \left(\frac{1}{2}\right)(6)(1012.5)(2) - \left(\frac{1}{3}\right)(6)(202.5)(3) + (577.5)(7.5) - \left(\frac{1}{2}\right)(150)(7.5)(2.5)$$

$$EI\delta_B = 22\,099.32 \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

$$EI\delta_{bb} = (11.67)(6) - \left(\frac{1}{2}\right)(6)(3.333)(2)$$

$$EI\delta_{bb} = 50 \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

$$V_B = -\frac{\delta_B}{\delta_{bb}} = -\frac{22\,099.32}{50} = -442 \text{ kN} \uparrow$$



Por equilibrio estático calculamos las reacciones en A y en C:

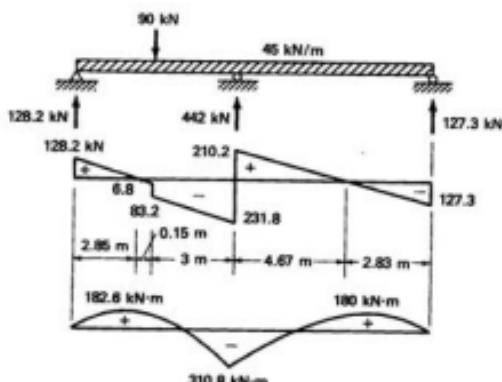
$$\Sigma M_A = 0$$

$$(90)(3) + (13.5)(45)(6.75) - (442)(6) - 13.5 V_C = 0 \\ V_C = 127.3 \text{ kN} \uparrow$$

$$\Sigma V = 0$$

$$90 + (45)(13.5) - 127.3 - 442 - V_A = 0 \\ V_A = 128.2 \text{ kN} \uparrow$$

Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante:



### EJEMPLO 11.2

Determinar las reacciones y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la viga mostrada en la fig. 11.3. Considerese la reacción  $V_B$  como la redundante;  $E$  e  $I$  son constantes.

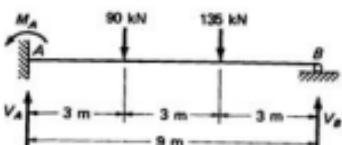
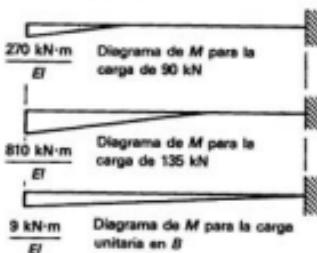


Figura 11.3

*Solución:*



$$EI\delta_B = (\frac{1}{2})(270)(3)(8) + (\frac{1}{2})(810)(6)(7) = 20250 \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

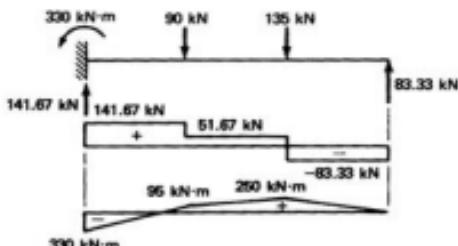
$$EI\delta_{bb} = (\frac{1}{2})(9)(9)(6) = 243 \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

$$V_B = -83.33 \text{ kN} \dagger$$

Por estática:

$$V_A = 141.67 \text{ kN} \dagger \text{ y } M_A = 330 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante:



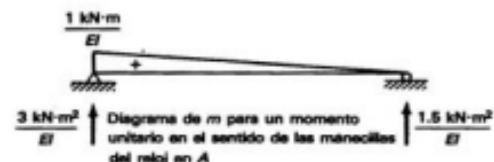
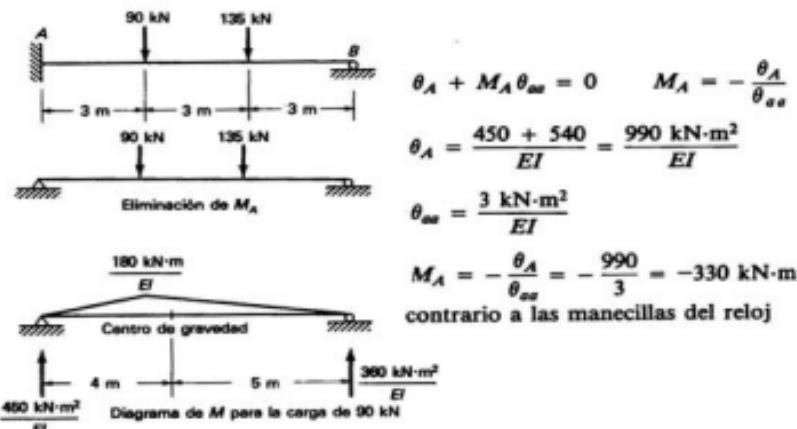
### EJEMPLO 11.3

Resolver el ejemplo 11.2 considerando el momento de empotramiento como la redundante.

*Solución:*

Cualquiera de las reacciones puede considerarse como redundante y cancelarse con la condición de que la estructura resultante sea estable. Si se suprime el momento resistente en el empotramiento  $A$ , queda en ese punto un apoyo simple y las cargas en la viga ocasionan que la tangente a la curva elástica gire un ángulo  $\theta_A$ . Un simple análisis de esta situación revelará un procedimiento para determinar el momento.

El valor de  $\theta_A$  es igual a la fuerza cortante en  $A$  en la viga conjugada cargada con el diagrama de  $M/EI$ . Si se aplica un momento unitario en  $A$ , la tangente a la curva elástica rotará un ángulo  $\theta_{uu}$ , que puede también calcularse con la viga conjugada. La tangente a la elástica en  $A$  en realidad no experimenta ninguna rotación; por tanto, cuando  $M_A$  se reemplaza, deberá tener una magnitud tal que haga rotar la tangente hasta su posición horizontal original. Se puede entonces escribir una expresión para esta rotación nula y de ahí despejar el valor de  $M_A$ .



$$\theta_A = \frac{450 + 540}{EI} = \frac{990 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$\theta_{aa} = \frac{3 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$M_A = -\frac{\theta_A}{\theta_{aa}} = -\frac{990}{3} = -330 \text{ kN}\cdot\text{m} \text{ contrario a las manecillas del reloj}$$

**EJEMPLO 11.4**

Encontrar las reacciones y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la viga de la fig. 11.4. Considerar el momento en el apoyo interior como la redundante.

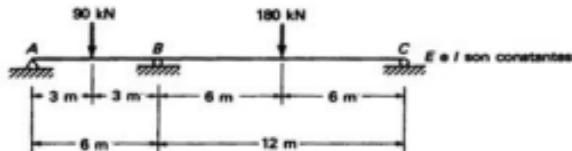


Figura 11.4

*Solución:*

La eliminación del momento en el apoyo interno convierte a éste en una articulación, por lo que la viga tendrá inclinación libre a cada lado como lo indican los ángulos  $\theta_{b_1}$  y  $\theta_{b_2}$  en el diagrama de deformación de la próxima figura. El valor numérico de los ángulos se determina mediante el diagrama  $M/EI$  de las estructuras conjugadas, calculando la fuerza cortante a cada lado del apoyo. En la viga real no existe cambio de inclinación de la tangente a la elástica desde una pequeña distancia a la izquierda de  $B$ , hasta otra pequeña distancia a su derecha.

El ángulo representado por  $\theta_B$  en el diagrama es el ángulo entre las tangentes a la elástica a cada lado del apoyo (o sea,  $\theta_{b_1} + \theta_{b_2}$ ). Cuando se vuelve a aplicar  $M_B$ , deberá tener la suficiente magnitud para que las tangentes coincidan, es decir, para que se anule el ángulo  $\theta_B$ . Un momento unitario aplicado a cada lado de la articulación produce un cambio de pendiente igual a  $\theta_{bb}$ ; por tanto, es aplicable la siguiente expresión:

$$M_B = -\frac{\theta_B}{\theta_{bb}}$$

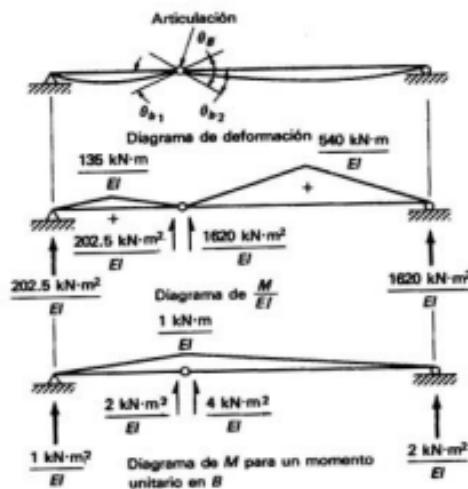
$$\theta_{b_1} = 202.5/EI$$

$$\theta_{b_2} = 1620/EI$$

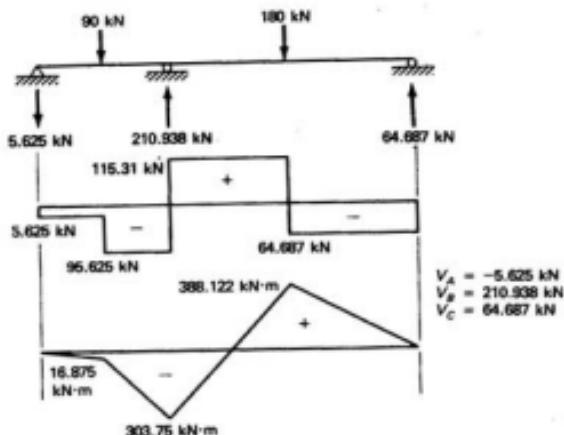
$$\theta_B = \theta_{b_1} + \theta_{b_2} = 1822.5/EI$$

$$\theta_{bb} = 2/EI + 4/EI = 6/EI$$

$$M_B = -\frac{\theta_B}{\theta_{bb}} = -\frac{1822.5}{6} = -303.75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Por equilibrio estático se encuentran las otras reacciones:



**EJEMPLO 11.5**

Calcular las reacciones y trazar el diagrama de momento flexionante de la estructura mostrada en la fig. 11.5.

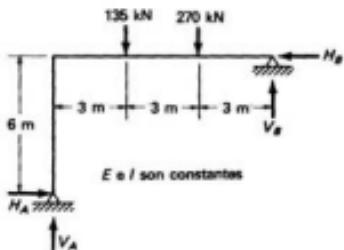
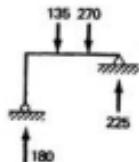


Figura 11.5

*Solución:*

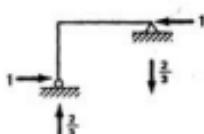
Se elimina  $H_A$  como redundante. El apoyo  $A$  se convierte en uno deslizante.



Calculamos la deflexión horizontal en  $A$  por trabajo virtual. Resulta:

$$\delta_A = \frac{10\,530}{EI} \leftarrow \text{kN}\cdot\text{m}^3$$

Aplicamos una carga unitaria horizontal en  $A$  y determinamos la deflexión horizontal  $\delta_{uu}$ .



El resultado es:

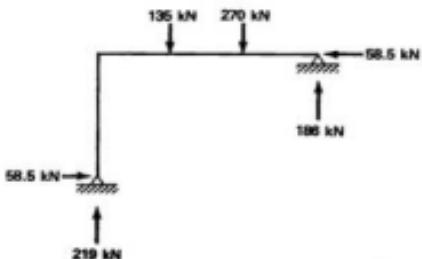
$$\delta_{\text{as}} = + \frac{180}{EI} \rightarrow \text{kN}\cdot\text{m}^3$$

$$\delta_A + H_A \delta_{\text{as}} = 0$$

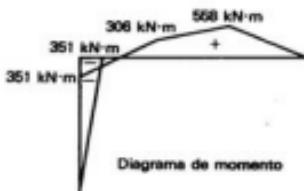
$$H_A = - \frac{\delta_A}{\delta_{\text{as}}} = - \frac{-10\,530}{+180} = +58.5 \text{ kN} \rightarrow$$

■ ■

Las reacciones restantes se calculan por equilibrio estático.



Puente sobre el río Raritan en Nueva Jersey. (Cortesía de Steinman, Boynton, Gronquist & Birdsall Consulting Engineers.)



### 11.3 VIGAS Y MARCOS CON DOS O MÁS REDUNDANTES

El método de las fuerzas para analizar vigas y marcos con una redundante puede ampliarse al análisis de vigas y marcos con dos o más redundantes. A continuación se considerará la viga continua con dos reacciones redundantes que se muestra en la fig. 11.6.

A fin de convertir la viga en una estructura estáticamente determinada es necesario eliminar dos apoyos. Así, se supone que *B* y *C* se eliminan de la estructura, y de esta manera se tienen las deflexiones  $\delta_B$  y  $\delta_C$  debidas a las cargas externas. Teóricamente se considera que tales cargas se han eliminado de la viga; se aplica una carga unitaria en *B* y se calculan las deflexiones  $\delta_{bb}$  y  $\delta_{cb}$  en *B* y *C*. A continuación se aplica la carga unitaria en *C*, calculándose de nuevo las deflexiones en los dos puntos,  $\delta_{bc}$  y  $\delta_{cc}$ .

Las reacciones en los apoyos *B* y *C* empujan estos puntos hacia arriba hasta que alcanzan su posición original de deflexión nula. La reacción  $V_B$  levantará el punto *B* una distancia  $V_B\delta_{bb}$ , y el punto *C*, una distancia  $V_B\delta_{cb}$ . La reacción  $V_C$  levanta a *C* una distancia  $V_C\delta_{cc}$ , y a *B*, una distancia  $V_C\delta_{bc}$ .

Para cada uno de los apoyos se puede escribir una ecuación de deflexiones. Ambas ecuaciones contendrán dos incógnitas,  $V_B$  y  $V_C$ , cuyos valores es posible determinar resolviéndolas simultáneamente.

$$\delta_B + V_B\delta_{bb} + V_C\delta_{bc} = 0$$

$$\delta_C + V_B\delta_{cb} + V_C\delta_{cc} = 0$$

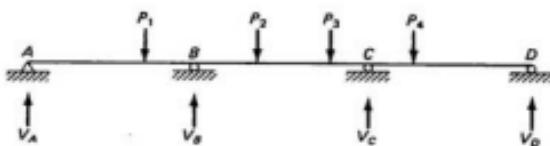


Figura 11.6



Paso a desnivel I-81 de la ruta fluvial auxiliar. Harrisburg, Pennsylvania.  
(Cortesía de Gannett Fleming.)

El método de las fuerzas para el cálculo de reacciones redundantes puede ampliarse sin límite al análisis de vigas con cualquier número de elementos redundantes. Sin embargo, los cálculos resultan muy laboriosos si existen más de dos o tres redundantes. Considerando la viga de la fig. 11.7 es posible escribir las siguientes expresiones:

$$\delta_B + V_B \delta_{bb} + V_C \delta_{bc} + V_D \delta_{bd} = 0$$

$$\delta_C + V_B \delta_{cb} + V_C \delta_{cc} + V_D \delta_{cd} = 0$$

$$\delta_D + V_B \delta_{db} + V_C \delta_{dc} + V_D \delta_{dd} = 0$$

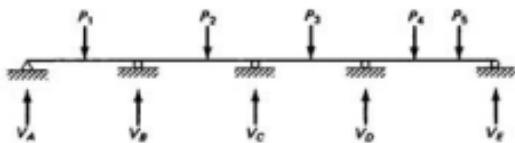


Figura 11.7

## 11.4 ASENTAMIENTO DE APOYOS

En las secciones precedentes se han considerado vigas continuas con apoyos que no experimentan desplazamiento alguno. No obstante, si un apoyo se asienta o sufre algún tipo de desplazamiento con respecto a su posición teórica original, pueden aparecer en la estructura cambios notables en reacciones, fuerzas cortantes, momentos flexionantes y esfuerzos. Cualesquiera que sean los factores que causen los desplazamientos (cimentaciones débiles, cambios de temperatura, construcción o fabricación deficientes, etc.), el análisis podrá desarrollarse mediante las ecuaciones de deformación establecidas anteriormente para las vigas continuas.

En la sección 11.2 se formuló una expresión para la deflexión en el punto  $B$  de la viga de dos claros mostrada en la fig. 11.1. Tal expresión fue establecida con el supuesto de que el apoyo  $B$  fue eliminado temporalmente de la estructura permitiendo que el punto  $B$  se desplazara, después de lo cual se volvió a situar el apoyo. La reacción en  $B$ , o sea  $V_B$ , se supuso de la suficiente magnitud para empujar  $B$  hacia arriba, hasta su posición original de deflexión nula. Si  $B$  en realidad se asentara 10 mm,  $V_B$  sería menor, debido a que únicamente tendría que empujar  $B$  hacia arriba una distancia igual a  $\delta_B$  menos 10 mm; la expresión para la deformación puede entonces escribirse como:

$$\delta_B - 10 + V_B \delta_{bb} = 0$$

Si tres personas caminan con un tronco sobre uno de sus hombros (situación estáticamente indeterminada) y una de ellas baja ligeramente el hombro cargado, éste no soportará el mismo peso que antes. En efecto, se ha separado del tronco soportado y cedido más peso del mismo a las otras dos personas. El asentamiento de un apoyo en una viga continua tiene el mismo efecto.

Los valores de  $\delta_B$  y  $\delta_{bb}$  deben calcularse en milímetros si el movimiento del soporte está dado en milímetros y deberán calcularse en metros si el asentamiento se da en metros, etc. El ejemplo 11.6 ilustra el análisis de la viga de dos claros del ejemplo 11.1 suponiendo que su apoyo interior sufre un asentamiento de 19 mm. Se traza el diagrama de momentos flexionantes después de que ocurre el asentamiento y se compara con el diagrama antes de que ocurra éste. Se ve que el pequeño asentamiento influye considerablemente en los resultados.

### EJEMPLO 11.6

Determinar las reacciones y dibujar los diagramas de fuerza cortante y momentos flexionante para la viga del ejemplo 11.1, reproducida en la fig. 11.8, suponiendo que el apoyo  $B$  sufre un asentamiento de 19 mm.

*Solución:*

Los valores de  $\delta_B$  y  $\delta_{bb}$  encontrados antes se calculan en pulgadas, con lo que se determina el asentamiento del efecto de apoyo en  $V_B$ . Mediante la estática se encuentran los nuevos valores de  $V_A$  y  $V_C$  y se dibujan los diagramas de fuerzas cor-

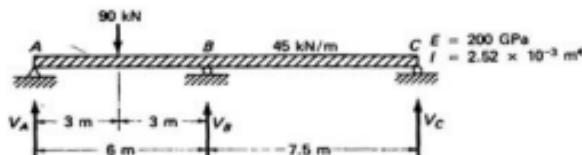


Figura 11.8

tantes y momento. Se repite el diagrama de momento antes del asentamiento para ilustrar los cambios que ocurrieron.

Los valores de  $\delta_B$  y  $\delta_{bb}$  calculados previamente son:

$$\delta_B = 43.8 \text{ mm}$$

$$\delta_{bb} = 0.099 \text{ mm}$$

La ecuación de compatibilidad geométrica es:

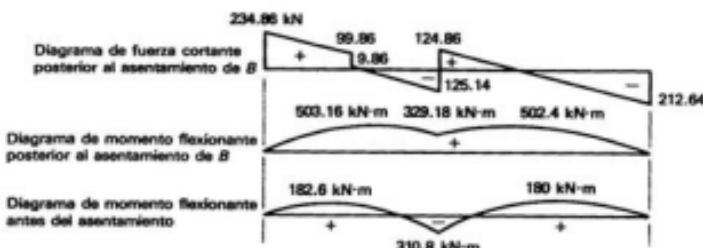
$$\delta_B - 19 + V_B \delta_{bb} = 0, \text{ de donde se obtiene}$$

$$V_B = -\frac{\delta_B - 19}{\delta_{bb}} = -\frac{43.8 - 19}{0.099} = -250 \text{ kN} \uparrow$$

Por equilibrio estático se determinan las otras dos reacciones:

$$V_A = 234.86 \text{ kN} \uparrow \text{ y } V_C = 212.64 \text{ kN} \uparrow$$

Se dibujan a continuación los diagramas para antes y después de que ocurre el asentamiento.



Cuando algunos o todos los apoyos se desplacen, el análisis puede efectuarse con base en valores relativos de los asentamientos. Por ejemplo, si todos los apoyos de la viga de la fig. 11.9(a) se asentaran 40 mm, las condiciones de esfuerzo permanecerían inalteradas. Si los apoyos se desplazan cantidades diferentes, pero permanecen alineados, como se ilustra en la fig. 11.9(b), la situación será teóricamente la misma que antes del asentamiento.

En casos en donde existan asentamientos no uniformes o diferentes y donde los apoyos no están con alineación, las condiciones de esfuerzo cambiarán debido a la deformación de la viga. Esta situación se podría tratar trazando una línea recta a través de las posiciones desplazadas de dos de los apoyos, que generalmente son los extremos. Se determinan las distancias de los demás apoyos a dicha línea, y se les utiliza en los cálculos como se ilustra en la fig. 11.9(c).

Se supone que los apoyos de la viga de tres claros mostrada en la fig. 11.10(a) sufren los siguientes asentamientos: A de 30 mm, B de 40 mm, C de 46 mm y D de 23 mm. En la fig. 11.10(b) se muestra un diagrama de tales asentamientos y se calculan los asentamientos relativos de B y C.

La solución de las siguientes dos ecuaciones simultáneas dará los valores de  $V_B$  y  $V_C$ .

$$\delta_B = 12 + V_B \delta_{bb} + V_C \delta_{bc} = 0$$

$$\delta_C = 20 + V_B \delta_{cb} + V_C \delta_{cc} = 0$$

Por equilibrio estático se obtienen las reacciones  $V_A$  y  $V_D$ .

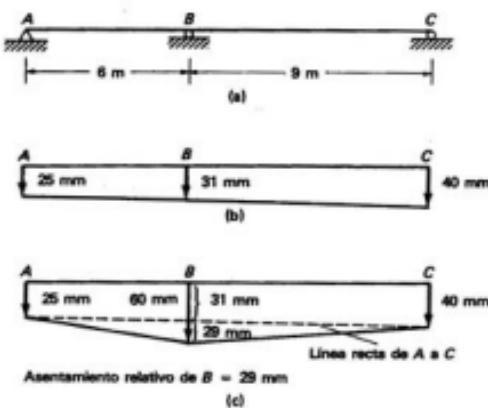


Figura 11.9

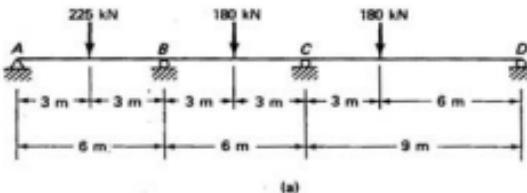
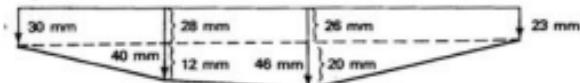


Diagrama de asentamiento:

Asentamiento relativo:  $\Delta_B = 12 \text{ mm}$ ;  $\Delta_C = 20 \text{ mm}$ 

(b)

Figura 11.10

### 11.5 ANALISIS DE ARMADURAS CON REDUNDANTES EXTERNAS

Las armaduras pueden ser estáticamente indeterminadas debido a reacciones redundantes, elementos redundantes, o una combinación de reacciones y barras redundantes. Inicialmente se considerarán armaduras con redundantes externas, y se analizarán con base en el cálculo de deflexiones, de manera muy semejante al procedimiento empleado en las vigas estáticamente indeterminadas.

En el análisis siguiente se estudiará la armadura continua de dos claros mostrada en la fig. 11.11. En este caso se elimina una componente de reacción, por ejemplo  $V_g$ , determinándose luego la deflexión en ese punto causada por las cargas externas. A continuación, se retiran estas cargas y se determina la deflexión en el apoyo B debida a una carga unitaria aplicada en ese punto. En seguida se vuelve a aplicar la reacción, la cual proporciona la fuerza necesaria para volver el apoyo a su posición original. La expresión para la deflexión es como sigue:

$$\delta_B + V_g \delta_{bb} = 0$$

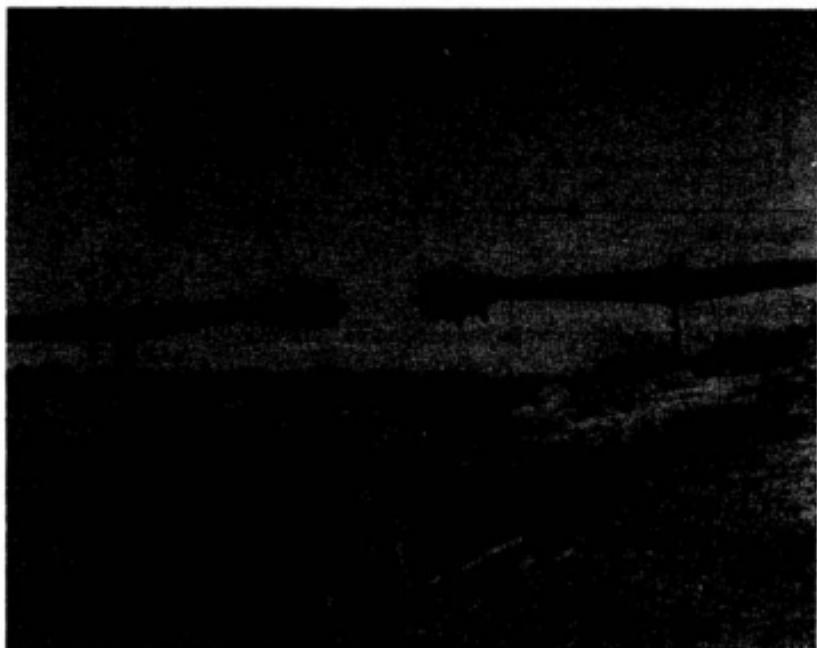
$$V_g = -\frac{\delta_B}{\delta_{bb}}$$

Las fuerzas internas en los elementos de la armadura debidas a cargas externas, cuando se elimina la redundante, no son las fuerzas finales correctas y las llama-

remos fuerzas  $F'$ . La deflexión por cargas externas en el apoyo eliminado se puede calcular con la expresión  $\Sigma(F'\mu\ell/AE)$ . La deflexión producida en el apoyo al colocar ahí una carga unitaria, puede calcularse aplicando la misma expresión que en el trabajo virtual, excepto que ahora la carga unitaria es la carga externa y las fuerzas internas producidas son las antes representadas por  $\mu$ . La deflexión en el apoyo debida a la carga unitaria es  $\Sigma(\mu^2\ell/AE)$ , y la reacción redundante se puede expresar como

$$V_g = - \frac{\Sigma(F'\mu_g\ell/AE)}{\Sigma(\mu_g^2\ell/AE)}$$

El ejemplo 11.7 ilustra el análisis completo por este método de una armadura de dos claros. Una vez calculada la reacción redundante, las demás reacciones y las fuerzas finales en las barras se pueden determinar por estática. Sin embargo, se dis-



Puente sobre la carretera costera del Pacífico, México. (Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)

pone de otro método para evaluar las fuerzas resultantes, el cual debe emplearse a fin de verificar matemáticamente los resultados. Al volver a aplicar la reacción  $V_B$  en la armadura, se hace que la fuerza en cada barra cambie en una cantidad igual a  $V_B$  multiplicada por el valor  $\mu$  correspondiente. Así, la fuerza final en una barra resulta ser

$$F = F' + V_B \mu$$

### EJEMPLO 11.7

Calcular las reacciones y las fuerzas en las barras de la armadura continua de dos claros mostrada en la fig. 11.11; los números encerrados en círculos indican las áreas de la sección transversal de las barras, como sigue: ① = 19.4 cm<sup>2</sup>; ④ = 25.8 cm<sup>2</sup>.

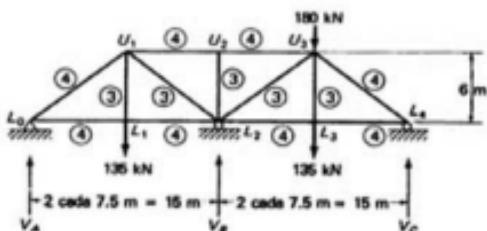
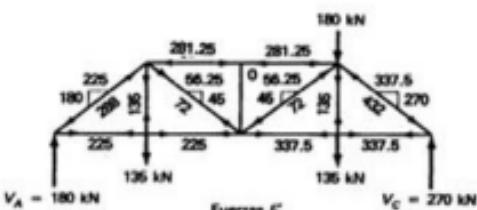


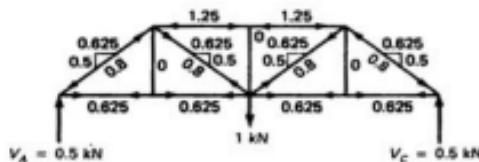
Figura 11.11

*Solución:*

Eliminamos el apoyo central considerándolo como redundante y calculamos las fuerzas  $F'$ .



Retiramos las cargas externas y colocamos una carga unitaria en la posición del apoyo central; calculamos ahora las fuerzas  $\mu$ .



En la tabla 11.1 calculamos los valores de  $\delta_B$  y  $\delta_{Bb}$  y obtenemos

$$V_B = -\frac{62.313}{247.24} = -252 \text{ kN} \uparrow$$

Las reacciones y fuerzas en las barras las calculamos por estática para verificar los valores finales de la tabla 11.1.

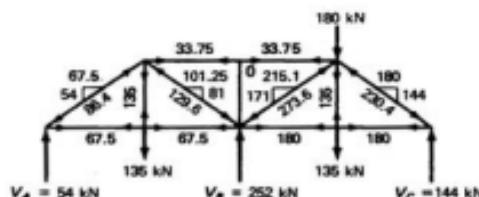


TABLA 11.1

Barra	$\ell$ (cm)	$A$ ( $\text{cm}^2$ )	$\ell/A$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$F'$ (kN)	$\mu$	$F' \mu \ell$ $\frac{\text{kN}}{\text{A}}$	$\mu^2 \ell$ $\frac{\text{kN}}{\text{A}}$	$F = F' + V_B \mu$ (kN)
$L_1 L_1$	750	25.8	29.07	+225.00	+0.625	+4088	+11.36	+67.5
$L_1 L_2$	750	25.8	29.07	+225.00	+0.625	+4088	+11.36	+67.5
$L_2 L_3$	750	25.8	29.07	+337.50	+0.625	+6132	+11.36	+180.0
$L_2 L_4$	750	25.8	29.07	+337.50	+0.625	+6132	+11.36	+180.0
$L_3 U_1$	960	25.8	37.21	-288.00	-0.800	+8573	+23.81	-86.4
$U_1 U_2$	750	25.8	29.07	-281.25	-1.250	+10 220	+45.42	+33.75
$U_2 U_3$	750	25.8	29.07	-281.25	-1.250	+10 220	+45.42	-33.75
$U_3 U_4$	960	25.8	37.21	-432.00	-0.800	+12 860	+23.81	-230.40
$U_3 L_1$	600	19.4	30.93	+135.00	0	0	0	+135.00
$U_3 L_2$	960	19.4	49.48	+72.00	+0.800	+2 850	+31.67	-129.60
$U_3 L_3$	600	19.4	30.93	0	0	0	0	0
$L_3 U_1$	960	19.4	49.48	-72.00	+0.800	-2 850	+31.67	-273.60
$U_3 L_3$	600	19.4	30.93	+135.00	0	0	0	+135.00
$\Sigma = 62.313$						$\Sigma = 247.24$		

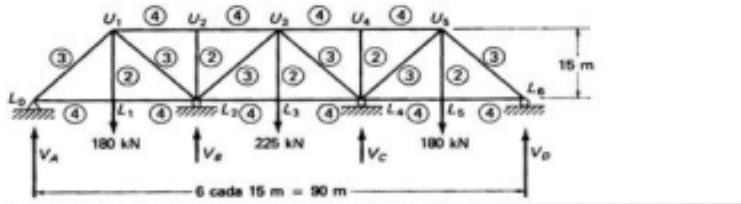


Figura 11.12

Debería quedar claro que el procedimiento anterior puede utilizarse para analizar armaduras con dos o más redundantes. La armadura de la fig. 11.12 es continua sobre tres claros y las reacciones  $V_B$  y  $V_C$  en los apoyos interiores se consideran como las redundantes. Las siguientes expresiones, escritas previamente para una viga continua de tres claros, son aplicables a la armadura:



Puente sobre el río Tennessee, Stevenson, Alabama.  
(Cortesía de USX Corporation.)

$$\delta_B + V_B \delta_{bb} + V_C \delta_{bc} = 0$$

$$\delta_C + V_B \delta_{cb} + V_C \delta_{cc} = 0$$

Las fuerzas producidas por una carga unitaria en  $B$  son las fuerzas  $\mu_b$ ; las producidas por una carga unitaria en  $C$  son las fuerzas  $\mu_C$ . Una carga unitaria en  $B$  produce una deflexión en  $C$  igual a  $\Sigma(\mu_B \mu_C \ell / AE)$ , y una carga unitaria en  $C$  produce la misma deflexión en  $B$ ,  $\Sigma(\mu_C \mu_B \ell / AE)$  lo que es una consecuencia del teorema de Maxwell. Las expresiones para las deflexiones son:

$$\sum \frac{F' \mu_B \ell}{AE} + V_B \sum \frac{\mu_B^2 \ell}{AE} + V_C \sum \frac{\mu_B \mu_C \ell}{AE} = 0$$

$$\sum \frac{F' \mu_C \ell}{AE} + V_B \sum \frac{\mu_C \mu_B \ell}{AE} + V_C \sum \frac{\mu_C^2 \ell}{AE} = 0$$

La solución de estas ecuaciones simultáneas dará los valores de las redundantes. Si los apoyos experimentan asentamientos, las deflexiones tendrán que calcularse numéricamente en las mismas unidades de los asentamientos.

## 11.6 ANALISIS DE ARMADURAS CON REDUNDANTES INTERNAS

La armadura de la fig. 11.13 tiene una barra más de las necesarias para garantizar la estabilidad y es por ello estáticamente indeterminada de primer grado, como puede verificarse al aplicar la ecuación

$$m = 2j - 3$$

Las armaduras con redundantes interiores pueden analizarse en forma semejante a la empleada en relación con las armaduras con redundantes externas. Se supone que una barra es la redundante y se elimina teóricamente de la estructura. Las barras restantes deben constituir una armadura estáticamente determinada y estable. Se supone que las fuerzas  $F'$  en esas barras son de tal naturaleza, que ocasionan que los nudos de los extremos de la barra eliminada tiendan a separarse y se produzca un desplazamiento  $\Sigma(F' \mu \ell / AE)$ .

A continuación, se reinstala la barra redundante en la armadura y se supone que en ella existe una fuerza de tensión unitaria. En seguida se calculan las fuerzas  $\mu$  en cada barra causadas por la fuerza redundante de  $+1$ , las cuales hacen que los nudos tiren hacia adentro y originen un desplazamiento igual a  $\Sigma(\mu^2 \ell / AE)$ . Si en la barra redundante hay una fuerza real  $X$ , los nudos se aproximarán en una cantidad igual a  $X \Sigma(\mu^2 \ell / AE)$ .

Si la barra en cuestión se considera cortada a la mitad, las fuerzas  $F'$  producirán una separación igual a  $\Sigma(F' \mu \ell / AE)$ ; por lo tanto,  $X$  debe tener una magnitud suficiente para cerrar ese espacio, y pueden entonces escribirse las siguientes expresiones:

$$X \sum \frac{\mu^2 \ell}{AE} + \sum \frac{F' \mu \ell}{AE} = 0$$

$$X = - \frac{\sum (F' \mu \ell / AE)}{\sum (\mu^2 \ell / AE)}$$

La aplicación de este método para analizar armaduras con redundantes internas se ilustra en el ejemplo 11.8. Una vez que se ha calculado la fuerza en la barra redundante, la fuerza en cualquier otra barra es igual a su fuerza  $F'$  más  $X$  veces su fuerza  $\mu$ . Las fuerzas finales pueden también calcularse por estática como una verificación de las operaciones matemáticas.

### EJEMPLO 11.8

Calcular las fuerzas en las barras de la armadura redundante internamente mostrada en la fig. 11.13. Las cifras encerradas en círculos son las áreas de las secciones transversales de las barras, como sigue: ① = 6.5 cm<sup>2</sup>, ② = 12.9 cm<sup>2</sup>

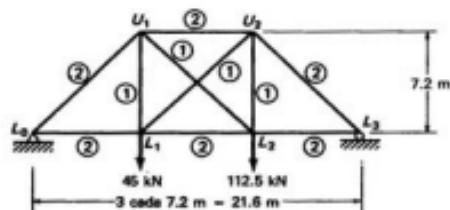
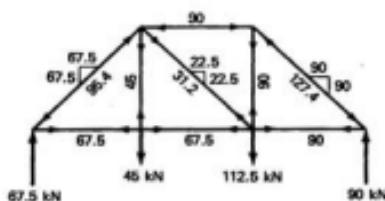


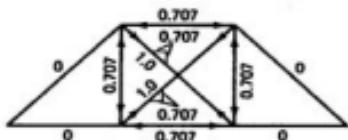
Figura 11.13

*Solución:*

Suponemos que la redundante es la barra  $L_1U_2$ , la eliminamos y calculamos las fuerzas  $F'$ .



Reemplazamos  $L_1 U_2$  con una fuerza de +1 y calculamos las fuerzas  $\mu$ .



Después de efectuar todos los cálculos en la tabla 11.2 y determinar el valor de  $X$ , podemos obtener las fuerzas finales siguientes:

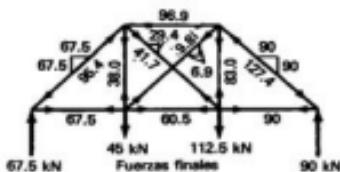


TABLA 11.2

Barra	$\ell$ (cm)	$A$ ( $\text{cm}^2$ )	$\ell/A$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$F'$ (kN)	$\mu$	$\frac{F' \mu \ell}{A}$	$\frac{\mu^2 \ell}{A}$	$F = F' + X\mu$ (kN)
$L_0 L_1$	720	12.9	55.8	+67.5	0	0	0	+67.5
$L_1 L_2$	720	12.9	55.8	+67.5	-0.707	-2663	+27.89	+60.5
$L_2 L_3$	720	12.9	55.8	+90.0	0	0	0	+90.0
$L_0 U_1$	1 018	12.9	78.9	-95.4	0	0	0	-95.4
$U_1 U_2$	720	12.9	55.8	-90.0	-0.707	+3551	+27.89	-96.9
$U_2 L_3$	1 018	12.9	78.9	-127.4	0	0	0	-127.4
$U_1 L_1$	720	6.5	110.8	+45.0	-0.707	-3551	+55.38	+38.0
$U_1 L_2$	1 018	6.5	156.6	+31.9	+1.000	+4996	+156.60	+41.7
$L_1 U_1$	1 018	6.5	156.6	0	+1.000	0	+156.60	+9.8
$U_2 L_2$	720	6.5	110.8	+90.0	-0.707	-7050	+55.38	+83.0
$\Sigma$						-4717	+479.74	

$$X = -\frac{\sum(F' \mu \ell / AE)}{\sum \mu^2 \ell / AE} = -\frac{47.7}{479.74} = +9.832 \text{ kN}$$

En armaduras con más de una redundante interna, es necesario plantear ecuaciones simultáneas para resolver el problema. Dos barras, con fuerzas  $X_A$  y  $X_B$ , son con-

sideradas como redundantes y se cortan. Las fuerzas  $F'$  en las barras restantes de la armadura separan las caras de las secciones cortadas, las distancias  $\Sigma(F'\mu_A\ell/AE)$  y  $\Sigma(F'\mu_B\ell/AE)$ , respectivamente. Aplicando una fuerza de +1 en la primera barra redundante se producen fuerzas  $\mu_A$  en las barras restantes y las caras cortadas se acercan las distancias  $\Sigma(\mu_A^2\ell/AE)$  y  $\Sigma\mu_A\mu_B\ell/AE$ . Repitiendo el proceso con la otra redundante se producen fuerzas  $\mu_B$  y distancias adicionales de acercamiento dadas por  $\Sigma(\mu_B\mu_A\ell/AE)$  y  $\Sigma(\mu_B^2\ell/AE)$ . Las fuerzas redundantes deben tener un tamaño suficiente para anular la separación entre las caras cortadas. Se pueden entonces escribir las siguientes ecuaciones:

$$\sum \frac{F'\mu_A\ell}{AE} + X_A \sum \frac{\mu_A^2\ell}{AE} + X_B \sum \frac{\mu_A\mu_B\ell}{AE} = 0$$

$$\sum \frac{F'\mu_B\ell}{AE} + X_A \sum \frac{\mu_B\mu_A\ell}{AE} + X_B \sum \frac{\mu_B^2\ell}{AE} = 0$$

### 11.7 ANALISIS DE ARMADURAS CON REDUNDANTES INTERNAS Y EXTERNAS

Las ecuaciones de deflexiones se han formulado con tanta frecuencia en las secciones anteriores, que probablemente el lector ya se encuentre en condiciones de escribir sin dificultad las ecuaciones correspondientes a otros tipos de vigas y armaduras. No obstante, se presentará ahora un grupo adicional de ecuaciones necesario para el análisis de armaduras hiperestáticas, tanto interior como exteriormente. En el análisis que sigue se considerará la armadura que se muestra en la fig. 11.14, la cual tiene como redundantes a dos barras y a una componente de reacción.

Se retiran de la armadura las diagonales designadas por  $D$  y  $E$ , y la reacción interior  $V_B$ , lo que hace isostática a la estructura. Las aberturas o separaciones de las barras cortadas y las deflexiones en el apoyo interior, se calculan a partir de las siguientes relaciones:

$$\delta_B = \sum \frac{F'\mu_B\ell}{AE} \quad \delta_D = \sum \frac{F'\mu_D\ell}{AE} \quad \delta_E = \sum \frac{F'\mu_E\ell}{AE}$$

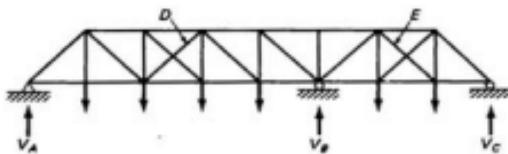


Figura 11.14



Puente de cables de la hidroeléctrica San Carlos, Colombia. (Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)

Aplicando una carga unitaria en el apoyo interior se producirán deformaciones en las aberturas de las barras cortadas, así como en los puntos de aplicación, dadas por

$$\delta_{bd} = \sum \frac{\mu_b^2 \ell}{AE} \quad \delta_{dd} = \sum \frac{\mu_d \mu_b \ell}{AE} \quad \delta_{rd} = \sum \frac{\mu_d \mu_r \ell}{AE}$$

Al sustituir la barra  $D$  y suponer que está sujeta a una fuerza unitaria de tensión se producirán las siguientes deflexiones:

$$\delta_{bd} = \sum \frac{\mu_b \mu_d \ell}{AE} \quad \delta_{dd} = \sum \frac{\mu_d^2 \ell}{AE} \quad \delta_{rd} = \sum \frac{\mu_d \mu_r \ell}{AE}$$

Análogamente, la sustitución de la barra  $E$ , con una fuerza de +1 kN, producirá las deflexiones:

$$\delta_{bc} = \sum \frac{\mu_b \mu_c \ell}{AE} \quad \delta_{dc} = \sum \frac{\mu_d \mu_c \ell}{AE} \quad \delta_{rc} = \sum \frac{\mu_d^2 \ell}{AE}$$

El cálculo de este conjunto de deflexiones permite determinar las redundantes, porque la deflexión total en cada una debe ser igual a cero.

$$\delta_B + V_B \delta_{bb} + X_D \delta_{bd} + X_E \delta_{be} = 0$$

$$\delta_D + V_B \delta_{db} + X_D \delta_{dd} + X_E \delta_{de} = 0$$

$$\delta_E + V_B \delta_{eb} + X_D \delta_{ed} + X_E \delta_{ee} = 0$$

La solución de este tipo de problemas no contiene nada nuevo, por lo que se omiten el espacio y los extensos cálculos necesarios de un ejemplo ilustrativo.

### 11.8 CAMBIOS DE TEMPERATURA, CONTRACCION, ERRORES DE FABRICACION, ETC.

Las estructuras están sujetas a deformaciones no sólo debido a las cargas externas sino también debido a los cambios de temperatura, asentamiento de los apoyos, errores en las dimensiones de fabricación, contracción en elementos de concreto reforzado causada por el secado, el flujo plástico, etc. Tales deformaciones en las estructuras estáticamente indeterminadas pueden producir grandes fuerzas adicionales en los elementos. Como ilustración se supone que las barras de la cuerda superior de la armadura mostrada en la fig. 11.15 están mucho más expuestas al sol que las otras barras. En consecuencia en un día muy caliente, pueden alcanzar temperaturas mucho más altas que las otras barras y sus fuerzas pueden sufrir cambios apreciables.

Los problemas de este tipo pueden tratarse exactamente de la misma manera que los problemas anteriores de este capítulo. Se calculan los cambios en la longitud de cada una de las barras. (Estos valores, que corresponden a los valores  $F'\ell/AE$ , es igual cada uno al cambio de temperatura multiplicado por el coeficiente de dilatación del material y por la longitud de la barra.) Se elimina la redundante de la estructura y se coloca una carga unitaria en la dirección de la redundante y se calculan las fuerzas  $\mu$ . Se determinan a continuación los valores  $\Sigma(F'\mu\ell/AE)$  y  $\Sigma(\mu^2\ell/AE)$  en las mismas unidades y finalmente se escribe la expresión usual para la deflexión. En el ejemplo 11.9 se ilustra un problema de este tipo.

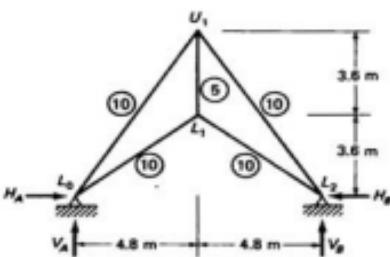


Figura 11.15

**EJEMPLO 11.9**

Las barras de la cuerda superior de la armadura estáticamente indeterminada de la fig. 11.15 experimentan un incremento de temperatura de  $33^\circ\text{C}$ . Si  $E = 200\text{ GPa}$  y el coeficiente de dilatación térmica lineal es  $0.0000117/\text{ }^\circ\text{C}$ , determinar las fuerzas inducidas en cada una de las barras de la estructura. Las cifras encerradas en círculos son las áreas de las secciones transversales en centímetros cuadrados, como sigue:  $\odot = 32.2\text{ cm}^2$ ,  $\textcircled{1} = 64.4\text{ cm}^2$ .

*Solución:*

Suponemos que  $H_B$  es la redundante y calculamos las fuerzas  $\mu$ .

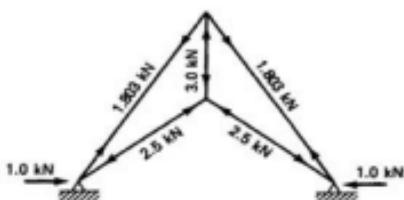


TABLA 11.3

Barra	$l$ (cm)	$A$ ( $\text{cm}^2$ )	$l/A$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\mu$	$\frac{\mu^2 l}{A}$	$\Delta t \cdot \text{coef. } l$ $= \Delta f$	$\frac{F' \mu l}{A} = \mu \Delta f$
$L_0 L_1$	600	64.4	9.32	-2.5	+ 58.25	-	-
$L_1 L_2$	600	64.4	9.32	-2.5	+ 58.25	-	-
$L_0 U_1$	865	64.4	13.43	+ 1.803	+ 43.66	0.3340	0.6022
$U_1 L_2$	865	64.4	13.43	+ 1.803	+ 43.66	0.3340	0.6022
$U_1 L_1$	360	32.2	11.18	-3.0	+ 100.62	-	-
$\Sigma = + 304.44$						$\Sigma = 1.2044$	

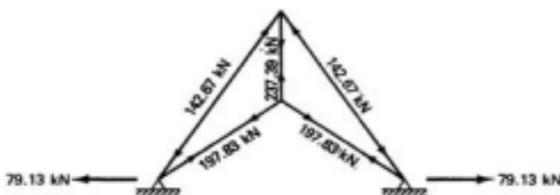
$$\delta_{bb} = + \frac{304.44}{200 \times 10^2} = + 0.01522$$

$$\delta_B = + 1.2044$$

$$\delta_B + H_B \delta_{bb} = 0 -$$

$$H_B = - \frac{1.2044}{0.01522} = - 79.13 \text{ kN} \rightarrow$$

En la figura siguiente se indican las fuerzas finales en las barras debidas al cambio de temperatura:



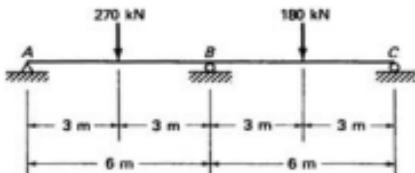
### 11.9 SOLUCIONES CON LA COMPUTADORA

El disco adjunto a este libro y descrito en el capítulo 20 le permitirá al lector analizar muy rápidamente la mayor parte de los problemas contenidos en este capítulo.

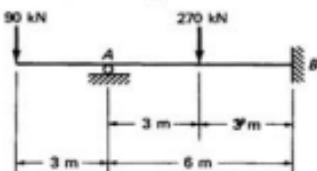
### PROBLEMAS

En los problemas 11.1 al 11.18, calcule las reacciones y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de las vigas continuas y marcos mostrados;  $E$  e  $I$  son constantes a menos que se especifique otra cosa. Utilice el método de las deformaciones compatibles.

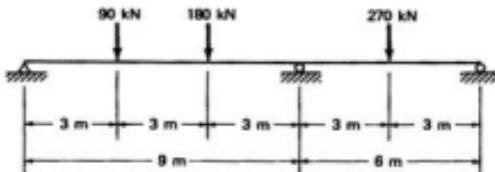
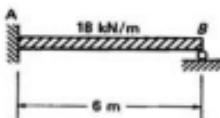
#### 11.1



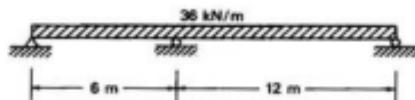
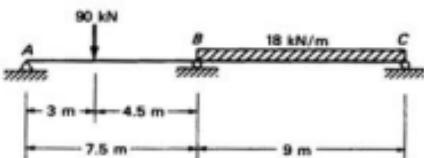
11.2 (Resp.:  $V_A = 241.875 \text{ kN} \uparrow$ ,  $V_B = 118.125 \text{ kN} \uparrow$ ,  $M_B = -168.75 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



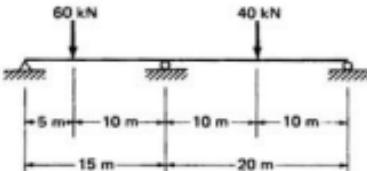
11.3

11.4 (Resp.:  $V_A = 67.5 \text{ kN} \uparrow$ ,  $M_A = -81 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $V_B = 40.5 \text{ kN} \uparrow$ )

11.5

11.6 (Resp.:  $V_A = 32.89 \text{ kN} \uparrow$ ,  $M_B = -158.32 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $V_C = 63.41 \text{ kN} \uparrow$ )

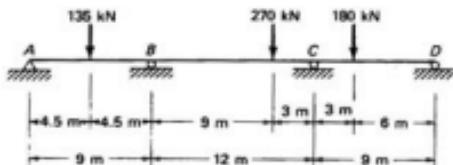
11.7



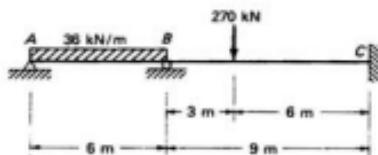
354

11/Método de las fuerzas para el análisis de estructuras

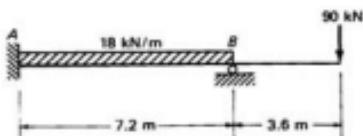
- 11.8 (Resp.:  $V_A = 44.38 \text{ kN} \uparrow$ ,  $M_A = -208.08 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $V_C = 377.66 \text{ kN} \uparrow$   
 $M_C = -372.87 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



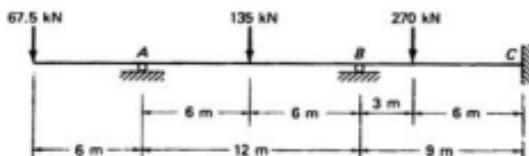
11.9



- 11.10 (Resp.:  $V_A = 13.5 \text{ kN} \uparrow$ ,  $M_A = +45.36 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $V_B = 206.1 \text{ kN} \uparrow$ ,  $M_B = -324 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



11.11

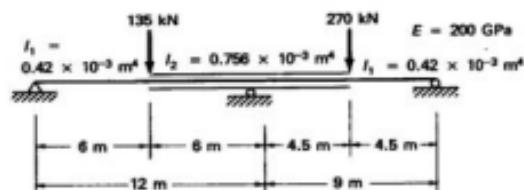


- 11.12** Resuelva el problema 11.1 suponiendo que el apoyo *B* sufre un asentamiento de 63.5 mm.  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ .  
*(Resp.:  $V_A = 181 \text{ kN} \uparrow$ ,  $V_B = 133 \text{ kN} \uparrow$ ,  $M_B = +276 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $V_C = 136 \text{ kN} \uparrow$ )*

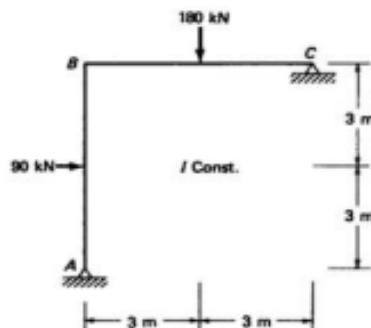
- 11.13** Resuelva el problema 11.1 suponiendo los siguientes asentamientos en los apoyos:  $A = 100 \text{ mm}$ ,  $B = 50 \text{ mm}$  y  $C = 90 \text{ mm}$ .  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ .

- 11.14** Resuelva el problema 11.8 suponiendo los siguientes asentamientos en los apoyos:  $A = 25 \text{ mm}$ ,  $B = 76 \text{ mm}$ ,  $C = 40 \text{ mm}$  y  $D = 50 \text{ mm}$ .  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 1.344 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ .  
*(Resp.:  $V_A = 90.1 \text{ kN} \uparrow$ ,  $V_C = 465.5 \text{ kN} \uparrow$ ,  $M_B = +203.43 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )*

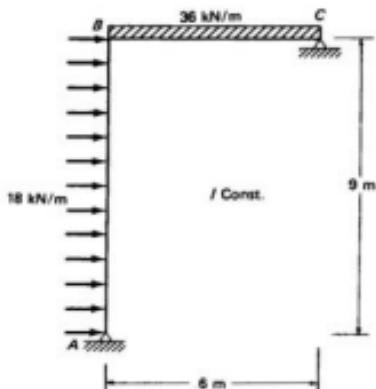
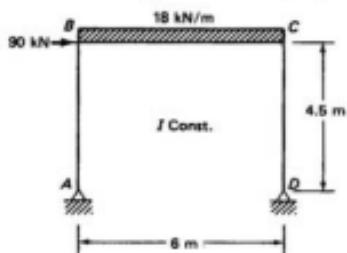
- 11.15**  $E = 200 \text{ GPa}$ .



- 11.16** *(Resp.:  $V_A = 115.31 \text{ kN} \uparrow$ ,  $M_B = -151.875 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $H_C = 70.29 \text{ kN} \leftarrow$ )*

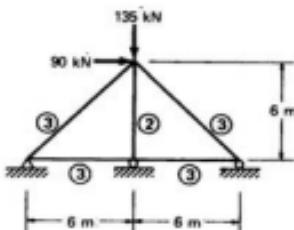


11.17

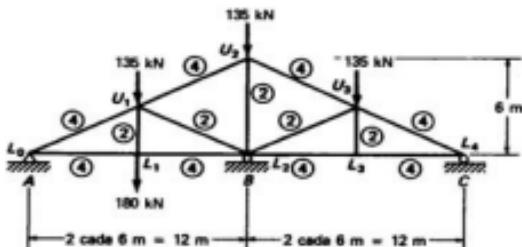
11.18 (Resp.:  $V_A = 13.5 \text{ kN} \downarrow$ ,  $M_B = +166.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C = -238.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

En los problemas 11.19 al 11.34, determinar las reacciones y las fuerzas en las barras de las armaduras. Las cifras encerradas en círculos indican áreas transversales en centímetros cuadrados a menos que se indique otra cosa.  $E$  es constante.

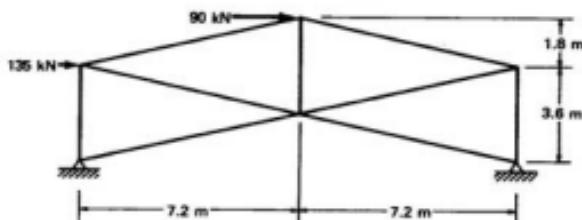
11.19



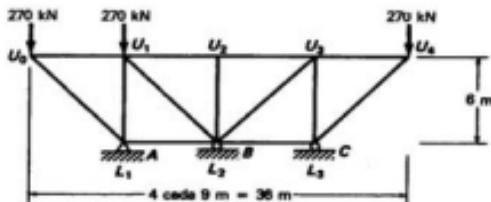
- 11.20** (Resp.:  $V_g = 468 \text{ kN} \uparrow$ ,  $U_1L_2 = -351.9 \text{ kN}$ ,  $U_2L_2 = -243.11 \text{ kN}$ ,  $L_2L_3 = +26.89 \text{ kN}$ )



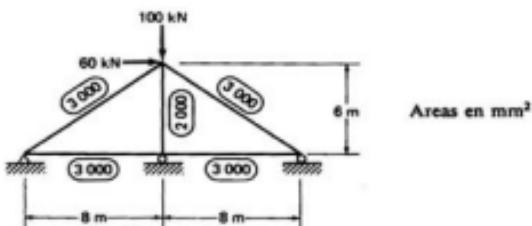
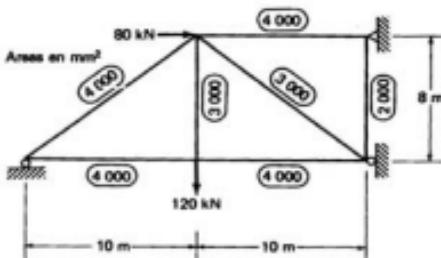
- 11.21** Todas las barras tienen igual sección transversal.



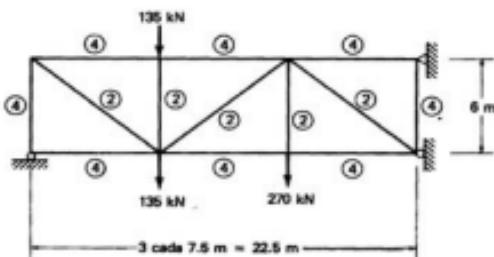
- 11.22** Todas las barras tienen igual sección transversal. (Resp.:  $V_C = 346.05 \text{ kN} \uparrow$ ,  $U_1U_2 = +291.15 \text{ kN}$ ,  $L_2U_3 = 136.80 \text{ kN}$ ,  $U_3L_3 = -76.05 \text{ kN}$ )



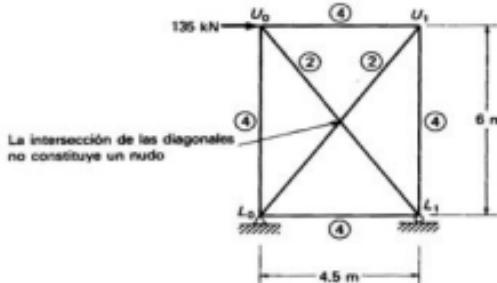
11.23

11.24 (Resp.:  $V_L = 47.88 \text{ kN}$  ↑,  $L_0L_1 = +59.8 \text{ kN}$ ,  $U_1U_2 = -49.7 \text{ kN}$ )

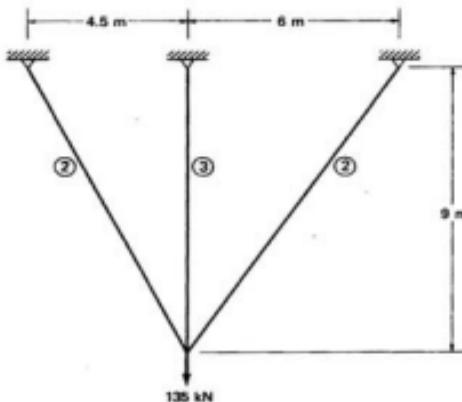
11.25



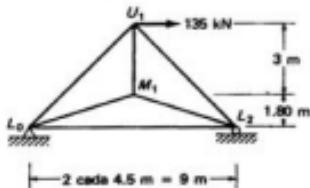
11.26 (Resp.:  $U_0U_1 = -67.50 \text{ kN}$ ,  $U_0L_0 = +90 \text{ kN}$ ,  $L_0U_1 = +112.50 \text{ kN}$ )



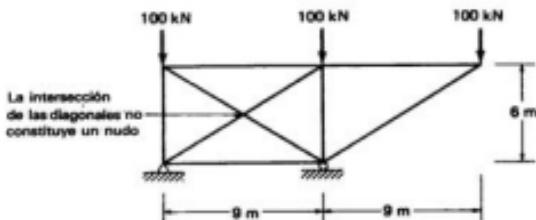
11.27



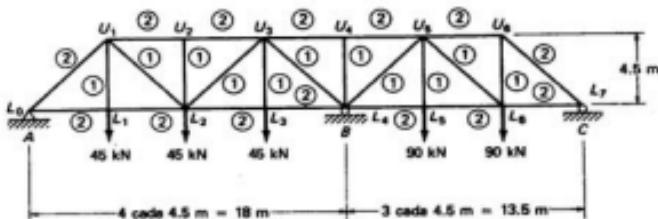
11.28 Todas las barras tienen igual sección transversal. (Resp.:  $L_0U_1 = +88.2 \text{ kN}$ ,  $U_1M_1 = +15.3 \text{ kN}$ ,  $M_1L_2 = +20.25 \text{ kN}$ )



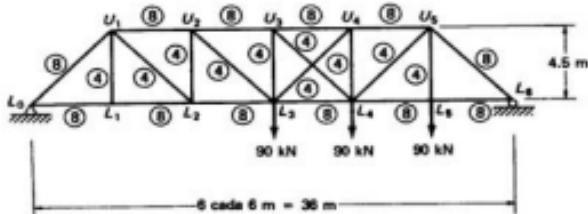
11.29 Todas las barras tienen igual sección transversal.



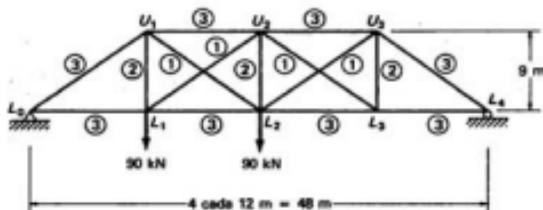
11.30 (Resp.:  $U_1L_2 = +16.65$  kN,  $U_3U_4 = +43.2$  kN,  $V_B = 182.25$  kN ↑,  
 $U_6L_6 = +76.05$  kN)



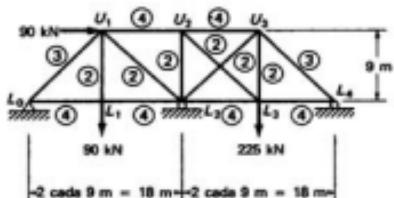
11.31



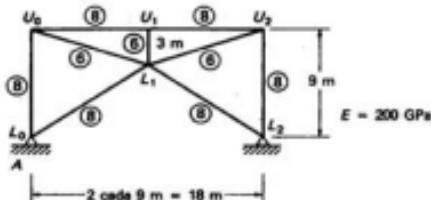
11.32 (Resp.:  $L_0L_1 = +149.85 \text{ kN}$ ,  $U_1U_2 = -172.8 \text{ kN}$ ,  $U_2L_3 = -51.3 \text{ kN}$ )



11.33.



11.34 Determinar las fuerzas en todas las barras de la armadura mostrada si las barras  $U_0U_1$  y  $U_1U_2$  de la cuerda superior experimentan un incremento de temperatura de  $42^\circ \text{C}$ . Las demás barras no experimentan ningún cambio. El coeficiente de dilatación lineal es  $\epsilon = 0.0000117/\text{C}^\circ$  (Resp.:  $H_A = 81.86 \text{ kN}$  ←,  $L_0L_1 = +98.24 \text{ kN}$ ,  $U_1U_2 = -163.71 \text{ kN}$ ; ① =  $51.6 \text{ cm}^2$  y ② =  $38.7 \text{ cm}^2$ )



## REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. J. I. Parcel y R. B. B. Moorman, *Analysis of Statically Indeterminate Structures* (Nueva York: Wiley, 1955), pág. 48.
2. J. S. Kinney, *Indeterminate Structural Analysis* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957), págs. 12-13.

# Líneas de influencia para estructuras estáticamente indeterminadas

### 12.1 LINEAS DE INFLUENCIA PARA VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

La utilización de las líneas de influencia en estructuras estáticamente indeterminadas, es igual a la que correspondió a las estructuras isostáticas o estáticamente determinadas. Permiten localizar los puntos críticos por carga viva y calcular las fuerzas para diversas posiciones de las cargas. Las líneas de influencia para estructuras estáticamente indeterminadas no son tan fáciles de trazar como para el caso de las estructuras isostáticas. En estas últimas se pueden calcular las ordenadas para algunos puntos importantes y unir estos valores por medio de líneas rectas. Desafortunadamente, las líneas de influencia en estructuras continuas exigen el cálculo de ordenadas en un gran número de puntos, porque los diagramas pueden ser curvos o constar de una serie de cuerdas. El diagrama de cuerdas se determina cuando las cargas se transmiten a intervalos a la estructura, como ocurre en los nudos de una armadura o en las uniones de viguetas a una trabe.

El problema del trazo de dichos diagramas no es tan difícil como el párrafo anterior parece indicar, pues un gran porcentaje del trabajo se elimina mediante la aplicación del principio de las deflexiones recíprocas de Maxwell. A continuación se describe el trazo de la línea de influencia para la reacción interior de la viga de dos claros mostrada en la fig. 12.1.

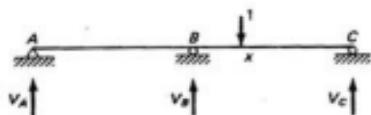


Figura 12.1

El procedimiento para el cálculo de  $V_B$  consiste en eliminarla de la viga, calcular  $\delta_B$  y  $\delta_{Bx}$  y luego sustituir estos valores en la fórmula usual. El mismo procedimiento puede usarse para trazar la línea de influencia de  $V_B$ . Se coloca una carga unitaria en un punto  $x$  haciendo que  $\delta_B$  sea igual a  $\delta_{Bx}$ , entonces puede escribirse la siguiente expresión:

$$V_B = - \frac{\delta_B}{\delta_{Bx}} = - \frac{\delta_{Bx}}{\delta_{Bx}}$$

Parecería que la carga unitaria debe colocarse en un gran número de puntos sobre la viga y calcular los valores correspondientes de  $\delta_{Bx}$ . Sin embargo, un estudio de las deflexiones producidas por dicha carga en el punto  $x$ , mostrará que tales cálculos son innecesarios. Por el principio de Maxwell, la deflexión en  $B$  debida a una carga unitaria en  $x(\delta_{Bx})$ , es idéntica a la deflexión en  $x$  debida a una carga unitaria en  $B(\delta_{Bx})$ . La expresión para  $V_B$  es entonces:

$$V_B = - \frac{\delta_{Bx}}{\delta_{Bx}}$$

Resulta evidente que la carga unitaria sólo necesita colocarse en  $B$  y calcularse luego las deflexiones en varios puntos a lo largo de la viga. Dividiendo cada uno de esos valores entre  $\delta_{Bx}$ , se determinan las ordenadas de la línea de influencia. Si se traza la curva de deflexiones de la viga para una carga unitaria en  $B$  (con el apoyo  $B$  previamente eliminado), se tendrá la línea de influencia para  $V_B$  dividiendo entre  $\delta_{Bx}$  cada una de las ordenadas de la curva de deflexión. Otra manera de expresar este método es como sigue: si se produce una deflexión unitaria en un apoyo para el cual se desea la línea de influencia la viga trazará su línea respectiva, debido a que la deflexión en cualquier punto de la viga es la ordenada de la línea de influencia en dicho punto para la reacción mencionada.

La presentación que hizo Maxwell de su teorema en 1864 fue tan breve, que su valor no fue plenamente apreciado sino hasta 1886 cuando Heinrich Müller-Breslau mostró claramente su valor, según se acaba de describir en el párrafo anterior [1]. El principio de Müller-Breslau puede enunciarse en detalle de la manera siguiente: **La configuración deformada de una estructura representa a cierta escala la línea de influencia para una función tal como esfuerzo, cortante, momento o reacción si se permite que la función actúe a lo largo de un desplazamiento unitario.** Este principio es aplicable a vigas, marcos y armaduras, estáticamente determinadas o indeterminadas.

En el ejemplo 12.1 se presenta la línea de influencia para la reacción en el apoyo interior de una viga de dos claros. Se muestran también las líneas de influencia para las reacciones en los extremos; los valores de las ordenadas se determinaron por estática, a partir de los valores especificados para la reacción interior. El procedimiento de la viga conjugada es un método excelente para determinar las deflexiones necesarias para la preparación de los diagramas.

**EJEMPLO 12.1**

Trazar las líneas de influencia para las reacciones en cada apoyo de la estructura mostrada en la fig. 12.2.

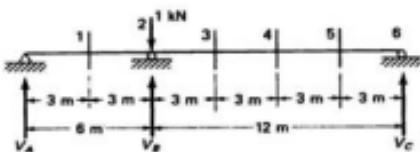
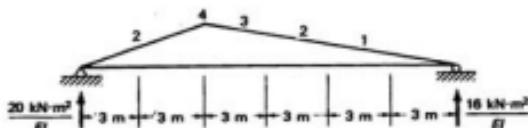


Figura 12.2

*Solución:*

Se elimina  $V_B$ , se aplica una carga unitaria en  $B$  y se calculan las deflexiones a intervalos de 3 m con el método de la viga conjugada.



$$\delta_1 = (20)(3) - \left(\frac{1}{3}\right)(3)(2)(1) = 57$$

$$\delta_2 = (20)(6) - \left(\frac{1}{3}\right)(6)(4)(2) = 96$$

$$\delta_3 = (16)(9) - \left(\frac{1}{3}\right)(9)(3)(3) = 103.5$$

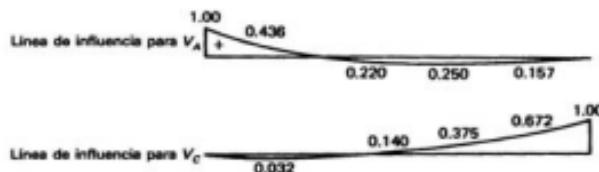
$$\delta_4 = (16)(6) - \left(\frac{1}{3}\right)(6)(2)(2) = 84$$

$$\delta_5 = (16)(3) - \left(\frac{1}{3}\right)(3)(1)(1) = 46.5$$

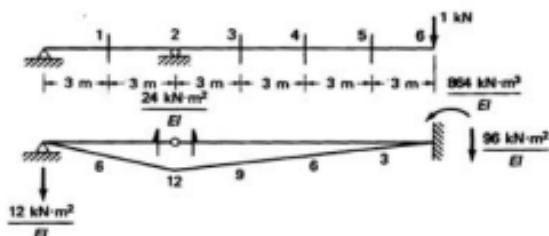
Observando que  $\delta_{bb} = \delta_2$ , los valores de las ordenadas de las líneas de influencia para  $V_B$  se determinan dividiendo las deflexiones entre  $\delta_2$ .



Habiendo determinado ya los valores de  $V_B$  para varias posiciones de la carga unitaria, pueden calcularse mediante estática los valores de  $V_A$  y  $V_C$  para cada posición de la carga; los resultados son los siguientes:



Para verificar los resultados, se elimina el apoyo  $C$ , se coloca ahí una carga unitaria y se calculan las deflexiones resultantes a intervalos de 3 metros.



$$\delta_1 = -(12)(3) + \left(\frac{1}{2}\right)(3)(6)(1) = -27$$

$$\delta_2 = -(12)(6) + \left(\frac{1}{2}\right)(6)(12)(2) = 0$$

$$\delta_3 = +864 - (96)(9) + \left(\frac{1}{2}\right)(9)(9)(3) = 121.5$$

$$\delta_4 = +864 - (96)(6) + \left(\frac{1}{2}\right)(6)(6)(2) = +324$$

$$\delta_5 = +864 - (96)(3) + \left(\frac{1}{2}\right)(3)(3)(1) = +580.5$$

$$\delta_6 = +864$$

Como  $\delta_{ce} = \delta_6$ , las ordenadas de la línea de influencia para  $V_C$  se determinan dividiendo cada deflexión entre  $\delta_6$ .



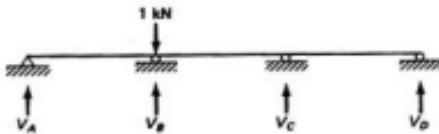


Figura 12.3

El siguiente problema será trazar las líneas de influencia para vigas continuas sobre tres claros que tengan dos redundantes. Para este análisis se considerará la viga de la fig. 12.3 con las redundantes \$V\_B\$ y \$V\_C\$.

Será necesario eliminar las redundantes y calcular las deflexiones en varias secciones de la viga para una carga unitaria en \$B\$ y también para una carga unitaria en \$C\$. Según el teorema de Maxwell, una carga unitaria en cualquier punto \$x\$ produce una deflexión en \$B(\delta\_{bx})\$ igual a la deflexión en \$x\$ debida a una carga unitaria en \$B(\delta\_{xb})\$. Similarmente, \$\delta\_{cx} = \delta\_{xc}\$. Después de calcular \$\delta\_{xb}\$ y \$\delta\_{xc}\$ en varias secciones, sus valores en cada sección pueden sustituirse en las siguientes ecuaciones simultáneas, que al resolverlas nos darán los valores de \$V\_B\$ y \$V\_C\$.

$$\delta_{xb} + V_B \delta_{bx} + V_C \delta_{bc} = 0$$

$$\delta_{xc} + V_B \delta_{cb} + V_C \delta_{cc} = 0$$

Las ecuaciones simultáneas se resuelven rápidamente, aun cuando se trate de calcular un gran número de ordenadas, pues las variables en las ecuaciones son únicamente \$\delta\_{xb}\$ y \$\delta\_{xc}\$. Una vez especificadas las líneas de influencia para las reacciones redundantes de una viga, las ordenadas correspondientes a cualquier otra función estructural (momento flexionante, fuerza cortante, etc.) pueden determinarse mediante estática. El ejemplo 12.2 ilustra los cálculos necesarios para el trazo de líneas de influencia de varias funciones estructurales en una viga continua de tres claros.

### EJEMPLO 12.2

Trazar las líneas de influencia para \$V\_B\$, \$V\_C\$, \$V\_D\$, \$M\_7\$ y \$V\_6\$ fuerza cortante en la sección 6 de la fig. 12.4.

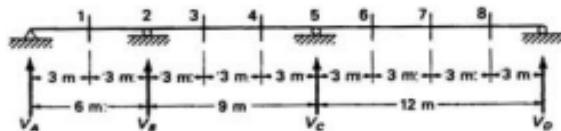
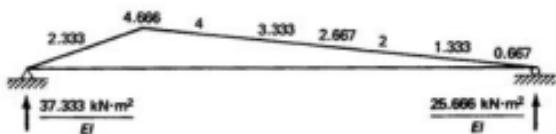


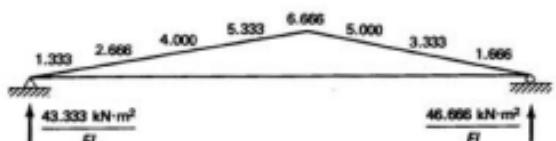
Figura 12.4

*Solución:*

Suprimimos  $V_B$  y  $V_C$ , colocamos una carga unitaria en  $B$  y cargamos la viga conjugada con el diagrama  $M/EI$ .



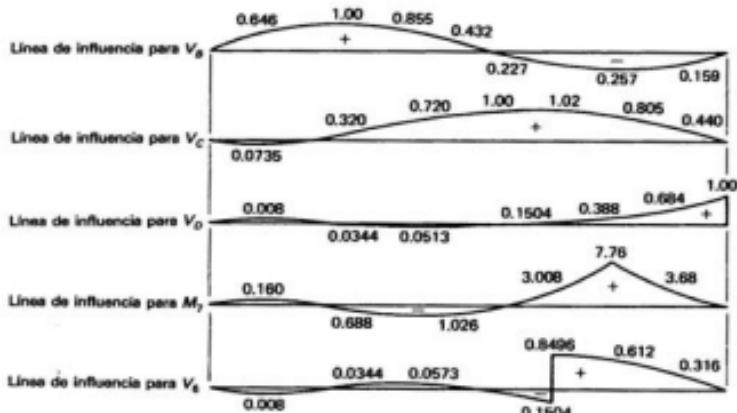
Colocamos una carga unitaria en  $C$  y cargamos la viga conjugada con el diagrama  $M/EI$ .



Calculamos los valores de  $\delta_{xb}$  y  $\delta_{xc}$ , a partir de los cuales se tendrán  $V_B$  y  $V_C$ , resolviendo las ecuaciones simultáneas. Las ordenadas para  $M_7$ ,  $V_D$  y  $V_E$  la cortante en la sección 6 se determinan por estática y se muestran en la tabla 12.1.

TABLA 12.1

Sección	$\delta_{xb}$	$\delta_{xc}$	$V_B$	$V_C$	$V_D$	$M_7$	$V_E$
1	108.5	128.0	+ 0.646	- 0.073	+ 0.008	+ 0.160	- 0.008
2	196.0	244.0	+ 1.000	0	0	0	0
3	246.0	336.0	+ 0.855	+ 0.320	- 0.034	- 0.688	+ 0.034
4	260.0	392.0	+ 0.432	+ 0.720	- 0.051	- 1.026	+ 0.051
5	244.0	400.0	0	+ 1.000	0	0	0
6	204.0	352.5	- 0.227	+ 1.020	+ 0.150	+ 3.001	- 0.150 + 0.849
7	146.0	260.0	- 0.257	+ 0.805	+ 0.388	+ 7.760	+ 0.612
8	76.0	137.5	- 0.159	+ 0.440	+ 0.688	+ 3.680	+ 0.316



## 12.2 LINEAS DE INFLUENCIA CUALITATIVAS

El principio de Müller-Breslau tiene una importancia tal, que es necesario dedicarle suficiente atención para destacar su gran valor. La configuración de la línea de influencia para estructuras continuas, es tan fácil de determinar a partir de este principio, que el cálculo real de los valores numéricos de las ordenadas no siempre es necesario. El diagrama correspondiente se puede trazar con la suficiente exactitud para localizar los puntos críticos de las cargas vivas para diversas funciones estructurales. Esta posibilidad es muy importante en el diseño de estructuras para edificios, según se ilustra en los párrafos siguientes.

Si se desea la línea de influencia para la reacción izquierda en la viga continua de la fig. 12.5(a), su configuración general puede determinarse haciendo que la reacción actúe hacia arriba una distancia unitaria, como se muestra en la parte (b) de la misma figura. Si el extremo izquierdo de la viga se empuja hacia arriba adoptará la forma mostrada. Puede hacerse fácilmente un esquema de esta configuración deformada recordando que en los otros apoyos no hay asentamientos. Las líneas de influencia determinadas mediante un esquema se llaman *líneas de influencia cualitativas*, en tanto que las especificadas mediante cálculos se denominan *líneas de influencia cuantitativas*. La línea de influencia para  $V_C$  en la fig. 12.5(c), constituye otro ejemplo de un esquema cualitativo para componentes de reacción.

La fig. 12.5(d) muestra la línea de influencia para el momento positivo en el punto  $x$ , cercano al centro del tramo izquierdo de la estructura. Se supone que la viga tiene una articulación en  $x$ , y que se le aplica un par a cada lado del pasador que causará compresión en las fibras superiores (momento positivo). El doblar la viga a cada lado de la articulación ocasiona que se deforme el tramo izquierdo, como

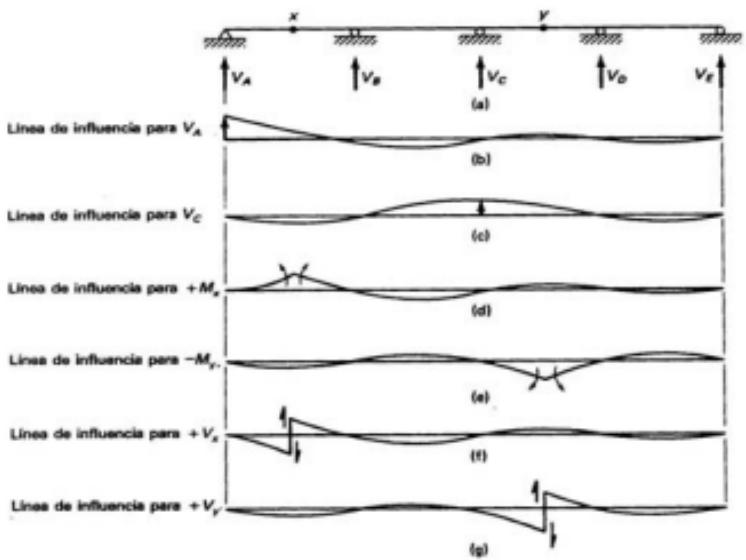


Figura 12.5

se indica en el esquema, y de la configuración deformada del resto de la viga podrá hacerse un esquema. Se utiliza un procedimiento similar para trazar la línea de influencia que corresponde al momento negativo en el punto y del tercer tramo, salvo que se aplica un par a la articulación supuesta que tenderá a producir compresión en las fibras inferiores de la viga, como corresponde a un momento negativo.

Por último, se trazan las líneas de influencia cualitativas para la fuerza cortante positiva en los puntos  $x$  y  $y$ . Se supone un corte en la viga en el punto  $x$ , junto con dos fuerzas verticales aplicadas en los lados de la sección cortada y que proporcionen la fuerza cortante positiva necesaria. La viga se deformará como se muestra en la fig. 12.5(f). Este mismo procedimiento se utiliza para trazar el diagrama de fuerza cortante positiva en el punto  $y$ .

Con estos diagramas se dispone de suficiente información respecto de las condiciones críticas por carga viva. Si se deseara un valor máximo positivo de  $V_A$  por carga viva uniforme, la carga debería colocarse en los tramos 1 y 3, donde los diagramas poseen ordenadas positivas; si se quisiera el máximo momento negativo en el punto  $x$ , se cargarían los tramos 2 y 4, etc.

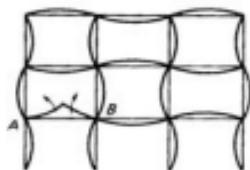


Figura 12.6

Las líneas de influencia cualitativas son muy valiosas en la determinación de los puntos con carga crítica en edificios, como lo muestra la línea de influencia de momento para el marco de la fig. 12.6. Si se trazan los diagramas para todo el marco, se supondrá que los nudos tienen libertad de girar, pero los elementos en cada junta se suponen unidos rigidamente entre sí, de manera que los ángulos entre ellos no cambian durante el giro. El diagrama en esta figura se ha trazado para momento positivo en el centro de la viga AB.

A partir del diagrama, resultan obvios los tramos que deben cargarse con el fin de producir el máximo momento flexionante positivo. Debe notarse que cargas sobre una viga a más de tres claros de distancia, aproximadamente, tienen poco efecto en la función estructural considerada. Esto puede verse en las líneas de influencia del ejemplo 12.2, donde las ordenadas, incluso a dos claros de distancia, son muy pequeñas.

Resulta pertinente la siguiente advertencia con respecto a las líneas de influencia cualitativas: éstas deben trazarse para funciones cerca del centro de los claros o en los apoyos, pero en el caso de secciones próximas a los cuartos de los claros, no deberán hacerse esquemas si no se analizan cuidadosamente. Cerca del cuarto del claro se encuentra el denominado *punto fijo* en el que la línea de influencia cambia de tipo. El tema de los puntos fijos se analiza con más detalle en el libro *Continuous Frames of Reinforced Concrete* de H. Cross y N. D. Morgan [2].

### 12.3 LINEAS DE INFLUENCIA PARA ARMADURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

Para el análisis de armaduras hiperestáticas, es necesario trazar líneas de influencia para determinar la posición crítica de la carga viva, tal como se hizo en las armaduras isostáticas.

El análisis de los detalles de trazo de estos diagramas para armaduras hiperestáticas es muy similar al que se presentó en el caso de las vigas isostáticas en las secciones 12.1 y 12.2. Para trazar la línea de influencia correspondiente a una reacción en una armadura continua, se quita el apoyo y se coloca una carga unitaria en el punto de apoyo. Para esta posición de la carga unitaria, se determina la de-

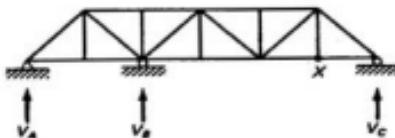


Figura 12.7

flexión en cada nudo de la armadura. Por ejemplo, considérese la elaboración de la línea de influencia para la reacción interna de la armadura de la fig. 12.7. El valor de la reacción cuando la carga unitaria está en el nudo  $x$ , puede expresarse como sigue:

$$V_B = - \frac{\delta_{ab}}{\delta_{bb}} = - \frac{\sum (\mu_a \mu_b \ell / AE)}{\sum (\mu_b^2 \ell / AE)}$$

Una vez trazada la línea de influencia para  $V_B$ , la línea de influencia para alguna otra reacción puede especificarse repitiendo el proceso de eliminarla como redundante, introducir en su lugar una carga unitaria y calcular las deflexiones necesarias. Un procedimiento más sencillo consiste en calcular las otras reacciones o cualesquiera otras funciones para las que se deseen líneas de influencia, mediante la estática, una vez que se tenga la línea para  $V_B$ . Este método se emplea en el ejemplo 12.3 en una armadura de dos claros, para la cual se desean las líneas de influencia de las reacciones y de varias fuerzas internas.

### EJEMPLO 12.3

Trazar las líneas de influencia para las tres reacciones verticales y para las fuerzas en las barras  $U_1U_2$ ,  $L_0U_1$  y  $U_1L_2$  (fig. 12.8). Los números encerrados en círculos son áreas de la sección transversal de las barras, como sigue:  $\textcircled{1} = 19.35 \text{ cm}^2$ ,  $\textcircled{2} = 25.80 \text{ cm}^2$ .

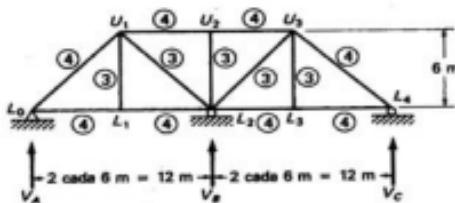


Figura 12.8

**Solución:**

Se suprime el apoyo interior y se calculan las fuerzas para una carga unitaria en  $L_1$  y  $L_2$ . (Obsérvese que la deflexión en  $L_1$  causada por una carga unitaria en  $L_2$  es la misma que la deflexión causada en  $L_3$ , debido a la simetría.)

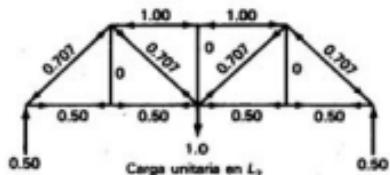
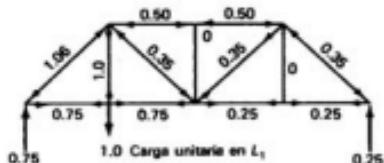
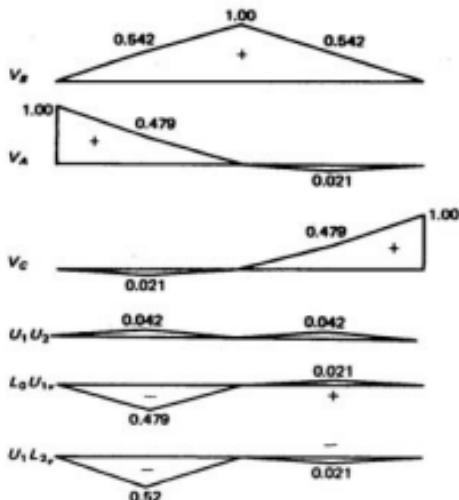


TABLA 12.2

Barra	$E$ (cm)	$A$ ( $\text{cm}^2$ )	$\frac{E}{A}$	$P_B$	$P_A$	$\frac{\mu_B^2 E}{A}$	$\frac{\mu_B \mu_A E}{A}$
$L_0L_1$	600	25.80	23.26	+ 0.50	+ 0.75	+ 5.815	+ 8.722
$L_0L_2$	600	25.80	23.26	+ 0.50	+ 0.75	+ 5.815	+ 8.722
$L_2L_3$	600	25.80	23.26	+ 0.50	+ 0.25	+ 5.815	+ 2.907
$L_2L_4$	600	25.80	23.26	+ 0.50	+ 0.25	+ 5.815	+ 2.907
$L_0U_1$	849	25.80	32.91	- 0.71	- 1.06	+ 16.43	+ 24.63
$U_1U_2$	600	25.80	23.26	- 1.00	- 0.50	+ 23.26	+ 11.63
$U_1U_3$	600	25.80	23.26	- 1.00	- 0.50	+ 23.26	+ 11.63
$U_3U_4$	848	25.80	32.87	- 0.71	- 0.35	+ 16.43	+ 8.13
$U_0L_1$	600	19.35	31.00	0	+ 1.00	0	0
$U_0L_2$	848	19.35	43.82	+ 0.71	- 0.35	+ 21.90	- 10.84
$U_2L_2$	600	19.35	31.00	0	0	0	0
$L_2U_1$	848	19.35	43.82	+ 0.71	+ 0.35	+ 21.90	+ 10.84
$U_3L_3$	600	19.35	31.00	0	0	0	0
						+ 146.44	+ 79.28
$\Sigma$						$E$	$E$

Divídase cada uno de los valores entre  $\delta_{bb}$  para determinar las ordenadas de las líneas de influencia para  $V_B$  y calcúlense mediante la estática las ordenadas para las demás líneas.



■ ■

El ejemplo 12.4 muestra que las líneas de influencia para barras en una armadura redundante, internamente pueden prepararse por medio de un procedimiento casi idéntico. A la barra considerada como redundante se le imparte una fuerza unitaria y se calculan las deflexiones causadas por ésta en cada nudo. Las ordenadas de la línea de influencia para la barra se determinan dividiendo cada deflexión por la deflexión en la barra. Todas las otras líneas de influencia se preparan mediante estática.

#### EJEMPLO 12.4

Trazar las líneas de influencia para las fuerzas en las barras  $L_1U_2$ ,  $U_1U_2$  y  $U_2L_2$  de la armadura de la fig. 11.13 que se reproduce en la fig. 12.9. Las cifras encerradas en círculos son áreas, según: ① =  $6.45 \text{ cm}^2$  ② =  $12.9 \text{ cm}^2$ .

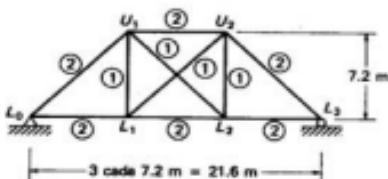


Figura 12.9

*Solución:*

Elimíñese la barra  $L_1U_2$  como redundante y calcúlense las fuerzas causadas por cargas unitarias en  $L_1$  y  $L_2$ ; reemplácese  $L_1$  y  $U_2$  con una fuerza de +1 y calcúlense las fuerzas en las barras restantes.

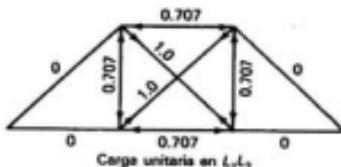
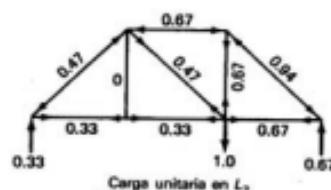
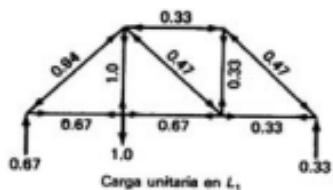
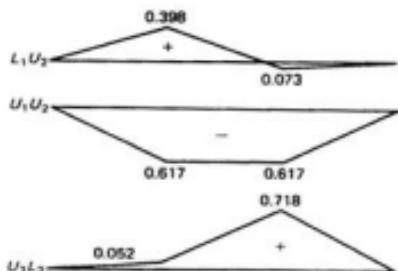


TABLA 12.3

Barra	$\ell$ (cm)	$A$ ( $\text{cm}^2$ )	$\frac{\ell}{A}$	$\mu_{L_1}$	$\mu_{L_2}$	$\mu_A$	$\frac{\delta_{AL_1}}{A} = \frac{\mu_{L_1}\mu_A\ell}{A}$	$\frac{\delta_{AL_2}}{A} = \frac{\mu_{L_2}\mu_A\ell}{A}$	$\frac{\delta_M}{A} = \frac{\mu_A^2\ell}{A}$
$L_0L_1$	720	12.90	55.81	+0.67	+0.33	0	0	0	0
$L_0L_2$	720	12.90	55.81	+0.67	+0.33	-0.71	-26.44	-13.02	+27.90
$L_2L_3$	720	12.90	55.81	+0.33	+0.67	0	0	0	0
$L_0U_1$	1 018	12.90	78.91	-0.94	-0.47	0	0	0	0
$U_1U_2$	720	12.90	55.81	-0.33	-0.67	-0.71	+13.02	+26.44	+27.90
$U_2L_3$	1 018	12.90	78.91	-0.47	-0.94	0	0	0	0
$U_1L_1$	720	6.45	111.63	+1.00	0	-0.71	-78.92	0	+55.80
$U_1L_2$	1 018	6.45	157.83	-0.47	+0.47	+1.00	-74.18	+74.18	+157.8
$L_1U_2$	1 018	6.45	157.83	0	0	+1.00	0	0	+157.8
$U_2L_2$	720	6.45	111.63	+0.33	+0.67	-0.71	-13.02	-52.87	+55.80
$E$							-179.54	+34.73	+483.1
$E$							$E$	$E$	$E$

Dibújuese la línea de influencia para la redundante  $L_1U_2$  y nótese que la fuerza en cualquier otra barra es igual a  $F' + X\mu$ .



■ ■

**PROBLEMAS**

En los problemas 12.1 al 12.4, trace las líneas de influencia cuantitativas para los elementos indicados.

- 12.1. Reacciones en todos los apoyos de la viga del problema 11.1.
- 12.2. Reacción vertical izquierda y momento de empotramiento en la viga del problema 11.4 (*Resp.*: Carga en el  $\underline{Q}_L$ ,  $V_A = 0.687 \uparrow$ ,  $M_A = -3.75$ ).
- 12.3. Fuerza cortante inmediatamente a la izquierda del apoyo  $B$  y momento en el apoyo  $B$  en la viga del problema 11.9.
- 12.4. Fuerza cortante y momento en un punto 6 m a la izquierda del empotramiento  $C$  en la viga del problema 11.11 (*Resp.*: Carga en el extremo izquierdo:  $V_6 = -0.32$ ,  $M_6 = +3.2$ ; carga a la mitad entre  $A$  y  $B$ :  $V_6 = +0.24$ ,  $M_6 = -2.4$ )

Empleando el principio de Müller-Breslau, trazar las líneas de influencia cualitativas para las funciones indicadas en las estructuras de los problemas 12.5 al 12.8.

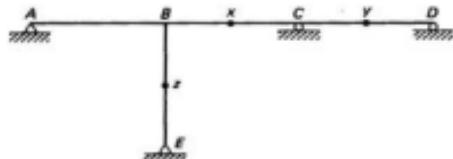
- 12.5. Con referencia a la figura adjunta: (a) reacciones en  $A$  y en  $C$ ; (b) momento positivo en  $x$  y en  $y$ , y (c) fuerza cortante positiva en  $x$ .



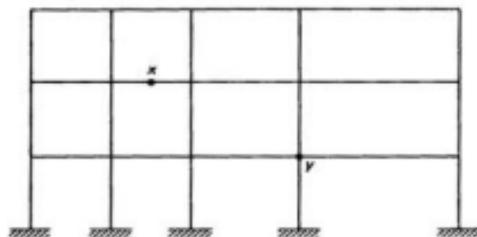
- 12.6. Con referencia a la figura adjunta: (a) reacción en  $a$ , (b) momentos positivos y negativos en  $x$ , y (c) momento negativo en  $B$ .



- 12.7. Con referencia a la figura adjunta: (a) reacción en  $A$ , (b) momento en  $x$ , (c) fuerza cortante positiva en  $y$ , y (d) momento positivo en  $z$ ; suponga que el lado derecho de la columna es el lado de "abajo".



- 12.8. Con referencia a la figura adjunta: (a) momento positivo en  $x$ , (b) fuerza cortante positiva en  $x$ , y (c) momento negativo justo a la derecha de  $y$ .



En los problemas 12.9 al 12.15, trace las líneas de influencia cuantitativas para los elementos indicados.

- 12.9. Reacciones en todos los apoyos de la armadura del problema 11.20.

- 12.10. Reacciones en todos los apoyos de la armadura del problema 11.30. (Resp.: Línea de influencia para  $V_B$ : Carga en  $L_1 = +0.303$ , en  $L_3 = +0.867$ , en  $L_5 = +0.738$ ; Línea de influencia para  $V_C$ : Carga en  $L_2 = -0.070$ , en  $L_3 = +0.293$ )

- 12.11. Fuerzas en las barras  $U_1L_2$ ,  $U_3U_4$  y  $L_4L_5$  de la armadura del problema 11.30.

- 12.12. Reacciones en todos los apoyos de la armadura del problema 11.25. Suponga que las cargas se mueven en la parte superior de la armadura. (Resp.: Línea de influencia para  $V_A$ : Carga en  $U_0 = +1.67$ , en  $U_1 = +0.951$ , en  $U_4 = -0.33$ ; Línea de influencia para  $V_C$ : Carga en  $U_0 = -0.33$ , en  $U_1 = -0.049$ , en  $U_3 = +0.951$ )

- 12.13. Fuerzas en las barras  $L_3L_4$ ,  $U_1U_2$ , y en  $U_2L_3$  de la armadura del problema 11.31.

- 12.14. Fuerzas en las barras  $L_1U_2$  y  $U_2L_3$  de la armadura del problema 11.32 (Resp.: Línea de influencia para  $L_1U_2$ : Carga en  $L_1 = +0.270$ , en  $L_2 = -0.366$ ; Línea de influencia para  $U_2L_3$ : Carga en  $L_1 = -0.202$ , en  $L_2 = -0.366$ , en  $L_3 = +0.270$ )
- 12.15. Fuerza en la barra  $L_2U_3$  y la reacción central en la armadura del problema 11.33.

#### REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. J. S. Kinney, *Indeterminate Structural Analysis* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957), págs. 14.
2. H. Cross y N. D. Morgan, *Continuous Frames of Reinforced Concrete* Nueva York: Wiley, 1932).

## Capítulo 13

# Métodos de análisis por desplazamientos, método pendiente-deflexión

### 13.1 INTRODUCCION

El profesor George A. Maney presentó en 1915 el método de análisis de pendiente-deflexión en una publicación sobre ingeniería estructural de la Universidad de Minnesota [1]. Su trabajo fue una extensión de estudios anteriores, acerca de esfuerzos secundarios realizados por Manderla [2] y Mohr [3]. Durante casi 15 años, hasta la aparición de la distribución de momentos, el método de pendiente-deflexión fue el procedimiento "exacto" usado para el análisis de vigas y marcos en Estados Unidos.

El método de pendiente-deflexión toma en cuenta las deformaciones por flexión de vigas y marcos (o sea, rotaciones, asentamientos, etc.), pero no las debidas a fuerza cortante y a fuerza normal. Aunque este método clásico se considera actualmente obsoleto, su estudio puede resultar útil por las siguientes razones:

1. El método de pendiente-deflexión es adecuado para el análisis manual de algunas estructuras pequeñas.
2. Su estudio sirve de base para entender el método de distribución de momentos que veremos en los dos próximos capítulos.
3. Es un caso especial del método de las rigideces, definido previamente en la sección 11.1 y proporciona una excelente introducción a la formulación matricial del análisis de estructuras que se verá en los capítulos 16 al 19.
4. Las pendientes y deflexiones determinadas mediante este método, permiten al proyectista esbozar con facilidad la forma deformada de una estructura particular.

### 13.2 DEDUCCION DE LAS ECUACIONES DE PENDIENTE-DEFLEXION

El nombre pendiente-deflexión proviene del hecho de que los momentos en los extremos de miembros de estructuras estáticamente indeterminadas, se expresan en



Hotel Loews (Dominican Concorde), Santo Domingo, República Dominicana.  
(Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)

términos de las rotaciones (o pendientes) y deflexiones de los nudos. Para deducir las ecuaciones, se supone que los miembros tienen sección transversal constante entre cada par de nudos o apoyos. Aunque es posible determinar mediante este método expresiones para elementos de sección variable, los resultados son tan complejos que se vuelven de poco valor práctico. Se supone, además, que los nudos de una estructura pueden girar o desplazarse, pero que los ángulos entre los elementos que convergen en un nudo permanecen constantes.

En el siguiente análisis tomaremos como referencia el tramo  $AB$  de la viga continua de la fig. 13.1(a). Si el tramo está empotrado en ambos extremos, la pendiente de la curva elástica de la viga en esos puntos es nula. Las cargas externas producen momentos de empotramiento que ocasionan que el tramo tome la forma mostrada en la fig. 13.1(b). Los nudos  $A$  y  $B$  en realidad no están empotrados y rotarán ligeramente bajo carga, quedando en la posición mostrada en la fig. 13.1(c). Además de la rotación en los nudos, puede existir asentamiento, en uno o ambos apoyos, lo cual originará una rotación de la cuerda del tramo, como se demuestra en la parte (d) de la figura, en la que se supone que el apoyo  $B$  ha experimentado un asentamiento  $\Delta$ .

Del estudio de la fig. 13.1 puede observarse que los valores de los momentos finales en los extremos  $A$  y  $B$  ( $M_{AB}$  y  $M_{BA}$ ) son iguales a la suma de los momentos originados por los siguientes conceptos:

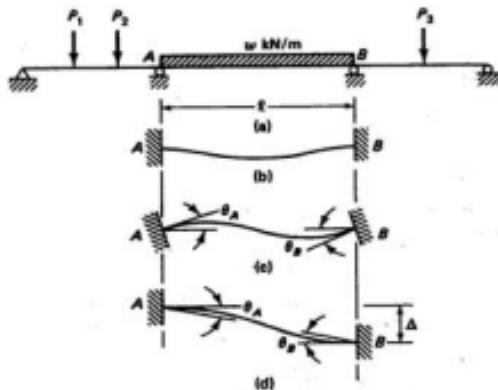


Figura 13.1

1. Los momentos de empotramiento perfecto ( $MEP_{AB}$  y  $MEP_{BA}$ ) que se pueden determinar con los teoremas de áreas de diagramas de momento, como se ilustró en el ejemplo 8.6. En la fig. 14.5 se presentan algunas expresiones para momentos de empotramiento perfecto.
2. Los momentos originados por las rotaciones de los nudos A y B ( $\theta_A$  y  $\theta_B$ ).
3. Los momentos causados por la rotación de la cuerda ( $\psi = \Delta/\ell$ ) si uno o ambos apoyos sufren asentamientos o deflexiones.

Las rotaciones de los nudos en una estructura originan cambios en las pendientes de las tangentes a las curvas elásticas en esos puntos. Para una viga en particular, el cambio de pendiente es igual a la fuerza cortante en el extremo de la viga cuando se carga a ésta con el diagrama de  $M/EI$ . Se supone que la viga tiene los momentos de empotramiento perfecto  $MEP_{AB}$  y  $MEP_{BA}$  que se muestran en la fig. 13.2.

Las reacciones o pendientes de extremo son las siguientes:

$$\theta_A = \frac{(\frac{1}{2})(M_{AB}/EI)(\ell)(\frac{2}{3}\ell) - (\frac{1}{2})(M_{BA}/EI)(\ell)(\frac{1}{3}\ell)}{\ell}$$

$$= \frac{\ell}{6EI} (2M_{AB} - M_{BA})$$

$$\theta_B = \frac{(\frac{1}{2})(M_{BA}/EI)(\ell)(\frac{2}{3}\ell) - (\frac{1}{2})(M_{AB}/EI)(\ell)(\frac{1}{3}\ell)}{\ell}$$

$$= \frac{\ell}{6EI} (2M_{BA} - M_{AB})$$



Figura 13.2

Si uno de los apoyos de la viga se asentara o desplazara una distancia  $\Delta$ , los ángulos  $\theta_A$  y  $\theta_B$  causados por la rotación en los nudos, cambiarían en una cantidad  $\Delta/l$  (o sea  $\psi$ ), como se muestra en la fig. 13.1(d). Al sumar la rotación de la cuerda a las expresiones correspondientes se tienen los siguientes valores totales de los giros en los extremos de las vigas:

$$\theta_A = \frac{\ell}{6EI} (2M_{AB} - M_{BA}) + \psi$$

$$\theta_B = \frac{\ell}{6EI} (2M_{BA} - M_{AB}) + \psi$$

Al despejar de las ecuaciones anteriores a  $M_{AB}$  y  $M_{BA}$  se tienen los momentos de extremo debido a los giros y a los desplazamientos. En estas expresiones  $I/\ell$  se ha reemplazado por  $K$ , el llamado *factor de rigidez* (véase el cap. 14).

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3\psi)$$

$$M_{BA} = 2EK(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi)$$

Los momentos finales de extremo son iguales a los momentos debidos a los giros y desplazamientos, más los momentos de empotramiento. Entonces, las ecuaciones del método de pendiente-deflexión son las siguientes:

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + MEP_{AB}$$

$$M_{BA} = 2EK(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi) + MEP_{BA}$$

Con estas ecuaciones es posible expresar los momentos de extremo en una estructura en términos de las rotaciones y asentamientos en sus nudos. En métodos anteriores, ha sido necesario escribir una ecuación por cada redundante de la estructura. El número de incógnitas en cada ecuación era igual al número de redundantes. El trabajo de resolver esas ecuaciones era considerable en el caso de estructuras suavemente hiperestáticas. El método de pendiente-deformación reduce bastante la cantidad de trabajo necesario para el análisis de las estructuras con gran número de redundantes, porque los momentos desconocidos se expresan en términos de sólo

unas cuantas rotaciones y desplazamientos de los nudos. Aun en el caso de estructuras de múltiples niveles, el número de incógnitas  $\theta$  y  $\psi$  que aparecen en cualquier ecuación, rara vez es mayor de cinco o seis, en tanto que el grado de indeterminación estática de la estructura es varias veces ese número.

### 13.3 APLICACION DE LAS ECUACIONES DE PENDIENTE-DEFLEXION A VIGAS CONTINUAS

Los ejemplos 13.1 al 13.4 ilustran el análisis de vigas estáticamente indeterminadas por medio de las ecuaciones de pendiente-deflexión. Cada tramo o elemento de viga se considera individualmente; se calculan sus momentos de empotramiento y se escribe una ecuación para el momento en cada extremo del elemento. Para el tramo  $AB$  del ejemplo 13.1 se escriben ecuaciones para  $M_{AB}$  y  $M_{BA}$ ; para el tramo  $BC$  se escriben ecuaciones para  $M_{BC}$  y  $M_{CB}$ , etc.

Las ecuaciones para los momentos se escriben en función de los valores desconocidos de  $\theta$  en los apoyos. Los dos momentos en un apoyo interior deben sumar cero como en el apoyo  $B$  del ejemplo 13.1, donde se cumple que  $M_{BA} + M_{BC} = 0$ . Entonces se escriben expresiones para el momento total en cada apoyo, lo que da un conjunto de ecuaciones simultáneas de donde pueden determinarse los valores desconocidos  $\theta$ . Pueden existir dos condiciones que simplifican la solución de las ecuaciones. Estas son, la condición de empotramiento en donde  $\theta$  es siempre nula y la condición de apoyo simple, donde el momento es siempre nulo. Al final del ejemplo 13.2 se deriva una expresión especial para los claros de los extremos simplemente apoyados.

Las vigas de los ejemplos 13.1 y 13.2 tienen apoyos en los que no se presenta ningún asentamiento y  $\psi$  es nula en todas las ecuaciones. En los apoyos de las vigas de los ejemplos 13.3 y 13.4 ocurren asentamientos, por lo que  $\psi$  aparece en las ecuaciones. La rotación de la cuerda se considera positiva, cuando tal rotación es en el sentido de las manecillas del reloj; el signo no depende de qué extremo se tome en consideración al evaluar el asentamiento, ya que la rotación en ambos casos tiene el mismo sentido.

Cuando la longitud de los claros, los módulos de elasticidad y los momentos de inercia son constantes en los claros de una viga continua, los valores  $2EK$  son constantes y pueden cancelarse en las ecuaciones. Si los valores de  $K$  varían de claro a claro, como ocurre a menudo, es conveniente expresar estos valores en términos de valores relativos, como se hace en el ejemplo 13.6.

La mayor dificultad experimentada al aplicar las ecuaciones de pendiente-deflexión, radica en la consideración de los signos correctos. Es fundamental entender la convención de signos empleada antes de intentar aplicar las ecuaciones.

Hasta ahora, en este texto, un signo positivo para el momento flexionante ha indicado la existencia de tensión en las fibras inferiores de un elemento, en tanto que uno negativo señala tensión en las fibras superiores. Esta convención de signos resultó necesaria para trazar los diagramas de momento flexionante.

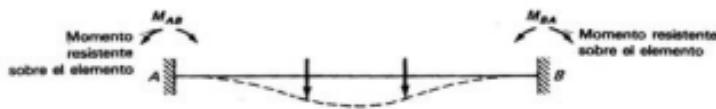


Figura 13.3

Al aplicar las ecuaciones de pendiente-deflexión resulta más sencillo emplear una convención de signos que asocie un signo al momento, en el extremo de un elemento, dependiendo de que la rotación de éste tenga el sentido de las manecillas del reloj o un sentido contrario. Una vez determinados dichos momentos, se pueden asignar fácilmente los signos, según la convención normalmente empleada en los diagramas de momento flexionante.

En este capítulo, así como en el 14 y 15, se trata el método de la distribución de momentos, se empleará la siguiente convención de signos: si un elemento produce un momento que tiende a rotar un nudo en sentido de las manecillas del reloj, el momento en el nudo se considera negativo; si tiende a rotar en sentido contrario será positivo. En otras palabras, un momento resistente en sentido de las manecillas del reloj sobre el elemento se considerará positivo y negativo, si es en sentido contrario.

La fig. 13.3 ilustra esta convención. El momento en el extremo izquierdo,  $M_{AB}$ , tiende a girar el nudo en sentido de las manecillas del reloj y se considera entonces negativo. Obsérvese que el momento resistente es contrario al movimiento de las manecillas del reloj. En el extremo derecho de la viga las cargas producen un momento que tiende a hacer que rote el nudo en sentido contrario y  $M_{BA}$  se considera entonces positivo.

### EJEMPLO 13.1

Determinar todos los momentos en los apoyos de la estructura mostrada en la fig. 13.4 con el método de pendiente-deflexión.

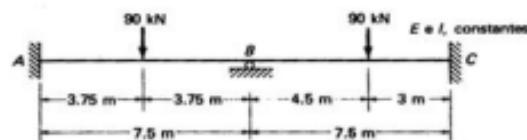


Figura 13.4

*Solución:*

Calculamos los momentos de empotramiento perfecto (con ayuda de la fig. 14.5):

$$MEP_{AB} = - \frac{(90)(3.75)(3.75)^2}{(7.5)^2} = -84.37 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$MEP_{BA} = + \frac{(90)(3.75)(3.75)^2}{(7.5)^2} = +84.37 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$MEP_{BC} = - \frac{(90)(4.5)(3)^2}{(7.5)^2} = -64.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$MEP_{CB} = + \frac{(90)(3)(4.5)^2}{(7.5)^2} = +97.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Escribimos las ecuaciones observando que  $\theta_A = \theta_C = \psi = 0$ :

$$M_{AB} = 2EK\theta_B - 84.37$$

$$M_{BA} = 4EK\theta_B + 84.37$$

$$M_{BC} = 4EK\theta_B - 64.8$$

$$M_{CB} = 2EK\theta_B + 97.2$$

$$\Sigma M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC}$$

$$4EK\theta_B + 84.37 + 4EK\theta_B - 64.8 = 0$$

$$EK\theta_B = -2.44625$$

Momentos finales:

$$M_{AB} = (2)(-2.44625) - 84.37 = -89.26 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = (4)(-2.44625) + 84.37 = +74.58 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = (4)(-2.44625) - 64.80 = -74.58 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB} = (2)(-2.44625) + 97.20 = +92.31 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

■ ■

### EJEMPLO 13.2

Encontrar todos los momentos en la estructura de la fig. 13.5 con el método de pendiente-deflexión. Utilice la ecuación modificada para los extremos simples que se presenta al final del ejemplo.

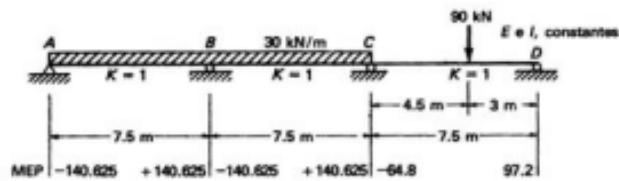


Figura 13.5

*Solución:*

$$M_{BA} = 3EK(\theta_B - \psi) + FEM_{BA} - \frac{1}{2}MEP_{AB}$$

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + FEM_{AB}$$

Escribimos las ecuaciones, eliminando  $EK$  por ser constante en todos los claros.

$$M_{AB} = M_{DC} = 0$$

$$M_{RA} = (3)(\theta_B) + 140.625 - (\frac{1}{2})(-140.625) = 3\theta_B + 210.94$$

$$M_{BC} = (2)(2\theta_B + \theta_C) - 140.625 = 4\theta_B + 2\theta_C - 140.625$$

$$M_{CB} = (2)(\theta_B + 2\theta_C) + 140.625 = 2\theta_B + 4\theta_C + 140.625$$

$$M_{CD} = (3)(\theta_C) - 64.8 - (\frac{1}{2})(+97.2) = 3\theta_C - 113.4$$

$$\Sigma M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC}$$

$$3\theta_B + 210.94 + 4\theta_B + 2\theta_C - 140.625 = 0$$

$$7\theta_B + 2\theta_C = -70.31 \quad (1)$$

$$\Sigma M_C = 0 = M_{CB} + M_{CD}$$

$$2\theta_B + 4\theta_C + 140.625 + 3\theta_C - 113.4 = 0$$

$$2\theta_B + 7\theta_C = -27.23 \quad (2)$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) simultáneamente, se determina:

$$\theta_B = -9.73$$

$$\text{y } \theta_C = -1.11$$

Momentos finales:

$$M_{BA} = (3)(-9.73) + 210.94 = +181.75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = (4)(-9.73) + (2)(-1.11) - 140.625 = -181.77 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB} = (2)(-9.73) + (4)(-1.11) + 140.625 = 116.73 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = (3)(-1.11) - 113.4 = -116.73 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

■ ■

*Analisis:*

En el caso de una viga con extremos simplemente apoyados, es obvio que los momentos en tales extremos deben anularse para que exista el equilibrio ( $M_{AB} = M_{DC} = 0$ , en la viga de la fig. 13.5). La aplicación de las ecuaciones del método de pendiente-deflexión causará momentos nulos, pero, si por simple inspección dos de ellos son evidentemente iguales a cero, no es necesario efectuar todo el proceso para determinar el valor de todos los momentos en la viga. Las ecuaciones usuales del método de pendiente-deflexión son como sigue:

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + MEP_{AB} \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2EK(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi) + MEP_{BA} \quad (2)$$

Suponiendo que el extremo *A* se encuentra simplemente apoyado, el valor de  $M_{AB}$  es cero. Al resolver simultáneamente ambas ecuaciones eliminando  $\theta_A$ , se tiene una expresión simplificada para  $M_{BA}$ , que contiene una sola incógnita,  $\theta_B$ . La ecuación resultante más sencilla, facilita bastante el análisis de vigas continuas con extremos simplemente apoyados.

Al multiplicar por 2 ambos miembros de la ecuación (2) se tiene

$$2M_{BA} = 2EK(2\theta_A + 4\theta_B - 6\psi) + 2MEP_{BA}$$

y restándole a esta última la ecuación (1) en la que  $M = 0$ , es decir,

$$0 = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + MEP_{AB}$$

se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} 2M_{BA} &= 2EK(3\theta_B - 3\psi) + 2MEP_{BA} - MEP_{AB} \\ M_{BA} &= 3EK(\theta_B - \psi) + MEP_{BA} - \frac{1}{2}MEP_{AB} \end{aligned}$$

### EJEMPLO 13.3

Encontrar el momento en el apoyo *B* de la viga de la fig. 13.6, si el apoyo *B* experimenta un asentamiento de 6 mm.

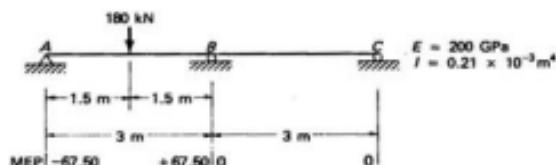


Figura 13.6

*Solución:*

Escribiendo las ecuaciones correspondientes y notando que  $M_{AB} = M_{CB} = 0$ , tenemos:

$$M_{BA} = 3EK \left( \theta_B - \frac{+0.006}{3} \right) + 67.5 - (\frac{1}{2})(-67.5)$$

$$M_{BA} = 3EK\theta_B - 0.006EK + 101.25$$

$$M_{BC} = 3EK \left( \theta_B - \frac{-0.006}{3} \right)$$

$$M_{BC} = 3EK\theta_B + 0.006EK$$

## 13.3 Aplicación de las ecuaciones de pendiente-deflexión a vigas continuas

387

$$\begin{aligned}\Sigma M_B = 0 &= M_{BA} + M_{BC} \\ 3EK\theta_B - 0.006EK + 101.25 + 3EK\theta_B + 0.006EK &= 0 \\ 6EK\theta_B + 101.25 &= 0 \\ EK\theta_B &= -16.875 \\ M_{BA} &= (3)(-16.875) - 0.006EK + 101.25 \\ EK &= \frac{(200 \times 10^6)(0.21 \times 10^{-3})}{3} = 14000 \\ M_{BA} &= -50.625 - 84 + 101.25 = -33.375 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{BC} &= (3)(-16.875) + 84 = +33.375 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \blacksquare \blacksquare\end{aligned}$$

## EJEMPLO 13.4

Determinar todos los momentos en la viga de la fig. 13.7; se supone que ocurren los siguientes asentamientos: en *A* de 30 mm, en *B* de 60 mm, en *C* de 70 mm y en *D* de 28 mm.

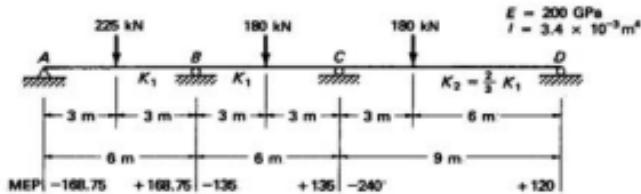


Figura 13.7

*Solución:*Para el apoyo *B*:

$$M_{BA} = 3EK_1 \left( \theta_B - \frac{0.030}{6} \right) + 168.75 - (\frac{1}{2})(-168.75)$$

$$M_{BA} = 3EK_1\theta_B - 0.015EK_1 + 253.125$$

$$M_{BC} = 2EK_1 \left[ 2\theta_B + \theta_C - 3 \frac{0.010}{6} \right] - 135$$

$$M_{BC} = 4EK_1\theta_B + 2EK_1\theta_C - 0.010EK_1 - 135$$

Para el apoyo *C*:

$$M_{CB} = 2EK_1 \left[ \theta_B + 2\theta_C - (3) \left( \frac{0.010}{6} \right) \right] + 135$$

$$M_{CB} = 2EK_1\theta_B + 4EK_1\theta_C - 0.010EK_1 + 135$$

$$M_{CD} = 3EK_2 \left( \theta_C - \frac{-0.042}{9} \right) - 240 - (\frac{1}{2})(+120)$$

$$M_{CD} = 3EK_2 + 0.014EK_2 - 300$$

$$M_{CD} = 2EK_1\theta_C + 0.00933EK_1 - 300$$

$$\Sigma M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC}$$

$$3EK_1\theta_B - 0.015EK_1 + 253.125 + 4EK_1\theta_B + 2EK_1\theta_C \\ - 0.010EK_1 - 135 = 0$$

$$7EK_1\theta_B + 2EK_1\theta_C - 0.025EK_1 + 118.125 = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma M_C = 0 = M_{CB} + M_{CD}$$

$$2EK_1\theta_B + 4EK_1\theta_C - 0.010EK_1 + 135 + 2EK_1\theta_C \\ + 0.00933EK_1 - 300 = 0$$

$$2EK_1\theta_B + 6EK_1\theta_C + 0.00067EK_1 - 165 = 0 \quad (2)$$

Resolviendo simultáneamente las ecs. (1) y (2) se tiene:

$$EK_1\theta_B = 416.03$$

$$EK_1\theta_C = -98.52$$

$$EK_1 = (\frac{1}{2})(200 \times 10^6 \times 3.4 \times 10^{-3}) = 113.333.33$$

$$EK_1\theta_B = +416.03$$

$$EK_1\theta_C = -98.52$$

Momentos finales:

$$M_{BA} = (3)(416.03) - (0.015)(113.333.33) + 253.125 = -198.78 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = (4)(416.03) + (2)(-98.52) - (0.010)(113.333.33) - 135 = 198.75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB} = (2)(416.03) - (4)(-98.52) - (0.010)(113.333.33) + 135 = -560.35 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = (2)(-98.52) + (0.00933)(113.333.33) - 300 = +560.36 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \blacksquare \blacksquare$$

### 13.4 ANALISIS DE MARCOS SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL

Las ecuaciones del método de pendiente-deflexión pueden aplicarse a los marcos estáticamente indeterminados de la misma manera que a las vigas continuas, si no existe posibilidad alguna de que se ladeen o desplacen lateralmente, o bien, se de-



Planta generadora de Servicios Públicos de Carolina del Sur, Cross, Carolina del Sur. (Cortesía de Owen Steel Company.)

formen de modo asimétrico. Un marco, teóricamente, no se ladeará ni se inclinará, si es perfectamente simétrico respecto de su eje central en lo referente a dimensiones, cargas y momentos de inercia o si está restringido contra los desplazamientos por otras partes de la estructura. El marco de la fig. 13.8 no puede ladearse porque el elemento  $A-B$  está restringido contra movimiento horizontal. El ejemplo 13.5 ilustra el análisis de un marco simple sin desplazamiento lateral. Si ocurriera algún desplazamiento, los nudos de la estructura se trasladarían, lo cual afectaría los valores de  $\theta$  y de los momentos, como se verá en la sección 13.5.

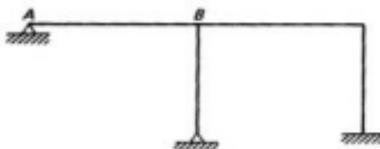


Figura 13.8

**EJEMPLO 13.5**

Encontrar todos los momentos en el marco de la fig. 13.9; debido a la simetría no se presentará el lado opuesto.

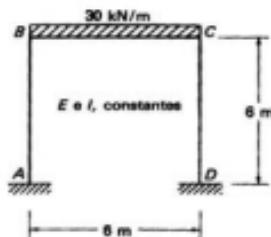


Figura 13.9

*Solución:*

Calculamos primero los momentos de empotramiento perfecto:

$$MEP_{BC} = - \frac{(30)(6)^2}{12} = - 90 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$MEP_{CB} = + \frac{(30)(6)^2}{12} = + 90 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Escribimos las ecuaciones observando que  $\theta_A = \theta_D = \psi = 0$ ;  $2EK$  es constante en todos los elementos, por lo que puede ignorarse al escribir las ecuaciones.

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \theta_B \\ M_{BA} &= 2\theta_B \\ M_{BC} &= 2\theta_B + \theta_C - 90 \\ M_{CB} &= \theta_B + 2\theta_C + 90 \\ M_{CD} &= 2\theta_C \\ M_{DC} &= \theta_C \\ \Sigma M_B = 0 &= M_{BA} + M_{BC} \\ 2\theta_B + 2\theta_B + \theta_C - 90 &= 0 \\ 4\theta_B + \theta_C &= 90 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_C = 0 &= M_{CB} + M_{CD} \\ \theta_B + 2\theta_C + 90 + 2\theta_C &= 0 \\ \theta_B + 4\theta_C &= -90 \end{aligned} \tag{2}$$

Resolviendo simultáneamente las ecs. (1) y (2) se tiene:

$$\theta_B = +30$$

$$\theta_C = -30$$

Momentos finales de extremo:

$$M_{AB} = +30 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB} = +60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = +60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = -60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = -60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DC} = -30 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

■ ■

### 13.5 ANALISIS DE MARCOS CON DESPLAZAMIENTO LATERAL

Las cargas, los momentos de inercia y las dimensiones del marco de la fig. 13.10 no son simétricos con respecto a su eje vertical, por lo que el marco obviamente se desplazará lateralmente. Los nudos *B* y *C* se desplazan hacia la derecha, lo cual causa rotaciones en las cuerdas de los elementos *AB* y *CD*, no existiendo teóricamente rotación en *BC*, en tanto se ignore el acortamiento (o alargamiento) axial de *AB* y *CD*. Si se ignora la deformación axial de *BC*, cada uno de los nudos se desplaza la misma distancia horizontal  $\Delta$ .

Las rotaciones de las cuerdas de los elementos *AB* y *CD*, debidas al ladeo, son iguales a  $\Delta/\ell_{AB}$  y  $\Delta/\ell_{CD}$ , respectivamente. ( Nótese que cuanto más corto sea un elemento para la misma  $\Delta$ , tanto mayor será la rotación de la cuerda y, por consiguiente, también será mayor el efecto sobre su momento.) Para este marco  $\psi_{AB}$  es tres medios el valor de  $\psi_{CD}$  porque  $\ell_{AB}$  es sólo dos tercios de  $\ell_{CD}$ . Es conveniente trabajar sólo con una rotación de cuerda desconocida, y al establecer las ecuaciones del método de pendiente-deflexión, se emplean valores relativos. Se emplea el valor  $\psi$  en las dos ecuaciones para el elemento *AB*, en tanto que se emplea  $\frac{1}{2}\psi$  en la ecuación del elemento *CD*.

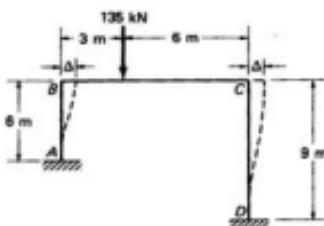


Figura 13.10

El ejemplo 13.6 presenta el análisis del marco de la fig. 13.10. Notando que  $\theta_A = \theta_D = 0$ , se verá que las seis ecuaciones, para los momentos de extremo, contienen un total de tres incógnitas:  $\theta_B$ ,  $\theta_C$  y  $\psi$ . Se dispone de tres condiciones que permiten determinarlas. Estas son:

1. La suma de los momentos en *B* es cero ( $\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC}$ ).
2. La suma de los momentos en *C* es cero ( $\sum M_C = 0 = M_{CB} + M_{CD}$ ).
3. La suma de las fuerzas horizontales que actúan sobre toda la estructura debe ser igual a cero.

Las únicas fuerzas horizontales son las reacciones en *A* y en *D*, que son iguales en magnitud y de sentido opuesto. Las reacciones horizontales pueden calcularse para cada columna dividiendo los momentos en las columnas entre las alturas de éstas o lo que es lo mismo, tomando momentos respecto a la parte superior de cada columna. La suma de las dos reacciones debe ser cero.

$$H_A = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell_{AB}} \quad H_D = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{\ell_{DC}}$$

$$\sum H = 0 = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell_{AB}} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{\ell_{CD}}$$

### EJEMPLO 13.6

Determinar todos los momentos del marco mostrado en la fig. 13.11 en el que *E* e *I* son constantes.\*

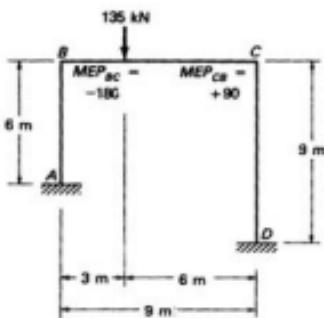


Figura 13.11

\* En los métodos de análisis estructural como Cross y Kami pendiente-deformación, se considera que no existe deformación axial en los elementos, la rigidez es infinita. Para resolver este problema se empleó  $A = 1000 \text{ m}^2$  y  $E = I = 1$ .

*Solución:*

Usamos valores relativos de  $\psi$ .

$$\psi_{AB} = \frac{\Delta}{20} \quad \psi_{CD} = \frac{\Delta}{30} \quad \frac{\psi_{AB}}{\psi_{CD}} = \frac{3}{2}$$

También se utilizan valores relativos de  $2EK$ ,

para  $AB$   $2EK = \frac{2E}{6}$  que tomamos como un valor relativo de 3 con respecto a los valores  $2EK$  de  $BC$  y  $CD$

para  $BC$   $2EK = \frac{2E}{9}$  que le corresponde el valor relativo de 2

para  $CD$   $2EK = \frac{2E}{9}$  que le corresponde el valor relativo de 2

Escribimos las ecuaciones observando que  $\theta_A = \theta_D = \psi_{BC} = 0$ .

$$M_{AB} = 3(\theta_B - 3\psi) = 3\theta_B - 9\psi$$

$$M_{BA} = 3(2\theta_B - 3\psi) = 6\theta_B - 9\psi$$

$$M_{BC} = 2(2\theta_B + \theta_C) - 180 = 4\theta_B + 2\theta_C - 180$$

$$M_{CB} = 2(\theta_B + 2\theta_C) + 90 = 2\theta_B + 4\theta_C + 90$$

$$M_{CD} = 2[2\theta_C - (3)(\frac{2}{3}\psi)] = 4\theta_C - 4\psi$$

$$M_{DC} = 2[\theta_C - (3)(\frac{2}{3}\psi)] = 2\theta_C - 4\psi$$

$$\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC}$$

$$6\theta_B - 9\psi + 4\theta_B + 2\theta_C - 180 = 0$$

$$10\theta_B + 2\theta_C - 9\psi = 180$$

(1)

$$\sum M_C = 0 = M_{CB} + M_{CD}$$

$$2\theta_B + 4\theta_C + 90 + 4\theta_C - 4\psi = 0$$

$$2\theta_B + 8\theta_C - 4\psi = -90$$

(2)

$$\sum H = 0 = H_A + H_D$$

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell_{AB}} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{\ell_{CD}} = 0$$

$$\frac{3\theta_B - 9\psi + 6\theta_B - 9\psi}{6} + \frac{4\theta_C - 4\psi + 2\theta_C - 4\psi}{9} = 0$$

$$27\theta_B + 128\theta_C - 70\psi = 0$$

(3)

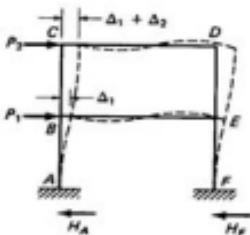


Figura 13.12

Resolviendo simultáneamente las ecs. (1) y (2) se tiene:

$$\theta_B = +28.56$$

$$\theta_C = -14.09$$

$$\psi = +8.60$$

Momentos finales:

$$M_{AB} = +8.28 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = +93.96 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = -93.94 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB} = +90.76 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = -90.76 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DC} = -62.58 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

■ ■

El método de pendiente-deflexión puede aplicarse a marcos con más de una condición de desplazamiento lateral, como la estructura de dos niveles de la fig. 13.12. El análisis de este tipo de marcos, generalmente se realiza mediante el método de distribución de momentos, pero el conocimiento de la solución mediante el método de pendiente-deflexión es valioso para comprender la resolución por medio del citado método de distribución de momentos.

Las cargas horizontales hacen que la estructura se ladee hacia la derecha; los nudos *B* y *E* se mueven hacia la derecha una distancia  $\Delta_1$  y los nudos *C* y *D* una distancia  $\Delta_1 + \Delta_2$ , como se muestra en la fig. 13.12. Las rotaciones de las cuerdas de las columnas  $\psi_1$  y  $\psi_2$  resultan entonces iguales a  $\Delta_1/l_{AB}$  para el primer nivel y  $\Delta_2/l_{BC}$  para el nivel superior.

Se pueden escribir las ecuaciones del método de pendiente-deflexión para el momento en los extremos de cada una de las seis barras; las ecuaciones de equilibrio en los nudos son:

$$\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC} + M_{BE} \quad (13.1)$$

$$\sum M_C = 0 = M_{CB} + M_{CD} \quad (13.2)$$

$$\sum M_D = 0 = M_{DC} + M_{DE} \quad (13.3)$$

$$\sum M_E = 0 = M_{ED} + M_{EB} + M_{EF} \quad (13.4)$$

Estas ecuaciones tienen seis incógnitas ( $\theta_B$ ,  $\theta_C$ ,  $\theta_D$ ,  $\theta_E$ ,  $\psi_1$  y  $\psi_2$ ) pero  $\theta_A$  y  $\theta_F$  son nulas. Se necesitan dos ecuaciones adicionales para determinar las incógnitas y éstas se establecen considerando las fuerzas horizontales o cortantes sobre la estructura. Es claro que la suma de las fuerzas horizontales, resistentes en cualquier nivel, debe ser igual a la fuerza cortante horizontal externa en dicho nivel, pero en sentido opuesto. En el nivel inferior la fuerza cortante horizontal es igual a  $P_1 + P_2$ , y las reacciones en la base de cada columna son iguales al momento de extremo entre la altura de la columna. Por tanto,

$$P_1 + P_2 - H_A - H_F = 0$$

$$H_A = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell_{AB}}$$

$$H_F = \frac{M_{EF} + M_{FE}}{\ell_{EF}}$$

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell_{AB}} + \frac{M_{EF} + M_{FE}}{\ell_{EF}} + P_1 + P_2 = 0 \quad (13.5)$$

Se puede formular una ecuación análoga para el nivel superior que tiene una fuerza cortante externa igual a  $P_2$ . Los momentos en las columnas originan fuerzas cortantes iguales y opuestas a  $P_2$ , lo cual permite escribir la siguiente ecuación para ese nivel:

$$\frac{M_{BC} + M_{CB}}{\ell_{BC}} + \frac{M_{DE} + M_{ED}}{\ell_{DE}} + P_2 = 0 \quad (13.6)$$

Se dispone ahora de seis ecuaciones de condición para determinar las seis incógnitas en las ecuaciones para los momentos de extremo y el problema puede resolverse como se ilustró en el ejemplo 13.7. Es conveniente suponer que todos los valores de  $\theta$  y  $\psi$  son positivos al establecer las ecuaciones, pues los signos correctos aparecerán de manera natural en los resultados.

Independientemente del número de pisos de un edificio, se dispondrá de una ecuación de fuerza cortante para cada uno. El método de pendiente-deflexión no es muy práctico en el caso de edificios con muchos niveles. Por ejemplo, en un edificio de seis niveles y cuatro claros (divisiones principales) por nivel, habrá seis valores de  $\psi$  desconocidos y 30 valores más de  $\theta$  valores también desconocidos, o sea, un total de 36 ecuaciones simultáneas por resolver. (El problema no es tan serio como pudiera parecer en principio, ya que cada ecuación contendrá sólo algunas de las incógnitas y no las 36.)

**EJEMPLO 13.7**

Encontrar los momentos del marco mostrado en la fig. 13.13, empleando el método de pendiente-deflexión.



Figura 13.13

*Solución:*

Como las cuerdas  $BE$  y  $CD$  no giran,

$$\psi_{AB} = \psi_{EF} = \psi_1$$

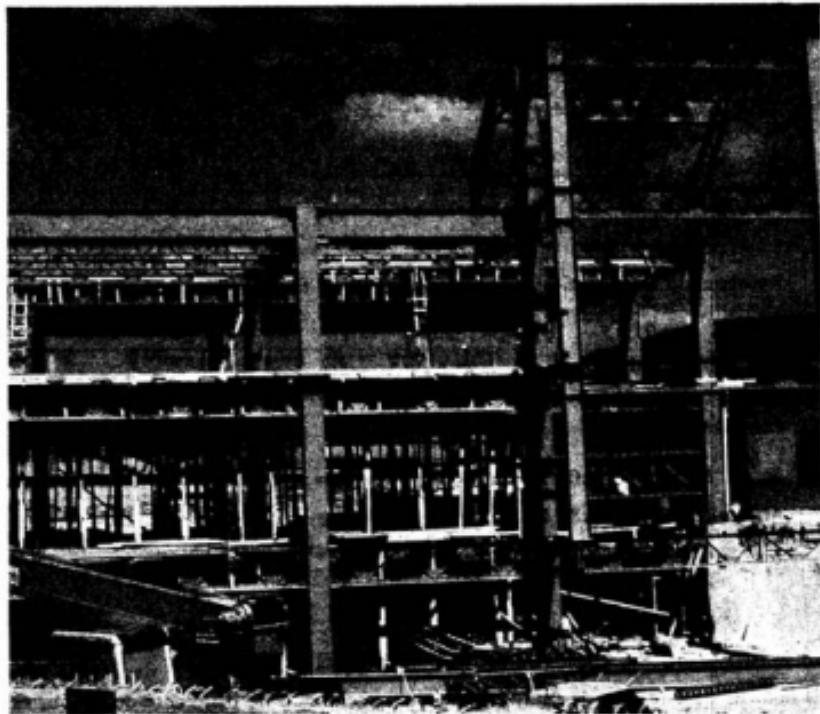
$$\psi_{BC} = \psi_{DE} = \psi_2$$

Escribimos ahora las ecuaciones observando que  $\theta_A = \theta_F = 0$

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \theta_B - 3\psi_1 & M_{DC} &= \theta_C + 2\theta_D \\ M_{BA} &= 2\theta_B - 3\psi_1 & M_{DE} &= 2\theta_D + \theta_E - 3\psi_2 \\ M_{BC} &= 2\theta_B + \theta_C - 3\psi_2 & M_{ED} &= \theta_D + 2\theta_E - 3\psi_2 \\ M_{BE} &= 2\theta_B + \theta_E & M_{EB} &= \theta_B + 2\theta_E \\ M_{CB} &= \theta_B + 2\theta_C - 3\psi_2 & M_{EF} &= 2\theta_E - 3\psi_1 \\ M_{CD} &= 2\theta_C + \theta_D & M_{FE} &= \theta_E - 3\psi_1 \\ \Sigma M_B = 0 &= M_{BA} + M_{BC} + M_{BE} & M_{DC} &= \theta_C + 2\theta_D \\ 2\theta_B - 3\psi_1 + 2\theta_B + \theta_C - 3\psi_2 + 2\theta_B + \theta_E &= 0 & M_{DE} &= 2\theta_D + \theta_E - 3\psi_2 \\ 6\theta_B + \theta_C + \theta_E - 3\psi_1 - 3\psi_2 &= 0 & \Sigma M_C = 0 &= M_{CB} + M_{CD} \\ \Sigma M_C = 0 &= M_{CB} + M_{CD} & \theta_B + 2\theta_C - 3\psi_2 + 2\theta_B + \theta_D &= 0 \\ \theta_B + 4\theta_C + \theta_D - 3\psi_2 &= 0 & \theta_B + 4\theta_C + \theta_D - 3\psi_2 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_D = 0 &= M_{DC} + M_{DE} & M_{EF} &= \theta_E - 3\psi_1 \\ \theta_C + 2\theta_D + 2\theta_B + \theta_E - 3\psi_2 &= 0 & \theta_C + 4\theta_D + \theta_E - 3\psi_2 &= 0 \\ \theta_C + 4\theta_D + \theta_E - 3\psi_2 &= 0 & \theta_C + 4\theta_D + \theta_E - 3\psi_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

(3)



Centro de investigación y desarrollo de Condumex, S.A. en Querétaro, Qro., México. (Cortesía de ILIDEM, S.A.)

$$\begin{aligned} \sum M_E = 0 &= M_{ED} + M_{EB} + M_{EF} \\ \theta_D + 2\theta_E - 3\psi_2 + \theta_B + 2\theta_E + 2\theta_E - 3\psi_1 &= 0 \\ \theta_B + \theta_D + 6\theta_E - 3\psi_1 - 3\psi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$\Sigma H = -45$ , nivel superior:

$$\begin{aligned} \frac{M_{RC} + M_{CB}}{6} + \frac{M_{DE} + M_{ED}}{6} &= -45 \\ 2\theta_B + \theta_C - 3\psi_2 + \theta_B + 2\theta_C - 3\psi_2 &+ \\ + \frac{2\theta_D + \theta_E - 3\psi_1 + \theta_D + 2\theta_E - 3\psi_2}{6} &= -45 \end{aligned}$$

$$3\theta_B + 3\theta_C + 3\theta_D + 3\theta_E - 12\psi_2 = -270 \quad (5)$$

$\Sigma H = -135$ , nivel inferior:

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{6} + \frac{M_{EF} + M_{FE}}{6} = -135$$

$$\frac{\theta_B - 3\psi_1 + 2\theta_B - 3\psi_1}{6} + \frac{2\theta_E - 3\psi_1 + \theta_E - 3\psi_1}{6} = -135$$

$$3\theta_B + 3\theta_E - 12\psi_1 = -810 \quad (6)$$

Resolviendo las ecuaciones simultáneamente se tiene:

$$\theta_B = \theta_E = +71.15 \quad \psi_1 = +103.075$$

$$\theta_C = \theta_D = +29.4^\circ \quad \psi_2 = +72.8$$

Momentos finales:

$$M_{AB} = M_{FE} = -238.08 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_{BE} = M_{EB} = +213.57 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = M_{EF} = -166.86 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_{CB} = M_{DE} = -88.43 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = M_{ED} = -46.71 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_{CD} = M_{DC} = +88.43 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
■ ■

### 13.6 ANALISIS DE MARCOS CON COLUMNAS INCLINADAS

El análisis de este tipo de marcos, mediante el método de pendiente-deflexión, es muy tedioso cuando se hace con una calculadora manual; resulta más práctico para este fin, emplear el método de distribución de momentos, que se presentará en los capítulos 14 y 15.

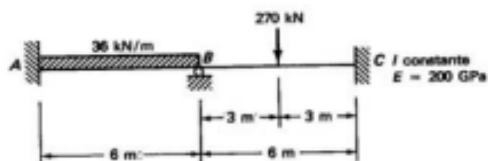
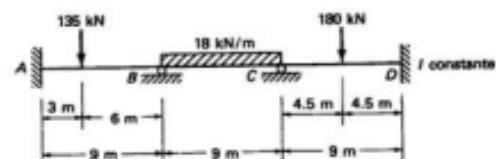
### 13.7 SOLUCIONES CON LA COMPUTADORA

El disco adjunto a este texto y descrito en el capítulo 20, le permitirá al lector analizar rápidamente la mayoría de los problemas contenidos en este capítulo.

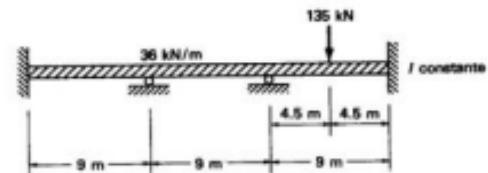
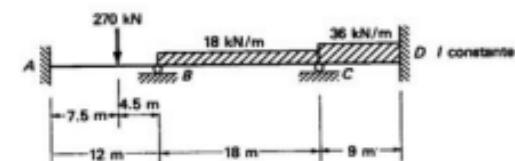
### PROBLEMAS

En los problemas 13.1 al 13.13, calcule los momentos de extremo en las vigas mostradas con el método de pendiente-deflexión. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante correspondientes.  $E$  es constante en todos los problemas.

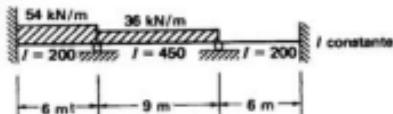
13.1

13.2 (Resp.:  $M_A = -177 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = -96 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C = -163.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $V_D = 96.5 \text{ kN} \uparrow$ )

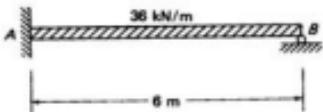
13.3

13.4 (Resp.:  $V_A = 81.4 \text{ kN} \uparrow$ ,  $M_B = -506.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C = -412.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $V_D = 133.8 \text{ kN} \uparrow$ )

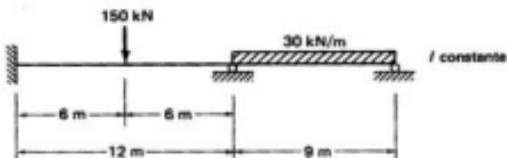
13.5



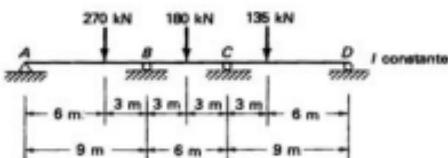
13.6 (Resp.:  $V_A = 135 \text{ kN} \uparrow$ ,  $V_B = 81 \text{ kN} \uparrow$ ,  $M_A = -162 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



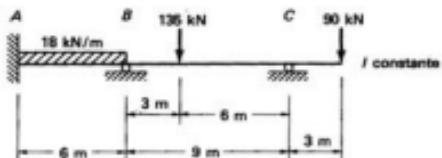
13.7



13.8 (Resp.:  $V_A = 54.36 \text{ kN} \uparrow$ ,  $V_B = 333.76 \text{ kN} \uparrow$ ,  $M_B = -320.76 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C = -152 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



13.9



13.10 Resuelva el problema 13.2 considerando que ambos extremos de la viga están simplemente apoyados. (Resp.:  $V_A = 75.7 \text{ kN} \uparrow$ ,  $M_B = -128.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $V_C = 203.6 \text{ kN} \uparrow$ ,  $M_C = -211.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

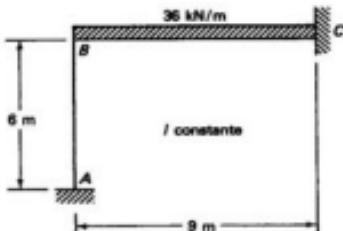
13.11 Resuelva el problema 13.4 considerando que el extremo derecho está simplemente apoyado.

13.12 Resuelva el problema 13.1 suponiendo que el apoyo B experimenta un asentamiento de 60 mm;  $I = 0.525 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ .

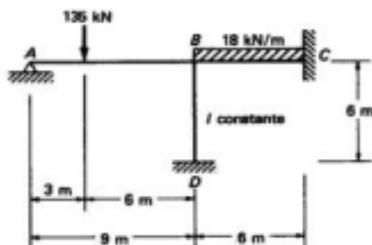
- 13.13 Resuelva el problema 13.8 suponiendo los siguientes asentamientos en los apoyos: en *A* de 25 mm, en *B* de 50 mm, en *C* de 38 mm y en *D* de 50 mm;  $E = 200 \text{ GPa}$ ;  $I = 1.34 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ .

En los problemas 13.14 al 13.20, determinar los momentos de extremo en las estructuras mostradas empleando las ecuaciones de pendiente-deflexión.

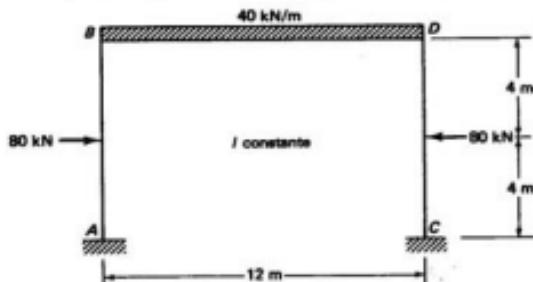
- 13.14 (Resp.:  $M_A = 72.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = 145.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



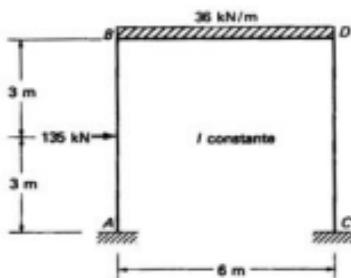
- 13.15



- 13.16 (Resp.:  $M_B = 380 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C = 70 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

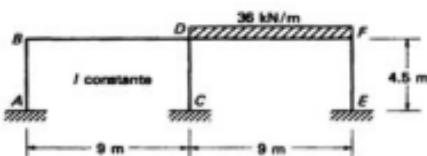


13.17

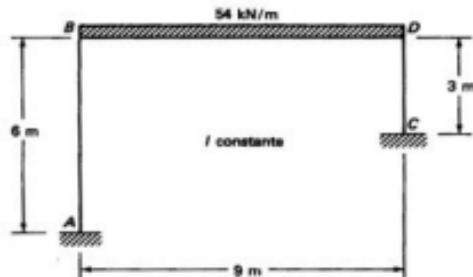


- 13.18 Resuelva el problema 13.17 considerando que las bases de las columnas están articuladas. (Resp.:  $M_A = 107.325 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_D = 297.675 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

13.19



- 13.20 (Resp.:  $M_A = 186.98 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_D = 259.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



**REFERENCIA BIBLIOGRAFICA**

1. G. A. Maney, *Studies in Engineering*, No. 1 (Minneapolis: University of Minnesota, 1915).
2. H. Manderla, "Die Berechnung der Sekundärspannungen," *Allg. Bautz* 45 (1880): 34.
3. O. Mohr, "Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen," *Zivilingenieur* (1892).

# Distribución de momentos en vigas

### 14.1 GENERALIDADES

En mayo de 1930, el profesor Hardy Cross dio a conocer el método de distribución de momentos en las memorias (Proceedings) de la American Society of Civil Engineers [1], luego de haber enseñado tal procedimiento a sus alumnos en la Universidad de Illinois desde el año de 1924. Su artículo marcó el comienzo de una nueva época en el análisis de las estructuras estáticamente indeterminadas, dando un mayor impulso al empleo de estos sistemas estructurales. El método de la distribución de momentos aplicado a vigas continuas y marcos, implica un poco más de trabajo que los métodos aproximados, pero proporciona una exactitud equivalente a la lograda con los métodos exactos (mucho más tardados y laboriosos) que ya se han explicado.

En los capítulos anteriores, el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas comprendió la resolución de ecuaciones simultáneas difíciles de manejar. Estas ecuaciones no son necesarias en la aplicación del método de la distribución de momentos, excepto en raras ocasiones, como en el caso de marcos complicados. El método de Cross comprende ciclos de cálculos sucesivos que van aproximando los resultados hacia la respuesta correcta. Las operaciones pueden suspenderse después de dos o tres ciclos, dando un análisis aproximado muy satisfactorio, o bien, pueden continuarse según la precisión que se deseé. Cuando se consideran estas ventajas, a la luz del hecho de que la precisión conseguida mediante los laboriosos procedimientos "clásicos" suele ser de valor cuestionable, se comprenderá la gran utilidad de este método práctico y rápido.

Entre 1930 y 1960, el método de la distribución de momentos fue el método más usado para el análisis de vigas continuas y marcos. Sin embargo, desde 1960 se ha incrementado, en forma extraordinaria, el uso de computadoras para el análisis de todo tipo de estructuras. Las computadoras son extremadamente eficientes para resolver las ecuaciones simultáneas que se generan mediante otros métodos de

análisis. Generalmente, los programas usados se basan en el análisis matricial descrito en los capítulos 16 al 19 de este texto.

El método de la distribución de momentos sigue siendo el más importante de los métodos "manuales" para analizar vigas continuas y marcos. El ingeniero de estructuras puede efectuar con él, rápidamente, análisis aproximados para diseños preliminares y también puede comprobar resultados de la computadora (lo que a veces es muy importante). El método de distribución de momentos sólo es práctico para el análisis de estructuras pequeñas.

## 14.2 INTRODUCCIÓN

El atractivo del método de distribución de momentos estriba en su sencillez teórica y de aplicación. Cualquier persona podrá comprender rápidamente los principios básicos y entender con claridad en qué consiste el procedimiento.

Los siguientes análisis se refieren a estructuras con elementos de sección transversal uniforme en toda su longitud (es decir, elementos prismáticos). Se supone que no existe traslación del nudo donde se juntan dos o más elementos de un marco; sin embargo, sí puede haber una rotación (es decir, los elementos pueden girar en conjunto, pero no moverse entre sí). Además, se ignora la deformación axial de los elementos.

Consideremos el marco de la fig. 14.1(a); sus nudos *A*, *B*, *C* y *D* están empotrados. El nudo *E* no está empotrado y las cargas sobre la estructura harán que gire ligeramente; tal rotación se indica en la fig. 14.1(b) por medio del ángulo  $\theta_E$ .

Si se aplica una sujeción imaginaria al nudo *E*, inmovilizándolo de modo que no pueda desplazarse en forma alguna, la estructura tomará la forma indicada en la fig. 14.1(c). Para esta situación, en donde todos los extremos se encuentran fijos, los momentos de empotramiento se pueden calcular de manera más o menos fácil

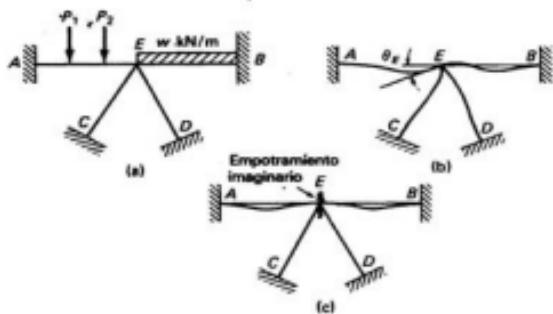


Figura 14.1



Conjunto habitacional Embajador, Santo Domingo, República Dominicana.  
(Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)

por medio de las fórmulas usuales ( $w\ell^2/12$  para cargas uniformes y  $Pab^2/\ell^2$  o  $Pa^2b/\ell^2$  para cargas concentradas) como se muestra en la fig. 14.5.

Si la sujeción en  $E$  se elimina, el nudo rotará un poco, flexionando los extremos de los miembros que concurren a él y originando una redistribución de los momentos en los extremos de los miembros. Los cambios en los momentos o en las rotaciones de los extremos  $E$  de los miembros  $AE$ ,  $BE$ ,  $CE$  y  $DE$  causan cierto efecto en los otros extremos. Cuando en el extremo de una barra se aplica un momento estando empotrado el otro, existe cierto efecto de *transmisión* del momento aplicado hacia el extremo fijo.

Una vez calculados los momentos de empotramiento perfecto, la resolución del problema puede enunciarse así: (1) calcular los momentos producidos en los extremos  $E$  de los miembros causados por la rotación en el nudo  $E$ ; (2) hallar la magnitud de los momentos transmitidos o transportados a los otros extremos de las barras, y (3) realizar la suma o resta de estos últimos momentos a los momentos originales de empotramiento.

Estos pasos pueden expresarse simplemente como la suma de los momentos de empotramiento perfecto, más los momentos debidos a la rotación del nudo  $E$ :

$$M = M_{fijo} + M_{s_E}$$

### 14.3 RELACIONES BASICAS

Existen dos cuestiones que deben ser evaluadas antes de aplicar el método de distribución de momentos en el análisis de estructuras. Tales cuestiones son:

1. ¿Cuál es el valor del momento transportado o transmitido al extremo fijo de un miembro cuando en el otro actúa un momento determinado?
2. Cuando una junta se libera y gira; cómo es la distribución del momento desequilibrado sobre los miembros estructurales que concurren en el nudo, o bien, ¿qué valor de momento resistente suministra cada barra?

#### Momento transportado

Para determinar el momento transportado se considerará la viga sin carga y de sección transversal constante, mostrada en la fig. 14.2(a). Si se aplica un momento  $M_1$  al extremo izquierdo de la viga, en el extremo derecho aparecerá un momento  $M_2$ . El extremo izquierdo es un nudo que se ha liberado y el momento  $M_1$  producirá en él un giro  $\theta_1$ . Sin embargo, no ocurrirá ningún desplazamiento del extremo izquierdo respecto del derecho.

Puede utilizarse el segundo teorema del área del diagrama de momento para determinar la magnitud de  $M_2$ . La desviación lineal de la tangente a la elástica de la viga en el extremo izquierdo con respecto a la tangente en el extremo derecho (que permanece horizontal), es igual al momento estático del área del diagrama de  $M/EI$ , tomado con respecto a un eje vertical en el extremo izquierdo, pero tal desviación es igual a cero. Del diagrama de  $M/EI$  de la fig. 14.2(b), y después de dividirlo en dos triángulos para facilitar el cálculo del área, puede escribirse la siguiente expresión y luego despejar  $M_2$ :

$$\delta_A = \frac{(\frac{1}{2} \times M_1 \times \ell)(\frac{1}{2}\ell) + (\frac{1}{2} \times M_2 \times \ell)(\frac{3}{2}\ell)}{EI} = 0$$

$$\frac{M_1 \ell^2}{6EI} + \frac{M_2 \ell^2}{3EI} = 0$$

$$M_2 = -\frac{1}{2}M_1$$

Un momento aplicado en un extremo de una viga prismática empotrada en el otro, transmitirá a este último un momento de magnitud igual a la mitad del valor del primero y de signo contrario. El factor de transporte es  $-\frac{1}{2}$ . El signo menos proviene de la convención de signos adoptada en resistencia de materiales: un momento actuante en un extremo y que produzca tensión en las fibras inferiores, se transmitirá de manera que origine tensión en las fibras superiores en el otro extremo. El estudio de las figs. 14.2 y 14.3 hace ver que un factor de transporte de  $+\frac{1}{2}$ , utilizado de acuerdo con la convención de signos para la distribución de momentos, automáticamente considera esta situación y no es necesario cambiar el signo en cada transporte.

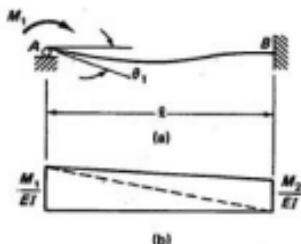


Figura 14.2

### Factores de distribución

Por lo general, un grupo de elementos estructurales conectados en un nudo tienen diferente rigidez. Cuando un nudo se libera y comienza a girar debido al momento desequilibrado, la resistencia a la rotación varía de miembro a miembro. El problema consiste en determinar qué parte del momento de desequilibrio tomará cada uno de los elementos. Parece lógico suponer que el momento desequilibrado será resistido en razón directa a la respectiva resistencia a la rotación en el extremo de cada elemento.

La viga y el diagrama de  $M/EI$  de la fig. 14.2 se reproducen en la fig. 14.3, con las relaciones apropiadas entre  $M_1$  y  $M_2$ ; a continuación se tiene una expresión para la magnitud del giro originado por el momento  $M_1$ .

Utilizando el primer teorema del área del diagrama de momento, el giro  $\theta_1$  está representado por el área del diagrama de  $M/EI$  entre  $A$  y  $B$ , permaneciendo horizontal la tangente en  $B$ :

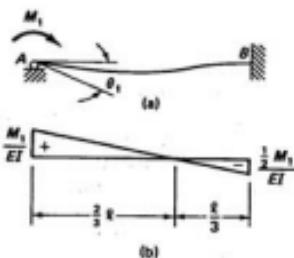


Figura 14.3

$$\theta_1 = \frac{(\frac{1}{2})(M_1)(\frac{2}{3}\ell) - (\frac{1}{2})(\frac{1}{2}M_1)(\frac{1}{3}\ell)}{EI}$$

$$= \frac{M_1\ell}{4EI}$$

Suponiendo que todos los elementos son del mismo material, con el mismo valor de  $E$ , las únicas variables en la ecuación anterior que afectan la magnitud de la rotación en el extremo son  $\ell$  e  $I$ . El giro que se presenta en el extremo de un elemento varía, obviamente, en razón directa al valor de  $\ell/I$  del elemento. Cuanto mayor sea la rotación de una barra, tanto menor será el momento que soporte. El momento resistido varía en razón inversa a la magnitud de la rotación o directamente con la cantidad  $I/\ell$ . Este último valor recibe el nombre de *factor de rigidez K*.

$$K = \frac{I}{\ell}$$

Para determinar el momento desequilibrado que toma cada uno de los elementos concurrentes en un nudo, se suman los factores de rigidez para dicho nudo, y se supone que cada barra resiste una parte del momento desequilibrado igual a su valor  $K$ , dividido entre la suma de todos los valores  $K$  en el nudo. Estas fracciones del momento de desequilibrio total, resistidas por cada uno de los elementos, se evalúan con los llamados *factores de distribución (FD)*:

$$FD_1 = \frac{K_1}{\Sigma K} \quad FD_2 = \frac{K_2}{\Sigma K}$$

#### 14.4 DEFINICIONES

Los términos siguientes se emplean constantemente al analizar el método de la distribución de momentos.

##### Momentos de empotramiento perfecto (MEP)

Cuando todos los nudos de una estructura se fijan en forma tal que no puede ocurrir ninguna rotación en ellos, las cargas externas originan ciertos momentos en los extremos de las barras a las que esas cargas están aplicadas. Tales momentos se denominan momentos de empotramiento perfecto.

##### Momento de desequilibrio

Los nudos de una estructura se consideran inicialmente fijos. Cuando un nudo se libera, éste rotará, si la suma de los momentos de empotramiento en el nudo no es cero. La diferencia entre cero y el valor de la suma de los momentos de extremo es el momento de desequilibrio.

### Momentos distribuidos

Después de eliminar la sujeción que restringe un nudo, el momento desequilibrado lo hará girar. La rotación desviará los extremos de los elementos reunidos en la junta, cambiando sus momentos flexionantes. En otras palabras, el giro del nudo es resistido por los elementos estructurales y se producen momentos resistentes a medida que se deforman. La rotación continúa hasta que se alcanza el equilibrio (cuando la suma de los momentos resistentes es igual al momento desequilibrado) o sea, cuando es nula la suma de los momentos en el nudo. Los momentos que se desarrollan en los miembros estructurales que resisten la rotación, son los momentos distribuidos.

### Momentos transportados

Los momentos distribuidos en los extremos de las barras originan momentos flexionantes en los extremos opuestos, que supuestamente están fijos. Estos últimos son los llamados momentos transportados.

### 14.5 CONVENCION DE SIGNOS

Los momentos en el extremo de un elemento se consideran negativos cuando tienden a girarlo con respecto al nudo, en sentido de las manecillas del reloj (el momento resistente en el nudo sería de sentido contrario). La viga continua de la fig. 14.4, con todos sus nudos fijos, tiene momentos en sentido de las manecillas del reloj en el extremo izquierdo de cada tramo, y momentos contrarios en el extremo derecho de cada uno. (La convención de signos comúnmente utilizada en Resistencia de materiales asigna a las vigas doblemente empotradas, sujetas a cargas verticales hacia abajo, momentos negativos en uno y otro extremo, debido a que en estos puntos se manifiesta tensión en las fibras superiores de las vigas.) Debe notarse que esta convención de signos que se usa en el método de la distribución de momentos, es la misma que se empleó en el capítulo 13 con el método de giros y desplazamientos.

### 14.6 MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO PARA VARIOS TIPOS DE CARGA

La figura 14.5 presenta fórmulas para el cálculo de momentos de empotramiento perfecto (MEP) para varios tipos de condiciones de carga. Los tres primeros casos

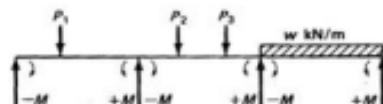


Figura 14.4

## 14.6 Momentos de empotramiento perfecto para varios tipos de carga.

411

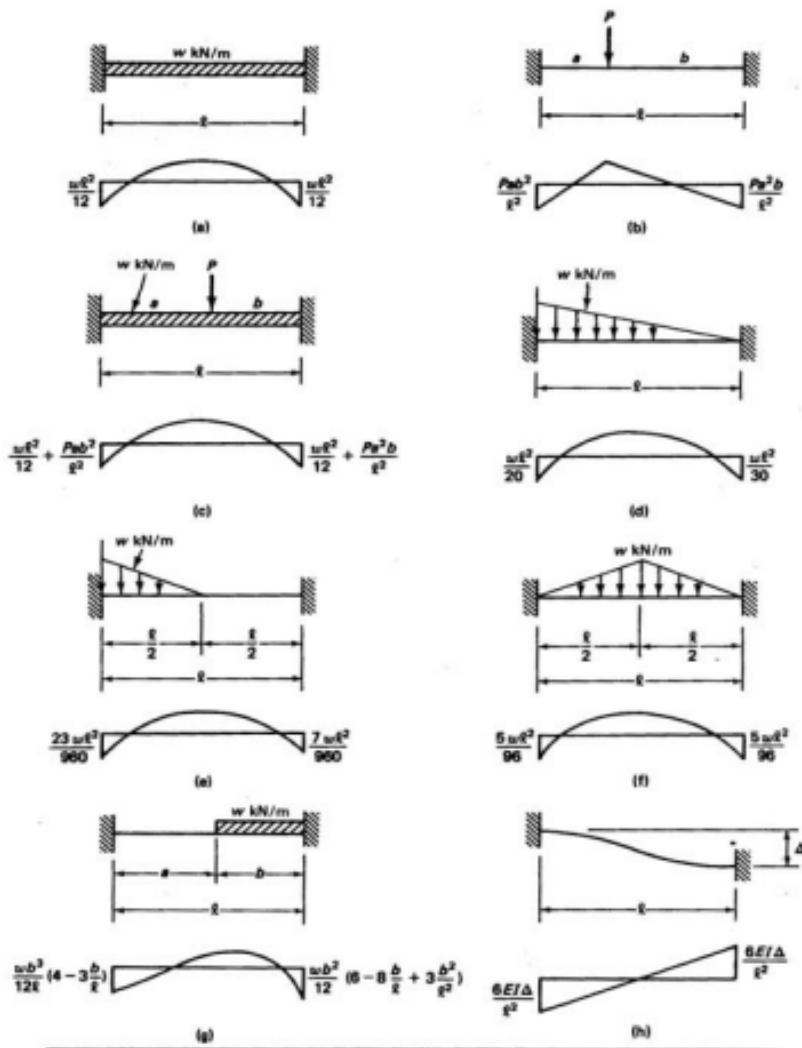


Figura 14.5

de la figura abarcan la mayoría de los casos prácticos, en tanto que los tres últimos son para condiciones de carga menos usuales. Conviene examinar la parte (c), en donde se expone la idea de la superposición. Si son necesarios los momentos de empotramiento en un mismo tramo sujeto a diferentes condiciones de carga, se calcularán por separado para después sumarlos, como se indica en la figura.

Para casos no mostrados en la fig. 14.5, los momentos de empotramiento pueden conseguirse en alguna otra tabla o pueden calcularse con el método del área del diagrama de momentos como se ilustra en el ejemplo 8.6.

#### 14.7 APPLICACION DE LA DISTRIBUCION DE MOMENTOS

Se dispone ahora de los pocos medios necesarios para utilizar el método de distribución de momentos, y su aplicación se describe con referencia a la figura 14.6.

La fig. 14.6(a) muestra una viga continua sujetada a la acción de varias cargas. En (b) los nudos interiores *B* y *C* se suponen fijos y los momentos de empotramiento correspondientes son calculados. Para el nudo *B* se calcula el momento de desequilibrio, liberándose después dicho nudo, como se ve en (c). El nudo gira, distribuyendo de esta manera el momento de desequilibrio entre los extremos *B* de las barras *BA* y *BC*, en proporción directa a sus factores de distribución. Los valores de estos momentos distribuidos se transmiten a razón de la mitad a los extremos opuestos de los elementos. Cuando se alcanza el equilibrio, el nudo *B* se sujeta en su nueva posición girada, soltando luego el *C*, como se muestra en (d). El nudo *C* gira debido a su momento desequilibrado hasta alcanzar el equilibrio, y la rotación produce momentos en los extremos *C* de los miembros *CB* y *CD*, así como los correspondientes

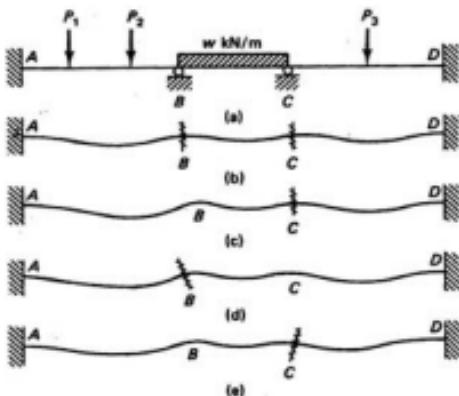


Figura 14.6

momentos transportados. Luego se fija el nudo *C* y se libera el *B*, como se muestra en la fig. 14.6(e).

Se repite el mismo procedimiento una y otra vez para los nudos *B* y *C*, disminuyendo rápidamente el valor del momento de desequilibrio hasta que toda liberación adicional de un nudo sólo produce una rotación insignificante. Este sencillo proceso constituye el método de la distribución de momentos.

Los ejemplos del 14.1 al 14.3 ilustran el procedimiento que se utiliza para analizar vigas continuas relativamente simples. Los factores de distribución se calculan como sigue para el ejemplo 14.1:

$$FD_{BA} = \frac{K_{BA}}{\sum K} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}} = 0.43$$

$$FD_{BC} = \frac{K_{BC}}{\sum K} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}} = 0.57$$

En los ejemplos 14.1 y 14.2 se emplea un arreglo tabular sencillo para introducir al lector al método de la distribución de momentos. (En ejemplos posteriores se usará una variante algo distinta preferida por los autores, la cual conduce a la solución más rápidamente.) El procedimiento tabular puede resumirse de la siguiente manera:

1. Se calculan los momentos de empotramiento perfecto, anotándolos en el primer renglón de la tabla (renglón MEP en los ejemplos 14.1 y 14.2).
2. Los momentos de desequilibrio de cada nudo se distribuyen en el siguiente renglón (D.1).
3. Se efectúan los transportes desde cada nudo y se anotan en el siguiente renglón (T.1).
4. Se distribuyen los nuevos momentos desequilibrados de cada nudo (D.2), y así sucesivamente. (Como la viga del ejemplo 14.1 tiene un sólo nudo, sólo es necesario efectuar un ciclo de distribución.)

Cuando el proceso alcanza la exactitud deseada, se trazan dos rayas bajo cada columna de cifras. El momento final en el extremo de un elemento, es igual a la suma de todos los momentos de la tabla correspondientes a su posición. A menos que un nudo se encuentre empotrado, será nula la suma de los momentos finales en los extremos de los elementos que llegan a éste.

#### EJEMPLO 14.1

Determinar los momentos de extremo en la estructura mostrada en la fig. 14.7 con el método de distribución de momentos.

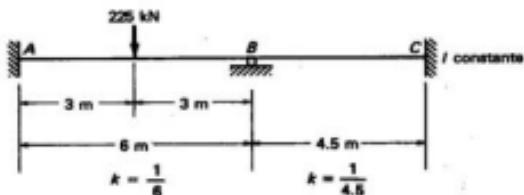


Figura 14.7

*Solución*

	0.43	0.57	
-168.8	+168.8	-72.6	MEP
-36.3			D.I
-205.1	+96.2	-96.2	T.I
			Momentos finales

■ ■

**EJEMPLO 14.2**

Determinar los momentos de extremo en la estructura mostrada en la fig. 14.8.

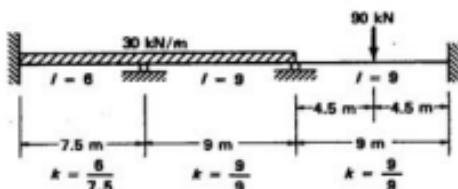


Figura 14.8

A partir del ejemplo 14.3 se utilizará un procedimiento ligeramente distinto para la distribución de momentos. Unicamente se equilibra un nudo a la vez, efectuando desde éste los transportes que se requieran. En términos generales, es conveniente (pero no necesario) equilibrar primero el nudo que tiene el desequilibrio más grande, efectuar los transportes, equilibrar el nudo donde aparezca ahora el mayor desequilibrio, y así sucesivamente, debido a que tal proceso acelera la convergencia. Este procedimiento es más rápido que el método tabular anterior que se empleó en los

*Solución*

	0.44	0.56	0.5	0.5		MEP
-140.6	+ 140.6	- 202.5	+ 202.5	- 101.2	+ 101.2	D1
	+ 27.2	+ 34.7	- 50.6	- 50.6		T1
+ 13.6		- 25.3	+ 17.3		- 25.3	D2
	+ 11.1	+ 14.2	- 8.6	- 8.6		T2
+ 5.6		- 4.3	+ 7.1		- 4.3	D3
	+ 1.9	+ 2.4	- 3.5	- 3.6		T3
+ 0.9		- 1.8	+ 1.2		- 1.8	D4
	+ 0.8	+ 1.0	- 0.6	- 0.6		T4
+ 0.4		- 0.3	+ 0.5		- 0.3	D5
	+ 0.2	+ 0.1	- 0.2	- 0.3		
- 120.1	+ 181.8	- 181.8	+ 185.1	- 164.9	+ 69.5	Momentos finales

ejemplos 14.1 y 14.2 y sigue en todo, la descripción del comportamiento de una viga continua (con sujeteciones imaginarias) que se indicó en la fig. 14.6.

■ ■

### EJEMPLO 14.3

Calcular los momentos de extremo en la viga de la fig. 14.9.

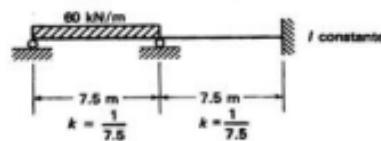


Figura 14.9

### 14.8 MODIFICACION DE LA RIGIDEZ PARA EL CASO DE APOYOS SIMPLES

El factor de transporte fue ideado para transportar momentos hacia los extremos empotrados, pero puede aplicarse en los extremos simplemente apoyados, en donde los momentos finales deben ser nulos. El extremo simple del ejemplo 14.3 se consideró empotrado; se efectuó la transmisión al extremo opuesto y se soltó después, equilibrándolo de nuevo en cero. Este procedimiento repetido una y otra vez, es

*Solución*

0.5	0.5	
- 281.25	+ 281.25	
+ 281.25	+ 140.62	
- 105.47	- 210.94	= 210.94 - 105.47
+ 105.47	+ 52.73	
- 13.18	- 26.36	= 26.36 - 13.18
+ 13.18	+ 6.59	
- 1.65	- 3.30	= 3.30 - 1.65
+ 1.65	+ 0.82	
- 0.20	- 0.41	= 0.41 - 0.20
+ 0.20	+ 241.00	= 241.01 - 120.50
0		

■ ■

absolutamente correcto, pero implica un trabajo innecesario que puede eliminarse estudiando la rigidez de los elementos con extremos simplemente apoyados.

En la fig. 14.10(a) y (b) se compara la rigidez relativa de un elemento sujeto a la acción de un momento  $M_1$  cuando el extremo lejano está empotrado, con la que tiene, cuando dicho extremo es un apoyo simple. En la parte (a) se carga la viga conjugada con el diagrama  $M/EI$  para el caso de empotramiento en el extremo lejano, determinándose luego las reacciones. La pendiente en el extremo izquierdo se representa por  $\theta_1$ , y es igual a la fuerza cortante, cuando la viga conjugada se carga con el diagrama  $M/EI$ . Su valor es  $M_1\ell/4EI$ .

La viga conjugada para la viga simplemente apoyada se carga con el diagrama  $M/EI$  y sus reacciones se determinan en la fig. 14.10(b). El momento  $M_1$  causa una rotación  $\theta_1 = M_1\ell/3EI$ ; por tanto, la rotación que provoca el momento  $M_1$  cuando

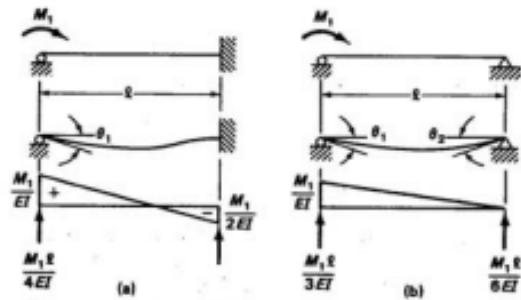


Figura 14.10

## 14.9 Diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante

417

el extremo lejano se encuentra empotrado, tiene una magnitud igual a las tres cuartas partes de la rotación en la viga de extremo lejano con apoyo simple. ( $M_1\ell/4EI + M_1\ell/3EI = \frac{3}{4}$ .) La viga simplemente apoyada en el extremo lejano sólo tiene  $3/4$  de la rigidez de la viga con el extremo lejano empotrado. Si los factores de rigidez se modifican según un factor de  $3/4$  en el caso de tramos de extremo simplemente apoyados, el extremo simple se equilibra en cero y no se efectúa ya ningún transporte hasta tal punto, por lo que se tendrán los mismos resultados. La rigidez modificada se usa para la viga del ejemplo 14.3 en el ejemplo 14.4.

**EJEMPLO 14.4**

Determinar los momentos de extremo en la estructura mostrada en la fig. 14.11 empleando el factor de rigidez modificado para el apoyo simple del extremo izquierdo.

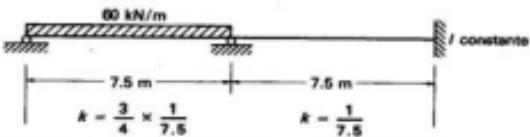


Figura 14.11

*Solución*

0.43	0.57
- 281.25	+ 281.25
+ 281.25	+ 140.62
0	- 181.40
	= 240.46
	+ 240.47
	= 240.46
	- 120.23
	= 240.46
	- 120.23

**14.9 DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO FLEXIONANTE**

El trazo de los diagramas de cortante y de momento es un medio excelente para comprobar el valor de los momentos finales, determinado mediante el método de distribución de momentos y para tener una idea de conjunto de la condición de esfuerzos en la estructura.

Antes de trazar los diagramas, es necesario considerar algunos puntos que relacionan la convención de signos para dichos diagramas con la que se emplea en

el método de la distribución de momentos. Se utilizará aquí la convención usual de signos para el trazo de diagramas (el momento flexionante es positivo cuando provoca tensión en las fibras inferiores de una viga y la fuerza cortante es positiva cuando corresponde al lado izquierdo y es ascendente).

La relación entre los signos de los momentos en las dos convenciones se muestra en las vigas de la fig. 14.12. La parte (a) de la figura ilustra una viga empotrada para la que el resultado de la distribución de momentos es un momento negativo. El momento en sentido de las manecillas del reloj flexiona la viga tal como se indica, causando tensión en las fibras superiores, o sea, un momento negativo, según la convención usual para los diagramas de cortante y de momento flexionante. En la fig. 14.12(b) el resultado de la distribución de momentos es un momento positivo, pero nuevamente las fibras superiores de la viga están en tensión, indicando un momento negativo para el diagrama de momento flexionante.

En la fig. 14.12(c) y (d) se muestra un apoyo simple interior. En la parte (c), la distribución de momentos da un momento negativo a la derecha y un momento positivo a la izquierda, que causa tensión en las fibras superiores. La parte (d) muestra el efecto de momentos de sentidos opuestos en el mismo apoyo considerado en la parte (c).

Del análisis anterior puede concluirse que la convención de signos usada aquí para la distribución de momentos en vigas continuas, concuerda con la usada para trazar los diagramas de momentos flexionantes en las partes derechas de los apoyos, pero no concuerda en las partes izquierdas.

Para dibujar los diagramas de un elemento vertical, en ocasiones se considera que su lado derecho es el lado de abajo. En el ejemplo 14.5 se distribuyen los momentos en una viga continua y luego se trazan los diagramas de cortante y flexionante.

Las reacciones que se indican en la solución de este problema, se determinaron calculándolas como si cada tramo estuviese simplemente apoyado y sumándoles ade-

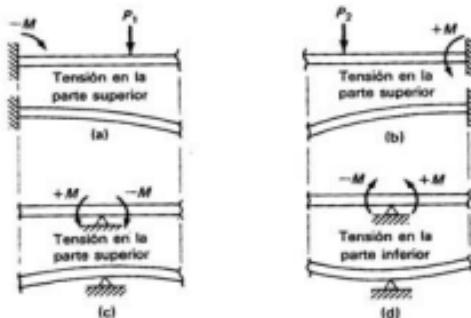


Figura 14.12

más, los valores de las reacciones producidas por los momentos presentes en los apoyos de la viga.

### EJEMPLO 14.5

Distribuir los momentos en los nudos y trazar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la estructura mostrada en la fig. 14.13.

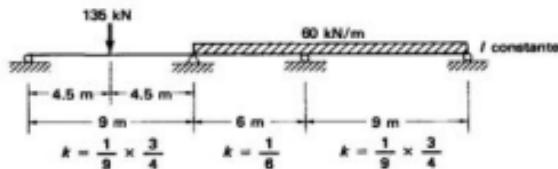
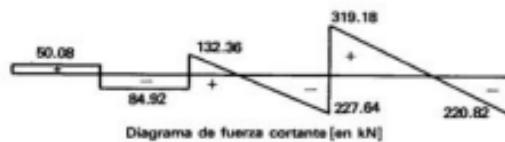


Figure 14.13

*Solución*

	0.33	0.67	0.67	0.33	
- 151.88	+ 151.88	- 180.00	+ 180.00	- 406.00	+ 406.00
+ 151.88	+ 75.94			- 202.50	- 406.00
0					0
	+ 140.21		+ 206.42	+ 141.06	
- 63.04	- 127.99		- 63.99		
	+ 21.43		+ 42.87	+ 21.12	
- 7.07	- 14.36		- 7.18		
	+ 2.40		+ 4.81	+ 2.37	
- 0.80	- 1.60		- 0.80		
	+ 0.27		+ 0.54	+ 0.26	
- 0.09	- 0.18		+ 442.67	- 442.67	
	+ 156.82	- 156.82			
† 67.50	67.50 †	† 180.00	180.00 †	† 270.00	270.00 †
† 17.42	17.42 †	† 47.64	47.64 †	† 49.18	49.18 †
† 50.08	84.92 †	† 132.36	227.64 †	† 319.18	220.82 †
					Reacciones



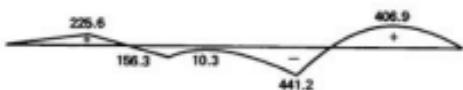


Diagrama de momento flexionante [en kN·m]



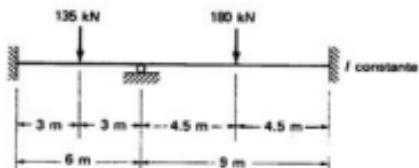
### 14.10 SOLUCIONES CON LA COMPUTADORA

El disco con programas suministrado con este texto y descritos en el capítulo 20, permiten al lector analizar muy rápidamente todos los problemas contenidos en este capítulo.

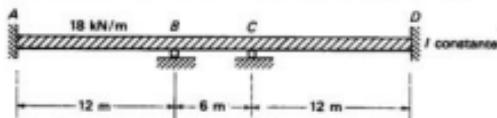
### PROBLEMAS

En los problemas 14.1 al 14.18, analice las estructuras mostradas con el método de la distribución de momentos y trace los correspondientes diagramas de momento flexionante y fuerza cortante.

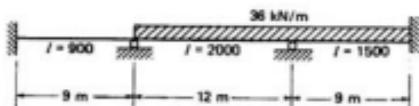
#### 14.1



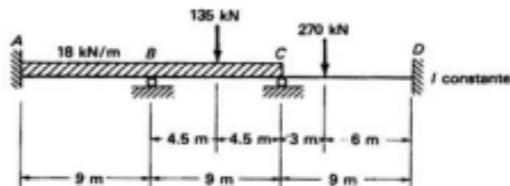
14.2 (Resp.:  $M_A = M_D = -256.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = M_C = -135 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



#### 14.3

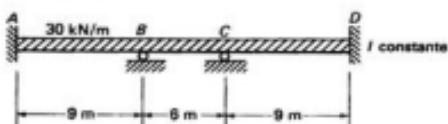


- 14.4 (Resp.:  $M_A = -86.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = -191.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C = -334.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_D = -192.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

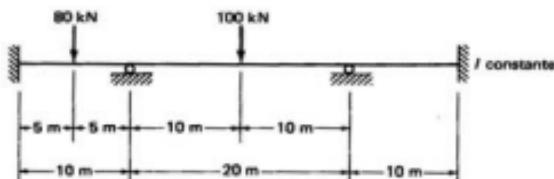


- 14.5 Resuelva el problema 14.3 añadiendo una carga de 180 kN en el centro del claro central y en el centro del claro derecho.

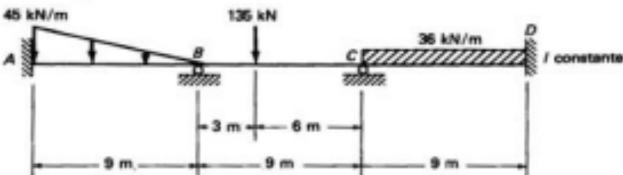
- 14.6 (Resp.:  $M_A = M_D = -234.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = M_C = -138.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



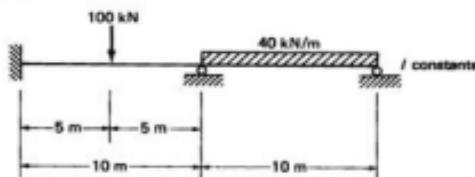
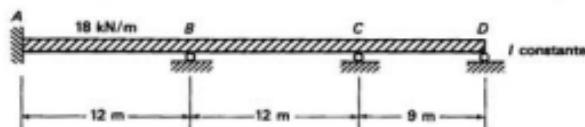
14.7



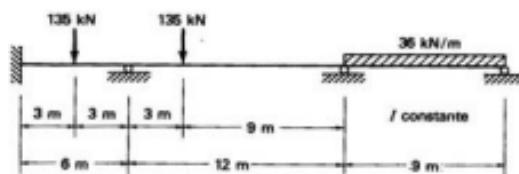
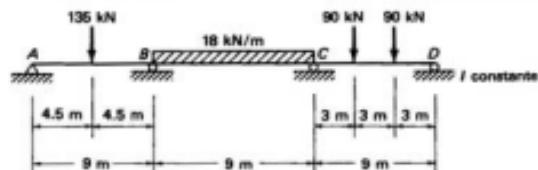
- 14.8 (Resp.:  $M_A = -176.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = -132.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C = -169.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_D = -279.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



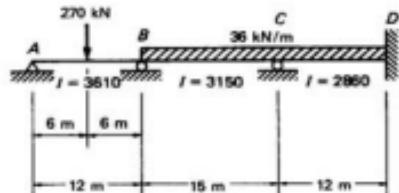
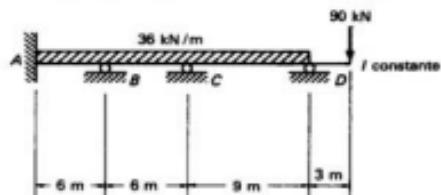
14.9

14.10 (Resp.:  $M_A = -213.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = -220.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C = -200.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_D = 0$ )

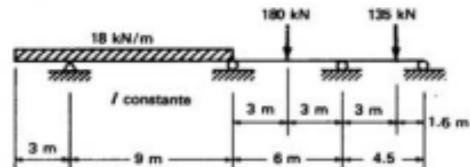
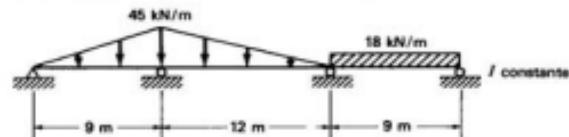
14.11

14.12 (Resp.:  $M_B = -214.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C = -239.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $V_A = 43.7 \text{ kN} \uparrow$ )

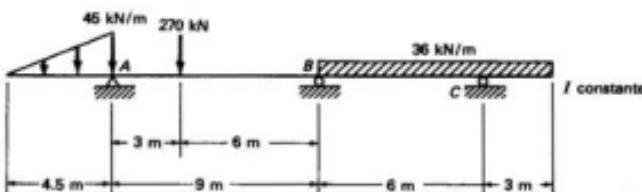
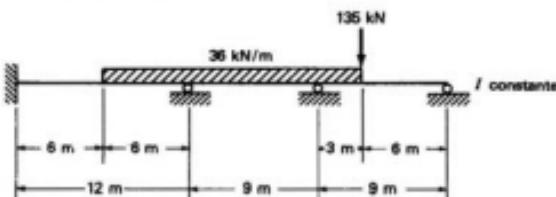
14.13

14.14 (Resp.:  $M_A = -118.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C = -185.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $V_A = 113.5 \text{ kN} \uparrow$ )

14.15

14.16 (Resp.:  $M_B = -290.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C = -211 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

14.17

14.18 (Resp.:  $M_A = -153.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = -259.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C = 286.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

## REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. H. Cross, "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments." *Proceedings of the American Society of Civil Engineers* (mayo, 1930), págs. 919-928.

# Distribución de momentos; marcos continuos

### 15.1 MARCOS SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL

El método de la distribución de momentos se aplica también a marcos, si se impide en éstos el movimiento lateral o ladeo. El análisis de marcos sin ladeo se ilustra en los ejemplos 15.1 y 15.2. Sin embargo, cuando el ladeo es posible, debe tomarse en consideración, ya que los movimientos o deflexiones ocasionan rotaciones que afectan la magnitud de los momentos de los elementos en donde ocurren.

Cuando las estructuras por analizarse son muy complejas, es necesario usar algún método para registrar los números, de manera que éstos no interfieran entre sí. En este capítulo los momentos de vigas se escriben abajo de ellas en extremos izquierdos y arriba de ellas en extremos derechos. Para columnas se usa el mismo sistema, considerando que los lados derechos corresponden a las laterales de la base.

#### EJEMPLO 15.1

Determinar los momentos de extremo del marco mostrado en la fig. 15.1.

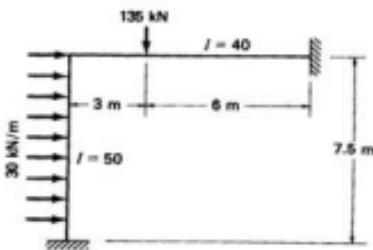


Figura 15.1

**Solución**

			+ 97.875
			+ 7.875
			+ 90.000
	0.4		
- 180.000			
+ 15.750			
<hr/>			
- 164.250			
	0.6		
+ 164.250			
+ 22.625			
<hr/>			
+ 140.625			
+ 11.813			
<hr/>			
- 128.812			
			-

■ ■

**EJEMPLO 15.2**

Calcule los momentos de extremo de la estructura mostrada en la fig. 15.2.

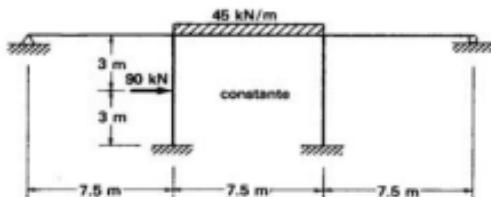


Figura 15.2

**Solución**

			+ 160.2
			- 2.2
			+ 5.9
+ 45.6			- 8.0
+ 0.9			+ 23.9
+ 8.8			- 70.3
+ 36.9	0.25	0.33	+ 210.9
			0.33 0.25
+ 144.0			- 210.9
+ 1.7		0.42	+ 47.3
+ 145	145	80.2	- 35.1
+   +   +   + +		67.5	+ 11.7
			- 4.1
			+ 1.4
			- 189.7
67.5	28.9	7.3	30.3
+ + +			
			44.0 - 5.0 - 1.2 90.2

■ ■

## 15.2 MARCOS CON DESPLAZAMIENTO LATERAL

Los marcos estructurales, como el mostrado en la figura 15.3, generalmente se construyen de modo que puedan ladearse al ser sometidos a la acción de cargas. El marco ilustrado en dicha figura es simétrico, pero tenderá a desplazarse lateralmente debido a que la carga  $P$  es excéntrica. El análisis de este marco da resultados incongruentes, si se utiliza el procedimiento acostumbrado.

Se equilibran los momentos de empotramiento y se calculan las componentes horizontales de reacción en los apoyos.

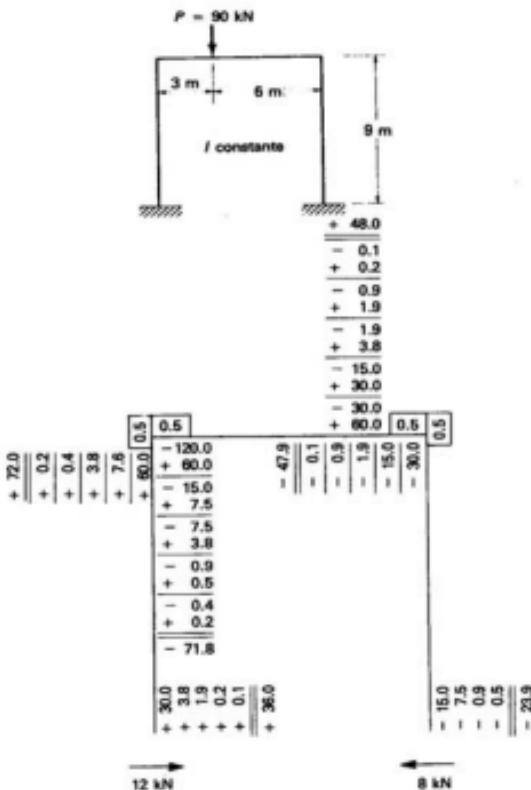


Figura 15.3

Primero se calculan las componentes horizontales en los apoyos, y de los resultados así obtenidos puede observarse que no se anula la suma de todas las componentes horizontales de las reacciones en los citados apoyos. Así, la suma de las fuerzas que actúan hacia la derecha es 4 kN mayor que la suma de las fuerzas que actúan hacia la izquierda. Si sobre la estructura actuara un sistema de fuerzas desequilibrado como éste, la estructura no podría estar en equilibrio.

El análisis acostumbrado no proporciona resultados congruentes porque la estructura realmente se ladea o desplaza hacia un lado, y las traslaciones resultantes alteran los momentos. Una posible solución es calcular los desplazamientos producidos al aplicar una fuerza horizontal de 4 kN hacia la derecha y en la parte superior del marco. Podrían determinarse entonces los momentos debidos a las deflexiones calculadas y sumarse a los momentos distribuidos originalmente; sin embargo, el método es algo difícil de aplicar.

Un método mucho más adecuado consiste en suponer la existencia de un apoyo o soporte imaginario que impida el ladeo de la estructura, como se muestra en la fig. 15.4. En esta condición se distribuyen los momentos de empotramiento, así como la fuerza que debe suministrar el apoyo imaginario para mantener el marco en su lugar. Para el marco de la fig. 15.3, el apoyo ficticio debe suministrar una fuerza de 4 kN que empuje hacia la izquierda.

El soporte es imaginario, y si se eliminara, permitiría que la estructura se ladease hacia la derecha. Al ladearse la estructura se supone que sus nudos están impedidos de rotar. Los extremos de las columnas rotan en sentido de las manecillas del reloj y producen momentos en ese mismo sentido o negativos, en los nudos (fig. 15.5).

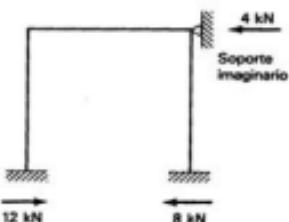


Figura 15.4

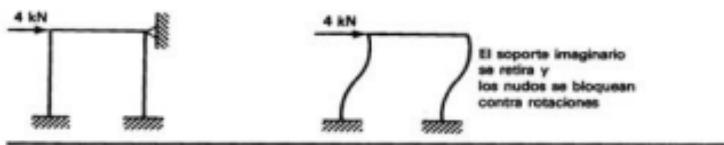


Figura 15.5

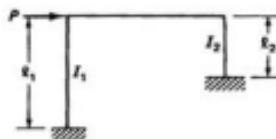


Figura 15.6

En las columnas se pueden aplicar valores supuestos de los momentos producidos por el desplazamiento lateral. Las relaciones necesarias entre dichos momentos se explican en la sección 15.3.

### 15.3 MOMENTOS DEBIDOS AL DESPLAZAMIENTO LATERAL

En caso de que todas las columnas de un marco tengan igual longitud y momento de inercia, los momentos por desplazamiento lateral supuestos serán los mismos en todas las columnas. Sin embargo, si difieren las longitudes de las columnas y/o sus momentos de inercia, lo anterior no sucederá. Se demostrará en los párrafos siguientes que los momentos por lado supuestos deben variar de columna a columna, en proporción a sus valores  $I/t^2$ .

Si la carga  $P$  que actúa sobre el marco de la fig. 15.6 desplazara a éste una distancia  $\Delta$ , el marco tomaría la configuración deformada que se muestra en la fig. 15.7.

Teóricamente, ambas columnas se deforman según curvas  $S$  perfectas en tanto que la viga se desplaza como cuerpo rígido sin flexión. En los puntos medios de las columnas, la deflexión será igual a  $\Delta/2$ . Tales puntos pueden considerarse entonces como puntos de inflexión, y las mitades inferiores como vigas en voladizo. La expresión para la deflexión en una viga en voladizo con una carga concentrada en su extremo libre, es  $Pt^3/3EI$ . Como las deflexiones son las mismas en ambas columnas, pueden escribirse las siguientes expresiones:

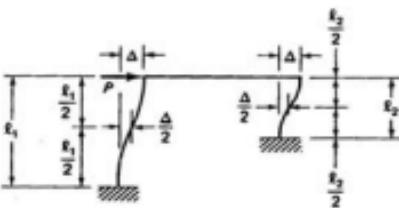


Figura 15.7

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{(P_1)(\ell_1/2)^3}{3EI_1} = \frac{P_1 \ell_1^3}{24EI_1}$$

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{(P_2)(\ell_2/2)^3}{3EI_2} = \frac{P_2 \ell_2^3}{24EI_2}$$

Despejando de estas expresiones  $P_1$  y  $P_2$ , que son las fuerzas que actúan en los voladizos, se tiene:

$$P_1 = \frac{12EI_1\Delta}{\ell_1^3}$$

$$P_2 = \frac{12EI_2\Delta}{\ell_2^3}$$

Los momentos producidos por las dos fuerzas en los extremos de sus voladizos respectivos, son iguales a la fuerza multiplicada por la longitud del voladizo correspondiente. Escribiendo las expresiones para estos momentos y sustituyendo en éstas los valores de  $P_1$  y  $P_2$ , se tiene que

$$M_1 = P_1 \frac{\ell_1}{2}$$

$$= \left( \frac{12EI_1\Delta}{\ell_1^3} \right) \frac{\ell_1}{2} = \frac{6EI_1\Delta}{\ell_1^2}$$

$$M_2 = P_2 \frac{\ell_2}{2}$$

$$= \left( \frac{12EI_2\Delta}{\ell_2^3} \right) \frac{\ell_2}{2} = \frac{6EI_2\Delta}{\ell_2^2}$$

De estas expresiones se puede tener la relación entre los momentos, como se indica enseguida:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{6EI_1\Delta/\ell_1^2}{6EI_2\Delta/\ell_2^2}$$

$$= \frac{I_1/\ell_1^2}{I_2/\ell_2^2}$$

Debe emplearse esta relación para suponer valores de los momentos originados en las columnas de un marco por desplazamiento lateral. Pueden suponerse cualesquiera valores para los momentos, siempre que éstos sean proporcionales a las magnitudes  $I/\ell^2$ . Si los valores de  $I$  y de  $\ell$  fueran iguales, los momentos supuestos tendrían idéntico valor.

En la figura 15.8 se completa el análisis del marco ilustrado en la figura 15.3, utilizando el método del desplazamiento lateral. Primero se calculan en la parte (a) de la figura los valores  $I/l^2$  para cada columna (iguales en este caso). A continuación, en la parte (b), se suponen valores para los momentos producidos por desplazamiento lateral, en proporción a  $I/l^2$ , y se distribuyen a todo el marco, después de lo cual se determinan las componentes horizontales de las reacciones en las bases de las columnas. Se observa entonces que los momentos por ladeo supuestos, de 15 kN·m cada uno, producen reacciones horizontales (hacia la izquierda) que suman 4.60 kN. Como sólo se necesitan 4 kN, si los valores de tales momentos distribuidos se multiplican por la relación  $4.00/4.60 = 0.87$  y dichos productos se suman a los momentos que se distribuyeron originalmente, se tendrán los valores finales de los momentos. Los resultados se muestran en la figura 15.8(c). También se calculan y muestran las reacciones horizontales en las bases de las columnas.

Los ejemplos 15.3 al 15.5 dan las soluciones para problemas adicionales de desplazamiento lateral. Se observará en el ejemplo 15.4 que las bases de las columnas se encuentran articuladas. Dicha condición no altera el método de resolución. Para equilibrar momentos de empotramiento, o momentos por ladeo supuestos, las bases se equilibran a sus valores nulos correctos, como se hizo en las vigas continuas. Los autores emplearon en este ejemplo el factor 3/4 para calcular los factores de rigidez de las columnas.

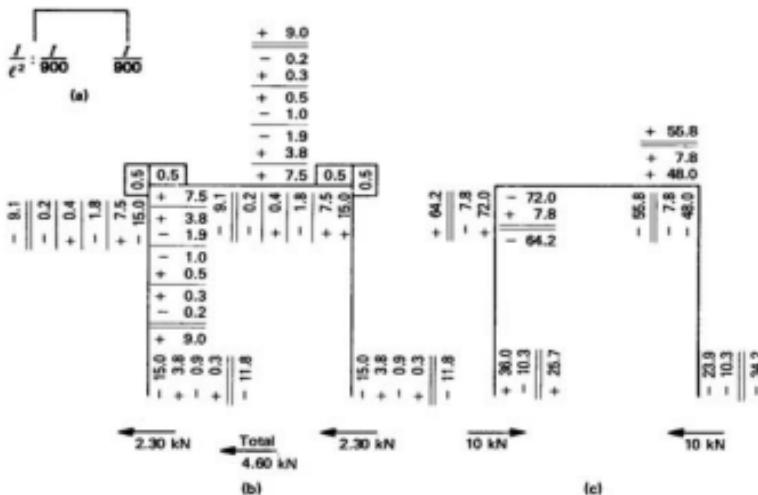


Figura 15.8

**EJEMPLO 15.3**

Calcular todos los momentos en la estructura mostrada en la figura 15.9. Emplee el método del desplazamiento lateral.

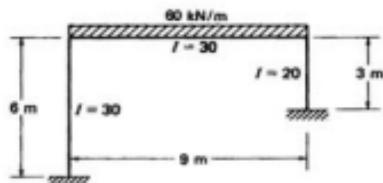


Figura 15.9

*Solución*

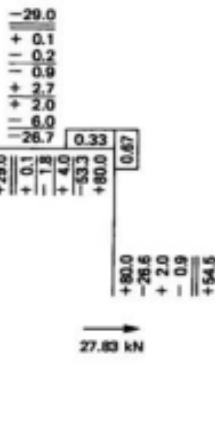
Se distribuyen los momentos de empotramiento y se calculan las reacciones horizontales en las bases de las columnas.

El apoyo imaginario debe proporcionar una fuerza de 94.18 kN hacia la derecha. La eliminación del apoyo permitirá que el marco se desplace lateralmente hacia la izquierda, por lo tanto, se supone que los momentos que actúan en las columnas son de sentido contrario positivo, encontrándose en proporción directa a los valores  $I/\ell^2$ :



$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{I_1/\ell_1^2}{I_2/\ell_2^2}$$

$$= \frac{30/6^2}{20/3^2} = \frac{3}{8}$$



Los momentos supuestos desarrollan reacciones totales de 35.25 kN hacia la derecha; sin embargo, se necesitaron 94.18 kN, por lo cual los valores de esos momentos distribuidos deben multiplicarse por el factor  $94.18/35.25 = 2.67$  y sumar los resultados a los que se obtuvieron inicialmente al distribuir los momentos de empotramiento perfecto.



**EJEMPLO 15.4**

Calcule los momentos finales de extremo en el marco mostrado en la fig. 15.10. Las cifras encerradas en círculos son momentos de inercia (relativos).

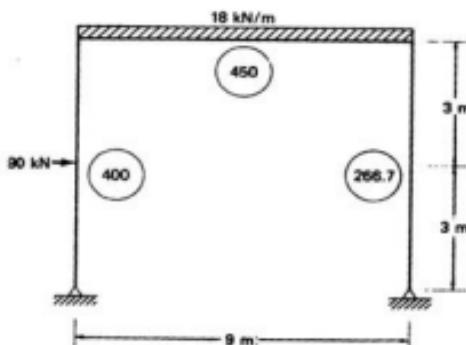
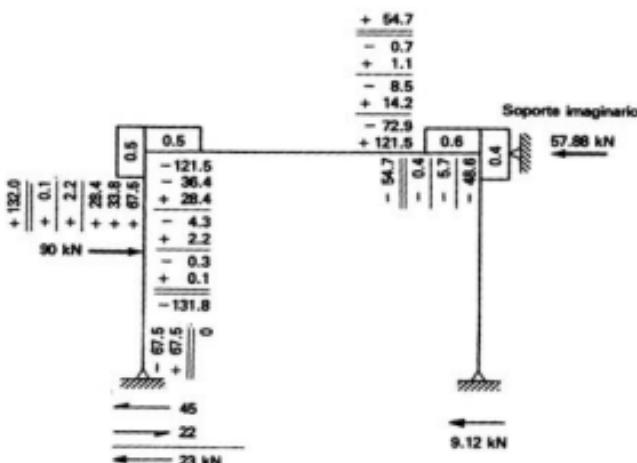


Figura 15.10

*Solución*

Se distribuyen los momentos de empotramiento y se calculan las reacciones horizontales en las bases de las columnas.



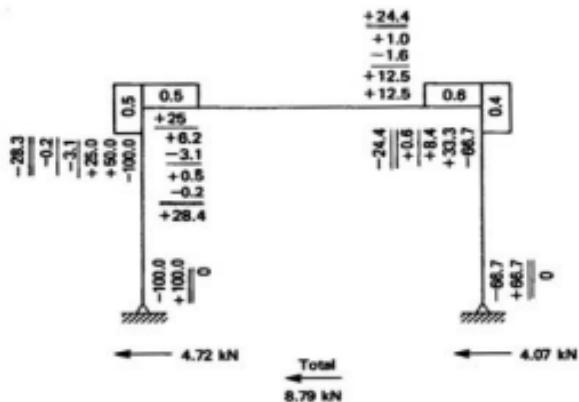
La estructura se desplaza lateralmente hacia la derecha y los momentos de ladeo supuestos son negativos, con las siguientes proporciones:

$$M_1 : M_2$$

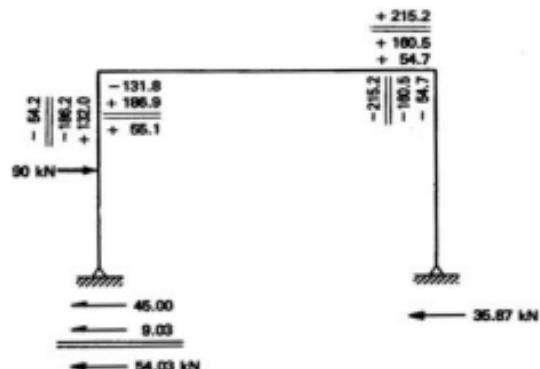
$$\frac{400}{(6)^2} : \frac{266.7}{(6)^2}$$

$$1.00 : 0.667.$$

Distribúyanse ahora los momentos de ladeo supuestos:



Los valores finales de los momentos se obtienen de la suma de los momentos de empotramiento distribuidos, más  $57.88/8.79 (= 6.58)$  veces los momentos distribuidos de ladeo supuestos.



**EJEMPLO 15.5**

Calcular los momentos finales de extremo en el marco mostrado en la fig. 15.11.

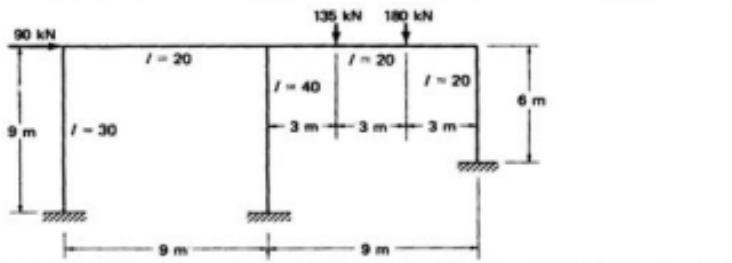


Figura 15.11

**Solución**

Se distribuyen los momentos de empotramiento y se calculan las reacciones horizontales en las bases de las columnas.

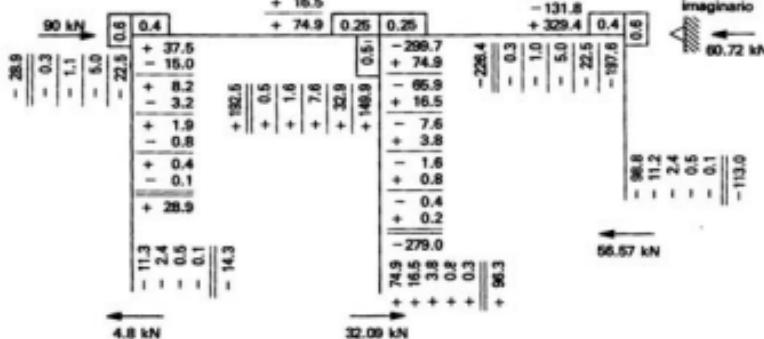
La estructura se desplaza lateralmente hacia la derecha; se suponen entonces momentos negativos en las columnas en proporción a sus valores  $I/\ell^2$ .

$$M_1 : M_2 : M_3$$

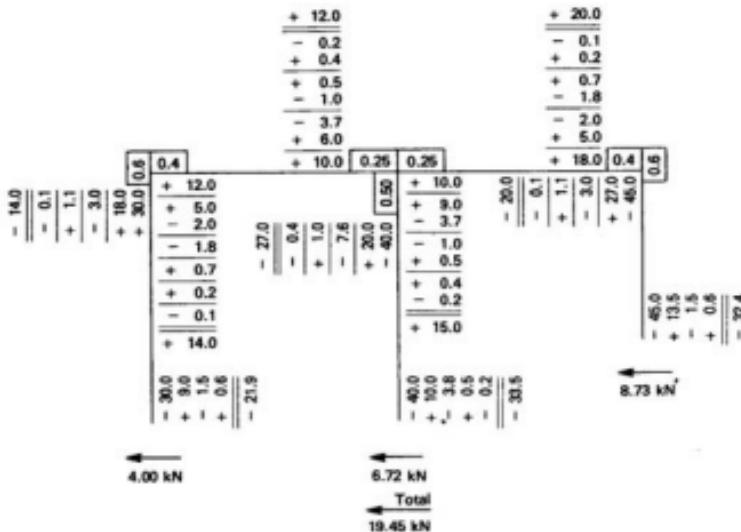
$$\frac{30}{9^2} : \frac{40}{9^2} : \frac{20}{6^2}$$

$$30 : 40 : 45$$

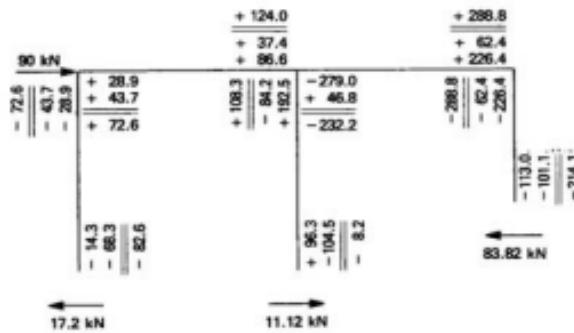
+ 86.6	+ 226.4
- 0.2	- 0.2
+ 0.4	+ 0.4
- 0.8	- 0.8
+ 1.9	+ 1.9
- 3.2	- 3.2
+ 8.2	+ 8.2
- 15.0	- 15.0
+ 37.5	+ 37.5
- 131.8	- 131.8
+ 329.4	+ 329.4



Se distribuyen ahora los momentos de ladeo supuestos.



Momentos finales:



## 15.4 MARCOS CON ELEMENTOS INCLINADOS

Los marcos considerados hasta ahora han estado compuestos de elementos verticales y horizontales. Anteriormente, se demostró en esta sección que cuando en dichos

marcos se presenta el ladeo, en las columnas se producen momentos de empotramiento proporcionales a sus valores  $6EI\Delta/l^2$ . (Como  $6E\Delta$  fue una constante en estos marcos, se consideraron los momentos de empotramiento proporcionales a sus valores  $I/l^2$ .) Además, los desplazamientos laterales no produjeron momentos de empotramiento en las vigas.

El marco de la fig. 15.12, con un elemento inclinado, puede analizarse de modo muy semejante a como se procedió con los marcos de columnas verticales previamente considerados. Los momentos de empotramiento debidos a las cargas externas se calculan y se distribuyen; se determinan las reacciones horizontales (un poco más difícil que en los casos anteriores) así como la fuerza horizontal necesaria en el soporte imaginario.

Puesto que los valores  $\Delta$  normalmente serán distintos en los diferentes elementos, se suponen momentos por ladeo en proporción a los valores  $I\Delta/l^2$ . A continuación se realiza la distribución de los momentos supuestos, se calculan las reacciones horizontales y los momentos necesarios para lograr el equilibrio. Por último, estos valores de momento se superponen a los anteriormente distribuidos.

Para este análisis, considérese el marco de la fig. 15.12(a) y supóngase que se ladea hacia la derecha como se muestra en la parte (b) de la figura. Se puede ver que el movimiento lateral del marco producirá ciertos valores  $\Delta$ , así como momentos tanto en las columnas como en la viga o trabe. Para determinar los valores  $I\Delta/l^2$  para cada elemento es necesario tener los valores  $\Delta$  relativos en cada uno de ellos.

Al desplazarse el marco hacia la derecha, el nudo *B* describe un arco de centro en *A*, en tanto que el nudo *C* lo hace siguiendo un arco cuyo centro está en *D*. Como tales arcos son muy cortos, se considera que son líneas rectas perpendiculares a los elementos respectivos. En vez de desarrollar fórmulas trigonométricas complicadas para determinar los valores relativos de  $\Delta$ , los autores han dibujado apenas los triángulos de desplazamientos en la figura.

La columna *AB* tiene una pendiente de  $6/4.5 = 4/3$ , o sea, la determinada por 4 unidades verticales, 3 unidades horizontales y 5 unidades a lo largo. Si el movimiento relativo del nudo *B* perpendicular a *AB* se supone igual a 5 unidades, su desplazamiento vertical será de 3 y su desplazamiento horizontal será de 4.

El nudo *C* se mueve perpendicularmente a *CD*, es decir, en dirección horizontal. Si se ignora el cambio de longitud del elemento *BC*, el nudo *C* debe desplazarse ho-

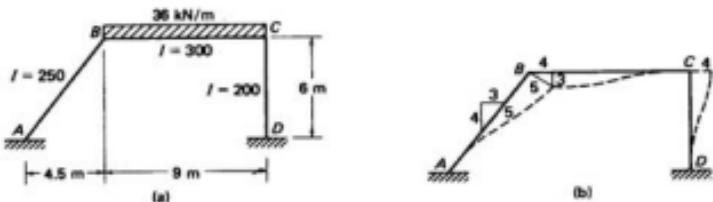


Figura 15.12



Puente I-91 en Lyndon, Vermont. (Cortesía de la Vermont Agency of Transportation.)

horizontalmente la misma distancia que la  $B$ , o sea, 4 unidades. Ahora se dispone de los siguientes valores relativos  $\Delta$ :  $\Delta_{AB} = 5$ , girando en sentido de las manecillas del reloj;  $\Delta_{BC} = 3$ , girando en sentido contrario y  $\Delta_{CD} = 4$ , girando en sentido de las manecillas del reloj. La rotación en sentido de las manecillas del reloj origina un momento resistente negativo, o de sentido contrario. Estos valores se dan al final de este párrafo junto con los valores  $I\Delta/\ell^2$ .

*Valores  $\Delta$  relativos      Momentos relativos de ladeo  $I\Delta/\ell^2$ .*

$$\Delta_{AB} = -5$$

$$M_{AB} = \frac{(250)(-5)}{(25)^2} = -2$$

$$\Delta_{BC} = +3$$

$$M_{BC} = \frac{(300)(+3)}{(30)^2} = +1$$

$$\Delta_{CD} = -4$$

$$M_{CD} = \frac{(200)(-4)}{(20)^2} = -2$$

El ejemplo 15.6 ilustra el análisis del marco de la figura 15.12. El lector deberá estudiar cuidadosamente el método empleado para determinar las reacciones horizontales en las bases de las columnas. Cada columna se consideró como cuerpo libre en los ejemplos anteriores de análisis con desplazamiento lateral, y la reacción horizontal en su base se determinó tomando momentos respecto a su parte superior.

La columna izquierda  $AB$  del marco del ejemplo 15.6 se considera como cuerpo libre, después de que se han distribuido los momentos de empotramiento que se muestran en la figura 15.13. Al tomar los momentos respecto a  $B$  para determinar  $H_A$ , resulta la siguiente ecuación:

$$80.9 + 161.9 + 4.5V_A - 6H_A = 0$$



Figura 15.13

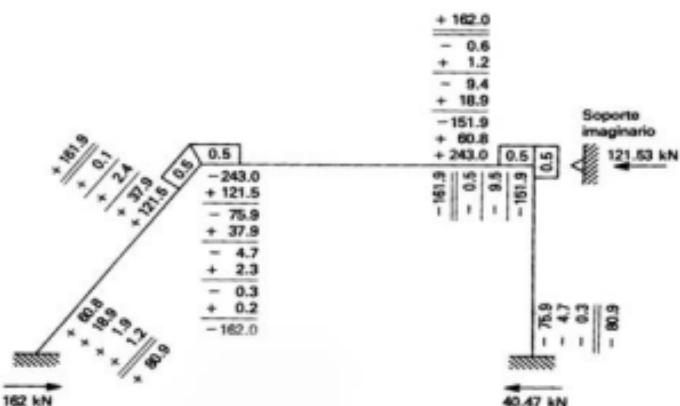
Obsérvese que es necesario calcular  $V_A$  antes de poder encontrar el valor de  $H_A$ . Los autores recomiendan considerar la viga como cuerpo libre y evaluar la reacción vertical aplicada por las columnas a cada uno de sus extremos. Una vez determinado el valor de esa reacción en  $B$ , la suma de fuerzas verticales sobre la columna  $AB$  se iguala a cero, pudiéndose así determinar  $V_A$ . Se sigue el mismo procedimiento, después de haber realizado la distribución de los momentos originados por desplazamiento lateral.

### EJEMPLO 15.6

Determinar los momentos finales de extremo en el marco mostrado en la fig. 15.12.

*Solución*

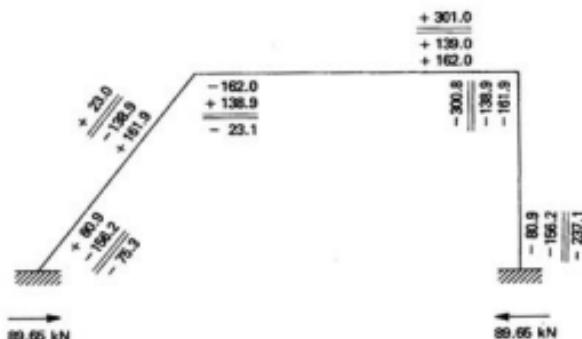
Distribúyanse los momentos de empotramiento:



Distribúyanse los momentos de ladeo supuestos.



Momentos finales:



En la figura 15.14 se presenta otro ejemplo de la determinación de valores  $\Delta$  relativos para el caso de un marco con columnas inclinadas. Considerando las cantidades indicadas inicialmente en los triángulos de deformación, el nudo  $B$  se desplaza 3 unidades a la derecha, y el  $C$ , 4 unidades también hacia la derecha, debiendo ser idénticos los desplazamientos horizontales de estos dos nudos. Por tal razón, se tachan los valores iniciales correspondientes a  $C$  y se multiplican por  $3/4$  para que sean iguales las componentes horizontales de los desplazamientos. Los valores resultantes se muestran en la misma figura.

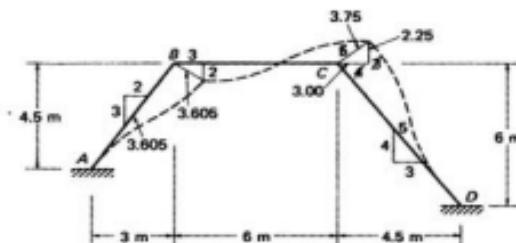


Figura 15.14

*Valores  $\Delta$  relativos*

$$\Delta_{AB} = -3.605$$

$$\Delta_{BC} = +4.25$$

$$\Delta_{CD} = -3.75$$

## 15.5 MARCOS DE MUCHOS NIVELES

El marco de la figura 15.15 puede desplazarse lateralmente de dos maneras posibles. Obviamente, las cargas  $P_1$  y  $P_2$  harán que ambos pisos se ladeen hacia la derecha, pero no se sabe la magnitud del desplazamiento en el piso superior (condición  $x$ ), o su valor para el piso inferior (condición  $y$ ). Es necesario entonces considerar dos condiciones de desplazamiento lateral.

Para analizar el marco mediante el procedimiento normal para desplazamiento lateral se necesita (1) suponer valores de los momentos en el piso superior para la condición  $x$ , así como la distribución de estos momentos en toda la estructura y (2) suponer valores de los momentos en el piso inferior para la condición  $y$ , así como

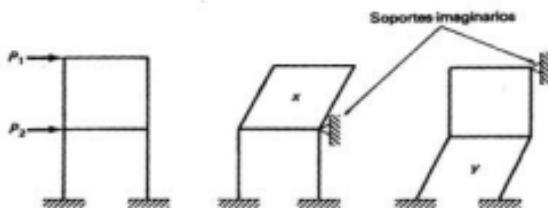


Figura 15.15

su distribución en todo el marco. Se podría escribir una ecuación para el piso superior igualando la suma del producto de  $x$  por las fuerzas horizontales originadas por los momentos de condición  $x$ , y el de  $y$  por las fuerzas horizontales producidas por los momentos de condición  $y$ , a la fuerza cortante total en este piso,  $P_1$ . Después, se formula una ecuación semejante para el piso inferior igualando las fuerzas horizontales producidas por los momentos supuestos, a la fuerza cortante en este piso,  $P_1 + P_2$ . La solución simultánea de ambas ecuaciones daría, entonces, los valores de  $x$  y de  $y$ . Los valores finales de los momentos en el marco serían la suma del producto de  $x$  por los momentos distribuidos según  $x$ , y el de  $y$  por los momentos distribuidos según  $y$ .

El método del desplazamiento lateral no es difícil de aplicar a un marco de dos pisos; pero en los marcos que tengan más de dos, lo anterior se vuelve más difícil, pues cada piso adicional presenta una condición de desplazamiento lateral también adicional, y por tanto, una ecuación simultánea más.

El profesor C.T. Morris, de la Ohio State University, ideó un método mucho más sencillo para analizar marcos de muchos pisos, el cual implica una serie de correcciones sucesivas [1]. Su método también se basa en la fuerza cortante horizontal total en cada nivel de un edificio. Al considerar el marco de la fig. 15.16(a), que es desplazado lateralmente por las cargas  $P_1$  y  $P_2$ , se supone que cada columna toma la forma aproximada de una  $S$ , como se muestra en (b) de la misma figura.

Se supone que a la mitad de la altura de la columna existe un punto de inflexión. Puede considerarse que la columna consta de un par de vigas en voladizo, una arriba del punto y otra abajo como se muestra en (c). El momento en cada voladizo será igual a la fuerza cortante multiplicada por  $h/2 = Vh/2$ , y el momento total arriba y abajo es igual a  $Vh/2 + Vh/2 = Vh$ . El momento total en una columna debe ser igual a la fuerza cortante tomada por la columna multiplicada por la altura de la misma.

Similamente, en cualquier nivel los momentos totales arriba y abajo de todas las columnas deben ser iguales a la fuerza cortante total en ese nivel, multiplicada por la altura de la columna. El método consiste en tomar inicialmente este valor total para los momentos en las columnas de un piso y distribuirlo entre éstas, en proporción directa a sus valores  $I/l^2$ . El momento tomado por cada columna se divide luego en partes iguales de la mitad hacia arriba y de la mitad hacia abajo.

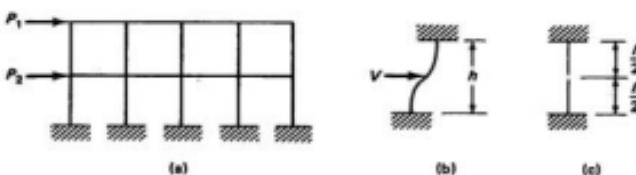


Figura 15.16



Edificio del World Trade Center, Cd. de México. (Cortesía de RSI.)

Se equilibran los nudos, incluyendo los momentos de empotramiento, pero sin hacer ninguna transmisión de éstos, sino hasta que todos los nudos se hallen en equilibrio. Los momentos en las columnas se corrigen a sus valores totales de principio y final, equilibrando de nuevo los nudos. Las correcciones sucesivas funcionan excepcionalmente bien en los marcos de muchos pisos, como se ilustra en los ejemplos 15.7 y 15.8. El procedimiento empleado es el siguiente:

1. Calcular los momentos de empotramiento perfecto.
2. Calcular los momentos totales en las columnas (igual a la fuerza cortante en cada piso multiplicada por la altura de la columna) en cada nivel y distribuirlos entre todas las columnas, proporcionalmente a sus valores  $I/\ell^2$ , dividiéndolos entre dos, de la mitad hacia arriba y de la mitad hacia abajo.
3. Equilibrar todos los nudos de la estructura, pero sin transportar ningún momento.
4. Transportar los momentos en toda la estructura.
5. Los momentos totales de columna en cada nivel han cambiado, por lo que ahora son diferentes al producto de la fuerza cortante por la altura de la columna en cada piso. Determinese la diferencia y súmese o restese a las columnas, en proporción a sus valores  $I/\ell^2$ .
6. Repetir los pasos 3 al 5 una y otra vez, hasta que sea insignificante la magnitud de las correcciones.

#### EJEMPLO 15.7

Determinar los momentos finales en la estructura mostrada en la fig. 15.17. Emplee el método de las correcciones sucesivas desarrollado por el profesor Morris.

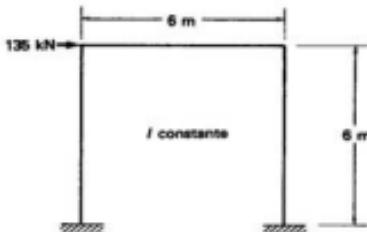


Figura 15.17

*Solución***EJEMPLO 15.8**

Determine los momentos finales en el marco del ejemplo 13.7 reproducido en la figura 15.18; emplee el método de las correcciones sucesivas.

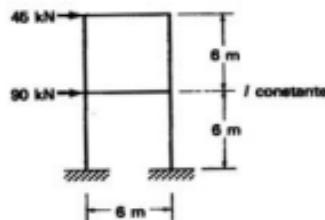


Figura 15.18

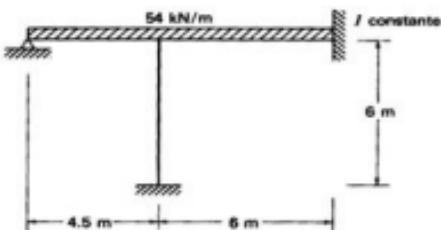
**Solución****15.6 SOLUCIONES CON LA COMPUTADORA**

El disco proporcionado con este libro y descrito en el capítulo 20, permitirá al lector analizar con prontitud todas las estructuras consideradas en este capítulo.

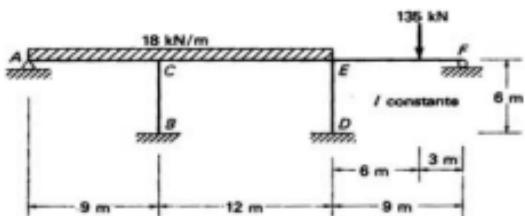
**PROBLEMAS**

En los problemas 15.1 al 15.6 equilibre los momentos y calcule las reacciones horizontales en las bases de las columnas.

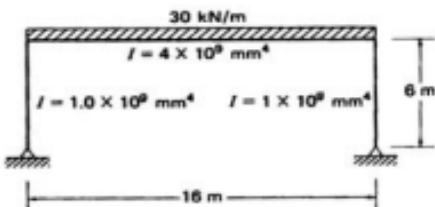
## 15.1



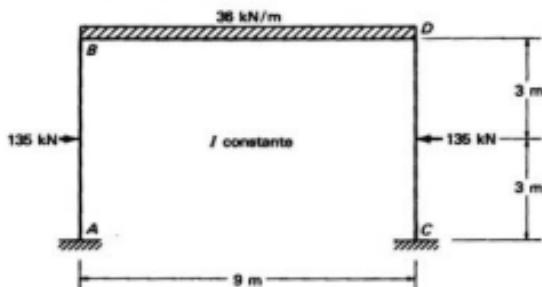
15.2 (Resp.:  $M_B = 9.71 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_{CA} = 191.96 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_D = 10.21 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $H_B = 4.86 \text{ kN} \rightarrow$ )



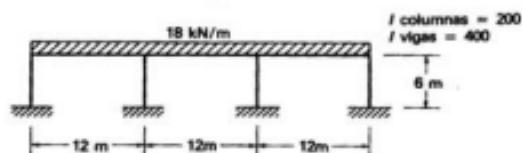
## 15.3



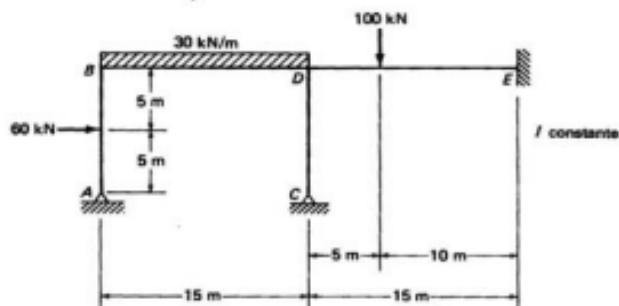
15.4 (Resp.:  $M_A = M_C = 48.09 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = M_D = 207.56 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $H_A = 40.92 \text{ kN}$  ←)



15.5



15.6 (Resp.:  $M_B = 389.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_{DB} = 537.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_E = 36.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

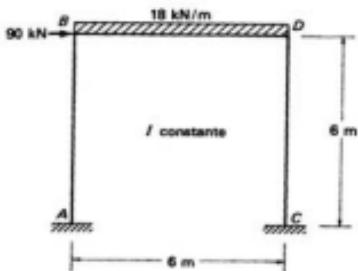
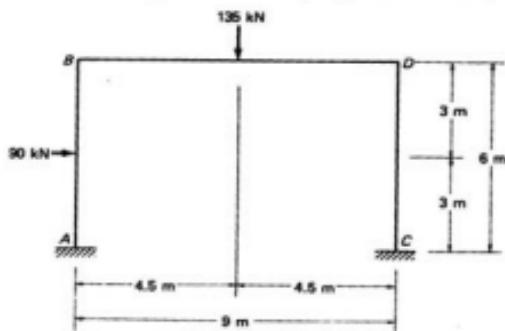


En los problemas 15.7 al 15.20, determine los momentos finales con el método de los desplazamientos laterales.

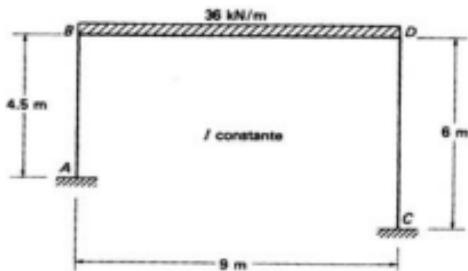
450

15/Distribución de momentos; marcos continuos

15.7

15.8 (Resp.:  $M_A = 97.45 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = 95.34 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_D = 149.34 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

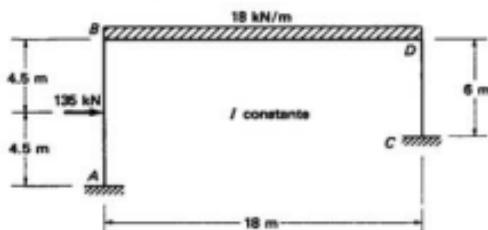
15.9



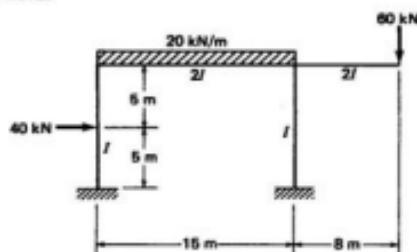
**15.10** Repita el problema 15.8 considerando que las bases de las columnas están articuladas.  
 (Resp.:  $M_B = 14.28 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_D = 255.72 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

**15.11** Repita el problema 15.7 considerando que la columna  $CD$  está articulada en la base.

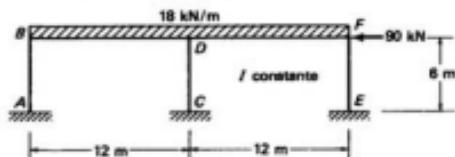
**15.12** (Resp.:  $M_A = 30.63 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = 411.82 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_D = 426.33 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



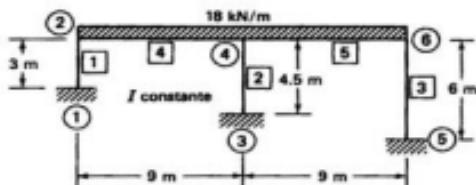
**15.13**



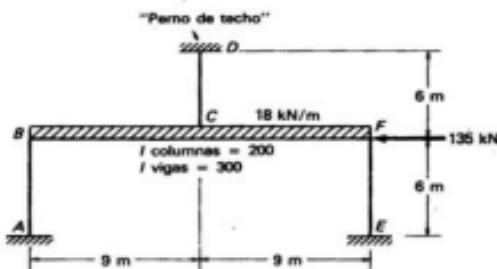
**15.14** (Resp.:  $M_A = 174.86 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = 201.86 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_{DF} = 203.79 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_E = 30.86 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



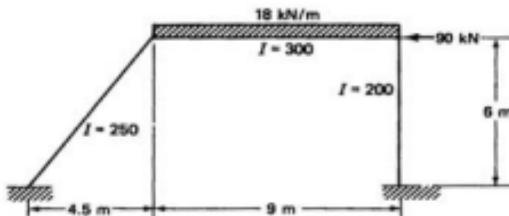
15.15.



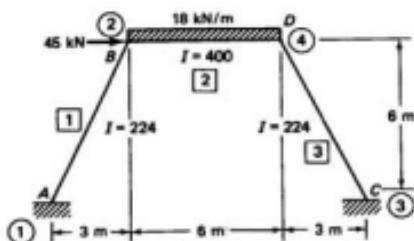
15.16 (Resp.:  $M_A = 199.12 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_{CD} = 112.49 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_D = 180.00 \text{ kN}$ ,  $M_E = 138.37 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



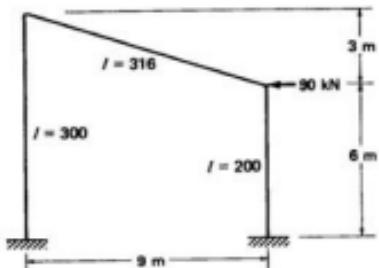
15.17



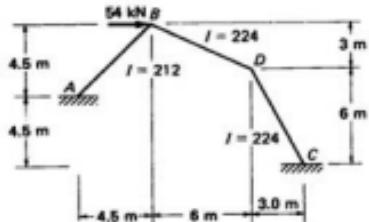
- 15.18 (Resp.:  $M_A = 28.39 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = 19.52 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C = 55.41 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_D = 73.57 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



15.19



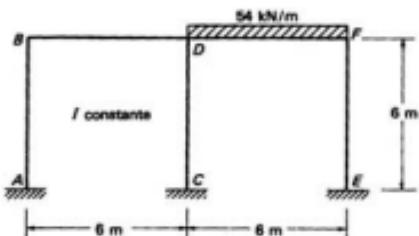
- 15.20 (Resp.:  $M_A = 25.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = 28.34 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_C = 32.69 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_D = 31.84 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



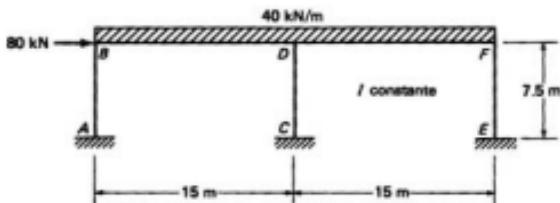
En los problemas 15.21 al 15.27, analice las estructuras indicadas empleando el método de las correcciones sucesivas.

15.21 Repita el problema 15.7.

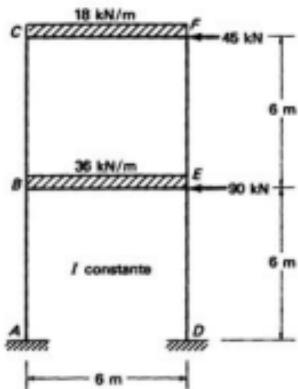
- 15.22 (Resp.:  $M_A = 2.53 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = 10.12 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_{DF} = 144.28 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_F = 91.12 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



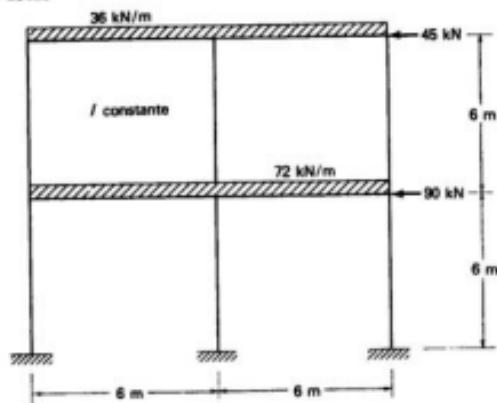
15.23



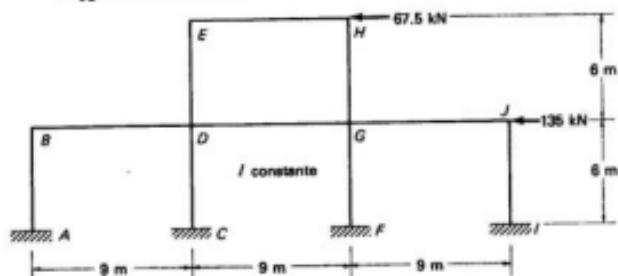
- 15.24 (Resp.:  $M_{BA} = 203.85 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_{BE} = 299.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_{CF} = 129.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_{ED} = 126.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



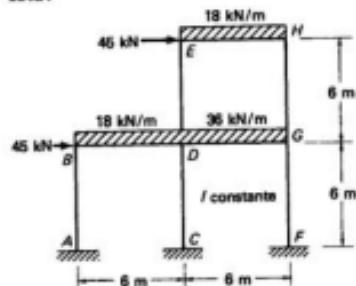
15.25



15.26 (Resp.:  $M_A = 176.85 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B = 48.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_{DC} = 126.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_{JG} = 116.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )



15.27



**REFERENCIA BIBLIOGRAFICA**

C. T. Morris, "Morris on Analysis of Continuous Frames", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 96 (1932): págs. 66-69.

# Introducción a métodos matriciales

### **16.1 ANALISIS ESTRUCTURAL USANDO LA COMPUTADORA**

Durante las últimas décadas han ocurrido grandes cambios en los métodos de análisis estructural usados en la práctica de la ingeniería. Estos cambios han ocurrido, principalmente, gracias al desarrollo de computadoras digitales de gran velocidad y al uso creciente de estructuras muy complejas. Los métodos matriciales de análisis proporcionan un lenguaje matemático muy adecuado para la descripción de estructuras muy complejas y las necesarias operaciones matriciales pueden ser ejecutadas fácilmente por las computadoras.

El costo cada vez menor de las microcomputadoras ha acelerado esta tendencia y ha permitido que en casi toda oficina de cálculo se disponga de una capacidad impresionante de equipo de cálculo. Por ello es muy importante, que todos los estudiantes de ingeniería estructural aprendan los fundamentos del análisis por computadora y puedan conocer tanto los puntos fuertes como los débiles de este tipo de análisis.

El análisis estructural por computadora no implica la adición de conceptos nuevos de ingeniería estructural. Sin embargo, la organización del trabajo debe ser versátil y precisa. La computadora es capaz de realizar operaciones aritméticas en forma extraordinaria, pero sólo puede efectuar aquellas que sean descritas por medio de instrucciones simples, precisas y sin ambigüedades. En los capítulos siguientes los autores han intentado explicar cómo organizar los problemas de análisis estructural para poder usar la computadora en su solución, así como la manera de escribir las instrucciones que permitan a la computadora resolver una gran cantidad de problemas propuestos por el proyectista.

### **16.2 METODOS MATRICIALES**

Durante muchos años, los ingenieros de estructuras intentaron resolver problemas de análisis estructural mediante la aplicación de los métodos matemáticos del álge-



Puente del paso a desnivel Cold Springs (US 395), al norte de Reno, Nevada.  
(Cortesía del Departamento de Transporte de Nevada.)

bra lineal. Aun cuando muchas estructuras pudieron analizarse en tal forma, el trabajo fue tan tedioso que resultó impráctico, hasta que estuvieron disponibles las calculadoras o computadoras de gran capacidad. Las ecuaciones matriciales usuales no pueden ser procesadas por calculadoras de bolsillo, a menos que se trate de estructuras muy sencillas.

Actualmente, el análisis matricial (usando computadoras) está reemplazando cada vez más a los métodos clásicos de análisis en los despachos de cálculo. En vista de esto, los profesores de ingeniería y los autores de libros de texto sobre análisis estructural se encuentran frente a una decisión difícil. ¿Deben exigir un estudio completo de los métodos clásicos seguido de un estudio de los métodos matriciales? ¿Deben exigir que sus alumnos aprendan ambos métodos al mismo tiempo? o ¿Deben enseñar sólo los métodos modernos? Se podrá ver, por lo expuesto en los capítulos precedentes, que los autores consideran que un estudio inicial de algunos de los métodos clásicos seguido de un estudio de los métodos matriciales, formará ingenieros con un mejor entendimiento del comportamiento estructural.

Cualquier método de análisis que implique resolver ecuaciones algebraicas lineales, puede formularse en notación matricial y emplear para su solución opera-

ciones con matrices. La posibilidad de la aplicación de los métodos matriciales por el ingeniero de estructuras es muy importante, ya que todas las estructuras linealmente elásticas, isostáticas o hiperestáticas están regidas por los sistemas de ecuaciones lineales.

Los ejemplos numéricos que se presentan en los próximos capítulos podrían resolverse más rápidamente por medio de los métodos clásicos usando una calculadora de bolsillo, en vez de utilizar un procedimiento matricial. Sin embargo, en estructuras más complejas y cuando se tienen que considerar múltiples condiciones de carga, los métodos matriciales muestran, entonces, su gran utilidad y superioridad sobre los métodos clásicos.

### **16.3 REPASO DEL ALGEBRA MATRICIAL**

Los estudiantes de ingeniería tienen algunos conocimientos de álgebra matricial; sin embargo, si lo considera necesario, debe estudiar las secciones sobre álgebra matricial que se presentan en el apéndice B de este libro.

### **16.4 METODOS DE LAS FUERZAS Y DE LOS DESPLAZAMIENTOS DE ANALISIS**

Los métodos presentados en los capítulos anteriores para analizar estructuras estáticamente indeterminadas, pueden agruparse en dos tipos generales. Estos son los métodos de las fuerzas y los métodos de los desplazamientos. Ambos métodos se han desarrollado a un grado tal que pueden aplicarse a prácticamente cualquier estructura, como armaduras, vigas, marcos, placas, cascarones, etc. Sin embargo, en la actualidad los métodos de los desplazamientos se usan más ampliamente, debido a que pueden programarse con mayor facilidad para su implementación en las computadoras (como se verá en el capítulo 17). Estos dos métodos de análisis, que se analizaron previamente en la sección 11.1, se redefinirán aquí, ya que consideramos que el material presentado en los últimos capítulos permitirá al lector entender mejor las definiciones.

**Método de las fuerzas.** En este *método*, llamado también de las *flexibilidades* o de las *compatibilidades*, las redundantes se escogen y eliminan de la estructura, de modo que quede una estructura estáticamente determinada. Se plantea una ecuación de compatibilidad de deformaciones en cada sección de la que se ha excluido una redundante. Estas ecuaciones se escriben en términos de las redundantes y de las ecuaciones resultantes se especifican los valores numéricos de éstas. Una vez conocidas las redundantes, las fuerzas internas restantes pueden determinarse por medio de la estática.

**Método de los desplazamientos.** En este *método*, llamado también de la *rigidez* o del *equilibrio*, los desplazamientos de los nudos, necesarios para describir total-

mente la forma deformada de la estructura, se usan en un conjunto de ecuaciones simultáneas. Después de resolver estas ecuaciones y determinar los desplazamientos, éstos se sustituyen en las relaciones fuerza-deformación de cada elemento para determinar las diversas fuerzas o momentos internos. El método pendiente-deflexión (capítulo 13) es un método de desplazamientos.

Obsérvese que el número de incógnitas en el método de los desplazamientos es generalmente mucho mayor que el número de incógnitas en el método de las fuerzas. A pesar de ello, el método de los desplazamientos es de gran importancia porque, como se verá, es el método matricial que puede programarse más fácilmente para un uso general. Por ello, sólo el capítulo 16 se dedica al método de las fuerzas, en tanto que el resto del libro se dedica al método de los desplazamientos.

### **16.5 INTRODUCCION AL METODO DE LAS FUERZAS O DE LAS FLEXIBILIDADES**

Este método es, en realidad, el método de las deformaciones compatibles (descrito previamente en el capítulo 11) con un formato matricial. A continuación se indican los pasos necesarios para analizar una estructura estáticamente indeterminada:

1. Se escoge un número suficiente de redundantes y se eliminan de la estructura, resultando ésta estáticamente determinada. La estructura que queda, llamada la *estructura primaria*, debe ser estable.

2. Se analiza la estructura primaria para determinar las deformaciones en el lugar y en la dirección de las redundantes eliminadas.

3. Se aplica una carga unitaria a la estructura primaria en el punto y en la dirección de una de las redundantes y se determina la deflexión en esa redundante y en todas las demás. Por ejemplo, la deflexión debida a una carga unitaria en el punto 1 se calcula y se designa  $\delta_{1,1}$ ; la deflexión en el punto 2, debida a una carga unitaria en el punto 1 se designa  $\delta_{2,1}$ , etc. Se repite este mismo procedimiento, aplicando una carga unitaria en cada una de las localidades de las demás redundantes.

Los desplazamientos debidos a una carga unitaria se denominan *coeficientes de flexibilidad*. El desplazamiento real en el nudo 1, debido a la redundante  $R_1$ , es  $R_1$  veces la deflexión causada por una carga unitaria actuando en ese lugar, o sea,  $R_1 * \delta_{1,1}$ ; el desplazamiento en el nudo 2 debido a  $R_1$  es igual a  $R_1 * \delta_{2,1}$ , etc.

4. Por último, se escriben ecuaciones simultáneas de deformación compatible en cada localidad de las redundantes. Las incógnitas en esas ecuaciones son las fuerzas redundantes. Las ecuaciones se escriben en forma matricial y entonces se despejan las redundantes.

Para ilustrar este procedimiento consideraremos la viga de cuatro claros mostrada en la fig. 16.1. Esta viga es estáticamente indeterminada de tercer grado y las tres reacciones  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , en los apoyos se han escogido como redundantes; en la parte (b) de la figura, estas reacciones se han suprimido de la estructura. Las cargas externas ocasionan que la viga se deflexione hacia abajo con los valores  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  y  $\delta_3$ , como se muestra en la figura.

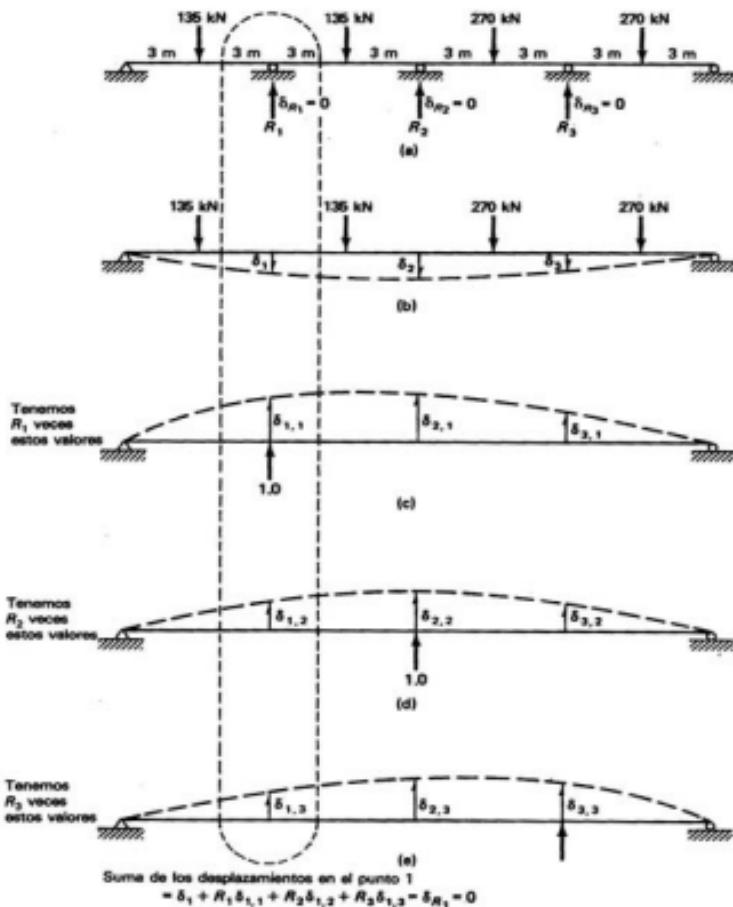


Figura 16.1

En la fig. 16.1(c) se aplica una carga unitaria en el punto 1 actuando hacia arriba. Esta produce deflexiones hacia arriba en los puntos 1, 2 y 3, respectivamente, iguales a  $\delta_{1,1}$ ,  $\delta_{2,1}$  y  $\delta_{3,1}$ . Análogamente, en las partes (d) y (e), se aplican cargas unitarias

hacia arriba en los puntos 2 y 3, respectivamente, y se determinan las deflexiones en los tres puntos de aplicación de las redundantes.

Se escriben a continuación ecuaciones para las deflexiones totales en cada uno de los puntos asociados con las redundantes. Puede verse que esas ecuaciones estarán expresadas en términos de todas las redundantes. Esto significa que cada una afecta el desplazamiento asociado con cada una de las otras redundantes.

Ahora podemos escribir una expresión para la deflexión en cada uno de los nudos. Aquí  $\delta_{R_1}$ , es la deflexión total en el punto 1,  $\delta_{R_2}$  es la deflexión total en 2, etc. Como esta viga sólo tiene apoyos rígidos, cada uno de estos valores son iguales a cero.

$$\begin{aligned}\delta_1 + \delta_{1,1}R_1 + \delta_{1,2}R_2 + \delta_{1,3}R_3 &= \delta_{R_1}, \\ \delta_2 + \delta_{2,1}R_1 + \delta_{2,2}R_2 + \delta_{2,3}R_3 &= \delta_{R_2}, \\ \delta_3 + \delta_{3,1}R_1 + \delta_{3,2}R_2 + \delta_{3,3}R_3 &= \delta_{R_3},\end{aligned}\quad (16.1)$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{ccc} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \delta_{1,3} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} \\ \delta_{3,1} & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \delta_{R_1} \\ \delta_{R_2} \\ \delta_{R_3} \end{array} \right\} \quad (16.2)$$

Estas ecuaciones expresan el hecho de que los desplazamientos debidos a las cargas, más la matriz de flexibilidades multiplicada por las redundantes, es igual a la deflexión final en los apoyos. Esta ecuación puede escribirse en forma compacta como se detalla a continuación.

$$\{\delta_L\} + [F]\{R\} = \{\delta_R\} \quad (16.3)$$

en donde

- $\{\delta_L\}$  es un vector de desplazamientos debido a las cargas impuestas
- $[F]$  es una matriz de coeficientes de flexibilidad
- $\{R\}$  es un vector de fuerzas redundantes
- $\{\delta_R\}$  es un vector de deflexiones finales en los apoyos, (todos iguales a cero aquí)

Esta ecuación puede escribirse en una forma un poco distinta y resolverse para las redundantes:

$$\{R\} = [F]^{-1}(\{\delta_R\} - \{\delta_L\}) \quad (16.4)$$

El símbolo  $[F]^{-1}$  representa la inversa de la matriz  $[F]$ . Su valor puede encontrarse por medio de un procedimiento matemático descrito en el apéndice B. Sin embargo,

en la mayoría de los problemas prácticos, no se calcula explícitamente la inversa, sino que el conjunto de ecuaciones algebraicas se resuelve simultáneamente por medio de algún otro procedimiento, por ejemplo, por el método de Gauss. El símbolo de la matriz inversa continuará usándose en este libro para representar simbólicamente la solución del conjunto de ecuaciones algebraicas.

En el ejemplo 16.1, se determinan las reacciones redundantes para la viga de la fig. 16.1. En este problema es necesario calcular tres deflexiones en los apoyos y nueve coeficientes de flexibilidad. Estos cálculos tediosos, que pueden efectuarse por medio de métodos presentados antes en este libro, no se muestran aquí. La aplicación del teorema de Maxwell de las deflexiones reciprocas  $\delta_{1,2} = \delta_{2,1}$ ,  $\delta_{1,3} = \delta_{3,1}$  y  $\delta_{2,3} = \delta_{3,2}$ . Además, por simetría, en esta viga en particular se tiene que  $\delta_{1,1} = \delta_{3,3}$ .

### EJEMPLO 16.1

Determine los valores de las reacciones  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  en la viga continua de la fig. 16.1 usando el método matricial de las flexibilidades.

*Solución:*

Las deflexiones siguientes se determinaron con el método de la viga conjugada del capítulo 8:

$$\delta_1 = -\frac{103,275}{EI} \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

$$\delta_2 = -\frac{149,445}{EI} \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

$$\delta_3 = -\frac{109,957.5}{EI} \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

$$\delta_{1,1} = \frac{162}{EI} \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \frac{198}{EI} \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

$$\delta_{1,3} = \delta_{3,1} = \frac{126}{EI} \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

$$\delta_{2,2} = \frac{288}{EI} \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

$$\delta_{2,3} = \delta_{3,2} = \frac{198}{EI} \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

$$\delta_{3,3} = \frac{162}{EI} \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

Las ecuaciones son entonces:

$$\frac{1}{EI} [-103\ 275 + 162R_1 + 198R_2 + 126R_3] = 0$$

$$\frac{1}{EI} [-149\ 445 + 198R_1 + 288R_2 + 198R_3] = 0$$

$$\frac{1}{EI} [-109\ 957.5 + 126R_1 + 198R_2 + 162R_3] = 0$$

En notación matricial se tiene:

$$\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 162 & 198 & 126 \\ 198 & 288 & 198 \\ 126 & 198 & 162 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 103\ 275 \\ 149\ 445 \\ 109\ 957.5 \end{Bmatrix}$$

La solución del sistema es:

$$R_1 = 146.83 \text{ kN} \uparrow$$

$$R_2 = 171.50 \text{ kN} \uparrow$$

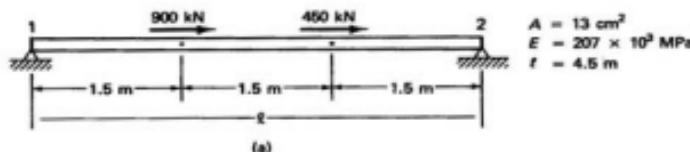
$$R_3 = 331.94 \text{ kN} \uparrow$$

■ ■

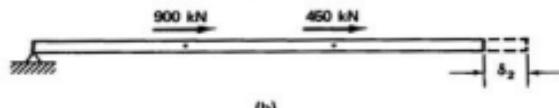
En el ejemplo 16.2, sólo se consideran deformaciones axiales para simplificar los cálculos numéricos. Problemas parecidos se resolverán con el método de la rigidez en el capítulo 17.

### EJEMPLO 16.2

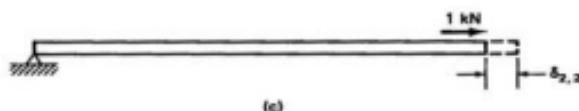
La estructura mostrada en la fig. 16.2(a) está cargada con fuerzas axiales en secciones intermedias. Determine las reacciones en los apoyos.



(a)



(b)



(c)

**Solución:**

Consideraremos en este problema la reacción en el extremo 2 como la redundante. Cuando se suprime esta reacción, la estructura primaria que resulta se muestra en la fig. 16.2(b). En la fig. 16.2(c) se aplica una carga unitaria a la estructura primaria. Los siguientes coeficientes de desplazamiento se calculan con ayuda de las relaciones básicas de la Resistencia de Materiales:

$$\delta_2 = \frac{1}{AE} \left( \frac{t}{3} \right) + \frac{450}{AE} \left( \frac{t}{3} \right) = \frac{(1350)(1.5)}{(13 \times 10^{-6})(207 \times 10^6)} + \frac{(450)(1.5)}{(13 \times 10^{-6})(207 \times 10^6)} = 0.01 \text{ m}$$

$$\delta_{2,2} = 1 \left( \frac{t}{AE} \right) = \frac{1(4.5)}{(13 \times 10^{-6})(207 \times 10^6)} = 1.67 \times 10^{-5} \text{ m}$$

La reacción en el extremo 2 se calcula con una ecuación similar a la 16.1:

$$\delta_2 + \delta_{2,2}R_2 = \delta_{R2} = 0$$

$$R_2 = - \frac{0.01}{1.67 \times 10^{-5}} = - 598 \text{ kN}$$

La reacción en el extremo 1 se determina luego por medio de una relación de equilibrio:

$$\Sigma F_x = R_1 + 900 + 450 + R_2 = 0$$

$$R_1 = - 752 \text{ kN}$$

■ ■

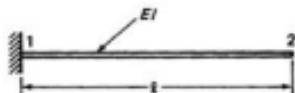
Una dificultad inherente al método de las fuerzas es que se debe saber de antemano cuántas redundantes tiene la estructura por analizarse. Además el proyectista debe escoger los elementos o reacciones que se usarán como redundantes. La elección de redundantes, que no es única, puede afectar la dificultad asociada con la solución del problema. Sin embargo, con el método de la rigidez, que se verá en el capítulo 17, es mucho más fácil preparar un programa general aplicable a todos los tipos de estructuras isostáticas o hiperestáticas.

Un análisis más amplio del método de las fuerzas no se incluye en este libro, porque la tendencia presente del análisis estructural es emplear principalmente el método de la rigidez. Sería posible ampliar el método de las fuerzas descrito aquí, para incluir otros temas como el desarrollo de los coeficientes de flexibilidad usando métodos matriciales, la consideración de tipos diferentes de estructuras, etc. El lector interesado en tales temas puede consultar el libro de Gere y Weaver [1], en el que se describe el método con todo detalle.

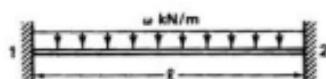
## PROBLEMAS

- 16.1 Encuentre los coeficientes de flexibilidad asociados con las cargas aplicadas en el nudo 2, o sea, encuentre los coeficientes de la matriz  $[F]$  en la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [F] \begin{Bmatrix} Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$



- 16.2 Empieze el método de las flexibilidades para determinar las reacciones en el nudo 2 de la viga doblemente empotrada que soporta una carga distribuida de manera uniforme. (Sugerencia: Utilice los coeficientes de flexibilidad encontrados en el problema 16.1).

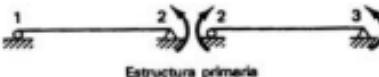
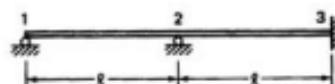


$$Resp.: Y_2 = \frac{wf}{2}$$

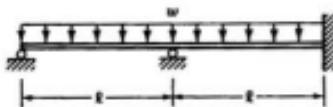
$$M_2 = -\frac{wf^2}{12}$$

- 16.3 Determine los coeficientes de flexibilidad asociados con la viga continua mostrada para este problema. Use los momentos en los nudos 2 y 3 como las redundantes; la estructura primaria aparecerá entonces como dos vigas simplemente apoyadas, como se muestra en la figura adyacente. Los coeficientes de flexibilidad serán parte de la matriz  $[F]$  en la ecuación matricial:

$$\begin{Bmatrix} \theta_{2,1} - \theta_{2,3} \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = [F] \begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$



- 16.4 Use el método de las flexibilidades para encontrar los momentos internos en los nudos 2 y 3 en la viga continua mostrada. La viga está cargada uniformemente en toda su longitud. (Sugerencia: Use los coeficientes de flexibilidad determinados en el problema 16.3.)



$$\text{Resp.: } M_2 = -\frac{3}{28} wL^2$$

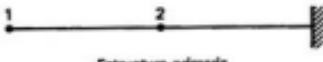
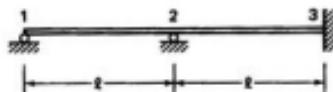
$$M_3 = -\frac{2}{28} wL^2$$

- 16.5 Use los coeficientes de flexibilidad encontrados en el problema 16.3 para determinar los momentos en los nudos 2 y 3, en la viga continua cargada con una carga concentrada como se muestra.



- 16.6 Determine los coeficientes de flexibilidad en la viga continua mostrada. Escoja las reacciones en los nudos 1 y 2 como redundantes; la estructura primaria se muestra en la figura adyacente. Encuentre  $[F]$  en la ecuación:

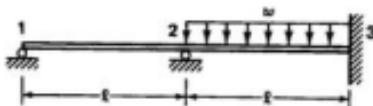
$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = [F] \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix}$$



$$\text{Resp.: } \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{\ell^3}{6EI} \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix}$$

- 16.7 Calcule las reacciones en los nudos 1 y 2 de la viga continua mostrada en el problema 16.6, suponiendo que actúa sobre ella una carga uniformemente repartida en toda su longitud, como se muestra en el problema 16.4.

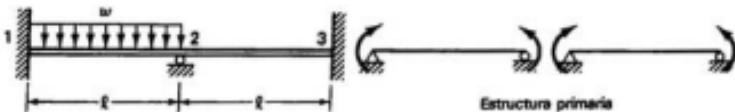
16.8 Calcule las reacciones en los nudos 1 y 2 de la viga continua mostrada.



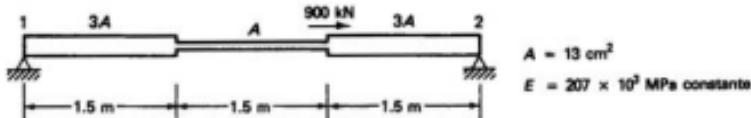
$$\text{Resp.: } Y_1 = -\frac{1}{28} wf$$

$$Y_2 = \frac{13}{28} wf$$

16.9 Determine los momentos de empotramiento y el momento sobre el nudo 2 en la viga continua mostrada. Considere como redundantes los momentos en los nudos; en la figura adyacente se muestra la estructura primaria.



16.10 Un elemento estructural consta de tres segmentos con diferentes secciones transversales y tiene una carga axial intermedia de 900 kN. Emplee el método de las flexibilidades para calcular las reacciones en los apoyos.



$$\text{Resp.: } R_1 = -180 \text{ kN}$$

$$R_2 = -720 \text{ kN}$$

## REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. W. Weaver y J. M. Gere, *Matrix Analysis of Framed Structures*, segunda edición, (Nueva York: Van Nostrand Reinhold, 1980).

# Fundamentos del método de los desplazamientos o de la rigidez

### 17.1 INTRODUCCIÓN

Cuando una estructura se analiza con el método de los desplazamientos o de la rigidez, se consideran a los desplazamientos de los nudos (traslaciones y rotaciones) como las incógnitas inmediatas. Se escriben ecuaciones de equilibrio en cada nudo de la estructura en términos de: (1) las cargas aplicadas, (2) las propiedades de los elementos que se conectan al nudo y (3) los desplazamientos desconocidos de los nudos. Se tiene así un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales que pueden resolverse simultáneamente para encontrar los desplazamientos de los nudos. Estos desplazamientos se usan luego para determinar las fuerzas (o momentos) internas en los elementos, así como las reacciones en los apoyos.

El método de los desplazamientos puede usarse tanto en estructuras isostáticas, como en estructuras estáticamente indeterminadas. El proyectista no tiene que escoger las redundantes (como en el método de las fuerzas) y no tiene que especificar, ni siquiera saber, si la estructura es isostática o hiperestática. Además, si la estructura es inestable, no puede determinarse ninguna solución y el proyectista está prevenido de la presencia de inestabilidad.

En este capítulo los autores han mostrado los fundamentos del método de la rigidez aplicado a vigas continuas y a puentes. Se ha intentado presentar las ecuaciones en una forma tal que permita al lector captar el significado físico de sus términos. En el capítulo 18 se deducen las ecuaciones de rigidez para estructuras formadas de vigas y columnas; se consideran también elementos inclinados.

### 17.2 RELACIONES GENERALES

La rigidez de un nudo se define generalmente como la fuerza (o momento) necesaria para producir un desplazamiento unitario (o rotación) en el nudo, si en todos los

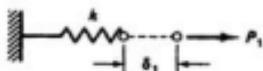


Figura 17.1

nudos restantes de la estructura no se permite ningún tipo de desplazamiento. Para este análisis inicial, consideraremos el resorte lineal mostrado en la fig. 17.1.

La relación entre la fuerza aplicada  $P_1$  y el alargamiento  $\delta_1$  del resorte puede expresarse como

$$P_1 = k\delta_1$$

En esta expresión  $k$  es la *constante del resorte* o la *fuerza* necesaria para producir un desplazamiento unitario:

$$k P_1 \text{ si } \delta_1 = 1.0$$

Por consiguiente, si se conoce la constante del resorte, el desplazamiento puede determinarse para cualquier carga aplicada  $P_1$ .

En la mayoría de los problemas prácticos, el desplazamiento es necesario en más de una lugar o nudo. Este es el caso en la viga simple mostrada en la fig. 17.2.

Los momentos de extremo  $M_1$  y  $M_2$  producen las rotaciones  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en los extremos. Empleando el procedimiento de pendiente-deflexión de la sección 13.2, pueden escribirse las siguientes ecuaciones, suponiendo que la rotación de la cuerda es nula. En estas expresiones  $K$  es igual a  $I/\ell$ , que es el llamado factor de rigidez.

$$M_1 = 2EK(2\theta_1 + \theta_2) = \frac{4EI}{\ell} \theta_1 + \frac{2EI}{\ell} \theta_2$$

$$M_2 = 2EK(\theta_1 + 2\theta_2) = M_2 = \frac{2EI}{\ell} \theta_1 + \frac{4EI}{\ell} \theta_2$$

Estas ecuaciones pueden expresarse en notación matricial de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

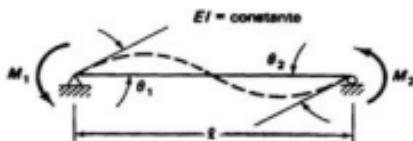


Figura 17.2

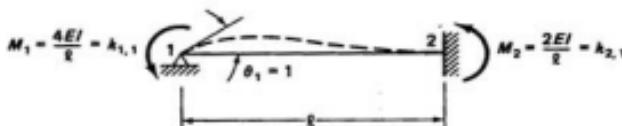


Figura 17.3

Los coeficientes  $4EI/l$  y  $2EI/l$  pueden escribirse simbólicamente como  $k_{i,j}$ , en donde los subíndices definen su lugar, el renglón y la columna, en la matriz de rigidez.

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (17.1)$$

El coeficiente de rigidez  $k_{1,1}$  puede interpretarse como el momento que debe aplicarse en el extremo 1 de una viga para producir una rotación unitaria ( $\theta_1 = 1$ ), en tanto que el extremo opuesto de la viga se encuentra empotrado ( $\theta_2 = 0$ ), tal como se muestra en la fig. 17.3. El coeficiente  $k_{2,1}$ , es el momento resultante en el extremo 2 de la viga para esta condición. Análogamente, los coeficientes  $k_{1,2}$  y  $k_{2,2}$  pueden interpretarse como los momentos resultantes en los extremos 1 y 2 de la viga, respectivamente, cuando  $\theta_2 = 1$  y  $\theta_1 = 0$ . Este caso se muestra en la fig. 17.4.

La ecuación matricial 17.1 consta de dos ecuaciones algebraicas que pueden resolverse simultáneamente para determinar las rotaciones  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en los extremos. El resultado, escrito simbólicamente, es:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (17.2)$$

Un análisis de esta viga simple, con sólo dos nudos, ilustra muchos de los rasgos característicos del método de la rigidez, aunque casi todas las estructuras prácticas que se analizan con este método tienen más de dos nudos. El resto de este capítulo se dedica a determinar la ecuación de rigidez en una forma aplicable a vigas o puentes que tengan un número cualesquiera de nudos.

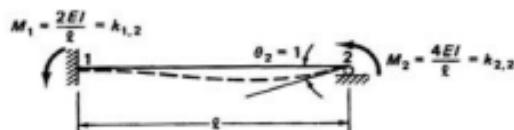


Figura 17.4

### 17.3 ECUACIONES DE RIGIDEZ PARA ELEMENTOS CON FUERZA AXIAL

En el análisis que sigue consideraremos el elemento simple mostrado en la fig. 17.5(a), el cual sólo está sometido a carga axial. Este elemento puede identificarse con un resorte lineal. Aunque tal resorte ha sido ya analizado en las secciones anteriores, el tema volverá a estudiarse aquí, de manera que puedan presentarse algunas características adicionales del método de la rigidez.

Los extremos del puntal se identifican con nudos o puntos nodales (los dos términos se emplean indistintamente). En ellos se aplican las fuerzas y se determinan los desplazamientos. Las fuerzas que actúan en los nudos reciben dos subíndices, indican los nudos del elemento donde actúan las fuerzas. El primer subíndice indica el nudo donde actúa la fuerza, en tanto que el segundo indica el otro extremo del elemento. Por ejemplo,  $F_{1,2}$  es la fuerza que actúa en el nudo 1 de un elemento cuyos nudos extremos son el 1 y el 2, y la fuerza  $F_{2,1}$  es la fuerza que actúa en el nudo 2 del mismo elemento.

El eje  $x$  del sistema se toma paralelo al eje del elemento en la fig. 17.5 y la dirección positiva se considera de izquierda a derecha. Las cargas y desplazamientos en los nudos se consideran positivos cuando actúan en el sentido positivo del eje  $x$  del elemento. En la fig. 17.5,  $F_{1,2}$  y  $F_{2,1}$ , ambas son positivas. Análogamente, los desplazamientos  $u_1$  y  $u_2$  tienen direcciones positivas.

Si el extremo 2 del puntal está fijo, como se muestra en la parte (b) de la figura, existen las siguientes relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos (determinadas de acuerdo con los principios de la Resistencia de materiales):

$$\begin{aligned} F_{1,2}' &= \left( \frac{AE}{\ell} \right) u_1 \\ F_{2,1}' &= -F_{1,2}' = -\left( \frac{AE}{\ell} \right) u_1 \end{aligned} \quad (17.3)$$

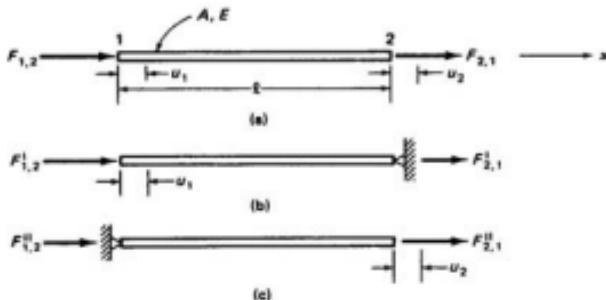


Figura 17.5

Estas ecuaciones pueden resumirse, usando la notación matricial, de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix}^I = \begin{Bmatrix} \frac{AE}{\ell} \\ -\frac{AE}{\ell} \end{Bmatrix} u_1 \quad (17.4)$$

Si ahora se impide que el nudo 1 del puntal se mueva, como se muestra en la fig. 17.5(c), se tendrán las siguientes relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos:

$$\begin{aligned} F_{2,1}^{\text{II}} &= \left( \frac{AE}{\ell} \right) u_2 \\ F_{1,2}^{\text{II}} &= -F_{2,1}^{\text{II}} = -\left( \frac{AE}{\ell} \right) u_2 \end{aligned} \quad (17.5)$$

O, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix}^{\text{II}} = \begin{Bmatrix} -\frac{AE}{\ell} \\ \frac{AE}{\ell} \end{Bmatrix} u_2 \quad (17.6)$$

Los extremos 1 y 2 del puntal pueden recibir desplazamientos arbitrarios y, con base en el principio de superposición, se pueden escribir las siguientes relaciones para las fuerzas resultantes en los nudos 1 y 2:

$$\begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix}^{\text{total}} = \begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix}^I + \begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix}^{\text{II}} = \begin{Bmatrix} \frac{AE}{\ell} \\ -\frac{AE}{\ell} \end{Bmatrix} u_1 + \begin{Bmatrix} -\frac{AE}{\ell} \\ \frac{AE}{\ell} \end{Bmatrix} u_2 \quad (17.7)$$

O, en notación matricial:

$$\begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix}^{\text{total}} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{\ell} & -\frac{AE}{\ell} \\ -\frac{AE}{\ell} & \frac{AE}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (17.8)$$

Las ecuaciones 17.8 pueden escribirse simbólicamente como

$$\{P\} = [K]\{u\} \quad (17.9)$$

en donde

$\{P\}$  es un vector de fuerzas en el nudo

$\{s\}$  es un vector de desplazamientos de nudo, y

$[K]$  es una matriz de coeficientes de rigidez, llamada *matriz de rigidez*.

En las ecs. 17.7 y 17.8 puede verse que cada columna de la matriz de rigidez representa el conjunto de fuerzas correspondientes a un *valor unitario de un solo desplazamiento de nudo*. Entender esta característica de la matriz de rigidez le permitirá determinar matrices de rigidez para estructuras más complejas que la ahora analizada.

Aunque la ecuación matricial 17.8 representa dos ecuaciones algebraicas distintas escritas en términos de dos incógnitas, es imposible resolverlas para los desplazamientos  $u_1$  y  $u_2$  en términos de las fuerzas dadas  $F_{1,2}$  y  $F_{2,1}$ . Esto puede evidenciarse al tratar de determinar una solución usando el procedimiento formal de inversión, como sigue:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{\ell} & -\frac{AE}{\ell} \\ -\frac{AE}{\ell} & \frac{AE}{\ell} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix} \quad (17.10)$$

La solución indicada por la ecuación 17.10 no tiene sentido, ya que la inversa de la matriz  $[K]$  no existe por ser ésta singular. La razón de esta peculiar circunstancia es que los movimientos de cuerpo rígido no se han eliminado de la ec. 17.8. Si  $u_1$  fuese igual a  $u_2$ , el puntal podría desplazarse cualquier distancia arbitraria sin la intervención de las fuerzas axiales  $F_{1,2}$  o  $F_{2,1}$ . Sin embargo, si uno de los extremos del puntal recibe un desplazamiento específico, digamos  $u_2 = 0$ , existirá entonces una relación bien definida entre la fuerza  $F_{1,2}$  y el desplazamiento resultante en el nudo 1:

$$u_1 = \left( \frac{\ell}{AE} \right) F_{1,2} \quad (17.11)$$

El análisis del puntal mostrado en la fig. 17.6(a) es un poco más difícil que el análisis del puntal de la fig. 17.5. Sin embargo, analizando este elemento podremos percibir mejor los principios estudiados en los últimos párrafos.

Este puntal tiene tres segmentos y cuatro nudos. A los extremos de los segmentos se les asigna un número de nudo y cada segmento se identifica por medio de un número; estos últimos se encuentran encerrados en círculos en la fig. 17.6(a). A una fuerza externa actuando en el nudo  $j$  se le asigna el símbolo  $X_j$ .

Si al nudo 1 de la fig. 17.6(a) se le da un desplazamiento arbitrario y todos los demás nudos permanecen fijos, como se muestra en la fig. 17.6(b), existirán las siguientes relaciones entre las fuerzas en los nudos y los desplazamientos:

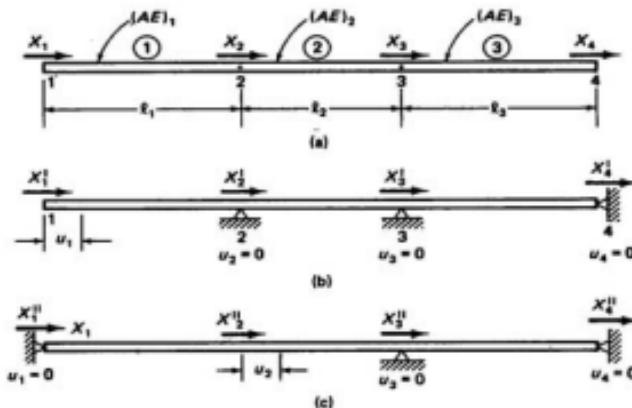


Figura 17.6

$$X_1^I = \left( \frac{AE}{\ell} \right)_1 u_1$$

$$X_2^I = - \left( \frac{AE}{\ell} \right)_1 u_1$$

$$X_3^I = 0$$

$$X_4^I = 0$$

Los subíndices asociados a los coeficientes  $AE/\ell$  se refieren a los números del segmento asociado con los términos.

Si al nudo 2 se le da un desplazamiento arbitrario, en tanto que los demás nudos permanecen fijos, como se muestra en la fig. 17.6(c), existirán las siguientes relaciones entre las fuerzas en los nudos y los desplazamientos:

$$X_1^{II} = - \left( \frac{AE}{\ell} \right)_1 u_2$$

$$X_2^{II} = \left[ \left( \frac{AE}{\ell} \right)_1 + \left( \frac{AE}{\ell} \right)_2 \right] u_2$$

$$X_3^{II} = - \left( \frac{AE}{\ell} \right)_2 u_2$$

$$X_4^{II} = 0$$

Este procedimiento puede repetirse en cada nudo, dando en cada caso un desplazamiento arbitrario y manteniendo los nudos restantes en posición fija. La superposición de todas esas relaciones origina la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 \\ -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u_1 + \begin{Bmatrix} -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 \\ \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \\ -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \\ 0 \end{Bmatrix} u_2 + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \\ \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 \\ -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 \end{Bmatrix} u_3 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 \\ \left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 \end{Bmatrix} u_4 \quad (17.12)$$

O, en forma más compacta:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (17.13)$$

Esta relación puede escribirse simbólicamente como

$$\{P\} = [K]\{\delta\}$$

La matriz de rigidez  $[K]$  contenida en la ec. 17.13 es singular y no tiene inversa. Por lo tanto, igual que antes, no pueden despejarse los desplazamientos  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  y  $u_4$  en términos de las fuerzas nodales  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  y  $X_4$ . Sin embargo, si el movimiento de cuerpo rígido es impedido en el puntal al especificar uno o más desplazamientos nodales, será posible hallar una solución. Como ejemplo consideremos que  $u_1 = 0$  y que  $u_4 = 0$ . Esto conducirá a la configuración mostrada en la fig. 17.7.

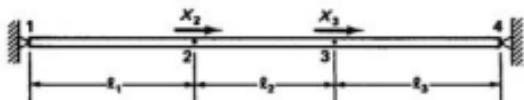


Figura 17.7

Como  $u_1$  y  $u_4$  son iguales a cero, las columnas 1 y 4 de la matriz de rigidez pueden eliminarse del conjunto de ecuaciones. (El lector debería consultar la página 473 para recordar el significado físico de la matriz de rigidez.) De manera análoga, las ecuaciones 1 y 4 también pueden eliminarse del conjunto de ecuaciones. (La justificación para la eliminación de esas ecuaciones se presenta en el capítulo 19.) Al hacer los cálculos a mano, estas eliminaciones pueden realizarse sencillamente tachando los renglones y columnas asociadas con las componentes de desplazamiento, cuyos valores sean iguales a cero. Para este caso, las columnas 1 y 4 y los renglones 1 y 4 se eliminan del conjunto de ecuaciones.

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc} -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & 0 \\ q & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 \\ -q & -0 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix} \quad (17.14)$$

Las dos ecuaciones restantes pueden resolverse simultáneamente para determinar los valores de los desplazamientos libres de las fuerzas nodales.

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc} \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \\ -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (17.15)$$

Se suponen los siguientes valores para tener una respuesta numérica en este ejemplo:

$$\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 = \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 = \left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 = 180 \text{ kN/mm}$$

$$X_2 = 900 \text{ kN}, X_3 = 450 \text{ kN}$$

Entonces, la ecuación 17.15 puede resolverse teniendo los siguientes resultados:

$$\begin{cases} u_2 \\ u_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} 360 & -180 \\ -180 & 360 \end{bmatrix}^{-1} \begin{cases} 900 \\ 450 \end{cases} \\ = 10^{-3} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{cases} 200 \\ 100 \end{cases} = \begin{cases} 4.167 \text{ mm} \\ 3.333 \text{ mm} \end{cases} \quad (17.16)$$

Ahora pueden determinarse las reacciones  $X_1$  y  $X_4$  sustituyendo los valores de  $u_2$  y  $u_3$  en las ecuaciones previamente eliminadas del conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 u_2 = -180 \times 4.167 = -750 \text{ kN} \\ X_4 &= -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 u_3 = -180 \times 3.333 = -600 \text{ kN} \end{aligned} \quad (17.17)$$

El lector debe notar cuidadosamente que, aunque la viga continua de la fig. 17.5 es estáticamente indeterminada, su solución por medio del método de la rigidez no necesitó la identificación de redundantes, ni siquiera el saber que la estructura era hiperestática. *Una característica algo peculiar del método de la rigidez, es que el número de ecuaciones algebraicas que deben resolverse simultáneamente decrece conforme aumenta el grado de indeterminación.* Esto es justamente lo contrario de lo que ocurre en el método de las fuerzas o de las flexibilidades.

#### **17.4 ECUACIONES DE RIGIDEZ PARA ELEMENTOS A FLEXION**

En el capítulo 13 se dedujeron las ecuaciones para elementos que trabajan a flexión por medio del método pendiente-deflexión. En esta sección se deducirán nuevamente con la idea de uniformar la notación y de presentar algunos temas que no se habían mencionado previamente. Consideraremos la viga simple mostrada en la fig. 17.8.

Igual que en el caso de los puentes, se asignan números nodales a los extremos del elemento. El eje  $x$  se toma paralelo al eje del elemento y se escoge un sentido positivo arbitrario como se muestra en la figura. El eje positivo  $y$  se toma perpen-

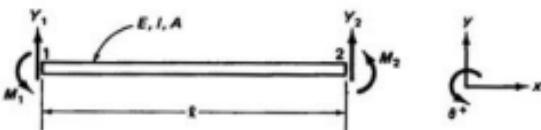


Figura 17.8

dicularmente al eje  $x$  del elemento, en forma tal, que se establezca un sentido de rotación definido por la regla de la mano derecha.

Como se hizo con los puntales, los nodos de la viga son aquellos lugares en donde se aplican las fuerzas y en donde se miden los desplazamientos. Para el elemento de viga mostrado en la fig. 17.8, las fuerzas aplicadas en los nodos constan de fuerzas cortantes transversales y de momentos flexionantes. En la fig. 17.8 esas fuerzas están indicadas con los símbolos  $Y_i$  y  $M_i$ , respectivamente, y se muestran actuando en sentido positivo. Los desplazamientos en los nodos constan de traslaciones  $v_i$  paralelas a las fuerzas cortantes y de rotaciones  $\theta_i$ . También pueden actuar en la viga fuerzas axiales, pero para simplificar el problema supondremos que son nulas en este caso.

Como antes, se determinan las relaciones entre las fuerzas en los nodos y los desplazamientos; la manera de hacerlo es asignar un valor arbitrario a una componente de desplazamiento, manteniendo las demás igual a cero. Como ilustración, a  $v_1$ , del nodo 1 de la viga mostrada en la fig. 17.8, se le da un valor arbitrario, en tanto que  $v_2 = \theta_1 = \theta_2 = 0$ . En la fig. 17.9 se muestra la configuración deformada de la viga.

En los capítulos anteriores de este libro se ha presentado ya un buen número de relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos. Debido a su gran importancia en el método de la rigidez, se reproducen en la fig. 17.10 aquellas relaciones que se usan más frecuentemente.

Para la viga deformada mostrada en la fig. 17.9, y con referencia a las relaciones fuerza-desplazamiento de la fig. 17.10, las fuerzas nodales resultantes pueden resumirse como sigue:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \left( \frac{12EI}{\ell^3} \right) v_1 \\ M_1 &= \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) v_1 \\ Y_2 &= - \left( \frac{12EI}{\ell^3} \right) v_1 \\ M_2 &= \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) v_1 \end{aligned} \tag{17.18}$$

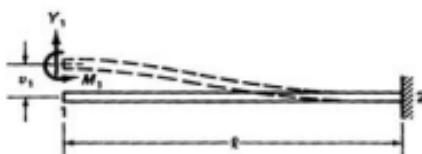


Figura 17.9

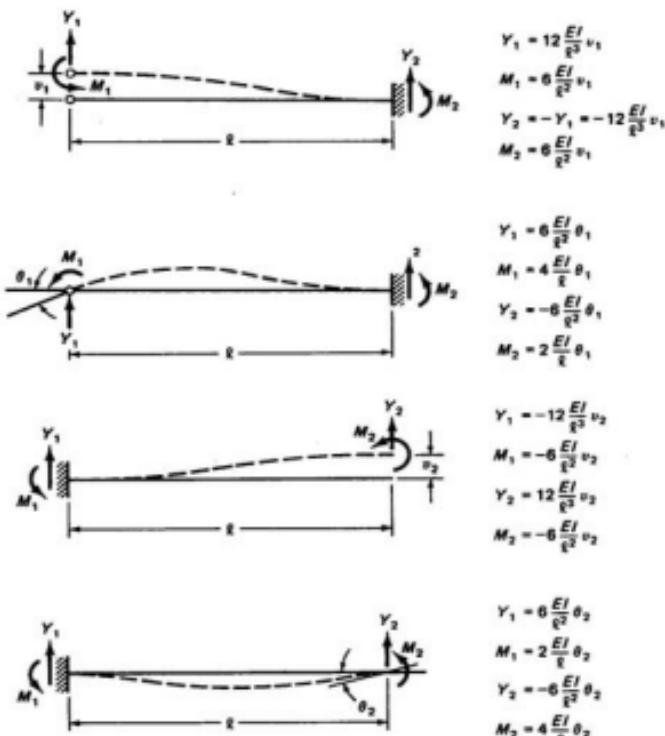


Figura 17.10

O, en notación matricial:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} \\ \frac{6EI}{\ell^2} \\ -\frac{12EI}{\ell^3} \\ \frac{6EI}{\ell^2} \end{Bmatrix} v_1 \quad (17.19)$$

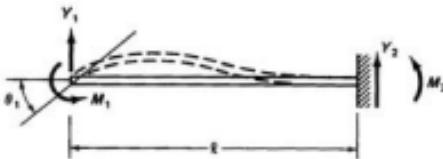


Figura 17.11

Si a  $\theta_1$  se le da un valor arbitrario y todas las demás componentes nodales de desplazamiento se mantienen en cero, el elemento de viga de la fig. 17.8 se deformará como se muestra en la fig. 17.11.

Las fuerzas nodales resultantes pueden resumirse del modo siguiente:

$$Y_1 = \frac{6EI}{\ell^2} \theta_1$$

$$M_1 = \frac{4EI}{\ell} \theta_1 \quad (17.20)$$

$$Y_2 = -\frac{6EI}{\ell^2} \theta_1$$

$$M_2 = \frac{2EI}{\ell} \theta_1$$

O, en notación matricial:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{4EI}{\ell} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{2EI}{\ell} \end{Bmatrix} \theta_1 \quad (17.21)$$

También pueden imponerse desplazamientos nodales similares al nodo 2 del elemento de viga. La superposición de las fuerzas nodales producidas por cada uno de los desplazamientos nodales exhibe la siguiente expresión para las fuerzas nodales totales:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} \\ \frac{6EI}{\ell^2} \\ -\frac{12EI}{\ell^3} \\ \frac{6EI}{\ell^2} \end{Bmatrix} v_1 + \begin{Bmatrix} \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{4EI}{\ell} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{2EI}{\ell} \end{Bmatrix} \theta_1 + \begin{Bmatrix} -\frac{12EI}{\ell^3} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{12EI}{\ell^3} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} \end{Bmatrix} v_2 + \begin{Bmatrix} \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{4EI}{\ell} \end{Bmatrix} \theta_2 \quad (17.22)$$

O, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (17.23)$$

La ecuación 17.23 representa la ecuación de rigidez de un elemento de viga.

Para una viga que conste de dos o más elementos, las ecuaciones de rigidez pueden determinarse de manera similar. Para ilustrar esto, consideremos la viga continua de dos claros mostrada en la fig. 17.12(a). De la misma forma como se hizo para los puntales, se asignan a la viga números nodales y números a cada segmento de ella. Si a  $v_1$  se le da un valor arbitrario (con todos los demás desplazamientos en cero), la estructura se deformará como se muestra en la fig. 17.12(b).

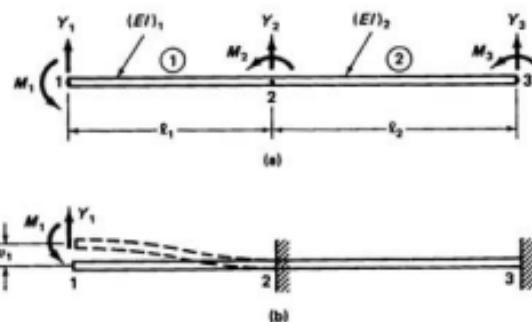


Figura 17.12

## 17.4 Ecuaciones de rigidez para elementos a flexión

483

Las fuerzas nodales resultantes pueden resumirse como sigue:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \left( \frac{EI}{\ell^3} \right)_1 \\ 6 \left( \frac{EI}{\ell^2} \right)_1 \\ -12 \left( \frac{EI}{\ell^3} \right)_1 \\ 6 \left( \frac{EI}{\ell^2} \right)_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} v_1 \quad (17.24)$$

Debe observarse que no habrá fuerzas impuestas en el nodo 3 del segmento de viga ② ya que ni el nodo 2 ni el 3 pueden deformarse en forma alguna. Además, las condiciones de frontera de una estructura no tienen que considerarse al plantear las ecuaciones de rigidez de ésta (las condiciones se toman en cuenta en una etapa posterior del análisis).

Si ahora se le da a la componente  $v_2$  de desplazamiento un valor arbitrario, manteniendo las demás en cero, la estructura se deformará como se ve en la fig. 17.13.

El conjunto resultante de fuerzas nodales que corresponde a la forma deformada de la fig. 17.13 puede resumirse de la manera siguiente:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 \left( \frac{EI}{\ell^3} \right)_1 \\ -6 \left( \frac{EI}{\ell^2} \right)_1 \\ 12 \left( \frac{EI}{\ell^3} \right)_1 + 12 \left( \frac{EI}{\ell^3} \right)_2 \\ -6 \left( \frac{EI}{\ell^2} \right)_1 + 6 \left( \frac{EI}{\ell^2} \right)_2 \\ -12 \left( \frac{EI}{\ell^3} \right)_2 \\ 6 \left( \frac{EI}{\ell^2} \right)_2 \end{Bmatrix} v_2 \quad (17.25)$$

Cuando este proceso se repite, dando a cada componente de desplazamiento un valor arbitrario, en tanto que las demás se mantienen en cero, y los resultados se superponen, resultan las siguientes ecuaciones:

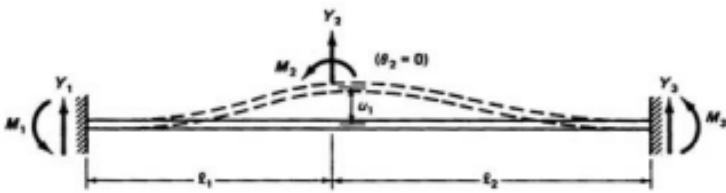


Figura 17.13

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12\left(\frac{EI}{l^3}\right) & 6\left(\frac{EI}{l^3}\right) & -12\left(\frac{EI}{l^3}\right) & 6\left(\frac{EI}{l^3}\right) & 0 & 0 \\ 6\left(\frac{EI}{l^3}\right) & 4\left(\frac{EI}{l^3}\right) & -6\left(\frac{EI}{l^3}\right) & 2\left(\frac{EI}{l^3}\right) & 0 & 0 \\ -12\left(\frac{EI}{l^3}\right) & -6\left(\frac{EI}{l^3}\right) & 12\left(\frac{EI}{l^3}\right) + 12\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 & -6\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 + 6\left(\frac{EI}{l^3}\right)_2 & -12\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 & 6\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 \\ 6\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 & 2\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 & -6\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 + 6\left(\frac{EI}{l^3}\right)_2 & 4\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 + 4\left(\frac{EI}{l^3}\right)_2 & -4\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 & 2\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 \\ 0 & 0 & -12\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 & -6\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 & 12\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 & -6\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 \\ 0 & 0 & 6\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 & 2\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 & -6\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 & 4\left(\frac{EI}{l^3}\right)_1 \end{Bmatrix} \quad (17.26)$$

Aunque no todos los coeficientes de rigidez mostrados en la ec. 17.26 se dan explícitamente en la fig. 17.10, todos los coeficientes pueden encontrarse con esta figura sumando (o restando) adecuadamente los coeficientes asociados con los segmentos simples de viga. Se sugiere al lector que efectúe esta operación para todos los coeficientes de la matriz de rigidez incluida en la ec. 17.26.

Los ejemplos 17.1 y 17.2 ilustran muchos de los aspectos mencionados en las secciones anteriores.

### EJEMPLO 17.1

La viga continua, mostrada en la fig. 17.14(a), está sometida a un momento concentrado  $M^*$ , aplicado a una distancia  $a$  del extremo izquierdo. Determine las rotaciones y las reacciones en los apoyos de la viga.

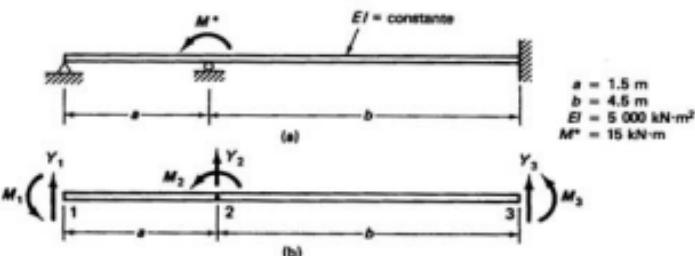


Figura 17.14

*Solución:*

La viga se divide en dos segmentos, de modo que en cada apoyo exista un punto nodal. La fig. 17.14(b) muestra el modelo de viga que se analizará. La matriz de rigidez para esta estructura ya se determinó antes y se incluye en la ec. 17.26. Las condiciones de frontera para este problema se expresan como:

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = 0$$

$$v_3 = 0$$

$$\theta_3 = 0$$

Inicialmente se tachan las columnas de la matriz de rigidez asociadas con desplazamientos nulos impuestos. Luego, los renglones asociados con las columnas tachadas también se eliminan. Por tanto, el resultado de estas operaciones se muestra en la ec. 17.27.

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} & -\frac{4}{a^2} \frac{12EI}{b^2} & \frac{6EI}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a^2} & -\frac{12EI}{b^2} & \frac{2EI}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{b^3} & -\frac{6EI}{b^2} & -\frac{12EI}{a^2} & -\frac{6EI}{b^2} & -\frac{12EI}{b^2} & -\frac{6EI}{b^2} & 0 \\ \frac{6EI}{b^2} & \frac{2EI}{a^2} & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a^2} + \frac{4EI}{b^2} & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{Bmatrix} \quad (17.27)$$

Se escriben y se resuelven las ecuaciones restantes de rigidez determinándose así los desplazamientos (libres) desconocidos.

$$\begin{Bmatrix} M_1 = 0 \\ M_2 = M^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{a} & \frac{2EI}{a} \\ \frac{2EI}{a} & \frac{4EI}{a} + \frac{4EI}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Los valores numéricos mostrados en la fig. 17.14 se sustituyen en las ecuaciones precedentes:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 15 \end{Bmatrix} = \frac{10,000}{4.5} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

y

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1.5}{1.3 \times 10^3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 15 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.192 \times 10^{-4} \\ 10.384 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} \text{ rad}$$

Las componentes de reacción se encuentran ahora sustituyendo los valores de los desplazamientos libres en las ecuaciones que se tacharon en la ec. 17.27. Los resultados que se tienen son:

$$Y_1 = \frac{6EI}{a^2} \theta_1 + \frac{6EI}{a^2} \theta_2 = 6.923 \text{ kN}$$

$$Y_2 = \frac{-6EI}{a^2} \theta_1 + \left( \frac{-6EI}{a^2} + \frac{6EI}{b^2} \right) \theta_2 = -5.384 \text{ kN}$$

$$Y_3 = \frac{-6EI}{b^2} \theta_2 = -1.538 \text{ kN}$$

$$M_3 = \frac{2EI}{b} \theta_2 = 2.308 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

■ ■

### EJEMPLO 17.2

La viga continua mostrada en la fig. 17.15(a) tiene segmentos con diferentes rigideces a la flexión. En el punto medio de la viga actúa una carga concentrada. Determine la deflexión bajo la carga y las reacciones en los apoyos.

*Solución:*

La viga se divide en dos segmentos, con la carga actuando en uno de los puntos nodales, como se muestra en la fig. 17.15(a). En este problema se usa la ecuación básica (17.26) de la rigidez, pero ahora las condiciones de frontera son:

$$v_1 = 0$$

$$\theta_1 = 0$$

$$v_2 = 0$$

$$\theta_2 = 0$$

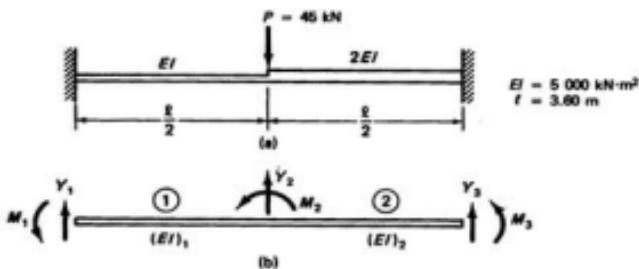


Figura 17.15

Cuando se han tachado las columnas y renglones de la ec. 17.26, el resultado es:

$$\left\{ \begin{array}{c} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ -M_3 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} & -96EI & 24EI & & & & \\ & \ell^3 & \ell^2 & & & & \\ -24EI & & 4EI & & & & \\ \ell^2 & & \ell & & & & \\ \hline 288EI & & 24EI & & & & \\ \ell^3 & & \ell^2 & & & & \\ \hline 24EI & & 24EI & & & & \\ \ell^2 & & \ell^2 & & & & \\ \hline -192EI & & -48EI & & & & \\ \ell^3 & & \ell^2 & & & & \\ \hline 48EI & & 8EI & & & & \\ \ell^2 & & \ell & & & & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} v_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ -\theta_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (17.28)$$

Quedan dos ecuaciones del conjunto original que se resuelven para encontrar los desplazamientos de los nodos libres.

$$\left\{ \begin{array}{c} Y_2 = -45 \\ M_2 = 0 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{288EI}{\ell^3} & \frac{24EI}{\ell^2} \\ \frac{24EI}{\ell^2} & \frac{24EI}{\ell} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

Los valores numéricos mostrados en la fig. 17.15 se sustituyen en las expresiones anteriores con los siguientes resultados:

$$\left\{ \begin{array}{c} -45 \\ 0 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} 30\ 864 & 9\ 259 \\ 9\ 259 & 33\ 333 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} 30\ 864 & 9\ 259 \\ 9\ 259 & 33\ 333 \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} -45 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -1.591 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 4.42 \times 10^{-4} \text{ rad} \end{array} \right\}$$

Los valores obtenidos para  $v_2$  y  $\theta_2$  se sustituyen en las ecuaciones que se tacharon para tener los valores de las reacciones:

$$Y_1 = \frac{-96EI}{\ell^3} v_2 + \frac{24EI}{\ell^2} \theta_2 = 20.46 \text{ kN}$$

$$M_1 = \frac{-24EI}{\ell^2} v_2 + \frac{4EI}{\ell} \theta_2 = 17.19 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$Y_3 = \frac{-192EI}{\ell^3} v_2 - \frac{48EI}{\ell^2} \theta_2 = 24.55 \text{ kN}$$

$$M_3 = \frac{48EI}{\ell^2} v_2 + \frac{8EI}{\ell} \theta_2 = -24.55 \text{ kN-m}$$
■ ■

El lector debe notar que la misma ecuación básica de rigidez (17.26) puede usarse para resolver un gran número de problemas con diferentes cargas, rigideces y condiciones de frontera especificadas.

### 17.5 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA ELEMENTOS CON CARGA AXIAL Y FLEXION

Si en elementos sometidos simultáneamente a fuerzas cortantes y momentos flexionantes actúan fuerzas axiales, las matrices de rigidez pueden prepararse de la misma manera como se hizo para elementos sometidos sólo a flexión. Para este análisis consideraremos el elemento mostrado en la fig. 17.16.

De acuerdo con la teoría de los pequeños desplazamientos, se supone que las cargas axiales no influyen en los momentos ni en las fuerzas cortantes, y viceversa. Por consiguiente, la matriz de rigidez puede escribirse como una superposición de casos individuales de carga:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{AE}{\ell} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{AE}{\ell} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u_1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{12EI}{\ell^3} \\ \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 \\ -\frac{12EI}{\ell^3} \\ \frac{6EI}{\ell^2} \end{Bmatrix} v_1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{4EI}{\ell} \\ 0 \\ -\frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{2EI}{\ell} \end{Bmatrix} \theta_1 + \begin{Bmatrix} -\frac{AE}{\ell} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{AE}{\ell} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u_2 \\ &\quad + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{12EI}{\ell^3} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 \\ \frac{12EI}{\ell^3} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} \end{Bmatrix} v_2 + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{2EI}{\ell} \\ 0 \\ -\frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{4EI}{\ell} \end{Bmatrix} \theta_2 \end{aligned} \tag{17.29}$$



Figura 17.16

En notación matricial la ecuación de rigidez resultante es:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{AE}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{AE}{\ell} & 0 & 0 & \frac{AE}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (17.30)$$

El ejemplo 17.3 ilustra el análisis de una viga en voladizo usando el método de la rigidez.

### EJEMPLO 17.3

Determine los desplazamientos en el borde libre y las reacciones en la viga en voladizo mostrada en la fig. 17.17.

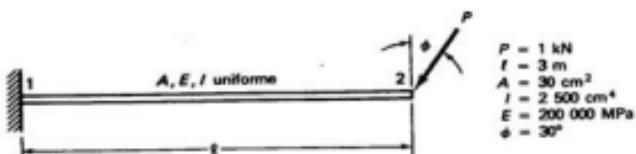


Figura 17.17

*Solución:*

La ecuación 17.30 representa la matriz de rigidez total para esta estructura, ya que consta de un solo elemento de viga. Se tachan las columnas y renglones apropiados de la ecuación para reflejar las condiciones de frontera impuestas:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 = -P \operatorname{sen} \phi \\ Y_2 = -P \cos \phi \\ M_2 = 0 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \frac{AE}{\ell} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ 1 & 1 & 1 & \frac{AE}{\ell} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \quad (17.31)$$

La ecuación matricial restante es:

$$\left\{ \begin{array}{l} -P \operatorname{sen} \phi \\ -P \cos \phi \\ 0 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{AE}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & -6 \frac{EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \quad (17.32)$$

Después de sustituir los valores numéricos dados en la fig. 17.17, los desplazamientos en el borde libre se determinan resolviendo el conjunto de ecuaciones simultáneamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} 200\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 2\,222.2 & -3\,333.3 \\ 0 & -3\,333.3 & 6\,666.6 \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} -0.50 \\ -0.866 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -2.5 \times 10^{-6} \text{ m} \\ -1.56 \times 10^{-3} \text{ m} \\ -7.8 \times 10^{-4} \text{ rad} \end{array} \right\}$$

Las reacciones se encuentran sustituyendo los valores de esos desplazamientos en las ecuaciones que se tacharon en la ec. 17.31.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} -\frac{AE}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{-6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc} -200\,000 & 0 & 0 \\ 0 & -2\,222.2 & 3\,333.3 \\ 0 & -3\,333.3 & 3\,333.3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0.5 \text{ kN} \\ 0.866 \text{ kN} \\ 2.598 \text{ kN-m} \end{array} \right\}$$

Aunque en los problemas de vigas rara vez se consideran las fuerzas axiales, la ecuación (17.30) de rigidez es una ecuación fundamental en la solución de problemas, ya que contienen columnas y elementos diagonales, así como elementos horizontales. Esos problemas y sus soluciones se analizan en el capítulo 18.

### 17.6 CARACTERISTICAS DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ

En las secciones previas se dedujeron matrices de rigidez para puntales, para elementos sometidos a flexión y para elementos sometidos a fuerza axial, a fuerza cortante y a momento flexionante. Todas esas matrices están escritas en un cierto orden que debe estudiarse con cuidado. La ecuación general de rigidez se escribe simbólicamente como sigue:

$$\{P\} = [K]\{\delta\}$$

El orden en que se anotan las fuerzas nodales en la matriz  $[K]$  debe ser el mismo al anotar los desplazamientos correspondientes en la matriz  $\delta$ . Así, si la primera fuerza nodal anotada en  $P$  es  $X_1$ , entonces el primer desplazamiento anotado en la matriz  $\delta$  debe ser  $u_1$  etc. Si a lo largo de todo el análisis se conserva este orden, las matrices de rigidez tendrán las siguientes características:

1. Serán simétricas, o sea,  $k_{i,j} = k_{j,i}$ . Una prueba de esta característica puede determinarse a partir de la ley de las deformaciones recíprocas de Maxwell.
2. La matriz completa de rigidez, ya sea para un solo elemento o toda una estructura, es singular. Sin embargo, si se especifican suficientes condiciones de frontera, de manera que la estructura sea estable (y la matriz de rigidez se modifica para reflejar esas condiciones), la matriz resultante deberá ser no singular.
3. Los coeficientes de rigidez en la diagonal principal son siempre positivos. La razón de esta característica tiene que ver con el hecho de que los coeficientes de rigidez en la diagonal principal representan, cada uno, la fuerza necesaria en un nodo para producir un desplazamiento correspondiente en ese nodo. Una fuerza negativa necesaria para producir un desplazamiento positivo es contrario al comportamiento observado de las estructuras.

### 17.7 RELACION ENTRE MATRICES DE RIGIDEZ Y DE FLEXIBILIDAD

Aunque el método de rigidez y el de flexibilidad son dos métodos distintos de análisis estructural, las matrices desarrolladas en los dos métodos están intimamente

relacionadas. Esta sección tiene el propósito de señalar los rasgos más comunes y sus diferencias.

Como se explicó en el capítulo 16, los coeficientes de flexibilidad representan desplazamientos en lugares específicos debido a cargas unitarias en otros lugares. En un ejemplo de esta sección se encontrará un conjunto de coeficientes de flexibilidad para la viga simplemente apoyada de la fig. 17.18(a).

En el nodo 1 de la viga se aplica un momento unitario, como se muestra en la fig. 17.18(b). Las rotaciones resultantes en los nodos 1 y 2 son los coeficientes de flexibilidad,  $\delta_{1,1}$  y  $\delta_{2,1}$ , respectivamente. Sus valores se muestran en la fig. 17.18(b). Igualmente, se aplica un momento unitario en el nodo 2 de la viga, como se muestra en la fig. 17.18(c), para determinar los coeficientes de flexibilidad  $\delta_{1,2}$  y  $\delta_{2,2}$ . Los valores de esos coeficientes se muestran en la fig. 17.18(c).

A continuación, usando el principio de superposición, se escriben los desplazamientos totales en los nodos 1 y 2 debidos a la aplicación de los momentos arbitrarios  $M_1$  y  $M_2$ .

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \left(\frac{\ell}{3EI}\right)M_1 - \left(\frac{\ell}{6EI}\right)M_2 \\ \theta_2 &= -\left(\frac{\ell}{6EI}\right)M_1 + \left(\frac{\ell}{3EI}\right)M_2\end{aligned}\quad (17.33)$$

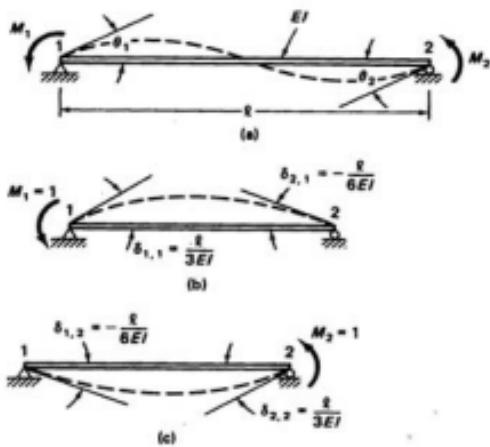


Figura 17.18

O, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\ell}{3EI} & -\frac{\ell}{6EI} \\ -\frac{\ell}{6EI} & \frac{\ell}{3EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (17.34)$$

Simbólicamente, la ec. 17.34 se escribe:

$$\{\theta\} = [F]\{P\} \quad (17.35)$$

En la sección 17.2 se obtuvo una relación similar para esta viga usando el método de la rigidez y se mostró en la ec. 17.1. Esta ecuación se repite ahora nuevamente como ec. 17.36

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (17.36)$$

O, simbólicamente,

$$\{P\} = [K]\{\theta\} \quad (17.37)$$

Analizando las ecs. 17.35 y 17.37 se ve que la matriz de rigidez  $[K]$  es la inversa de la matriz de flexibilidad  $[F]$ .

$$[K] = [F]^{-1} \quad (17.38)$$

El lector puede evidenciar esto efectuando la siguiente operación basada en las matrices de las ecs. 17.34 y 17.36.

$$\begin{bmatrix} \frac{\ell}{3EI} & -\frac{\ell}{6EI} \\ -\frac{\ell}{6EI} & \frac{\ell}{3EI} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}$$

Aunque la ecuación 17.38 es correcta para casos específicos, existe una diferencia fundamental entre las matrices de rigidez y de flexibilidad. El lector recordará de la ec. 17.23 que la matriz de rigidez total para una viga puede escribirse de la siguiente manera:

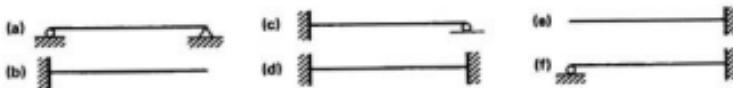


Figura 17.19

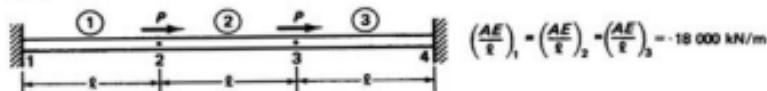
$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (17.39)$$

La matriz de rigidez mostrada en la ec. 17.36 representa sólo una parte de la matriz de rigidez total para la viga. Si se especifican diferentes condiciones de frontera para la viga, se aplicarán otras matrices de rigidez reducidas. La matriz de rigidez total, que muestra la ec. 17.39, agrupa las matrices reducidas de rigidez para una variedad de otras condiciones de frontera, tales como las de las figuras 17.19(a) a la 17.19(f). Sin embargo, nótese que no existe una matriz de flexibilidad que corresponda a la matriz de rigidez total, o sea, las matrices de flexibilidad existen sólo para estructuras estables.

Las aseveraciones anteriores para un elemento simple de viga también se aplican a cualquier estructura, sin importar qué tan compleja sea ésta. Para cada condición de apoyo individual de la estructura hay una matriz distinta de rigidez reducida y una matriz distinta de flexibilidad. Ambas están relacionadas por la ec. 17.38. Sin embargo, la estructura sólo posee una matriz *total* de rigidez.

## PROBLEMAS

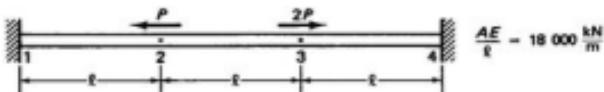
### 17.1



Para la estructura mostrada sometida a carga axial, determine lo siguiente:

- Los desplazamientos de los nodos 2 y 3.
- Las reacciones en los nodos 1 y 4.
- Las fuerzas internas en los elementos 1, 2 y 3.

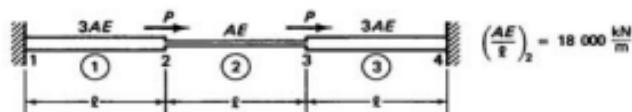
17.2 Repita el problema 17.1 utilizando las cargas modificadas, actuando en los nodos 2 y 3.



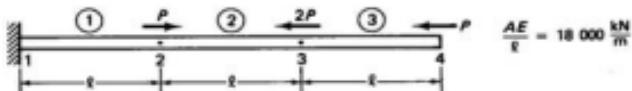
$$\text{Resp.: (a)} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{P\ell}{AE} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{P\ell}{AE}$$

$$\text{(c)} \begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} F_{2,3} \\ F_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ P \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} F_{3,4} \\ F_{4,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ -P \end{Bmatrix}$$

17.3 Repita el problema 17.1 usando las rigideces modificadas para los elementos 1 y 3.



17.4



En la estructura mostrada sometida a carga axial, determine lo siguiente:

(a) Los desplazamientos en los nodos 2, 3 y 4.

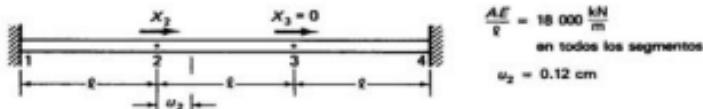
(b) La reacción en el nodo 1.

(c) Las fuerzas internas en los elementos 1, 2 y 3.

$$\text{Resp.: (a)} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{P\ell}{AE} \begin{Bmatrix} -2 \\ -5 \\ -6 \end{Bmatrix} \quad \text{(b)} R_1 = F_{1,2} = 2P$$

$$\text{(c)} \begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2P \\ -2P \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} F_{2,3} \\ F_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3P \\ -3P \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} F_{3,4} \\ F_{4,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ -P \end{Bmatrix}$$

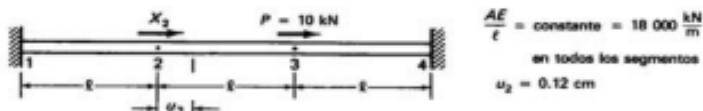
## 17.5



En la estructura mostrada sometida a carga axial suponga que una carga externa  $X_2$ , actuando en el nudo 2 produce un desplazamiento  $u_2 = 0.12 \text{ cm}$ . Determine lo siguiente:

- La fuerza externa  $X_2$ .
- El desplazamiento resultante en el nodo 3.
- Las reacciones en los nodos 1 y 4.

## 17.6



En la estructura mostrada suponga que una fuerza conocida  $P$  actúa en el nodo 3 y que una fuerza desconocida  $X_2$  actúa en el nodo 2. El desplazamiento resultante de la condición combinada de carga se encuentra que es igual a  $u_2 = 0.12 \text{ cm}$ . Determine:

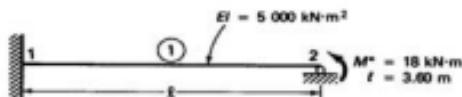
- La fuerza nodal  $X_2$ .
- El desplazamiento en el nodo 3.
- Las reacciones en los nodos 1 y 4.

Resp.: (a)  $X_2 = 27.4 \text{ kN}$

$$u_2 = 8.8 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$R_1 = -21.6 \text{ kN}, R_4 = -15.8 \text{ kN}$$

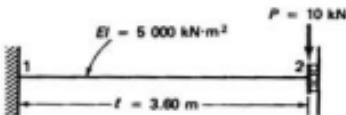
## 17.7



Empleando la matriz de rigidez dada por la ec.17.23, encuentre lo siguiente:

- La rotación en el nodo 2 debida al momento aplicado externamente  $M^*$ .
- Las reacciones en los nodos 1 y 2.

## 17.8

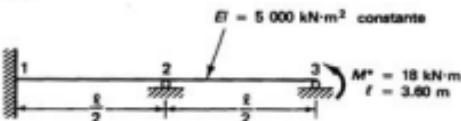


La viga mostrada tiene un empotramiento guiado en 2. Suponiendo que una carga transversal  $P$  actúa en el nodo 2, determine lo siguiente:

- El desplazamiento en el nodo 2.
- Las reacciones en los nodos 1 y 2.

Resp.: (a)  $v_2 = -7.78 \times 10^{-3} \text{ m}$   
 (b)  $Y_1 = 10 \text{ kN}; M_1 = 18 \text{ kN}\cdot\text{m}; M_2 = 18 \text{ kN}\cdot\text{m}$

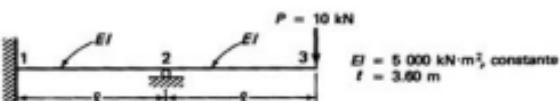
## 17.9



Se ha añadido un nodo a la mitad de la viga del problema 17.7. Determine la matriz de rigidez para la estructura resultante y especifique lo siguiente:

- La rotación en los nodos 2 y 3.
- Las reacciones en los nodos 1, 2 y 3.

## 17.10



En la estructura en voladizo apuntalada que se muestra, determine lo siguiente:

- Los desplazamientos nodales en 2 y 3.
- Las reacciones en los nodos 1 y 2.

Resp.: (a)  $\begin{cases} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{cases} = \begin{cases} -6.48 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ -0.054 \text{ m} \\ -0.019 \text{ rad} \end{cases}$

(b)  $\begin{cases} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \end{cases} = \begin{cases} -15 \text{ kN} \\ -18 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ +25 \text{ kN} \end{cases}$

17.11



Los dos claros de la viga continua mostrada tienen diferentes rigideces. En el nodo 3 actúa un momento  $M^*$  externo; determine lo siguiente:

- Las rotaciones en los nodos 2 y 3.
- Las reacciones en los nodos 1, 2 y 3.

# Matrices de rigidez para elementos inclinados

### 18.1 GENERALIDADES

En el capítulo 17 se escribieron ecuaciones de rigidez para puentes y vigas que estaban orientadas a lo largo de un eje horizontal. La mayoría de las estructuras constan de una combinación de vigas, columnas y, tal vez, de algunos elementos inclinados. En este capítulo analizaremos las matrices de rigidez para estructuras cuyos elementos no todos son paralelos.

### 18.2 ELEMENTOS CON FUERZA AXIAL

La armadura con nudos articulados mostrada en la fig. 18.1 consta de un cierto número de elementos, cuyos ejes se encuentran orientados según varios ángulos, respecto a un eje horizontal de referencia.

En la fig. 18.2 se muestra un elemento inclinado de esta armadura.

Para describir la relación fuerza-desplazamiento en este elemento y en todos los elementos inclinados, es conveniente establecer dos *sistemas coordenados*, uno *local* y otro *global*. El sistema coordenado local se establece dibujando el eje  $x$  local a lo largo del eje inclinado del elemento (véase la fig. 18.2a). Este eje se denomina  $x'$  para distinguirlo del eje  $x$  global. El eje  $y$  local, denominado  $y'$ , se dibuja perpendicularmente al eje  $x'$  local. El sistema coordenado global es un sistema de referencia establecido por el proyectista para la estructura completa. Los ejes globales se denominan  $x$  y  $y$  en las estructuras planas (véase la fig. 18.2b).

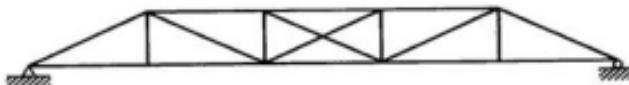


Figura 18.1

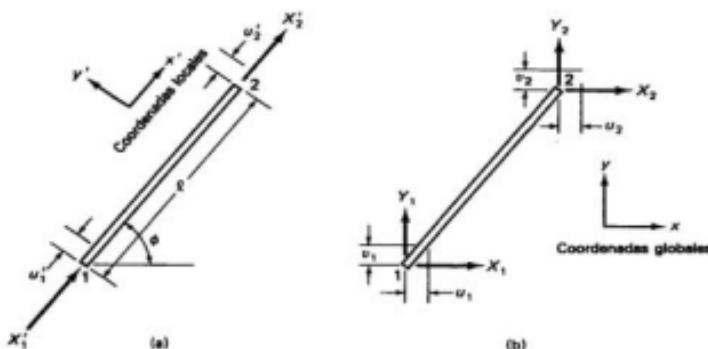


Figura 18.2

Las fuerzas y desplazamientos relacionados con los ejes locales se designan con primas, por ejemplo,  $X'_1$  representa una fuerza paralela al eje  $x'$ , en tanto que  $u'_1$  representa un desplazamiento paralelo a este eje. Inversamente, las fuerzas y desplazamientos escritos sin primas representan valores relacionados con los ejes globales. Así,  $X_1$  y  $Y_1$  representan fuerzas paralelas a los ejes globales  $x$  y  $y$ , respectivamente, en tanto que  $u_1$  y  $v_1$  representan las componentes de desplazamiento paralelas a esos ejes.

Las relaciones fuerza-desplazamiento especificadas en el capítulo 17 son válidas sólo cuando las fuerzas y los desplazamientos están relacionados con ejes locales de un puntal. Si varios puentes concurren a un nodo, como el mostrado en la fig. 18.1, habrá varios conjuntos de ejes locales de referencia. Como la dirección de las fuerzas axiales y de los desplazamientos axiales de los puentes que concurren a un nodo son diferentes, sus rigideces individuales no pueden añadirse directamente. Por ello, en esta sección, las relaciones fuerza-desplazamiento para un puntal se derivan respecto a ejes globales, de manera que las rigideces de puentes concurrentes puedan sumarse.

Para establecer la relación fuerza-desplazamiento, con respecto a ejes globales para un puntal inclinado, se da un desplazamiento arbitrario a una de las componentes globales de desplazamiento. Todas las otras componentes de desplazamiento se mantienen en cero. La fig. 18.3 muestra un puntal al que se le ha dado un desplazamiento arbitrario  $u_1$ . Este desplazamiento puede descomponerse en componentes perpendiculares y paralelas a los ejes locales como se muestra en la figura.

La componente de desplazamiento  $v'_1$  no cambia la longitud del puntal significativamente y, de acuerdo con la teoría de los desplazamientos pequeños, no produce esfuerzos en el puntal. Sin embargo, la componente  $u'_1$  de desplazamiento es

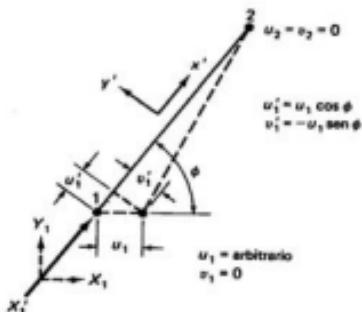


Figura 18.3

importante y causa esfuerzos apreciables en el pinal. La relación fuerza-desplazamiento se ha establecido previamente como:

$$X'_1 = \left( \frac{AE}{\ell} \right) u'_1 \quad (18.1)$$

La fuerza local  $X'_1$  puede descomponerse en dos componentes globales  $X_1$  y  $Y_1$  como sigue:

$$\begin{aligned} X_1 &= X'_1 \cos \phi \\ Y_1 &= X'_1 \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \quad (18.2)$$

Luego, por medio de una sustitución apropiada, todas las componentes de fuerza y desplazamiento escritas con respecto al eje  $x'$  local se escriben con respecto a los ejes globales  $x$  y  $y$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= X'_1 \cos \phi = \left( \frac{AE}{\ell} \right) \cos \phi u'_1 = \left( \frac{AE}{\ell} \cos^2 \phi \right) u_1 \\ Y_1 &= X'_1 \operatorname{sen} \phi = \frac{AE}{\ell} \operatorname{sen} \phi u'_1 = \left( \frac{AE}{\ell} \operatorname{sen} \phi \cos \phi \right) u_1 \end{aligned} \quad (18.3)$$

Las fuerzas en el nodo 2, correspondientes a la componente de desplazamiento impuesta  $u_1$ , puede determinarse por equilibrio:

$$\begin{aligned} X_2 &= -X_1 = - \left( \frac{AE}{\ell} \cos^2 \phi \right) u_1 \\ Y_2 &= -Y_1 = - \left( \frac{AE}{\ell} \operatorname{sen} \phi \cos \phi \right) u_1 \end{aligned} \quad (18.4)$$

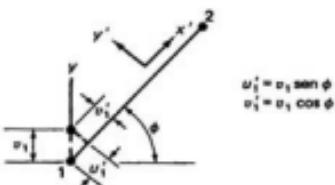
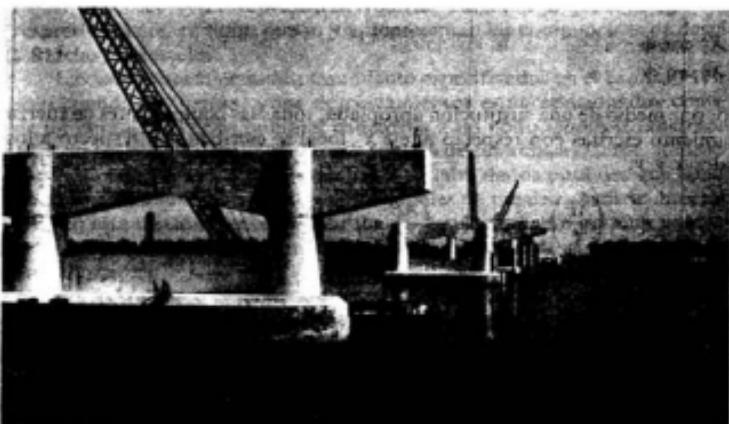


Figura 18.4

De igual manera puede darse un desplazamiento arbitrario  $v'_1$  al nodo 1, en tanto que todos los demás desplazamientos se mantienen iguales a cero. Esta configuración se muestra en la fig. 18.4.

La componente de desplazamiento  $v_1$  puede resolverse en las componentes  $u'_1$  y  $v'_1$  como se muestra en la fig. 18.4. La relación fuerza-desplazamiento, escrita con respecto a coordenadas locales es:

$$X'_1 = \left( \frac{AE}{\ell} \right) u'_1 \quad (18.5)$$



Autopista East Belt (I-440), Little Rock, Arkansas. (Cortesía del Departamento de Caminos y Transporte, del Edo. de Arkansas.)

Cuando la fuerza  $X'_1$  se resuelve en las componentes globales  $X_1$  y  $Y_1$ , pueden escribirse las siguientes ecuaciones, que relacionan las componentes globales de fuerza a la componente global de desplazamiento  $v_1$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= X'_1 \cos \phi = \left( \frac{AE}{\ell} \cos \phi \right) u'_1 = \left( \frac{AE}{\ell} \sin \phi \cos \phi \right) v_1 \\ Y_1 &= X'_1 \sin \phi = \left( \frac{AE}{\ell} \sin \phi \right) u'_1 = \left( \frac{AE}{\ell} \sin^2 \phi \right) v_1 \\ X_2 &= -X_1 = -\left( \frac{AE}{\ell} \sin \phi \cos \phi \right) v_1 \\ Y_2 &= -Y_1 = -\left( \frac{AE}{\ell} \sin^2 \phi \right) v_1 \end{aligned} \quad (18.6)$$

Puede utilizarse un procedimiento similar para establecer la relación fuerza-desplazamiento asociada con desplazamientos arbitrarios  $u_2$  y  $v_2$ . La superposición de todas esas relaciones establece la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} &= \frac{AE}{\ell} \begin{Bmatrix} \cos^2 \phi \\ \sin \phi \cos \phi \\ -\cos^2 \phi \\ -\sin \phi \cos \phi \end{Bmatrix} u_1 + \frac{AE}{\ell} \begin{Bmatrix} \sin \phi \cos \phi \\ \sin^2 \phi \\ -\sin \phi \cos \phi \\ -\sin^2 \phi \end{Bmatrix} v_1 \\ &\quad + \frac{AE}{\ell} \begin{Bmatrix} -\cos^2 \phi \\ -\sin \phi \cos \phi \\ \cos^2 \phi \\ \sin \phi \cos \phi \end{Bmatrix} u_2 + \frac{AE}{\ell} \begin{Bmatrix} -\sin \phi \cos \phi \\ -\sin^2 \phi \\ \sin \phi \cos \phi \\ \sin^2 \phi \end{Bmatrix} v_2 \end{aligned} \quad (18.7)$$

En forma matricial, la ec. 18.7 puede escribirse:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (18.8)$$

en donde

$$\begin{aligned} s &= \sin \phi \\ c &= \cos \phi \end{aligned}$$

La ecuación 18.8 representa una relación completamente general entre las fuerzas y los desplazamientos nodales para un puntal, en donde todas las componentes están escritas con respecto a ejes globales.

Puede usarse una ecuación de rigidez, como la ec. 18.8, para encontrar las componentes globales de desplazamiento de una estructura. En un problema dado, tam-

bien puede ser necesario encontrar las componentes de desplazamiento expresadas en términos de ejes locales. Las relaciones entre las componentes locales y globales de desplazamiento se muestran en las figs. 18.3 y 18.4, y se resumen en forma matricial como sigue:

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad (18.9)$$

Puede escribirse una relación similar para el extremo 2 del puntal, sustituyendo el subíndice 1 por el subíndice 2 en la ec. 18.9. La utilidad de expresiones como la ec. 18.9 se ilustrará en el ejemplo 18.1.

El ejemplo 18.1 ilustra la determinación de los desplazamientos en un punto de una estructura que consta de dos elementos inclinados unidos. Se calculan también las fuerzas en los elementos.

### EJEMPLO 18.1

La armadura mostrada en la fig. 18.5 está sometida a una fuerza horizontal  $P = 10 \text{ kN}$  aplicada en el nodo 3. Determine las componentes de desplazamiento resultante en el nodo libre (nodo 3), así como las fuerzas resultantes en los elementos.

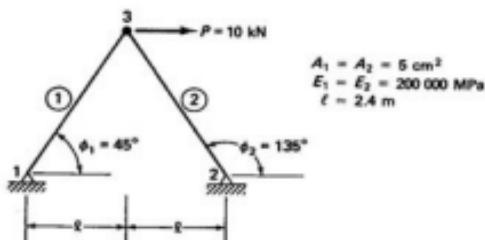


Figura 18.5

*Solución:*

Las ecuaciones de rigidez para la estructura pueden escribirse aplicando, por turnos, los desplazamientos de nodo  $u_3$  y  $v_3$ . Cuando se aplica el desplazamiento  $u_3$ , resulta la configuración mostrada en la fig. 18.6(a).

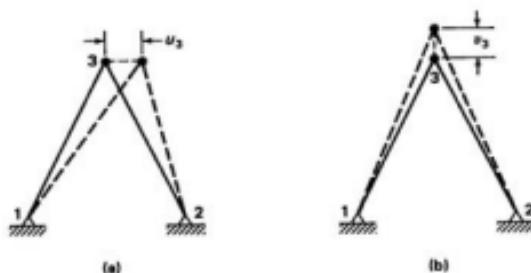


Figura 18.6

Las relaciones fuerza-desplazamiento pueden escribirse con ayuda de la ec. 18.7:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \frac{AE}{\sqrt{2} \ell} \begin{pmatrix} c^2 \\ sc \end{pmatrix}_{\phi_1=45^\circ} u_3 + \frac{AE}{\sqrt{2} \ell} \begin{pmatrix} c^2 \\ sc \end{pmatrix}_{\phi_2=135^\circ} u_3 = 29463 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_3 \\ \text{para el elemento } ① \quad \text{para el elemento } ② \end{cases}$$

Cuando se aplica  $v_3$ , resulta la configuración de la fig. 18.6(b), y las relaciones fuerza-desplazamiento resultantes son:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \frac{AE}{\sqrt{2} \ell} \begin{pmatrix} sc \\ s^2 \end{pmatrix}_{\phi_1=45^\circ} v_3 + \frac{AE}{\sqrt{2} \ell} \begin{pmatrix} sc \\ s^2 \end{pmatrix}_{\phi_2=135^\circ} v_3 = 29463 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_3 \\ \text{para el elemento } ① \quad \text{para el elemento } ② \end{cases}$$

Cuando se superponen las dos relaciones de desplazamientos impuestos, se tiene:

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = 29463 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_3 + 29463 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_3 = 29463 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (18.10)$$

La ecuación de rigidez, dada por la ec. 18.10, puede resolverse para los desplazamientos nodales  $u_3$  y  $v_3$ :

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{29463} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} X_3 = P = 10 \\ Y_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.394 \times 10^{-4} \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m}$$

Las fuerzas en los elementos pueden encontrarse utilizando la ec. 18.9 para transformar las componentes globales de desplazamiento en componentes locales para cada elemento y luego se aplica la relación de rigidez básica dada por la ec. 17.8.

Para el elemento 1 ( $\phi_1 = 45^\circ$ ):

$$\begin{Bmatrix} u'_3 \\ v'_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.394 \times 10^{-4} / \sqrt{2} \\ -3.394 \times 10^{-4} / \sqrt{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.4 \times 10^{-4} \\ -2.4 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} \text{ m}$$

y

$$X'_{3,1} = \frac{AE}{\sqrt{2} \ell} u'_3 = \frac{(5 \times 10^{-4})(200,000 \times 10^3)}{\sqrt{2} (2.4)} \times 2.4 \times 10^{-4} = 7.07 \text{ kN}$$

Para el elemento 2 ( $\phi_2 = 135^\circ$ ):

$$\begin{Bmatrix} u'_3 \\ v'_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.394 \times 10^{-4} / \sqrt{2} \\ -3.394 \times 10^{-4} / \sqrt{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.4 \times 10^{-4} \\ -2.4 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} \text{ m}$$

y

$$X'_{3,2} = \frac{AE}{\sqrt{2} \ell} u'_3 = \frac{(5 \times 10^{-4})(200,000 \times 10^3)}{\sqrt{2} (2.4)} \times 2.4 \times 10^{-4} = -7.07 \text{ kN} \blacksquare \blacksquare$$

### 18.3 ELEMENTOS A FLEXION

Las ecuaciones de rigidez para elementos a flexión orientados arbitrariamente, pueden deducirse del mismo modo general empleado para los puntales. Para este análisis consideraremos el elemento simple a flexión mostrado en la fig. 18.7. En la fig. 18.7(a) se muestran las fuerzas en los elementos expresadas en términos de ejes locales y en la fig. 18.7(b) se muestran en términos de ejes globales. Para facilitar su estudio, los efectos de la fuerza axial, así como de la fuerza cortante y el momento flexionante, se tratan en conjunto en esta sección.

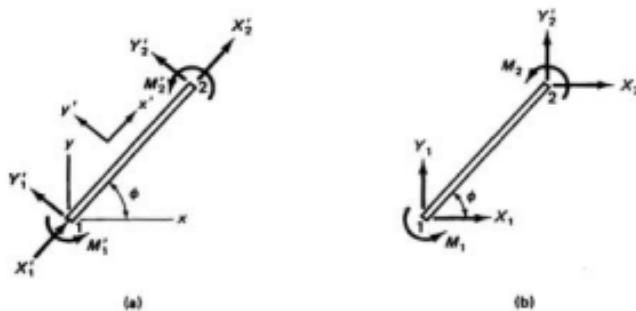


Figura 18.7



Edificio Westvaco, Ciudad de Nueva York. Las armaduras y trábes más imponentes que jamás hayan servido de cimiento para un edificio en el Blue Chip Row de Manhattan. (Cortesía de Bethlehem Steel Co.)

En la fig. 18.7(a) el eje  $y$  local (designado  $y'$ ) se muestra actuando hacia arriba y hacia la izquierda, aunque esta elección de dirección es arbitraria. Para los propósitos de este libro los autores han escogido el sentido del eje  $y'$  *hacia arriba* si  $x'$  señala hacia la *derecha* del observador. Entonces, cuando el proyectista escoge el sentido del eje  $x'$ , el del eje  $y'$  queda automáticamente determinado. El ángulo  $\phi$  que describe la orientación del elemento con respecto a las coordenadas globales se mide en el sentido positivo de la regla de la mano derecha, del eje positivo  $x$  hacia el eje positivo  $x'$ . Las figs. 18.8(a) y 18.8(b) ilustran la manera de orientar dos conjuntos de ejes particulares.

Para establecer las relaciones fuerza-desplazamiento para los elementos a flexión en términos de componentes globales, a una componente específica de desplazamiento, digamos a  $u_1$ , se le da un valor arbitrario, en tanto que todas las demás componentes se mantienen en cero. La configuración desplazada se muestra enseñada en la fig. 18.9.

La componente de desplazamiento  $u_1$ , se descompone en componentes locales de desplazamiento:

$$u'_1 = u_1 \cos \phi \quad v'_1 = -u_1 \sin \phi \quad \theta'_1 = 0 \quad (18.11)$$

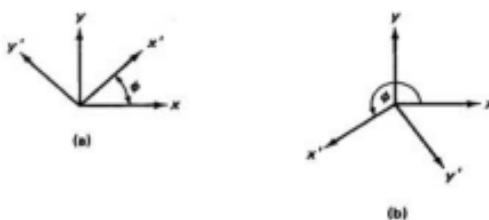


Figura 18.8

Las componentes de fuerza que actúan en el nodo 1 en respuesta a los desplazamientos  $u'_1$  y  $v'_1$  (que se resumieron previamente en la ec. 17.29) se repiten aquí:

$$\begin{Bmatrix} X'_1 \\ Y'_1 \\ M'_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{AE}{\ell} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u'_1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{12EI}{\ell^3} \\ \frac{6EI}{\ell^2} \end{Bmatrix} v'_1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{4EI}{\ell} \end{Bmatrix} \theta'_1 \quad (18.12)$$

La sustitución de la ec. 18.11 en la 18.12 produce los siguientes resultados:

$$\begin{Bmatrix} X'_1 \\ Y'_1 \\ M'_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{AE}{\ell} \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u_1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{12EI}{\ell^3} \sin \phi \\ -\frac{6EI}{\ell^2} \sin \phi \end{Bmatrix} u_1 = \begin{Bmatrix} \frac{AE}{\ell} \cos \phi \\ -\frac{12EI}{\ell^3} \sin \phi \\ -\frac{6EI}{\ell^2} \sin \phi \end{Bmatrix} u_1 \quad (18.13)$$

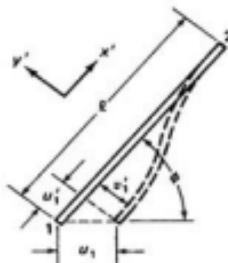


Figura 18.9

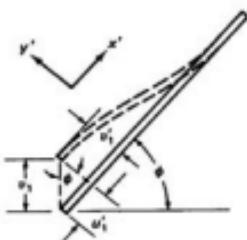


Figura 18.10

Análogamente, se imparte ahora un desplazamiento  $v_1$  al nodo 1 y la configuración resultante se muestra en la fig. 18.10.

El desplazamiento  $v_1$  se descompone en componentes locales:

$$\begin{aligned} u'_1 &= v_1 \operatorname{sen} \phi \\ v'_1 &= v_1 \cos \phi \\ \theta'_1 &= 0 \end{aligned} \quad (18.14)$$

Las fuerzas resultantes en el nodo 1 pueden escribirse sustituyendo esos valores de los desplazamientos en la ec. 18.12:

$$\begin{Bmatrix} X'_1 \\ Y'_1 \\ M'_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{AE}{\ell} \operatorname{sen} \phi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} v_1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{12EI}{\ell^3} \cos \phi \\ \frac{6EI}{\ell^2} \cos \phi \end{Bmatrix} v_1 = \begin{Bmatrix} \frac{AE}{\ell} \operatorname{sen} \phi \\ \frac{12EI}{\ell^3} \cos \phi \\ \frac{6EI}{\ell^2} \cos \phi \end{Bmatrix} \quad (18.15)$$

La rotación  $\theta'_1$  (en coordenadas locales) es exactamente la misma que  $\theta_1$ . Por tanto, las relaciones de rigidez, debido a una rotación impuesta del nodo, pueden escribirse, con base en la ec. 18.12, como

$$\begin{Bmatrix} X'_1 \\ Y'_1 \\ M'_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{4EI}{\ell} \end{Bmatrix} \theta'_1 \quad (18.16)$$

Las fuerzas  $X'_1$  y  $Y'_1$ , expresadas en coordenadas locales, se expresan ahora en las componentes globales  $X_1$  y  $Y_1$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= X'_1 \cos \phi - Y'_1 \sin \phi \\ Y_1 &= X'_1 \sin \phi + Y'_1 \cos \phi \\ M_1 &= M'_1 \end{aligned} \quad (18.17)$$

La sustitución de los valores de  $X'_1$  y  $Y'_1$  dados por las ecs. 18.13, 18.15 y 18.16 en las ecs. 18.17, da el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos \phi \left[ \frac{AE}{\ell} \cos \phi u_1 + \frac{AE}{\ell} \sin \phi v_1 \right] \\ &\quad - \sin \phi \left[ \frac{-12EI}{\ell^3} \sin \phi u_1 + \frac{12EI}{\ell^3} \cos \theta v_1 \right] \\ Y_1 &= \sin \phi \left[ \frac{AE}{\ell} \cos \phi u_1 + \frac{AE}{\ell} \sin \phi v_1 \right] \\ &\quad + \cos \phi \left[ \frac{-12EI}{\ell^3} \sin \phi u_1 + \frac{12EI}{\ell^3} \cos \phi v_1 \right] \\ M_1 &= \frac{-6EI}{\ell^2} \sin \phi u_1 + \frac{6EI}{\ell^2} \cos \phi v_1 \end{aligned} \quad (18.18)$$

Las componentes de fuerza  $X_2$ ,  $Y_2$ , y  $M_2$ , que resultan de las componentes de desplazamiento impuesto en el nodo 1, pueden encontrarse de manera similar, comenzando con las componentes locales de fuerza en el nodo 2 dadas en las ecs. 17.29. El proceso completo puede repetirse usando componentes de desplazamiento impuesto en el nodo 2. Un resumen de los resultados de esas operaciones se muestra a continuación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 \frac{AE}{\ell} + s^2 \frac{12EI}{\ell^3} & -s \left( \frac{AE}{\ell} - \frac{12EI}{\ell^3} \right) & s \left( \frac{AE}{\ell} + c^2 \frac{12EI}{\ell^3} \right) & -c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & -s \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) \\ -s \left( \frac{AE}{\ell} - \frac{12EI}{\ell^3} \right) & c^2 \left( \frac{AE}{\ell} - \frac{12EI}{\ell^3} \right) & -c \left( \frac{AE}{\ell} + c^2 \frac{12EI}{\ell^3} \right) & -s \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & -c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & s \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) \\ -c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & -s \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & c^2 \left( \frac{AE}{\ell} + c^2 \frac{12EI}{\ell^3} \right) & c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & -c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & -s \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) \\ -s \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & -c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & c^2 \left( \frac{AE}{\ell} - \frac{12EI}{\ell^3} \right) & s \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) \\ -c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & -s \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & s \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & c^2 \left( \frac{AE}{\ell} - \frac{12EI}{\ell^3} \right) & -c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) \\ -s \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & -c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & -c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & -c \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) & c^2 \left( \frac{AE}{\ell} + c^2 \frac{12EI}{\ell^3} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{Simétrica}) \quad (18.19)$$

en donde

$$s = \sin \phi \quad y \quad c = \cos \phi.$$

La ecuación 18.19 representa una ecuación de rigidez completamente general para un elemento bidimensional que trabaja a fuerza axial y a flexión y orientado según un ángulo  $\phi$  cualquiera, respecto a ejes globales.

Los ejemplos 18.2 y 18.3 ilustran el análisis de estructuras cuyos elementos están sometidos a fuerzas axiales y cortantes, así como a momentos flexionantes.

### EJEMPLO 18.2

Determinar los desplazamientos en el nodo 2, las reacciones en los nodos 1 y 3 y las fuerzas internas en los elementos 1 y 2 para la estructura mostrada en la fig. 18.11:

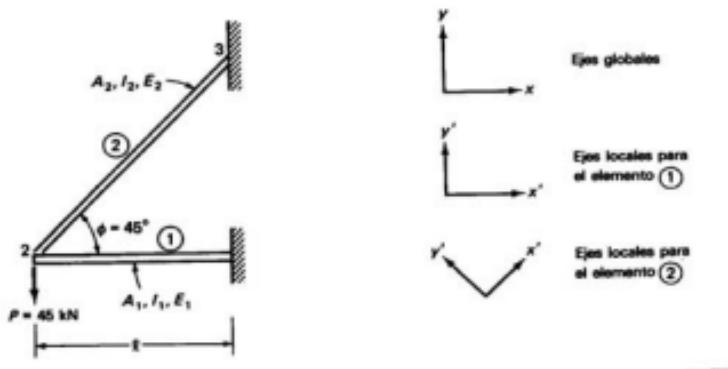


Figura 18.11

*Solución:*

La ecuación de rigidez para el elemento ①, incluyendo los efectos de la fuerza axial, está dada por la ec. 17.30 y reproducida a continuación:

$$\begin{pmatrix} X_{1,1} \\ Y_{1,1} \\ M_{1,1} \\ X_{1,2} \\ Y_{1,2} \\ M_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 & 0 & -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_1 & 0 & 0 & \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_1 & 0 \\ 0 & 0 & 4\left(\frac{EI}{L}\right)_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 & 0 & \left(\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 & 0 \\ 0 & -12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 & -6\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 & 0 & 12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 & 0 \\ 0 & 6\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 & 2\left(\frac{EI}{L}\right)_1 & 0 & 0 & -6\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (18.20)$$

Las ecuaciones de rigidez para el elemento ② pueden encontrarse directamente de la ec. 18.19, sustituyendo en ésta los subíndices 1 y 2 por los 2 y 3, que caracterizan los extremos del elemento ②:

$$\begin{bmatrix} X_{2,2} \\ Y_{2,2} \\ M_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3} \right)_2 & \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3} \right)_2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_2 & 4 \left( \frac{EJ}{\ell} \right)_2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} - \frac{12EI}{\ell^3} \right)_2 & \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} - \frac{12EI}{\ell^3} \right)_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_2 & 4 \left( \frac{EJ}{\ell} \right)_2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_2 & \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3} \right)_3 & \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3} \right)_3 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_3 \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3} \right)_2 & -\frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} - \frac{12EI}{\ell^3} \right)_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_2 & \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3} \right)_3 \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} - \frac{12EI}{\ell^3} \right)_2 & -\frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3} \right)_2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_2 & \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} - \frac{12EI}{\ell^3} \right)_3 & \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3} \right)_3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_2 & 2 \left( \frac{EJ}{\ell} \right)_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_3 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_3 & 4 \left( \frac{EJ}{\ell} \right)_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (18.21)$$

Después de tomar en cuenta las condiciones de frontera impuestas:

$$u_1 = v_1 = \theta_1 = u_3 = v_3 = \theta_3 = 0$$

la ecuación de rigidez para la estructura completa se escribe en términos de las tres componentes de desplazamiento libre  $u_2$ ,  $v_2$  y  $\theta_2$  sumando los términos correctos de rigidez de los elementos individuales, o sea:

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{2,1} + X_{2,3} \\ Y_{2,1} + Y_{2,3} \\ M_{2,1} + M_{2,3} \end{Bmatrix} \quad (18.22)$$

El resultado de esta operación determina la ecuación de rigidez que sigue:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} \right)_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3} \right)_1 & \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} - \frac{12EI}{\ell^3} \right)_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_1 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} - \frac{12EI}{\ell^3} \right)_1 & \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3} \right)_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{AE}{\ell} + \frac{12EI}{\ell^3} \right)_2 + \left( \frac{EJ}{\ell} \right)_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_1 & \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_1 & \left( \frac{EJ}{\ell} \right)_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{6EI}{\ell^3} \right)_1 & 4 \left( \frac{EJ}{\ell} \right)_1 + 4 \left( \frac{EJ}{\ell} \right)_2 \end{Bmatrix} \quad (18.23)$$

Las soluciones para los desplazamientos en el nudo 2, para los siguientes valores específicos de las propiedades de los elementos, se indican a continuación:

$$\left( \frac{AE}{\ell} \right)_1 = \left( \frac{AE}{\ell} \right)_2 = \left( \frac{12EI}{\ell^3} \right)_1 = \left( \frac{12EI}{\ell^3} \right)_2 = 180\,000 \text{ kN/m}$$

$$\phi_2 = 45^\circ$$

$$\ell = 1.80 \text{ m}$$

$$P = 45 \text{ kN}$$

Entonces

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -45 \\ 0 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 360 & 0 & -162 \\ 0 & 360 & 324 \\ -162 & 324 & 583 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

La solución del conjunto de ecuaciones anterior da:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.083 \text{ m} \\ -0.292 \text{ m} \\ 0.185 \text{ rad} \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

La sustitución de esos desplazamientos nodales en las ecs. 18.20 y 18.21 nos da las reacciones en los nodos 1 y 3:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{1,2} \\ Y_{1,2} \\ M_{1,2} \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} -180 & 0 & 0 \\ 0 & -180 & -162 \\ 0 & 162 & 97.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -14.94 \text{ kN} \\ 22.59 \text{ kN} \\ -29.32 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{Bmatrix}$$

y

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{3,2} \\ Y_{3,2} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} -180 & 0 & 162 \\ 0 & -180 & -162 \\ -162 & 162 & 194.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15.03 \text{ kN} \\ 22.59 \text{ kN} \\ -24.79 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{Bmatrix}$$

Las reacciones mostradas arriba también son fuerzas en los elementos expresadas en coordenadas globales. Para encontrar las componentes de fuerza axial y cortante, que son necesarias para efectuar el cálculo de esfuerzos, las fuerzas expresadas en componentes globales deben escribirse en componentes locales por medio de relaciones similares a las dadas en la ec. 18.17:

$$X' = X \cos \phi + Y \sin \phi$$

$$Y' = -X \sin \phi + Y \cos \phi$$

$$M' = M$$

Sustituyendo en estas ecuaciones se obtiene:

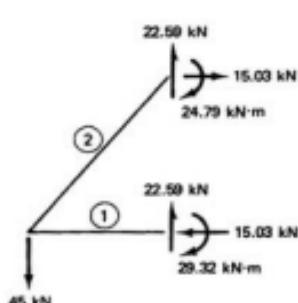
Elemento ①  $(\phi = 0^\circ)$

$$\begin{cases} X'_{1,2} = -14.94 \text{ kN} \\ Y'_{1,2} = 22.59 \text{ kN} \\ M'_{1,2} = -29.32 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{cases}$$

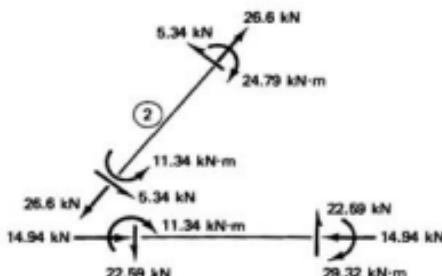
Elemento ②  $(\phi = 45^\circ)$

$$\begin{cases} X'_{3,2} = 26.6 \text{ kN} \\ Y'_{3,2} = 5.34 \text{ kN} \\ M'_{3,2} = -24.79 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{cases}$$

En las figs. 18.12(a) y 18.12(b) se indican las reacciones nodales y las fuerzas en los elementos de esta estructura:



(a) Reacciones nodales



(b) Fuerzas en los elementos



Figura 18.12

### EJEMPLO 18.3

La estructura de la fig. 18.13 consta de cuatro elementos de igual longitud conectados en un punto común, y está sometida a un momento concentrado en este nodo. Determine los desplazamientos de este nodo.

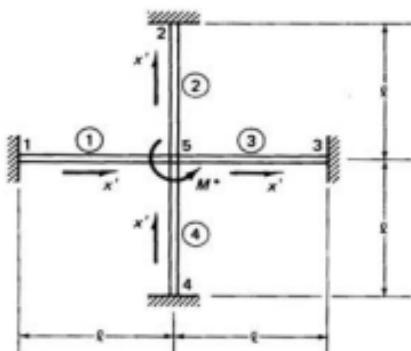


Figura 18.13

*Solución:*

Los números de los nodos y de los elementos se muestran en la fig. 18.13. La ecuación de rigidez para la estructura puede determinarse considerando las fuerzas necesarias para mover, consecutivamente, los extremos de cada elemento individual, las distancias arbitrarias  $u_5$ ,  $v_5$  y  $\theta_5$ . Estos coeficientes de fuerzas pueden determinarse a partir de la ec. 18.19, como sigue:

$$(\phi_1 = 0) \begin{Bmatrix} X_{5,1} \\ Y_{5,1} \\ M_{5,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{12EI}{\ell^3}\right)_1 & -\left(\frac{6EI}{\ell^2}\right)_1 \\ 0 & -\left(\frac{6EI}{\ell^2}\right)_1 & \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}$$

$$(\phi_2 = 90^\circ) \begin{Bmatrix} X_{5,2} \\ Y_{5,2} \\ M_{5,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{12EI}{\ell^3}\right)_2 & 0 & -\left(\frac{6EI}{\ell^2}\right)_2 \\ 0 & \frac{AE}{\ell} & 0 \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}$$

$$(\phi_3 = 0) \begin{Bmatrix} X_{5,3} \\ Y_{5,3} \\ M_{5,3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{12EI}{\ell^3}\right)_3 & \left(\frac{6EI}{\ell^2}\right)_3 \\ 0 & \left(\frac{6EI}{\ell^2}\right)_3 & \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}$$

$$(\phi_4 = 90^\circ) \begin{Bmatrix} X_{5,4} \\ Y_{5,4} \\ M_{5,4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{12EI}{\ell^3}\right)_4 & 0 & \left(\frac{6EI}{\ell^2}\right)_4 \\ 0 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_4 & 0 \\ \left(\frac{6EI}{\ell^2}\right)_4 & 0 & \left(\frac{4EI}{\ell}\right)_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}$$

La resistencia total al movimiento del nodo 5 es simplemente la suma de los coeficientes individuales de fuerza de los cuatro elementos. Así:

$$\begin{bmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 + \left(\frac{12EI}{\ell^3}\right)_1 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 + \left(\frac{12EI}{\ell^3}\right)_2 & 0 & -\left(\frac{AE}{\ell^2}\right)_1 + \left(\frac{ME}{\ell}\right)_1 \\ 0 & \left(\frac{12EI}{\ell^3}\right)_1 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 + \left(\frac{12EI}{\ell^3}\right)_2 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & -\left(\frac{ME}{\ell^2}\right)_1 + \left(\frac{ME}{\ell}\right)_2 \\ -\left(\frac{ME}{\ell^2}\right)_1 + \left(\frac{ME}{\ell}\right)_1 & -\left(\frac{ME}{\ell^2}\right)_2 + \left(\frac{ME}{\ell}\right)_2 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{bmatrix} \quad (18.24)$$

Para tener una solución numérica hagamos

$$\begin{aligned} \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 &= \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 = \psi & \left(\frac{EI}{\ell^3}\right)_1 &= \left(\frac{EI}{\ell^3}\right)_2 = 0.05\psi \\ \left(\frac{AE}{\ell}\right)_3 &= \left(\frac{AE}{\ell}\right)_4 = 2\psi & \left(\frac{EI}{\ell^3}\right)_3 &= \left(\frac{EI}{\ell^3}\right)_4 = 0.10\psi \end{aligned}$$

La ecuación de rigidez resulta ser entonces:

$$\begin{Bmatrix} X_5 = 0 \\ Y_5 = 0 \\ M_5 = M^* \end{Bmatrix} = \psi \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0.3\ell \\ 0 & 4.8 & 0.3\ell \\ 0.3\ell & 0.3\ell & 24\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} \quad (18.25)$$



Puente sobre el río Chetco, Brookings, Oregon. (Cortesía del Departamento de Transporte de Oregon.)

La solución para las componentes de desplazamiento en el nodo 5 se determina resolviendo simultáneamente las tres ecuaciones que se muestran en la ecuación matricial 18.25:

$$\begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Psi} \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0.3\ell \\ 0 & 4.8 & 0.3\ell \\ 0.3\ell & 0.3\ell & 24\ell^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^* \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.0026\ell \\ -0.0026\ell \\ +0.04173 \end{Bmatrix} \frac{M^*\ell}{(EI)_1} \quad (18.26)$$

Una solución obtenida, empleando el método de distribución de momentos, da los siguientes resultados ligeramente diferentes:

$$\begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.04167 \end{Bmatrix} \frac{M^*\ell}{(EI)_1}$$

Las diferencias entre las soluciones determinadas usando las ecuaciones de rigidez y el método de distribución de momentos se presentan debido a que las ecuaciones de rigidez toman en cuenta las *deformaciones axiales*, en tanto que el método de distribución de momentos supone que las deformaciones axiales son nulas. No toma en cuenta las deformaciones axiales en estructuras sencillas como la considerada aquí, no presenta errores apreciables en los cálculos. Sin embargo, en estructuras más complicadas, por ejemplo, en estructuras de muchos niveles, la hipótesis de una deformación axial nula puede presentar errores considerables. ■ ■

#### **18.4 CARGAS APLICADAS ENTRE LOS NODOS**

Los problemas que se analizaron en las secciones anteriores contenían fuerzas y momentos concentrados aplicados sólo en los nodos. Como casi todas las estructuras están sometidas a cargas distribuidas o concentradas entre sus nodos, la técnica de solución empleando el método de la rigidez debe ampliarse para permitir el tratamiento de tales condiciones. Afortunadamente, los cambios necesarios son relativamente pocos.

La viga de la fig. 18.14, que tiene una carga uniformemente distribuida sobre el segmento 2, se estudiará en el siguiente análisis.

Si todos los grados de libertad de la estructura están restringidos (o sea,  $v_1 = v_2 = v_3 = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0.0$ ), las reacciones nódulas resultantes se denominan "fuerzas empotradas". El término fuerzas, tal como se usa aquí, incluye, tanto las fuerzas transversales, como los momentos. Para el problema mostrado en la fig. 18.14, las fuerzas empotradas son

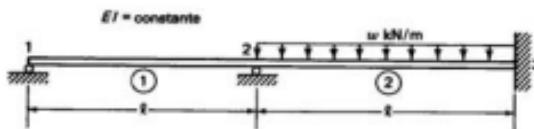


Figura 18.14

$$\{P\}^F = \begin{Bmatrix} Y_1^F \\ M_1^F \\ Y_2^F \\ M_2^F \\ Y_3^F \\ M_3^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{w\ell}{2} \\ \frac{w\ell^2}{12} \\ \frac{w\ell}{2} \\ -\frac{w\ell^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (18.27)$$

Las fuerzas nodales adicionales debidas a los desplazamientos nodales están dadas por la ec. 17.26 (para una viga en la que los desplazamientos axiales son insignificantes):

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & & & & & \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & & & & \\ -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{24EI}{\ell^3} & & & \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & \frac{8EI}{\ell} & & \\ 0 & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} & \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{Simétrica}) \quad (18.28)$$

o bien,

$$\{P\}^N = [K]\{\delta\}$$

Por consiguiente, la carga nodal resultante, cuando actúan cargas distribuidas sobre la estructura, se expresa en general como la suma de los segundos miembros de las ecs. 18.27 y 18.28:

$$\{P\}^{\text{total}} = \{P\}^F + [K]\{\delta\} \quad (18.29)$$

Después de tachar los renglones y columnas asociados con los desplazamientos nulos impuestos ( $v_1, v_2, v_3, \theta_3$ ), las ecuaciones de rigidez restantes son:

$$\begin{Bmatrix} M_1 = 0 \\ M_2 = 0 \end{Bmatrix}^{\text{total}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{w\ell^2}{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{8EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (18.30)$$

La solución para los desplazamientos libres se encuentra resolviendo el siguiente conjunto de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{8EI}{\ell} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{w\ell^2}{12} \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \end{Bmatrix} \frac{w\ell^3}{12EI} \quad (18.31)$$

Las fuerzas nodales se encuentran sustituyendo los valores de los desplazamientos libres en la ec. 18.29:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{w\ell}{2} \\ \frac{w\ell}{2} \\ -\frac{w\ell^2}{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{2EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 39 \\ 48 \\ -9\ell \end{Bmatrix} \frac{w\ell}{84}$$

Las fuerzas internas en los elementos, debidas a los desplazamientos nodales, pueden encontrarse sustituyendo los valores encontrados para  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en las matrices de rigidez de los elementos individuales de viga. Estos momentos internos se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{6}{168} w\ell^2 \end{Bmatrix}$$

y

$$\begin{Bmatrix} M_{2,3} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{8}{168} w\ell^2 \\ \frac{-4}{168} w\ell^2 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas internas totales son aquellas que resultan de la condición de "empotramiento" más aquellas que resultan de los desplazamientos nodales. En este ejemplo, no se generan fuerzas internas en el elemento ① debido a las condiciones de empotramiento. Para el elemento ②, los momentos internos debidos a las condiciones de empotramiento son:

$$\begin{Bmatrix} M_{2,3} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{w\ell^2}{12} \\ -\frac{w\ell^2}{12} \end{Bmatrix}$$

Entonces, los momentos finales son:

$$\begin{Bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,1} \end{Bmatrix}^{\text{final}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{6}{168} w\ell^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{6}{168} w\ell^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{2,3} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix}^{\text{final}} = \begin{Bmatrix} \frac{w\ell^2}{12} \\ -\frac{w\ell^2}{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{8}{168} w\ell^2 \\ \frac{-4}{168} w\ell^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{6}{168} w\ell^2 \\ -\frac{18}{168} w\ell^2 \end{Bmatrix}$$

El ejemplo 18.4 ilustra el análisis de un marco que consta de un elemento horizontal y de uno inclinado, estando ambos sometidos a cargas aplicadas entre sus nodos. El propósito de este ejemplo es mostrar al lector cómo tratar las cargas distribuidas, aplicadas a elementos inclinados y, las cargas concentradas actuando entre nodos, así como mostrarle cómo tratar las fuerzas de empotramiento de miembros adyacentes.

#### EJEMPLO 18.4

El marco de la fig. 18.15 soporta una carga uniformemente distribuida sobre el elemento ① y una carga concentrada a la mitad del elemento ②. Se trata de establecer las ecuaciones de rigidez necesarias para resolver el problema.

*Solución:*

Las "fuerzas de empotramiento" que actúan en el elemento ① se muestran en la fig. 18.16(a) con las fuerzas cortantes actuando paralelamente al eje y local del

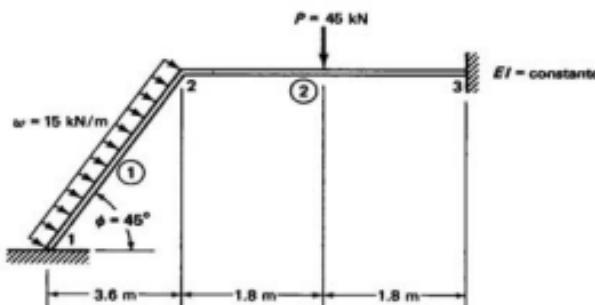


Figura 18.15

elemento ①. Estas fuerzas se resuelven en fuerzas que actúen en la dirección global; las “fuerzas de empotramiento” se han vuelto a dibujar en la fig. 18.16(b). Las “fuerzas de empotramiento” correctas que actúan en el elemento ② se muestran en la fig. 18.16(c).

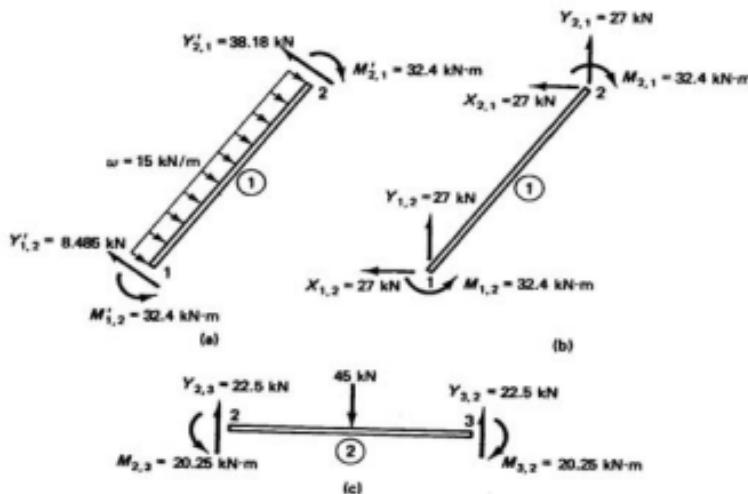


Figura 18.16

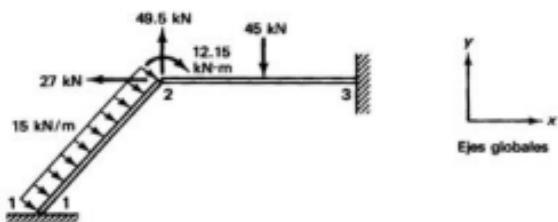


Figura 18.17

La suma de todas las fuerzas de empotramiento produce la carga total de empotramiento para el marco mostrado en la fig. 18.17.

Las ecuaciones de rigidez asociadas con los nodos libres de esta estructura pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{\text{total}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -27 \\ 49.5 \\ -12.15 \end{Bmatrix}$$

Los desplazamientos nodales libres se determinan empleando algún método adecuado para resolver ecuaciones simultáneas.

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 27 \\ -49.5 \\ 12.15 \end{Bmatrix}$$

El marco mostrado en la fig. 18.15 consta de dos elementos y tres nodos. Como se ha mostrado en este ejemplo, la fuerza concentrada que actúa entre los nodos del elemento ② se trata de manera similar a la utilizada para la carga distribuida. Alternativamente, el proyectista puede preferir agregar otro nodo al marco en el lugar de aplicación de la carga concentrada. Esto eliminaría la necesidad de darle un tratamiento especial a la carga concentrada, pero agrega tres nuevas componentes de desplazamiento al conjunto de incógnitas del problema.

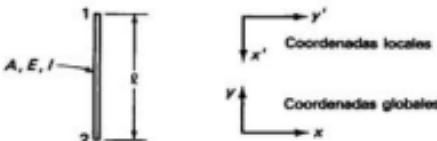
Aunque los problemas de ejemplo trataron casos especiales de carga entre nodos, el método ilustrado en esos ejemplos puede usarse para cualquier forma de carga distribuida o concentrada entre nodos. Al aplicar el método de la rigidez a esos problemas, el proyectista se enfrenta a la tarea adicional de determinar las fuerzas de empotramiento para casos comunes de carga.

**PROBLEMAS**

- 18.1** Determine la matriz de rigidez global  $[K]$  para el elemento vertical mostrado. Suponga que los ejes locales se orientan como se muestra en el croquis.  
 (Sugerencia: Use la ec. 18.19 con  $\theta = 90^\circ$ .)

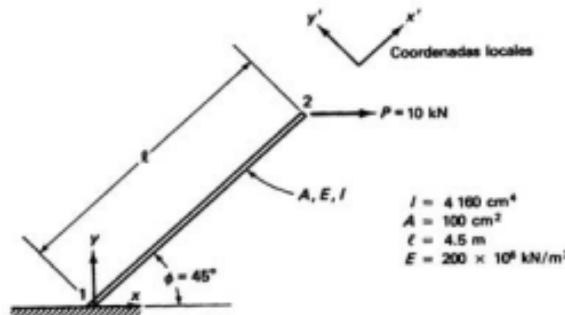


- 18.2** Repita el problema 18.1 pero use un nuevo conjunto de ejes locales. Note las diferencias en las matrices de rigidez especificadas en los problemas 18.2 y 18.1.

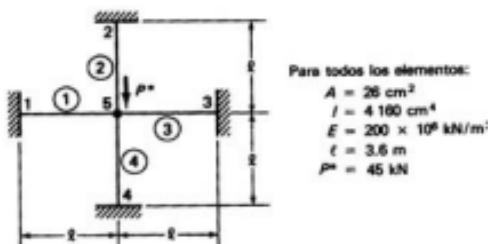


$$\text{Resp.: } [K] = \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{12EI}{\ell^3} & & & & & \\ & 0 & \frac{AE}{\ell} & & & \\ & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{4EI}{\ell} & & \\ & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} & \\ & 0 & \frac{-AE}{\ell} & 0 & 0 & \frac{AE}{\ell} \\ & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI}{\ell} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{4EI}{\ell} \end{array} \right] \quad (\text{Simétrica})$$

- 18.3** Un puntal en voladizo está orientado a  $45^\circ$  con la horizontal. Una carga  $P$  horizontal actúa en el extremo del voladizo. Determine lo siguiente:  
 (a) La matriz de rigidez para el puntal;  
 (b) Los desplazamientos en el nodo 2 (expresados con respecto al sistema coordenado global);  
 (c) Los desplazamientos globales en el nodo 2 en un conjunto de desplazamientos locales ( $u'_2, v'_2, \theta'_2$ ) y  
 (d) Utilice las respuestas a la parte (c) para especificar las fuerzas en los elementos del puntal (expresadas con respecto a ejes locales).

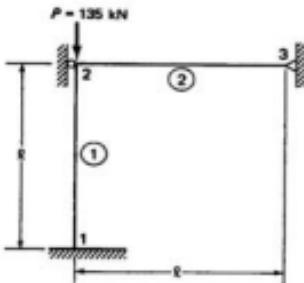


- 18.4 Una estructura cruciforme está formada de cuatro elementos unidos en el nodo 5, tal como se indica en la figura. Una fuerza  $P^*$  actúa en el nodo 5. Determine lo siguiente:
- La matriz de rigidez global;
  - Aplique las condiciones de frontera y determine los desplazamientos nodales en el nodo 5 debidos a  $P^*$ ;
  - Considere que todas las áreas transversales son nulas ( $A = 0$ ). Vuelva a calcular el desplazamiento en el nodo 5.



Resp.: (b)  $u_5 = 0.0$ ;  $v_5 = -0.153 \text{ mm}$ ;  $\theta_5 = 0.0$   
(c)  $u_5 = 0.0$ ;  $v_5 = -10.5 \text{ mm}$ ;  $\theta_5 = 0.0$

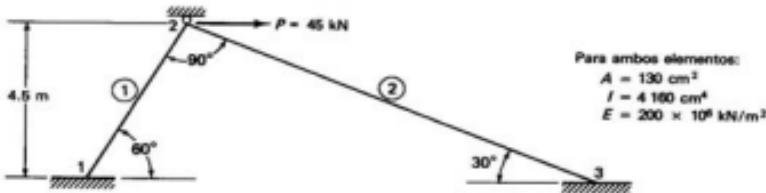
- 18.5 Un marco de dos elementos está rígidamente soportado en el nodo 1 y articulado en el 3. En el nodo 2 tiene un soporte de rodillo.
- Determine los desplazamientos en los nodos 2 y 3.
  - Sean ahora nulas las áreas transversales de los elementos ( $A = 0$ ). Vuelva a calcular los desplazamientos nodales. ¿Puede explicar la naturaleza de la solución para la parte (b)?



Para ambos elementos:

$$\begin{aligned}A &= 130 \text{ cm}^2 \\I &= 4160 \text{ cm}^4 \\E &= 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \\L &= 3.6 \text{ m}\end{aligned}$$

- 18.6 Un marco consta de dos elementos unidos en el nodo 2 y empotrado en los nodos 1 y 3. En 2 se tiene un soporte de rodillo. En el nodo 2 actúa horizontalmente una fuerza concentrada  $P$ . Determine lo siguiente:
- La matriz de rigidez global;
  - Aplique las condiciones de frontera y determine los desplazamientos nodales resultantes en el nodo 2;
  - Las reacciones en los nodos 1, 2 y 3.



Para ambos elementos:

$$\begin{aligned}A &= 130 \text{ cm}^2 \\I &= 4160 \text{ cm}^4 \\E &= 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2\end{aligned}$$

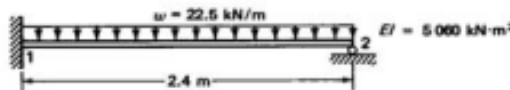
Resp.: (b)  $u_2 = 0.1316 \times 10^{-3} \text{ m}$   
 $\theta_2 = -2.5 \times 10^{-3} \text{ rad}$

(c)  $X'_{1,2} = -32.92 \text{ kN}$   
 $Y'_{1,2} = 0.035 \text{ kN}$   
 $M_1 = 0.131 \text{ kN}\cdot\text{m}$

$$M_2 = 0.00$$

$$\begin{aligned}X'_{2,3} &= -32.92 \text{ kN} \\Y'_{2,3} &= -0.0063 \text{ kN} \\M_3 &= -0.0054 \text{ kN}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

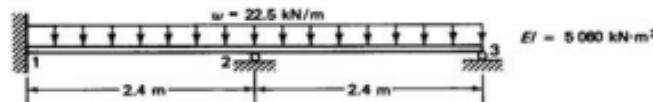
- 18.7 Use el método descrito en la sección 18.4 para determinar los incisos (a) y (b) para la viga mostrada que tiene una carga  $w$  uniformemente distribuida en todo su claro.
- Rotación en el nodo 2;
  - Reacciones en los nodos 1 y 2.



- 18.8 Una viga continua tiene una carga uniformemente distribuida sobre toda su longitud.

Determine lo siguiente:

- Rotaciones en los nodos 2 y 3;
- Reacciones en los nodos 1, 2 y 3.



Resp.: (a)  $\theta_2 = -0.00037 \text{ rad}$

$$\theta_3 = +0.00146 \text{ rad}$$

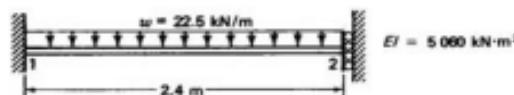
$$(b) Y_1 = 25.07 \text{ kN}$$

$$Y_2 = 61.71 \text{ kN}$$

$$Y_3 = 21.21 \text{ kN}$$

- 18.9 Una viga de un solo claro tiene una carga uniformemente distribuida sobre toda su longitud. El extremo derecho de la viga está empotrado y guiado (traslación vertical libre, giro impedido). Determine lo siguiente:

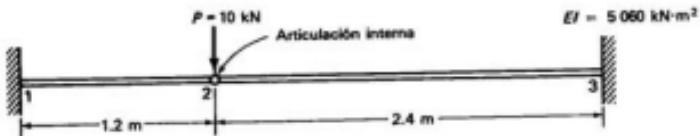
- Desplazamiento transversal en el nodo 2; y
- Reacciones en los nodos 1 y 2.



- 18.10 Una viga empotrada en sus extremos tiene una articulación interna. En esta articulación actúa una fuerza vertical  $P$ . Determine lo siguiente †:

- Desplazamiento transversal en el nodo 2;
- Rotaciones en ambos lados del nodo 2, o sea,  $\theta_{2,1}$  y  $\theta_{2,3}$
- Reacciones en los nodos 1 y 3.

†Al formar la matriz de rigidez para la estructura, trátese las rotaciones  $\theta_{2,1}$ , y  $\theta_{2,3}$  como variables independientes (o sea,  $\theta_{2,1} \neq \theta_{2,3}$ ). Después de imponer las condiciones de frontera, las ecuaciones de rigidez contendrán tres variables de desplazamiento independientes:  $v_2$ ,  $\theta_{2,1}$ , y  $\theta_{2,3}$ .



- Resp.: (a)  $v_2 = -0.00101 \text{ m}$   
(b)  $\theta_{2,1} = -0.00126 \text{ rad}$   
     $\theta_{2,3} = 0.000632 \text{ rad}$   
(c)  $Y_1 = 8.89 \text{ kN}$   
     $Y_3 = 1.11 \text{ kN}$

# Técnicas matriciales adicionales

## 19.1 GENERALIDADES

La introducción al método de la rigidez presentada en los capítulos 17 y 18, se escribió con la intención de proporcionar una visión de conjunto de los principios físicos que participan en el método. Aunque la implementación del método de la rigidez es bastante clara y directa, los detalles para su aplicación a toda estructura, con excepción de las más sencillas, son sumamente tediosas cuando se intenta una solución manual. Sin embargo, la utilidad del método reside en su adaptabilidad al empleo de computadoras digitales. En este capítulo se volverán a formular algunos aspectos del método de la rigidez para hacer más aparentes los pasos necesarios para su programación. El método se aplicará a varias estructuras que no han sido previamente analizadas. Se enfatizará la solución de ecuaciones algebraicas por medio de métodos matriciales, los cuales son ideales para su procesamiento en los lenguajes de computación existentes.

## 19.2 SUMA DE ECUACIONES DE RIGIDEZ

La determinación de las ecuaciones de rigidez hacen necesaria una nueva formulación para cada estructura diferente. Sin embargo, como el lector habrá notado, la matriz de rigidez para una estructura completa puede lograrse sumando, en forma

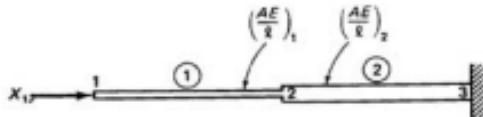


Figura 19.1

adecuada, las matrices de rigidez de los elementos individuales de la estructura. Para ilustrar esto, se considerará el elemento sometido a carga axial de la fig. 19.1.

El elemento se divide en dos segmentos y se escribe una matriz de rigidez para cada uno (ec. 17.8). Se usan los subíndices  $i$  y  $j$  para representar los nodos y  $m$  para numerar los segmentos.

$$\begin{Bmatrix} F_{i,i} \\ F_{j,i} \\ F_{j,j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{\ell}\right)_m & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_m & 0 \\ -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_m & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_m & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (19.1)$$

Como la estructura completa tiene tres nodos, hay tres desplazamientos nodales posibles (también llamados grados de libertad en este libro) lo que conducirá a una matriz de rigidez total de  $3 \times 3$ . La matriz de rigidez de cada elemento individual se expande o aumenta para incluir todos los grados de libertad de la estructura. Las ecuaciones de rigidez de los elementos tienen entonces la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} F_{1,1} \\ F_{2,1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & 0 \\ -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (19.2)$$

y

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_{2,2} \\ F_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \\ 0 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \\ 0 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (19.3)$$

Las dos ecuaciones matriciales (19.2 y 19.3) se suman directamente obteniéndose:

$$\begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{2,2} \\ F_{3,2} \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & 0 \\ -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \\ 0 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \\ 0 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \\ 0 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \\ 0 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_{12} \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

o bien,

$$\begin{Bmatrix} F_{1,2} = X_1 \\ F_{2,1} + F_{2,3} = X_2 \\ F_{3,2} = X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & 0 \\ -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_1 + \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \\ 0 & -\left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 & \left(\frac{AE}{\ell}\right)_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (19.4)$$

Como se ilustra en la fig. 19.2., las fuerzas internas en los elementos  $F_{2,1}$  y  $F_{2,3}$  están relacionadas con la fuerza externa que actúa en el nodo 2 por consideraciones de equilibrio.

De acuerdo con esta figura puede escribirse la siguiente relación para el nodo 2:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= -F_{2,1} - F_{2,3} + X_2 = 0 \\ \therefore X_2 &= F_{2,1} + F_{2,3} \end{aligned} \quad (19.5)$$

Por consiguiente, al sumar las ecuaciones de rigidez de los elementos individuales se tiene la ecuación de rigidez para la estructura completa. En general, un programa de computadora necesita contener sólo las instrucciones para formar una matriz de rigidez de un elemento general y las instrucciones para sumar propiamente las matrices de rigidez de los elementos individuales, para poder formar entonces la matriz de la estructura completa.

### 19.3 MATRICES DE RIGIDEZ PARA ELEMENTOS INCLINADOS

En el capítulo 18 se determinó la matriz de rigidez para un elemento general plano sometido a flexión en términos de las propiedades del elemento y de su ángulo de inclinación respecto a un sistema global de referencia. Es útil disponer de un procedimiento sistemático para resolver ecuaciones escritas con respecto a sistemas de referencia rotados, cuando se escriben programas de computadora para efectuar tal operación.

## 19.3 Matrices de rigidez para elementos inclinados

531

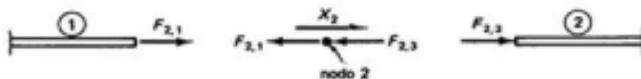


Figura 19.2

Consideraremos ahora el elemento inclinado a flexión de la fig. 19.3. Las fuerzas nodales relacionadas con coordenadas locales se muestran con primas, en tanto que sus componentes equivalentes expresadas con respecto al sistema global se muestran sin primas. La relación entre las componentes de fuerza en el sistema local y las componentes equivalentes en el sistema global se han indicado ya por medio de la ec. 18.17, aquí se repite en notación ligeramente diferente:

$$X_{1,2} = X'_{1,2} \cos \phi - Y'_{1,2} \operatorname{sen} \phi$$

$$Y_{1,2} = X'_{1,2} \operatorname{sen} \phi + Y'_{1,2} \cos \phi$$

$$M_{1,2} = M'_{1,2}$$

Escrita en forma matricial, la relación es:

$$\begin{Bmatrix} X_{1,2} \\ Y_{1,2} \\ M_{1,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi & 0 \\ \operatorname{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X'_{1,2} \\ Y'_{1,2} \\ M'_{1,2} \end{Bmatrix} \quad (19.6)$$

Simbólicamente la ec. 19.6 puede escribirse como sigue:

$$\{P_i\} = [\gamma]\{P'\} \quad (19.7)$$

en donde  $[\gamma]$  se denomina matriz de transformación.

La ecuación 19.6 puede también usarse para expresar las fuerzas nodales locales en términos de las componentes globales de fuerza:

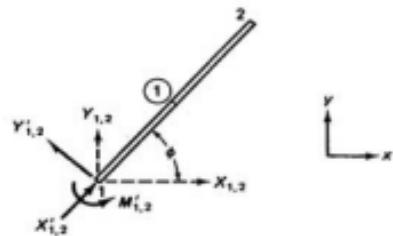


Figura 19.3

$$\begin{Bmatrix} X'_{1,2} \\ Y'_{1,2} \\ M'_{1,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} X_{1,2} \\ Y_{1,2} \\ M_{1,2} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{1,2} \\ Y_{1,2} \\ M_{1,2} \end{Bmatrix} \quad (19.8)$$

La matriz de transformación  $[\gamma]$  tiene la propiedad (no válida para matrices en general) de que  $[\gamma]^{-1} = [\gamma]^T$ . Esta propiedad puede verificarse fácilmente multiplicando  $[\gamma]$  por su transpuesta para especificar la matriz identidad. Por tanto,

$$\{P'\} = [\gamma]^{-1}\{P\} = [\gamma]^T\{P\} \quad (19.9)$$

Puede efectuarse una transformación análoga de las fuerzas nodales en el extremo 2 del elemento. Las dos transformaciones pueden combinarse en una sola ecuación matricial:

$$\begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\gamma] & [0] \\ [0] & [\gamma] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P'_1\} \\ \{P'_2\} \end{Bmatrix}$$

o bien,

$$\{P\} = [\Gamma]\{P'\}$$

en donde

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} [\gamma] & [0] \\ [0] & [\gamma] \end{bmatrix} \quad (19.10)$$

y

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix}$$

Una transformación análoga a la descrita en la ec. 19.10 puede efectuarse para cualquier otro vector actuando en el nodo. En particular, los desplazamientos nodales pueden transformarse de coordenadas locales a globales:

$$\{\delta\} = [\gamma]\{\delta'\} \quad (19.11)$$

y

$$\begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \end{Bmatrix} = \{\delta\}_{\text{combinado}} = [\Gamma]\{\delta'\}_{\text{combinado}} \quad (19.12)$$

Una ecuación de rigidez como la 17.30, relacionada con ejes locales, puede ahora transformarse a ejes globales con ayuda de las ecs. 19.10 y 19.12:

$$\{P'\} = [K']\{\delta'\}$$

en donde  $[K']$  es una matriz de rigidez local.

La sustitución de las ecs. 19.10 y 19.12 da:

$$[\Gamma]^{-1}\{P\} = [K'][\Gamma]^{-1}\{\delta\} \quad (19.13)$$

Si ambos lados de la ec. 19.13 se premultiplican por  $[\Gamma]$ , el resultado es

$$\{P\} = ([\Gamma][K'][\Gamma]^{-1})\{\delta\} \quad (19.14)$$

o

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \quad (19.15)$$

en donde

$$[K] = [\Gamma][K'][\Gamma]^{-1}, \text{ es la matriz global de rigidez} \quad (19.16)$$

El triple producto matricial mostrado en la ec. 19.16 dará exactamente el mismo resultado para  $[K]$  que el dado previamente por la ec. 18.19.

Las ecuaciones de transformación como las dadas por las ecs. 19.10 y 19.12 son muy útiles para el manejo de elementos inclinados, ya que permiten al proyectista programar, con relativa facilidad, ecuaciones para usarse en computadora, tanto en sistemas locales de coordenadas como en sistemas globales. La solución de una estructura con elementos inclinados, necesita varias etapas de transformaciones de un sistema coordenado a otro.

#### **19.4 ECUACIONES DE RIGIDEZ PARA ESTRUCTURAS CON DESPLAZAMIENTOS IMPUESTOS**

Aunque en general las estructuras se deflexionan en respuesta a cargas aplicadas, hay ocasiones en que una estructura es obligada a desplazarse una cantidad específica. Un ejemplo de esto es una viga continua cuyos apoyos no están alineados propiamente. La falta de alineamiento puede corregirse por medio de gatos hidráu-

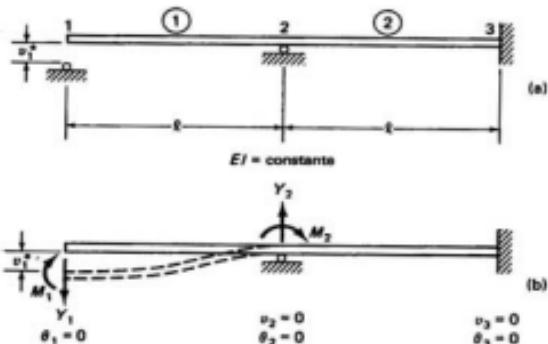


Figura 19.4

licos. Al proyectista puede interesarle qué fuerzas se necesitan para enderezarla en términos de los desplazamientos necesarios.

El nodo 1 de la viga continua de la fig. 19.4(a) está desalineado supuestamente en una cantidad  $v_1^*$ .

Las fuerzas necesarias para desplazar la viga a través de esta distancia, previniendo al mismo tiempo cualquier otro desplazamiento nodal, puede determinarse con ayuda de la fig. 17.10. La forma deformada de la viga está esquematisada en la fig. 19.4(b). Puede escribirse una ecuación de rigidez que incluya esas "fuerzas de empotramiento", así como también las fuerzas desarrolladas por los desplazamientos nodales:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12EI \\ \ell^3 \\ -6EI \\ \ell^2 \\ 12EI \\ \ell^3 \\ -6EI \\ \ell^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} v_1^* + [K] \begin{Bmatrix} \Delta v_1 = 0 \\ \theta_1 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{Bmatrix} \quad (19.17)$$

Para el problema formulado en la fig. 19.4(a), la ecuación de rigidez, después de considerar las condiciones de frontera, es:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{\text{total}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{6EI}{\ell^2} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} \end{Bmatrix} v_1^* + \begin{Bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{8EI}{\ell} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (19.18)$$

Si no se tienen momentos nodales externos aplicados, la solución para las rotaciones nodales resultantes, debidas al desplazamiento nodal impuesto  $v_1^*$ , se encuentra resolviendo simultáneamente el conjunto de ecuaciones resultantes 19.18:

$$\begin{Bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{8EI}{\ell} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} \end{Bmatrix} v_1^*$$

y

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{Bmatrix} \frac{v_1^*}{\ell} \quad (19.19)$$

Las fuerzas internas en los elementos se encuentran, como es usual, sustituyendo las componentes de desplazamiento nodal halladas en las ecuaciones de rigidez de los elementos individuales y sumando las fuerzas de empotramiento al resultado.

## 19.5 ECUACIONES DE RIGIDEZ PARA ESTRUCTURAS SUJETAS A CAMBIOS DE TEMPERATURA

Con frecuencia, uno o más elementos de una estructura están sometidos a cambios de temperatura, con el consiguiente cambio de longitud. En una estructura estáticamente indeterminada, tales cambios de longitud ocasionan la aparición de fuerzas internas. Puede entonces serle necesario al proyectista conocer las fuerzas y desplazamientos causados por los cambios de temperatura.

El elemento ② del puntal continuo de la fig. 19.5(a) experimenta un incremento de temperatura igual a  $\Delta T$ .

Si todos los nodos de la estructura se mantienen inmóviles, se generarán fuerzas en ambos extremos del elemento. Estas se designan  $X_2^F$  y  $X_3^F$  en la fig. 19.5(b) y sus valores se calculan con la siguiente expresión, en la que  $\alpha$  es el coeficiente térmico de expansión.

$$X_2^F = \alpha \Delta T E A$$

$$X_3^F = -\alpha \Delta T E A$$

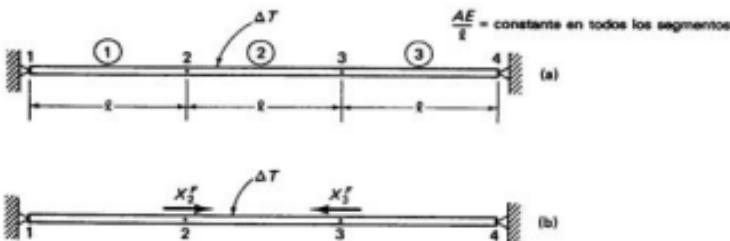


Figura 19.5

La ecuación de rigidez para la estructura puede escribirse como una superposición de "fuerzas de empotramiento" y de las fuerzas resultantes de los desplazamientos nodales:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha \Delta T E A \\ -\alpha \Delta T E A \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19.20)$$

Cuando se toman en cuenta las condiciones de frontera, la ecuación de rigidez resultante es

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2AE}{\ell} & -\frac{AE}{\ell} \\ -\frac{AE}{\ell} & \frac{2AE}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\alpha \Delta T E A \\ -\alpha \Delta T E A \end{Bmatrix} \quad (19.21)$$

Si no hay fuerzas externas aplicadas en el nodo 2 o en el 3, la solución para este problema de carga térmica es

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2AE}{\ell} & -\frac{AE}{\ell} \\ -\frac{AE}{\ell} & \frac{2AE}{\ell} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -\alpha \Delta T E A \\ \alpha \Delta T E A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\alpha \Delta T L}{3} \\ \frac{\alpha \Delta T L}{3} \end{Bmatrix} \quad (19.22)$$

La sustitución de los desplazamientos nodales en las ecuaciones de rigidez de los elementos individuales, más la adición de las fuerzas de empotramiento, dará la solución para las fuerzas internas en los elementos.

$$\begin{Bmatrix} X_{1,2} \\ X_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^F + \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\alpha \Delta T A E}{3} \\ -\frac{\alpha \Delta T A E}{3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{2,3} \\ X_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha \Delta T E A \\ -\alpha \Delta T E A \end{Bmatrix}^F + \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\alpha \Delta T A E}{3} \\ -\frac{\alpha \Delta T A E}{3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{3,4} \\ X_{4,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^F + \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\alpha \Delta T A E}{3} \\ -\frac{\alpha \Delta T A E}{3} \end{Bmatrix}$$

Como puede verse en la solución, la estructura experimenta una compresión uniforme en toda su longitud como resultado del incremento de temperatura en el elemento (2).

### **19.6 ECUACIONES DE RIGIDEZ PARA ESTRUCTURAS CON ELEMENTOS CON LONGITUDES INCORRECTAS**

Muchas estructuras se fabrican con uno o más elementos con longitud incorrecta. Si la estructura se "fuerza" durante el montaje, pueden generarse fuerzas en varias partes de la estructura aun cuando no se apliquen cargas externas. El procedimiento para determinar esas fuerzas es básicamente igual al empleado para el caso de cambios térmicos.

Como ilustración, supondremos que el elemento (2) de la estructura mostrada en la fig. 19.5(a) ha sido fabricado con un exceso  $\Delta L$  de longitud. Para este análisis se supondrá que la estructura se fuerza hasta que sus elementos embonan perfectamente, manteniendo entre tanto, inmóviles a los nodos. Como se muestra en la fig. 19.5(b), aparecerán fuerzas nodales en los nodos 2 y 3. En este caso, sin embargo, los valores de las fuerzas nodales se calculan según las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} X_2^F &= AE \frac{\Delta L}{L} \\ X_3^F &= -AE \frac{\Delta L}{L} \end{aligned} \tag{19.23}$$

El resto del procedimiento es exactamente como el descrito para el problema de carga térmica, o sea, se escribe una ecuación de rigidez similar a la ec. 19.20 para la estructura, se aplican las condiciones de frontera y se determinan valores para

las componentes de desplazamiento en los nodos libres. Se encuentran luego las fuerzas internas en los elementos, sustituyendo los valores de los desplazamientos libres en los nodos, en las ecuaciones de rigidez de los elementos individuales.

### 19.7 APLICACIONES DE LA SUBDIVISION DE MATRICES

En el análisis anterior del método de la rigidez, se determinaron primero las ecuaciones de rigidez para la estructura. La solución para los desplazamientos de los nodos libres se determinó eliminando primero de la matriz de rigidez las columnas y renglones correspondientes a los desplazamientos de frontera cuyos valores se especificaron igual a cero. La justificación de este procedimiento se ve claramente al considerar el conjunto total de ecuaciones de rigidez para una estructura. Escrita en forma subdividida, la ecuación es

$$\begin{Bmatrix} P_f \\ P_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fs} \\ K_{sf} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_f \\ \delta_s \end{Bmatrix} \quad (19.24)$$

La ec. 19.24 se ha escrito de manera que todos los desplazamientos de frontera queden agrupados e identificados como  $\{\delta_f\}$ . Los desplazamientos de los nodos libres se designan con  $\{\delta_s\}$ . En la ec. 19.24, las barras inferiores indican que los términos  $K$  son matrices y no sólo escalares. El lado izquierdo de la ec. 19.24 representa fuerzas nodales, o sea,

$$\begin{aligned} P_f &= \{P_f\}, && \text{es el vector de fuerzas nodales aplicadas} \\ P_s &= \{P_s\}, && \text{es el vector de las reacciones en los apoyos} \end{aligned}$$

La matriz  $[K]$  está subdividida en cuatro segmentos correspondientes a la división entre desplazamientos de los nodos libres y soportados.

La ecuación matricial 19.24 puede escribirse como dos ecuaciones matriciales reducidas. La ecuación matricial superior es

$$\{P_f\} = [K_{ff}]\{\delta_f\} + [K_{fs}]\{\delta^0_s\} = [K_{ff}]\{\delta_f\} \quad (19.25)$$

y la ecuación matricial inferior es

$$\{P_s\} = [K_{sf}]\{\delta_f\} + [K_{ss}]\{\delta^0_s\} = [K_{sf}]\{\delta_f\} \quad (19.26)$$

Una parte de los segundos miembros de las ecs. 19.25 y 19.26 se elimina, ya que el vector  $\{\delta_s\}$  es idénticamente igual a cero.

Por tanto, la ec. 19.25 puede resolverse para  $\{\delta_f\}$ :

$$\{\delta_f\} = [K_{ff}]^{-1}\{P_f\} \quad (19.27)$$

y los valores de  $\{\delta_j\}$  pueden ahora sustituirse en la ec. 19.26 para producir los valores de las reacciones:

$$\{P_s\} = [K_{sg}]\{\delta_j\} = [K_{sg}][K_{gj}]^{-1}\{P_j\} \quad (19.28)$$

Este es exactamente el procedimiento que se ha usado para resolver los problemas con base en el método de la rigidez de los dos capítulos previos.

### 19.8 CONDENSACION

El análisis de los procedimientos de solución en la sección anterior es un caso especial de un importante tema llamado "condensación". Este tema, que se analizará brevemente aquí, permite al proyectista reducir el orden del conjunto de ecuaciones de rigidez para simplificar el problema o bien, para lograr algún otro objetivo.

Para ilustrar el procedimiento consideraremos la viga en voladizo de la fig. 19.6. Después de tomar en cuenta las condiciones de frontera, la estructura tiene 4 grados de libertad, que son: ( $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ ). Las ecuaciones de rigidez correspondientes pueden escribirse simbólicamente (según la ec. 17.26) de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} Y_1 = 4.5 \text{ kN} \\ Y_2 = 13.5 \text{ kN} \\ M_1 = 0 \\ M_2 = 0 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{24EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 \\ \hline \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI}{\ell} & \frac{8EI}{\ell} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \quad (19.29)$$

En la ec. 19.29, las rotaciones  $\theta_1$  y  $\theta_2$  y los desplazamientos  $v_1$  y  $v_2$  se han agrupado y la matriz de rigidez se ha subdividido para reflejar esta división. En un problema particular el proyectista puede saber de antemano que no hay momentos externos aplicados en los nodos 1 y 2. Entonces la ecuación matricial inferior mos-

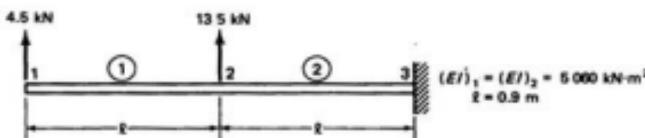


Figura 19.6

trada en la ec. 19.29 puede resolverse para las rotaciones  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en términos de los desplazamientos  $v_1$  y  $v_2$ :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{6EI}{\ell^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \frac{2EI}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

y

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{3}{7} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{v_1}{\ell} \\ \frac{v_2}{\ell} \end{Bmatrix} \quad (19.30)$$

La ec. 19.30 puede ahora sustituirse en la ecuación matricial superior mostrada en la ec. 19.29 obteniéndose el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 4.5 \\ 13.5 \end{Bmatrix} &= \frac{12EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \left( \frac{6EI}{\ell^2} \right) \left( \frac{3}{7} \right) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{v_1}{\ell} \\ \frac{v_2}{\ell} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} \frac{12}{7} & \frac{-30}{7} \\ \frac{-30}{7} & \frac{96}{7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (19.31)$$

La ec. 19.31 se resuelve para los desplazamientos  $\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$  en términos de las fuerzas nodales aplicadas:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{\ell^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{12}{7} & \frac{-30}{7} \\ \frac{-30}{7} & \frac{96}{7} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 4.5 \\ 13.5 \end{Bmatrix} = \frac{\ell^3}{EI} \begin{bmatrix} 2.667 & 0.833 \\ 0.833 & 0.333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.5 \\ 13.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.35 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 1.19 \times 10^{-3} \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (19.32)$$

Note que la ec. 19.31 representa un conjunto de sólo dos ecuaciones que deben resolverse simultáneamente para encontrar los desplazamientos, en tanto que la ecuación matricial original (19.29) contiene cuatro ecuaciones que deben resolverse al mismo tiempo. Aunque el orden reducido del conjunto de ecuaciones que deben resolverse simultáneamente se logra a costa del álgebra matricial adicional, el resul-

tado neto puede ser un ahorro significativo en costo de computadora al resolver problemas con muchas incógnitas.

### **19.9 ANCHO DE BANDA DE MATRICES DE RIGIDEZ PARA ESTRUCTURAS EN GENERAL**

El lector habrá notado en los ejemplos anteriores que casi todas las matrices de rigidez contienen una gran cantidad de ceros. Si se optimiza el esquema de numeración nodal, los elementos diferentes de cero de la matriz, quedarán agrupados en una "banda". Como ejemplo considérese la matriz de rigidez para el elemento con fuerza axial uniforme que consta de cuatro segmentos, mostrado en la fig. 19.7.



Figura 19.7

La matriz de rigidez para esta estructura puede escribirse, con ayuda de la ec. 17.8, de la siguiente manera:

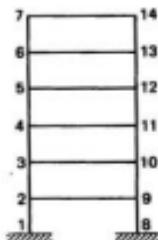
$$[K] = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (19.33)$$

Las líneas interrumpidas en la matriz denotan los límites de la banda dentro de la cual se encuentran todos los elementos no cero de la matriz.

Las soluciones por computadora de las ecuaciones matriciales utilizan las características de banda de las matrices para ahorrar espacio en la computadora. Pueden escribirse algoritmos que sólo necesiten el almacenamiento de aquellos elementos contenidos dentro de la banda de una matriz. En un problema estructural grande, el número de elementos fuera de la banda puede ser varias veces mayor que el número de elementos dentro de ésta. Si se aprovechan las características de banda de una matriz de rigidez, pueden lograrse ahorros considerables en espacio de almacenamiento así como en tiempo de computadora.

Si una estructura consta de una viga o de un puntal, la numeración nodal óptima se logra numerando los nodos en forma consecutiva de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. Si la estructura es un marco, la numeración óptima no

es tan obvia. Sin embargo, las directrices siguientes permitirán al proyectista tener un ancho de banda cercano al mínimo:



(a)



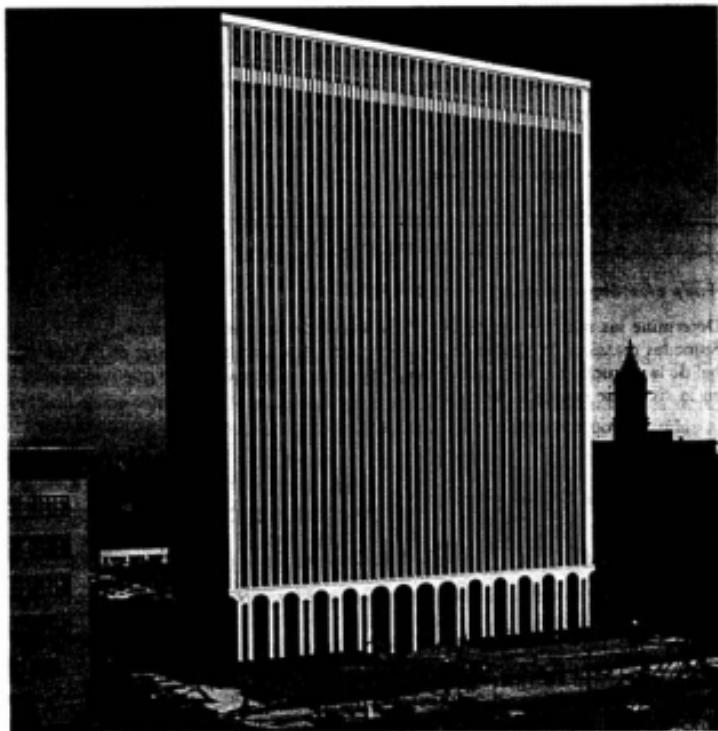
(b)

**Figura 19.8**

1. Para cada nodo de la estructura hágase lo siguiente:
  - determine el máximo número nodal asociado con cualquier elemento unido al nodo considerado; determine también el número nodal más pequeño.
  - calcule la diferencia entre el máximo y el mínimo número nodal.
2. Minimice esta diferencia considerando todos los nodos.

Aunque el uso de estas directrices no siempre conducirá al ancho de banda mínimo asociado con la matriz de rigidez, proporcionarán un valor bastante cercano al mínimo.

Para ilustrar estas directrices consideremos un marco de varios niveles con dos esquemas de numeración diferentes mostrados en las figs. 19.8(a) y (b). En el esquema (a), la mayor diferencia se presenta simultáneamente en los nodos 2 al 7 y



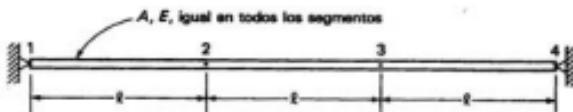
Edificio de Manufacturers & Traders Trust Company. (Cortesía de Bethlehem Steel Co.)

9 al 14 y tiene un valor de 8. En el esquema (b) la diferencia máxima ocurre simultáneamente en los nodos 3 al 11 y 4 al 12 y tiene un valor de 4. El esquema (b) de numeración conduce a un ancho menor de banda y a una solución más económica desde el punto de vista del tiempo necesario de computadora.

La mayoría de los programas para computadora se escriben tomando ventaja de la simetría de la matriz de rigidez. Por ello, sólo aquella parte de la matriz que se encuentra arriba o abajo de la diagonal principal se almacena y se usa en los cálculos. En esos programas el término ancho de banda debe reemplazarse por el término medio ancho de banda. Sin embargo, las reglas referentes a la numeración nodal óptima siguen siendo las mismas.

## PROBLEMAS

- 19.1 Un elemento que sólo puede tomar carga axial está formado de tres segmentos unidos entre sí y a los apoyos, por medio de cuatro nodos, como se muestra en la figura. Haga lo siguiente:

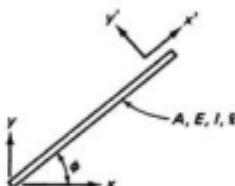


- Determine las matrices de rigidez individuales de los tres segmentos;
- Sume las matrices de rigidez de los segmentos para formar la matriz de rigidez global de la estructura. La matriz de rigidez debe arreglarse de modo que pueda usarse en la siguiente ecuación de rigidez:

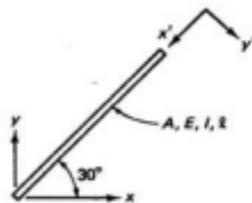
$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_2 \end{Bmatrix} = [K_{\text{global}}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

- Compare el ancho de banda de la matriz de rigidez encontrada en la parte (b) con la mostrada en la ec. 19.33.

- 19.2 Utilice la ec. 19.16 para verificar que la matriz de rigidez  $[K]$ , expresada en coordenadas globales, es la misma que la dada por la ec. 18.19.



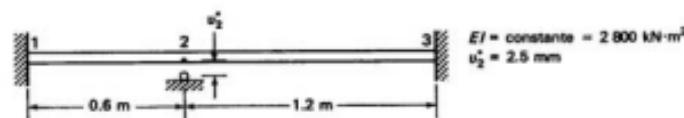
- 19.3 Determine la matriz de rigidez para un elemento inclinado, como el mostrado en la figura, pero con el eje x local como se muestra (señalando de arriba a la derecha hacia abajo a la izquierda). Encuentre también la matriz de rigidez para el mismo puntal si el eje x local está orientado como se muestra en el problema 19.2. Señale las diferencias, en caso de que existan, entre esas dos matrices de rigidez.



19.4 Verifique la ec. 19.9, o sea, demuestre que  $[\gamma]^{-1} = [\gamma]^T$

19.5 Demuestre que la matriz  $[\Gamma]$  en la ec. 19.10 tiene las mismas propiedades que  $[\gamma]$ , o sea que  $[\Gamma]^{-1} = [\Gamma]^T$ .

19.6 Una viga doblemente empotrada tiene un apoyo intermedio en el nodo 2. El apoyo 2 está situado a una distancia  $v_2^*$  debajo de un eje que va del nodo 1 al 3. Determine las fuerzas nodales que se desarrollan en los nodos 1, 2 y 3 cuando la viga se fuerza por medio de un gato hasta quedar en contacto con el apoyo 2 (con el nodo 2 unido a la viga).

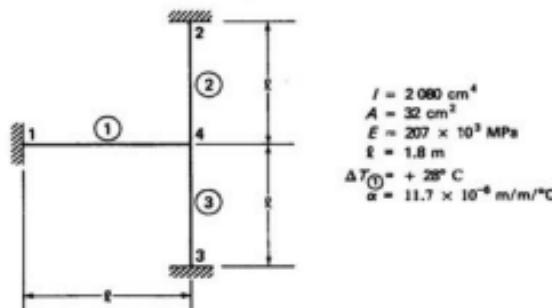


$$\text{Resp.: } Y_1 = 243 \text{ kN} \\ M_1 = 87.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$Y_2 = -328.13 \text{ kN} \\ M_2 = -41.32 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$Y_3 = 85.07 \text{ kN}$$

19.7 Un marco consta de tres elementos uniformes, como se muestra en el croquis. El elemento ① experimenta un incremento de temperatura  $\Delta T_{(1)}$ , en tanto que los elementos ② y ③ permanecen a la temperatura ambiente. Determine las reacciones resultantes en los nodos 1, 2 y 3 debido al incremento de temperatura.



- 19.8 En el marco del problema 19.7, suponga que todos los elementos están a temperatura ambiente y que el elemento ② se fabricó con una longitud  $\Delta L_2 = -0.25$  cm más corta que lo estipulado. Determine las reacciones resultantes en los nodos 1, 2 y 3 si el elemento ② se fuerza, durante el montaje, para embonar en su lugar correcto. (Nota: suponga que  $u_4 = 0.0$ , con el fin de simplificar los cálculos.)

$$\text{Resp.} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -8.24 \text{ kN} \\ -8.24 \text{ kN-m} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.743 \text{ kN} \\ -456.32 \text{ kN} \\ 1.646 \text{ kN-m} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 920 \text{ kN} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.743 \text{ kN} \\ 463.68 \text{ kN} \\ 1.646 \text{ kN-m} \end{Bmatrix}$$

- 19.9 Una estructura de varios niveles y dos claros se ha modelado con dos esquemas diferentes de numeración nodal, que se muestran en las figuras (a) y (b). ¿Cuál de los dos esquemas dará como resultado una matriz de rigidez con el ancho de banda mínimo? Explique su respuesta.



(a)



(b)

# Análisis estructural con microcomputadoras

### **20.1 INTRODUCCION**

En este capítulo se presenta un conjunto de programas de análisis estructural matricial llamado PAEM, preparados por el M. en C. Amador Terán Gilmore y el M. en I. Hugón Juárez García, ambos profesores de la UAM-Azcapotzalco, en colaboración con el traductor de este texto, para usarse en microcomputadoras IBM o en otras compatibles con éstas.

PAEM utiliza el método de la rigidez y lo implementa usando la formulación matricial que se ha descrito en los capítulos 17, 18 y 19.

PAEM está diseñado para operar como una "caja negra", o sea, el usuario sólo necesita suministrar los datos especificados de entrada y la computadora ejecutará el análisis y proporcionará los resultados automáticamente.

En este capítulo se analizan una serie de armaduras, vigas y marcos usando el programa PAEM. Aun cuando no se tenga experiencia previa con computadoras, será capaz de aprender a aplicar estos programas en unos cuantos minutos.

### **20.2 PROGRAMA PAEM**

En las siguientes páginas se presenta la información mínima necesaria para utilizar el disco anexo al libro y resolver una serie de estructuras. Sólo se dan parte de los datos de entrada (input), así como los datos de salida (output) de la computadora en forma impresa, debido a que éstos los contiene el disco. La instalación en disco duro y su respaldo se dan en el apéndice C.

Aunque PAEM es muy fácil de usar y las instrucciones en la pantalla son muy claras, se ha descrito con bastante detalle el procedimiento.

Se conectan la computadora y la pantalla. Se coloca el disquete DOS en la entrada de disco A. Después de cargar el DOS, se quita el disquete del drive A. Cambie la entrada de datos al puerto A y coloque el disco en la misma, cuando se vea en la pantalla

A >

Se coloca el disquete PAEM. A continuación escriba paem y en la pantalla verá:

A > **paem**

Con este tipo de letra (A >) se indicará lo que aparece en la pantalla, y con éste (**paem**) lo que se debe de escribir, o pulsar.

Para correr el programa oprima [RET]

En lo sucesivo [RET] indica pulsar la tecla RETORNO.

En la pantalla aparecerá el nombre del programa, así como el de los autores. En la parte inferior derecha verá

Oprima una tecla para continuar

púlsela y tendrá a la vista:

#### MENU PRINCIPAL

1. Programas para calcular Marcos
2. Programas para calcular Armaduras de dos dimensiones
3. Programas para calcular Armaduras de tres dimensiones
4. Ver ejemplos resueltos del capítulo 20
5. Salir del programa

Coloque el cursor sobre su opción y oprima la tecla RET o pulse el número adecuado.

Los datos necesarios para el análisis pueden suministrarse desde el teclado (actuando en modo interactivo) según los solicite el monitor, o desde un archivo de datos preparado antes de la ejecución del programa, como se describe en la sección 20.7, Preparación de archivos. Para los problemas sencillos tratados en este capítulo, el uso del teclado, modo interactivo, es más simple. Para problemas más complicados puede ser más práctico usar un archivo de datos. El cambio de datos se puede hacer más fácilmente en un archivo, en tanto que anotándolos con el teclado, el usuario tendrá que volver a anotarlos todos desde el principio.

Para analizar una estructura es necesario dar los datos específicos de la estructura, tales como número y coordenada de los nodos, número y módulo de elasticidad de los elementos, las condiciones de apoyo y las cargas aplicadas a la estructura.

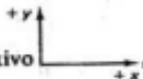
## 20.3 Análisis de armaduras planas

La manera de introducir esta información a la computadora para tratar armaduras bidimensionales se explica en la sección 20.3. En secciones subsecuentes se agrega algo de información necesaria para el análisis de armaduras tridimensionales, vigas continuas y marcos.

**20.3 ANALISIS DE ARMADURAS PLANAS**

En esta sección se analizan dos armaduras planas usando el programa 2 del menú principal; anote el número dos o coloque el cursor sobre esta línea y pulse RET. Al aplicar el programa se supone que tienen signo positivo:

1. Las fuerzas axiales de tensión, y
2. Las cargas y desplazamientos que actúen en el sentido positivo de los ejes  $x$  o  $y$ .



La primera armadura que se analizará es la estáticamente determinada, ésta es la que se muestra en la fig. 20.1. En la figura se han numerado los nodos tal como se indica. También se han numerado los elementos, sus números correspondientes se han encerrado en círculos. La manera de anotar los datos para la armadura se proporcionan en los siguientes párrafos.

Lo primero que se pide es:

Entrada de datos por:

T – teclado

A – archivo

**INTRODUZCA SU OPCION: T [RET]**

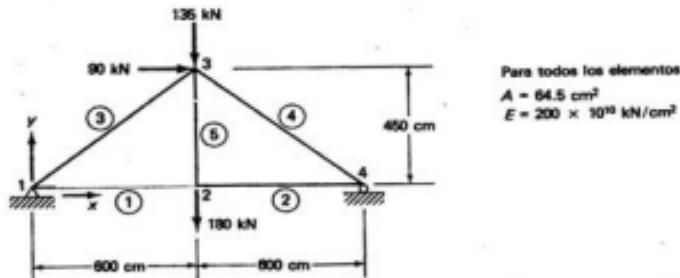


Figura 20.1

En este momento se ha elegido el teclado para mostrar lo que representa cada uno de los datos.

La letra puede ser mayúscula o minúscula; a continuación se pide:

Salida de resultados por:

P – pantalla

I – impresora

A – archivo

*Si desea imprimir sus resultados conecte la impresora antes de escribir los datos.*  
Los resultados quedarán alineados (formatted) automáticamente, de acuerdo con una subrutina del programa. Después que se especifican las últimas cargas correrá automáticamente el resto del programa hasta el final.

*Si no ha instalado el programa PAEM en el disco duro y elige salida por archivo, es necesario hacerlo en otro disco diferente al que contiene el programa.*

**INTRODUZCA OPCION : P [RET]**

Después:

**Título de la corrida EJEMPLO 20.1 [RET]**

*Unidades* Al usuario se le pide primero que indique las unidades de longitud y fuerza; las que se emplearon en este ejemplo son centímetro y kilonewton.

Las unidades de longitud son: **centímetro [RET]**

Las unidades de fuerza son: **kilonewton [RET]**

La información proporcionada por las dos respuestas anteriores se imprime en la hoja de salida si es que así se indica. El programa no la necesita realmente y puede pasarse por alto pulsando la tecla **RET** como respuesta a la pregunta. *El programa correrá suponiendo que se ha usado un conjunto de unidades consistentes* al indicar las coordenadas de los nodos, las áreas de las secciones transversales y los módulos de elasticidad.

*Número de nodos y elementos* Las respuestas a estas preguntas serán 4 y 5, respectivamente, en la pantalla verá:

**Número de nodos = 4 [RET]**

**Número de elementos = 5 [RET]**

*Datos relativos a los nodos* Las posiciones de los nodos se proporcionan indicando las coordenadas x y y de cada uno de ellos; éstas se refieren a un punto cual-

quiero escogido arbitrariamente por el usuario, quedando así definido un origen global de un sistema de coordenadas. Para la armadura de la fig. 20.1, el origen seleccionado para el sistema coordenado coincide con el nodo 1. Como respuesta a la pregunta relativa al nodo 3, se responde como se indica.

**Nodo 3: 600, 450 [RET]**

Esto describe el lugar del nodo 3, que tiene una coordenada *x* igual a 600 cm y una coordenada *y* igual a 450 cm. Para cada uno de los nodos se deben indicar las abscisas y las ordenadas correspondientes. Una vez que se han indicado todos los datos relativos a la ubicación de los nodos, éstos se muestran en la pantalla.

Nodo	Coordinada x	Coordinada y
1	.00	.00
2	600.00	.00
3	600.00	450.00
4	1200.00	.00

Estas son las coordenadas que introdujo;  
Desea hacer algún cambio? (s/n) :

Con esta pregunta el usuario tiene la oportunidad de revisar la información y hacer las modificaciones necesarias. Esta misma pregunta se hace al haber proporcionado la información relativa a los elementos, áreas, módulos de elasticidad, apoyos y cargas, tal como se verá en los párrafos siguientes.

En esta parte se explica el significado de los datos y cómo anotarlos, en la resolución del ejemplo 20.1 se muestra cómo da respuesta el programa a estos datos.

Conectividades de los elementos. A continuación se pide la información relativa a los números de los extremos de cada elemento. Como respuesta a la pregunta hecha por la computadora, se debe anotar el número del nodo colocado al principio del elemento. La respuesta para el elemento 5 es:

**Conectividades del elemento 5: 2, 3 [RET]**

Al terminar de anotar las conectividades y pulsar retorno, éstos los presenta el programa y pregunta:

Estas son las conectividades que introdujo;  
Desea hacer algún cambio? (s/n) :

A continuación se piden los nodos con soporte.

**NODOS CON SOPORTE (APOYOS)**

Introduzca las condiciones de apoyo como se indica:

Primero, introduzca el número de nodos que tengan soporte de cualquier tipo: 2 [RET]

**Apoyos** Como respuesta a la pregunta de la computadora, el usuario da el número de nodos apoyados, 2, como se ha indicado, y en las siguientes, el tipo de apoyo de cada uno de esos nodos. En cada una de esas líneas se da el número de nodo, la condición de apoyo en la dirección x (0 si no se tiene ningún soporte, 1 si hay soporte), y la condición de apoyo en la dirección y (usando los mismos números, 0 y 1). El cuarto y último número denota la rotación de la superficie de apoyo respecto a la horizontal. En este ejemplo se indicaría:

A continuación, introduzca para cada soporte la siguiente información (1 = restringido, 0 = libre):

Nodo con soporte, Código en x, Código en y, Inclinación: 1, 1, 1, 0 [RET]  
 Nodo con soporte, Código en x, Código en y, Inclinación: 4, 0, 1, 0 [RET]

Lo que muestra el programa es:

Nodo	Apoyo en x	Apoyo en y	Inclinación del plano de soporte (grados)
1	1.	1.	.0
4	0.	1.	.0

Si la superficie de apoyo está inclinada, las direcciones para los ejes x y y también se consideran inclinadas, como se muestra en la fig. 20.2. En este caso se tiene entonces soporte en la dirección y, pero no en la dirección x. Tomando en cuenta que el ángulo de rotación del soporte es positivo cuando es contrario al de las manecillas del reloj, para este soporte se daría la siguiente información:

Nodo con soporte, Código en x, Código en y, Inclinación: 10, 0, 1, 30 [RET]

**Propiedades geométricas de los elementos** La respuesta a la primer pregunta de la computadora indica el número de conjuntos diferentes de propiedades. A con-

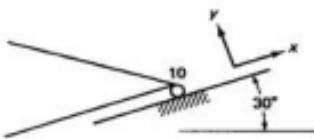


Figura 20.2

tinuación los datos que se deben de anotar son el área de la sección transversal y el módulo de elasticidad de cada elemento. Al finalizar esta parte veremos el caso cuando existen varios conjuntos de elementos con diferentes datos.

Como en la armadura de este ejemplo todos los elementos tienen áreas de  $64.5 \text{ cm}^2$  y módulos de elasticidad de  $200 \times 10^{10} \text{ kN/cm}^2$ , se debe indicar:

#### PROPIEDADES GEOMETRICAS DE LOS ELEMENTOS

Introduzca las propiedades geométricas como se indica:

Primero introduzca cuántas secciones transversales diferentes existen entre los miembros de los marcos: 1

Para cada sección proporcione la siguiente información:

Area, Módulo de elasticidad: 64.5, 200E+10 [RET]

Número de elementos que tienen dicha sección: 5 [RET]

Identificación de los elementos que tienen dicha sección: 1 2 3 4 5 [RET]

*En este programa se puede pulsar retorno, una coma o un espacio en blanco para separar cada dato en una línea.*

Cuando se tienen conjuntos de elementos con propiedades diferentes es necesario especificar el área de la sección transversal y el módulo de elasticidad de cada conjunto. (Véase el ejemplo 20.4.) Como respuesta a la pregunta de la computadora, se indica el número de conjuntos diferentes. Por ejemplo, si una estructura tiene (2) elementos (1,4) con áreas de  $60 \text{ cm}^2$  y módulos de elasticidad de  $200 \times 10^{10} \text{ kN/cm}^2$ , (2) elementos (5,6) con áreas de  $50 \text{ cm}^2$  y módulos de  $200 \times 10^{10} \text{ kN/cm}^2$ , y (2) elementos (2,3) con áreas de  $40 \text{ cm}^2$  y mismo módulo de elasticidad, se tendrán 3 conjuntos con diferentes propiedades. Al tener en la pantalla PROPIEDADES GEOMETRICAS DE LOS ELEMENTOS se procedería de la siguiente manera:

#### PROPIEDADES GEOMETRICAS DE LOS ELEMENTOS

Introduzca las propiedades geométricas como se indica:

Primero introduzca cuántas secciones transversales diferentes existen entre los miembros de los marcos: 3 [RET]

Para cada sección proporcione los siguientes datos:

Area, Módulo de elasticidad: 60, 200E+10 [RET]

Número de elementos que tienen dicha sección: 2 [RET]

Identificación de los elementos que tienen dicha sección: 1 4 [RET]

Como se puede apreciar, la parte importante es indicar que se tienen 3 conjuntos de elementos estructurales diferentes. A continuación el programa pide los datos de los conjuntos restantes.

**Cargas** Por último, se especifican las cargas aplicadas a la estructura. En la pantalla se lee:

Especifique el tipo de carga actuante en la estructura de acuerdo con las siguientes 4 opciones:

Cargas concentradas en los nodos, teclee 1.

Desplazamientos forzados en los nodos, teclee 2.

Cambios de temperatura, teclee 3.

Longitudes incorrectas de los elementos, teclee 4.

En este caso, se especificó el tipo 1 para las fuerzas aplicadas. (En este programa sólo puede seleccionarse un tipo de carga a la vez.) En respuesta a la computadora se indica el número de nodos con carga concentrada, que en este caso es de 2. Luego, en líneas subsecuentes, se indica el número de nodo seguido por las cargas dadas en las coordenadas globales  $x$  y  $y$  con la convención de los signos siguiente:



). Para la armadura del ejemplo se tiene:

#### CARGAS CONCENTRADAS EN LOS NODOS

Introduzca el número de nodos que tienen cargas externas concentradas aplicadas en ellos : 2 [RET]

Nodo, Carga en x, Carga en y : 2 0 -180 [RET]

Nodo, Carga en x, Carga en y : 3 90 -135 [RET]

La armadura de la fig. 20.1 es estáticamente determinada. El procedimiento usado para analizar armaduras estáticamente indeterminadas con este programa es exactamente el mismo.

#### EJEMPLO 20.1

Analizar la armadura de la fig. 20.1 con el programa 2 del menú principal.

##### Solución

En los párrafos siguientes se muestra la respuesta impresa que proporciona el programa, en ésta se han encerrado los datos de entrada.

#### EJEMPLO 20.1

Las unidades de longitud son: centímetro

Las unidades de fuerza son: kilonewton

## 20.3 Análisis de armaduras planas

Número de nodos = ④

Número de elementos = ⑤

Nodo      Coordenada x      Coordenada y

1	.00	.00
2	600.00	.00
3	600.00	450.00
4	1200.00	.00

Elemento      Nodo inicial      Nodo final

1	1	2
2	2	4
3	1	3
4	3	4
5	2	3

Clave para los tipos de apoyo de los nodos: 1 = apoyo, 0 = libre

Inclinación del plano  
de soporte (grados)

1	1.	1.	.0
4	0.	1.	.0

Elemento      Área      Módulo

1	.64500E + 02	.20000E + 13
2	.64500E + 02	.20000E + 13
3	.64500E + 02	.20000E + 13
4	.64500E + 02	.20000E + 13
5	.64500E + 02	.20000E + 13

Tipo de carga: 1 (carga aplicada en los nodos)

Nodo      Fuerza en x      Fuerza en y

2.	.000	-180.000
3.	90.000	-135.000

**MEDIO ANCHO DE BANDA : 6****DESPLAZAMIENTOS RESULTANTES, REACCIONES Y FUERZAS EN LAS BARRAS****Desplazamientos nodales:**

Nodo	Desp. en x	Desp. en y
1	.000	.000
2	.000	.000
3	.000	.000
4	.000	.000

**Reacciones:**

Nodo	Fuerza en x	Fuerza en y
1	-90.000	123.750
4	.000	191.250

**Fuerzas en los elementos:**

Elemento	Axial
1	255.0000
2	255.0000
3	-206.2501
4	-318.7501
5	180.0000

**\*\*\*\*\* FIN DEL PROGRAMA \*\*\*\*\***

■ ■

El ejemplo 20.2 ilustra el análisis de la armadura estáticamente indeterminada de la fig. 20.3, en la que algunos elementos están sometidos a cambios considerables de temperatura. En este ejemplo se supone que los dos elementos de la cuerda superior de la armadura están expuestos directamente a los rayos del sol y que experimentan incrementos de temperatura de 33°.

Los datos de entrada en este ejemplo se anotan exactamente igual que en el ejemplo 20.1, éstos se han encerrado en la impresión de salida que se da a continuación. En la última parte de los datos de entrada para la carga se toma el tipo 3 (cargas inducidas térmicamente). Es necesario dar los cambios de temperatura para cada uno de los elementos. Las magnitudes de las fuerzas que aparecen en los elementos de la armadura son bastante grandes.

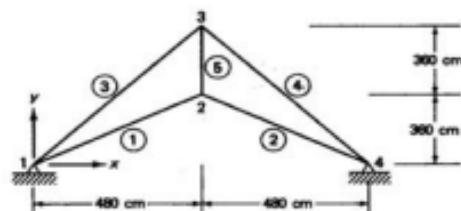


Figura 20.3

**EJEMPLO 20.2**

Analice la armadura de la figura 20.3; los elementos 3 y 4 de la cuerda superior están sometidos a un incremento de temperatura de  $33^{\circ}\text{C}$ . El coeficiente de dilatación térmica es  $11.7 \times 10^{-6} /^{\circ}\text{C}$  y  $E = 200 \times 10^{10} \text{ kN/cm}^2$ . Los elementos 1, 2, 3 y 4 tienen una sección transversal de  $64.5 \text{ cm}^2$  y el elemento 5 una sección de  $32.25 \text{ cm}^2$ .

*Solución*

Parte de la salida impresa:

Las unidades de longitud son: centímetro

Las unidades de fuerza son: kilonewton

Número de nodos = 4

Número de elementos = 5

Nodo	Coordinada x	Coordinada y
1	.00	.00
2	480.00	360.00
3	480.00	720.00
4	960.00	.00

Elemento	Nodo inicial	Nodo final
1	1	2
2	2	4
3	1	3
4	3	4
5	2	3

Clave para los tipos de apoyo de los nodos: 1 = apoyo, 0 = libre

Nodo	Apoyo en x	Apoyo en y	Inclinación del plano de soporte (grados)
1	1.	1.	.0
4	1.	1.	.0

Elemento	Area	Módulo
1	.64500E + 02	.20000E + 13
2	.64500E + 02	.20000E + 13
3	.64500E + 02	.20000E + 13
4	.64500E + 02	.20000E + 13
5	.32250E + 02	.20000E + 13

Tipo de carga: 3 (carga inducida térmicamente)

Elemento	Coef. Térmico	Cambio de temp.
3.	.117000E-04	33.000
4.	.117000E-04	33.000

MEDIO ANCHO DE BANDA : 6

DESPLAZAMIENTOS RESULTANTES, REACCIONES Y FUERZAS EN LAS BARRAS

Desplazamientos nodales:

Nodo	Desp. en x	Desp. en y
1	0.000	.000
2	0.000	.154
3	0.000	.286
4	0.000	.000

Reacciones:

Nodo	Fuerza en x	Fuerza en y
1	-7926547000.000	2968.118
4	7926553000.000	-3251.791

Fuerzas en los elementos:

Elemento      Axial

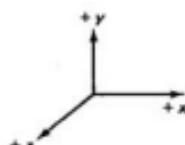
1	19816370000.0000
2	19816370000.0000
3	-14289790000.0000
4	-14289790000.0000
5	23779650000.0000

■ ■

## 20.4 ANALISIS DE ARMADURAS ESPACIALES O TRIDIMENSIONALES

En esta sección se analizará la armadura tridimensional de la fig. 20.4, casi igual a como se hizo con la armadura plana de la sección. Cuando tenga a la vista el menú principal anote el número 3 y los datos que le vaya pidiendo el programa.

Las cargas tendrán signo positivo de acuerdo con la siguiente convención:



### EJEMPLO 20.3

Analice la armadura espacial de la fig. 20.4. Para todos los elementos:

$$A = 64.5 \text{ cm}^2 \text{ y } E = 200 \times 10^{10} \text{ kN/cm}^2$$

Solución

Las unidades de longitud son: centímetro

Las unidades de fuerza son: kilonewton

Número de nodos = 5

Número de elementos = 8

Nodo	Coordenada x	Coordenada y	Coordenada z
1	.00	.00	.00
2	1500.00	.00	.00
3	1500.00	1200.00	.00
4	.00	1200.00	.00
5	600.00	600.00	900.00

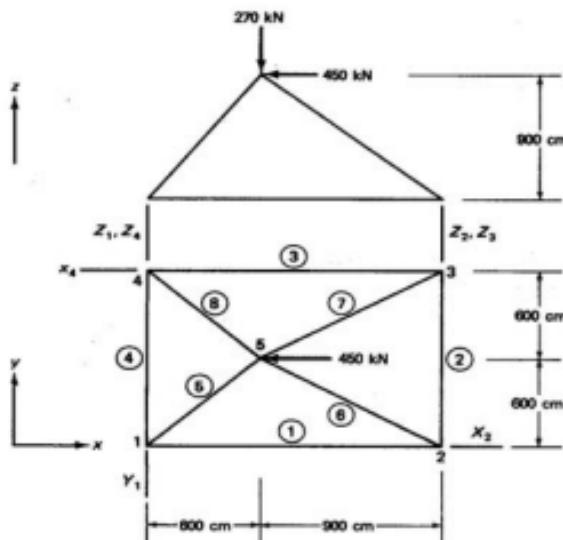


Figura 20.4

Elemento	Nodo inicial	Nodo final
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	1	4
5	1	5
6	2	5
7	3	5
8	4	5

Clave para los tipos de apoyo de los nodos: 1 = apoyo, 0 = libre

Nodo	Apoyo en x	Apoyo en y	Apoyo en z
------	------------	------------	------------

1	0.	1.	1.
2	1.	0.	1.
3	0.	0.	1.
4	1.	0.	1.

Elemento	Área	Módulo
1	.64500E + 02	.20000E + 13
2	.64500E + 02	.20000E + 13
3	.64500E + 02	.20000E + 13
4	.64500E + 02	.20000E + 13
5	.64500E + 02	.20000E + 13
6	.64500E + 02	.20000E + 13
7	.64500E + 02	.20000E + 13
8	.64500E + 02	.20000E + 13

Fuerzas aplicadas en los nodos:

Nodo	Fuerza en x	Fuerza en y	Fuerza en z
5.	-450.00	.000	-270.000

#### MEDIO ANCHO DE BANDA : 15

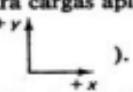
##### *Conjunto parcial de respuestas:*

Las fuerzas en los elementos 1, 3 y 7 son, respectivamente, 144.00, -81.00 y 126.6413 kN. ■ ■

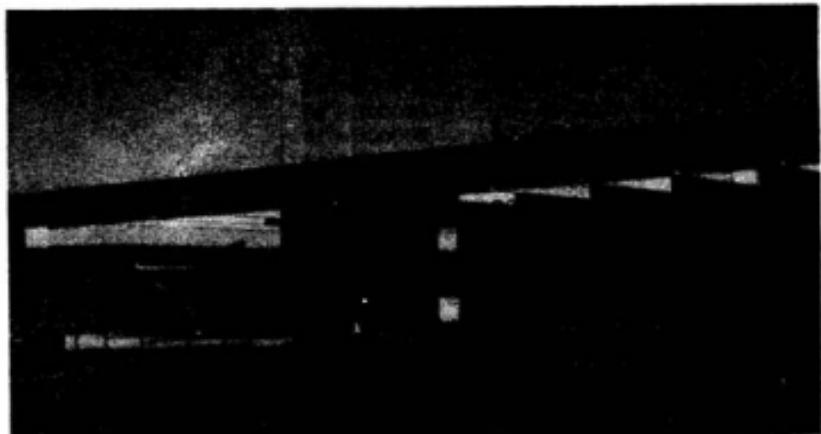
#### **20.5 ANALISIS DE VIGAS CONTINUAS**

En esta sección se presenta el análisis de dos vigas continuas. El programa que se emplea es el programa marcos del menú principal. Este se utiliza tanto para el análisis de vigas continuas como para marcos, de acuerdo a esto se corre el programa número 1 del menú ya mencionado.

Los otros datos se introducen a la computadora de la misma manera como se hizo para el caso de las armaduras; nuevamente el usuario debe utilizar unidades consistentes.

Para vigas continuas y marcos, las cargas en los elementos se colocan sobre los claros entre los nodos. Para elementos dirigidos hacia la derecha, una carga hacia arriba recibe un signo positivo (  ). Se recordará que para cargas aplicadas en los nodos utilizamos la siguiente convención de signos: (  ).

La convención de signos empleada para las fuerzas internas resultantes, axiales, cortantes y momentos, corresponde a la convención usada en este libro, o sea, una fuerza axial positiva produce tensión, una fuerza cortante positiva actúa hacia abajo



Embajada de México en Brasilia, Brasil. (Cortesía de Ingenieros Civiles Asociados, S.A. de C.V.)

en una cara derecha de un elemento (  ), y un momento positivo produce compresión en la superficie superior de éste. Para todo elemento (horizontal, vertical o inclinado), la cara derecha y la superficie superior de un elemento se determinan suponiendo que el eje longitudinal de éste corre hacia la derecha del observador.

La dirección del eje del elemento se especifica como yendo del primer nodo nombrado en el comando de la conectividad del elemento, al nodo que se ha nombrado en segundo lugar.

La convención de signos empleada para indicar los desplazamientos, las fuerzas y las reacciones nódulas, corresponde al sistema global de coordenadas escogido por el usuario del programa. De esta manera, las direcciones positivas empleadas al especificar las coordenadas nódulas también son direcciones positivas al especificar fuerzas y desplazamientos nódulas. Los momentos y las rotaciones positivas se definen de acuerdo con la regla de la mano derecha.

Es necesario un comentario final respecto a las cargas. Al usar PAEM es necesario especificar por separado, para cada claro, las cargas, cuando se tengan cargas uniformes de igual magnitud sobre varios claros.

#### EJEMPLO 20.4

Analice la viga continua sobre dos claros mostrada en la fig. 20.5, empleando el programa PAEM; se tienen los siguientes datos:  $E = 200 \times 10^{10}$  kN/cm<sup>2</sup>,  $A = 76$  cm<sup>2</sup> e  $I = 25470$  cm en ambos claros.

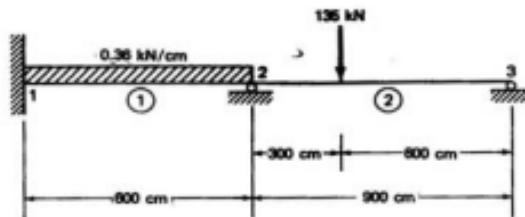


Figura 20.5

*Solución*

Las unidades de longitud son: (centímetro)

Las unidades de fuerza son: (kilonewton)

Número de nodos = 3

Número de elementos = 2

Nodo	Coordinada x	Coordinada y
1	.00	.00
2	600.00	.00
3	1500.00	.00

Elemento	Nodo inicial	Nodo final
1	1	2
2	2	3

Clave para los tipos de apoyo de los nodos: 1 = apoyo, 0 = libre

Nodo	Apoyo en x	Apoyo en y	Apoyo en r
1	1.	1.	1.
2	0.	1.	0.
3	0.	1.	0.

Elemento	Área	Inercia	Módulo
1	.76000E + 02	.25470E + 05	.20000E + 13
2	.76000E + 02	.25470E + 05	.20000E + 13

**Fuerzas en los elementos; carga distribuida**

Elemento	Carga dist.	Principio de la carga	Fin de la carga
1.	-.360	.000	600.000

**Fuerzas en los elementos; carga concentrada**

Elemento	Carga concentrada	Distancia desde el principio
2.	-135.000	300.000

**MEDIO ANCHO DE BANDA : 6****DEPLAZAMIENTOS, REACCIONES Y FUERZAS EN LOS ELEMENTOS**  
**Desplazamientos nodales:**

Nodo	Desp. x	Desp. y	Rotación z
1	.000	.000	.000
2	.000	.000	.000
3	.000	.000	.000

**Reacciones:**

Nodo	Fuerza x	Fuerza y	Momento z
1	0.000	88.500	6899.981
2	0.000	238.167	0.000
3	0.000	24.333	0.000

**Fuerzas y momentos en los extremos de los elementos:**

Elemento	Nodo	F. Axial (x)	F. Cort. (y)	Momento z
1	1	.0000	88.5000	-6899.9810
1	2	.0000	-127.5000	-18600.0000
2	2	.0000	110.6667	-18600.0000
2	3	.0000	-24.3333	.0010

**\*\*\*\*\* FIN DEL PROGRAMA \*\*\*\*\***

A veces se tienen dificultades para interpretar los resultados dados por una computadora y para entender la convención de signos, con el fin de dibujar los diagramas de momentos y cortante. El presente programa utiliza una convención de signos muy parecida a la empleada en la Mecánica de sólidos, por lo que no se dificulta demasiado aplicarlo. Por ejemplo, un momento negativo indica tensión en las fibras superiores de una viga.

En la fig. 20.6 se muestran los diagramas de cortante y momento para la viga del ejemplo 20.4; los autores esperan que sean de utilidad para los lectores.

El ejemplo 20.5 presenta el análisis por computadora de la viga continua sobre tres claros mostrada en la fig. 20.7; ésta tiene varias cargas en sus claros. (Con el

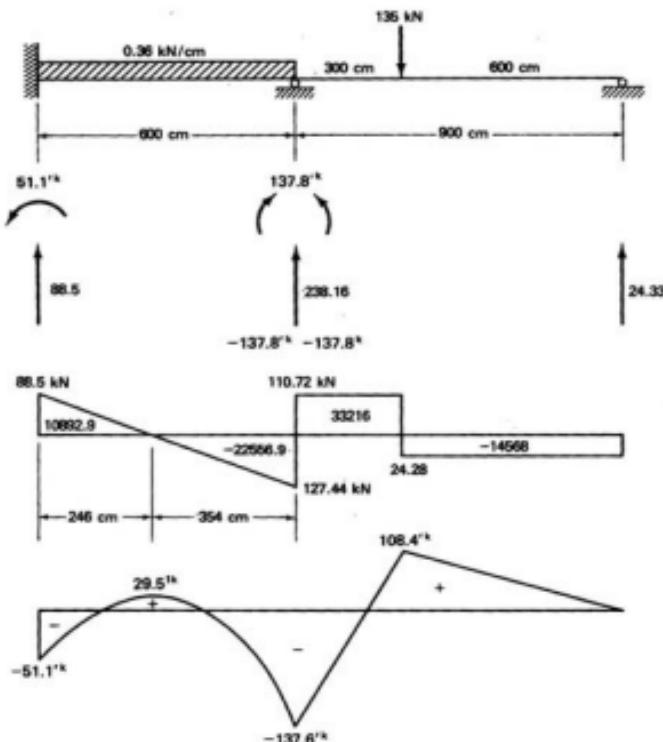


Figura 20.6

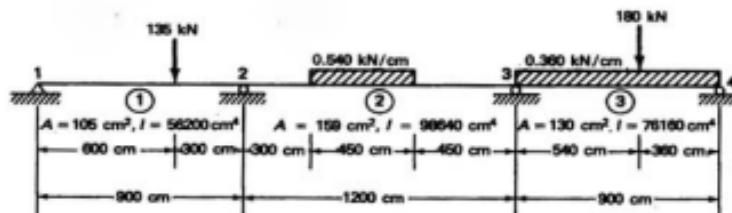


Figura 20.7

programa PAEM, el analista puede especificar simultáneamente tantas cargas concentradas y distribuidas como deseé.) Obsérvese que hay una carga uniforme que se extiende sólo sobre parte del elemento 2. Esta carga es de 0.54 kN/cm con principio a 300 cm y fin a 750 cm desde el extremo izquierdo del elemento.

#### EJEMPLO 20.5

Analizar la viga mostrada en la fig. 20.7 usando el programa PAEM.  $E = 200 \times 10^{10}$  kN/cm<sup>2</sup>. Las áreas y los momentos de inercia se muestran en la figura.

*Solución*

Las unidades de longitud son: centímetro

Las unidades de fuerza son: kilonewton

Número de nodos = 4

Número de elementos = 3

Nodo	Coordinada x	Coordinada y
1	.00	.00
2	900.00	.00
3	2100.00	.00
4	3000.00	.00

1	.00	.00
2	900.00	.00
3	2100.00	.00
4	3000.00	.00

Elemento	Nodo inicial	Nodo final
1	1	2
2	2	3
3	3	4

1	1	2
2	2	3
3	3	4

Clave para los tipos de apoyo de los nodos: 1 = apoyo, 0 = libre

Nodo	Apoyo en x	Apoyo en y	Apoyo en r
1	1.	1.	0.
2	0.	1.	0.
3	0.	1.	0.
4	0.	1.	0.

Elemento	Área	Inercia	Módulo
1	.10500E + 03	.56200E + 05	.20000E + 13
2	.15900E + 03	.98640E + 05	.20000E + 13
3	.13000E + 03	.76160E + 05	.20000E + 13

Fuerzas en los elementos; Carga distribuida

Elemento	Carga dist.	Principio de la carga	Fin de la carga
2.	-.540	300.000	750.000
3.	-.360	.000	900.000

Fuerzas en los elementos; Carga concentrada

Elemento	Carga concentrada	Distancia desde el principio
1.	-135.000	600.000
3.	-180.000	540.000

MEDIO ANCHO DE BANDA : 6

*Conjunto parcial de respuestas:*

Los momentos en los nodos 2 y 3 son, respectivamente: -24936.5300 y -50072.1300 kN cm. ■ ■

## 20.6 ANALISIS DE MARCOS

El marco de un solo claro de la fig. 20.8 se analiza en el ejemplo 20.6 con el programa PAEM, exactamente igual a como se hizo con las vigas continuas de la sección 20.5. Obsérvese que este programa considerará sólo cargas que sean

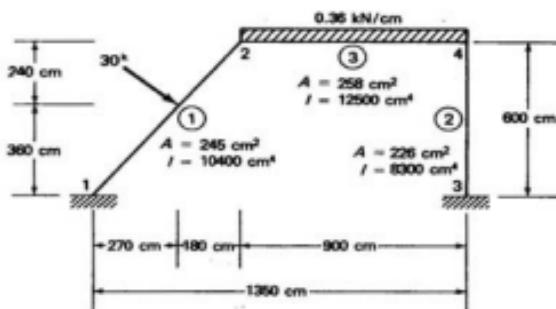


Figura 20.8

perpendiculares a elementos. Nótese también que en el ejemplo 20.6, la carga de 135 kN se toma como negativa.

### EJEMPLO 20.6

Analice el marco de la fig. 20.8 empleando el PAEM.  $E = 200 \times 10^{10}$  kN/cm<sup>2</sup>.

*Solución*

#### DATOS DE ENTRADA

Las unidades de longitud son: (centímetro)

Las unidades de fuerza son: (kilonewton)

Número de nodos = 4

Número de elementos = 3

Nodo	Coordinada x	Coordinada y
1	.00	.00
2	450.00	600.00
3	1350.00	0.00
4	1350.00	600.00

Elemento	Nodo inicial	Nodo final
----------	--------------	------------

1	1	2
2	3	4
3	2	4

Clave para los tipos de apoyo de los nodos: 1 = apoyo, 0 = libre

Nodo	Apoyo en x	Apoyo en y	Apoyo en r
------	------------	------------	------------

1	1.	1.	1.
3	1.	1.	1.

Elemento	Area	Inercia	Módulo
----------	------	---------	--------

1	.24500E + 03	.10400E + 05	.20000E + 13
2	.22600E + 03	.83000E + 04	.20000E + 13
3	.25800E + 03	.12500E + 05	.20000E + 13

Fuerzas en los elementos: Carga distribuida

Elemento	Carga dist.	Principio de la carga	Fin de la carga
----------	-------------	-----------------------	-----------------

3	-.360	.000	900.000
---	-------	------	---------

Fuerzas en los elementos: Carga concentrada

Elemento	Carga concentrada	Distancia desde el principio
----------	-------------------	------------------------------

1.	-135.000	450.000
----	----------	---------

### MEDIO ANCHO DE BANDA : 9

#### Conjunto parcial de respuestas:

Los momentos en los nodos 1 y 3 son, respectivamente: -34308.040 y -35798.570 kN cm. ■ ■

El sistema de numeración mostrado en la fig. 20.9 es el usado en este capítulo para marcos. Como se vio previamente en el capítulo 19, el esquema de numeración no es muy importante en las pequeñas estructuras consideradas aquí, pero puede

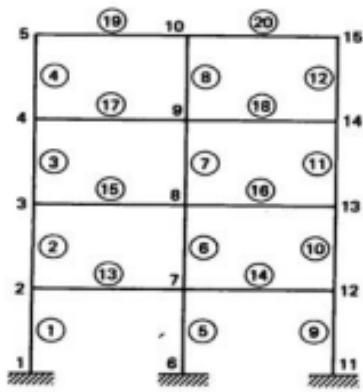


Figura 20.9

volverse de gran importancia en el tiempo de ejecución necesario en estructuras grandes. En general, el usuario del programa debe tratar de mantener a un mínimo la diferencia entre los números de los nodos en los extremos de los elementos. Con esto se determina un ancho de banda mínimo en la matriz de rigidez y minimiza el tiempo utilizado por la computadora para tener los resultados.

#### EJEMPLO 20.7

Analice el marco de la fig. 20.10 utilizando el programa PAEM.  $E = 200 \times 10^{10}$  kN/cm $^2$ ,  $A = 193.5$  cm $^2$  e  $I = 20810$  cm $^4$ , para todos los elementos.

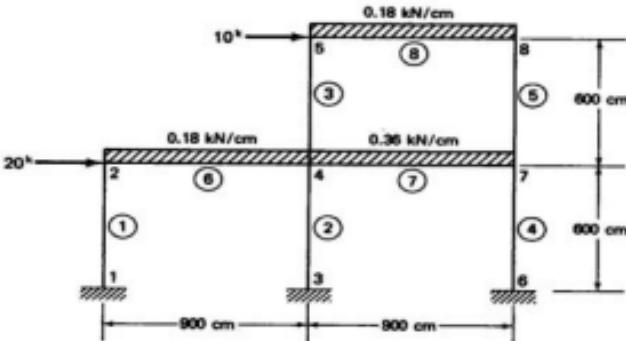


Figura 20.10

*Solución***DATOS DE ENTRADA**Las unidades de longitud son: **centímetro**Las unidades de fuerza son: **kilonewton**Número de nodos = **8**Número de elementos = **8**

Nodo      Coordenada x      Coordenada y

1	.00	.00
2	.00	600.00
3	900.00	.00
4	900.00	600.00
5	900.00	1200.00
6	1800.00	.00
7	1800.00	600.00
8	1800.00	1200.00

Elemento      Nodo inicial      Nodo final

1	1	2
2	3	4
3	4	5
4	6	7
5	7	8
6	2	4
7	4	7
8	5	8

Clave para los tipos de apoyo de los nodos: 1 = apoyo, 0 = libre

Nodo      Apoyo en x      Apoyo en y      Apoyo en r

1	1.	1.	1.
3	1.	1.	1.
6	1.	1.	1.

Elemento	Área	Inercia	Módulo
----------	------	---------	--------

1	.19350E + 03	.20810E + 05	.20000E + 13
2	.19350E + 03	.20810E + 05	.20000E + 13
3	.19350E + 03	.20810E + 05	.20000E + 13
4	.19350E + 03	.20810E + 05	.20000E + 13
5	.19350E + 03	.20810E + 05	.20000E + 13
6	.19350E + 03	.20810E + 05	.20000E + 13
7	.19350E + 03	.20810E + 05	.20000E + 13
8	.19350E + 03	.20810E + 05	.20000E + 13

#### Fuerzas aplicadas en los nodos

Nodo	Fuerza en x	Fuerza en y	Momento en z
------	-------------	-------------	--------------

2.	90.000	.000	.000
5.	45.000	.000	.000

#### Fuerzas en los elementos; Carga distribuida

Elemento	Carga dist.	Principio de la carga	Fin de la carga
----------	-------------	-----------------------	-----------------

6.	-.180	.000	900.000
7.	-.360	.000	900.000
8.	-.180	.000	900.000

#### MEDIO ANCHO DE BANDA : 12

Conjunto parcial de respuestas: los momentos en los nodos 1, 3 y 6 son, respectivamente: 12900.590, 16446.430 y 19685.380 kN cm. ■ ■

#### 20.7 PREPARACION DE ARCHIVOS DE DATOS PARA USARSE CON LOS PROGRAMAS ARMA2D, ARMA3D Y MARCO

Para usar la opción de un archivo de datos con cualquiera de los programas mencionados antes, los datos de entrada y salida deben grabarse en un disquete (floppy) diferente al que contiene el programa.

El archivo de datos puede crearse con la ayuda de cualquier editor de texto. Si un usuario desea cambiar o corregir los datos para una segunda o subsecuente corrida, puede corregir los datos en el archivo y correr el programa de nuevo. Este

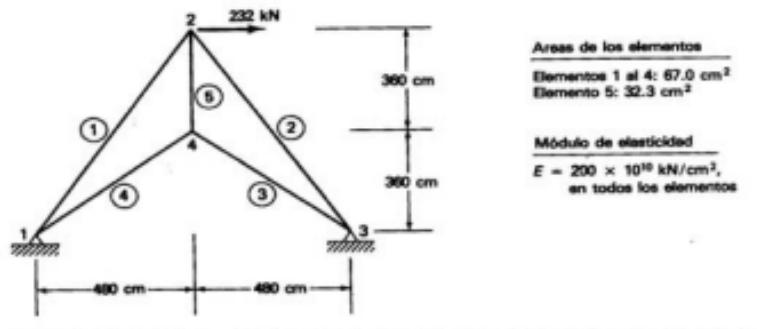


Figura 20.11

procedimiento ahorrará con frecuencia tiempo y esfuerzo al correr un programa varias veces con datos de entrada ligeramente modificados.

Probablemente el editor más usado sea un programa llamado EDLIN, que se incluye con la mayoría de los sistemas operativos MS-DOS. El uso de este programa garantiza que todos los caracteres que se utilicen en el archivo de datos son caracteres ASCII, lo cual es un requisito del archivo de datos. Muchos programas procesadores de palabras también pueden usarse para crear archivos de datos, pero debe tenerse cuidado de quitar del archivo, antes de usarse en los programas arma2d, arma3d y marco, todos los caracteres que no sean ASCII (algunos paquetes procesadores de palabras los insertan en forma oculta).

Los archivos de datos para estos tres programas proporcionan información en el mismo orden y de la misma manera como se describe en el Modo Interactivo para un programa particular. A continuación se presenta una muestra para la estructura de la fig. 20.11.

Un archivo de datos creado al correr uno de los programas PAEM, usando el modo interactivo, también puede cambiarse o corregirse empleando EDLIN u otro editor de textos.

## Valor en el archivo

## El dato representa:

Armadura de ejemplo

Título (cualquier carácter alfanumérico)

4

Número de nodos

5

Número de elementos

1,0,0

No. de nodo, coord. x, coord. y

2, 480, 720

No. de nodo, coord. x, coord. y

3, 960, 0

No. de nodo, coord. x, coord. y

4, 480, 360

No. de nodo, coord. x, coord. y

1,1,2	No. de elemento, no. de nodo inicial, no. de nodo final.
2,2,3	No. de elemento, no. de nodo inicial, no. de nodo final.
3,3,4	No. de elemento, no. de nodo inicial, no. de nodo final.
4,1,4	No. de elemento, no. de nodo inicial, no. de nodo final.
5,2,4	No. de elemento, no. de nodo inicial, no. de nodo final.
2	No. de nodos con apoyo
1,1,1,0,0	No. de nodo, clave (1 o 0) para apoyo en x, clave (1 o 0) para apoyo en y, grados de inclinación del plano apoyo.
3,1,1,0,0	Número de nodo, clave (1 o 0) para apoyo en x, clave (1 o 0) para apoyo en y, grados de inclinación del plano de apoyo.
2	Número de elementos con diferentes propiedades.
67, 200E + 10	Primer área y módulo de elasticidad.
4	Número de elementos que tienen esta área.
1,2,3,4	Identificación de los elementos.
32.3, 200E + 10	Segunda área y módulo de elasticidad.
1	Número de elementos que tienen estas propiedades.
5	Identificación de los elementos.
1	Opción de carga (1,2,3 o 4)
1	Número de nodos cargados.
2, 232.00, 0.0	Número de nodo, fuerza en x, fuerza en y.

}\* ]

\* Nota: Estas entradas serán diferentes para las opciones de carga 2, 3 o 4.

## 20.8 ADVERTENCIA: PELIGRO

Una persona puede volverse un "analista de estructuras experto de inmediato" en unas cuantas horas, después de leer este breve capítulo y resolver con PAEM algunos de los problemas de ejemplo incluidos aquí. Entonces, podrá analizar casi todos los problemas contenidos en los 19 capítulos anteriores. Aún más, nuestro "experto" no estaría limitado a las estructuras relativamente pequeñas consideradas en este

libro, sino que podría ocuparse de otras mucho más grandes. *Para los autores esto es potencialmente desastroso.*

El peligro estriba cuando personas inexpertas usan programas como el PAEM para analizar una amplia gama de estructuras con las que han tenido poca o ninguna experiencia. El ingeniero debe darse cuenta que las computadoras no amplían por sí mismas la competencia estructural de una persona. Programas como el PAEM proporcionarán seguramente respuestas correctas sólo si se usa una entrada (input) correcta. Pero si en vez de esto se suministran *datos de entrada incorrectos*, ¿será capaz el usuario de juzgar si los resultados son razonables?

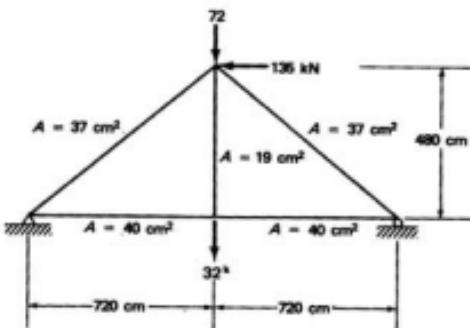
En un artículo publicado en 1984, G.S. Orenstein escribió "el software en manos de un ingeniero inexperto es una amenaza pública" [1]. En la práctica es absolutamente necesario que un analista experimentado revise los análisis por computadora que parezcan sospechosos. En última instancia, el ingeniero es responsable de sus análisis y de los diseños que de ellos se obtengan, independientemente del software que se haya usado. Por ello el ingeniero debe tener un amplio conocimiento del software que se esté usando, ya sea que este conocimiento provenga de sus estudios, o bien, se base en consultores competentes.

Finalmente, concluimos este capítulo con la consabida frase: "El lector puede usar el programa PAEM en cualquier forma que considere conveniente, pero ni los autores, ni los editores asumen ninguna responsabilidad por cualquier dificultad que pueda surgir a causa de tal uso".

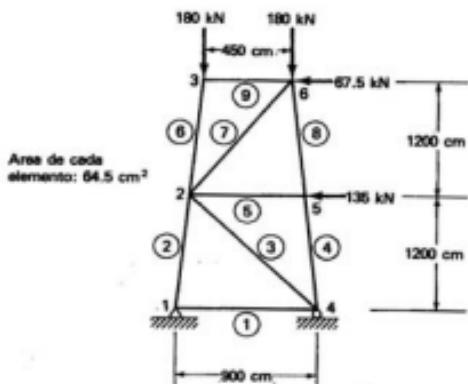
## PROBLEMAS

Analice todas las estructuras de los problemas 20.1 al 20.26 empleando el programa PAEM.  $E = 200 \times 10^{10}$  kN/cm<sup>2</sup>, a menos que se indique otro valor.

### 20.1



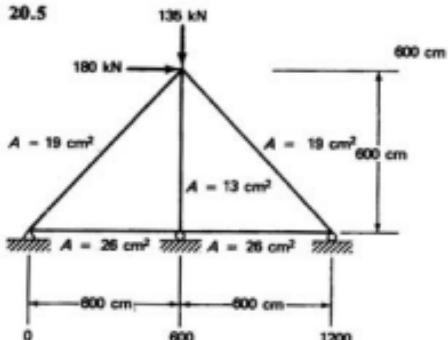
- 20.2 (Resp.:  $F_1 = -151.87 \text{ kN}$ ,  $F_6 = -180.79 \text{ kN}$ ,  $F_9 = -16.87 \text{ kN}$ .)



- 20.3 Repita el problema 4.23 considerando que todos los elementos tienen áreas de  $48.4 \text{ cm}^2$ .

- 20.4 Repita el problema 5.27 considerando que todos los elementos exteriores tienen áreas de  $54.8 \text{ cm}^2$  y todos los interiores de  $41.9 \text{ cm}^2$ . (Resp.:  $F_1 = +103 \text{ kN}$ ,  $F_3 = -154.55 \text{ kN}$ ,  $F_8 = -63.28 \text{ kN}$ .)

- 20.5



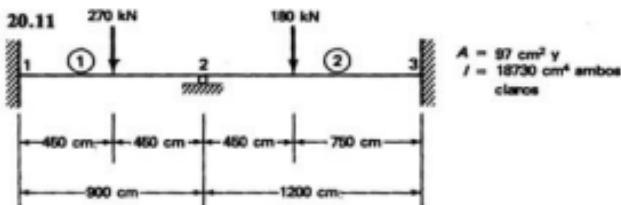
- 20.6 Repita el problema 11.24.  $E = 200\,000 \text{ N/mm}^2$ . (Resp.:  $F_1 = +59.8 \text{ kN}$ ,  $F_7 = -49.69 \text{ kN}$ .)

- 20.7 Repita el problema 11.26.

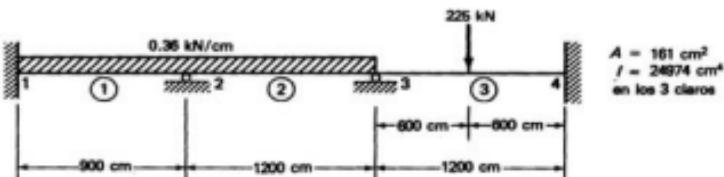
- 20.8 Repita el problema 11.34. (Resp.:  $H_1 = 81.62 \text{ kN} \leftarrow$ , elemento ① =  $+98.09 \text{ kN}$ .)

- 20.9 Repita el problema 6.1.

- 20.10 Repita el problema 6.6,  $A = 0.625 \text{ m}$ . (Resp.: elemento ① =  $-56.25 \text{ kN}$ ,  $Z_1 = 225 \text{ kN t}$ ,  $Y_7 = 56.25 \text{ kN t}$ .)

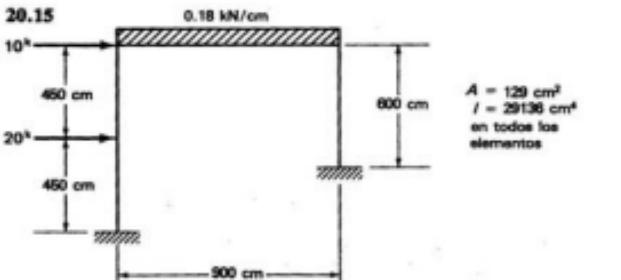
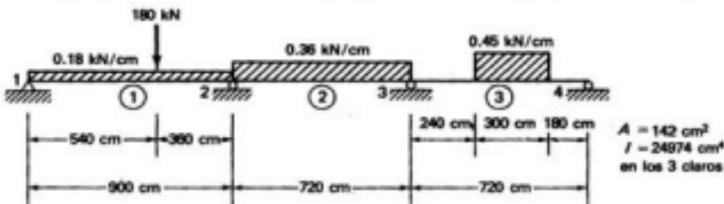


- 20.12 (Resp.:  $M_2 = -371.37 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_3 = -408.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )

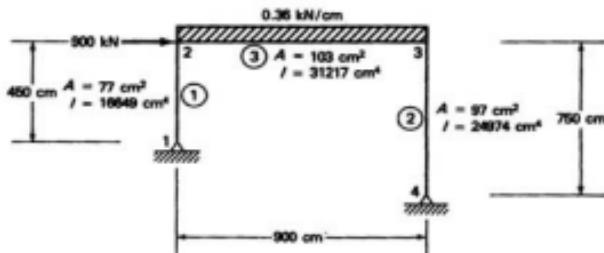


- 20.13 Repita el problema 20.11 si la carga de 180 kN se duplica y  $A$  es igual a  $160 \text{ cm}^2$  e  $I = 25000 \text{ cm}^4$  para el tramo de la parte derecha de la viga.

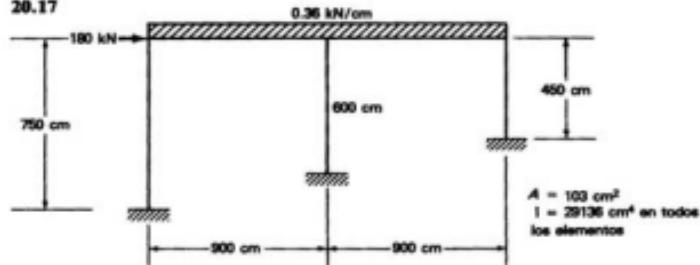
- 20.14 (Resp.:  $M_2 = -352.94 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_3 = -111.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $Y_4 = -57.6 \text{ kN}$ .)



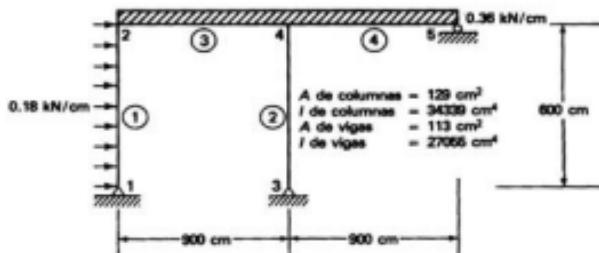
20.16 (Resp.:  $M_2 = 179.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $H_1 = 39.87 \text{ kN} \leftarrow$ ,  $Y_4 = 223.7 \text{ kN} \uparrow$ .)



20.17



20.18 (Resp.:  $M_2 = 63.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $X_1 = 64.6 \text{ kN} \leftarrow$ ,  $Y_3 = 415.7 \text{ kN} \uparrow$ .)

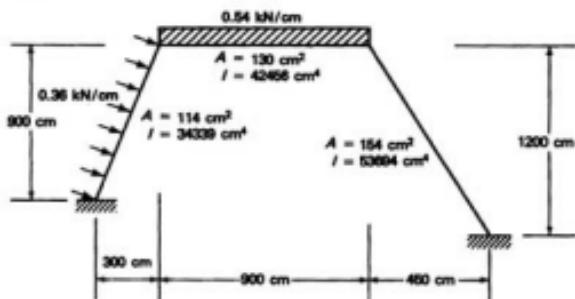
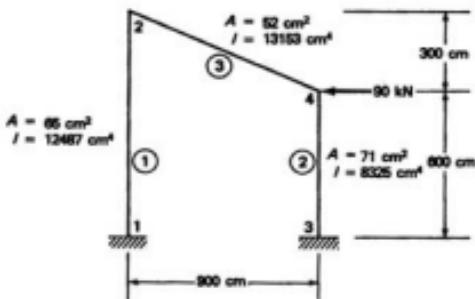


20.19 Repita el problema 15.15 si  $A = 103 \text{ cm}^2$  e  $I = 33\,300 \text{ cm}^4$  en todos los elementos.

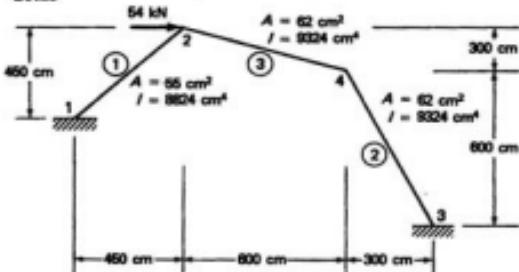
20.20 Repita el problema 15.18 si  $A$  para las columnas es de  $64.5 \text{ cm}^2$  y para las vigas es de  $90 \text{ cm}^2$ . (Resp.:  $M_1 = -28.39 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $X_1 = 11.261 \text{ kN}\cdot\text{m} \leftarrow$ ,  $Y_3 = 69.508 \text{ kN}\cdot\text{m} \uparrow$ .)

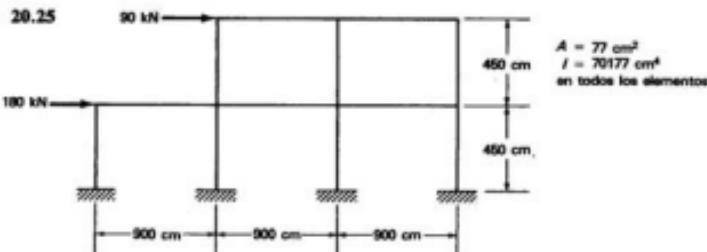
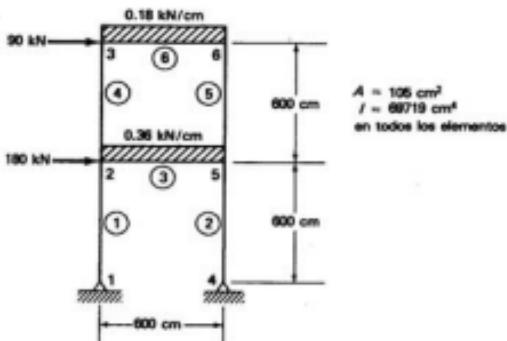
## Problemas

20.21

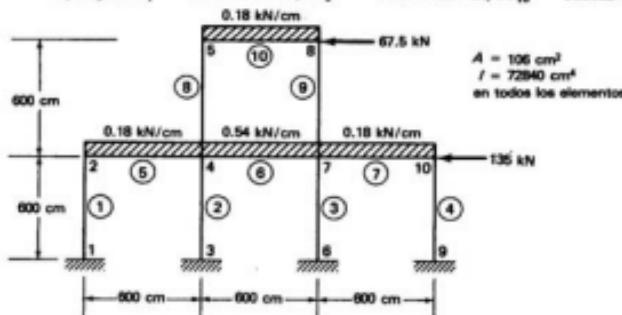
20.22 (Resp.:  $M_1 = -119.87 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_3 = 218.16 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $H_3 = 60.02 \text{ kN} \leftarrow$ )

20.23

20.24 (Resp.:  $M_3 = 191.47 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $H_4 = 140.23 \text{ kN} \leftarrow$ )



**20.26 (Resp.:  $M_1 = 179.53 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_2 = -143.15 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_{10} = 102.23 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .)**



#### REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

- Orenstein, G.S., "Instant Expertise: A Danger of Small Computers," *Civil Engineering* (Nueva York: American Society for Civil Engineering, junio 1984), págs. 50-51.

## Segundo Teorema de Castigliano

### A.1 INTRODUCCION

El segundo teorema de Castigliano, comúnmente conocido como el *método del trabajo mínimo*, ha desempeñado un importante papel en el desarrollo del análisis estructural a través de los años y, ocasionalmente, se usa en la actualidad. Está intimamente relacionado con el método de las deformaciones compatibles analizado en el capítulo 11 y es muy efectivo para analizar estructuras estáticamente indeterminadas, sobre todo armaduras y estructuras compuestas. (Las estructuras compuestas se definen aquí como estructuras que tienen algunos elementos que trabajan sólo a fuerza axial y otros elementos que trabajan a flexocompresión o a flexotensión.) Aunque el método es aplicable a vigas y a marcos, otros métodos, como el de la distribución de momentos (capítulos 14 y 15), generalmente son más satisfactorios. El método del trabajo mínimo tiene la desventaja de que no es aplicable en su forma usual a fuerzas causadas por desplazamientos debidos a cambios de temperatura, asentamientos de los apoyos, ni a errores de fabricación.

En el capítulo 9 se mostró que la primera derivada parcial del trabajo interno total con respecto a una carga  $P$  (real o imaginaria) aplicada en un punto de una estructura, es igual a la deflexión en la dirección de  $P$ . Para el siguiente análisis, consideraremos la viga continua de la fig. A.1 y su reacción vertical  $V_B$  en el apoyo  $B$ .

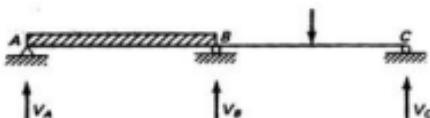


Figura A.1

Si la primera derivada parcial del trabajo en esta viga se toma con respecto a la reacción  $V_B$ , se tendrá la deflexión en  $B$ , pero tal deflexión es nula.

$$\frac{\partial W}{\partial P} = 0$$

Esta es una formulación del segundo teorema de Castigliano. Pueden escribirse ecuaciones de este tipo para todo punto restringido de una estructura estáticamente indeterminada. Una estructura se deformará de una manera consistente con sus restricciones físicas o de una manera tal, que el trabajo interno de deformación sea mínimo.

Las columnas y tráves que se conectan en un nudo de una estructura se deformarán lo mismo, o sea, lo mínimo posible. Ignorando el efecto de los otros extremos de esos elementos, puede verse que cada elemento no realiza más trabajo que el necesario y el trabajo total ejecutado por todos los elementos que llegan al nudo es el mínimo posible.

El teorema del trabajo mínimo puede entonces formularse de la siguiente manera: **el trabajo interno realizado por cada elemento o por cada segmento de una estructura estáticamente indeterminada, sujeta a un conjunto de cargas externas, es el mínimo necesario para mantener el equilibrio con las cargas.**

En algunas ocasiones (sobre todo en vigas continuas y marcos), el método del trabajo mínimo es muy laborioso en su aplicación. Por ello, en ocasiones algunos lectores expresan energicas opiniones acerca de lo que piensan sobre el término "trabajo mínimo".

Para analizar una estructura estáticamente indeterminada con el teorema de Castigliano, se supone que ciertos elementos son las redundantes y se consideran eliminados de la estructura. Deben retirarse tantos elementos como sea necesario para dejar una estructura isostática y estable. Las fuerzas  $F'$  en la estructura se determinan por medio de las cargas externas; las redundantes se reemplazan como cargas  $X_1$ ,  $X_2$ , etc.; luego se determinan las fuerzas que producen las cargas.

El trabajo interno total de deformación puede establecerse en términos de las fuerzas  $F'$  y las fuerzas causadas por las cargas redundantes. El resultado se diferencia sucesivamente con respecto a las redundantes. Las derivadas se igualan a cero para determinar los valores de las redundantes.

Los ejemplos A.1 al A.6 ilustran el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas por medio del trabajo mínimo. Aunque los métodos del trabajo mínimo y de la deformación consistente son los más generales para analizar varios tipos de estructuras hiperestáticas, éstos no se usan con mucha frecuencia actualmente, porque otros métodos analizados previamente son más adecuados.

#### EJEMPLO A.1

Determine la reacción en el apoyo  $C$  en la viga de la fig. A.2 por medio del trabajo mínimo;  $E$  e  $I$  son constantes.

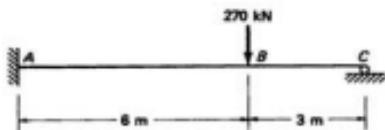


Figura A.2

*Solución:*

Se supone que la reacción en *C* es  $V_c$  y que las otras reacciones se determinan como sigue:

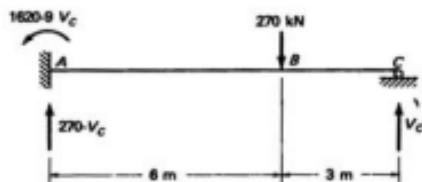


TABLA A.1

Sección	$M$	$\frac{\partial M}{\partial V_c}$	$M \frac{\partial M}{\partial V_c}$	$\int M \frac{\partial M}{\partial V_c} \frac{dx}{EI} = 0$
<i>C</i> a <i>B</i>	$V_c x$	$x$	$V_c x^2$	$\frac{1}{EI} \int_0^3 (V_c x^2) dx$
<i>B</i> a <i>A</i>	$V_c x - 270x + 810$	$x$	$V_c x^2 - 270x^2 + 810x$	$\frac{1}{EI} \int_3^9 (V_c x^2 - 270x^2 + 810x) dx$
$\Sigma$				$243 V_c - 34\ 020 = 0$

$$V_c = 140 \text{ kN} \uparrow$$

■ ■

**EJEMPLO A.2**

Determine el valor de la reacción en el apoyo *C*, fig. A.3, por medio del trabajo mínimo.

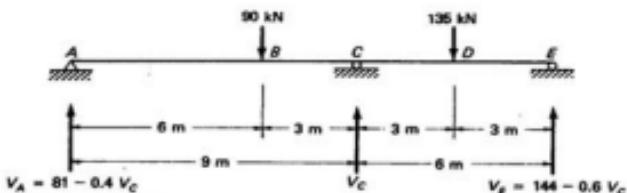


Figura A.3

*Solución:*

TABLA A.2

Sección	$M$	$\frac{\partial M}{\partial V_c}$	$\int M \frac{\partial M}{\partial V_c} \frac{dx}{EI} = 0$
A a B	$81x - 0.4 V_c x$	$-0.4x$	$\int_0^6 (-32.4x^2 + 0.16V_c x^2) dx$
B a C	$-9x - 0.4 V_c x + 540$	$-0.4x$	$\int_6^9 (3.6x^2 + 0.16V_c x^2 - 216x) dx$
E a D	$144x - 0.6 V_c x$	$-0.6x$	$\int_9^{15} (-86.4x^2 + 0.36V_c x^2) dx$
D a C	$9x - 0.6 V_c x + 405$	$-0.6x$	$\int_{15}^9 (-5.4x^2 + 0.36V_c x^2 - 243x) dx$

Integrando las expresiones  $\int M(\partial M / \partial V_c)(dx/EI)$  y sustituyendo los límites correctos de integración, el resultado para la viga entera es:

$$64.8V_c - 10975.5 = 0 \\ V_c = +169.375 \text{ kN} \dagger$$

■ ■

**EJEMPLO A.3**

Determine la fuerza en el elemento CD de la armadura mostrada en la fig. A.4. Las cifras encerradas en círculos representan áreas transversales en centímetros cuadrados.  $E$  es constante.

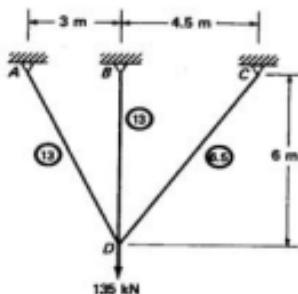


Figura A.4

**Solución:**

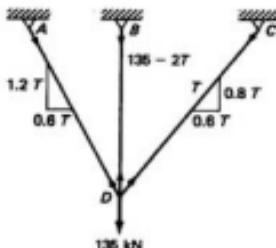
Se supone que la barra  $CD$  es la redundante y se le asigna una fuerza de  $T$ . Las otras fuerzas se determinan por equilibrio de nudo con los siguientes resultados:

$$\frac{\partial W}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \sum \frac{F^2 \ell}{2AE} = \sum F \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\ell}{AE}$$

TABLA A.3

Barra	$\ell$ (m)	$A(m^2)$	$\frac{f}{A}$	$F$	$\frac{\partial F}{\partial T}$	$F \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\ell}{AE}$
$AD$	6.708	0.0013	5160			
$BD$	6.000	0.0013	4615.4	$+1.34T$	$+1.34$	$9265.3T/E$
$CD$	7.500	0.00065	11538.5	$135 - 2T$	$-2$	$(-1246158 + 18461.6T)/E$
$\Sigma$				$+T$	$+1$	$11538.5T/E$
						$(39265.4T - 1246158)/E = 0$

$$T = +31.74 \text{ kN}$$



**EJEMPLO A.4**

Analice la armadura de la fig. A.5 por medio del trabajo mínimo. Las cifras encerradas en círculos se refieren a las áreas de las secciones transversales de los elementos en centímetros cuadrados.

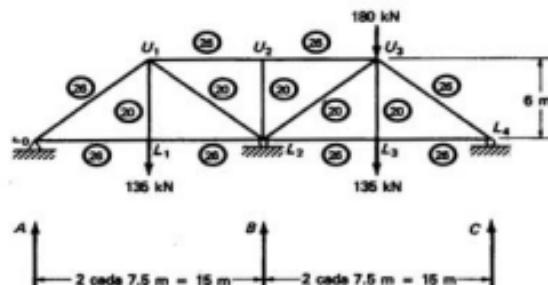
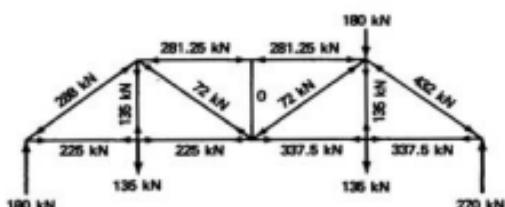


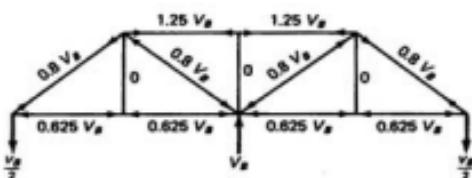
Figura A.5

*Solución:*

Se retira el apoyo central y se calculan las fuerzas  $F'$ .



Se reemplaza el apoyo central y se determina su efecto en los elementos en términos de  $V_B$ .



Se calculan los valores en la tabla A.4 y se tiene:

$$E \frac{\partial W}{\partial V_B} = \frac{F\ell}{A} \frac{\partial F}{\partial V_B}$$

$$-6183\ 233.2 + 24\ 391.6\ V_B = 0 \\ V_B = + 253.5\text{ kN} \quad \blacksquare \blacksquare$$

Por lo visto resulta obvio, en los ejemplos anteriores, que la cantidad de trabajo comprendido en el análisis de armaduras estáticamente indeterminadas, por medio del método, del trabajo mínimo y de la deformación consistente, es aproximadamente igual. Para vigas y marcos hiperestáticos, otros métodos como el de la distribución de momentos, presentado en los capítulos 14 y 15, son mucho más simples en su aplicación.

Sin embargo, el método del trabajo mínimo resulta muy útil para analizar estructuras compuestas, como las consideradas en los ejemplos A.5 y A.6. En esos tipos de estructuras se presentan la flexión y la acción de armaduras. Si el lector intenta resolver los siguientes dos problemas por medio del método de las deformaciones compatibles, se convencerá de las ventajas del método del trabajo mínimo en la solución de estructuras compuestas.

### EJEMPLO A.5

Empleando el método del trabajo mínimo, calcule la fuerza en la barra de acero de la estructura compuesta mostrada en la fig. A.6.

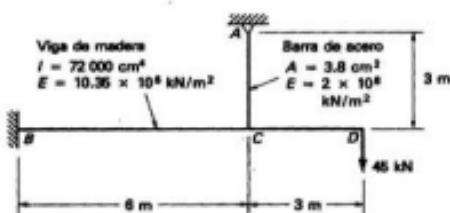


Figura A.6

*Solución:*

Se supone que la barra de acero con una fuerza axial  $T$  es la redundante y se calculan los valores de  $\sum F(\partial F/\partial T)(\ell AE)$  y  $\int M(\partial M/\partial T)(dx/EI)$ . Para el acero y la madera se utilizan valores relativos para  $E$ , de 29 y 1.5, respectivamente.

TABLA A.4

Barras	$t$ (m)	$A$ (m $^2$ )	$\frac{t}{A}$	$F_{(kN)}$	$\frac{F}{A}$	$\frac{\delta F}{\delta V_a}$	$\frac{F}{A}$	$\frac{\delta F}{\delta V_b}$
$L_1 L_1'$	7.5	0.0026	2.884.6	+ 225.0 - 0.625V <sub>a</sub>	+ 649.035.0 - 1.802.9V <sub>a</sub>	- 0.625	- 405.646.9 + 1.126.8V <sub>a</sub>	
$L_1 L_2$	7.5	0.0026	2.884.6	+ 225.0 - 0.625V <sub>a</sub>	+ 649.035.0 - 1.802.9V <sub>a</sub>	- 0.625	- 405.646.9 + 1.126.8V <sub>a</sub>	
$L_1 L_3$	7.5	0.0026	2.884.6	+ 337.5 - 0.625V <sub>a</sub>	+ 973.532.5 - 1.802.9V <sub>a</sub>	- 0.625	- 608.470.3 + 1.126.8V <sub>a</sub>	
$L_1 L_4$	7.5	0.0026	2.884.6	+ 337.5 - 0.625V <sub>a</sub>	+ 973.532.5 - 1.802.9V <sub>a</sub>	- 0.625	- 608.470.3 + 1.126.8V <sub>a</sub>	
$L_2 L_1'$	9.6	0.0026	3.692.3	- 288.0 + 0.800V <sub>a</sub>	- 1.063.382.4 + 2.933.8V <sub>a</sub>	+ 0.800	- 850.705.6 + 2.363.0V <sub>a</sub>	
$L_2 L_2'$	7.5	0.0026	2.884.6	- 281.2 + 1.250V <sub>a</sub>	- 811.293.8 + 3.605.8V <sub>a</sub>	+ 1.250	- 1.014.117.2 + 4.507.2V <sub>a</sub>	
$L_2 L_3$	7.5	0.0026	2.884.6	- 281.2 + 1.250V <sub>a</sub>	- 811.293.8 + 3.605.8V <sub>a</sub>	+ 1.250	- 1.014.117.2 + 4.507.2V <sub>a</sub>	
$L_2 L_4$	9.6	0.0026	3.692.3	- 432.0 + 0.800V <sub>a</sub>	- 1.595.073.6 + 2.953.8V <sub>a</sub>	+ 0.800	- 1.276.058.8 + 2.363.0V <sub>a</sub>	
$L_3 L_1$	6.0	0.0020	3.000.0	+ 135.0 + 0	+ 405.000.0 + 0	0	0 + 0	
$L_3 L_2$	9.6	0.0020	4.800.0	+ 72.0 - 0.800V <sub>a</sub>	+ 345.600.0 - 3.840.0V <sub>a</sub>	- 0.800	- 276.480.0 + 3.072.0V <sub>a</sub>	
$L_3 L_3$	6.0	0.0020	3.000.0	0 + 0	0 + 0	0	0 + 0	
$L_3 L_4$	9.6	0.0020	4.800.0	- 72.0 - 0.800V <sub>a</sub>	- 345.600.0 - 3.840.0V <sub>a</sub>	- 0.800	+ 276.480.0 + 3.072.0V <sub>a</sub>	
$L_4 L_1$	6.0	0.0020	3.000.0	+ 135.0 + 0	+ 405.000.0 + 0	0	0 + 0	
$\Sigma$							- 6.183.233.2 + 24.391.6V <sub>a</sub>	

TABLA A.5

Barra	$\ell$ (m)	$A$ ( $m^2$ )	$\frac{\ell}{A}$	$\frac{\ell}{AE}$	$F$ (kN)	$\frac{\partial F}{\partial T}$	$F \left( \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\ell}{AE} \right)$
$AC$ $\Sigma$	3	0.00038	7894.7	$39.47 \times 10^{-4}$	$+T$	+1	$39.47 \times 10^{-4}T$ $39.47 \times 10^{-4}T$

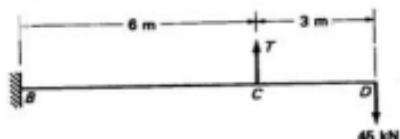


TABLA A.6

Sección	$M$	$\frac{\partial M}{\partial T}$	$M \frac{\partial M}{\partial T}$	$\int M \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right) \frac{dx}{EI}$
D a C	$-45x$	0	0	0
C a B	$Tx - 45x - 135$	$x$	$Tx^2 - 45x^2 - 135x$	$\int_0^4 (Tx^2 - 45x^2 - 135x) \frac{dx}{EI}$
E				$9.66 \times 10^{-3}T - 0.761$

Para cambiar el valor de  $1.03T - 18$  a pulgadas es necesario multiplicarlo por  $1728 \times 1000$  y dividirlo entre  $1 \times 10^6$ , puesto que 29 se utilizó para  $E$  en vez de  $29 \times 10^6$ . Para cambiar el valor de  $6.90T$  a pulgadas es necesario multiplicarlo por 1000 y dividirlo entre  $1 \times 10^6$ . La única diferencia en las dos conversiones es el 1728; por tanto, la expresión se puede escribir como sigue, para cambiarla a las mismas unidades.

$$\int M \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right) \frac{dx}{EI} + \sum F \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right) \frac{\ell}{AE} = 9.66 \times 10^{-3}T - 0.761 + 39.47 \times 10^{-6}T = 0$$

$$T = +78.46 \text{ kN}$$
■ ■

**EJEMPLO A.6**

Encuentre las fuerzas en todos los elementos de la armadura mostrada en la fig. A.7.

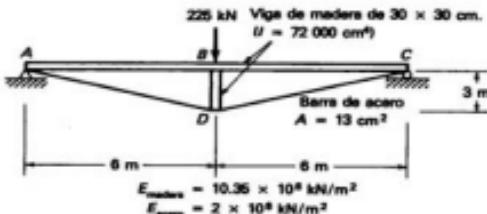
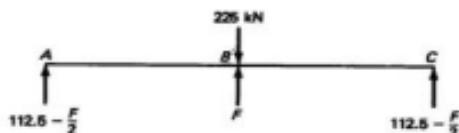


Figura A.7

**Solución:**

Considerando que la barra  $BD$  con una fuerza  $F$  es la redundante, se encuentra la deflexión de la viga en  $B$  en términos de  $F$ .

De  $A$  a  $B$  y de  $C$  a  $B$ :

$$\begin{aligned} M &= 112.5x - \frac{F}{2}x \quad \frac{\partial M}{\partial F} = -\frac{x}{2} \\ \int M \frac{\partial M}{\partial F} dx &= \frac{2}{EI} \int_0^6 (-56.25x^2 + 0.25Fx^2) dx \\ &= \frac{2}{EI} \left( -\frac{56.25}{3} \times 216 + \frac{0.25}{3} F \times 216 \right) \\ &= -1.087 + 4.831 \times 10^{-3} F \end{aligned}$$

Se determinan a continuación las fuerzas en los elementos en términos de la fuerza desconocida  $F$ .

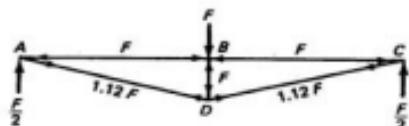


TABLA A.7

Elemento	$t$ (m)	$A$ ( $m^2$ )	$E$ ( $kN/m^2$ ) ( $\times 10^6$ )	$\frac{t}{AE}$ ( $\times 10^{-6}$ )	$F'$ (kN)	$\frac{F't}{AE}$ ( $\times 10^{-6}F$ )	$\frac{\partial F'}{\partial F}$	$\frac{\partial F' \times F't}{\partial F}$ ( $\times 10^{-6}F$ )
<i>AC</i>	12	0.0090	10.35	12.88	- $F$	- 12.88	-1	+ 12.88
<i>BD</i>	3	0.0090	10.35	3.22	- $F$	- 3.22	-1	+ 3.22
<i>AD</i>	6.708	0.0013	200	25.8	+ 1.12 $F$	+ 28.90	+ 1.12	+ 32.37
<i>DC</i>	6.708	0.0013	200	25.8	+ 1.12 $F$	+ 28.90	+ 1.12	+ 32.37
$\Sigma$								+ 80.84

$$-1.087 + 4.831 \times 10^{-3}F + 80.84 \times 10^{-6}F = 0$$

De esta ecuación se tiene:

$$F = 221.29 \text{ kN}$$

Las fuerzas finales son:

$$AC = -(1)(221.29) = -221.29 \text{ kN}; AD = +(1.12)(221.29) = + 247.84 \text{ kN}$$

$$BD = -(1)(221.29) = -221.29 \text{ kN}; DC = +(1.12)(221.29) = + 247.84 \text{ kN}$$

■ ■

---

# Algebra matricial

## B.1 INTRODUCCION

Se presenta aquí una introducción a las reglas básicas del álgebra matricial. Se pretende que el material proporcione bases introductorias a los lectores de este libro que no estén suficientemente familiarizados con el tema. El material se centra en aplicaciones que puedan ser de interés, principalmente, a los ingenieros estructurales. Existen otras excelentes referencias que pueden proporcionar al lector interesado un tratamiento más amplio del tema [1,2].

## B.2 DEFINICIONES Y PROPIEDADES DE LAS MATRICES

Se define una matriz como un arreglo ordenado de números en renglones y columnas, por ejemplo,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Una matriz  $[A]$ , como la mostrada en la ec. (B.1), consta de  $m$  renglones y  $n$  columnas de números encerrados entre paréntesis. La matriz  $[A]$  es entonces de orden  $m \times n$ . Los elementos  $a_{i,j}$ , en el arreglo se identifican por medio de dos subíndices. El primer subíndice designa el renglón y el segundo la columna en donde se localiza el elemento. Así  $a_{3,5}$ , es el elemento localizado en la intersección del tercer renglón y la quinta columna de la matriz. Los elementos con subíndices repetidos, por ejemplo,  $a_{i,i}$ , se localizan en la diagonal principal de la matriz.

Aunque el número de renglones y columnas de una matriz pueden variar de problema a problema, merecen mencionarse dos casos especiales. Cuando  $m = 1$ , la

matriz consta sólo de un *renglón* de elementos y se llama matriz renglón. Se escribe de la manera siguiente:

$$[A] = [a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \cdots \quad a_{1,n}] \quad (\text{B.2})$$

Cuando  $n = 1$ , la matriz consta sólo de una *columna* y se denomina matriz columna. Se indica como sigue:

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Aunque todas las matrices pueden considerarse como matrices renglones, matrices columnas o matrices rectangulares, existen tipos especiales de matrices rectangulares que merecen atención especial. Estas se analizarán en la siguiente sección.

### B.3 TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

#### Matriz cuadrada

Cuando el número de renglones  $m$  y el de columnas  $n$  son iguales, la matriz se denomina cuadrada. Por ejemplo, si  $m = n = 3$ , la matriz cuadrada  $[A]$  tiene la siguiente forma:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

#### Matriz simétrica

Cuando los elementos de una matriz cuadrada son tales que  $a_{i,j} = a_{j,i}$ , se dice que la matriz es *simétrica*; sus elementos están dispuestos simétricamente respecto a la diagonal principal. Se muestra enseguida una matriz simétrica de  $3 \times 3$ :

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Las matrices simétricas se encuentran frecuentemente en la teoría de las estructuras y desempeñan un papel muy importante en el desarrollo de los principios teóricos.

**Matriz identidad**

Cuando todos los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada tienen el valor 1.0, y todos los otros elementos son iguales a cero, la matriz se denomina matriz *identidad* (o matriz unitaria) y se representa con el símbolo  $[I]$ . Se muestra a continuación una matriz identidad de  $3 \times 3$ :

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

**Matriz transpuesta**

Cuando los elementos de una matriz dada se reordenan de modo que las columnas de la matriz original se convierten en los renglones correspondientes de la nueva matriz, ésta se denomina la *transpuesta* de la original. En este libro, la transpuesta de  $[A]$  se designa con el símbolo  $[A]^T$ . Se muestra a continuación una matriz  $[A]$  y su transpuesta:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$[A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

El lector debe observar que si la matriz  $[A]$  es simétrica, entonces  $[A]^T = [A]$ . Esta propiedad se usa frecuentemente en el desarrollo de la teoría estructural matricial. Como casos especiales, la transpuesta de una matriz renglón es una matriz columna y viceversa. Así:

$$[A]^T = [A] \quad (\text{B.9})$$

y

$$[A]^T = [A] \quad (\text{B.10})$$

**B.4 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA**

El determinante de una matriz cuadrada  $[A]$  se indica con el símbolo  $|A|$  y, en su forma desarrollada es como sigue:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{vmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Se dice que este determinante es de orden  $m$ . A diferencia de la matriz  $[A]$ , que no posee ningún valor, el determinante  $|A|$  tiene un valor numérico único. El valor de  $|A|$  se encuentra fácilmente para un arreglo de  $2 \times 2$ , por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 6 \quad (\text{B.12})$$

El valor de  $|A|$  en el ejemplo anterior se determinó multiplicando los números en la diagonal principal y restando de este producto el de los números en la otra diagonal. Desafortunadamente, este simple procedimiento no funciona para determinantes de orden mayor que el tres.

Un procedimiento general para encontrar el valor de un determinante es el llamado "desarrollo por menores". El primer menor del arreglo  $[A]$ , correspondiente al elemento  $a_{i,j}$ , se define como el determinante de una matriz reducida, lograda eliminando el renglón  $i$ -ésimo y la columna  $j$ -ésima de la matriz  $[A]$ . El menor es un número específico, como cualquier otro determinante. Como ilustración, se muestran a continuación varios menores para una matriz  $[A]$  específica:

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{menor que } a_{1,1} &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14 \\ \text{menor que } a_{1,2} &= \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8 \\ \text{menor que } a_{2,3} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 2 = 3 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Cuando se asocia a un menor el signo correcto, el resultado se denomina *cofactor* y se le designa con el símbolo  $A_{i,j}$ . El signo de un menor se determina multiplicando el menor por  $(-1)^{i+j}$ . Se muestran a continuación varios cofactores de la matriz  $[A]$ :

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= (-1)^2 \times \text{menor que } a_{1,1} = 1(-14) = -14 \\ A_{1,2} &= (-1)^3 \times \text{menor que } a_{1,2} = (-1)(-8) = 8 \\ A_{2,3} &= (-1)^5 \times \text{menor que } a_{2,3} = (-1)(3) = -3 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Ahora, para tener el valor de un determinante podemos escoger cualquier renglón ( $\alpha$ ) de la matriz  $[A]$  y desarrollarlo de acuerdo con la relación:

$$|A| = \sum_{j=1}^m a_{\alpha,j} \cdot A_{\alpha,j} \quad (\text{B.15})$$

El valor de un determinante puede también encontrarse, escogiendo una columna cualquiera ( $\beta$ ) y desarrollándola según la relación:

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{i,\beta} \cdot A_{i,\beta} \quad (\text{B.16})$$

Si el orden del determinante original es grande, el procedimiento descrito antes no conduce a una solución simple de conseguir. Por ejemplo, un determinante de orden 15 tiene aun menores de orden 14. Sin embargo, los menores de orden 14 pueden a su vez reducirse a menores de orden 13, por medio del proceso de desarrollo. El proceso puede repetirse hasta que los menores resultantes sean de orden 2. Estos menores pueden entonces evaluarse fácilmente usando el procedimiento descrito en el ejemplo ilustrativo inicial de esta sección.

Aunque el procedimiento para evaluar determinantes puede parecer largo y tedioso, pueden escribirse algoritmos para computadora que ejecutarán las operaciones algebraicas necesarias. Existen procedimientos más sencillos que hacen uso de propiedades especiales de los determinantes. Tales procedimientos no se expondrán aquí; los lectores interesados en aprenderlos pueden consultar libros especializados en este tema [1,2].

## B.5 MATRIZ ADJUNTA

Para encontrar la matriz *adjunta* de una matriz  $[A]$ , se reemplaza primero cada elemento de  $[A]$  por su cofactor; la  $\text{adj } [A]$  es entonces la transpuesta de esta matriz resultante. Simbólicamente, la matriz  $\text{adj } [A]$  se escribe como sigue:

$$\text{adj } [A] = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.17})$$

A continuación se calcula la matriz  $\text{adj } [A]$  dada la matriz  $[A]$ :

$$\begin{aligned}
 [A] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \\
 A_{1,1} &= -11 & A_{1,2} &= -2 & A_{1,3} &= 7 \\
 A_{2,1} &= 9 & A_{2,2} &= 0 & A_{2,3} &= -3 \\
 A_{3,1} &= -1 & A_{3,2} &= 2 & A_{3,3} &= -1 \\
 \text{adj } [A] &= \begin{bmatrix} -11 & -2 & 7 \\ 9 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -11 & 9 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

El determinante y la matriz adjunta se emplean en el cálculo de la inversa de una matriz; en una sección posterior de este apéndice veremos cómo determinar las matrices inversas.

## B.6 ARITMETICA MATRICIAL

### Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales sólo si los elementos correspondientes de las dos matrices son iguales. Por tanto, la igualdad de matrices puede existir únicamente entre matrices de igual orden.

### Suma y resta de matrices

Dos matrices pueden sumarse o restarse sólo si ambas son del mismo orden. La suma de dos matrices  $[A]$  y  $[B]$  se indica como sigue:

$$[A] + [B] = [C] \tag{B.19}$$

en donde los elementos de la matriz  $[C]$  son la suma de los elementos correspondientes de  $[A]$  y  $[B]$ , o sea,  $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ . Se muestra a continuación un ejemplo de la suma de dos matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \tag{B.20}$$

La resta de dos matrices se efectúa análogamente, restando los elementos correspondientes.

Tanto la ley conmutativa como la asociativa se cumplen para la suma y para la resta de dos matrices. Así:

$$[A] + [B] = [B] + [A] \quad (\text{B.21})$$

y

$$[A] + ([B] + [C]) = ([A] + [B]) + [C] \quad (\text{B.22})$$

### Multiplicación escalar de matrices

Para multiplicar una matriz por un escalar, *cada elemento* de la matriz se multiplica por el escalar. Así:

$$\alpha[A] = \begin{bmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} & \cdots & \alpha a_{1,n} \\ \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} & \cdots & \alpha a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m,1} & \alpha a_{m,2} & \cdots & \alpha a_{m,n} \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

donde  $\alpha$  es una constante.

### Multiplicación de matrices

El producto de dos matrices existe sólo si las matrices son *conformables*. En el producto matricial  $[A][B]$ , conformabilidad significa que el número de columnas de  $[A]$  sea igual al número de renglones de  $[B]$ . Las dos matrices mostradas más adelante son conformables (en el orden mostrado) y pueden multiplicarse.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

Sin embargo, si el orden de las matrices se invierte, o sea,  $[B][A]$ , las matrices *no* son conformables y el producto de éstas no existe. Además, aun si las matrices  $[A]$  y  $[B]$  son cuadradas y por tanto, conformables en el orden  $[A][B]$  como en el  $[B][A]$ , los productos de las dos matrices en general no son iguales. Por lo regular,

$$[A][B] \neq [B][A] \quad (\text{B.25})$$

La definición formal de un producto matricial entre matrices conformables es la siguiente:

$$[A]_{m \times \ell} [B]_{\ell \times n} = [C]_{m \times n}$$

en donde

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{i,k} b_{k,j} \quad (\text{B.26})$$

Obsérvese que la matriz  $[A]$  no es del mismo orden que la  $[B]$ , pero las dos matrices son conformables, ya que el número de columnas de  $[A]$  es igual al número de renglones de  $[B]$ . El orden de la matriz producto  $[C]$  es  $m \times n$ . Se muestra a continuación un ejemplo de un producto de dos matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 13 & 8 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

en donde

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= (1)(1) + (2)(4) = 9 \\ C_{1,2} &= (1)(3) + (2)(5) = 13 \\ C_{1,3} &= (1)(2) + (2)(3) = 8 \\ C_{2,1} &= -(3)(1) + (2)(4) = 5 \\ C_{2,2} &= -(3)(3) + (2)(5) = 1 \\ C_{2,3} &= -(-3)(2) + (2)(3) = 0 \end{aligned} \tag{B.27}$$

Aunque el orden como se multiplican dos matrices no puede en general ser invertido sin alterar el producto, tanto la ley asociativa como la distributiva son válidas para los productos matriciales. Así:

$$[A][B][C] = ([A][B])[C] = [A]([B][C]) \tag{B.28}$$

y

$$[A]([B] + [C]) = [A][B] + [A][C] \tag{B.29}$$

Si una matriz  $[A]$  se multiplica por la matriz identidad  $[I]$  (suponiendo que las matrices sean conformables), la matriz  $[A]$  no cambia en absoluto. Así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \tag{B.30}$$

En general,

$$[A][I] = [A]$$

y

$$[I][A] = [A] \tag{B.31}$$

### Transpuesta de un producto

Si un producto de matrices se transpone, el resultado se indica simbólicamente como:

$$([A][B])^T = [B]^T[A]^T \tag{B.32}$$

La transpuesta de un producto matricial triple puede encontrarse usando la ec. (B.32) junto con la ley asociativa en varias etapas, como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned} ([A][B][C])^T &= ([A]([B][C]))^T \\ &= ([B][C])^T[A]^T \\ &= [C]^T[B]^T[A]^T \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Nótese, sobre todo, que en la transpuesta de un producto el orden de los factores cambia.

### Matriz inversa

En las secciones precedentes se han definido la suma, la resta y la multiplicación, pero no se ha mencionado la división matricial. De hecho, la división matricial en la forma  $[A]/[B]$  no existe. Sin embargo, existe una operación entre matrices que se parece mucho a la división algebraica. Esta operación hace uso de una matriz inversa.

La inversa de una matriz cuadrada  $[A]$  se indica con el símbolo  $[A]^{-1}$ . Se define de manera que

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I] \quad (\text{B.34})$$

Existen muchos procedimientos para invertir una matriz. Un procedimiento formal está dado por la siguiente relación:

$$[A]^{-1} = \frac{\text{adj } [A]}{|A|} \quad (\text{B.35})$$

Como ejemplo, consideremos la matriz  $[A]$  dada por la ec. (B.18). La matriz adjunta,  $\text{adj } [A]$ , también se indica en la ec. (B.18). El determinante  $|A|$  puede encontrarse usando los elementos y menores de la primera columna de  $[A]$ :

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1,1}A_{1,1} + a_{2,1}A_{2,1} + a_{3,1}A_{3,1} \\ &= (1)(-11) + (2)(9) + (1)(-1) = 6 \end{aligned}$$

Entonces,

$$[A]^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -11 & 9 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.36})$$

Pueden verificarse los elementos de la inversa formando el producto  $[A][A]^{-1}$ , que debe dar como resultado la matriz identidad. Para este ejemplo se tiene:

$$[A][A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -11 & 9 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = [I]$$

Existe una situación especial respecto a la inversa de una matriz, que merece considerarse. Si el determinante de una matriz  $[A]$  es igual a cero ( $|A| = 0$ ), la operación de división indicada por la ec. (B.35) no puede efectuarse. Bajo estas circunstancias la inversa de la matriz  $[A]$  no existe y se dice que la matriz  $[A]$  es *singular*. Las matrices singulares ocurren con frecuencia en la teoría de las estructuras, por lo que el lector debe conocer el significado de este término. Se muestra a continuación, como ejemplo, una matriz singular:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

y

$$|A| = a_{1,1}A_{1,1} + a_{2,1}A_{2,1} + a_{3,1}A_{3,1} = 24 + 0 - 24 = 0$$

La inversa de un producto matricial puede encontrarse usando reglas que son muy similares a las usadas para encontrar la transpuesta de un producto (dada en la ec. B.32). Específicamente,

$$([A][B])^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1} \quad (\text{B.37})$$

y

$$\begin{aligned} ([A][B][C])^{-1} &= ([B][C])^{-1}[A]^{-1} \\ &= [C]^{-1}[B]^{-1}[A]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

### Aplicación de la inversa de una matriz

Consideremos un conjunto de ecuaciones algebraicas, cada una de las cuales contiene un número desconocido de cantidades  $x_i$ :

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 &= b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

El conjunto de ecuaciones algebraicas puede expresarse en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.40})$$

o simbólicamente, como

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (\text{B.41})$$

Las incógnitas  $x_1, x_2, x_3$ , pueden encontrarse premultiplicando ambos lados de la ec. (B.41) por  $[A]^{-1}$ :

$$\begin{aligned} [A]^{-1}[A]\{X\} &= [A]^{-1}\{B\} \\ [I]\{X\} &= [A]^{-1}\{B\} \\ \{X\} &= [A]^{-1}\{B\} \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Por tanto, si se conoce  $[A]^{-1}$ , las incógnitas pueden determinarse por medio de un simple producto matricial:

$$[A]^{-1}\{B\}$$

Como ejemplo numérico consideremos las siguientes ecuaciones algebraicas (los coeficientes en esas ecuaciones son los mismos que los de la matriz  $[A]$  en la ec. (B.18)):

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 13.0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 19.0 \\ 1x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 22.0 \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

La solución para  $x_1, x_2$  y  $x_3$  es:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 13.0 \\ 19.0 \\ 22.0 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -11 & 9 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 13.0 \\ 19.0 \\ 22.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 3.0 \\ 2.0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Existen muchas otras técnicas para resolver ecuaciones algebraicas simultáneas. El uso de la matriz inversa es una técnica especial que puede usar opcionalmente el proyectista.

## B.7 METODO DE GAUSS PARA RESOLVER ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Uno de los métodos más ampliamente usados para resolver ecuaciones algebraicas simultáneas lineales es el de Gauss. Este método, o alguna variante de él, se usa

en muchos de los programas para computadora que tienen relación con problemas estructurales. El método se adapta muy bien al cálculo manual. A continuación se ilustran las bases de este método.

Consideremos un conjunto de tres ecuaciones algebraicas escritas en términos de tres incógnitas ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ):

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 - 1x_3 &= 2 \\ 1x_1 + 4x_2 + 1x_3 &= 12 \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 10 \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Primero divida cada ecuación del conjunto entre el respectivo primer coeficiente (el primer coeficiente de cada ecuación es ahora igual a 1.0):

$$\begin{aligned} 1.0000x_1 + 0.3333x_2 - 0.3333x_3 &= 0.6667 \\ 1.0000x_1 + 4.0000x_2 + 1.0000x_3 &= 12.0000 \\ 1.0000x_1 + 0.5000x_2 + 1.0000x_3 &= 5.0000 \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Reste ahora la primera ecuación del conjunto resultante de cada una de las otras ecuaciones (el primer coeficiente de la segunda y tercera ecuaciones es ahora 0.0):

$$\begin{aligned} 1.0000x_1 + 0.3333x_2 - 0.3333x_3 &= 0.6667 \\ 3.6667x_2 + 1.3333x_3 &= 11.3333 \\ 0.1667x_2 + 1.3333x_3 &= 4.3333 \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Repita las dos operaciones descritas antes, pero comenzando ahora con la ecuación 2, o sea, divida las ecuaciones 2 y 3 entre sus primeros coeficientes, respectivamente (los primeros coeficientes son ahora iguales a 1.0):

$$\begin{aligned} 1.0000x_1 + 0.3333x_2 - 0.3333x_3 &= 0.6667 \\ 1.0000x_2 + 0.3636x_3 &= 3.0909 \\ 1.0000x_2 + 7.9996x_3 &= 25.9946 \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Reste la ecuación 2 de la 3 (el primer coeficiente de la ecuación 3 es ahora igual a 0.0):

$$\begin{aligned} 1.0000x_1 + 0.3333x_2 - 0.3333x_3 &= 0.6667 \\ 1.0000x_2 + 0.3636x_3 &= 3.0909 \\ 7.6360x_3 &= 22.9037 \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Divida la ecuación 3 entre su primer coeficiente. Observe que esta operación presenta una solución para  $x_3$ :

$$1.0000x_3 = 2.9994 \quad (\text{B.50})$$

Sustituya el valor encontrado para  $x_3$  en la última ecuación 2 y despeje a  $x_2$ :

$$1.0000x_2 = 3.0909 - 0.3636x_3 \quad (B.51)$$

$$x_2 = 2.0003$$

Sustituya los valores encontrados para  $x_2$  y  $x_3$  en la ecuación 1 y despeje a  $x_1$ :

$$1.0000x_1 = 0.6667 - 0.3333x_2 + 0.3333x_3 \quad (B.52)$$

$$x_1 = 0.9997$$

La solución encontrada con el método de Gauss:

$$x_1 = 0.9997$$

$$x_2 = 2.0003$$

$$x_3 = 2.9994$$

(B.53)

es muy cercana a la solución exacta:

$$x_1 = 1.0000$$

$$x_2 = 2.0000$$

$$x_3 = 3.0000$$

(B.54)

La inexactitud de la solución de Gauss mostrada antes se debe a los errores de redondeo. Se puede tener más exactitud empleando un mayor número de cifras significativas en el proceso.

## B.8 TEMAS ESPECIALES

### Subdivisión de matrices

La manipulación de las ecuaciones matriciales es con frecuencia más sencilla, si se dividen las matrices en subunidades o subdivisiones. En este libro la subdivisión se indica por medio de líneas interrumpidas horizontales y verticales colocadas entre los renglones y las columnas de las matrices. Se muestran enseguida ejemplos de matrices que han sido subdivididas:

$$\begin{aligned} [A] &= \left[ \begin{array}{cc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \hline a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} \right] \\ [A] &= [a_{1,1} \quad a_{1,2} \mid a_{1,3}] \\ [A] &= \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (B.55)$$

La subdivisión de una ecuación matricial se muestra a continuación:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} b \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right\} \quad (\text{B.56})$$

Nótese que las líneas horizontales de subdivisión en la ec. (B.56) se extienden entre los mismos dos renglones de cada matriz en la ecuación. Además, los números de columnas que definen la línea vertical de subdivisión en la matriz cuadrada son los mismos que los números de renglones que definen las líneas de subdivisión horizontal para la ecuación completa. Así, si las líneas de subdivisión horizontal corren entre el segundo y tercer renglón, entonces las líneas de subdivisión vertical corren entre la segunda y tercera columna de la matriz cuadrada.

Como ejemplo del uso de la subdivisión, consideremos la misma ecuación matricial descrita en la ec. (B.43):

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 13.0 \\ 19.0 \\ 22.0 \end{array} \right\}$$

$$(A)\{X\} = \{B\} \quad (\text{B.57})$$

En la ec. (B.57) se han trazado líneas de subdivisión entre los renglones 2 y 3 de cada matriz y entre las columnas 2 y 3 de la matriz [A]. Cuando ésta se subdivide, las subunidades en general, son aún matrices y se manipulan como tales (aunque en este problema, una de las subunidades es una matriz de  $1 \times 1$ , que puede tratarse como un escalar). La ecuación matricial original puede ahora escribirse como dos ecuaciones matriciales:

$$\left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \right\} x_3 = \left\{ \begin{array}{l} 13.0 \\ 19.0 \end{array} \right\} \quad (\text{B.58})$$

y

$$\left[ \begin{array}{cc} 1 & 5 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\} + 3x_3 = 22.00 \quad (\text{B.59})$$

La ec. (B.59) puede resolverse para  $x_3$  en términos de  $x_1$  y  $x_2$ :

$$3x_3 = 22.0 - [1 \ 5] \left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\}$$

y

$$x_3 = \frac{22.0}{3} - \frac{1}{3} [1 \ 5] \left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\} \quad (\text{B.60})$$

El valor de  $x_3$  obtenido de la ec. (B.60) se sustituye en la ec. (B.58) y la ecuación resultante se resuelve para  $x_1$  y  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \left( \frac{22.0}{3} - \frac{1}{3} [1 \quad 5] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \right) &= \begin{Bmatrix} 13.0 \\ 19.0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 13.0 \\ 19.0 \end{Bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 66.0 \\ 88.0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Al agrupar términos se tiene:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 2 & -11 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} -27.0 \\ -31.0 \end{Bmatrix}$$

Despejando  $x_1$  y  $x_2$ :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 2 & -11 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -27.0 \\ -31.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.61})$$

Los valores de  $x_1$  y  $x_2$  determinados por la ec. (B.61) pueden ahora sustituirse en la ec. (B.60) para tener el valor de  $x_3$ :

$$x_3 = \frac{22.0}{3} - \frac{1}{3} [1 \quad 5] \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} (22.0 - 16.0) = 2 \quad (\text{B.62})$$

Una ventaja obvia de la subdivisión es que el orden de las matrices para las que hay que encontrar inversas se reduce. Sin embargo, esta ventaja se ve afectada por el hecho de que se requieren operaciones algebraicas adicionales al usar las subdivisiones. No obstante, la subdivisión de las ecuaciones matriciales se usa extensamente en la solución de problemas estructurales, por computadora, por lo que los lectores de este texto deben familiarizarse con el tema.

### Diferenciación e Integración de una matriz

Previamente en este apéndice, una matriz se definió como un arreglo ordenado de números en renglones y columnas. Aunque los elementos de una matriz son generalmente constantes, en ocasiones pueden ser variables, como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3x & -x^2 & 2x^4 \\ -x^2 & 5x^3 & 7x \\ 2x^4 & 7x & 2x^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.63})$$

La diferencial de la matriz  $[A]$  con respecto a  $x$  se determina diferenciando cada elemento de la matriz con respecto a  $x$ . En este caso se tiene:

$$\frac{d}{dx} [A] = \begin{bmatrix} 3 & -2x & 8x^3 \\ -2x & 15x^2 & 7 \\ 8x^3 & 7 & 4x \end{bmatrix} \quad (\text{B.64})$$

Si los elementos de  $[A]$  son funciones de más de una variable (digamos de  $x$  y  $y$ ), la diferenciación parcial de la matriz  $[A]$  con respecto a  $x$  o a  $y$  se efectúa en forma similar, diferenciando parcialmente cada elemento de la matriz con respecto a esa variable.

De igual manera, la integración de una matriz se efectúa aplicando el operador de integración a cada elemento de la matriz. Así, para la matriz  $[A]$  dada por la ec. (B.63) la integración proporciona los resultados siguientes:

$$\int_a^b [A] dx = \begin{bmatrix} \frac{3x^2}{2} & \frac{-x^3}{3} & \frac{2x^4}{5} \\ \frac{-x^3}{3} & \frac{5x^4}{4} & \frac{7x^2}{2} \\ \frac{2x^5}{5} & \frac{7x^2}{2} & \frac{2x^3}{3} \end{bmatrix}_a^b$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2}(b^2 - a^2) & \frac{-(b^3 - a^3)}{3} & \frac{2}{5}(b^5 - a^5) \\ \frac{-1}{3}(b^3 - a^3) & \frac{5}{4}(b^4 - a^4) & \frac{7}{2}(b^2 - a^2) \\ \frac{2}{5}(b^5 - a^5) & \frac{7}{2}(b^2 - a^2) & \frac{2}{3}(b^3 - a^3) \end{bmatrix} \quad (\text{B.65})$$

Vale la pena hacer notar una aplicación especial de la diferenciación de matrices debido a su frecuente aparición en el desarrollo de la teoría estructural. Supóngase que una variable escalar  $U$  está definida en términos de un triple producto matricial:

$$U = \frac{1}{2} [x] [A] [x] \quad (\text{B.66})$$

donde  $[x]$  es una matriz columna que consta de  $n$  variables ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ). Se supone que la matriz cuadrada  $[A]$  es simétrica. Si  $U$  se diferencia sucesivamente con respecto a  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , y los resultados se arreglan en una matriz columna, el resultado es extraordinariamente sencillo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial x_n} \end{array} \right\} = [A]\{x\} \quad (\text{B.67})$$

Otra diferenciación presenta:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = a_{i,j} \quad (\text{B.68})$$

donde  $a_{i,j}$  son los elementos de la matriz original  $[A]$ . Aunque la prueba de las ecs. (B.67) y (B.68) no se da aquí, un simple ejemplo comprobará su exactitud. Consideremos el siguiente triple producto matricial:

$$U = \frac{1}{2} [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.69})$$

Al desarrollar  $U$  se tiene:

$$U = \frac{1}{2}(2x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2) \quad (\text{B.70})$$

Al diferenciar  $U$  sucesivamente con respecto a  $x_1$  y  $x_2$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 2x_1 + 4x_2 \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= 4x_1 + 3x_2 \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

Arreglando en forma matricial estos resultados se determina:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.72})$$

Este resultado corresponde a la ec. (B.67). Diferenciando una vez más se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} &= 2 & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} &= 4 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} &= 4 & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} &= 3\end{aligned}\tag{B.73}$$

Estos resultados concuerdan con la ec. (B.68).

La forma resultante del triple producto matricial dado por la ec. (B.66) se llama a veces *forma cuadrática* (debido a la aparición de las variables de segundo orden en el producto matricial). Las formas cuadráticas se encuentran con frecuencia en la teoría estructural, cuando se emplea la energía de deformación para determinar la matriz de rigidez. Aunque las formas cuadráticas no se han empleado en este libro, el tema es importante en tratamientos más avanzados de la teoría estructural y se incluye aquí como futura referencia para los lectores interesados.

## REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. Ayres, F., *Theory and Problems of Matrices*, Schaum Outline Series (Nueva York: McGraw-Hill, 1962).
2. Conte, S.D., deBoor, L., *Elementary Numerical Analysis*, segunda edición, (Nueva York: McGraw-Hill, 1972).

# Instalación del programa PAEM

### C.1 INTRODUCCIÓN

En este apéndice se presenta, de una manera sencilla y fácil de comprender, el programa PAEM, que le será de gran utilidad.

El disquete anexo contiene dicho programa PAEM, que le ayudará a resolver problemas de marcos y armaduras. En el capítulo 20 aprenderá a utilizarlo y a resolver una serie de problemas planteados.

Es conveniente proteger adecuadamente su disquete, para esto haga una copia de respaldo utilizando el comando DISKCOPY del sistema operativo MS-DOS o PC-DOS, guarde en un lugar seguro el original y utilice la copia para trabajar o hacer la instalación en el disco duro.

El disquete, de 3 1/2 pulgadas y 720 kb de capacidad, puede ser ejecutado en computadoras IBM o 100 % compatibles, de tipo XT, AT, 386, 486 o Pentium, con una unidad de disco de 3 1/2 pulgadas de doble o alta densidad, o una de 5 1/4 pulgadas de alta densidad. Para hacer esto último, deberá copiar los archivos del disquete de 3 1/2 pulgadas al de 5 1/4 pulgadas utilizando el comando COPY del DOS.

Obviamente, PAEM, como cualquier otro programa, se ejecutará más rápido desde un disco duro. Si su computadora cuenta con un disco duro y unos 600 kb de espacio libre, puede instalarlo y ejecutarlo desde ahí.

Como PAEM no cuenta con un programa específico de instalación, deberá crear un directorio para copiar ahí los archivos del disquete con el comando COPY:

En el indicador (prompt) del DOS, escriba **MKDIR PAEM** y pulse Retorno (Enter).

**C:>MKDIR PAEM [Enter]**

Con esto se ha creado el directorio PAEM; ahora copie los archivos de la unidad de disquete al disco duro:

**C:>COPY A:.\* C:\PAEM [Enter]**

Al terminar de copiar los 23 archivos que incluye el disquete, cámbiese al directorio PAEM para ejecutar el programa:

**C:>CD PAEM [Enter]**

**C:>PAEM [Enter]**

Aparecerá la pantalla de bienvenida al programa, mostrando el registro de derechos de autor y los nombres de los autores de los programas. Pulse una tecla y verá el menú principal.

Para utilizar PAEM no necesita un manual, simplemente siga las instrucciones que se muestran al pie de cada pantalla y ejecute cualquiera de las opciones de los menús.



---

# Indice

- American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), 11, 17, 186, 208, 296
- American Concrete Institute (ACI), 234, 245, 298, 322
- American Institute of Steel Construction (AISC), 186, 191
- American National Standards Institute (ANSI), 5, 17
- American Railway Engineering Association (AREA), 11, 17, 191
- Análisis aproximado de estructuras estáticamente indeterminadas
- armaduras, 290-91, 313-16
  - Vierendeel, 313-16
- arriostramiento lateral para puentes, 296-98
- coeficientes del ACI, 300
- distribución de momentos, 404
- edificaciones industriales, 291-95
- hipótesis requeridas, 288
- importancia del, 288-89
- marcos con cargas laterales, 303-13
- verticales, 301-03
- método del marco equivalente, 301
- portal, 308
- voladizo, 310-11
- portales, 296-98
- vigas continuas, 298-301
- Análisis estructural, definición, 1
- Apoyos
- armaduras espaciales, 140
  - articulados, 20
  - de eslabón, 22
  - empotrados, 22-23
  - en arcos de tres articulaciones, 36
  - estructuras con voladizo, 34
  - rodillos, 22
  - vigas, 27
- Arcos
- atirantados, 41
  - tres articulaciones, de, 36-41
  - ventajas, 42
- Armaduras
- arco de flecha, 83
  - Baltimore, 85
  - calzada inferior, de, 84
  - complejas, 118-20
  - compuestas, 117
  - cuadrangulares, 83
  - cuando las hipótesis no son correctas, 115-16

- definición, 3  
 deflexiones, 247-52  
 diente de sierra, 83  
 estabilidad, 120-26  
 Fink, 111  
 forma crítica, 119  
 hipótesis para su análisis, 79-80  
 Howe, 83  
 lenticulares, 85  
 notación, 80-81, 548-49  
 Parker, 180-81  
 Pettit, 85  
 planas, 105-26  
 pony, 86  
 Pratt, 83, 85  
 puente, 82-7  
     rebajado, 86  
 simples, 116  
 soluciones con la computadora,  
     126, 548-59  
 superior, 84-5  
 techo, 81-2  
 tijera, 83  
 tipo K, 85, 181-82  
 Warren, 83, 85  
 Wichert, 123-25
- Armaduras espaciales  
 análisis con ecuaciones  
     simultáneas, 149-52  
 coeficientes de tensión, 149-52  
     con la computadora, 153, 559-61  
 definición, 135-36  
 ecuaciones de la Estática, 138  
 fuerzas en los elementos, 141-52  
 principios básicos, 136-38  
 reacciones, 141-52  
 teoremas especiales, 139  
 tipos de apoyos, 140  
     Vierendeel, 313-16
- Asentamiento de los apoyos, efecto  
     de los análisis, 287  
 con deformaciones compatibles,  
     337-42  
 pendiente-deflexión, 387-88
- Bowman, H.L., 134, 322
- Cables, 42-5  
 Cambios de temperatura, efectos en  
     las fuerzas de las  
     armaduras, 350-52
- Cargas  
     camiones, dc, 186-89  
     carril uniforme, 188-89  
     diseño, 11  
     ferroviarias, 189  
     hielo, 5-6  
     impacto, 6, 190-91  
     laterales, 7-9  
     longitudinales, 10  
     lluvia, 6  
     móviles, 6  
     muertas, 4  
     nieve, 5-6  
     sísmicas, 9-10  
     succión, 8  
     viento, 7-9  
     vivas, 4-11, 186-90
- Castigliano, A., 264
- Causey, M.L., 158
- Coeficientes de  
     flexibilidad, 326, 460-62  
     tensión, 149-52
- Computadoras, 17, 126, 153, 352,  
     398, 404-5, 420, 457-59, 547-75
- Condición, ecuaciones de, 23-24,  
     122-25
- Contradiagonales, 185-86
- Convención de signos, 26, 223, 382,  
     409-12
- Cooper, T., 189.
- Cross, H., 370, 377, 404
- Cuerpos móviles, 20
- Curvatura, 209
- Deflexiones  
     con el método de área-momento,  
     209-21  
     con el primer teorema de

## Índice

Castigliano, 269-71  
 con métodos de energía, 246-71  
 de la viga conjugada, 227-36  
 de larga duración, 233-34  
 de los pesos elásticos, 221-27  
 del trabajo virtual, 246-47  
 en marcos, 234-36, 254-61  
 geométricos, 207-36  
 importancia de las, 207-9  
 para armaduras, 247-52  
 razones para calcularlas, 207-9  
 reciprocas, teorema de Maxwell, 263-64  
 resumen de las relaciones entre vigas, 230-31  
 vigas, 207-33, 252-64, 269-71  
 Desplazamiento lateral (ladeo), 391-98, 429-47  
 Diagramas  
     de cuerpo libre, 26, 106-15  
     lineales, 13  
 Diseño estructural, definición, 1  
  
 Ecuaciones de  
     condición, 23-4, 43  
     la Estática, 19, 138  
 Edificios industriales, 291-95  
 Encharcamiento, 6  
 Equilibrio, 19, 229-30  
     inestable, 23  
 Estabilidad, 120-22  
 Estructuras  
     compuestas, 581, 587-91  
     con voladizo, 32-34  
     estáticamente indeterminadas  
         análisis aproximado, 288-316  
         armaduras, 290-91, 340-52  
         desventajas, 287  
         generalidades, 282-83  
         marcos, 332-35, 388-98, 425-47  
         método de las fuerzas, 323-52  
         ventajas, 285-86  
         vigas, 283-85

Factor de  
     distribución, 408-9  
     rigidez, 408  
     transporte, 407, 410  
 Firmage, D.A., 45, 56  
 Forma crítica, 119  
 Fuerza  
     máxima, 182-84  
     primaria, 80  
     secundaria, 80  
 Fuerza cortante  
     definición, 57  
     diagramas, 59-68, 417-20  
     líneas de influencia, 161-68  
     método de la, 113-15  
  
 Gere, J.M., 465, 468  
 Greene, C.E., 209  
 Grinter, L.E., 104  
  
 Impacto, 6, 190-91  
 Inestabilidad, 119, 125  
     geométrica, 23  
 Inversión del signo de la fuerza, 182  
  
 Jakkula, A.A., 206  
  
 Kinney, J.S., 206, 236, 245, 265, 377  
  
 Largueros, 175-77  
 Ley de  
     Hooke, 324  
     la conservación de la energía, 246-47, 252  
 Líneas de influencia  
     armaduras estáticamente indeterminadas, 370-75  
     cualitativas, 165-68, 363, 368-70  
     cuantitativas, 159-64, 168-82, 362-75  
     definición, 160  
     marcos, 369  
     para armaduras estáticamente determinadas, 175-82

- usos de las, 168-71
- vigas estáticamente determinadas, 161-71
- indeterminadas, 362-70
  
- Manderla, H., 378, 403
- Maney, G.A., 378, 403
- Marcos, 3, 30, 234-36, 246-61, 301-13, 332, 368-69, 425-47, 567-74
- Matrices
  - álgebra de, 459, 592-609
  - ancho de banda de, 541
  - métodos, 457
  - transformación de, 531
- Maxwell, J.C., 263, 323, 362, 363, 366
- MERJ, 547-79
- Método de
  - análisis por desplazamientos, 323, 378-98, 459-60
  - Bowman, 313
  - energía, 246-71
  - la pendiente-deflexión
    - a vigas continuas, 382-88
    - aplicación a marcos, 388-98
    - asentamiento de los apoyos, 382, 387-88
    - deducción del, 378-82, 385
    - desplazamiento lateral en marcos, 391-98
    - ecuaciones, 382, 385
    - marcos con elementos inclinados, 398
    - ventajas, 378
  - las correcciones sucesivas, 442-47
  - las deformaciones consistentes, 323-52
  - la viga conjugada
    - a vigas, 231-33
    - aplicado a marcos, 234-36
    - apoyos, 227-30
    - desarrollo del, 227-31
  - los pesos clásticos
    - aplicación de, 222-26
- deducción del, 221-22
- limitaciones de, 226-27
- Maxwell-Mohr, 323-52
- Método de la distribución de momentos
  - convención de signos, 409-12
  - correcciones sucesivas, 442-47
  - desarrollo, 405-12
  - factor de
    - distribución, 408
    - rígidez, 408
    - transporte, 407
  - hipótesis, 405
  - introducción, 404-6
  - marcos
    - con desplazamientos laterales (ladeo), 429-47
    - con elementos inclinados, 438-42
    - de varios niveles, 442-47
    - sin desplazamientos laterales (ladeo), 425-26
  - modificación de la rígidez para extremos simples, 415-17
  - momentos de empotramiento, 409-11
  - relaciones básicas, 407-10
  - vigas continuas, 407-20
- Método de las fuerzas, 323-52
  - ecuaciones de rígidez
    - con flexión, 478-88
    - elementos con carga axial y flexión, 488-89
    - elementos inclinados con flexión, 530
    - fuerza axial, 472-78
    - inclinados con fuerza axial, 499-506
- Método del
  - marco equivalente, 301
  - portal, 308
  - trabajo mínimo, 264, 581-91
  - voladizo, 310-11
    - primer teorema, 265-71

- segundo teorema, 271, 581-91  
Métodos matriciales  
adición de matrices de rigidez, 528  
cambios de temperatura, 535-37  
condensación, 539-41  
desplazamientos forzados, 533  
longitud incorrecta, 537  
subdivisión, 538  
transformación, 531-32  
Mohr, O., 323, 378, 403  
**Momento**  
de empotramiento, 215, 220-21,  
379-80, 388-398, 409-11  
definición, 58  
diagramas, 59-68, 417-20  
líneas de influencia, 163-72  
máximo, 62  
método de, 107-15  
Moorman, R.B.B., 361  
Morgan, N.D., 370, 377  
Morris, C.T., 442, 456  
Muller-Breslau, H., 123, 167, 363  
  
Norris, C.H., 321  
Nudos, método de los, 92-6  
  
O'Brien, W.H., 245  
Orenstein, G.S., 575, 580  
  
Palladio, A., 78  
Parcel, J.I., 361  
**Pendientes**  
con el método área-momento,  
209-21  
con el primer teorema de  
Castigliano, 264-71  
de la viga conjugada, 227-36  
de los pesos elásticos, 221-27  
del trabajo virtual, 261-63  
**Piso**  
sistemas para puentes, 82-7  
vigas de, 84  
**Puentes**  
cargas vivas, 186-89  
contradiagonales, 185-86  
cubiertos, 82  
sistemas de piso, 175-77  
**Puntales, 3**  
**Punto de inflexión, 292, 301-3**  
  
**Reacciones, 19-45**  
**Rigidez, 408**  
Rogers, G.L., 158  
  
**Scofield, W.F., 245**  
**Sistema de cargas para las carreteras interestatales, 189**  
**Sistemas coordenados, 499, 550**  
Smith, A., 308  
Southwell, R.V., 158  
Steinman, D.B., 125, 134, 190  
Stephenson, H.K., 206  
Stevenson, R.L., 1  
**Structural Engineers Association of California (SEAOC), 9, 17**  
**Superposición, 31, 214**  
Sutherland, H., 134, 322  
  
**Teorema**  
de área-momento  
aplicación, 212-21  
deducción, 209-12  
de las deflexiones reciprocas  
de Maxwell, 263-64, 463  
Teoría del ángulo pequeño, 211  
Timoshenko, S., 120, 134  
Tirantes, 3  
Trabajo virtual  
deflexiones en armaduras, 247-52  
marcos, 252-64  
pendientes en vigas y marcos, 261-63  
vigas, 252-64  
  
**Unidades SI, 11-13**  
**Uniform Building Code (UBC), 11, 17**  
Utku, S., 321

- Vierendeel, M., 313
- Vigas
- con voladizo, 31-4
  - continuas, 298-301, 382-88, 407-20,  
    661-67
  - análisis aproximado, 298-301
  - con computadora, 661-67
  - distribución de momentos, 407-20
  - pendiente-deflexión, 382-88
  - definición, 3
  - empotradas, 215, 220-21, 378-80,  
    409-11

- Voladizo
- método de vigas en, 310-11
  - vigas en, 31-34
- Weaver, W., 465, 468
- Wichert, E.M., 123
- Wilbur, J.B., 321
- Wilson, A.C., 310
- Winkler, E., 160
- Young, D.H., 120, 134

**A15/EI/94**

Esta edición se terminó de imprimir en abril de 1994. Publicada por EDICIONES ALFAOMEGA, S.A. de C.V. Apartado Postal 7-1032, 06700, México, D.F. La impresión se realizó en IMPRESORA CASTILLO, Fresno No. 7, Col. El Manto, 09830, México, D.F., y se encuadernó en ENCUADERNACION TECNICA EDITORIAL, S.A., Calz. San Lorenzo 279-45, Col. Granjas Estrella, 09880, México, D.F., el tiro fue de 3 000 ejemplares



**I I M P O R T A N T E !**  
**NO ABRA ESTE EMPAQUE**

**El objetivo de este libro es presentar al estudiante los principios fundamentales del análisis estructural de vigas, armaduras y marcos.**

**En esta obra se tratan las estructuras estáticamente determinadas en los primeros capítulos y en los últimos se presentan procedimientos de análisis matricial, así como algunos métodos especiales clásicos "exactos" que ayudarán a que el estudiante llegue a entender y "sentir" las estructuras.**

**El libro incluye un disquete con programas que utilizan el método matricial. Los programas se aplican detalladamente en el capítulo 20 a diversos tipos de estructuras. La sección final de este capítulo contiene las respuestas, obtenidas con estos programas, cuidadosamente revisadas con el fin de que el lector compruebe sus conocimientos comparando sus respuestas.**

**Lo anterior ayudará al estudiante y al ingeniero a analizar las vigas, armaduras y marcos en un tiempo muy breve.**



9 789686 223927

ISBN 968-6223-92-4