

Сложение угловых скоростей

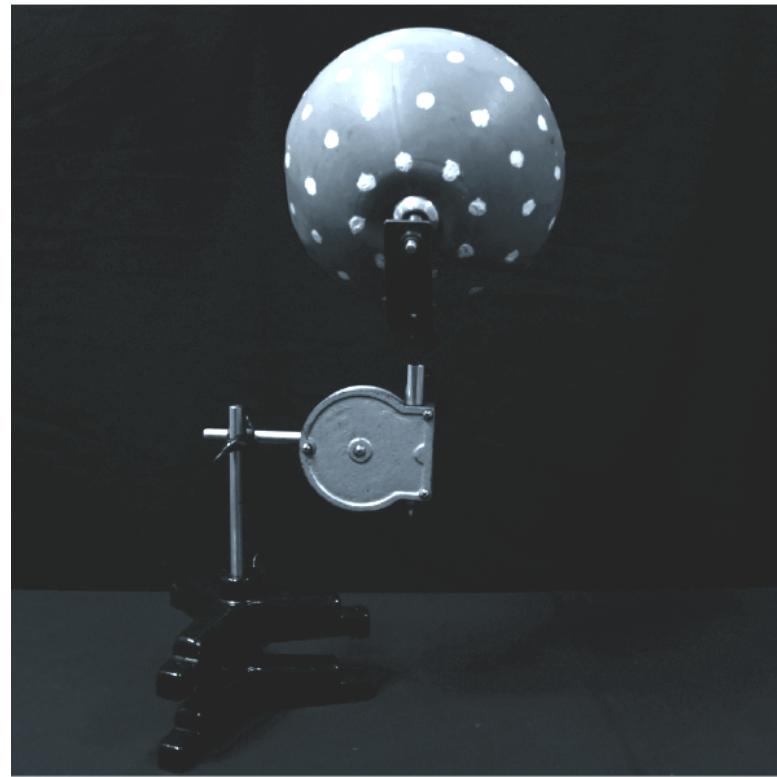


Рис. 1: Демонстрация сложения угловых скоростей на центробежной машине

Оборудование:

1. Шар диаметром 35 см, покрытый по линиям широт рядами пятен белого цвета диаметром 1 см.
2. Вращающийся держатель.
3. Машина с червячным механизмом.

Основные определения:

Угловая скорость — величина, характеризующая быстроту вращения твердого тела. При равномерном вращении тела вокруг неподвижной оси его угловая скорость численно равна приращению угла поворота φ за промежуток времени Δt

$$\omega = \Delta\varphi / \Delta t.$$

В общем случае угловая скорость численно равна отношению элементарного угла поворота $d\varphi$ к соответствующему элементарному промежутку времени dt , то есть

$$\omega = d\varphi / dt.$$

Таким образом,

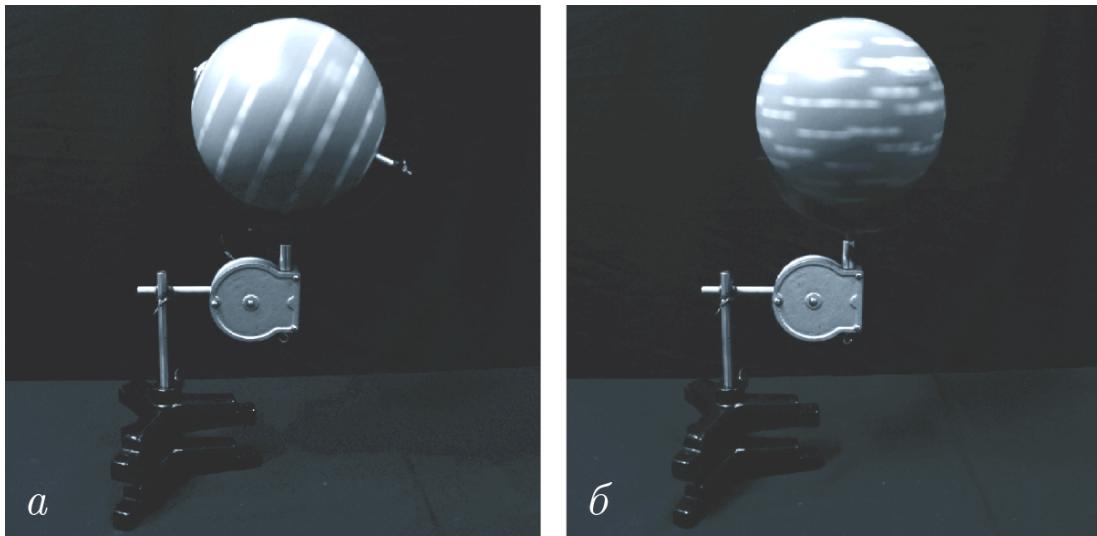


Рис. 2: *а* — вращение шара только вокруг наклонной (собственной) оси; *б* — вращение шара только вокруг вертикальной оси

вектор угловой скорости ω численно равен величине угловой скорости, лежит на оси вращения, и направление его связано с направлением вращения согласно правилу буравчика.

Поскольку угловая скорость — вектор, то приращение ее также вектор и, следовательно, вектором является угловое ускорение:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Между векторами угловой и линейной скоростей для каждой материально точки твердого тела существует связь.

Вектор линейной скорости точки при вращательном движении равен векторному произведению вектора угловой скорости на радиус-вектор точки

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Краткое описание:

Шар закрепляется в специальном держателе, в котором он может вращаться вокруг наклонной оси, а вместе с держателем — вокруг вертикальной оси при помощи червячной машины. Таким образом вращать шар можно либо вокруг наклонной оси, либо вокруг вертикальной оси, либо вокруг обеих осей одновременно.

При быстром вращении шара вокруг наклонной оси пятна на его поверхности сливаются и образуют параллельные ряды (рис.2,*а*), перпендикулярные к оси вращения. Направление оси вращения шара совпадает с направлением угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega}_1$.

При вращении шара только вокруг вертикальной оси пятна сливаются в линии (рис.2,*б*), которые лежат в горизонтальных плоскостях, перпендикулярных оси вращения держателя, вдоль которой направлен вектор $\boldsymbol{\omega}_2$.

В ходе эксперимента обнаруживаем, что при одновременном вращении шара вокруг собственной оси и вокруг оси вращения держателя светлые пятна на его поверхности перемещаются таким образом, будто врачаются вокруг новой движущейся оси - мгновенной оси вращения твердого тела.

Теория:

Когда материальная точка участвует в нескольких независимых движениях, то для перемещений, скоростей и ускорений справедливы правила векторного сложения, при этом результирующее перемещение равно векторной сумме отдельных независимых перемещений.

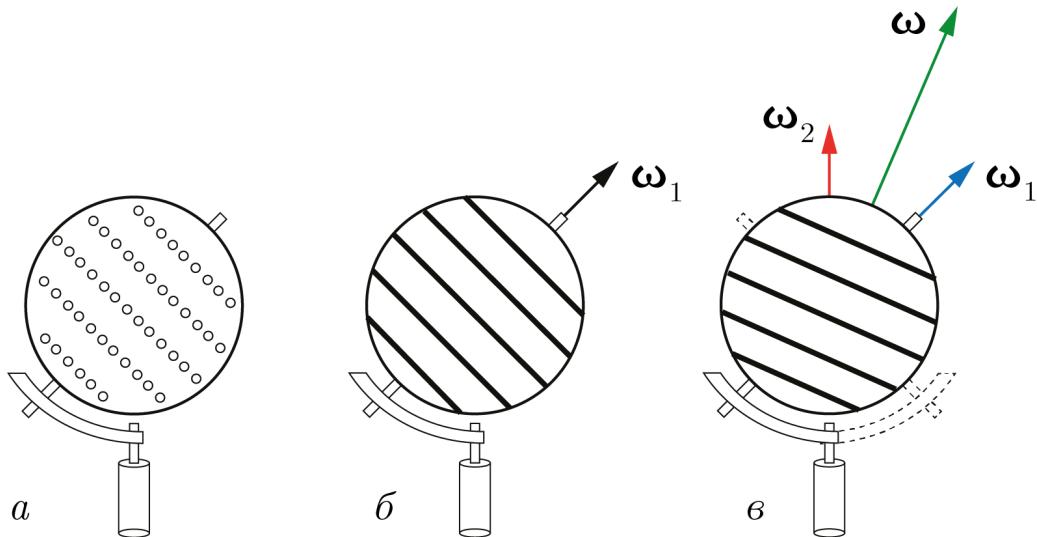


Рис. 3: а — схематичное изображение шара на вращающемся стержне (без вращения); б — вектор угловой скорости при вращении шара только вокруг собственной (наклонной) оси; в — сложение угловых скоростей при одновременном вращении шара вокруг собственной и вертикальной осей

В классической механике закон сложения скоростей Галилея позволяет определить результирующую скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета, которая движется во вращающейся системе отсчета. Для точки на поверхности шара, движущейся одновременно вокруг вертикальной оси со скоростью v_1 и наклонной оси со скоростью v_2 , результирующую линейную скорость v можно представить в виде:

$$v = v_1 + v_2. \quad (1)$$

Используя известную связь между линейной и угловой скоростями, можно получить следующее выражение:

$$v = \omega_1 \times r + \omega_2 \times r = (\omega_1 + \omega_2) \times r, \quad (2)$$

где через r обозначен радиус-вектор, направленный из центра шара в рассматриваемую точку на его поверхности.

Следовательно, при одновременном вращении шара и держателя, результирующая угловая скорость ω также будет представлять собой векторную сумму ω_1 и ω_2 , и иметь направление, показанное на рис.3,в. Это направление легко определить опытным путем так как кружки, расположенные вблизи мгновенной оси (вдоль вектора ω), не сливаются в линии.

Таким образом, при одновременном вращении шара вокруг собственной оси и вокруг оси вращения держателя вектор результирующей угловой скорости, а, следовательно, и мгновенная ось вращения также поворачиваются вокруг вертикальной оси держателя. Величина угловой скорости вращения шара относительно мгновенной оси вращения равна векторной сумме угловой скорости вращения шара вокруг своей оси и угловой скорости поворота оси шара $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

Сложение движений

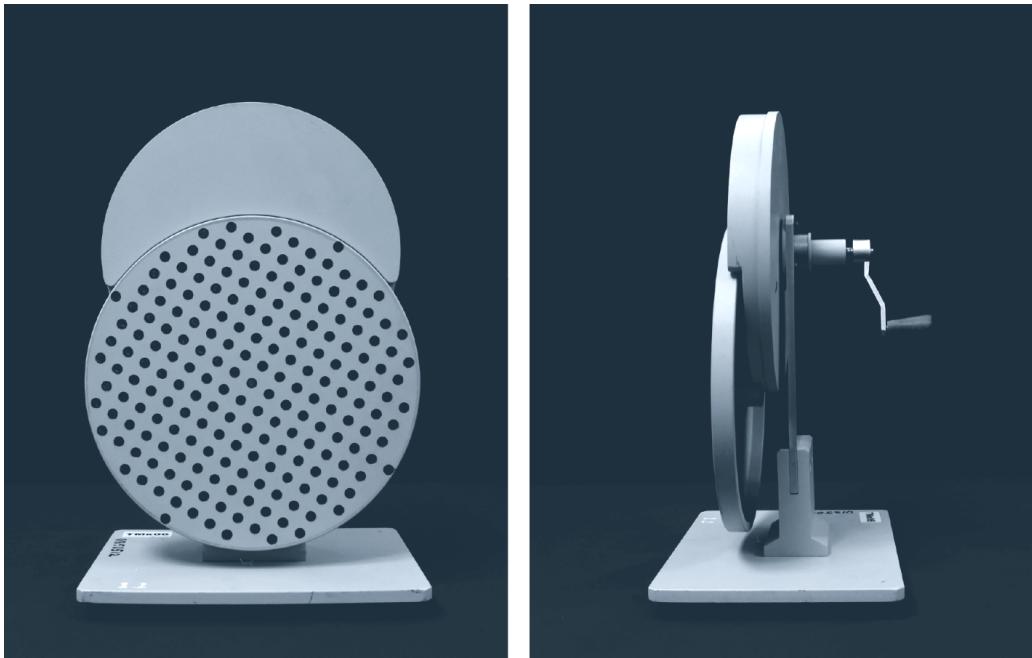


Рис. 4: Демонстрация сложения параллельных вращений

Оборудование:

1. Диск диаметром 26 см, поверхность которого покрыта темными кружками диаметром 1 см.
2. Подставка с механизмом, приводящим диск во вращение как вокруг его собственной горизонтальной оси, так и в вертикальной плоскости его движения.

Основные определения:

Вообще говоря, при движении твердого тела разные точки движутся по различным траекториям с различными скоростями. Но оказывается, что всегда можно произвольное движение твердого тела представить как сумму независимых движений: поступательного и вращательного.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной самой себе. При поступательном движении все точки тела движутся одинаково.

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся по концентрическим окружностям, а все центры этих окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Краткое описание:

Закрепленный на подставке диск обладает горизонтальной осью вращения, проходящей через его центр. При этом вращательный механизм способен приводить в движение по окружности и саму ось.

Раскрутив изначально неподвижный диск вокруг собственной оси, можно наблюдать вращение темных кружков. Удаленные от центра пятна при быстром вращении начнут сливаться в линии, а кружок в центре диска, лежащий на оси вращения, останется неподвижным (рис.5).

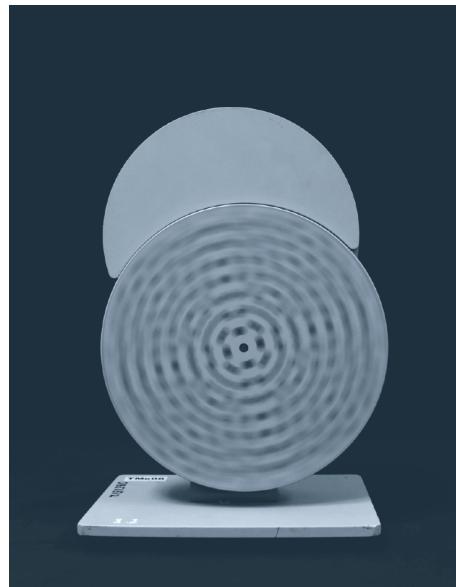


Рис. 5: Вращение диска вокруг собственной оси, проходящей через его центр

Если при вращении диска его центральная ось начнет двигаться по окружности в вертикальной плоскости, параллельной диску (рис.6), то результирующее движение можно описать как вращение вокруг мгновенной оси, которая совершает круговое движение. В каждый момент времени мгновенная ось вращения твердого тела оказывается в новом положении, которое можно обнаружить по расположению кружка, кажущегося неподвижным. Этот неразмытый кружок не совпадает с центром диска, а перемещается по окружности в вертикальной плоскости.

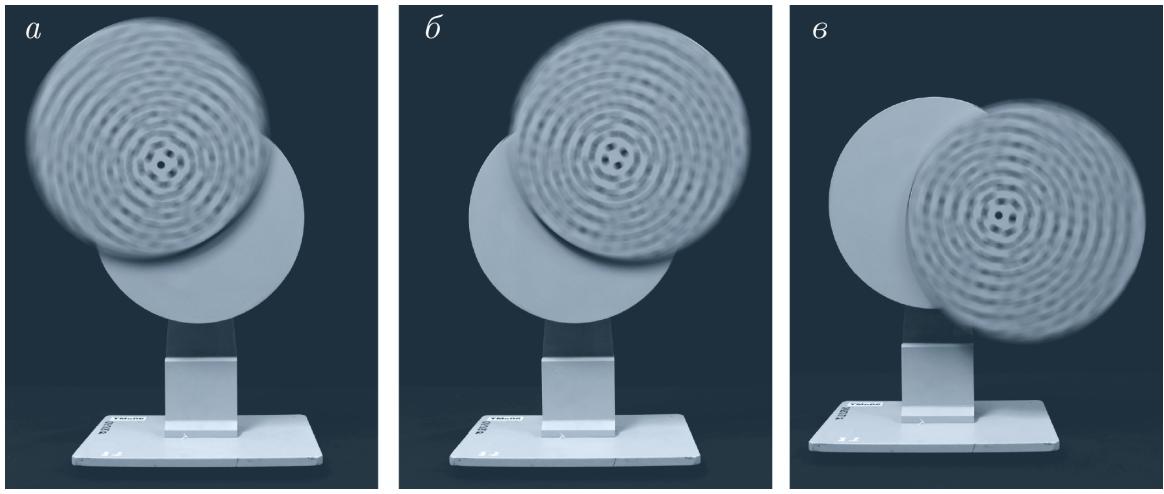


Рис. 6: Четкое пятно находится не в центре, что связано с появлением новой — мгновенной оси вращения. Вращение диска вокруг мгновенной оси возникает в результате наложения движения диска вокруг собственной ось и перемещении оси вращения по окружности

Теория:

Пусть диск вращается против хода часовой стрелки. Обозначим угловую скорость его вращения через ω_1 (рис. 7, б).

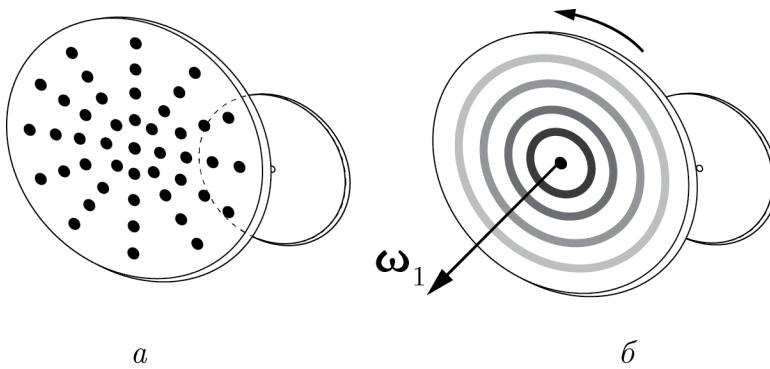


Рис. 7: а — схематичное изображение неподвижного диска на штативе; б — направление вектора угловой скорости диска при его вращении против хода часовой стрелки

Так как ось диска жестко связана с валом на штативе, то при вращении вала (рис. 8а) с угловой скоростью ω_2 , результирующая угловая скорость вращения диска ω равна векторной сумме скоростей диска и вала: $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

Если угловые скорости ω_1 и ω_2 направлены в одну сторону (как показано на рис. 9), то мгновенная ось вращения будет лежать на отрезке, соединяющем центры диска и вала. В противном случае, мгновенная ось вращения будет лежит за пределами этого отрезка. Положение мгновенной оси вращения можно определить через соотношение угловых скоростей:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

где через l_1 и l_2 обозначены расстояния от центра диска и вала до мгновенной оси (неразмытого пятна).

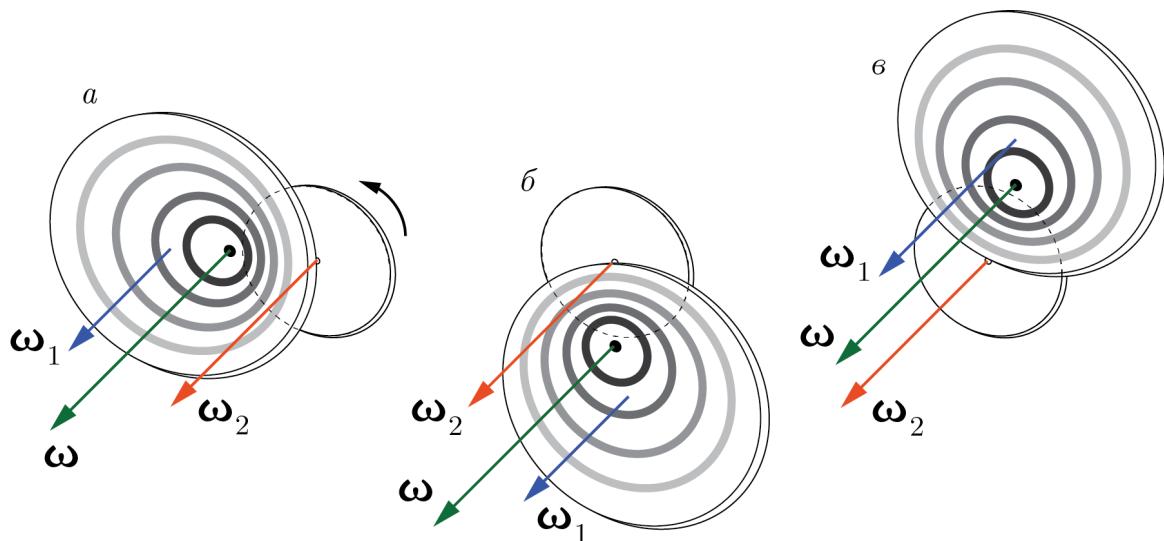


Рис. 8: Вектор результирующей угловой скорости ω направлен вдоль мгновенной оси вращения, проходящей через точку на прямой, соединяющей центры диска и вала

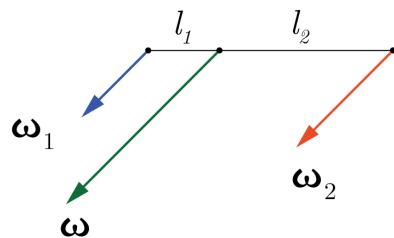


Рис. 9: Векторы угловых скоростей диска и вала складываются, а направление результирующего вектора угловой скорости ω совпадает с мгновенной осью вращения

Таким образом, по положению резкого пятна на вращающемся диске (рис.6) можно судить о соотношении угловых скоростей вращающихся тел. Чем больше собственная угловая скорость вращения диска по сравнению со скоростью вращения вала, там ближе мгновенная ось вращения расположена к оси диска.

Выдергивание листа бумаги из-под стакана

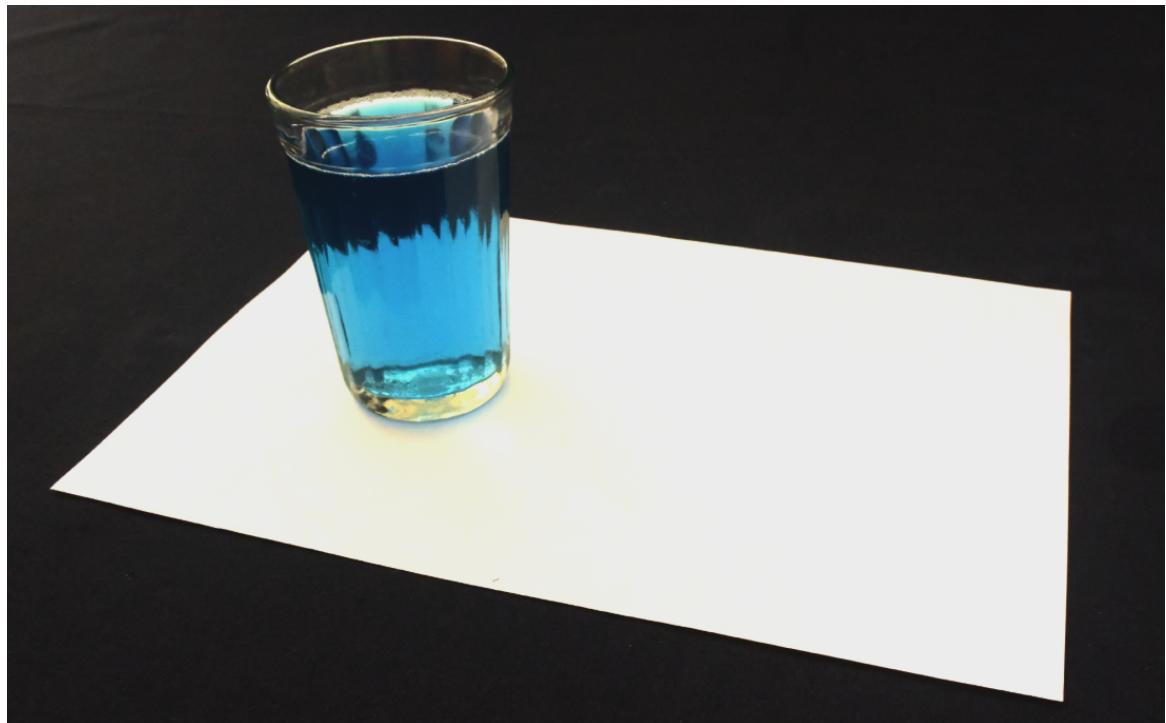


Рис. 10: Демонстрация явления инертности

Оборудование:

1. Лабораторный стол с гладкой поверхностью.
2. Стакан с водой.
3. Лист бумаги.

Основные понятия:

Инерция, инертность (в механике) — свойство материальных тел, «сопротивляться» воздействию силы. Многочисленные опыты позволили Г. Галилею (1564–1642) впервые сформулировать свой знаменитый закон инерции:

тела, свободные от внешних воздействий (сил), сохраняют состояние покоя или равномерного прямолинейного движения относительно Земли

Впоследствии английский физик И. Ньютон (1643–1727) включил этот закон в число общих законов движения, поэтому закон инерции часто называют первым законом Ньютона. Все системы отсчета, для которых выполняется первый закон Ньютона, получили название инерциальных систем.

Когда внешние воздействия на тело (силы) отсутствуют или взаимно уравновешиваются, инертность проявляется в том, что тело сохраняет неизменным состояние своего движения или покоя по отношению к инерциальной системе отсчета. Если же на тело действует неуравновешенная система сил, то свойство инертности сказывается в том, что изменение состояния покоя

или движения тела, т. е. изменение скоростей его точек, происходит постепенно, а не мгновенно; при этом движение изменяется тем медленнее, чем больше инертность тела. Величина, количественно определяющая инертные свойства тела, называется массой тела.

Краткое описание демонстрации:

Для демонстрации инертности тел стакан с водой располагают на ровной горизонтальной поверхности. Под стаканом помещают обычный лист бумаги. Если начать тянуть лист с такой силой, чтобы он не проскальзывал относительно стакана, то стакан станет двигаться вместе с бумагой. В этом случае сила трения, приложенная к стакану со стороны бумаги, действует длительное время и сообщает ему необходимое количество движения (импульс), чтобы стакан перемещался вместе с бумагой.

Если же бумажный лист резко с большой силой выдернуть, то он выскользнет из-под стакана, а сам стакан останется стоять на месте. Теперь время действия силы трения на стакан мало, причем оно равно времени прохождения конца бумажного листа под дном стакана. За это время сила трения успевает сообщить стакану очень малый импульс, и стакан остается на месте.

Теория:

Используя второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось x , имеем:

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} = F_x, \quad (3)$$

где $p_x = mv_x$ — проекция импульса на ось x . Так как проекция скорости v_x является производной координаты x по времени, получается следующее:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x. \quad (4)$$

При проскальзывании на стакан со стороны листа бумаги действует постоянная сила трения скольжения, равная $F_x = \mu mg$ (где через μ обозначен коэффициент трения между стаканом и листом). В этом случае стакан будет двигаться с постоянным ускорением $a = \mu g$ и за время выдергивания листа бумаги переместится на расстояние:

$$\Delta x = \mu g \Delta t^2 / 2. \quad (5)$$

Из уравнения (5) видно, что чем меньше время действия силы F на лист бумаги, тем меньше перемещение Δx стакана. Поэтому в пределе $t \rightarrow 0$ стакан остается неподвижным относительно поверхности стола.

Импульс силы. Гиря и две нити

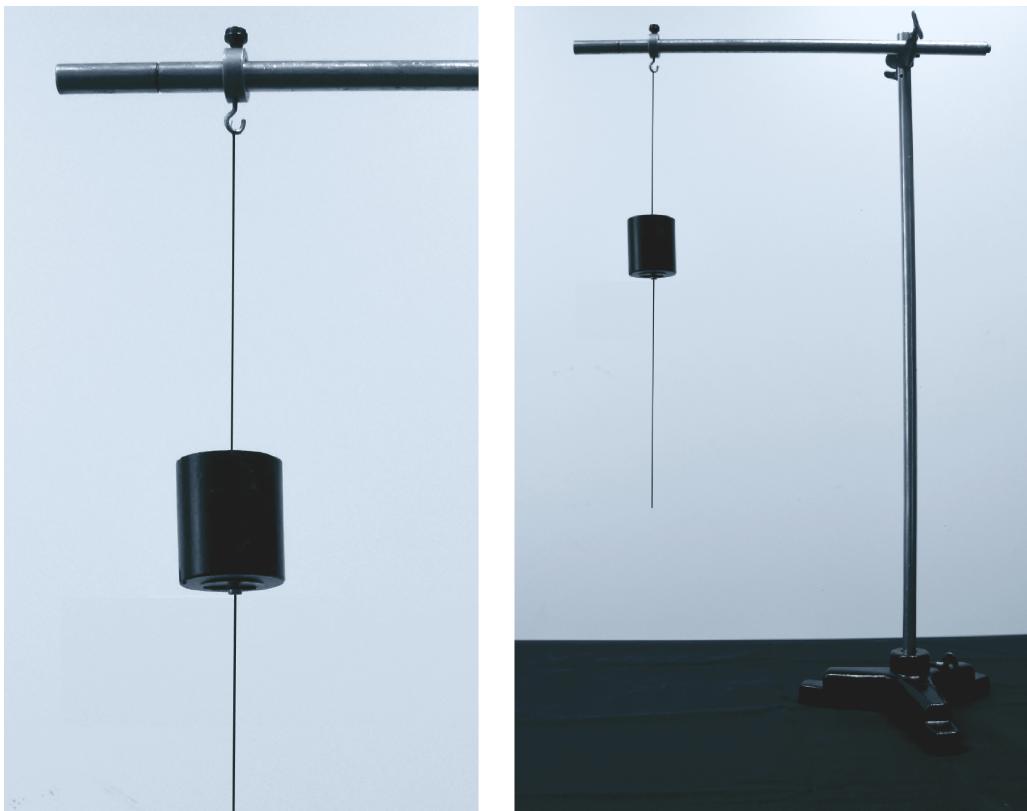


Рис. 11: Демонстрация явления инерции

Оборудование:

1. Физический штатив с муфтой и крючком.
2. Гиря с крючками, ввинченными в верхний и нижний торцы.
3. Несколько нитей одинаковой толщины и длины.
4. Резиновый коврик, используемый для амортизации удара.

Основные определения:

Величина, количественно определяющая те действия тел друг на друга, которые вызывают ускорения, называется силой. С одной стороны, сила есть количественная мера действий тел друг на друга. С другой стороны, сила есть количественная мера тех действий, которые вызывают ускорения.

Конечная скорость движения тел определяется не только самой силой, но и временем действия этой силы.

Импульсом называется мера механического движения, равная для материальной точки произведению ее массы m на скорость v . Такая величина как импульс $\mathbf{p} = mv$ — является векторной, направленной так же, как скорость точки. Импульс \mathbf{P} механической системы равен геометрической сумме импульсов всех ее точек, или произведению массы всей системы на скорость

\mathbf{V}_c её центра масс:

$$\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{V}_c.$$

При действии силы \mathbf{F} импульс точки изменяется в общем случае и численно и по направлению; это изменение определяется вторым (основным) законом динамики. Изменение импульса системы происходит под действием только внешних сил, то есть сил, действующих на систему со стороны тел, в эту систему не входящих.

Импульс силы \mathbf{S} — это сложная физическая величина, которая одновременно учитывает влияние модуля, направления и времени действия силы на изменение состояния движения тела. Импульс силы $\mathbf{S} = \mathbf{F}\Delta t$ является вектором, по направлению совпадающим с направлением вектора силы \mathbf{F} . Импульс системы — величина векторная и направлен он в ту же сторону, что и вектор результирующей силы \mathbf{F}_p .

В новых понятиях второй закон Ньютона можно прочитать следующим образом:

изменение импульса тела равно импульсу всех сил, действовавших на него:

$$\mathbf{F}\Delta t = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \text{ или } \mathbf{F}\Delta t = \Delta(m\mathbf{v}).$$

Именно в таком виде закон был впервые сформулирован самим И. Ньютоном.

Краткое описание демонстрации:

К штативу, установленном на ровной поверхности, при помощи тонкой нити подвешивается тело (цилиндр массой 200 г). Прочность нитей подбирается так, чтобы верхняя нить могла только удерживать тело, не разрываясь. В нижнюю часть этого цилиндра ввинчивается крючок с привязанным к нему такой же нитью. Для амортизации удара на стол кладется резиновый коврик.

Если во время опыта нижнюю нить резко с большой силой дернуть, то она разорвется, а верхняя как бы не «почувствует» сильного рывка (точка 2 на рис.12). Причина кроется в том, что большая сила \mathbf{F} действует на груз в течение очень короткого времени Δt . Это время затрачивается только на создание деформации нижней нити во время рывка. Тело массой m получает незначительный импульс силы, поэтому не успевает набрать скорость и сдвинуться с места. По этой причине в верхней нити не возникают дополнительных деформаций, и она остается целой.

Если нижнюю нить потянуть плавно с небольшой силой, то верхняя нить оборвётся (точка 1 на рис.12) и груз упадет. Это объясняется тем, что действие небольшой силы \mathbf{F} за счет продолжительности взаимодействия, т.е. большого Δt , приводит к тому, что телу сообщается существенный импульс силы $\mathbf{F}\Delta t$. За рассматриваемый промежуток времени скорость, а, соответственно, импульс тела успевают измениться. Это приводит к небольшому смещению тела, из-за чего в верхней нити возникает дополнительная деформация. Благодаря тому, что в опыте используется тонка нить, деформации быстро достигают предела прочности и верхняя нить обрывается.

Устройство и применение прибора. В конструкции штатива муфта обеспечивает устойчивое крепление деталей штатива или других приборов, параллельно или перпендикулярно вертикальной стойке штатива. Это условие в физическом штативе имеет существенное значение, т.к. приходится, например, закреплять в штативе блок на стержне, динамометры лабораторные и демонстрационные и другие приборы и приспособления.

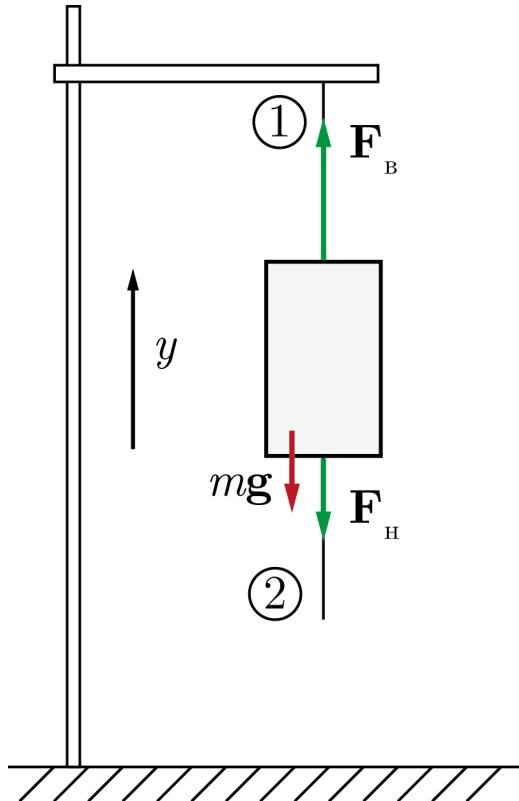


Рис. 12: Схематичное изображение подвешенного на нити груза

Теория:

В рассматриваемом эксперименте движение гири определяется следующим уравнением (второй закон Ньютона в векторной форме)

$$\mathbf{F}_h + \mathbf{F}_b + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}, \quad (6)$$

где \mathbf{F}_h , \mathbf{F}_b — векторы сил натяжения нижней и верхней нитей соответственно, $m\mathbf{g}$ — вектор силы тяжести, \mathbf{a} — ускорение груза.

При медленном натяжении имеет место «статическое» распределение сил (ускорение мало или $a \rightarrow 0$). В проекции на ось y уравнение [6] имеет вид:

$$-F_h + F_b - mg = 0, F_b > F_h, \quad (7)$$

то есть сила натяжения верхней нити превышает силу натяжения со стороны нижней нити на величину mg .

При резком натяжении нити ускорение движения груза будет направлено вниз, проекция уравнения [6] имеет вид:

$$F_b - F_h - mg = -ma, F_h = F_b - mg + ma, \quad (8)$$

откуда $F_h > F_b$, поэтому при значительном ускорении a (резкий рывок) в первую очередь обрывается нижняя нить.

Таким образом, разница в обрыве нижней или верхней нитей обусловливается присутствием в системе тела большой массы, подвешенного за верхнюю нить. В случае резкого рывка смещение гири в силу ее инертности оказывается малым, поэтому характерное время растяжения верхней нити значительно превышает время растяжения нижней. Поэтому для нижней нити разрывное натяжение «наступает» раньше.