МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №2
по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»
Тема: Алгоритмы на графах

Студент гр. 8383 _____ Шишкин И.В.

Преподаватель _____ Фирсов М.А.

Санкт-Петербург
2020

Цель работы.

Ознакомиться и разработать программу, которая решает задачу построения кратчайшего пути в ориентированном графе методом A*, а также при помощи жадного алгоритма.

Постановка задачи.

Метод A*:

Разработайте программу, которая решает задачу построения кратчайшего пути в *ориентированном* графе **методом A***. Каждая вершина в графе имеет буквенное обозначение ("a", "b", "c"...), каждое ребро имеет неотрицательный вес. В качестве эвристической функции следует взять близость символов, обозначающих вершины графа, в таблице ASCII.

Пример входных данных

a e

a b 3.0

b c 1.0

c d 1.0

a d 5.0

d e 1.0

В первой строке через пробел указываются начальная и конечная вершины. Далее в каждой строке указываются ребра графа и их вес. В качестве выходных данных необходимо представить строку, в которой перечислены вершины, по которым необходимо пройти от начальной вершины до конечной. Для приведённых в примере входных данных ответом будет ade

Вар. 8. Перед выполнением A* выполнять предобработку графа: для каждой вершины отсортировать список смежных вершин по приоритету.

Жадный алгоритм:

Разработайте программу, которая решает задачу построения пути в ориентированном графе при помощи жадного алгоритма. Жадность в данном

случае понимается следующим образом: на каждом шаге выбирается последняя посещённая вершина. Переместиться необходимо в ту вершину, путь до которой является самым дешёвым из последней посещённой вершины. Каждая вершина в графе имеет буквенное обозначение ("a", "b", "c"...), каждое ребро имеет неотрицательный вес.

Пример входных данных

a e

a b 3.0

b c 1.0

c d 1.0

a d 5.0

d e 1.0

В первой строке через пробел указываются начальная и конечная вершины

Далее в каждой строке указываются ребра графа и их вес

В качестве выходных данных необходимо представить строку, в которой перечислены вершины, по которым необходимо пройти от начальной вершины до конечной. Для приведённых в примере входных данных ответом будет abcde

Описание алгоритма A*.

A* пошагово просматривает все пути, ведущие от начальной вершины в конечную, пока не найдёт минимальный. В начале работы просматриваются узлы, смежные с начальным: выбирается тот из них, который имеет минимальное значение $f(x) = g(x) + h(x)$, где g(x) – функция стоимости достижения рассматриваемой вершины x из начальной, а h(x) – эвристическая оценка расстояния от рассматриваемой вершины к конечной. После чего этот узел раскрывается. На каждом этапе алгоритм оперирует с множеством путей из начальной точки до всех ещё не раскрытых (листовых) вершин графа – множеством частных решений, – которое размещается в очереди с приоритетом. Приоритет пути определяется по значению f(x). Алгоритм

продолжает свою работу до тех пор, пока значение f(x) целевой вершины не окажется меньшим, чем любое значение в очереди, либо пока весь граф не будет просмотрен. Из множества решений выбирается решение с наименьшей стоимостью.

Описание жадного алгоритма.

В данном случае жадность понимается следующим образом: на каждом шаге выбирается последняя посещённая вершина. То есть при проходе графа от начальной вершины до конечной, для каждого узла выбирается ребро с наименьшим весом.

Описание способов хранения частичных решений для A*.

```
struct Edge {
	char connectedNode;
	int heruisticNum;
	double weight;
};
```

Структура для хранения ребра графа. connectedNode - смежный узел, heruisticNum - эвристическое значение смежного узла, weight - вес ребра.

```
struct Graph {
	char name;
	vector <Edge> edge;
};
```

Структура для хранения графа. name - название узла, edge - вектор смежных узлов.

```
struct AStar {
	char node;
	char prev;
	double f;
	double g;
	double h;
```

```
    bool checked = false;
};
```

Структура для метода A*. node - название узла, prev - название предыдущего узла (с которым у узла node есть смежное ребро), f - значение f = g + h, необходимое для вычислений, checked - если узел уже был проверен, то это значение устанавливается в true.

Описание функций для метода A*:

Описание функции heruisticFunc.

Функция `int heuristicFunc(char from, char to)` - эвристическая функция, возвращает эвристическое число узла.

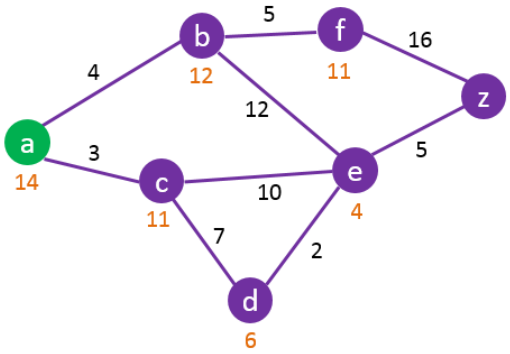
Описание функции cmpEdge.

Функция `bool cmpEdge(Edge i, Edge j)` - компаратор для сортировки ребер по эвристическому значению.

Описание рекурсивной функции aStar.

Функция `void aStar(char start, char finish, vector <Graph> gr, string nodeNames)` - на вход подается start - стартовая вершина, из которой нужно найти минимальный путь до вершины finish; gr - вектор, хранящий в себе все ребра графа; nodeNames - названия всех узлов в графе.

В начале создается vector <AStar> nodes, в котором и будут храниться все данные, необходимые для вычисления минимального пути методом A*. В этот вектор записывается первая вершина start. Далее, из переменной nodeNames берутся названия всех узлов и записываются в nodes. По сути создается таблица, показанная на рис. 1 (все значения подобраны случайно).



Node	Status	Shortest Distance From A	Heuristic Distance to Z	Total Distance*	Previous Node
A	Current	0	14	14	
B		∞	12		
C		∞	11		
D		∞	6		
E		∞	4		
F		∞	11		
Z		∞	0		
* Total Distance = Shortest Distance from A + Heuristic Distance to Z					

Рисунок 1 – Таблица для метода A*

Затем идет цикл, в котором в начале ищется в nodes минимальное значение nodes.f (если есть несколько узлов с одинаковым значением nodes.f, то берется то, у которого nodes.h меньше), этот узел запоминается и значению checked присваивается true. Далее, для найденного узла ищутся смежные узлы. Для каждого смежного узла вычисляется значение (расстояние от стартовой вершины до этой) - nodes[index].g + gr[i].edge[0].weight. Если это значение меньше nodes[tmp].g, которое уже хранится в векторе nodes, то значения nodes.g и nodes.f для этой вершины меняются.

Таким образом, таблица будет заполняться, пока текущее значение в nodes не будет окончательным (=finish). Так как в таблице производилось хранение предыдущего узла (prev), то с помощью него можно восстановить путь от начальной вершины до конечной.

Описание функции findMinWay для жадного алгоритма.

Функция `void findMinWay(string a, string b, vector <double> c, char tmp, double& currWeight, string& resStr, char start, char finish, int size)` используется для поиска минимального пути в графе от начальной вершины start до конечной finish. Помимо этого, на вход подаются вершины, из которых идут ребра a; вершины, в которые идут ребра b; веса этих вершин c; текущая вершина tmp; currWeight - для подсчета расстояния от начальной вершины до конечной; resStr - результирующий путь от start до finish; size - количество ребер.

Создается вектор целых чисел first, который используется, чтобы определять индексы узлов, в которые можно перейти из предыдущего узла. Далее запускается цикл while, в котором и производится поиск пути. В начале в переменной prev сохраняется индекс текущего узла, чтобы, если нужно, вернуться назад. Далее, переменной tempW присваивается значение текущего расстояния, чтобы определить, было ли продвижение к следующему узлу, потому что если нет, то нужно вернуться на узел назад.

Затем идет еще один цикл while, в котором производится поиск наименьшего пути к следующему узлу. Если размер вектора first > 1 (то есть существует больше 1-го узла, в который можно перейти из текущей вершины), то с помощью цикла for производится поиск минимального веса ребра, индекс вершины, в которую ведет это ребро, записывается в переменную index, а вершина - в переменную next (т.е. следующая вершина, в которую пойдет алгоритм). Если же размер вектора first = 1, то переменной next присваивается единственная вершина. Далее, так как может быть случай, в котором может произвестись переход в вершину, которая уже посещена, производится поиск с помощью метода find: если в строке resStr вершина next не найдена, то значит, что в эту вершину можно идти. Иначе из вектора first удаляется эта вершина и производится поиск пути заново.

В конце в дело вступает переменная tempW, в которой хранилось значение расстояния до определения кратчайшего пути в следующий узел. Если

переменная currWeight так и не изменилась, то это значит, что программа осталась в том же узле, а это значит, что нужно сделать шаг назад.

Сложность алгоритмов по времени.

Сложность метода A* по времени можно оценить как

$$O(N^{N-1}).$$

Так как в худшем случае проверяются все узлы N и все смежные ей вершины N-1.

Сложность жадного алгоритма по времени можно оценить как

$$O(N).$$

Так как в худшем случае проверяются все узлы N.

Сложность алгоритмов по памяти.

Сложность метода A* по памяти можно оценить как

$$O(2|V| + |E|).$$

Такая оценка исходит из того, что программа хранит все вершины и все ребра, а так же есть переменная, в которой количество элементов равно количеству вершин графа.

Сложность жадного алгоритма по памяти можно оценить как

$$O(|V| + |E|).$$

Так как программа хранит только граф.

Спецификация программы.

Программа написана на языке C++. Программа на вход получает вершину начала пути и конца пути. После вводятся ребра и их веса. Перед началом работы алгоритма у каждого узла сортируются смежные вершины по возрастанию по сумме эвристического числа и веса ребра.

Тестирование.

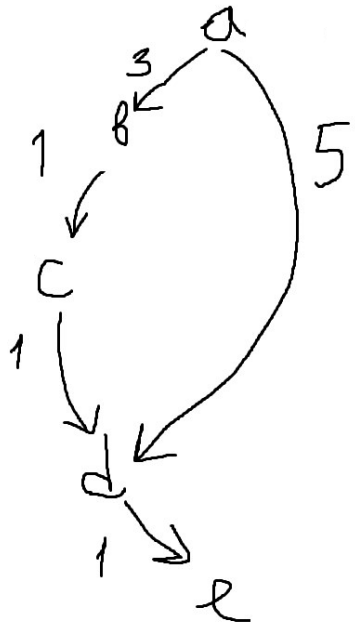
Пример вывода результата для A* (INF - бесконечность):

```
a e
a b 3
b c 1
c d 1
a d 5
d e 1
d
d
d
--------------------------------------------------------------------------------
Исходные данные:
Начальная вершина: a, конечная вершина: e
a b c a d
b c d d e
3 1 1 5 1
--------------------------------------------------------------------------------
Ребра после сортировки по эвристическому числу:
Ребро из a в b; эвристическое число: 3, вес: 3
Ребро из b в c; эвристическое число: 2, вес: 1
Ребро из c в d; эвристическое число: 1, вес: 1
Ребро из a в d; эвристическое число: 1, вес: 5
Ребро из d в e; эвристическое число: 0, вес: 1
--------------------------------------------------------------------------------
Узел: a, предыдущий:  , f:   0, g:   0, checked: 0
Узел: b, предыдущий: M, f: INF, g: INF, checked: 0
Узел: c, предыдущий: M, f: INF, g: INF, checked: 0
Узел: d, предыдущий: M, f: INF, g: INF, checked: 0
Узел: e, предыдущий: M, f: INF, g: INF, checked: 0


Узел: a, предыдущий:  , f:   0, g:   0, checked: 1
Узел: b, предыдущий: a, f:   6, g:   3, checked: 0
Узел: c, предыдущий: M, f: INF, g: INF, checked: 0
Узел: d, предыдущий: a, f:   6, g:   5, checked: 0
Узел: e, предыдущий: M, f: INF, g: INF, checked: 0


Узел: a, предыдущий:  , f:   0, g:   0, checked: 1
Узел: b, предыдущий: a, f:   6, g:   3, checked: 0
Узел: c, предыдущий: M, f: INF, g: INF, checked: 0
Узел: d, предыдущий: a, f:   6, g:   5, checked: 1
Узел: e, предыдущий: d, f:   6, g:   6, checked: 0


--------------------------------------------------------------------------------
Результат:
ade
```



Пример вывода результата для тех же входных данных для жадного алгоритма:

```
a e
a b 3
b c 1
c d 1
a d 5
d e 1
n
n
n
Из вершины a можно попасть в следующие вершины: b d
Наименьшим путем оказался путь в вершину b
Промежуточный минимальный путь: ab
----------------------------------------------------------------
Из вершины b можно попасть в следующие вершины: c
Наименьшим путем оказался путь в вершину c
Промежуточный минимальный путь: abc
----------------------------------------------------------------
Из вершины c можно попасть в следующие вершины: d
Наименьшим путем оказался путь в вершину d
Промежуточный минимальный путь: abcd
----------------------------------------------------------------
Из вершины d можно попасть в следующие вершины: e
Наименьшим путем оказался путь в вершину e
Промежуточный минимальный путь: abcde
----------------------------------------------------------------
Ответ:
abcde
```

№	Input	Output A*	Output GA
1	a a a a 1	a	a
2	e a a a 0.5 a b 2 a c 3	eca	ega

	b c 2 c a 3 c e 4 e c 1 c f 5 e g 1 g a 2 g h 4 e r 2		
3	a f a a 0.5 a b 2 a c 3 b c 2 c a 3 c e 4 e c 1 c f 5 e g 1 g a 2 g h 4 e r 2	abcf	abcf

Граф для тестов 2 и 3 приведен на рис. 2.

Код программы для A* приведен в приложении А.

Код программы для жадного алгоритма приведен в приложении Б

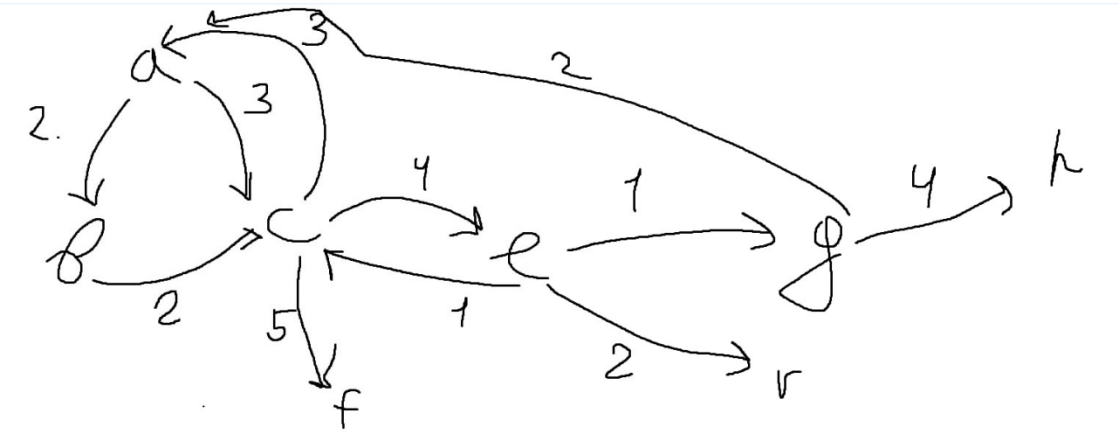


Рисунок 2 – Граф для тестов

Вывод.

В ходе выполнения лабораторной работы был реализован метод A* и жадный алгоритм для нахождения минимального маршрута от одного узла к другому в графе.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

КОД ПРОГРАММЫ ДЛЯ A*

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <iomanip>

using namespace std;

struct Edge {               //структура для хранения ребра графа
	char connectedNode;     //смежный узел
	int heruisticNum;       //эвристическое число
	double weight;          //вес ребра
};

struct Graph {              //структура для хранения графа
	char name;              //название узла
	vector <Edge> edge;     //вектор смежных узлов
};

struct AStar {              //структура для метода A*
	char node;              //текущий узел
	char prev;              //предыдущий узел
	double f;               //приоритет пути определяется по значению f = g + heruisticNum
	double g;               //значение g, необходимое для вычисления значения f
	double h;
	bool checked = false;   //проверена ли вершина
};

int heuristicFunc(char from, char to);     //эвристическая функция
bool cmpEdge(Edge i, Edge j);                       //компаратор для сортировки ребер по
эвристическому значению
void aStar(char start, char finish, vector <Graph> gr, string nodeNames); //метод A*

int main() {
	setlocale(LC_ALL, "RUS");
	char start;       //начальная вершина
	char finish;      //конечная вершина
	double currWeight = 0;
	string resStr = "";

	vector <Graph> gr;
	vector <char> a;
	vector <char> b;
	vector <double> c;
	int size = 0;
	char tmpa;     //для записи в вектор a
	char tmpb;     //для записи в вектор b
	double tmpc;   //для записи в вектор c

	cin >> start >> finish;
	string nodeNames;    //для хранения названий всех узлов
	nodeNames += start;
	while (cin >> tmpa >> tmpb >> tmpc) {
		a.push_back(tmpa);
		b.push_back(tmpb);
		c.push_back(tmpc);
		size++;

		Edge e;
		Graph g;
		e.connectedNode = tmpb;
```

```
			e.weight = tmpc;
			g.name = tmpa;
			g.edge.push_back(e);
			gr.push_back(g);

			if (nodeNames.length() == 0) nodeNames += tmpb;
			else if (nodeNames.find(tmpb) == string::npos) nodeNames += tmpb;
		}

		for (int i = 0; i < gr.size(); i++) {
			for (int j = 0; j < gr[i].edge.size(); j++) {	//сортировка смежных вершин по эвристическому числу
				gr[i].edge[j].heruisticNum = heuristicFunc(gr[i].edge[j].connectedNode, finish);
			}

			sort(gr[i].edge.begin(), gr[i].edge.end(), cmpEdge);
		}

		cout << "-------------------------------------------------------------------------------" << endl;
		cout << "Исходные данные:" << endl;
		cout << "Начальная вершина: " << start << ", конечная вершина: " << finish << endl;
		for (int i = 0; i < size; i++) cout << a[i] << " ";
		cout << endl;
		for (int i = 0; i < size; i++) cout << b[i] << " ";
		cout << endl;
		for (int i = 0; i < size; i++) cout << c[i] << " ";
		cout << endl;
		cout << "-------------------------------------------------------------------------------" << endl;

		cout << "Ребра после сортировки по эвристическому числу:" << endl;
		for (int i = 0; i < gr.size(); i++) {
			for (int j = 0; j < gr[i].edge.size(); j++) {
				cout << "Ребро ";
				cout << "из " << gr[i].name << " в " << gr[i].edge[j].connectedNode << "; эвристическое число: " << gr[i].edge[j].heruisticNum << ", вес: " << gr[i].edge[j].weight << endl;
			}
		}
		cout << "-------------------------------------------------------------------------------" << endl;

		aStar(start, finish, gr, nodeNames);

		return 0;
}

int heuristicFunc(char from, char to) {	// эвристическая функция
		return abs(to - from);	//возвращает близость символов, обозначающих вершины графа, в таблице ASCII
}

bool cmpEdge(Edge i, Edge j) {
		if (i.heruisticNum + i.weight < j.heruisticNum + j.weight) return i.connectedNode > j.connectedNode;
		return i.heruisticNum + i.weight < j.heruisticNum + j.weight;
}

void aStar(char start, char finish, vector <Graph> gr, string nodeNames) {
		vector <AStar> nodes;
		string resStr;	//результирующая строка
```

```
	AStar first;	//запись первой вершины в очередь
	first.node = start;
	first.prev = NULL;
	first.g = 0;
	first.f = 0;
	first.h = finish - start;
	nodes.push_back(first);

	for (int k = 0; k < nodeNames.length(); k++) {
		AStar tmp;

		int tmpi = 0;
		int tmpj = 0;

		if (nodeNames[k] == start) {
			continue;
		}
		else {
			for (int i = 0; i < gr.size(); i++) {
				for (int j = 0; j < gr[i].edge.size(); j++) {
					if (gr[i].edge[j].connectedNode == nodeNames[k]) {
						tmpi = i;
						tmpj = j;
						break;
					}
				}
			}
		}

		tmp.f = 10000;
		tmp.node = gr[tmpi].edge[tmpj].connectedNode;
		tmp.g = 10000;
		tmp.h = gr[tmpi].edge[tmpj].heruisticNum;
		nodes.push_back(tmp);
	}

	for (int i = 0; i < nodes.size(); i++) {
		for (int j = 0; j < nodes.size(); j++) {
			cout << "Узел: " << nodes[j].node << ", предыдущий: " << nodes[j].prev
<< ", f: ";
			if (nodes[j].f == 10000) cout << "INF";
			else cout << std::setw(3) << nodes[j].f;
			cout << ", g: ";
			if (nodes[j].g == 10000) cout << "INF";
			else cout << std::setw(3) << nodes[j].g;
			cout << ", checked: " << nodes[j].checked << endl;
		}
		cout << endl << endl;

		int index = -1;
		double minH = 1000000;
		double minF = 1000000;
		for (int i = 0; i < nodes.size(); i++) {
			if (nodes[i].checked == false) {
				if (nodes[i].f < minF) {
					minF = nodes[i].f;
					index = i;
					minH = nodes[i].h;
				}
				else if (nodes[i].f == minF && nodes[i].h < minH) {
					index = i;
					minH = nodes[i].h;
				}
			}
```

```
		}

		if (index >= 0) {
			if (nodes[index].node == finish) break;
			//cout << "\tmin: " << nodes[index].node << ", index: " << index;
			nodes[index].checked = true;

			for (int i = 0; i < gr.size(); i++) {
				if (gr[i].name == nodes[index].node) {

					int tmp;
					for (int j = 0; j < nodes.size(); j++) {
						if (nodes[j].node == gr[i].edge[0].connectedNode) {
							tmp = j;
							break;
						}
					}

					nodes[tmp].prev = nodes[index].node;
					int tmpG = nodes[index].g + gr[i].edge[0].weight;
					if (tmpG < nodes[tmp].g) nodes[tmp].g = tmpG;
					nodes[tmp].f = nodes[tmp].g + nodes[tmp].h;
				}
			}
			//cout << endl;
		}
	}

	cout << "-------------------------------------------------------------------------"
<< endl;
	cout << "Результат:" << endl;
	double minH = 1000000;
	double minF = 1000000;
	int index = 0;
	for (int i = 0; i < nodes.size(); i++) {
		if (nodes[i].checked == false) {
			if (nodes[i].f < minF) {
				minF = nodes[i].f;
				index = i;
				minH = nodes[i].h;
			}
			else if (nodes[i].f == minF && nodes[i].h < minH) {
				index = i;
				minH = nodes[i].h;
			}
		}
	}

	for (int i = 0; i < nodes.size(); i++) {
		resStr = nodes[index].node + resStr;
		if (nodes[index].node == start)
			break;

		for (int j = 0; j < nodes.size(); j++) {
			if (nodes[j].node == nodes[index].prev) {
				index = j;
				break;
			}
		}
	}

	cout << resStr << endl;

}
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

КОД ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

void findMinWay(string a, string b, vector <double> c, char tmp, double& currWeight, string&
resStr, char start, char finish, int size);  //функция поиска минимального пути

int main() {
	setlocale(LC_ALL, "RUS");
	char start;		//начальная вершина
	char finish;		//конечная вершина
	double currWeight = 0;	//текущее расстояния
	string resStr = "";	//результирующая строка

	string a;		//вершины, из которых идут ребра
	string b;		//вершины, в которые идут ребра
	vector <double> c;	//веса ребер
	int size = 0;		//количество ребер
	char tmpa = NULL;
	char tmpb = NULL;
	double tmpc = 0;

	cin >> start >> finish;
	while (cin >> tmpa >> tmpb >> tmpc) {		//считывание
		a += tmpa;
		b += tmpb;
		c.push_back(tmpc);
		size++;
	}

	findMinWay(a, b, c, start, currWeight, resStr, start, finish, size);

	cout << "Ответ:" << endl;

	if (size == 1) cout << a[0] << endl;
	else cout << resStr << endl;
	return 0;
}

void findMinWay(string a, string b, vector <double> c, char tmp, double& currWeight, string&
resStr, char start, char finish, int size) {
	int next = 0;			//индекс вершины, в которую будет произведен переход
	vector <int> first;	//для хранения индексов, куда идти дальше

	int prev = 0;			//индекс предыдущей вершины
	while (true) {			//поиск минимального пути
		prev = next;
		int tempW = currWeight;

		if (tmp == finish) break;
		if (first.size() > 0) first.clear();

		for (int i = 0; i < size; i++) {
			if (a[i] == tmp) {
				first.push_back(i);
			}
		}

		cout << "Из вершины " << tmp << " можно попасть в следующие вершины: ";
```

```
		for (int i = 0; i < first.size(); i++) {
			cout << b[first[i]] << " ";
		}
		cout << endl;

		while (true) {			//поиск минимального пути из вершины tmp в
следующую
			int index = 0;
			if (first.size() > 1) {
				for (int i = 0; i < first.size() - 1; i++) {
					bool less = true;
					for (int j = i + 1; j < first.size(); j++) {
						if (c[first[i]] > c[first[j]]) {
							less = false;
							break;
						}
					}

					if (less) {
						index = i;
						next = first[i];
					}
				}
			}
			else if (first.size() == 1) {
				next = first[0];
			}
			else break;

			cout << "Наименьшим путем оказался путь в вершину " << b[next] << endl;

			if (resStr.find(b[next]) == -1) {
				tmp = b[next];
				if (currWeight == 0) {
					resStr += a[next];
					resStr += b[next];
				}
				else resStr += b[next];
				currWeight += c[next];
				cout << "Промежуточный минимальный путь: " << resStr << endl;
				break;
			}
			else {
				first.erase(first.begin() + index);
				cout << "Так как вершина " << b[next] << " уже была посещена, то
производится поиск другой вершины" << endl;
			}
		}

		if (tempW == currWeight) {		//если не был произведен переход
			a[prev] = NULL;
			b[prev] = NULL;
			resStr.erase(resStr.end() - 1);
			tmp = resStr[resStr.size() - 1];
			currWeight -= c[prev];
			c[prev] = 1000000;
			cout << "Некуда идти. Откат назад" << endl;
		}
		cout << "-----------------------------------------------------------" <<
endl;
	}
}
```