МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №3
по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»
Тема: Потоки в сети
Вариант 4

Студент гр. 8383 _____ Шишкин И.В.

Преподаватель _____ Фирсов М.А.

Санкт-Петербург
2020

Цель работы.

Изучить работу и реализовать алгоритм Форда-Фалкерсона для нахождения максимального потока в сети.

Постановка задачи.

Найти максимальный поток в сети, а также фактическую величину потока, протекающего через каждое ребро, используя алгоритм Форда-Фалкерсона. Сеть (ориентированный взвешенный граф) представляется в виде триплета из имён вершин и целого неотрицательного числа - пропускной способности (веса)

Входные данные:

N - количество ориентированных рёбер графа

v_0 - исток

v_n - сток

v_i v_j w_{ij} - ребро графа

v_i v_j w_{ij} - ребро графа

...

Выходные данные:

P_{max} - величина максимального потока

v_i v_j w_{ij} - ребро графа с фактической величиной протекающего потока

v_i v_j w_{ij} - ребро графа с фактической величиной протекающего потока

...

В ответе выходные рёбра отсортируйте в лексикографическом порядке по первой вершине, потом по второй (в ответе должны присутствовать все указанные входные рёбра, даже если поток в них равен 0).

Вар. 4. Поиск в глубину. Итеративная реализация.

Описание алгоритма.

1. Обнуляем все потоки. Остаточная сеть изначально совпадает с исходной сетью.

2. В остаточной сети находим любой путь из источника в сток. Если такого пути нет, останавливаемся.
3. Пускаем через найденный путь максимально возможный поток:

   3.1. На найденном пути в остаточной сети ищем ребро с минимальной пропускной способностью c_{min}.

   3.2. Для каждого ребра на найденном пути увеличиваем поток на c_{min}, а в противоположном ему - уменьшаем на c_{min}.

   3.3. Модифицируем остаточную сеть. Для всех рёбер на найденном пути, а также для противоположных им рёбер, вычисляем новую пропускную способность. Если она стала ненулевой, добавляем ребро к остаточной сети, а если обнулилась, стираем его.
4. Возвращаемся на шаг 2.

Чтобы найти кратчайший путь в графе, используется поиск в глубину:

1. Создается стек вершин O. Вначале O состоит из единственной вершины s.
2. Вершина s отмечается как посещенная, без родителя, а все остальные как не посещённые.
3. Пока стек не пуст, выполняются следующие шаги

   3.1. Удаляется вершина i в стеке

   3.2. Для всех дуг (i, j), исходящих из вершины i, для которых вершина j ещё не посещена, выполняются следующие шаги

      3.2.1. Вершина i отмечается как посещенная с родителем j

      3.2.2. Вершина v добавляется в стек

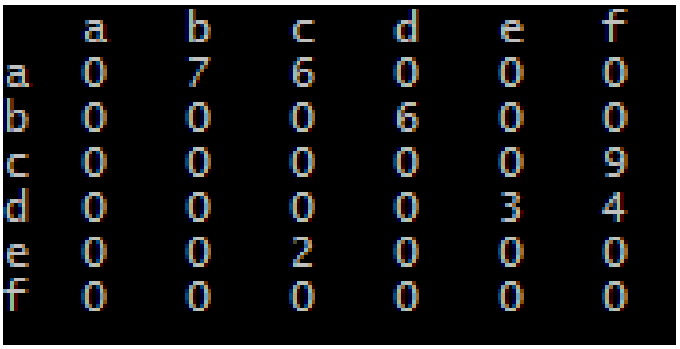
      3.2.3. Если j = t (текущая вершина - сток), то производится выход из всех циклов, т.к. путь был найден
4. Если стек пуст, то возвращается ответ, что пути нет.
5. Если стек не пуст, то производится проход от t к s, каждый раз переходя к родителю. Путь возвращается в обратном порядке.

Описание способов хранения частичных решений.

```
struct answer {
	char ansFrom;
	char ansTo;
	int ansW;
};
```

Структура для ответа на степике. ansFrom - вершина, из которой идет путь; ansTo - в которую идет; ansW - вес ребра.

`vector<vector<int> > graph` - двумерный вектор, в котором хранятся ребра. Например, если ввести пример из степика (7; a; f; a b 7; a c 6; b d 6; c f 9; d e 3; d f 4; e c 2), то эти ребра в графе будут выглядеть следующим образом:



	a	b	c	d	e	f
a	0	7	6	0	0	0
b	0	0	0	6	0	0
c	0	0	0	0	0	9
d	0	0	0	0	3	4
e	0	0	2	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0

Для вывода графа и нужна функция `void printGraph(vector<vector<int> > graph, int V, string nodeNames)`, которая на вход получается граф graph, количество узлов V и названия этих узлов nodeNames, хотя в программе эта функция и не используется.

`vector <answer> forStepik` - вектор ребер, который нужен для степика.

Описание функции cmpForStepik.

Функция `int bool cmpForStepik(answer a, answer b)` - компаратор для корректного вывода ребер на степике, т.к. стоит условие, что ребра должны быть отсортированы в лексикографическом порядке по первой вершине, потом по второй.

Описание функции fordFulkerson.

Функция `int fordFulkerson(vector<vector<int> >& graph, vector<vector<int> >& rGraph, int s, int t, int V, string nodeNames)` - на вход принимает граф graph, в котором хранятся ребра; rGraph - residual graph - граф смежности, s - исток, t - сток, V - количество узлов, nodeNames - названия узлов.

В начале функции rGraph принимает значения graph, при этом граф graph обнуляется, т.к. в дальнейшем он будет использован для вывода ответа. Работа в функции производится с rGraph.

Далее запускается цикл, который работает до тех пор, пока функция dfs находит путь от истока в сток в сети. Если путь найден, то он записывается в массив parent.

Затем просматриваются эти пути еще раз, и вычитаются из пропускной способности ребер пути значения минимальной пропускной способности и прибавляются эти значения ребрам, идущим между теми же вершинами, но в противоположную сторону.

Функция возвращает значение максимального потока в сети.

Описание функции dfs.

Функция `bool dfs(vector<vector<int> > rGraph, int s, int t, vector <int>& parent, int V, string nodeNames)` на вход принимает все то же самое, что и функция fordFulkerson, за исключением вектора parent, в который записывается путь от истока в сток. Эта итеративная функция ищет путь обходом в глубину в сети и записывает его в массив parent. Функция возвращает true, если путь найден, и false, если путь не был найден.

Сложность алгоритма по времени.

Сложность алгоритма по времени можно оценить как

$$O(VE^2).$$

Так как каждый путь находится поиском в глубину со сложностью $O(E)$, общее число итерация в цикле while алгоритма не превосходит $O(VE)$, следовательно, временную сложность алгоритма можно оценить как $O(VE^2)$.

Сложность алгоритма по памяти.

Сложность алгоритма по памяти можно оценить как

$$O(V^2).$$

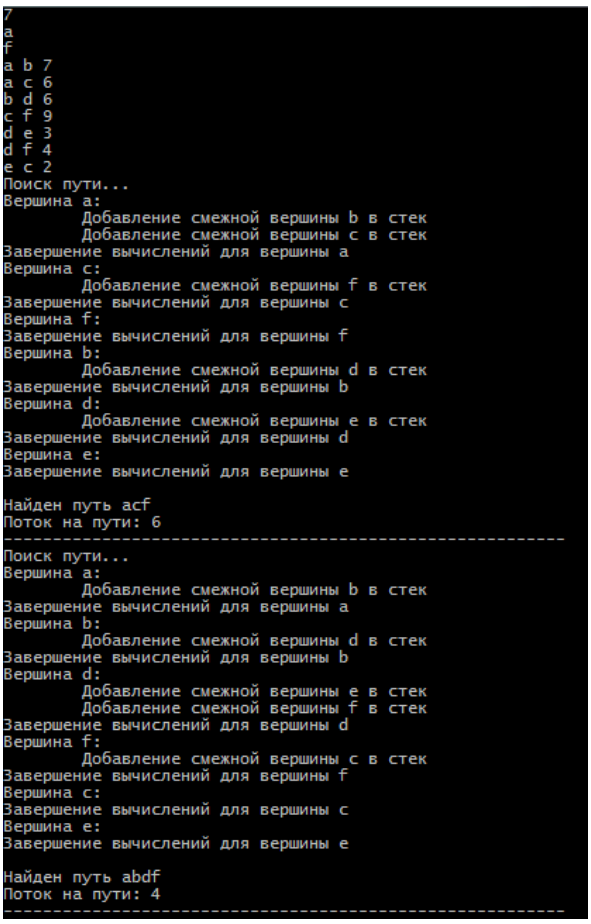
Такая оценка исходит из того, что программа хранит матрицу смежности графа.

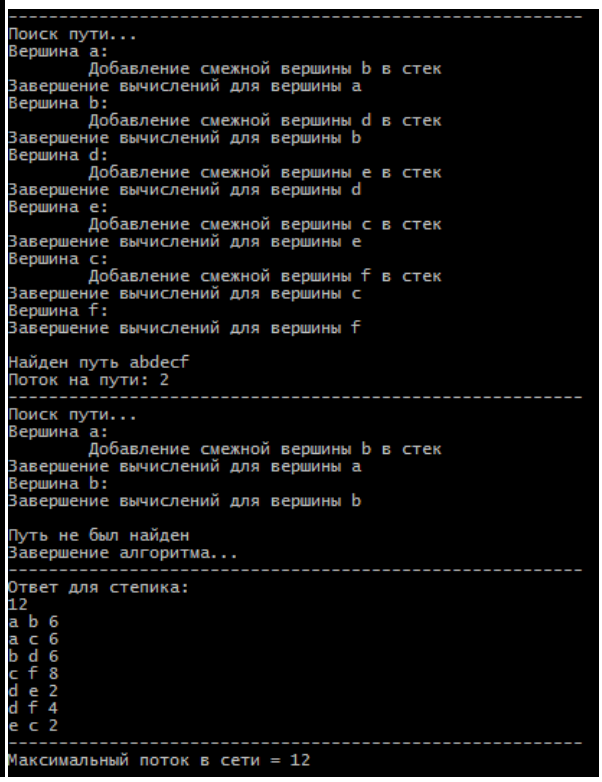
Спецификация программы.

Программа написана на языке C++. Программа на вход получает количество ориентированных ребер графа, исток и сток. Затем вводятся ребра графа и их веса. В конце программа печатает максимальный поток в сети.

Тестирование.

Пример вывода результата для 1-го теста (читать слева направо).





№	Input	Output
1	7 a f a b 7 a c 6 b d 6 c f 9 d e 3 d f 4 e c 2	12 a b 6 a c 6 b d 6 c f 8 d e 2 d f 4 e c 2
2	1 a a	Сток и исток не могут быть одной вершиной

3	6 a e a b 12 b c 5 a c 13 c d 14 c e 3 d e 15	17 a b 4 a c 13 b c 4 c d 14 c e 3 d e 14

Вывод.

В ходе выполнения лабораторной работы был реализован на языке C++ алгоритм Форда-Фалкерсона для нахождения максимального потока в сети.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КОД ПРОГРАММЫ

```
#include <iostream>
#include <limits.h>
#include <vector>
#include <stack>
#include <iomanip>
#include <algorithm>

using namespace std;

struct answer {
	char ansFrom;  //вершина, из которой выходит ребро
	char ansTo;    //вершина, в которую входит ребро
	int ansW;      //вес ребра
};

bool dfs(vector<vector<int> > rGraph, int s, int t, vector <int>& parent, int V, string
nodeNames);  //возвращает true, если существует путь от истока s к стоку t в графе rGraph,
также заполняет массив parent
int fordFulkerson(vector<vector<int> >& graph, vector<vector<int> >& rGraph, int s, int t,
int V, string nodeNames); //возвращает максимальный поток от истока s к стоку t
void printGraph(vector<vector<int> > graph, int V, string nodeNames);   //для печати графа
bool cmpForStepik(answer a, answer b);   //компаратор для сортировки вершин

int main() {
	setlocale(LC_ALL, "RUS");
	int N = 0;        //количество ориентированных рёбер графа
	char start;   //исток
	char finish;  //сток

	string nodeNames;  //названия узлов
	string from;
	string to;
	vector <int> w;

	cin >> N;
	cin >> start;
	cin >> finish;

	if (start == finish) {
		cout << "Сток и исток не могут быть одной вершиной" << endl;
		return 0;
	}

	char tmpFrom;
	char tmpTo;
	int tmpW;
	nodeNames += start;
	for (int i = 0; i < N; i++) {
		cin >> tmpFrom >> tmpTo >> tmpW;
		from += tmpFrom;
		to += tmpTo;
		w.push_back(tmpW);
		if (nodeNames.length() == 0) nodeNames += tmpTo;
		else if (nodeNames.find(tmpTo) == string::npos) nodeNames += tmpTo;
	}

	sort(nodeNames.begin(), nodeNames.end());

	int V = nodeNames.length();
```

```
	vector<vector<int> > graph(V, vector<int>(V, 0));
	string findInNodeNames;

	for (int k = 0; k < nodeNames.length(); k++) {
		vector <int> tmp;
		for (int j = 0; j < N; j++) {		//поиск всех ребер, ведущих из вершины nodeNames[k]
			if (from[j] == nodeNames[k]) {
				tmp.push_back(j);
			}
		}

		vector <int> nodeTmp;
		for (int i = 0; i < tmp.size(); i++) {	//поиск в строке nodeNames[k] вершины, в которую ведут ребра из вектора tmp
			for (int j = 0; j < nodeNames.length(); j++) {
				if (nodeNames[j] == to[tmp[i]])
					nodeTmp.push_back(j);
			}
		}

		for (int i = 0; i < tmp.size(); i++) {
			graph[k][nodeTmp[i]] = w[tmp[i]];
		}
	}

	int startIndex = 0;
	int finishIndex = 0;
	for (int i = 0; i < V; i++) {
		if (nodeNames[i] == start) startIndex = i;
		else if (nodeNames[i] == finish) finishIndex = i;
	}

	vector<vector<int> > rGraph(V, vector<int>(V, 0));
	int maxFlow = fordFulkerson(graph, rGraph, startIndex, finishIndex, V, nodeNames);

	vector <answer> forStepik;

	for (int i = 0; i < V; i++) {
		vector <int> indices;  //индексы
		for (int j = 0; j < N; j++) {
			if (nodeNames[i] == from[j]) indices.push_back(j);
		}

		for (int j = 0; j < indices.size(); j++) {
			answer ans;
			ans.ansFrom = from[indices[j]];
			ans.ansTo = to[indices[j]];

			int tmpF = 0;
			int tmpT = 0;
			for (int k = 0; k < V; k++) {
				if (nodeNames[k] == from[indices[j]]) tmpF = k;
				else if (nodeNames[k] == to[indices[j]]) tmpT = k;
			}

			if (graph[tmpT][tmpF] >= 0) ans.ansW = 0;
			else ans.ansW = abs(graph[tmpT][tmpF]);
			forStepik.push_back(ans);
		}
	}

	sort(forStepik.begin(), forStepik.end(), cmpForStepik);
```

```
	cout << "Ответ для степика:" << endl;
	cout << maxFlow << endl;
	for (int i = 0; i < forStepik.size(); i++) cout << forStepik[i].ansFrom << " " << forStepik[i].ansTo << " " << forStepik[i].ansW << endl;
	cout << "------------------------------------------------------" << endl;
	cout << "Максимальный поток в сети = " << maxFlow << endl;

	return 0;
}

bool dfs(vector<vector<int> > rGraph, int s, int t, vector <int>& parent, int V, string nodeNames) { //функция поиска пути в глубину
	vector <bool> visited(V, 0);	//вектор посещенных вершин (если 0, то не посещена)

	stack <int> st;	//создается стек, в который кладется исток, и начальная вершина помечается как посещенная
	st.push(s);
	visited[s] = true;
	parent[s] = -1;

	cout << "Поиск пути..." << endl;
	while (!st.empty()) {		//обработка, пока стек не пуст
		int i = st.top();	//обработка первой вершины
		st.pop();

		cout << "Вершина " << nodeNames[i] << ":" << endl;

		for (int j = 0; j < V; j++) {	//если смежная вершина не обработана и имеет ребро с обрабатываемой вершиной
			if (visited[j] == false && rGraph[i][j] > 0) {
				st.push(j);
				parent[j] = i;
				visited[j] = true;
				cout << "\tДобавление смежной вершины " << nodeNames[j] << " в стек" << endl;
			}
		}

		cout << "Завершение вычислений для вершины " << nodeNames[i] << endl;
	}

	cout << endl;
	if (visited[t] == true) {
		cout << "Найден путь ";

		string str;
		for (int i = t; i != s; i = parent[i])
			str += nodeNames[i];

		str += nodeNames[s];

		for (int i = str.length() - 1; i >= 0; i--)
			cout << str[i];

		cout << endl;
	}
	else cout << "Путь не был найден" << endl;

	return (visited[t] == true);	//если был достигнут сток, то возвращается true, иначе - false
}

int fordFulkerson(vector<vector<int> >& graph, vector<vector<int> >& rGraph, int s, int t, int V, string nodeNames) {
```

```
	int u, v;

	for (u = 0; u < V; u++)
		for (v = 0; v < V; v++) {
			rGraph[u][v] = graph[u][v];
			graph[u][v] = 0;
		}

	vector <int> parent(V, 0);  //этот массив заполняется функцией BFS и создан для хранения пути

	int max_flow = 0;  //изначально поток = 0

	while (dfs(rGraph, s, t, parent, V, nodeNames)) {  //увеличивается поток, пока есть путь от истока к стоку

		int path_flow = INT_MAX;
		for (v = t; v != s; v = parent[v]) {
			u = parent[v];
			path_flow = min(path_flow, rGraph[u][v]);
		}

		cout << "Поток на пути: " << path_flow << endl;
		cout << "------------------------------------------------------------" << endl;

		for (v = t; v != s; v = parent[v]) {		//обновление пропускной способности каждого ребра
			u = parent[v];
			rGraph[u][v] -= path_flow;
			rGraph[v][u] += path_flow;

			graph[u][v] += path_flow;
			graph[v][u] -= path_flow;
		}

		max_flow += path_flow;

	}

	cout << "Завершение алгоритма..." << endl;
	cout << "------------------------------------------------------------" << endl;
	return max_flow;
}

void printGraph(vector<vector<int> > graph, int V, string nodeNames) {
	cout << " ";
	for (int i = 0; i < V; i++) {
		cout << setw(3) << nodeNames[i] << " ";
	}
	cout << endl;
	for (int i = 0; i < V; i++) {
		cout << nodeNames[i];
		for (int j = 0; j < V; j++) cout << setw(3) << graph[i][j] << " ";
		cout << endl;
	}
	cout << endl;
}

bool cmpForStepik(answer a, answer b) {
	if (a.ansFrom < b.ansFrom) return true;
	else if (a.ansFrom == b.ansFrom) {
		if (a.ansTo < b.ansTo) return true;
	}
```

```
        return false;
}
```