Введение

Некоторые типовые математические задачи, например, решение равнений или систем уравнений, дифференцирование, интегрирование и др. затруднительно решить аналитическими (точными) способами, иногда это просто невозможно.

Примеры.

1) $x^2 + 3x + 1 = 0$;

Д = 5; $x_1 = ½ * (-3 - \sqrt{5})$; $x_2 = ½ * (-3 + \sqrt{5})$.

Корень не извлекается «точно», для получения приближенного значения x_1 и x_2 потребуется численная процедура приближенного вычисления корня.

2) cos x = x.

Нам доступен пока лишь графический метод решения этого уравнения, но полученное с его помощью решение будет приближенным (и очень неточным). Хотелось бы иметь процедуру «уточнения» корня, позволяющую найти его с меньшей погрешностью.

3) $\int_0^1 (\cos x / x)dx$.

Интеграл, не берущийся известными нам методами, хотелось бы вычислить его значение приближенно.

Раздел математики «Численные методы» изучает приближенные методы решения типовых математических задач. Этот раздел называется также «вычислительной математикой».

Для приближенного решения математических задач в данном разделе:

– предлагаются алгоритмы решения, имеющие конечное число шагов;

– дается математическое обоснование правомерности применения алгоритма (т. е. изучаются вопросы сходимости алгоритмов).

– определяются границы применимости алгоритмов;

– предлагаются формулы для нахождения погрешностей приближенного решения.

В силу своей «алгоритмичности» раздел «Численные методы» позволяет осуществить программную реализацию приближенного решения ряда математических задач.

Тема 1. Погрешности

Теория

Раздел «Численные методы» занимается **приближенным** решением задач. При этом нас будет интересовать погрешность решения.

Откуда возникают погрешности?

1.Погрешность модели.

«Модель – это идеализированное описание явления, в котором выявлены основные и игнорируются второстепенные свойства явления» [1,с.9].

Например, в физике, изучая движение тележки по наклонной поверхности, договариваются учитывать только силу тяжести, пренебрегая силой трения, силой сопротивления воздуха и т. п. В результате теоретические расчеты будут несколько отличаться от реальных результатов.

Т. е. моделирование из-за огрубления и упрощения стало источником погрешности.

2. Погрешности исходных данных.

Для решения задачи о движении тележки по наклонной плоскости нужны исходные данные, которые получают экспериментально, измеряя массу тележки, высоту спуска, длину наклонной плоскости. Но измерения этих величин сопровождается ошибками измерений, которые затем отразятся на результате вычислений и приведут к погрешности результата.

Аналогично, любые результаты экспериментов, измерений получают лишь приближенно. Если на их основе производить последующие расчеты, то результат окажется неточным.

Замечание: Погрешности вида 1) и 2) называют **неустранимыми**. Они не зависят от математики и программной реализации алгоритма.

3.Погрешность метода.

После создания математической модели нужно произвести некоторые расчеты на ее основе. При этом для расчетов сложную математическую задачу пытаются заменить более простой, дающей результат, близкий к искомому (например, кривую заменяют касательной, фигуру сложной формы для нахождения площади заменяют суммой прямоугольников и т.д.). При этом возникает погрешность метода вычислений.

4.Погрешность округления.

В процессе вычислений приходится работать с конечным числом цифр, поэтому промежуточные результаты и ответ округляют. Появляется погрешность округления (она может накапливаться в процессе вычислений, что плохо влияет на результат).

Замечание. Разные виды погрешностей – составные части **полной погрешности,** которая всегда больше каждой из этих составных частей.

Виды погрешностей

Пусть x точное значение искомой величины (которое мы никогда не узнаем), a – приближенное значение искомой величины:

$$x \approx a. \tag{1}$$

Абсолютной погрешностью приближенного равенства $x \approx a$ называют число

$$\Delta_a = |x - a|. \tag{2}$$

Но x неизвестно, поэтому величину (2) мы вычислить не сможем. Поэтому используют не величину (2), а некоторую ее «оценку сверху» Δ_a^*, называемую **предельной абсолютной погрешностью**

$$|\, x - a \,| \le \Delta_a^* . \qquad (3)$$

Неравенство (3) перепишем в виде

$$a - \Delta_a^* \le x \le a + \Delta_a^* ,$$

Это означает, что неизвестная величина x лежит **где-то** на отрезке $[a - \Delta_a^*; a + \Delta_a^*]$. Что записывают еще так:

$$x = a \pm \Delta_a^* . \qquad (4)$$

Чем меньше Δ_a^*, тем точнее найдено x.

Хотелось бы знать, какую долю составляет абсолютная погрешность $\Delta_a = |\, x - a \,|$ от величины $|a|$.

Относительной погрешностью (соответственно, **предельной относительной погрешностью**) называют:

$$\delta_a = \frac{|x-a|}{|a|} \; ; \qquad \delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|} \qquad (5)$$

Замечание: Абсолютная погрешность вычисляется в тех же единицах измерения, что и x (в кг, м, руб, …), а относительная погрешность величина безразмерная. Умножив число (5) на 100%, получим относительную погрешность в процентах.

«Если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает единицы последнего (самого правого) разряда его десятичной записи, то цифры числа называют **верными** (или точными)» [1, с.12].

Пример.

1) 4,726 ±0,001 4; 7; 2; 6 - верные цифры.

2) 4,726 ±0,1 4; 7 - верные цифры, 2, 6 – называют сомнительными цифрами. Верная запись: 4,7 ± 0,1.

Значащими цифрами приближенного числа называют все цифры десятичной записи, кроме нулей, находящихся левее первой отличной от нуля цифры [1, с.13].

Пример. Числа 0,00**1307**; **6,0400;** 0,0**5320014000** имеет соответственно четыре, пять и десять значащих цифр. При этом нули, находящиеся слева, значащими не являются, а нули, записанные в конце десятичной дроби, являются значащими цифрами.

Литература

1) Зенков А. В. Численные методы : учебное пособие для СПО/ А.В.Зенков.- М.: Из-во Юрайт, 2017. – 122 с.

Задачи

Правило	Задачи
Если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает единицы последнего (самого правого) разряда его десятичной записи, то цифры числа называют **верными** (или точными). Обратно: Если приближенная запись числа содержит только верные цифры, то его предельная абсолютная погрешность не превышает единицы последнего (самого правого) разряда в десятичной записи числа.	1) Результаты некоторых вычислений записаны приближенно. Все цифры в записи верные. Найдите предельные абсолютные погрешности, с которыми записаны числа. Какое из чисел наиболее точно отражает результат? а) $a = 2{,}5$; $\Delta^*_a = 0{,}1$; $в = 2{,}5310$; $\Delta^*_в = 0{,}0001$; $c = 2{,}53107$; $\Delta^*_c = 0{,}00001$. б) $a = 13$; $\Delta^*_a = 1$; $в = 13{,}0$; $\Delta^*_в = 0{,}1$; $c = 13{,}000$, $\Delta^*_c = 0{,}001$.
	2) Рассмотрим несколько записей одного и того же числа. Найдите предельную абсолютную погрешность каждой записи. Какое из чисел (*а, в, с, д или к*) с точки зрения вычислительной математики известно точнее (т.е. с меньшей предельной абсолютной погрешностью?) $a = 27\,000$; $\Delta^*_a = 1$; т.е. $a = 27\,000 \pm 1$; $в = 2{,}7 \cdot 10^4$; $\Delta^*_в = 0{,}1 \cdot 10^4 = 1000$; $c = 2{,}700 \cdot 10^4$; $\Delta^*_c = 0{,}001 \cdot 10^4 = 10$; $d = 27{,}0 \cdot 10^3$; $\Delta^*_d = 0{,}1 \cdot 10^3 = 100$. $k = 2{,}7000 \cdot 10^4$; $\Delta^*_k = 0{,}0001 \cdot 10^4 = 1$. Ответ: Точнее (с меньшей предельной абсолютной погрешностью) записаны числа *a* и *k*.
Правило округления числа, т.е. его замена числом с меньшим количеством значащих цифр. **А.** Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то сохраняемые десятичные знаки остаются без изменения. **Б.** Если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последний из сохраняемых	3)а) Округлить $x = 42{,}18352500$ с одним знаком после запятой: Б $\Rightarrow$ $x \approx$; с двумя знаками после запятой: А $\Rightarrow$ $x \approx$; с тремя знаками после запятой: В $\Rightarrow$ $x \approx$; с пятью знаками после запятой:

знаков увеличивается на 1. **В.** Если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а среди следующих за ней цифр есть отличные от нуля, то последний из сохраняемых знаков увеличивают на 1. **Г.** Если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а все последующие - нули, то последний из сохраняемых десятичных знаков: – увеличивают на единицу, когда он нечетен, – сохраняют неизменными, когда он четен (правило четной цифры).	Г $\Rightarrow$ x $\approx$ б) x = 6,135750 округлить с одним, с двумя, с тремя, с четырьмя знаками после запятой.
Правило сложения и вычитания приближенных чисел. – Выбрать число (или числа), в десятичной записи которого наименьшее число **верных** десятичных знаков; – округлить остальные числа так, чтобы каждое из них содержало на один (запасной) знак больше, чем выбранное число; – выполнить сложение и вычитание с учетом сохраненных знаков; – полученный результат округлить до предпоследнего знака.	4) Найти сумму приближенных чисел, все цифры которых верные. а) 414,8 + 0,025 + 24,17 + 0,000326. Наименее точное слагаемое 414,8 (в нем 1 верный знак после запятой). Округлим остальные слагаемые с двумя знаками после запятой. 414,8 + 0,02 + 24,17 + 0,00 = =438,99 Округлим с одним знаком после запятой. Получим 439,0. б) 3,51 + 2,3879 +1,0002 Отв. 6,90
Правило умножения и деления приближенных чисел. – Из всех чисел, которые предстоит умножить и делить, выделить то, в котором меньше всего верных **значащих** цифр; – округлить остальные числа так, чтобы каждое из них содержало на одну (запасную) **значащую цифру** больше, чем выделенное число; – выполнить умножение и деление округленных чисел с учетом сохраненных значащих цифр; –оставить в ответе столько значащих цифр, сколько их в наименее точном.	5)Перемножить приближенные числа, все цифры которых верные: 0,12 $\times$ 0,00531264. Первый множитель имеет 2 значащие цифры, второй – шесть. Второе число округлим с тремя значащими цифрами. 0,12 $\times$0,00531. Перемножим: 0,0006372. Округлим с 2 значащими цифрами: 0, 00064.

Задание

Зенков А. В. Численные методы : учебное пособие для СПО/ А.В.Зенков.- М.: Из-во Юрайт, 2017. – 122 с.

1)**Законспектировать,** что называют:

а) абсолютной погрешностью (с.11) , предельной абсолютной погрешностью (с.11),
б) относительной погрешностью, предельной относительной погрешностью (с.11);
в) верными цифрами приближенного числа, сомнительными цифрами (с.11);
г) значащими цифрами числа (с.13);
д) правило округления чисел (с.13);
е) правило сложения и вычитания приближенных чисел (с.13);
ж) правило умножения и деления приближенных чисел (с.15);
з) теорему 1.1 и теорему 1.2 (с. 13,14)

2) Пройти тест 1 .

3) Выполнить практическое задание (свой вариант):

стр. 15 – 17 в книге Зенкова А.В., пример решения нулевого варианта см. стр. 16-17.