

# Лекция 8: Базис векторного пространства

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,  
Институт математики и компьютерных наук,  
кафедра алгебры и дискретной математики

В курсе аналитической геометрии важную роль играли понятия базиса и координат вектора на плоскости и в обычном трехмерном пространстве. В данной лекции эти понятия будут расширены на произвольные векторные пространства, доказаны некоторые свойства базисов и введено понятие размерности пространства. В конце лекции будет введено понятие изоморфизма векторных пространств и доказана теорема об изоморфизме, объясняющая упоминавшуюся в предыдущей лекции особую роль пространства  $\mathbb{R}_n$  в линейной алгебре.

## Определение

*Базисом* векторного пространства называется упорядоченная максимальная линейно независимая система векторов из этого пространства.

- Слово «упорядоченная» в определении базиса означает, что если две максимальных линейно независимых системы векторов состоят из одних и тех же векторов, записанных в разном порядке, то они являются *различными* базисами.
- Слова «максимальная линейно независимая система векторов» в определении базиса означают, что базис — это линейно независимая система векторов, которая при добавлении к ней любого вектора становится линейно зависимой.

## Определение

Система векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  из векторного пространства  $V$  называется *системой образующих* этого пространства, если любой вектор из  $V$  линейно выражается через векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ .

## Лемма 1

*Упорядоченная система векторов является базисом векторного пространства  $V$  тогда и только тогда, когда она является линейно независимой системой образующих этого пространства.*

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  — базис пространства  $V$ , и  $\mathbf{b} \in V$ . По определению базиса система  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  линейно независима, а система  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$  линейно зависима. В силу леммы 6 из лекции 7 вектор  $\mathbf{b}$  линейно выражается через векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ . Следовательно,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  — система образующих.

**Достаточность.** Пусть  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  — линейно независимая система образующих пространства  $V$  и  $\mathbf{b} \in V$ . По определению системы образующих,  $\mathbf{b}$  линейно выражается через векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ . В силу леммы 7 из лекции 7 система векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$  линейно зависима. Таким образом,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  — максимальная линейно независимая система.

Следующее наблюдение показывает, что в случаях плоскости и обычного трехмерного пространства введенное в данной лекции понятие базиса совпадает с теми понятиями базиса, которые были введены в этих случаях в курсе аналитической геометрии.

## Замечание 1

- а) Базисом плоскости (в смысле данного выше определения) является произвольная упорядоченная пара неколлинеарных векторов, лежащих в этой плоскости.*
- б) Базисом обычного трехмерного пространства (в смысле данного выше определения) является произвольная упорядоченная тройка некомпланарных векторов этого пространства.*

**Доказательство.** а) Пара неколлинеарных векторов плоскости линейно независима в силу замечания 1а) из лекции 7 и является системой образующих плоскости в силу теоремы о разложении вектора по базису на плоскости из аналитической геометрии. Остается сослаться на лемму 1.

б) Тройка некомпланарных векторов трехмерного пространства линейно независима в силу замечания 1б) из лекции 7 и является системой образующих пространства в силу теоремы о разложении вектора по базису в пространстве из аналитической геометрии. Остается вновь сослаться на лемму 1.

Приведем очень важный для дальнейшего пример базиса в пространстве  $\mathbb{R}_n$ . В лекции 7 были введены в рассмотрение векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  из этого пространства.

### Замечание 2

*Векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  образуют базис пространства  $\mathbb{R}_n$ .*

**Доказательство.** В силу замечаний 2 и 3 из лекции 7 векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  являются линейно независимой системой образующих пространства  $\mathbb{R}_n$ . Остается сослаться на лемму 1. □

### Определение

Система векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  называется *стандартным базисом* пространства  $\mathbb{R}_n$ .

- Как мы увидим в лекции 18, стандартный базис играет в линейной алгебре такую же роль, какую в аналитической геометрии играл ортонормированный базис плоскости или (трехмерного) пространства.

# Базисы в других векторных пространствах (1)

Обсудим вкратце вопрос о базисах в других векторных пространствах, упоминавшихся в лекции 7.

**Пространство матриц.** Пусть  $m$  и  $n$  — произвольные натуральные числа,  $1 \leq i \leq m$  и  $1 \leq j \leq n$ . Обозначим через  $E_{ij}$  матрицу размера  $m \times n$ , в которой в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце стоит 1, а все остальные элементы равны 0. Такие матрицы называются *матричными единицами*. Ясно, что если  $A = (a_{ij})$ , то  $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$ . Отсюда легко выводится, что

совокупность всех матричных единиц  $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  образует базис пространства  $\mathbf{Mat}_{m,n}$ .

**Пространство многочленов и пространство функций.** Легко проверить, что в качестве базиса пространства  $\mathbf{Pol}_n$  можно взять многочлены  $1, x, x^2, \dots, x^n$ . А вот пространство  $\mathbf{Pol}$ , равно как и пространство функций, базиса не имеют. Убедимся в этом для пространства многочленов.

Предположим, что многочлены  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$  образуют базис пространства многочленов и обозначим через  $k$  максимум из степеней этих многочленов. Очевидно, что степень любой линейной комбинации многочленов  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$  не превосходит  $k$ , и потому многочлен  $x^{k+1}$  не выражается линейно через  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ . В силу леммы 1 это означает, что многочлены  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$  не образуют базиса.

**Пространство решений однородной системы линейных уравнений.** Вопросу о том, как построить базис этого пространства будет целиком посвящена лекция 13. Здесь мы ограничимся только упоминанием о том, что если однородная система имеет бесконечно много решений, то базис пространства ее решений существует, а если она имеет единственное решение — то не существует.

**Нулевое пространство.** Из следующего наблюдения вытекает, что это пространство базиса не имеет.

### Замечание 3

*Нулевой вектор векторного пространства не может входить ни в какой его базис.*

**Доказательство.** В силу леммы 1 из лекции 7 любая система векторов, в которую входит нулевой вектор, линейно зависима и потому не является базисом. □



## Определение

Ненулевое векторное пространство называется *конечномерным*, если в нем существует базис. Нулевое пространство также по определению считается конечномерным.

Как мы видели выше, существуют ненулевые векторные пространства, не имеющие базиса (например, пространство многочленов или пространство функций). В действительности, в таких пространствах тоже можно ввести понятие базиса, Мы не будем давать соответствующего определения, поскольку далее оно нам не пригодится. Отметим только, что все базисы таких пространств состоят из бесконечного числа векторов.

- Пространства, базисы которых бесконечны, называются *бесконечномерными*. Изучение бесконечномерных пространств выходит за рамки линейной алгебры, им посвящен другой раздел математики, называемый функциональным анализом.

**!!** На протяжении всего последующего курса мы будем рассматривать только конечномерные пространства. Слова «векторное пространство» всюду далее означают «конечномерное векторное пространство».

Следующее утверждение является точным аналогом теорем о разложении вектора по базису на плоскости и в трехмерном пространстве, доказывавшихся в курсе аналитической геометрии.

## Теорема 1 (о разложении вектора по базису)

Пусть  $V$  — ненулевое векторное пространство,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  — базис этого пространства и  $\mathbf{x} \in V$ . Тогда существуют, и притом единственные, числа  $t_1, t_2, \dots, t_n$  такие, что

$$\mathbf{x} = t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_n \mathbf{a}_n. \quad (1)$$

**Доказательство.** Существование коэффициентов  $t_1, t_2, \dots, t_n$  с требуемым свойством вытекает из леммы 1. Осталось доказать единственность. Предположим, что наравне с равенством (1) выполнено равенство  $\mathbf{x} = s_1 \mathbf{a}_1 + s_2 \mathbf{a}_2 + \dots + s_n \mathbf{a}_n$  для некоторых чисел  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Вычтем последнее равенство из (1). Получим

$$(t_1 - s_1) \mathbf{a}_1 + (t_2 - s_2) \mathbf{a}_2 + \dots + (t_n - s_n) \mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Поскольку векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  линейно независимы, получаем, что  $t_i - s_i = 0$ , т.е.  $t_i = s_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ . □

## Определение

Равенство (1) называется *разложением вектора  $x$  по базису  $a_1, a_2, \dots, a_n$* . Числа  $t_1, t_2, \dots, t_n$  называются *координатами вектора  $x$  в базисе  $a_1, a_2, \dots, a_n$* . Тот факт, что вектор  $x$  имеет в некотором базисе координаты  $t_1, t_2, \dots, t_n$  записывается так:  $x = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

Из замечания 3 в лекции 7 вытекает

## Замечание 4

*Компоненты любого вектора из пространства  $\mathbb{R}_n$  являются координатами этого вектора в стандартном базисе.* □

## Замечание 5

*Пусть  $V$  — векторное пространство,  $x, y \in V$ , а  $t$  — произвольное число. Если в некотором базисе вектор  $x$  имеет координаты  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а вектор  $y$  — координаты  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , то вектор  $x + y$  имеет в том же базисе координаты  $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ , а вектор  $tx$  — координаты  $(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$ .*

Доказательство этого несложного факта дано на следующем слайде.

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  — базис, в котором даны координаты векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . Тогда

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n.$$

Складывая эти два равенства, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n) + (y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n) = \\ &= (x_1 + y_1)\mathbf{a}_1 + (x_2 + y_2)\mathbf{a}_2 + \dots + (x_n + y_n)\mathbf{a}_n, \end{aligned}$$

а умножая первое из них на число  $t$  — что

$$t\mathbf{x} = t(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n) = tx_1\mathbf{a}_1 + tx_2\mathbf{a}_2 + \dots + tx_n\mathbf{a}_n.$$

Остается вспомнить определение координат вектора. □



### Алгоритм нахождения координат вектора

Чтобы найти координаты вектора из пространства  $\mathbb{R}_n$  в каком-либо базисе этого пространства, надо составить расширенную матрицу системы линейных уравнений, записав в основную часть матрицы по столбцам базисные векторы, а в последний столбец — тот вектор, координаты которого надо найти. После этого надо элементарными преобразованиями расширенной матрицы привести ее основную часть к единичному виду. В этот момент в последнем столбце полученной матрицы будут записаны искомые координаты.

Наша ближайшая цель — доказать, что любые два базиса векторного пространства состоят из одного и того же числа векторов. Как мы увидим, этот факт легко вытекает из следующего вспомогательного утверждения.

## Лемма 2

Если векторное пространство содержит базис из  $n$  векторов, то любой набор из более чем  $n$  векторов из этого пространства линейно зависим.

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$  — базис векторного пространства  $V$ ,  $k > n$  и  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ . Разложим векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  по базису  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ :

[illegible]

Пусть  $t_1, t_2, \dots, t_k$  — произвольные числа такие, что

$$t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + t_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Умножим первое равенство из набора равенств (2) на  $t_1$ , второе — на  $t_2$ , ..., последнее — на  $t_k$  и сложим полученные равенства.

Получим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0} &= t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + t_k \mathbf{a}_k = \\
 &= t_1 (a_{11} \mathbf{b}_1 + a_{12} \mathbf{b}_2 + \cdots + a_{1n} \mathbf{b}_n) + \\
 &+ t_2 (a_{21} \mathbf{b}_1 + a_{22} \mathbf{b}_2 + \cdots + a_{2n} \mathbf{b}_n) + \\
 &\cdots \cdots \cdots \\
 &+ t_k (a_{k1} \mathbf{b}_1 + a_{k2} \mathbf{b}_2 + \cdots + a_{kn} \mathbf{b}_n) = \\
 &= (t_1 a_{11} + t_2 a_{21} + \cdots + t_k a_{k1}) \mathbf{b}_1 + \\
 &+ (t_1 a_{12} + t_2 a_{22} + \cdots + t_k a_{k2}) \mathbf{b}_2 + \\
 &\cdots \cdots \cdots \\
 &+ (t_1 a_{1n} + t_2 a_{2n} + \cdots + t_k a_{kn}) \mathbf{b}_n.
 \end{aligned}$$

Поскольку векторы  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$  линейно независимы, отсюда вытекает, что

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \cdots + a_{k1}t_k = 0, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{k2}t_k = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \cdots + a_{kn}t_k = 0. \end{cases} \quad (3)$$



Будем смотреть на равенства (3) как на однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных  $t_1, t_2, \dots, t_k$ . Число уравнений в этой системе меньше, чем число неизвестных, так как  $k > n$ . В силу замечания 3 из лекции 4 система (3) имеет ненулевое решение. Это означает, что можно найти числа  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , по крайней мере одно из которых не равно нулю, такие, что  $t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ . Но это противоречит тому, что система  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  линейно независима.  $\square$

Теперь мы можем легко доказать анонсированное выше утверждение.

### Теорема 2

*Любые два базиса векторного пространства состоят из одного и того же числа векторов.*

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  и  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$  — базисы одного и того же векторного пространства. Поскольку обе эти системы векторов линейно независимы, из леммы 2 вытекает, что ни случай  $k < n$ , ни случай  $n < k$  невозможны. Следовательно,  $k = n$ .  $\square$

Пусть в пространстве  $\mathbb{R}_n$  заданы два базиса: базис  $F$ , состоящий из векторов  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ , и базис  $G$ , состоящий из векторов  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ . Пусть  $\mathbf{x}$  — произвольный вектор из  $\mathbb{R}_n$ . Рассмотрим вопрос о том, как связаны между собой координаты вектора  $\mathbf{x}$  в базисах  $F$  и  $G$ .

Обозначим координаты вектора  $\mathbf{x}$  в базисе  $F$  через  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а его координаты в базисе  $G$  — через  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ . Будем считать, что координаты  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  известны и требуется найти координаты  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ . По этой причине базис  $F$  будем называть *старым*, а базис  $G$  — *новым*. Для всякого  $j = 1, 2, \dots, n$  обозначим координаты вектора  $\mathbf{g}_j$  в базисе  $F$  через  $(t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{nj})$ . Матрица  $(t_{ij})$  (где  $1 \leq i, j \leq n$ ) называется *матрицей перехода от базиса  $F$  к базису  $G$*  и обозначается через  $T_{FG}$ . Иными словами,

- матрица перехода от старого базиса к новому — это матрица, в которой по столбцам стоят координаты векторов нового базиса в старом базисе.

Отметим, что в случае  $n = 2, 3$  матрица перехода от одного базиса к другому уже возникала в курсе аналитической геометрии.

# Нахождение матрицы перехода от одного базиса к другому (1)

Чтобы найти матрицу  $T_{FG}$ , надо найти координаты каждого из векторов  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$  в базисе  $F$ . Для этого можно воспользоваться изложенным выше в данной лекции алгоритмом нахождения координат вектора в базисе. В соответствии с этим алгоритмом, чтобы найти координаты вектора  $\mathbf{g}_j$  в базисе  $F$  (где  $1 \leq j \leq n$ ), надо решить методом Гаусса–Жордана крамеровскую систему линейных уравнений, у которой в основной матрице по столбцам записаны координаты векторов  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ , а в последнем столбце — вектор  $\mathbf{g}_j$ . Иными словами, надо решить  $n$  систем линейных уравнений, которые имеют одну и ту же основную матрицу и отличаются только столбцом свободных членов. Ясно, что при решении всех этих систем почти все преобразования будут одинаковыми, по разному будет меняться лишь последний столбец. Для того, чтобы сэкономить время, можно решать все эти системы одновременно в соответствии с алгоритмом, который сформулирован на следующем слайде.

# Нахождение матрицы перехода от одного базиса к другому (2)

## Алгоритм нахождения матрицы перехода от одного базиса к другому

Чтобы найти матрицу перехода от базиса  $F$  пространства  $\mathbb{R}_n$  к базису  $G$  того же пространства, надо составить матрицу размера  $n \times 2n$ , записав в ее левую часть (первые  $n$  столбцов) векторы  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ , а в ее правую часть (последние  $n$  столбцов) векторы  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ . После этого надо элементарными преобразованиями всей матрицы привести ее левую часть к единичному виду. В этот момент в правой части по столбцам будут записаны координаты векторов  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$  в базисе  $F$ , т.е. матрица  $T_{FG}$ .

Существует, однако, один частный случай, когда матрицу перехода от одного базиса к другому можно выписать сразу, без всяких вычислений. Мы имеем в виду случай, когда в качестве старого базиса выступает стандартный базис пространства  $\mathbb{R}_n$ . Сравнивая определение матрицы перехода от одного базиса к другому с замечанием 4, мы получаем

## Замечание 6

*Матрицей перехода от стандартного базиса к произвольному базису  $F$  пространства  $\mathbb{R}_n$  является матрица, в которой по столбцам записаны векторы базиса  $F$ .*



Итак, матрицу  $T_{FG}$  можно считать известной. Вычислим двумя способами вектор  $\mathbf{x}$ . С одной стороны,  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{f}_1 + x_2 \mathbf{f}_2 + \cdots + x_n \mathbf{f}_n$ . С другой,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x'_1 \mathbf{g}_1 + x'_2 \mathbf{g}_2 + \cdots + x'_n \mathbf{g}_n = \\ &= x'_1 (t_{11} \mathbf{f}_1 + t_{21} \mathbf{f}_2 + \cdots + t_{n1} \mathbf{f}_n) + \\ &+ x'_2 (t_{12} \mathbf{f}_1 + t_{22} \mathbf{f}_2 + \cdots + t_{n2} \mathbf{f}_n) + \\ &\cdots \\ &+ x'_n (t_{1n} \mathbf{f}_1 + t_{2n} \mathbf{f}_2 + \cdots + t_{nn} \mathbf{f}_n) = \\ &= (t_{11} x'_1 + t_{12} x'_2 + \cdots + t_{1n} x'_n) \mathbf{f}_1 + \\ &+ (t_{21} x'_1 + t_{22} x'_2 + \cdots + t_{2n} x'_n) \mathbf{f}_2 + \\ &\cdots \\ &+ (t_{n1} x'_1 + t_{n2} x'_2 + \cdots + t_{nn} x'_n) \mathbf{f}_n. \end{aligned}$$

В силу теоремы 1 имеем

[illegible]

Равенства (4) называются *формулами изменения координат вектора при замене базиса* или *формулами перехода от одного базиса к другому*. Более компактный способ записи этих формул (на языке матриц) будет указан в лекции 10. Отметим, что при  $n = 2, 3$  формулы (4) уже возникали в курсе аналитической геометрии.

Формулы перехода от одного базиса к другому выражают координаты вектора  $x$  в старом базисе через его координаты в новом базисе. Но они позволяют решить и исходную задачу: найти координаты вектора в новом базисе, зная его координаты в старом базисе. Для это надо посмотреть на равенства (4) как на систему линейных уравнений с неизвестными  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  (напомним, что числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  мы считаем известными, а о том, как найти коэффициенты  $t_{ij}$ , т. е. элементы матрицы перехода, было сказано выше). Основная матрица этой системы есть матрица перехода  $T_{FG}$ . Можно проверить, что определитель этой матрицы всегда отличен от нуля (см. лекцию 12). По теореме Крамера (см. лекцию 6) система (4) имеет единственное решение. Найдя его, мы найдем координаты вектора  $x$  в новом базисе.

# Изменение координат вектора при замене базиса: решение задачи без использования формул перехода от одного базиса к другому

Заметим, что равенства (4) важны с точки зрения теории, они используются в доказательстве ряда утверждений, но при решении конкретных задач координаты вектора  $x$  в новом базисе проще найти без использования этих формул. В самом деле, раз мы знаем координаты этого вектора в старом базисе, мы можем подсчитать, чему равен вектор  $x$  по формуле  $x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n$ . После этого можно найти координаты найденного вектора в новом базисе, действуя по описанному выше алгоритму.

Теорема 2 делает корректным следующее

## Определение

Число векторов в базисе ненулевого векторного пространства называется *размерностью* этого пространства. Размерность нулевого пространства по определению равна 0. Размерность векторного пространства  $V$  обозначается через  $\dim V$ . Если  $\dim V = n$ , то пространство  $V$  называется  *$n$ -мерным*.

Поскольку стандартный базис пространства  $\mathbb{R}_n$  состоит из  $n$  векторов, справедливо

## Замечание 7

*Размерность пространства  $\mathbb{R}_n$  равна  $n$ .*



Из приведенных выше примеров базисов в различных пространствах вытекает также, что  $\dim \mathbf{Mat}_{m,n} = mn$  и  $\dim \mathbf{Pol}_n = n + 1$ .



Из леммы 2 легко вытекает

## Замечание 8

*Если  $\dim V = n$ , то любой линейно независимый набор из  $n$  векторов векторного пространства  $V$  является базисом в  $V$ .*

**Доказательство.** Если к линейно независимому набору из  $n$  векторов  $n$ -мерного пространства добавить любой вектор, то в силу леммы 2 полученный набор векторов будет линейно зависимым. Остается сослаться на определение базиса. □

Замечание 8 позволяет установить следующее важное свойство линейно независимых систем векторов.

## Теорема 3

*Любой линейно независимый набор векторов из векторного пространства можно дополнить до базиса этого пространства.*

Доказательство этой теоремы см. на следующем слайде.

**Доказательство.** Пусть  $V$  —  $n$ -мерное векторное пространство и  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  — линейно независимый набор векторов из  $V$ . Из леммы 2 вытекает, что  $k \leq n$ . Если  $k = n$ , то в силу замечания 8  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  — базис пространства  $V$ . Пусть теперь  $k < n$ . В силу теоремы 2 векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  не образуют базиса пространства  $V$ . Поскольку они линейно независимы, из определения базиса вытекает, что к ним можно добавить вектор  $\mathbf{a}_{k+1}$  так, что набор векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}$  останется линейно независимым. Если  $k + 1 = n$ , то в силу замечания 8  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k+1}$  — базис пространства  $V$ . В противном случае к нему вновь можно добавить один вектор так, чтобы получившийся набор остался линейно независимым. Продолжая этот процесс, мы через конечное число шагов получим линейно независимый набор из  $n$  векторов. После этого останется только в очередной раз сослаться на замечание 8. □

В оставшейся части лекции мы установим, что с точки зрения алгебраических свойств операций сложения векторов и умножения вектора на число всякое  $n$ -мерное пространство в некотором смысле слова «неотлично» от пространства  $\mathbb{R}_n$ . Чтобы придать последней фразе строгий математический смысл, нам понадобится следующее

## Определение

Векторные пространства  $V_1$  и  $V_2$  называются *изоморфными*, если существует отображение  $f$  из  $V_1$  в  $V_2$  такое, что выполнены следующие условия:

- 1)  $f$  взаимно однозначно, т. е. для любых векторов  $x_1, x_2 \in V_1$  из того, что  $x_1 \neq x_2$ , вытекает, что  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ;
- 2)  $f$  отображает  $V_1$  на  $V_2$ , т. е. для любого вектора  $y \in V_2$  существует вектор  $x \in V_1$  такой, что  $f(x) = y$ ;
- 3) если  $x_1, x_2 \in V_1$ , то  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ ;
- 4) если  $x \in V_1$ , а  $t$  — действительное число, то  $f(tx) = t \cdot f(x)$ .

Отображение  $f$  при этом называется *изоморфизмом* из  $V_1$  на  $V_2$ .

- Об условиях 3) и 4) говорят соответственно, что отображение  $f$  сохраняет сумму векторов и произведение вектора на число.

Если  $f$  — изоморфизм из  $V_1$  на  $V_2$ , то, говоря неформально, можно считать, что мы просто «переименовали» пространство  $V_1$  в  $V_2$ , а всякий вектор  $x$  из  $V_1$  в вектор  $f(x)$ , после чего векторы складываются и умножаются на числа так же, как и ранее (только под новыми «именами»). Именно в этом смысле можно считать, что по алгебраическим свойствам операций изоморфные пространства неотличимы друг от друга.

## Теорема 4 (теорема об изоморфизме векторных пространств)

*Любое  $n$ -мерное векторное пространство  $V$  изоморфно пространству  $\mathbb{R}_n$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  — базис пространства  $V$ ,  $\mathbf{b} \in V$ , а  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  — координаты вектора  $\mathbf{b}$  в базисе  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ . Определим отображение  $f$  из  $V$  в  $\mathbb{R}_n$  правилом:  $f(\mathbf{b}) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ . Нетрудно убедиться в том, что выполнены все условия 1)–4) из определения изоморфизма. В самом деле, условие 1) вытекает из единственности разложения вектора по базису. Выполнение условия 2) очевидно: если  $\mathbf{y} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}_n$ , то  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_n\mathbf{a}_n$ . Наконец, выполнение условий 3) и 4) вытекает из замечания 5. Таким образом,  $f$  — изоморфизм из  $V$  на  $\mathbb{R}_n$ . □

Теорема 4 показывает, насколько важной характеристикой векторного пространства является его размерность. С точки зрения действия алгебраических операций размерность конечномерного векторного пространства однозначно определяет это пространство: для всякого  $n$  существует (с точностью до изоморфизма) лишь одно  $n$ -мерное векторное пространство — пространство  $\mathbb{R}_n$ . Этим и объясняется упоминавшаяся в предыдущей лекции особая роль пространства  $\mathbb{R}_n$  в линейной алгебре.