

Эйлеровы интегралы

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad \text{— интеграл Эйлера 1 рода (В-функция)}$$

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad \text{— интеграл Эйлера 2 рода (Г-функция)}$$

Свойства Г-функции:

- Область определения: $a > 0$
- Непрерывность
- Дифференцируемость
- Формула приведения: $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$

Пример. $\Gamma(n+1) = n!$

- Связь с В-функцией: $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$
- Формула дополнения: $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, 0 < a < 1$

Примеры:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx$

2) $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

3) $\Gamma(n + \frac{1}{2})$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} x \cos^{b-1} x dx$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{a-1} x dx$

6) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$

7) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$

8) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$