сумм ... f – интегр. ф-ция ... ...

Основные св-ва двойного интеграла | 09.09.20

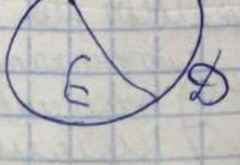
1° $\iint_D dx\,dy = S(D)$

2° Линейность $\iint_D (\alpha f + \beta g)\,dx\,dy = \alpha \iint_D f\,dx\,dy + \beta \iint g\,dx\,dy$

3° Интегр. на подмножестве

Если f огр-~~на~~ и инт. на D, то она ~~огр~~ инт. на любом измеримом подмножестве $E \subset D$

D_ε:



1) $\sum\limits_{\tau_D} \omega_i S(D_i) < \varepsilon$ (усл. инт-ти)

2) $\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0 : \forall \tau_D : d < \delta \Rightarrow 1)$

$\forall \tau_E : d_E < \delta$ $\quad \sum_{\tau_E} \omega_i S(E_i) \leq \sum_{\tau_D} \omega_i S(D_i) < \varepsilon$ $\left(\tau_D = \tau_E \cup \tau_{D \setminus E} \right)$

$\forall \tau_{D\setminus E} : d_{D\setminus E} < \delta$

4° Аддитивность интеграла как ф-ии области.

Если f ограничена и интегр. на $D \cup G$, где $\mathring{D} \cap \mathring{G} = \varnothing$, то

$$\iint_{D \cup G} f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_G f(x,y)\,dxdy$$

Док-во: $\quad D \cup G = \Omega$

$$\tau_D \cup \tau_G = \tau_{D\cup G} = \{\Omega_i\}$$

$$\sigma_{D\cup G} = \sum f(N_i)\cdot S(\Omega_i) = \sum f(N_i)\cdot S(D_i) + \sum f(N_i) S(G_i)$$

$$\boxed{\iint_{\Omega = D\cup G} f\,dS = \iint_D f\,dS + \iint_G f\,dS}$$

- f огр
  $G, D \Rightarrow G \cup D$
- f-неогр.
  $\not\Rightarrow G \cup D$

Пример: $G = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

f – огр.

$f = 1$

$D = \{x^2 + y^2 = 1\}$

f – неогр

$\Downarrow$

f интегр. на D и на G

но f не инт. на $D \cup G$,

т.к.  можно натроить неогр. интегр. сумму

5° Сохранение нер-ва:

Если f и g – инт. на D и $f \leq g$, $(x,y) \in D$, то

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \leq \iint_D g\,dxdy$$

6° Оценка модуля интеграла

Если f огр. и инт. на D, то $|f|$ – инт. на D и

и $\left|\iint_D f\,dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dxdy$

~~Док-во: $\omega_i(f) \leq \omega_i(|f|)$~~

~~так как $M_i(f)-m_i(f) \geq M_i(|f|)-m_i(|f|)$~~

Док-во: $$\big||f(N_i)|-|f(P_i)|\big| \leq |f(N_i)-f(P_i)|$$

$$\underset{N_i, P_i \in D_i}{\sup} (*) \leq \sup (**)$$

$$\omega_i(|f|) \leq \omega_i(f)$$

$\sum_i \omega_i(|f|) S(D_i) \leq \sum_i \omega_i(f) S(D_i) < \varepsilon$ – интегрируема

покажем нер-ва:

$$\left|\sum f(N_i) S(D_i)\right| \leq \sum |f(N_i)| \cdot S(D_i)$$

$$\downarrow$$

$$\left|\iint_D f\,dS\right| \leq \iint_D |f|\,dS$$

чтд

7° Монотонность как ф-ии множества

Если D, E – квадрируемые множ-ва, $E \subset D$,

а f – неотриц-на, огр-на и интегрируема на D,

то $\iint_E f\,dxdy \leq \iint_D f\,dxdy$

8° Пусть f неотр, огр-на и инт. на открытом мн-ве D. Если сущ-ет точка $(x_0, y_0) \in D$, в которой f непрерывна и положительна,

то $\iint_D f(x,y)\,dxdy > 0$

~~Теорема о среднем~~

~~Если f и g инте~~

Док-во: $M_0(x_0,y_0)$ $\exists \varepsilon>0: B(M_0,\varepsilon)\subset D$

$0 < \pi\varepsilon^2\cdot r = \iint_B r\,dS \overset{(5)}{\le} \iint_B f\,dS \overset{(7)}{\le} \iint_D f\,dS$

$\exists r>0\ \exists \varepsilon_1>0: \forall M\in B(M_0,\varepsilon_1)\ f(M)>r$

что

---

(9) Теорема о среднем

Если f и g инт. на D, $m\le f(x,y)\le M$ при $(x,y)\in D$, а g не меняет знака на D, то $\exists \mu\in[m,M]$:

$$\iint_D f(x,y)\,g(x,y)\,dx\,dy = \mu\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

Если при этом D - связное множ-во, а f - непр. на D, то $\exists$ точка $(\xi,\eta)\in D$: $\iint_D f(x,y)\,g(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$

Вычисление двойного интеграла

Случай 1: прямоуг. обл. $\Pi=[a,b]\times[c,d]$

$\boxed{\text{Теорема 6}}$ f - огр. и инт. на Π и ~~хе~~ $\forall x\in[a,b]\ \exists \int_c^d f(x,y)\,dy = I(x)$

Тогда $I(x)$ интегр. на $[a,b]$ и $\int_a^b I(x)\,dx = \iint_\Pi f\,dx\,dy$ или

или $\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$

В этом случае говорят, что двойной интеграл равен повторному.

- - - - - -

Док-во:

$$\Pi_{ij}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]\qquad i=\overline{0,n-1}\quad j=\overline{0,k-1}$$

$$\forall(\xi_i,y)\in\Pi_{ij}\qquad m_{ij}\le f(\xi_i,y)\le M_{ij}$$

$$y\in[y_j,y_{j+1}]$$

$$m_{ij}\Delta y_j\le\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i,y)\,dy\le M_{ij}\Delta y_j$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} m_{ij}\Delta y_j\le\int_c^d f(\xi_i,y)\,dy\le \sum M_{ij}\Delta y_j \quad \Big|\cdot\Delta x_i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} m_{ij}\Delta y_j\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} \underline{I}(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} M_{ij}\underbrace{\Delta y_j\cdot\Delta x_i}_{\Pi_{ij}} = \sum\sum M_{ij}\, S(\Pi_{ij}) = S(f,\Pi)$$

верхняя сумма Дарбу

$d\to0$ $\qquad$ $d\to0$

$$\iint_\Pi f\,dS \le \int_a^b \underline{I}(x)\,dx \le \iint_\Pi f\,dS$$

$$\boxed{\int_a^b \underline{I}(x)\,dx=\iint_\Pi f\,dx\,dy}$$

чтд

Замечание:

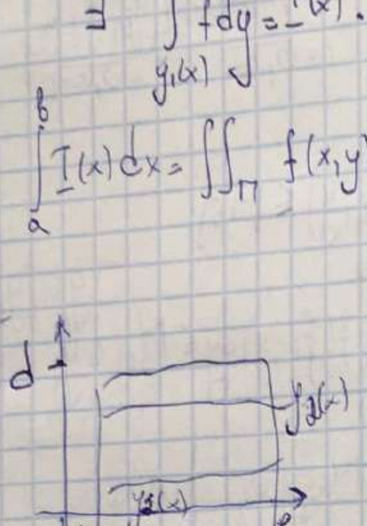
$$\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$$

Случай 2: область вида $D = \{(x,y) \mid y_1(x) \le x \le y_2(x), x\in[a,b]\}$

Теорема 7 Пусть f огр. и инт. на D и $\forall x\in[a,b]$
$\exists \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f\,dy = I(x)$. Тогда $I(x)$ инт. на $[a,b]$ и

и $\int\limits_a^b I(x)\,dx = \iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy$ или $\iint_\Pi f\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f\,dy$

Док-во:



$D \subseteq \Pi = [a,b]\times[c,d]$

$$F(x,y) = \begin{cases} f, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\in \Pi\setminus D \end{cases}$$

$$\iint_\Pi F(x,y)\,dx\,dy = \iint_D F\,dS + \overbrace{\iint_{\Pi\setminus D} F\,dS}^{=0} = \iint_D f\,dS$$

$$\forall x\in[a,b] \quad \int\limits_c^d F(x,y)\,dy = \overbrace{\cancel{\int\limits_c^{y_1(x)} F\,dy}}^{0} + \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} F\,dy + \overbrace{\cancel{\int\limits_{y_2(x)}^{d} F\,dy}}^{0} = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

$$\iint_\Pi F\,dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d F(x,y)\,dy$$

$$\|$$

$$\boxed{\iint_D f\,dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy}$$

чтд

Замечание.

Если $D = \{(x,y) \mid x_1(y) \le x \le x_2(y),\ y \in [c,d]\}$, то при выполнении соотв. условий (!)

$$\boxed{\iint_{\Pi} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx}$$

Пример: $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, где D - множе-во, огр-ое прямыми

$y = x$, $y = x+a$, $y = a$, $y = 2a$

D - криволин. трапеция. $f(x)$ - опр-ая ф-ия

отрезок $[r, t]$