Лекция 15: Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение

Ненулевой вектор $\mathbf{x}$ называется *собственным вектором* оператора $\mathcal{A}$, если существует действительное число t такое, что

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = t\mathbf{x}. \tag{1}$$

Действительное число t называется *собственным значением* или *собственным числом* оператора $\mathcal{A}$, если существует ненулевой вектор $\mathbf{x}$ такой, что выполнено равенство (1). При наличии равенства (1) мы будем называть $\mathbf{x}$ собственным вектором, *относящимся к собственному значению* t, а t — собственным значением, *относящимся к собственному вектору* $\mathbf{x}$.

Теорема 1

Совокупность всех собственных векторов, относящихся к одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором образует подпространство.

Доказательство. Обозначим через M_0 множество всех собственных векторов, относящихся к собственному значению t_0 и положим $M = M_0 \cup \{\mathbf{0}\}$. Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in M$. Если $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, то $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in M$. Пусть теперь $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$. Поскольку

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = t_0\mathbf{x}_1 + t_0\mathbf{x}_2 = t_0(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2),$$

получаем, что $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in M_0 \subseteq M$. Аналогично, для любого числа t имеем: если $t\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, то $t\mathbf{x}_1 \in M$, а если $t\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$, то

$$\mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = t(t_0\mathbf{x}_1) = t_0(t\mathbf{x}_1),$$

откуда $t\mathbf{x}_1 \in M_0 \subseteq M$. $\square$

Теорема 2

Если векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ являются собственными и относятся к попарно различным собственным значениям $t_1, t_2, \dots, t_k$ соответственно, то векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ линейно независимы.

Доказательство будем вести индукцией по числу векторов.

База индукции. Пусть $k = 1$ и $\mathbf{x}_1$ — собственный вектор. По определению собственного вектора, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$. Поэтому если $t_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, то $t_1 = 0$. Следовательно, система, состоящая из вектора $\mathbf{x}_1$, линейно независима.

Шаг индукции. Предположим, что $k > 1$ и доказываемое утверждение справедливо для любой системы из менее чем k векторов. Докажем его для произвольной системы из k векторов. Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к попарно различным собственным значениям $t_1, t_2, \dots, t_k$. Пусть

$$s_1\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \dots + s_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \qquad (2)$$

для некоторых чисел $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k$.

Свойство собственных векторов, относящихся к различным собственным значениям (2)

Используя замечание 1 из лекции 14, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \mathcal{A}(\mathbf{0}) &= \mathcal{A}(s_1\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k\mathbf{x}_k) = \\ &= s_1\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + s_2\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) + \cdots + s_{k-1}\mathcal{A}(\mathbf{x}_{k-1}) + s_k\mathcal{A}(\mathbf{x}_k) = \\ &= s_1 t_1\mathbf{x}_1 + s_2 t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}t_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k t_k\mathbf{x}_k.\end{aligned}$$

Итак,

$$s_1 t_1\mathbf{x}_1 + s_2 t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}t_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k t_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \qquad (3)$$

С другой стороны, умножая обе части равенства (2) на t_k, получаем, что

$$s_1 t_k\mathbf{c}_1 + s_2 t_k\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}t_k\mathbf{x}_{k-1} + s_k t_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \qquad (4)$$

Вычитая равенство (4) из (3), получаем, что

$$s_1(t_1 - t_k)\mathbf{x}_1 + s_2(t_2 - t_k)\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}(t_{k-1} - t_k)\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

По предположению индукции векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$ линейно независимы. Следовательно, $s_1(t_1 - t_k) = s_2(t_2 - t_k) = \cdots = s_{k-1}(t_{k-1} - t_k) = 0$. Поскольку числа $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k$ попарно различны, получаем, что $s_1 = s_2 = \cdots = s_{k-1} = 0$. Из равенства (2) вытекает теперь, что $s_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Учитывая, что $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$ (поскольку вектор $\mathbf{x}_k$ — собственный), получаем, что $s_k = 0$. Итак, если выполнено равенство (2), то $s_1 = s_2 = \cdots = s_{k-1} = s_k = 0$. Следовательно, векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k$ линейно независимы. Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в векторном пространстве V. Зафиксируем некоторый базис пространства V и обозначим через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Для произвольного вектора $\mathbf{x} \in V$ обозначим через X столбец его координат в выбранном базисе. В силу замечания 3 из лекции 14 равенство (1) равносильно матричному равенству $AX = tX$. Последнее равенство можно переписать в виде $AX = tEX$, где E — единичная матрица того же порядка, что и A. Следовательно, $AX - tEX = O$, где O — нулевой столбец. Последнее равенство можно переписать в виде

$$(A - tE)X = O. \qquad (5)$$

Мы получили матричную запись системы линейных уравнений, основная матрица которой содержит параметр t. Эта система крамеровская (так как ее основная матрица — квадратная) и однородная. Очевидно, что

- *собственными значениями оператора $\mathcal{A}$ являются те значения параметра t, при которых система (5) имеет ненулевые решения, и только они; собственными векторами этого оператора являются ненулевые решения системы (5) и только они.*

В силу следствия 4 из лекции 6 справедливо следующее

Предложение 1

Пусть V — векторное пространство, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V.

а) *Число t является собственным значением линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $t \in \mathbb{R}$ и*

$$|A - tE| = 0. \tag{6}$$

б) *Собственными векторами линейного оператора $\mathcal{A}$, относящимися к его собственному значению t_0, являются ненулевые решения системы линейных уравнений $(A - t_0 E)X = 0$ и только они.* □

Легко понять, что $|A - tE|$ — многочлен n-й степени, где $n = \dim V$.

Определение

Многочлен $|A - tE|$ называется *характеристическим многочленом* линейного оператора $\mathcal{A}$, а уравнение (6) — *характеристическим уравнением* этого оператора.

Инвариантность характеристического многочлена относительно выбора базиса

В определении характеристического многочлена и характеристического уравнения линейного оператора фигурирует матрица этого оператора в некотором базисе. Следующее предложение показывает, что в действительности характеристический многочлен (а значит и характеристическое уравнение) не зависит от выбора базиса.

Предложение 2

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V, F и G — два базиса в V, а A_F и A_G — матрицы оператора $\mathcal{A}$ в базисах F и G соответственно. Тогда $|A_F - tE| = |A_G - tE|$.

Доказательство. Обозначим через T матрицу перехода от базиса F к базису G. Используя формулу (2) из лекции 14 и лемму 1 из той же лекции, получаем, что $A_G = T^{-1}A_F T$. Ясно, что $T^{-1}ET = T^{-1}T = E$. Используя свойства умножения матриц и свойства определителей, имеем

$$|A_G - tE| = |T^{-1}A_F T - tT^{-1}ET| = |T^{-1}A_F T - T^{-1}(tE)T| =$$
$$= |T^{-1}(A_F - tE)T| = |T^{-1}| \cdot |A_F - tE| \cdot |T| =$$
$$= \frac{1}{|T|} \cdot |A_F - tE| \cdot |T| = |A_F - tE|.$$

Предложение доказано.

В качестве примера найдем собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим характеристический многочлен этого оператора. Разлагая соответствующий определитель сначала по четвертому столбцу, а затем по второй строке, имеем:

$$|A - tE| = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -t & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1-t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t \end{vmatrix} = t^2\big((2-t)(-1-t)+2\big) =$$
$$= t^2(-2+t-2t+t^2+2) = t^2(t^2-t) = t^3(t-1).$$

Характеристическое уравнение данного оператора, т. е. уравнение $t^3(t-1) = 0$, имеет два корня: $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$. Мы нашли собственные значения оператора.

Найдем собственные векторы, отвечающие собственному значению t_1. Для этого надо найти все ненулевые решения однородной системы с основной матрицей $A - t_1E = A - 0 \cdot E = A$. Приведем эту матрицу к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система линейных уравнений, соответствующая последней матрице, имеет две свободных переменных: x_3 и x_4. Полагая сначала $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, а затем $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, находим два вектора, образующих фундаментальную систему решений нашей однородной системы: $\mathbf{f}_1 = (\frac{1}{2}, 0, 1, 0)$ и $\mathbf{f}_2 = (0, 0, 0, 1)$. Они образуют базис пространства решений нашей системы. Совокупность всех ее решений — это множество всех векторов вида $c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Все эти векторы, кроме нулевого, и только они суть собственные векторы нашего оператора, отвечающие собственному значению t_1. Будучи базисом, векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ линейно независимы. Следовательно, $c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2 = \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $c_1 = c_2 = 0$. Таким образом, собственными векторами нашего оператора, отвечающими собственному значению t_1, являются векторы вида $(\frac{1}{2}, 0, 1, 0)c_1 + (0, 0, 0, 1)c_2$, где $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, и только они.

Наконец, найдем собственные векторы, отвечающие собственному значению t_2. Для этого надо найти все ненулевые решения однородной системы с основной матрицей $A - t_2E = A - E$. Приведем эту матрицу к ступенчатому виду:

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система линейных уравнений, соответствующая последней матрице, имеет одну свободную переменную, а именно x_3. Полагая $x_3 = 1$, находим вектор, образующий фундаментальную систему решений нашей однородной системы: $\mathbf{f}_3 = (1, 0, 1, 0)$. Совокупность всех ее решений — это множество всех векторов вида $c\mathbf{f}_3$, где $c \in \mathbb{R}$. Ясно, что $c\mathbf{f}_3 = \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $c = 0$. Таким образом, собственными векторами нашего оператора, отвечающими собственному значению t_2, являются векторы вида $(1, 0, 1, 0)c$, где $c \neq 0$, и только они.

В оставшейся части лекции изучаются операторы, матрица которых в некотором базисе устроена очень просто.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в пространстве V, называется *приводимым к диагональному виду*, если существует базис пространства V, в котором матрица этого оператора диагональна. Такие операторы называются также *операторами простой структуры*.

Теорема 3

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в векторном пространстве V приводим к диагональному виду тогда и только тогда, когда в V существует базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица A оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ является диагональной, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t_n \end{pmatrix}.$$

Тогда по определению матрицы оператора в базисе $\mathcal{A}(\mathbf{y}_1) = t_1\mathbf{y}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{y}_2) = t_2\mathbf{y}_2, \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{y}_n) = t_n\mathbf{y}_n$. В силу замечания 3 из лекции 8 векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ — ненулевые. Следовательно, базис $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Достаточность. Предположим теперь, что базис $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ пространства V состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}(\mathbf{y}_1) = s_1\mathbf{y}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{y}_2) = s_2\mathbf{y}_2, \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{y}_n) = s_n\mathbf{y}_n$ для некоторых чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Тогда по определению матрицы оператора в базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & s_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ приводим к диагональному виду. $\square$

Операторы, приводимые к диагональному виду (3)

Из доказательства теоремы 3 непосредственно извлекается следующая информация, полезная при решении задач.

- *Если пространство имеет базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$, то матрица оператора $\mathcal{A}$ именно в этом базисе диагональна и на ее диагонали стоят собственные значения, причем каждое собственное значение стоит столько раз, сколько имеется относящихся к нему линейно независимых собственных векторов;*
  если матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе диагональна, то именно этот базис состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Следствие 1

Пусть V — n-мерное векторное пространство, $\mathcal{A}$ — линейный оператор в этом пространстве, а A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе. Если уравнение $|A - tE| = 0$ имеет n различных действительных корней, то оператор $\mathcal{A}$ приводим к диагональному виду.

Доказательство. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — различные действительные корни уравнения $|A - tE| = 0$. Они являются собственными значениями оператора $\mathcal{A}$. Для каждого собственного значения t_i зафиксируем собственный вектор $\mathbf{y}_i$ относящийся к $\mathbf{t}_i$. По теореме 2 векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ линейно независимы. В силу замечания 8 из лекции 8 они образуют базис пространства V. Следовательно, по теореме 3 оператор $\mathcal{A}$ приводим к диагональному виду. $\square$

Укажем класс задач, связанных с линейными операторами, решение которых существенно упрощается, если операторы приводимы к диагональному виду. Пусть в пространстве $\mathbb{R}_n$ в базисе $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу A. Если обозначить через X и Y столбцы координат векторов $\mathbf{x}$ и $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ в базисе $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ соответственно, то, в силу замечания 3 из лекции 14, $Y = AX$. Если мы к вектору AX снова применим оператор $\mathcal{A}$, то получим вектор A^2X, и т. д. После k-кратного применения оператора $\mathcal{A}$ мы будем иметь вектор A^kX. Обозначим через $\mathcal{A}^k$ оператор, соответствующий матрице A^k. Во многих приложениях надо знать поведение оператора $\mathcal{A}^k$ при $k \longrightarrow \infty$.

Для произвольной матрицы A даже третьего порядка вычислить A^k при произвольном k довольно сложно. Однако если A — матрица диагонализируемого оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе F, то можно указать простую формулу для вычисления A^k. В самом деле, пусть G — тот базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна, а именно имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t_n \end{pmatrix}.$$

Базис G и матрицу A' можно считать известными, поскольку способ их нахождения указан после доказательства теоремы 3. Легко понять, что

$$(A')^k = \begin{pmatrix} t_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t_3^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_n^k \end{pmatrix}.$$

Обозначим через T матрицу перехода от базиса F к базису G. Ее также можно считать известной (алгоритм ее нахождения указан в лекции 8). В силу формулы (4) из лекции 14 $A' = T^{-1}AT$. Умножая обе части этого равенства слева на T и справа на T^{-1}, получаем, что $A = TA'T^{-1}$. Но тогда

$$A^k = \underbrace{(TA'T^{-1}) \cdot (TA'T^{-1}) \cdot \dots \cdot (TA'T^{-1})}_{k \text{ раз}} =$$

$$= TA'(T^{-1}T)A'(T^{-1}T)A' \dots (T^{-1}T)A'T^{-1} = T(A')^k T^{-1}.$$

Итак, $A^k = T(A')^k T^{-1}$. Это и есть упоминавшаяся выше формула для вычисления A^k.

В оставшейся части лекции мы на двух конкретных примерах рассмотрим следующую задачу: выяснить, приводим ли данный оператор к диагональному виду; если да — найти базис, в котором матрица этого оператора диагональна, и саму эту диагональную матрицу. В дальнейшем мы будем формулировать эту задачу более кратко: привести оператор к диагональному виду.

Задача 1. Привести к диагональному виду оператор, заданный матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как показано выше в данной лекции, этот оператор имеет два собственных значения: $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$, первому из которых отвечают два линейно независимых собственных вектора $\mathbf{f}_1 = (\frac{1}{2}, 0, 1, 0)$ и $\mathbf{f}_2 = (0, 0, 0, 1)$, а второму — один линейно независимый собственный вектор $\mathbf{f}_3 = (1, 0, 1, 0)$. По теореме 2 векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_3$ линейно независимы. Но добавить к ним еще один собственный вектор так, чтобы набор векторов остался линейно независимым, невозможно. Учитывая, что оператор действует в четырехмерном пространстве, получаем, что в пространстве нет базиса, состоящего из собственных векторов оператора. По теореме 3 оператор не приводим к диагональному виду.

Задача 2. Привести к диагональному виду оператор, заданный матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем характеристический многочлен этого оператора:

$$\begin{vmatrix} 4-t & 6 & 0 \\ -3 & -5-t & 0 \\ -3 & -6 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)(t^2+t-2) = -(t-1)^2(t+2).$$

Следовательно, оператор имеет два собственных значения: $t_1 = 1$ и $t_2 = -2$.

Чтобы найти собственные векторы, отвечающие собственному значению t_1, приведем к ступенчатому виду матрицу $A - E$:

$$A - E = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая однородная система линейных уравнений имеет две свободных переменных — x_2 и x_3, а ее фундаментальная система решений состоит из двух векторов — $\mathbf{f}_1 = (-2, 1, 0)$ и $\mathbf{f}_2 = (0, 0, 1)$.

Теперь найдем собственные векторы, отвечающие собственному значению t_2. Для этого приведем к ступенчатому виду матрицу $A+2E$:

$$A+2E=\begin{pmatrix}6 & 6 & 0\\ -3 & -3 & 0\\ -3 & -6 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}6 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}6 & 6 & 0\\ 0 & -6 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Соответствующая однородная система линейных уравнений имеет одну свободную переменную — x_3, а ее фундаментальная система решений состоит из вектора $\mathbf{f}_3=(-1,1,1)$.

По теореме 2 векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_3$ линейно независимы. Поскольку оператор действует в трехмерном пространстве, эти векторы образуют его базис. В силу теоремы 3 наш оператор приводим к диагональному виду. Базис, в котором его матрица диагональна, состоит из векторов $(-2,1,0)$, $(0,0,1)$ и $(-1,1,1)$, а сама матрица оператора в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$