## Матанализ. Продолжение.

04.03.20

### Интегр. ограниченных функций.

Пусть $f(x,y)$ опр. и огр. на квадр. мн-ве $D$

Пусть $\tau = \{D_i\}_{i=1}^{n}$ — разбиение $D$.

Для каждого $D_i$ опр-им $m_i = \inf\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, $M_i = \sup\limits_{(x,y)\in D_i} f(x,y)$

и сост. суммы.

$$s(\tau) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot S(D_i), \quad S(\tau) = \sum_{i=1}^{n} M_i S(D_i),$$

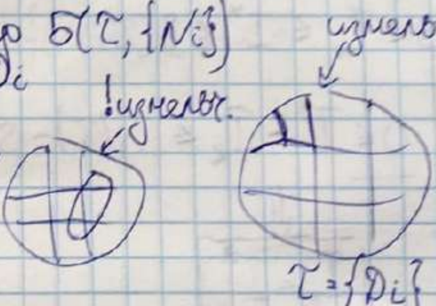
наз-ые нижней и верхней суммой Дарбу соотв.

### Свойства сумм Дарбу:

1. $s(\tau) = \inf\limits_{N_i \in D_i} \sigma(\tau, \{N_i\})$, $S(\tau) = \sup\limits_{N_i \in D_i} \sigma(\tau, \{N_i\})$

2. Для $\forall$ разбиения $\tilde{\tau}$ — измельчения $\tau$

$s(\tau) \le s(\tilde{\tau})$, $S(\tilde{\tau}) \le S(\tau)$




$\tau = \{D_i\}$

$\tilde{\tau} = \{\tilde{D}_j\}$

$\forall \tilde{D}_j \ \exists D_i \in \tau : \tilde{D}_j \subseteq D_i$

$\tilde{\tau}$ — измельчение.

3. $s(\tau') \le S(\tau'')$ $\forall \tau'$ и $\tau''$

4. $\exists\ \underline{I}_* = \sup\limits_{\tau} s(\tau)$ и $\underline{I}^* = \inf\limits_{\tau} S(\tau)$ — нижний и верхний интеграл Дарбу, и $\underline{I}_* \le \underline{I}^*$

5. $\underline{I}_* = \lim\limits_{d\to 0} s(\tau)$, $\underline{I}^* = \lim\limits_{d\to 0} S(\tau)$

### Критерий интегрируемости

$\boxed{T3}$ Для того, чтобы огр-ая на $D$ ф-ия $f$ была интегр. на $D$ необх. и дост. выполнения одного из след. условий:

(a) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0\ \forall \tau\ (d<\delta_\varepsilon \Rightarrow S(\tau)-s(\tau)<\varepsilon)$

• $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0 : \forall \tau,\ d<\delta_\varepsilon\ \forall \{N_i\}\quad I-\varepsilon/3 < \sigma < I+\varepsilon/3$

$$\left.\begin{array}{l} I-\varepsilon/3 < S \le I+\varepsilon/3 \\ I-\varepsilon/3 \le s < I+\varepsilon/3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ S-s \le 2\varepsilon/3 < \varepsilon$

(б) $\forall \varepsilon>0\ \exists \tau : S(\tau)-s(\tau)<\varepsilon$

(c) $I_* = I^*$

---

1) (б) $\Rightarrow$ (c):

$$I^* = \inf_{\tau} (S(\tau))$$

$$s(\tau) \le I_* \le I^* \le S(\tau)$$

$$0 \le I^* - I_* \le S(\tau)-s(\tau) < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_* = I^*}$$

$$\sigma = \sigma(\tau, \{N_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(N_i)\, s(D_i)$$

2) (c) $\Rightarrow$ (a)

$I_* = \lim s(\tau)$ $\qquad I_* = I^* = I$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall \tau,\ d<\delta \to |s(\tau)-I_*| < \varepsilon$

$$I-\varepsilon < s(\tau) \le \sigma \le S(\tau) < I+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

ф-ия нах-ся в окр. числа $I$ $\Rightarrow$ ф-ия интегр.

Условия инт-ти можно записать в терминах кол-ых сумм:

(a') $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0\ \forall \tau\ d<\delta_\varepsilon\ \sum\limits_{(\tau)}^{n} \omega_i S(D_i)<\varepsilon$

(b') $\forall \varepsilon>0\ \exists \tau: \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i S(D_i)<\varepsilon$

$\omega_i = \sup\limits_{N,M\in D_i} (f(N)-f(M))$ - колеб.

Классы интегр. функций

Теорема 4. — компакт - замкнутое огр-ое мн-во

Непрерывная на замкнутом квадр. мн-ве ф-ия интегр. на этом мн-ве (на квадр. компакте $D$)

Док-во: $f$ - непр. на компакте $D \Rightarrow$ равномерна непр. на $D$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0: \forall \underset{\in D}{N,P}: \rho(N,P)<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(N)-f(P)|<\varepsilon$

$\forall \tau: d<\delta_\varepsilon$

$D_i - \overline{D_i}$ - граница

$\omega_i = M_i - m_i = f(N_i) - f(P_i): N_i, P_i \in D_i \Rightarrow \rho(N_i,P_i) \leqslant d < \delta_\varepsilon$

$\omega_i < \varepsilon / S(D)$

$$\sum \omega_i \cdot S(D_i) < \frac{\varepsilon}{S(D)} \sum S(D_i) = \varepsilon$$

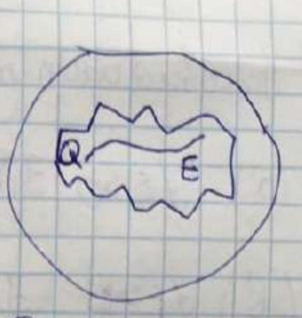
чтд

$\boxed{\text{Теорема 5}}$ Пусть $f$ - огр. на квадр. компакте $D$ и непр. на $D$ за исключ. быть может мн-ва меры $0$. Тогда $f$ - инт. на $D$

Док-во: $f$ - непр. на $D \setminus E$, огр. на $D$. $D = \overline{D}$, $S(E)=0$

$\exists C>0: |f(N)| \leqslant C,\ \forall N \in D$

$E$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists Q$ - многоуг. $S(Q) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2C} = \frac{\varepsilon}{4C}$.




$Q \cap D = D_1$ (искл. выход за мн-во) — квадрируемый

$S(D_1) \le S(Q) < \frac{\varepsilon}{4C}$

комб. так:


$\overline{D \setminus D_1}$ — квадрируемый компакт

$f$ - интегр. на $\overline{D \setminus D_1} \Rightarrow \exists \tau_1 : \sum\limits_{i=2}^{n} \omega_i S(D_i) < \varepsilon/2$

$\tau = \tau_1 \cup D_1 \quad \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i S(D_i) < \varepsilon/2 + \omega_1 \cdot S(D_1) \le \frac{\varepsilon}{2} + 2C \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{4C}_{\,2}} = \varepsilon$

$\omega_1 = M_1 - m_1 \le C - m \le C + C = 2C$

$|f(M)| \le C \iff -C \le f(M) \le C$

$-f(M) \le C$

<u>Замечание 1</u>. Если изменить значения огр-ой ин-ой ф-ии на мн-ве меры 0 так, чтобы ф-ия осталась огр-ой, то это не повлияет ни на факт инт-сти, ни на значение инт-ла.

<u>Замечание 2</u>. Интегрируемость и значение интеграла от огр-ой ф-ии не зависят от ее значений на границе мн-ва.

$f$ - инт на $D$

$\tilde{f} = \begin{cases} f, & D \setminus E \\ \text{огр.}, & E \end{cases} \qquad S(E) = 0 \qquad \sum \omega_i(f) \cdot S(D_i) = \omega_1(\tilde{f}) \cdot S(D_1) + \sum \ldots < \varepsilon$

$\iint\limits_{D} (f - \tilde{f})\,dx\,dy = \underbrace{\iint\limits_{E} (f - \tilde{f})\,dx\,dy}_{=0} + \underbrace{\iint\limits_{D \setminus E} (f - \tilde{f})\,dx\,dy}_{=0} = 0 \Rightarrow$