

# §17. Прямая в пространстве

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,  
Институт естественных наук и математики,  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

## Общие уравнения кривой (определение)

Этот параграф во многом схож с двумя предыдущими, но есть и существенные отличия.

Как и в случаях кривой на плоскости и поверхности, кривую в пространстве можно задавать либо общими, либо параметрическими уравнениями. Общие уравнения в данном случае возникают из следующего простого наблюдения: любую кривую в пространстве можно представить как пересечение двух поверхностей.

### Определение

Будем считать, что в пространстве зафиксирована некоторая система координат. Пусть кривая  $\ell$  является пересечением поверхностей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , поверхность  $\sigma_1$  задана общим уравнением  $F_1(x, y, z) = 0$ , а поверхность  $\sigma_2$  — общим уравнением  $F_2(x, y, z) = 0$ . Тогда уравнения

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

называются *общими уравнениями* кривой  $\ell$ .

Из определения общего уравнения поверхности (см. § 16) вытекает, что точка лежит на кривой  $\ell$  тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений (1).

Параметрические уравнения кривой в пространстве определяются вполне аналогично одноименным уравнениям кривой на плоскости (см. § 15).

## Определение

Уравнения вида

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \\ z = h(t), \end{cases} \quad (2)$$

где  $f(t)$ ,  $g(t)$  и  $h(t)$  — произвольные функции от одной переменной, называются **параметрическими уравнениями** кривой  $\ell$ , если точка  $M$  с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  лежит на  $\ell$  тогда и только тогда, когда существует число  $t_0$  такое, что  $x_0 = f(t_0)$ ,  $y_0 = g(t_0)$  и  $z_0 = h(t_0)$ .

Переменная  $t$  называется **параметром**.

## Общие и параметрические уравнения кривой (пример)

В качестве примера составим общие и параметрические уравнения окружности радиуса 2 с центром в точке  $C(0, 0, 1)$ , расположенной в плоскости, параллельной плоскости  $Oxy$  (см. рис. 1 на следующем слайде). Ясно, что эту окружность можно представить себе как пересечение плоскости, заданной уравнением  $z = 1$ , и сферы радиуса 2 с центром в точке  $(0, 0, 1)$ . Следовательно, в прямоугольной декартовой системе координат наша окружность задается общими уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4, \\ z = 1. \end{cases}$$

Перейдем к параметрическим уравнениям. Пусть  $M(x, y, z)$  — произвольная точка пространства. От точки  $C$  отложим ненулевой вектор  $\vec{a}$ , сонаправленный с положительным направлением оси  $Ox$ , и возьмем в качестве параметра  $t$  угол между векторами  $\overrightarrow{CM}$  и  $\vec{a}$  (см. рис. 1). Нетрудно понять, что наша окружность задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ z = 1 \end{cases}.$$

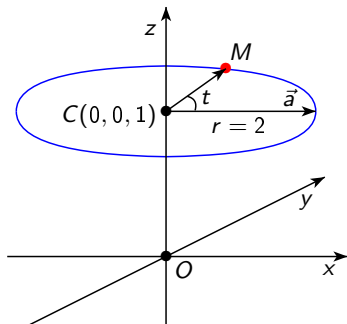


Рис. 1. Окружность в пространстве

Перейдем к основной теме этого параграфа — изучению прямых в пространстве.

Понятие направляющего вектора для прямой в пространстве вводится точно так же, как это было сделано в §15 для прямой на плоскости.

## Определение

Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой, называется ее *направляющим вектором*.

Из этого определения видно, что

- направляющий вектор для данной прямой определен неоднозначно: прямая в пространстве имеет бесконечно много (коллинеарных друг другу) направляющих векторов.

Отметим еще, что

- для прямой в пространстве понятие нормального вектора не определено.

Формально можно было бы назвать нормальным вектором прямой в пространстве произвольный ортогональный ей ненулевой вектор, но никакой пользы для изучения прямой это понятие не дает, поскольку векторов с указанным свойством «слишком много» — они заполняют собой целую плоскость (перпендикулярную к данной прямой).

Перейдем к рассмотрению видов уравнений прямой в пространстве. Мы рассмотрим четыре вида таких уравнений: параметрические, канонические, по двум точкам и общие. По сравнению с видами уравнений плоскости и прямой на плоскости (см. два предыдущих параграфа), здесь отсутствуют аналоги уравнений с угловым коэффициентом и в отрезках.

Предположим, что в пространстве зафиксирована система координат с началом в точке  $O$ . Пусть  $\ell$  — прямая в пространстве, точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  принадлежит прямой  $\ell$ , а вектор  $\vec{a} = (q, r, s)$  является ее направляющим вектором. Дословно повторяя рассуждения, проведенные в § 15 при выводе параметрических уравнений прямой на плоскости, можно показать, что  $M \in \ell$  тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st \end{cases} \quad (3)$$

для некоторого  $t$ . Уравнения (3) называются *параметрическими уравнениями прямой в пространстве*.

Понятие параметрических уравнений прямой в пространстве является частным случаем понятия параметрических уравнений кривой в пространстве, которое было введено в начале данного параграфа.

Выражая параметр  $t$  из первого, второго и третьего уравнений системы (3) и приравнявая полученные выражения, мы получаем уравнения

$$\frac{x - x_0}{q} = \frac{y - y_0}{r} = \frac{z - z_0}{s}, \quad (4)$$

которые называются *каноническими уравнениями прямой в пространстве*.

Предположим теперь, что мы знаем координаты двух различных точек, принадлежащих прямой:  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$  коллинеарен прямой и отличен от нулевого вектора, т. е. является направляющим вектором прямой.

Подставляя его координаты в канонические уравнения прямой, получаем следующие уравнения, которые называются *уравнениями прямой в пространстве по двум точкам*:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (5)$$



Из сказанного выше вытекают следующие два замечания.

### 1-е замечание о направляющем векторе прямой в пространстве

*Если прямая в пространстве задана любым из уравнений (3) и (4), то вектор с координатами  $(q, r, s)$  является ее направляющим вектором.* ☐

### Замечание о точке, лежащей на прямой в пространстве

*Если прямая в пространстве задана любым из уравнений (3), (4) и (5), то точка с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  принадлежит прямой.* ☐

Всякую прямую в пространстве можно рассматривать как пересечение двух плоскостей. Пусть  $\ell$  — прямая, являющаяся пересечением плоскостей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , а  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  — общие уравнения плоскостей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно. Точка  $M(x, y, z)$  лежит на  $\ell$  тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (6)$$

которые называются *общими уравнениями прямой в пространстве*. Из того, что плоскости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  пересекаются, вытекает, что либо  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ , либо  $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$  (см. теорему о взаимном расположении плоскостей в § 16). Теорема со следующего слайда показывает, что понятие общих уравнений прямой в пространстве является частным случаем понятия общих уравнений кривой в пространстве, которое было введено в начале данного параграфа.

### Теорема об общем уравнении прямой в пространстве

*Пусть в пространстве задана произвольная система координат. Тогда всякая прямая в пространстве может быть задана уравнениями вида (6), в которых либо  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ , либо  $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ . Обратно, любые уравнения вида (6) с указанным ограничением на числа  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  и  $C_2$  определяют прямую.*

**Доказательство.** Первое утверждение теоремы доказано выше. Докажем второе утверждение. Рассмотрим систему (6). Каждое из двух уравнений, входящих в эту систему, задает некоторую плоскость. Эти две плоскости пересекаются, поскольку коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы (6) не пропорциональны (см. теорему о взаимном расположении плоскостей в § 16). Ясно, что прямая, по которой пересекаются эти плоскости, задается системой (6). □

## Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в произвольной системе координат (1)

2-е замечание о направляющем векторе прямой на плоскости из § 15 указывает простой способ нахождения направляющего вектора прямой на плоскости, заданной общим уравнением. Рассмотрим аналогичную задачу для прямой в пространстве. Пусть прямая  $\ell$  задана общими уравнениями (6). Требуется найти координаты ее направляющего вектора. По условию либо  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ , либо  $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ . Без ограничения общности будем считать, что  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ . Пусть  $(x_0, y_0, z_0)$  — координаты некоторой точки, принадлежащей прямой  $\ell$ . Тогда справедливы равенства  $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$  и  $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$ . Вычтем первое из этих равенств из первого уравнения системы (6), а второе — из второго уравнения этой системы. Получим систему уравнений, которую можно записать в виде

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) = -C_1(z - z_0), \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) = -C_2(z - z_0). \end{cases}$$

## Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в произвольной системе координат (2)

Будем смотреть на эту систему как на систему уравнений относительно  $x - x_0$  и  $y - y_0$ . Поскольку  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ , определитель этой системы отличен от нуля. По теореме Крамера (см. § 9), ее решение можно найти по следующим формулам:

$$x - x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -C_1(z - z_0) & B_1 \\ -C_2(z - z_0) & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y - y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1(z - z_0) \\ A_2 & -C_2(z - z_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \quad (7)$$

Используя 2-е и 4-е свойства определителей и принцип равноправия строк и столбцов (см. § 8), получаем, что

$$\begin{vmatrix} -C_1(z - z_0) & B_1 \\ -C_2(z - z_0) & B_2 \end{vmatrix} = (z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} A_1 & -C_1(z - z_0) \\ A_2 & -C_2(z - z_0) \end{vmatrix} = -(z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

## Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в произвольной системе координат (3)

Следовательно, равенства (7) можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

или в виде

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

С учетом 1-го замечания о направляющем векторе прямой в пространстве, из последних равенств вытекает

### 2-е замечание о направляющем векторе прямой в пространстве

*Вектор*

$$\vec{a} = \left( \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \quad (8)$$

*является направляющим вектором прямой, заданной уравнениями (6).  $\square$*

## Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в прямоугольной декартовой системе координат (1)

Мы вывели 2-е замечание о направляющем векторе прямой в пространстве в предположении, что система координат — произвольная. Формулы получились достаточно громоздкими и трудными для запоминания. Однако в случае, когда система координат — прямоугольная декартова, они имеют очень простую интерпретацию (и намного более простой вывод).

Итак, предположим, что прямая  $\ell$  задана системой уравнений (6) в прямоугольной декартовой системе координат. Обозначим плоскости, задаваемые первым и вторым уравнением системы (6), через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно. Векторы  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  и  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$  являются теперь нормальными векторами плоскостей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно (см. замечание о нормальном векторе плоскости в § 16). Положим  $\vec{b} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ . Тогда  $\vec{b} \perp \vec{n}_1$ . Поскольку  $\vec{n}_1 \perp \sigma_1$ , получаем, что  $\vec{b} \parallel \sigma_1$ . Аналогично проверяется, что  $\vec{b} \parallel \sigma_2$ . Но тогда  $\vec{b}$  коллинеарен прямой, по которой пересекаются плоскости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , т. е. прямой  $\ell$ . Далее, из того, что  $\sigma_1 \nparallel \sigma_2$ , вытекает, что  $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$ . В силу 2-го критерия коллинеарности векторов (см. § 12),  $\vec{b} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$ . Таким образом, вектор  $\vec{b}$  является направляющим вектором прямой  $\ell$ .

## Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в прямоугольной декартовой системе координат (2)

Осталось заметить, что векторное произведение векторов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  имеет в точности те координаты, которые указаны в правой части равенства (8) (см. формулу (3) в § 12). Итак, справедливо

### 3-е замечание о направляющем векторе прямой в пространстве

*Если в прямоугольной декартовой системе координат прямая задана как пересечение двух плоскостей, то в качестве ее направляющего вектора можно взять векторное произведение нормальных векторов этих плоскостей.*



Отметим еще, что

- направляющий вектор прямой  $\ell$ , заданной уравнениями (6), можно найти не используя 2-го и 3-го замечаний о направляющем векторе прямой в пространстве.

В самом деле, найдем координаты двух различных точек  $M_1$  и  $M_2$ , принадлежащих  $\ell$  (т. е. два различных решения  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  системы уравнений (6)). Тогда вектор  $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ , очевидно, будет направляющим вектором прямой  $\ell$ .



Перейдем к вопросам о взаимном расположении прямой и плоскости и о взаимном расположении двух прямых.

## Теорема о взаимном расположении прямой и плоскости

Пусть плоскость  $\sigma$  задана уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ , а прямая  $\ell$  — уравнениями (3). Тогда:

- 1)  $\ell$  и  $\sigma$  пересекаются тогда и только тогда, когда  $Aq + Br + Cs \neq 0$ ;
- 2)  $\ell$  и  $\sigma$  параллельны тогда и только тогда, когда  $Aq + Br + Cs = 0$  и  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ ;
- 3)  $\ell$  лежит в  $\sigma$  тогда и только тогда, когда  $Aq + Br + Cs = 0$  и  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ .

## Взаимное расположение прямой и плоскости (2)

**Доказательство.** Подставим правые части равенств (3) вместо  $x$ ,  $y$  и  $z$  в уравнение плоскости. Получим уравнение

$$A(x_0 + qt) + B(y_0 + rt) + C(z_0 + st) + D = 0. \quad (9)$$

Если точка  $M(x, y, z)$  принадлежит одновременно и  $\ell$ , и  $\sigma$ , то, с одной стороны, существует такое значение параметра  $t$ , при котором  $x$ ,  $y$  и  $z$  удовлетворяют равенствам (3), а с другой —  $x$ ,  $y$  и  $z$  удовлетворяют уравнению плоскости. Но в таком случае значение параметра  $t$ , соответствующее точке  $M$ , является решением уравнения (9).

Следовательно,  $\ell$  и  $\sigma$  пересекаются тогда и только тогда, когда это уравнение имеет единственное решение;  $\ell$  и  $\sigma$  параллельны тогда и только тогда, когда оно не имеет решений; наконец,  $\ell$  лежит в  $\sigma$  тогда и только тогда, когда это уравнение имеет бесконечно много решений. Уравнение (9) можно переписать в виде

$$(Aq + Br + Cs)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$

Ясно, что оно имеет единственное решение тогда и только тогда, когда  $Aq + Br + Cs \neq 0$ , что доказывает утверждение 1); не имеет решений тогда и только тогда, когда  $Aq + Br + Cs = 0$  и  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ , что доказывает утверждение 2); имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда  $Aq + Br + Cs = 0$  и  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ , что доказывает утверждение 3).

# Взаимное расположение двух прямых (1)

## Теорема о взаимном расположении прямых в пространстве

Пусть прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  заданы уравнениями

$$\begin{cases} x = x_1 + q_1 t, \\ y = y_1 + r_1 t, \\ z = z_1 + s_1 t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_2 + q_2 t, \\ y = y_2 + r_2 t, \\ z = z_2 + s_2 t \end{cases}$$

соответственно. Положим

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix}.$$

- 1)  $\ell_1$  и  $\ell_2$  скрещиваются тогда и только тогда, когда  $\Delta \neq 0$ ;
- 2)  $\ell_1$  и  $\ell_2$  пересекаются тогда и только тогда, когда  $\Delta = 0$  и либо  $\frac{q_1}{q_2} \neq \frac{r_1}{r_2}$ , либо  $\frac{r_1}{r_2} \neq \frac{s_1}{s_2}$ ;
- 3)  $\ell_1$  и  $\ell_2$  параллельны тогда и только тогда, когда  $\Delta = 0$ ,  $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$  и либо  $\frac{x_2 - x_1}{q_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{r_1}$ , либо  $\frac{y_2 - y_1}{r_1} \neq \frac{z_2 - z_1}{s_1}$ ;
- 4)  $\ell_1$  и  $\ell_2$  совпадают тогда и только тогда, когда  $\Delta = 0$ ,  $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$  и  $\frac{x_2 - x_1}{q_1} = \frac{y_2 - y_1}{r_1} = \frac{z_2 - z_1}{s_1}$ .

**Доказательство.** Введем следующие обозначения:  $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$  — направляющий вектор прямой  $\ell_1$ ;  $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$  — направляющий вектор прямой  $\ell_2$ ;  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  — точка, принадлежащая прямой  $\ell_1$ ;  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  — точка, принадлежащая прямой  $\ell_2$ ;  $\vec{c} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ . Ясно, что прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{c}$ ,  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  компланарны. Утверждение 1) вытекает теперь из замечания о координатах компланарных векторов в § 13.

Предположим теперь, что прямые лежат в одной плоскости или, что эквивалентно, выполнено равенство  $\Delta = 0$ . Ясно, что при выполнении этого условия прямые пересекаются тогда и только тогда, когда  $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$ . Учитывая критерий коллинеарности векторов (см. § 10), получаем утверждение 2).

Пусть, наконец,  $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ . Ясно, что в этом случае прямые либо параллельны, либо совпадают. Чтобы разделить два этих случая, достаточно проверить, лежит ли точка  $M_2$  на прямой  $\ell_1$ . Если ответ положителен, то прямые совпадают, в противном случае — параллельны. Учитывая, что канонические уравнения прямой  $\ell_1$  имеют вид  $\frac{x-x_1}{q_1} = \frac{y-y_1}{r_1} = \frac{z-z_1}{s_1}$ , получаем утверждения 3) и 4). □

# Расстояние от точки до прямой (1)

Наша ближайшая цель — вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве. Пусть прямая  $\ell$  задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st, \end{cases}$$

а  $M(x_1, y_1, z_1)$  — произвольная точка пространства. Точку с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ , принадлежащую прямой  $\ell$ , обозначим через  $M_0$ , а вектор с координатами  $(q, r, s)$ , являющийся направляющим вектором прямой  $\ell$ , — через  $\vec{a}$ . Кроме того, положим  $\vec{c} = \overrightarrow{M_0M} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ . Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 2.

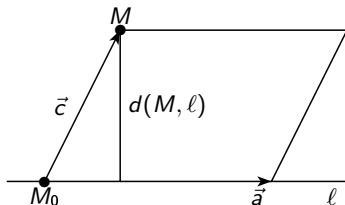


Рис. 2. Расстояние от точки до прямой

Обозначим расстояние от точки  $M$  до прямой  $\ell$  через  $d(M, \ell)$ . Ясно, что  $d(M, \ell)$  — высота параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$ . Обозначим его площадь через  $S$ . Тогда  $d(M, \ell) = \frac{S}{|\vec{a}|}$ . Вспоминая геометрический смысл векторного произведения векторов (см. § 12), мы получаем, что

$$d(M, \ell) = \frac{|\vec{a} \times \vec{c}|}{|\vec{a}|}.$$

По существу, это и есть формула расстояния от точки до прямой в пространстве. Если система координат, заданная в пространстве, является прямоугольной декартовой, то, используя формулу (5) из § 12, можно в явном виде выразить  $d(M, \ell)$  через координаты точек  $M_0$  и  $M$  и вектора  $\vec{a}$ :

$$d(M, \ell) = \sqrt{\frac{(r(z_1 - z_0) - s(y_1 - y_0))^2 + (q(z_1 - z_0) - s(x_1 - x_0))^2 + (q(y_1 - y_0) - r(x_1 - x_0))^2}{q^2 + r^2 + s^2}}.$$

# Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым (1)

Наша следующая цель — научиться находить расстояние между скрещивающимися прямыми. Прежде, чем выводить соответствующую формулу, надо сказать, что понимается под таким расстоянием. Для этого нам понадобится одно новое понятие.

## Определение

Пусть  $\ell_1$  и  $\ell_2$  — скрещивающиеся прямые. *Общим перпендикуляром* к прямым  $\ell_1$  и  $\ell_2$  называется прямая, перпендикулярная к каждой из прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$  и пересекающая каждую из них.

Ни из каких априорных соображений не вытекает, что общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым существует. Докажем, что это так.

## Теорема об общем перпендикуляре

*Для произвольных скрещивающихся прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$  существует общий перпендикуляр к этим прямым.*

*Доказательство.* Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 3 (см. следующий слайд).

## Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым (2)

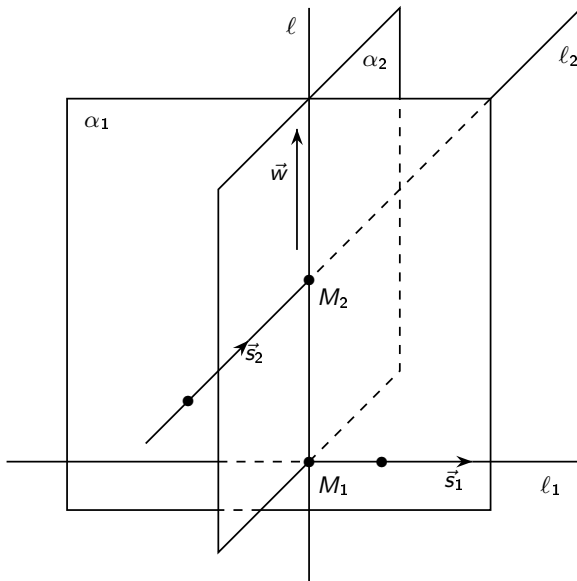


Рис. 3. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым



Обозначим направляющие векторы прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$  через  $\vec{s}_1$  и  $\vec{s}_2$  соответственно и положим  $\vec{w} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$ . Поскольку прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  скрещиваются,  $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$ . В силу 2-го критерия коллинеарности векторов (см. § 12)  $\vec{w} \neq \vec{0}$ . Обозначим через  $\alpha_1$  плоскость, проходящую через прямую  $\ell_1$  и коллинеарную вектору  $\vec{w}$ , а через  $\alpha_2$  — плоскость, проходящую через прямую  $\ell_2$  и коллинеарную вектору  $\vec{w}$ . Если бы эти две плоскости были параллельными или совпадающими, то векторы  $\vec{s}_1$ ,  $\vec{s}_2$  и  $\vec{w}$  были бы компланарными. Но это не так, поскольку  $\vec{w}$  — ненулевой вектор, ортогональный неколлинеарным векторам  $\vec{s}_1$  и  $\vec{s}_2$ . Следовательно, плоскости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  пересекаются по некоторой прямой. Обозначим эту прямую через  $\ell$ . Поскольку  $\vec{w}$  — ненулевой вектор, коллинеарный каждой из плоскостей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , он коллинеарен и прямой  $\ell$ . Таким образом,  $\vec{w}$  — направляющий вектор прямой  $\ell$ . Из построения вектора  $\vec{w}$  теперь вытекает, что  $\ell$  перпендикулярна каждой из прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$ .

Осталось доказать, что  $\ell$  пересекает  $\ell_1$  и  $\ell_2$ . Если бы прямая  $\ell_1$  была параллельна плоскости  $\alpha_2$  или лежала в этой плоскости, то векторы  $\vec{s}_1$ ,  $\vec{s}_2$  и  $\vec{w}$  были бы компланарными. Но это не так. Следовательно,  $\ell_1$  пересекает плоскость  $\alpha_2$  в некоторой точке. Обозначим эту точку через  $M_1$ . Ясно, что  $M_1 \in \alpha_1$  (так как  $M_1 \in \ell_1$  и  $\ell_1 \subseteq \alpha_1$ ) и  $M_1 \in \alpha_2$ . Следовательно,  $M_1$  лежит на прямой, по которой пересекаются плоскости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , т. е. на прямой  $\ell$ . Поскольку  $M_1 \in \ell_1$ , это означает что прямые  $\ell$  и  $\ell_1$  пересекаются (в точке  $M_1$ ). Аналогично проверяется, что прямая  $\ell_2$  пересекает плоскость  $\alpha_1$  в некоторой точке  $M_2$  и эта точка является точкой пересечения прямых  $\ell$  и  $\ell_2$ . □

## Определение

Расстояние между точками, в которых общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым  $\ell_1$  и  $\ell_2$  пересекает эти прямые, называется *расстоянием между скрещивающимися прямыми*  $\ell_1$  и  $\ell_2$ .

Такое определение расстояния между скрещивающимися прямыми естественно, поскольку, как несложно показать, расстояние между точками, в которых общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым  $\ell_1$  и  $\ell_2$  пересекает эти прямые, равно минимуму из длин всех отрезков вида  $A_1A_2$ , где  $A_1 \in \ell_1$ , а  $A_2 \in \ell_2$ .

Перейдем к вопросу о вычислении расстояния между скрещивающимися прямыми. Обозначим через  $\sigma$  плоскость, проходящую через точку  $M_1$  и коллинеарную векторам  $\vec{s}_1$  и  $\vec{s}_2$ . Из доказательства теоремы об общем перпендикуляре видно, что расстояние между прямыми  $\ell_1$  и  $\ell_2$  равно расстоянию от точки  $M_2$  до  $\sigma$ . Поскольку прямая  $\ell_2$  параллельна  $\sigma$ , расстояние от  $M_2$  до  $\sigma$  равно расстоянию от любой точки, лежащей на  $\ell_2$ , до  $\sigma$ . Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 4 (см. следующий слайд).

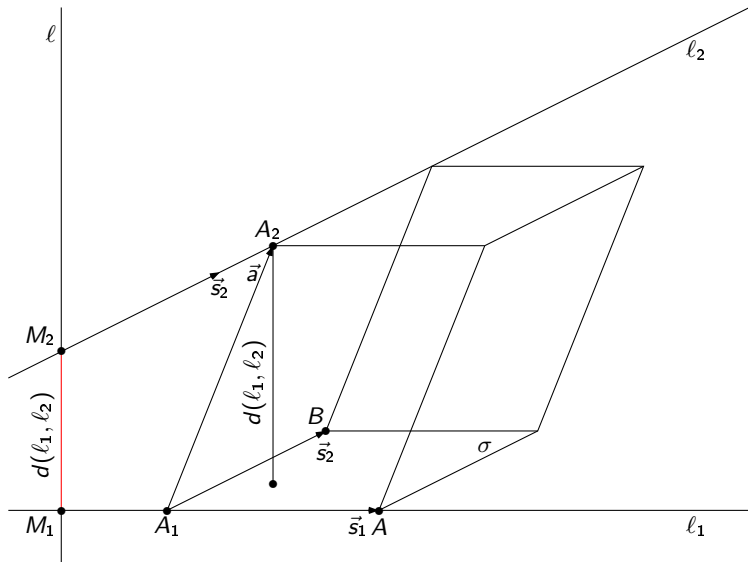


Рис. 4. Расстояние между скрещивающимися прямыми

## Расстояние между скрещивающимися прямыми (3)

Предположим, что мы знаем координаты точки  $A_1$ , принадлежащей прямой  $\ell_1$ , и точки  $A_2$ , принадлежащей прямой  $\ell_2$ . В силу сказанного выше, нам достаточно найти расстояние от  $A_2$  до  $\sigma$ . Отложим векторы  $\vec{s}_1$  и  $\vec{s}_2$  от точки  $A_1$ . Концы полученных направленных отрезков обозначим через  $A$  и  $B$  соответственно. Ясно, что расстояние от  $A_2$  до  $\sigma$  — это высота параллелипипеда, построенного на векторах  $\overrightarrow{A_1A}$ ,  $\overrightarrow{A_1B}$  и  $\overrightarrow{A_1A_2}$ . Эта высота равна частному от деления объема этого параллелепипеда на площадь его основания, т. е. параллелограмма, построенного на векторах  $\overrightarrow{A_1A}$  и  $\overrightarrow{A_1B}$ . Положим  $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ . Обозначим расстояние между прямыми  $\ell_1$  и  $\ell_2$  через  $d(\ell_1, \ell_2)$ . Вспоминая геометрический смысл векторного и смешанного произведений векторов (см. § 12 и 13 соответственно), мы получаем, что

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|\vec{a}\vec{s}_1\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}.$$

По существу, это и есть формула расстояния между скрещивающимися прямыми.

Если система координат, заданная в пространстве, является прямоугольной декартовой, то, используя формулу (5) из § 12 и формулу (4) из § 13, можно в явном виде выразить  $d(\ell_1, \ell_2)$  через координаты точек  $A_1$  и  $A_2$  и векторов  $\vec{s}_1$  и  $\vec{s}_2$ . Обозначим координаты точек  $A_1$  и  $A_2$  через  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  соответственно, а координаты векторов  $\vec{s}_1$  и  $\vec{s}_2$  — через  $(a_1, b_1, c_1)$  и  $(a_2, b_2, c_2)$  соответственно. Тогда:

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{\text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 + (a_1 c_2 - c_1 a_2)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2}}$$

(символом mod здесь, как и в формуле (6) из § 12, обозначен модуль определителя).