Поверхностные интегралы

1 Способы определения поверхности

а) явно заданная поверхность

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна на $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Множество точек $\Sigma = \{(x, y, f(x, y)) |\ (x, y) \in D\}$ называется *поверхностью Σ, явно заданной функцией $f(x, y)$.*

Уравнение $z = f(x, y)$ называется *уравнением поверхности* Σ.

б) параметрически заданная поверхность

Пусть

$$\Sigma = \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Пусть функции системы (1) непрерывны вместе со своими частными производными в Δ и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} \tag{2}$$

равен 2.

Тогда система (1) определяет поверхность Σ, называемую *параметрически заданной поверхностью*, и эта поверхность является гладкой.

NB Если ранг матрицы (2) равен 1 в некоторой точке, такая точка называется *особой.*

в) неявно заданная поверхность

Пусть дано уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \tag{3}$$

где функция F непрерывна вместе со своими частными производными и $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2 \neq 0$ в некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. (Например, $F'_z \neq 0$.)

Тогда существует функция $z = f(x, y)$ — непрерывное и непрерывно дифференцируемое решение уравнения (3).

Поверхность $\Sigma = \{(x, y, f(x, y)) |\ F(x, y, f(x, y)) = 0\}$ называется *поверхностью Σ, неявно заданной уравнением.* Эта поверхность гладкая.

NB Если $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2 \neq 0$ в некоторой точке, такая точка называется *особой.*

2 Касательная плоскость. Вектор нормали

Определение. Плоскость, проходящая через точку M_0 поверхности Σ, называется *касательной плоскостью к поверхности* Σ в этой точке, если в ней лежат касательные ко всем кривым, проходящим через точку M_0 и лежащим на Σ.

б) параметрически заданная поверхность

$$\Sigma = \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

в векторной форме: $\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Delta$

касательная плоскость: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

нормаль: $\vec{N}=(A,B,C)=\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$

а) явно заданная поверхность

$$\Sigma=\{(x,y,f(x,y))|\ (x,y)\in D\}$$

Поверхность Σ называется *гладкой*, если f'_x, f'_y непрерывны на D.

касательная плоскость: $z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

нормаль: $\vec{N}=(-f'_x,-f'_y,1)$

в) неявно заданная поверхность

$$F(x,y,z)=0 \tag{3}$$

касательная плоскость: $F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

нормаль: $\vec{N}=(F'_x,F'_y,F'_z)$

3 Площадь поверхности

Сапог Шварца

Пусть Σ — гладкая поверхность с границей $L = \partial\Sigma$ — кусочно-гладкой гривой.
$\Sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i$ — разбиение Σ на части Σ_i кусочно-гладкими кривыми.
$d_i = \sup\{\rho(M, N)|\ M, N \in \Sigma_i\}, \quad d = \max d_i$ — диаметр разбиения
$M_i \in \Sigma_i$.
π_i — касательная плоскость в точке M_i к Σ.
D_i — проекция Σ_i на π_i.

Определение. Если существует предел сумм площадей проекций Σ_i на касательные плоскости π_i при стремлении диаметра разбиения к нулю, то он называется *площадью поверхности* Σ, а сама поверхность называется *квадрируемой*:

$$S(\Sigma) = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} S(D_i).$$

Теорема. Пусть Σ — гладкая поверхность с кусочно-гладкой границей $L = \partial\Sigma$, заданная уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Delta$. Тогда Σ квадрируема и

$$S(\Sigma) = \iint_{\Delta} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dudv = \iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2}\, dudv,$$

где

$$E = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u), \quad G = (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v), \quad F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v).$$