

Лекция 11: Обратная матрица

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение

Пусть A — произвольная матрица. Матрица B называется *обратной* к A , если $AB = BA = E$, где E — единичная матрица. Если матрица, обратная к A , существует, то матрица A называется *обратимой*. Матрица, обратная к A , обозначается через A^{-1} .

В определении ничего не говорится о размерах матрицы A и обратной к ней матрицы. Но из замечания 1 в лекции 10 вытекает

Замечание 1

Если матрица A обратима, то она является квадратной матрицей, а обратная к ней матрица является квадратной матрицей того же порядка, что и A . □

Пример необратимой матрицы

Итак, если матрица A обратима, то она является квадратной. Легко понять, однако, что не всякая квадратная матрица обратима. Пусть, например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что матрица A обратима. В силу замечания 1 A^{-1} — квадратная матрица второго порядка. Положим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Поскольку $AA^{-1} = E$, имеем

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 2x + 4z & 2y + 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} x + 2z = 1, \\ 2x + 4z = 0, \\ y + 2t = 0, \\ 2y + 4t = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что полученная система линейных уравнений несовместна. Это означает, что матрицы A^{-1} не существует. Отметим, что $|A| = 0$. Как мы сейчас увидим, в этом и состоит причина того, что A не обратима.

Определение

Для всякой квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ положим $A^* = (A_{ij})$. Иными словами, A^* — квадратная матрица того же порядка, что и A , в i -й строке и j -м столбце которой стоит алгебраическое дополнение элемента a_{ij} . Матрица A^* называется *сопряженной* к матрице A .

Основным результатом данной лекции является следующая теорема, первое утверждение которой называется *критерием обратимости матрицы*.

Теорема 1

Пусть A — квадратная матрица. Матрица, обратная к A , существует тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$. Если $|A| \neq 0$, то матрица, обратная к A , единственна и может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^*)^T. \quad (1)$$

Доказательство. Предположим, что $|A| = 0$ и существует матрица B , обратная к A . Тогда $|AB| = |A| \cdot |B| = 0$ по теореме 1 из лекции 10. С другой стороны, из определения обратной матрицы и вытекает, что $|AB| = |E| = 1$. Полученное противоречие показывает, что если матрица, обратная к A , существует, то $|A| \neq 0$.

Критерий обратимости матрицы (2)

Предположим теперь, что $|A| \neq 0$. Докажем, что в этом случае существует матрица, обратная к A . Обозначим порядок матрицы A через n и положим $B = \frac{1}{|A|} \cdot (A^*)^T$. Убедимся в том, что матрица B является обратной к A . В самом деле, рассмотрим произведение матриц A и B :

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если элемент матрицы AB стоит на главной диагонали, скажем в i -й строке и i -м столбце, то он равен

$$\frac{1}{|A|} \cdot (a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}) = \frac{1}{|A|} \cdot |A| = 1,$$

поскольку в скобках записано разложение определителя $|A|$ по i -й строке. Если же этот элемент стоит в i -й строке и j -м столбце, где $i \neq j$, то по предложению 8 из лекции 5 он равен

$$\frac{1}{|A|} \cdot (a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}) = \frac{1}{|A|} \cdot 0 = 0.$$

Мы проверили, что $AB = E$. Равенство $BA = E$ проверяется аналогично. Следовательно, матрица B обратна к A .

Осталось проверить, что матрица, обратная к A , единственна.

Предположим, что существуют матрицы B_1 и B_2 такие, что $AB_1 = B_1A = E$ и $AB_2 = B_2A = E$. Тогда, с одной стороны, $B_2(AB_1) = B_2E = B_2$, а с другой, $B_2(AB_1) = (B_2A)B_1 = EB_1 = B_1$. Следовательно, $B_1 = B_2$. □

Матрица B , обратная к A , должна удовлетворять двум равенствам: $AB = E$ и $BA = E$. Следующее утверждение показывает, однако, что на практике достаточно проверять одно из них.

Лемма 1

Пусть A — квадратная матрица, а матрица B такова, что $AB = E$. Тогда матрица A обратима и $B = A^{-1}$.

Доказательство. В силу теоремы 1 из лекции 10 $|A| \cdot |B| = |AB| = |E| = 1$. В частности, отсюда следует, что $|A| \neq 0$. Из теоремы 1 теперь вытекает, что матрица A обратима. Умножая обе части равенства $AB = E$ слева на A^{-1} , получим $A^{-1}(AB) = A^{-1}E$. Но $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B$, а $A^{-1}E = A^{-1}$. Таким образом, $B = A^{-1}$. □

Свойства обратной матрицы

Если A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка, определители которых не равны 0, а t — ненулевое число, то:

- 1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- 3) $(tA)^{-1} = \frac{1}{t} \cdot A^{-1}$;
- 4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
- 5) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Свойство 1) непосредственно вытекает из определения обратной матрицы. Свойство 4) легко вытекает из формулы (1) и предложения 9 из лекции 5. В силу леммы 1 первая из трех следующих цепочек равенств доказывает свойство 2), вторая — свойство 3), а третья — свойство 5) (при этом используются свойства произведения матриц и теорема 1 из лекции 10):

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E;$$

$$(tA) \cdot \left(\frac{1}{t} \cdot A^{-1}\right) = \left(t \cdot \frac{1}{t}\right) \cdot (AA^{-1}) = 1 \cdot E = E;$$

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1.$$

Вычисление обратной матрицы с помощью формулы (1)

Один из способов вычисления обратной матрицы дает формула (1). Эту формулу удобно применять при $n = 2$: легко проверяется, что в этом случае она принимает следующий простой вид:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6 - 4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Но при больших n этот способ требует выполнения большого объема вычислений, который к тому же очень быстро (экспоненциально) растет с ростом порядка матрицы: если матрица A имеет порядок n , то необходимо сосчитать один определитель n -го порядка и n^2 определителей $(n - 1)$ -го порядка.

Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

Существует способ нахождения обратной матрицы, который не требует вычисления определителей. Объем вычислений в этом способе очень медленно (линейно) растет с ростом порядка матрицы. Чтобы сформулировать соответствующий алгоритм, достаточно учесть, что матрица, обратная к A , — это решение матричного уравнения $AX = E$, причем матрица A должна быть квадратной (см. замечание 1) и невырожденной (см. теорему 1). Из приведенного в лекции 10 алгоритма решения матричного уравнения $AX = B$ с квадратной невырожденной матрицей A немедленно вытекает

Алгоритм нахождения обратной матрицы

Пусть A — невырожденная квадратная матрица порядка n . Запишем матрицу размера $n \times 2n$, в которой в первых n столбцах стоит матрица A , а в последних n столбцах — единичная матрица. С помощью элементарных преобразований всей этой матрицы приведем ее левую часть (т. е. первые n столбцов) к единичному виду. В правой части (т. е. в последних n столбцах) полученной матрицы будет записана матрица A^{-1} .

Пример вычисления обратной матрицы с помощью сопряженной матрицы (1)

В качестве примера найдем двумя способами матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сначала найдем A^{-1} по формуле (1). Для этого прежде всего вычислим определитель матрицы A . Разлагая $|A|$ по последней строке, имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 \cdot (-2) = 3.$$

Теперь найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$
$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{14} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

Пример вычисления обратной матрицы с помощью сопряженной матрицы (2)

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{34} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{41} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{43} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3.$$

Пример вычисления обратной матрицы с помощью сопряженной матрицы (3)

Выпишем матрицу, сопряженную к A :

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Транспонировав эту матрицу и разделив каждый ее элемент на $|A|$, в силу формулы (1) получаем ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример вычисления обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

Теперь применим к той же матрице A изложенный выше алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 6 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right), \text{ и потому } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ответ, разумеется, совпал с найденным ранее другим способом.

С помощью обратных матриц можно решать крамеровские системы линейных уравнений, определитель которых отличен от 0. В самом деле, пусть $AX = B$ — такая система. Поскольку $|A| \neq 0$, в силу теоремы 1 существует матрица A^{-1} . Умножая обе части равенства $AX = B$ слева на A^{-1} и учитывая, что

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X,$$

получаем, что наша система имеет единственное решение, которое выражается формулой

$$X = A^{-1}B. \quad (3)$$

С помощью обратных матриц можно решать также некоторые матричные уравнения. К их числу относится уравнение вида $AX = B$, в котором A — невырожденная квадратная матрица. В самом деле, рассуждая так же, как на предыдущем слайде, мы получаем, что это уравнение решается по формуле (3).

Аналогичным образом решается уравнение вида $XA = B$, в котором A — невырожденная квадратная матрица. На этот раз обе части уравнения надо умножить на A^{-1} справа. Поскольку

$$(XA)A^{-1} = X(AA^{-1}) = XE = X,$$

мы получаем, что $X = BA^{-1}$.

Последний тип матричных уравнений, о котором мы упомянем, — это уравнения вида $AXB = C$, где A и B — невырожденные квадратные матрицы (возможно, различных порядков). Чтобы решить это уравнение, надо умножить обе его части на A^{-1} слева и на B^{-1} справа. Учитывая, что

$$A^{-1}(AXB)B^{-1} = (AA^{-1})X(BB^{-1}) = EXE = X,$$

мы получаем, что указанное уравнение решается по формуле

$$X = A^{-1}CB^{-1}. \quad (4)$$

Уравнение вида $AXB = C$: пример (1)

Решим указанным на предыдущем слайде способом уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A^{-1} :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Уравнение вида $AXB = C$: пример (2)

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу B^{-1} найдем по формуле (2):

$$B^{-1} = \frac{1}{4-3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Применяя формулу (4), имеем:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & -6 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Итак,

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}.$$