Скалярное произведение. Часть 2.

Семке Даниил

20.04.2020

№ 11.1.9 а) Найти базис ортогонального дополнения:

$(1,0,2,1)$

$(2,1,2,3)$

$(0,1,-2,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Найдем ФСР:
$$\begin{cases} x_3 = a \\ x_4 = b \\ x_2 = 2a - b \\ x_1 = -2a - b \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
f_1	-1	-1	0	1
f_2	-2	2	1	0

Ответ: например, $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

№ 11.1.~~13~~ 14 а) Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x на U:

$x = (4, -1, -3, 4)$

$U = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

$a_1 = (1, 1, 1, 1)$

$a_2 = (1, 2, 2, -1)$

$a_3 = (1, 0, 0, 3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x = y + z, \; y \in U, \; z \in U^{\perp}$

$y = \alpha \cdot a_1 + \beta a_2$

Домножим скалярно на a_1, a_2:

$* \; z \cdot a_i = 0$, т.к. $z \in U^{\perp}$

$$\begin{cases} (x, a_1) = \alpha (a_1, a_1) + \beta \cdot (a_1, a_2) \\ (x, a_2) = \alpha (a_1, a_2) + \beta (a_2, a_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = 4\alpha + 4\beta \\ -8 = 4\alpha + 10\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \Rightarrow \boxed{\alpha = 3} \\ \boxed{\beta = -2} \end{cases}$$

$$y = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ответ: y, z

$$z = x - y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

№ 11.1.20(а)

Найти расстояние от x до линейного многообразия

$x = (4, 2, -5, 1)$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}$$

Найдем общее решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_3 = a \\ x_4 = b \\ x_2 = \frac{a+b-3}{2} \\ x_1 = \frac{6-b}{2} \end{cases}$$

Частное решение: $\begin{cases} x_3 = x_4 = 0 \\ x_1 = 3 \\ x_2 = -3/2 \end{cases}$

Однор. система:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{cases} x_3 = a_1 \\ x_4 = b_1 \\ x_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \\ x_1 = -\frac{b_1}{2} \end{cases}$

	x_1	x_2	x_3	x_4
f_1	$-1/2$	$1/2$	0	1
f_2	0	$1/2$	1	0

Общее решение:

$$\vec{x} = \vec{x_0} + a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R}$$

Пусть $a = t_1$, $b = t_2$ — параметры $t_i \in (-\infty; +\infty)$

Тогда $\vec{x} = \vec{x_0} + t_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ — ур-ие исходной плоскости (многообразия), заданной параметрически

$\Rightarrow$ (Пусть α — ~~нач~~ исходная плоскость) α получается $\parallel$ переносом на вектор $\vec{x_0}$ плоскости β: $\vec{x} = \vec{a_1} t_1 + \vec{a_2} t_2$, где $\langle a_1, a_2 \rangle$ — базис ее направляющего подпространства.

Давайте порисуем: см. след. страницу.

α — ~~нач~~ исходная плоскость

β — плоскость, проходящая через нач. координат, паралл-но α.

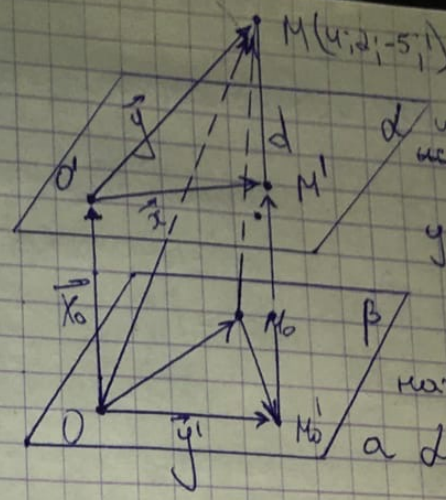
O — начало координат, O' — сдвинутое на $\vec{x_0}$ начало коорд.

~~[illegible]~~

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \vec{x} \\ x_0 = \overrightarrow{OO'} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{O'M} = \vec{x} - \vec{x_0} = y,$$

где x_0 - частное решение системы

$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, найдем ~~y~~ ортогон. проекцию на β:



α исходная плоскость, ~~исходная~~

У нас плоскость β проходит через начало координат, а α сдвинута на $\vec{x_0}$.

$y' = \overrightarrow{OM_0'} = \overrightarrow{OM'} = m\vec{a_1} + n\vec{a_2}$

$$\begin{cases} (y, a_1) = m(a_1, a_1) + n(a_1, a_2) \\ (y, a_2) = m(a_1, a_2) + n(a_2, a_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{13}{2} = 5m + n \\ \frac{9}{2} = m + 6n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13 = 10m + 2n \\ 9 = 2m + 12n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{10m} - 58 = -58n \\ 10m = 45 - 60n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$y' = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Мы нашли $O'M$ - орт. проекцию $\overrightarrow{O'M'}$, найдем $\overrightarrow{M_0M_0'} =$

$$= \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Найдем длину MM':

$$|MM'| = \sqrt{4 + 16 + 4 + 1} = \sqrt{25} = 5$$

Ответ: 5