Итоговая контрольная работа.

Семке Даниил
Кн-102, Мен-190207
27.05.2020

① Найти базис ортогонального дополнения к подпространству U, порожденному векторами

(2, -1, 3, 1, 1)
(1, 0, 2, 3, -1)
(1, -1, 1, -2, 2)

Составим матрицу и приведем ее к ступ. виду

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$x_{3,4,5}$ – свободные переменные
$x_{1,2}$ – базисные.

Общее решение:

$$\begin{cases} x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \\ x_5 = C_3 \\ x_2 = -C_1 - 5C_2 + 3C_3 \\ x_1 = -2C_1 - 3C_2 + \cancel{3C_3} + C_3 \end{cases}$$

ФСР

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f_1	1	3	0	0	1
f_2	-3	-5	0	1	0
f_3	-2	-1	1	0	0

Ответ: например, $U = \{f_1, f_2, f_3\}$

② Найти базис пересечения пересечение подпространства, порожд. векторами

L_1: (1, -2, 3, 1)
(0, 1, 0, -1)
(1, -1, 3, 0)

и подпр., порож. вект.: (1, 1, -1, -1)

L_2: (2, -3, 6, 1)
(1, 6, -9, -4)

Найдем базисы систем:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ – базис L_1,

$\dim L_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & -9 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 3 \\ 0 & 5 & -8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$ – базис L_2, $\dim L_2 = 2$

$$L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$L_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$L_1 \cap L_2: \quad a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & +5 \\ 3 & 0 & +1 & -8 \\ 1 & -1 & +1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & +2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b_2 – своб. пер.

$a_{1,2}, b_1$ – базисные:

$$\begin{cases} b_2 = C \\ b_1 = 2C \\ a_2 = C \\ a_1 = 2C \end{cases}$$

ФСР:

	a_1	a_2	b_1	b_2
f_1	2	1	2	1

$\dim(L_1 \cap L_2) = 1$

Проверим с помощью формулы: $\dim(L_1 \cap L_2) =$

$= \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 2 + 2 - 3 = 1$ – верно.

$$\vec{x} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $L_1 \cap L_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & -9 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{-1} \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{-1} \\ 0 & 8 & -12 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 8 & 12 & -5 \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} -
$$

~~dim(M1∩M2) = dimM1+dimM2-...~~ =

$=3$

— базис суммы,

$$\boxed{\dim(L_1+L_2)=3}$$

3

(3) Найти объем параллелотопа, постр. на векторах

$a_1 = (1, 2, -1, 1)$

$a_2 = (2, 3, 2, 1)$

$a_3 = (-1, -2, 0, 1)$

$a_4 = (-1, 1, 1, 1)$

Согласно предложению об объеме параллелотопа: $V = \sqrt{g_A}$, где g - опр-ль Грама матр. A, сост. из векторов $a_{[1,4]}$

$$A = \begin{pmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & (a_1,a_3) & (a_1,a_4) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & (a_2,a_3) & (a_2,a_4) \\ (a_3,a_1) & (a_3,a_2) & (a_3,a_3) & (a_3,a_4) \\ (a_4,a_1) & (a_4,a_2) & (a_4,a_3) & (a_4,a_4) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 7 & -4 & 1 \\ 7 & 18 & -7 & 4 \\ -4 & -7 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 18 & -7 & 4 \\ -7 & 6 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 7 & -7 & 4 \\ -4 & 6 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 7 & 7 & -4 \\ 7 & 18 & -7 \\ -4 & -7 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 16\cdot 7 + 18\cdot 6 - \overset{7\cdot 7}{\cancel{49}} - 24\cdot 7 - 4(64 + 7\cdot 6 - 7\cdot 4 - 24\cdot 7) -$$

$$-4(18\cdot 6\cdot 7 + 7\cdot 28 + 28\cdot 7 - 16\cdot 18 - 7\cdot 7\cdot 7 - 42\cdot 7) =$$

$$= 16\cdot 7 + 18\cdot 6 - 7\cdot 7 - 24\cdot 7 - 4\cdot 64 - 24\cdot 7 + 16\cdot 7 + 296\cdot 7 - 4\cdot 18\cdot 6\cdot 7 - 28^2 - 4\cdot 28\cdot 7 +$$

$$+ 64\cdot 18 + 4\cdot 7^3 + 4\cdot 42\cdot 7 = -529 \Rightarrow g_A = |-529| = 529$$

$$\boxed{V = \sqrt{529} = 23}$$

Ответ: 23

(4) ~~Привести кв. форму к каноническому виду.~~

$$\cancel{-2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_4 - 4x_3x_4}$$

Составим матрицу кв. формы:

④ Привести к каноническому виду:

$$f = -2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_4 - 4x_3x_4 =$$

$$= -2\left(x_2^2 + x_2(x_1-2x_4) + \left(\frac{x_1-2x_4}{2}\right)^2\right) + 4x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_3x_4 +$$

$$+ \frac{x_1^2 - 4x_1x_4 + 4x_4^2}{2} = -2\left(x_2 + \frac{x_1-2x_4}{2}\right)^2 + 4\left(x_3^2 + x_3(x_1-x_4) + \frac{(x_1-x_4)^2}{4}\right) +$$

$$+ \frac{x_1^2 - 4x_1x_4 + 4x_4^2}{2} = -2\left(x_2 + \frac{x_1-2x_4}{2}\right)^2 + 4\left(x_3 + \frac{x_1-x_4}{2}\right)^2 - (x_1-x_4)^2 +$$

$$+ \frac{x_1^2 - 4x_1x_4 + 4x_4^2}{2} = \underbrace{-2\left(x_2 + \frac{x_1-2x_4}{2}\right)^2 + 4\left(x_3 + \frac{x_1-x_4}{2}\right)^2}_{A} - x_1^2 + 2x_1x_4 - x_4^2 +$$

$$+ \frac{x_1^2 - 4x_1x_4 + 4x_4^2}{2} = A + \frac{-x_1^2 + 2x_4^2}{2} = 0$$

$$-\frac{x_1^2}{2} - 2\left(x_2 + \frac{x_1-2x_4}{2}\right)^2 + 4\left(x_3 + \frac{x_1-x_4}{2}\right)^2 + x_4^2 = f$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 + \dfrac{x_1-2x_4}{2} = y_2 \\ x_3 + \dfrac{x_1-x_4}{2} = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 + y_4^2 = f}$$

– канонический вид

Покажем, что система невырождена:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$