§ 24. Подпространства

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Поскольку, как отмечалось в § 22, векторные пространства являются универсальными алгебрами, к ним можно применять понятие подалгебры (см. § 4). Для облегчения восприятия дальнейшего материала, укажем явно, какой вид принимает это понятие в случае векторных пространств.

Определение

Непустое подмножество M векторного пространства V над полем F называется *подпространством* пространства V, если выполняются следующие условия:

1) если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$ (*замкнутость подпространства относительно сложения векторов*);
2) если $\mathbf{x} \in M$, а $t \in F$, то $t\mathbf{x} \in M$ (*замкнутость подпространства относительно умножения вектора на скаляр*).

Приведем ряд примеров подпространств.

Пример 1. Пусть V — произвольное векторное пространство. Очевидно, что все пространство V и множество $M = \{\mathbf{0}\}$ являются подпространствами в V.

Очевидно, что множество всех подпространств векторного пространства с отношением включения является чумом. Подпространство V является наибольшим элементом этого чума, а подпространство $\{\mathbf{0}\}$ — наименьшим. Первое из этих двух утверждений очевидно, а второе вытекает из следующего замечания.

Замечание о нулевом векторе и подпространствах

Нулевой вектор содержится в любом подпространстве M пространства V.

Доказательство. Если $\mathbf{x}$ — произвольный вектор из M, то, по условию 2) из определения подпространства, $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x} \in M$. □

Пример 2. Пусть V — обычное трехмерное пространство, а M — множество векторов из V, коллинеарных некоторой плоскости π. Ясно, что сумма двух векторов, коллинеарных π, и произведение вектора, коллинеарного π, на любое число коллинеарны π. Следовательно, M — подпространство в V. Аналогично доказывается, что подпространством в V является и множество векторов, коллинеарных некоторой прямой ℓ.

Примеры подпространств (2)

Пример 3. В силу теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений (см. § 6) общее решение произвольной однородной системы линейных уравнений с n неизвестными над полем F есть подпространство пространства F_n.

Пример 4. Пусть V — произвольное векторное пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$. Обозначим через M множество всевозможных линейных комбинаций векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, т. е.

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_k\mathbf{a}_k \text{ и } \mathbf{y} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$$

для некоторых скаляров $s_1, s_2, \ldots, s_k$ и $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Пусть, далее, t — произвольный скаляр. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_k\mathbf{a}_k) + (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k) = \\ &= (s_1 + t_1)\mathbf{a}_1 + (s_2 + t_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (s_k + t_k)\mathbf{a}_k \quad \text{и} \\ t\mathbf{x} &= t(s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_k\mathbf{a}_k) = (ts_1)\mathbf{a}_1 + (ts_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (ts_k)\mathbf{a}_k. \end{aligned}$$

Мы видим, что $\mathbf{x} + \mathbf{y}, t\mathbf{x} \in M$, т. е. M — подпространство пространства V. Оно называется *подпространством, порожденным векторами* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ или *линейной оболочкой* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, и обозначается через $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$.

Ясно, что если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — система порождающих (в частности, базис) пространства V, то $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle = V$. Таким образом,

- *любое подпространство конечномерного векторного пространства является подпространством, порожденным некоторым набором векторов (например, своим базисом).*

Замечание о подпространстве, порожденном набором векторов

Пусть V — векторное пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$. Тогда $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$ — наименьшее подпространство пространства V, содержащее векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Доказательство. Пусть M — подпространство пространства V, содержащее векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Из определения подпространства вытекает, что любая линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ лежит в M. Следовательно, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle \subseteq M$. $\square$

Очевидно, что подпространство векторного пространства само является векторным пространством. Это позволяет говорить о размерности и базисе подпространства.

Предложение о размерности подпространства

Пусть M — подпространство векторного пространства V. Тогда $\dim M \leqslant \dim V$, причем $\dim M = \dim V$ тогда и только тогда, когда $M = V$.

Доказательство. Если M или V — нулевое пространство, то оба утверждения предложения выполняются тривиальным образом. Будем поэтому считать, что M и V — ненулевые пространства. Зафиксируем базис $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$ подпространства M и базис $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell)$ пространства V. Если $k > \ell$, то в силу леммы о большом наборе векторов (см. § 23) система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима. Но это противоречит определению базиса. Следовательно, $k \leqslant \ell$, т. е. $\dim M \leqslant \dim V$.

Пусть теперь $\dim M = \dim V$, т. е. $k = \ell$. Тогда система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ является максимальной линейно независимой. В самом деле, в противном случае существует вектор $\mathbf{a}$ такой, что система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}$ линейно независима. Но она содержит $k+1$ вектор, что противоречит лемме о большом наборе векторов (см. § 23). Таким образом, система векторов $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ является базисом пространства V. Следовательно, любой вектор из V является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Поскольку эти векторы лежат в M, а M — подпространство в V, это означает, что любой вектор из V лежит в M, т. е. $V \subseteq M$. Обратное включение выполнено по условию, и потому $M = V$. Итак, если $\dim M = \dim V$, то $M = V$. Обратное утверждение очевидно. $\square$

Укажем способ нахождения базиса и размерности подпространства, порожденного данным набором векторов.

Алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства, порожденного данным набором векторов

Запишем координаты данных векторов в некотором фиксированном базисе пространства в матрицу по строкам и приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом нашего подпространства, а число этих строк равно его размерности.

Обоснование этого алгоритма будет дано в § 27.

Поскольку подпространства векторного пространства V являются его подмножествами, к ним можно применять все теоретико-множественные операции. Но важной для линейной алгебры является только одна из них — операция пересечения подпространств. Как и пересечение любых множеств, пересечение подпространств обозначается символом $\cap$. Введем еще одну важную операцию над подпространствами.

Определение

Пусть V — векторное пространство, а M_1 и M_2 — его подпространства. *Суммой подпространств* M_1 и M_2 называется множество всех векторов из V, являющихся суммой некоторого вектора из M_1 и некоторого вектора из M_2. Сумма подпространств M_1 и M_2 обозначается через $M_1 + M_2$.

Замечание о сумме и пересечении подпространств

Если M_1 и M_2 — подпространства пространства V, то $M_1 + M_2$ и $M_1 \cap M_2$ также являются подпространствами в V.

Доказательство. В силу замечания о нулевом векторе и подпространствах, каждое из подпространств M_1 и M_2 содержит нулевой вектор. Следовательно, $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in M_1 + M_2$ и $\mathbf{0} \in M_1 \cap M_2$. В частности, множества $M_1 + M_2$ и $M_1 \cap M_2$ — непустые. Далее, пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_1 + M_2$ и t — произвольный скаляр.

Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ и $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, для некоторых $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \in M_2$. Учитывая, что M_1 и M_2 — подпространства, получаем, что

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) \in M_1 + M_2,$$
$$t\mathbf{x} = t(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = t\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2 \in M_1 + M_2.$$

Следовательно, $M_1 + M_2$ — подпространство в V. Далее, пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_1 \cap M_2$ и t — произвольный скаляр. Тогда $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_1$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_2$. Поскольку M_1 и M_2 — подпространства, имеем $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M_1$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M_2$ $t\mathbf{x} \in M_1$ и $t\mathbf{x} \in M_2$. Следовательно, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M_1 \cap M_2$ и $t\mathbf{x} \in M_1 \cap M_2$, и потому $M_1 \cap M_2$ — подпространство в V. $\square$

Замечание о сумме подпространств

Если M_1 и M_2 — подпространства пространства V, то подпространство $M_1 + M_2$ содержит M_1 и M_2 и является наименьшим подпространством в V, обладающим указанным свойством.

Доказательство. Если $\mathbf{x} \in M_1$, то $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$, поскольку $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0}$ и $\mathbf{0} \in M_2$. Следовательно, $M_1 \subseteq M_1 + M_2$. Аналогично проверяется, что $M_2 \subseteq M_1 + M_2$. Пусть теперь M — подпространство в V, содержащее M_1 и M_2. Предположим, что $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ для некоторых $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$. Следовательно, $\mathbf{x}_1 \in M$ и $\mathbf{x}_2 \in M$, откуда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in M$. Таким образом, $M_1 + M_2 \subseteq M$. $\square$

В § 1 отмечалось, что операцию пересечения множеств можно применять к любому (в том числе бесконечному) числу множеств. Сооответственно, можно говорить о пересечении любого (в том числе бесконечного) набора подпространств данного векторного пространства. Операцию суммы подпространств также можно применять не к двум подпространствам, а к их большему, но только конечному числу. Если $M_1, M_2, \ldots, M_k$ — подпространства векторного пространства V и $k > 2$, то, по индукции, положим

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_k = (M_1 + M_2 + \cdots + M_{k-1}) + M_k.$$

При этом скобки в левой части равенства можно не ставить, поскольку операция суммы двух подпространств, очевидно, ассоциативна.

Первым из двух основных результатов данного параграфа является

Теорема о размерности суммы и пересечения подпространств

Пусть V — векторное пространство, а M_1 и M_2 — его подпространства. Тогда размерность суммы подпространств M_1 и M_2 равна сумме размерностей этих подпространств минус размерность их пересечения.

Доказательство. Из предложения о размерности подпространства вытекает, что $\dim(M_1 \cap M_2) \leqslant \dim M_1$ и $\dim(M_1 \cap M_2) \leqslant \dim M_2$. Положим

$$\dim(M_1 \cap M_2) = k, \ \ \dim M_1 = k + \ell \text{ и } \dim M_2 = k + m.$$

Если $M_1 = \{\mathbf{0}\}$, то, очевидно, $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$, $\dim M_1 = \dim(M_1 \cap M_2) = 0$, $M_1 + M_2 = M_2$ и потому

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_2 = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Аналогично разбирается случай, когда $M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Итак, далее можно считать, что пространства M_1 и M_2 — ненулевые, и, в частности, каждое из них имеет базис. Будем также считать, что $M_1 \cap M_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ (в противном случае следует во всех дальнейших рассуждениях заменить базис пространства $M_1 \cap M_2$ на пустой набор векторов; сами рассуждения при этом только упростятся). Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис пространства $M_1 \cap M_2$.

В силу теоремы о дополнении до базиса (см. § 23) этот набор векторов можно дополнить как до базиса M_1, так и до базиса M_2. Пусть $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_\ell$ — базис M_1, а $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_m$ — базис M_2. Докажем, что набор векторов

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m \qquad (1)$$

является базисом пространства $M_1 + M_2$. Этого достаточно для доказательства теоремы, так как число векторов в этом наборе равно

$$k + \ell + m = (k + \ell) + (k + m) - k = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Пусть $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$. Ясно, что вектор $\mathbf{x}_1$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_\ell$, а вектор $\mathbf{x}_2$ — линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_m$. Следовательно, вектор $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ является линейной комбинацией векторов (1). Таким образом, набор векторов (1) является системой образующих пространства $M_1 + M_2$. В силу леммы о базисах и системах образующих (см. § 23) остается доказать, что этот набор векторов линейно независим. В самом деле, предположим, что

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k + s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell + r_1\mathbf{c}_1 + r_2\mathbf{c}_2 + \cdots + r_m\mathbf{c}_m = \mathbf{0} \quad (2)$$

для некоторых скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_k, s_1, s_2, \ldots, s_\ell, r_1, r_2, \ldots, r_m$. Требуется доказать, что все эти скаляры равны 0.

Положим $\mathbf{y} = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell$. Очевидно, что $\mathbf{y} \in M_1$. С другой стороны, из (2) вытекает, что

$$\mathbf{y} = -t_1\mathbf{a}_1 - t_2\mathbf{a}_2 - \cdots - t_k\mathbf{a}_k - r_1\mathbf{c}_1 - r_2\mathbf{c}_2 - \cdots - r_m\mathbf{c}_m \in M_2.$$

Следовательно, $\mathbf{y} \in M_1 \cap M_2$. Но тогда вектор $\mathbf{y}$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Таким образом, существуют скаляры $q_1, q_2, \ldots, q_k$ такие, что $\mathbf{y} = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell = q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \cdots + q_k\mathbf{a}_k$. Следовательно,

$$q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \cdots + q_k\mathbf{a}_k - s_1\mathbf{b}_1 - s_2\mathbf{b}_2 - \cdots - s_\ell\mathbf{b}_\ell = \mathbf{0}. \qquad (3)$$

Поскольку векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_\ell$ образуют базис пространства M_1, они линейно независимы. Поэтому линейная комбинация, стоящая в левой части равенства (3), тривиальна. В частности, $s_1 = s_2 = \cdots = s_\ell = 0$. Следовательно, равенство (2) принимает вид

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k + r_1\mathbf{c}_1 + r_2\mathbf{c}_2 + \cdots + r_m\mathbf{c}_m = \mathbf{0}.$$

Учитывая, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_m$ образуют базис пространства M_2 (и, в частности, линейно независимы), мы получаем, что $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0$. Итак, все коэффициенты в левой части равенства (2) равны 0, что и требовалось доказать. $\square$

Пусть подпространство M_1 имеет базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, а подпространство M_2 — базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$. Предположим, что $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. Тогда существуют векторы $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$ такие, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. В силу выбора векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ имеем

$$\mathbf{x}_1 = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2 = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \dots + s_\ell\mathbf{b}_\ell$$

для некоторых скаляров $t_1, t_2, \dots, t_k$ и $s_1, s_2, \dots, s_\ell$. Следовательно,

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k + s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \dots + s_\ell\mathbf{b}_\ell.$$

Это означает, что пространство $M_1 + M_2$ содержится в подпространстве, порожденном набором векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$. С другой стороны, очевидно, что каждый из этих векторов, а значит и подпространство, ими порожденное, содержится в $M_1 + M_2$. Следовательно,

$$M_1 + M_2 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell \rangle.$$

Учитывая алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства, порожденного данным набором векторов, получаем

Алгоритм нахождения базиса и размерности суммы подпространств

Пусть даны базисы подпространств M_1 и M_2. Запишем в матрицу по строкам координаты векторов, входящих в эти базисы, в некотором фиксированном базисе пространства и приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом суммы подпространств M_1 и M_2, а число этих строк равно ее размерности.

Отметим, что, найдя размерность суммы подпространств M_1 и M_2, мы сможем найти и размерность их пересечения, так как, в силу теоремы о размерности суммы и пересечения,

$$\dim(M_1 \cap M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 + M_2). \tag{4}$$

Базис пересечения ищется несколько сложнее. Способ решения этой задачи будет указан в § 36.

Определение

Пусть V — векторное пространство, а M_1 и M_2 — его подпространства. Говорят, что сумма подпространств M_1 и M_2 является их *прямой суммой*, если $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Прямая сумма подпространств M_1 и M_2 обозначается через $M_1 \oplus M_2$ или $M_1 \dotplus M_2$.

Из доказательства теоремы о размерности суммы и пересечения подпространств вытекает

Замечание о базисе прямой суммы подпространств

Если $V = M_1 \oplus M_2$, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell$ — базис M_1, а $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$ — базис M_2, то $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$ — базис пространства V. $\square$

Вторым основным результатом данного параграфа является

Теорема о прямой сумме подпространств

Пусть V — векторное пространство, а M_1 и M_2 — его подпространства. Следующие условия эквивалентны:

1) $M_1 + M_2$ *является прямой суммой подпространств* M_1 *и* M_2;
2) $\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$;
3) *любой вектор из* $M_1 + M_2$ *единственным образом представим в виде суммы вектора из* M_1 *и вектора из* M_2;
4) *нулевой вектор пространства* V *единственным образом представим в виде суммы вектора из* M_1 *и вектора из* M_2.

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) непосредственно вытекает из теоремы о размерности суммы и пересечения и того факта, что размерность нулевого пространства равна 0. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) очевидна. Поэтому достаточно доказать импликации 1) $\Longrightarrow$ 3) и 4) $\Longrightarrow$ 1).

1) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. По определению суммы подпространств $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$. Остается доказать, что такое представление вектора $\mathbf{x}$ единственно. Предположим, что $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, где $\mathbf{y}_1 \in M_1$ и $\mathbf{y}_2 \in M_2$. Учитывая, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, имеем $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2$. Ясно, что $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 \in M_1$, а $\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2 \in M_2$. Следовательно, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2 \in M_1 \cap M_2$. Но $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Поэтому $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2$.

4) $\Longrightarrow$ 1). Предположим, что $M_1 \cap M_2 \neq \{\mathbf{0}\}$, т. е. существует ненулевой вектор $\mathbf{x} \in M_1 \cap M_2$. Тогда вектор $\mathbf{0}$ может быть двумя различными способами представлен в виде суммы вектора из M_1 и вектора из M_2: $\mathbf{0} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x})$ и $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$. Мы получили противоречие с условием 4). □

При решении задач полезно иметь в виду следующее

Замечание о прямой сумме подпространств

$V = M_1 \oplus M_2$ *тогда и только тогда, когда*

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 = \dim V.$$

Доказательство. Если $V = M_1 \oplus M_2$, то, в частности, $M_1 + M_2 = V$, и потому $\dim(M_1 + M_2) = \dim V$. А $\dim M_1 + \dim M_2 = \dim(M_1 + M_2)$ в силу теоремы о прямой сумме подпространств. Обратно, если $\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 = \dim V$, то $M_1 + M_2 = V$ в силу предложения о размерности подпространства и $\dim(M_1 \cap M_2) = 0$ в силу (4). Из последнего равенства вытекает, что $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Объединяя этот факт с равенством $M_1 + M_2 = V$, получаем, что $V = M_1 \oplus M_2$. $\square$

Определение

Предположим, что $V = M_1 \oplus M_2$ и $\mathbf{x} \in V$. В силу теоремы о прямой сумме подпространств существуют однозначно определенные векторы $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$ такие, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. Вектор $\mathbf{x}_1$ называется *проекцией* $\mathbf{x}$ *на* M_1 *параллельно* M_2, а вектор $\mathbf{x}_2$ — *проекцией* $\mathbf{x}$ *на* M_2 *параллельно* M_1.

Алгоритм нахождения проекции вектора на подпространство

Пусть $V = M_1 \oplus M_2$ и $\mathbf{x} \in V$. Предположим, что нам известны базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ подпространства M_1 и базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell$ подпространства M_2. В силу замечания о базисе прямой суммы подпространств $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell$ — базис пространства V. Найдем координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе. Пусть они имеют вид $(t_1, t_2, \ldots, t_k, s_1, s_2, \ldots, s_\ell)$. Тогда $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$ — проекция $\mathbf{x}$ на M_1 параллельно M_2, а $s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell$ — проекция $\mathbf{x}$ на M_2 параллельно M_1.

Обоснование этого алгоритма очевидно: если, в указанных обозначениях, $\mathbf{y} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{z} = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell$, то $\mathbf{y} \in M_1$, $\mathbf{z} \in M_2$ и $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$.

В дальнейшем нам пригодится следующее утверждение

Предложение о дополняющем подпространстве

Для произвольного подпространства M векторного пространства V существует такое подпространство M' в V, что $V = M \oplus M'$.

Доказательство. Ясно, что если $M = \{\mathbf{0}\}$, то в качестве M' можно взять V, а если $M = V$, то достаточно положить $M' = \{\mathbf{0}\}$. Пусть теперь $\{\mathbf{0}\} \subset M \subset V$. Положим $\dim V = n$ и $\dim M = k$. В силу сказанного $0 < k < n$. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис M. В силу теоремы о дополнении до базиса (см. § 23) существуют векторы $\mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ такие, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ образуют базис V. Положим $M' = \langle \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$. Проверим, что нулевой вектор единственным образом представим в виде суммы вектора из M и вектора из M'. Существование такого представления очевидно, поскольку $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ (см. замечание о нулевом векторе и подпространствах). Предположим теперь, что $\mathbf{0} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, где $\mathbf{x} \in M$, а $\mathbf{y} \in M'$. Тогда $\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{y} = t_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} + \cdots + t_n\mathbf{a}_n$ для некоторых скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_n$, откуда $\mathbf{0} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_n\mathbf{a}_n$. Поскольку $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — базис пространства V, получаем, что $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$. Но тогда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Итак, вектор $\mathbf{0}$ единственным образом представим в виде суммы вектора из M и вектора из M'. В силу теоремы о прямой сумме подпространств $M + M' = M \oplus M'$.

Осталось доказать, что $M + M' = V$. Пусть $\mathbf{a}$ — произвольный вектор из V. Разложим его по базису $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$: $\mathbf{a} = q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \cdots + q_n\mathbf{a}_n$. Положим $\mathbf{b} = q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \cdots + q_k\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{c} = q_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} + \cdots + q_n\mathbf{a}_n$. Тогда $\mathbf{b} \in M$, $\mathbf{c} \in M'$ и $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Следовательно, $V \subseteq M + M'$. Обратное включение очевидно, и потому $M + M' = V$. $\square$

Определение

Пусть V — векторное пространство, $\mathbf{x}_0 \in V$, а M — подпространство в V. Множество всех векторов вида $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$, где $\mathbf{y} \in M$, называется *линейным многообразием* в V и обозначается через $\mathbf{x}_0 + M$. Вектор $\mathbf{x}_0$ называется *вектором сдвига* многообразия $\mathbf{x}_0 + M$, а подпространство M — *направляющим подпространством* этого многообразия.

Приведем примеры линейных многообразий.

Пример 1. Если $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, то $\mathbf{x}_0 + M = M$. Таким образом, всякое подпространство пространства V является линейным многообразием в V.

Пример 2. Если $M = \{\mathbf{0}\}$, то $\mathbf{x}_0 + M = \{\mathbf{x}_0\}$. Таким образом, всякий вектор из V также является линейным многообразием в V.

Пример 3. Согласно теореме о строении общего решения системы линейных уравнений (см. § 6), общее решение произвольной совместной системы линейных уравнений с n неизвестными над полем F является линейным многообразием в F_n, вектором сдвига которого является произвольное частное решение системы, а направляющим подпространством — общее решение соответствующей однородной системы.

Пример 4. Рассмотрим произвольную плоскость π. Зафиксируем на ней прямоугольную декартову систему координат и рассмотрим прямую ℓ на π. Будем отождествлять прямую ℓ с множеством всех направленных отрезков, начинающихся в начале координат и заканчивающихся на ℓ. Про такие направленные отрезки мы будем говорить, что они «принадлежат прямой». Если ℓ проходит через начало координат, то она, очевидно, является подпространством, а значит, и линейным многообразием (см. пример 1 на предыдущем слайде). Пусть теперь ℓ не проходит через начало координат. Выберем произвольным образом и зафиксируем направленный отрезок $\vec{x}_0$, принадлежащий ℓ. Обозначим через ℓ_1 прямую, параллельную ℓ и проходящую через начало координат. Тогда всякий направленный отрезок $\vec{x}$, принадлежащий ℓ, может быть представлен как сумма направленного отрезка $\vec{x}_0$ и некоторого направленного отрезка $\vec{y}$, принадлежащего ℓ_1 (см. рис. 1). Обратно, всякий направленный отрезок вида $\vec{x}_0 + \vec{y}$, где $\vec{y} \in \ell_1$, принадлежит ℓ. Поскольку ℓ_1 — подпространство, получаем, что ℓ — линейное многообразие с вектором сдвига $\vec{x}_0$ и направляющим подпространством ℓ_1. Аналогично можно проверить, что любая плоскость (рассматриваемая как множество направленных отрезков, идущих из начала координат в точки плоскости) является линейным многообразием в трехмерном пространстве.

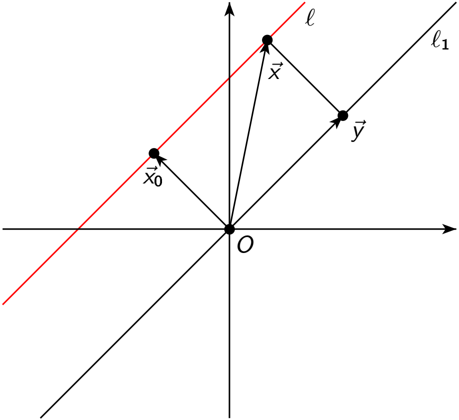

Рис. 1. Прямая как линейное многообразие

В примерах 3 и 4 в качестве вектора сдвига можно было взять произвольный вектор, принадлежащий данному линейному многообразию. Легко понять, что то же самое верно и в примерах 1 и 2. Оказывается, что это не случайно: этот факт справедлив для любого линейного многообразия. Мы получим это утверждение как следствие из следующего результата.

Критерий равенства линейных многообразий

Пусть $P = \mathbf{x}_0 + M$ и $Q = \mathbf{y}_0 + N$ — линейные многообразия в векторном пространстве V. Равенство $P = Q$ имеет место тогда и только тогда, когда $M = N$ и $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 \in M$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $P = Q$. Докажем сначала, что $M = N$. Пусть $\mathbf{a} \in M$. Поскольку $\mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \in P$ и $P = Q$, получаем, что $\mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \in \mathbf{y}_0 + N$. Следовательно, существует вектор $\mathbf{b} \in N$ такой, что $\mathbf{x}_0 + \mathbf{a} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{b}$. Далее,

$$\mathbf{x}_0 \in \mathbf{y}_0 + N, \tag{5}$$

так как $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{0} \in P$ и $P = Q$. Следовательно, существует вектор $\mathbf{c} \in N$ такой, что $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 + \mathbf{c}$. Имеем

$$\mathbf{y}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{c} + \mathbf{a},$$

откуда $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c} \in N$. Итак, если $\mathbf{a} \in M$, то $\mathbf{a} \in N$. Следовательно, $M \subseteq N$.

Аналогично проверяется, что $N \subseteq M$ и потому $M = N$.

Остается проверить, что $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 \in M$. В самом деле, из (5) и доказанного только что равенства $M = N$ вытекает, что $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{y}_0 + M$. Следовательно, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 + \mathbf{a}$ для некоторого вектора $\mathbf{a} \in M$ и потому $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 = \mathbf{a} \in M$.

Достаточность. Пусть теперь $M = N$ и $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 \in M$. Требуется доказать, что $P = Q$. Пусть $\mathbf{a} \in P$. Тогда $\mathbf{a} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}$ для некоторого вектора $\mathbf{b} \in M$. По условию $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 = \mathbf{c}$ для некоторого вектора $\mathbf{c} \in M$. Следовательно, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 + \mathbf{c}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{y}_0 + (\mathbf{c} + \mathbf{b})$. Поскольку $\mathbf{c} + \mathbf{b} \in M$ и $M = N$, имеем $\mathbf{a} \in Q$. Следовательно, $P \subseteq Q$. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что $Q \subseteq P$ и потому $P = Q$. □

В частности, из доказанного критерия видно, что

- *направляющее подпространство данного линейного многообразия определено однозначно.*

Это позволяет определить *размерность* линейного многообразия $\mathbf{x}_0 + M$ как размерность подпространства M.

Докажем теперь обещанное выше следствие.

Следствие о векторе сдвига

Пусть $P = \mathbf{x}_0 + M$ *— линейное многообразие в векторном пространстве* V *и* $\mathbf{x}_1 \in P$. *Тогда* $P = \mathbf{x}_1 + M$.

Доказательство. По условию $\mathbf{x}_1 \in P$, т. е. $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{x}_0 + M$. Следовательно, существует вектор $\mathbf{y} \in M$ такой, что $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$. Но тогда $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{y} \in M$. Из доказанной выше теоремы вытекает, что $P = \mathbf{x}_0 + M = \mathbf{x}_1 + M$. □

Таким образом,

- *в качестве вектора сдвига данного линейного многообразия можно взять произвольный принадлежащий ему вектор.*