Собственные значения и векторы. Кн-102 МЕН 190207 Семке Даниил

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Составим характ. ур-ие:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad -\lambda(2-\lambda)+1=0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$\boxed{\lambda = 1}$ – собств. значение

Составим с.л.у.: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -x-y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-y$$

Возьмем $\underline{y=-1} \Rightarrow \underline{x=1}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ответ: собств. знач. $\lambda = 1$

собств. вектор: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Далее я не буду описывать все рассуждения, а просто изложу решение:

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}\right.$$

1) $\lambda_1 = 0$ $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-y$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y \Rightarrow y=x=1 \quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\lambda_1=0 \quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2=2 \quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

③ $A_3=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad -(2-\lambda)(\lambda+1)+2=0$$

$$-\cancel{2}-\lambda+\lambda^2+\cancel{2}=0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=1 \end{array}\right.$$

1) $\lambda_1=0$

$$\begin{cases} 2x+2y=0 \\ -x-y=0 \end{cases} \quad -x=y \quad x=-y \quad \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases} \quad \vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_2=1$

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ -x-2y=0 \end{cases} \quad x=-2y \quad \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases} \quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\lambda_1=0 \quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2=1 \quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

④ $A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2-\alpha & 1 & -2 \\ 2 & -2-\alpha & 3 \\ 1 & -1 & 1-\alpha \end{vmatrix} = 0$

$$(2+\alpha)^2(1-\alpha)+3+4+2(-2-\alpha)-2(1-\alpha)+3(-2-\alpha)=0$$

$$(4+4\alpha+\alpha^2)(1-\alpha)+7-4-\cancel{2\alpha}-2+\cancel{2\alpha}-6-3\alpha=0$$

$$4-4\alpha-4\alpha^2+\alpha^2-\alpha^3-5-3\alpha=0$$

$$\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1=0$$

$$(\alpha+1)^3=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=-1}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$y=z=a\in\mathbb{R}$

$x=-y$

$z=1 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\alpha=-1 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad z=0$$

⑤ $A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\lambda(2-\lambda)(1+\lambda)+2+1-(1+\lambda)-2+\lambda-2\lambda=0$$

$$\lambda(\cancel{2}+\lambda-\lambda^2)\cancel{+3}\cancel{-1}\cancel{-\lambda}\cancel{-2}\cancel{+\lambda}\cancel{-2\lambda}=0$$

$$\lambda^2-\lambda^3=0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=1 \end{array}\right.$$

1) $\lambda_1=0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$z=0 \quad x=-y$

$y=-1$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\lambda_2=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x=z \Rightarrow z=x=1$

$y=0 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\lambda_1=0$, $v_1=(1;-1;0)$; $\lambda_2=1$, $\vec{v}_2=(1;0;1)$