Квадратичные формы. Часть 2

Семке
Даниил
09.05.2020

№12.1.11.а) найти все значения параметра a, при которых положительно определены приведенные ниже квадратичные формы.

а) $5x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

По второму критерию Сильвестра квадр. форма полож-о определена $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ все угловые миноры > 0

Найдем все угловые миноры:

1. $|5| = 5 > 0$

2. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$

3. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = 5a + 2 + 2 - 1 - 5 - 4a = a - 2 > 0 \Rightarrow \boxed{a > 2}$

Ответ: $a > 2$

№12.1.12.(а): Выяснить, какая из форм f и g является полож-о опр-ой, найти невырожд. замену переменных, приводящую эту форму к нормальному виду, а другую – к канонич.

а) $f = -4x_1x_2$

$g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$

1) f: $|0| > 0$ – неверно – форма не полож-о определена

$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$

2) $|1| = 1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$ – форма полож-о определена.

3) Приведем g к нормальному виду:

$$g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 = \begin{bmatrix} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_2 \end{bmatrix} = y_1^2 + 3y_2^2 = \begin{bmatrix} t_1 = y_1 \\ t_2 = \sqrt{3}\,y_2 \end{bmatrix} = t_1^2 + t_2^2$$

Выразим x_i и подставим в f:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} t_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} t_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f = \frac{-4}{\sqrt{3}} t_1 t_2 - \frac{4}{3} t_2^2$$

Приведем форму к главным осям:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & -4/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & -2/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & -\frac{4}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \frac{4}{3}\lambda + \lambda^2 - \frac{4}{3} = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda - \frac{4}{3} = 0$$

$$D = \frac{16}{9} + \frac{16}{3} = \frac{64}{9} = \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{4}{3} \pm \frac{8}{3}}{2} = \left[\begin{matrix} -2 \\ 2/3 \end{matrix}\right.$$

Найдем собств. векторы:

$\lambda_1 = -2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, пронормируем: $\vec{e}_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2/3 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, пронорм.: $\vec{e}_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Матрица кв. формы f: $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{f = -2z_1^2 + \frac{2}{3} z_2^2}$

$z_1 = \frac{1}{2} t_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} t_2$ (подставляя в одно из ур-ий t_1 или t_2)

$z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} t_1 + \frac{1}{2} t_2$ получаем: $\begin{cases} t_1 = \frac{1}{2} z_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} z_2 \\ t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} z_1 + \frac{1}{2} z_2 \end{cases}$ подставим в (1)

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = z_1 - \frac{\sqrt{3}}{3} z_2 \\ x_2 = \frac{1}{2} z_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} z_2 \end{cases}} \qquad \boxed{g = z_1^2 + z_2^2}$$ (подставим ~~в~~ x_1, x_2 в g)