Квадрики в пространстве.

Семке Даниил
22.05.2020
Кн-102, Мен-190207

№12.3.1. $K(4,1,-3)$ – концы диаметра
$L(2,-3,5)$

$x^2+y^2+z^2=a^2$ – сфера.

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$ – сдвинутая сфера с центром O'

$\overrightarrow{KL}=(-2,-4,8)$

$O'(x_0,y_0,z_0)=(3,-1,1)$ – центр сферы

$\frac{\overrightarrow{KL}}{2}=\frac{\sqrt{84}}{2}=\sqrt{21}$ – радиус.

$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z-10=0}$$

№12.3.3

$\vec{a}\,(2,3,-4)$

напр: $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z=1 \end{cases}$ Пусть σ – цилиндр. поверхность с напр. l и образующими, коллинеарными $\vec{a}$.

$M\in\sigma$, $M(x_0,y_0,z_0)$ – произв. точка.

пусть l_m – образующая, проходящая через M.

Параметр. ур-ия прямой l_m имеют вид: найдем точку M' пересечения l_m и Z

$\begin{cases} x=x_0+2t \\ y=y_0+3t \\ z=z_0-4t \end{cases}$ подставим в исх. систему z: $z_0-4t=1$

$t=\frac{z_0-1}{4}$

$\begin{cases} x=x_0+\frac{z_0-1}{4} \\ y=y_0+\frac{3}{4}(z_0-1) \\ z=\cancel{z_0}-\cancel{z_0}+1=1 \end{cases}$ подставим в ур-ие окружности, т.к. $M'\in x^2+y^2=9$

$\left(x_0+\frac{z_0-1}{4}\right)^2+\left(y_0+\frac{3}{4}(z_0-1)\right)^2=9$ $\quad x_0^2+\frac{x_0(z_0-1)}{2}+\frac{z_0^2-2z_0+1}{16}+y_0^2+\frac{3}{2}(z_0-1)+$

$+\frac{9}{16}(z_0^2-2z_0+1)=9 \Rightarrow 16x_0^2+16y_0^2+13z_0^2-16x_0z_0+24y_0z_0+16x_0-24y_0-26z_0-131=0$

но т.к. M – произв. точка $\Rightarrow$ коорд. любой точки цилиндр-ой пов-ти δ удовл. ур-ию:

$$\boxed{16x^2+16y^2+13z^2-16xz+24yz+16x-24y-26z-131=0}$$

Легко понять, что если $M \notin \delta \Rightarrow M' = \ell \cap \Pi_{z=1} \notin x^2+y^2=9 \Rightarrow$ координаты M' не удовл. уравнению.

№12.3.10

$C(3,-1,-2)$ – вершина

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

Аналогично с пред. номерами: $M(x_0,y_0,z_0)$ – пр-ая точка на конической пов-ти.

$CM=(x_0-3,\ y_0+1,\ z_0+2)$

$$\begin{cases} x=(x_0-3)t+x_0 \\ y=(y_0+1)t+y_0 \\ z=(z_0+2)t+z_0 \end{cases}$$

$\ell \cap \Pi (x-y+z)=0$

$(x_0-3)t+x_0-(y_0+(y_0+1)t)+(z_0+(z_0+2)t)=0$

$t(-2+x_0-y_0+z_0)=-x_0+y_0-z_0$

$$\boxed{t=\frac{-x_0+y_0-z_0}{x_0-y_0+z_0-2}}$$

Подставим в систему t:

$$x_0+(x_0-3)\left(\frac{-x_0+y_0-z_0}{x_0-y_0+z_0-2}\right)=\frac{x_0-3y_0+3z_0}{x_0-y_0+z_0-2}$$

$$y_0+(y_0+1)t=\frac{-x_0-y_0-z_0}{x_0-y_0+z_0-2}$$

$$z_0+(z_0+2)t=\frac{-2x_0+2y_0-4z_0}{x_0-y_0+z_0-2}$$

Подставим в $x^2+y^2-z^2=1$

С помощью незамысловатых математических операций получаем $\boxed{3x^2-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-4x+4y-4z+4=0}$

№12.3.15(а)

$x^2+4y^2+4z^2-2x+8y-8z=(x-1)^2+4(y+1)^2+4(z-1)^2=9$

$$\begin{cases} x-1=x' \\ y+1=y' \\ z-1=z' \end{cases}$$

$x'^2+4y'^2+4z'^2=9 \quad |:9$

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{9/4}+\frac{z'^2}{9/4}=1$$ – эллипсоид

№12.3.17(а

$7x^2+6y^2$

Запише

старш

$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1=3$

$\vec{v}_1=\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Пронормируе

$\vec{e}_1=\frac{2}{3}($

$D=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

№12.3.17(а)

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$$

Запишем матрицу кв. формы для ~~b^2 и $2ab$, a, b – переменные~~ старших членов:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Приведем к к главным осям

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda_{1,2,3} = \left[\begin{matrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{matrix}\right.$$

$\lambda_1 = 3$ $\quad$ $\lambda_2 = 6$ $\quad$ $\lambda_3 = 9$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пронормируем:

$$\vec{e}_1 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$T^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$3x_0^2+6y_0^2+9z_0^2 \; -6x-24y+18z+30=0$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x_0 - y_0 + z_0\right) \\ y = \frac{2}{3}\left(x_0 - \frac{1}{2}y_0 - z_0\right) \\ z = \frac{2}{3}\left(x_0 + y_0 + \frac{1}{2}z_0\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0' = x_0 - 1 \\ y_0' = y_0 - 2 \\ z_0' = z_0 + 1 \end{cases}$$

$$x_0'^2 + 2y_0'^2 + 3z_0'^2 = 2 \quad |:2$$

$$\frac{x_0'^2}{2} + y_0'^2 + \frac{z_0'^2}{\frac{2}{3}} = 1$$

эллипсоид

$2yz - 4x + 4y - 4z + 4 = 0$