

# § 16. Плоскость

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,  
Институт естественных наук и математики,  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Этот параграф посвящен изучению плоскости. Он построен по тому же плану, что и предыдущий. Многие утверждения схожи как по формулировкам, так и по доказательствам. Иногда все отличия в доказательствах сводятся к появлению у точек и векторов третьих координат. В этих случаях мы не приводим доказательство в явном виде, ограничиваясь указанием на его сходство с доказательством аналогичного утверждения для прямой на плоскости.

Подобно тому, как прямая является частным случаем кривой, плоскость является частным случаем поверхности. В конце нашего курса (в § 45–48) будут изучаться поверхности, которые не являются плоскостью. Поэтому в начале этого параграфа мы скажем несколько слов о произвольных поверхностях.

Как и кривые на плоскости, поверхности можно задавать с помощью уравнений двумя способами. Первый из них состоит в том, чтобы указать, как связаны между собой координаты точек, лежащих на поверхности (и только этих точек). Этот подход приводит к следующему определению.

## Определение

Будем считать, что пространстве зафиксирована система координат. Уравнение вида  $F(x, y, z) = 0$ , где  $F(x, y, z)$  — произвольная функция от трех переменных, называется **общим уравнением** поверхности  $\sigma$ , если точка пространства лежит на  $\sigma$  тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют этому уравнению. Множество всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению  $F(x, y, z) = 0$ , называется **геометрическим образом** этого уравнения.

В качестве примера рассмотрим сферу. Как известно из школьного курса, сфера радиуса  $r$  с центром в точке  $C(a, b, c)$  задается (в прямоугольной декартовой системе координат) уравнением

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2,$$

которое равносильно общему уравнению

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0.$$

Второй способ задания поверхности уравнениями, как и в случае кривой на плоскости, состоит в том, что указывается не зависимость между координатами точек, которые принадлежат данной поверхности, а зависимость каждой из этих координат от некоторых параметров (отличие от кривых состоит в том, что для задания поверхности требуется не один параметр, а два). Этот подход приводит к следующему определению.

## Определение

Будем считать, что пространстве зафиксирована система координат. Уравнения вида

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \\ z = h(u, v), \end{cases}$$

где  $f(u, v)$ ,  $g(u, v)$  и  $h(u, v)$  — произвольные функции от двух переменных, называются **параметрическими уравнениями** поверхности  $\sigma$ , если точка  $M$  с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  лежит на  $\sigma$  тогда и только тогда, когда существуют числа  $u_0$  и  $v_0$  такие, что  $x_0 = f(u_0, v_0)$ ,  $y_0 = g(u_0, v_0)$  и  $z_0 = h(u_0, v_0)$ . Переменные  $u$  и  $v$  называются **параметрами**.

В качестве примера рассмотрим сферу радиуса  $r$  с центром в начале координат. Пусть  $M(x, y, z)$  — произвольная точка пространства. Обозначим через  $u$  угол между положительным направлением оси  $Ox$  и радиусом-вектором проекции точки  $M$  на плоскость  $Oxy$ , а через  $v$  — угол между положительным направлением оси  $Oz$  и радиусом-вектором точки  $M$ . Легко понять, что точка  $M$  принадлежит сфере тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x = r \cos u \sin v, \\ y = r \sin u \sin v, \\ z = r \cos v \end{cases}$$

(см. рис. 1 на следующем слайде). Это и есть параметрические уравнения сферы.

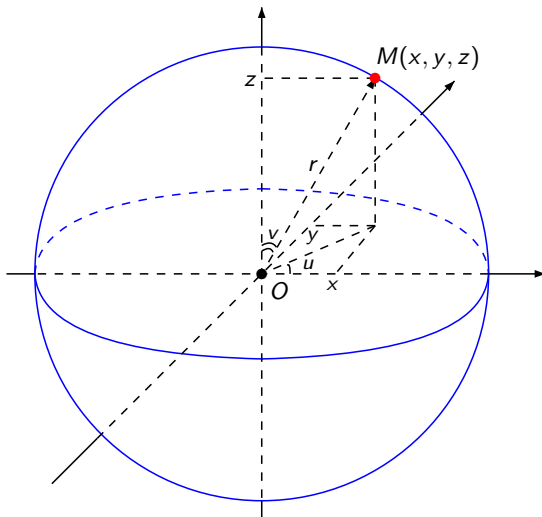


Рис. 1. Параметризация сферы

Перейдем к основной теме этого параграфа — изучению плоскости. Прежде всего, введем в рассмотрение следующие два понятия, которые будут играть исключительно важную роль в дальнейшем.

## Определение

Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной плоскости, называется ее *направляющим вектором*. Любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости, называется ее *нормальным вектором*.

Из этого определения видно, что

- как направляющий, так и нормальный вектор для данной плоскости определены неоднозначно. Плоскость имеет бесконечно много направляющих векторов и бесконечно много (коллинеарных друг другу) нормальных векторов.

# Параметрические уравнения плоскости (1)

Перейдем к рассмотрению видов уравнений плоскости. Мы рассмотрим пять видов таких уравнений: параметрические, каноническое, по трем точкам, общее и в отрезках. По сравнению с видами уравнений прямой на плоскости (см. § 15), здесь отсутствует лишь аналог уравнения прямой с угловым коэффициентом.

Выясним, как выглядят параметрические уравнения плоскости.

Предположим, что в пространстве зафиксирована система координат с началом в точке  $O$ . Пусть  $\sigma$  — плоскость, точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  принадлежит плоскости  $\sigma$ , а векторы  $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$  и  $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$  являются ее направляющими векторами, не коллинеарными между собой. Пусть  $M(x, y, z)$  — произвольная точка пространства. Обозначим радиус-вектор точки  $M_0$  через  $\vec{r}_0$ , а радиус-вектор точки  $M$  — через  $\vec{r}$ . Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 2.

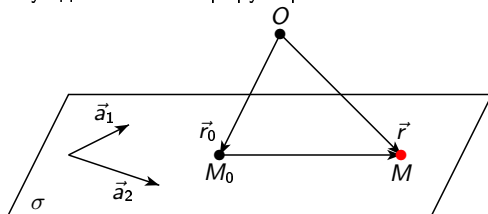


Рис. 2. К выводу параметрических уравнений плоскости



## Параметрические уравнения плоскости (2)

Ясно, что точка  $M$  лежит в плоскости  $\sigma$  тогда и только тогда, когда вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  коллинеарен  $\sigma$ . Векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  образуют базис плоскости  $\sigma$ . Если вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  и плоскость  $\sigma$  коллинеарны, то, в силу теоремы о разложении вектора по базису на плоскости (см. § 10), существуют числа  $u$  и  $v$  такие, что  $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ . Обратно, очевидно, что если  $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$  для некоторых чисел  $u$  и  $v$ , то  $\overrightarrow{M_0M} \parallel \sigma$ . Таким образом,  $M \in \sigma$  тогда и только тогда, когда  $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$  для некоторых чисел  $u$  и  $v$ . Поскольку  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}$ , получаем, что  $M \in \sigma$  тогда и только тогда, когда  $\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$  для некоторых чисел  $u$  и  $v$ . Координаты векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_0$  совпадают с координатами точек  $M$  и  $M_0$  соответственно. Расписав равенство  $\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$  в координатах, получаем уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + q_1u + q_2v, \\ y = y_0 + r_1u + r_2v, \\ z = z_0 + s_1u + s_2v, \end{cases} \quad (1)$$

которые называются *параметрическими уравнениями плоскости*.

Понятие параметрических уравнений плоскости является частным случаем понятия параметрических уравнений поверхности, которое было введено в начале данного параграфа.

Как было показано выше, точка  $M(x, y, z)$  принадлежит плоскости  $\sigma$  тогда и только тогда, когда векторы  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ,  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  компланарны. Из замечания о координатах компланарных векторов (см. § 13) вытекает, что это условие эквивалентно выполнению равенства

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

которое называется *каноническим уравнением плоскости*.

- Каноническое уравнение плоскости аналогично одному из двух указанных в § 15 способов записи канонического уравнения прямой на плоскости (см. уравнение (5) в § 15).

Предположим теперь, что мы знаем координаты трех точек, принадлежащих плоскости и не лежащих на одной прямой, —  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Тогда векторы  $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$  и  $\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$  коллинеарны плоскости и не коллинеарны между собой (последнее гарантировано тем обстоятельством, что точки  $M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2$  не лежат на одной прямой). Подставляя их координаты в уравнение (2), получаем следующее уравнение, которое называется *уравнением плоскости по трем точкам*:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

- Как и в случае с каноническим уравнением, это уравнение можно считать аналогичным уравнению прямой на плоскости по двум точкам (см. уравнение (6) в § 15), поскольку последнее уравнение можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Из сказанного выше вытекают следующие два замечания.

### 1-е замечание о направляющих векторах плоскости

*Если плоскость задана любым из уравнений (1) и (2), то векторы с координатами  $(q_1, r_1, s_1)$  и  $(q_2, r_2, s_2)$  являются ее направляющими векторами, не коллинеарными между собой.*

### Замечание о точке, лежащей на плоскости

*Если плоскость задана любым из уравнений (1), (2) и (3), то точка с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  принадлежит плоскости.*

# Общее уравнение плоскости (1)

Разложив определитель из равенства (2) по первой строке, имеем следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} \cdot (x - x_0) - \begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix} \cdot (y - y_0) + \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} \cdot (z - z_0) = 0. \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix}, \quad B = - \begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда равенство (4) можно переписать в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Положив  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ , получим уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (5)$$

Легко понять, что если  $A = B = C = 0$ , то  $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$ . В силу критерия коллинеарности векторов (см. § 10) это означает, что векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  коллинеарны вопреки их выбору. Уравнение вида (5), в котором по крайней мере одно из чисел  $A$ ,  $B$  и  $C$  отлично от нуля, называется **общим уравнением плоскости**. Теорема со следующего слайда показывает, что это понятие является частным случаем понятия общего уравнения поверхности, которое было введено в начале данного параграфа.

### Теорема об общем уравнении плоскости

*Пусть в пространстве задана произвольная система координат. Тогда всякая плоскость может быть задана уравнением вида (5), в котором по крайней мере одно из чисел  $A$ ,  $B$  и  $C$  отлично от нуля. Обратно, любое уравнение вида (5) с указанным ограничением на числа  $A$ ,  $B$  и  $C$  определяет плоскость.*

**Доказательство.** Первое утверждение теоремы было доказано выше. Докажем второе утверждение. Рассмотрим уравнение (5), где  $A \neq 0$ , или  $B \neq 0$ , или  $C \neq 0$ . Для определенности будем считать, что  $A \neq 0$ . Возьмем произвольное решение  $(x_0, y_0, z_0)$  уравнения (5). Обозначим через  $M_0$  точку с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ . Положим  $\vec{a}_1 = (-B, A, 0)$  и  $\vec{a}_2 = (-C, 0, A)$ . Из того, что  $A \neq 0$  вытекает, что векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  непропорциональны, а значит и не коллинеарны. Обозначим через  $\sigma$  плоскость, проходящую через точку  $M_0$  коллинеарно векторам  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ . Докажем, что плоскость  $\sigma$  задается уравнением (5).

Запишем каноническое уравнение плоскости  $\sigma$ :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Раскрывая определитель из левой части этого равенства по первой строке, имеем  $A^2(x - x_0) + AB(y - y_0) + AC(z - z_0) = 0$ . Разделив это уравнение на  $A$ , получим  $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$ . Поскольку  $(x_0, y_0, z_0)$  — решение уравнения (5),  $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$ . Следовательно, уравнение (6) равносильно уравнению (5).  $\square$

Из доказательства теоремы об общем уравнении плоскости легко выводится следующий факт.

### 2-е замечание о направляющих векторах плоскости

*Пусть плоскость задана общим уравнением (5). Положим  $\vec{s}_1 = (-B, A, 0)$ ,  $\vec{s}_2 = (-C, 0, A)$  и  $\vec{s}_3 = (0, -C, B)$ . Тогда по крайней мере два из векторов  $\vec{s}_1$ ,  $\vec{s}_2$  и  $\vec{s}_3$  не коллинеарны и являются направляющими векторами плоскости (если  $A \neq 0$ , то этими свойствами обладают векторы  $\vec{s}_1$  и  $\vec{s}_2$ , если  $B \neq 0$  — векторы  $\vec{s}_1$  и  $\vec{s}_3$ , а если  $C \neq 0$  — векторы  $\vec{s}_2$  и  $\vec{s}_3$ ).  $\square$*

## Определение

Пусть плоскость  $\pi$  задана общим уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Тогда вектор  $\vec{n} = (A, B, C)$  называется *главным вектором* плоскости  $\pi$ .

Отметим, что главный вектор плоскости определен неоднозначно. В самом деле, ясно, что если  $t$  — ненулевое число, то уравнения  $Ax + By + Cz + D = 0$  и  $tAx + tBy + tCz + tD = 0$  определяют одну и ту же плоскость, главными векторами которой будут как  $(A, B, C)$ , так и  $(tA, tB, tC)$ .

## Замечание о главном векторе плоскости

*Главный вектор плоскости не коллинеарен этой плоскости.* □

Мы опускаем доказательство этого факта, поскольку оно вполне аналогично доказательству замечания о главном векторе прямой из § 15.



Если система координат является прямоугольной декартовой, то замечание о главном векторе плоскости можно существенно усилить. В самом деле, в этом случае скалярное произведение векторов  $(A, B, C)$  и  $(-B, A, 0)$  равно  $-AB + BA = 0$ , т.е. эти векторы ортогональны (см. критерий ортогональности векторов в § 11). Аналогично проверяется ортогональность вектора  $(A, B, C)$  каждому из векторов  $(-C, 0, A)$  и  $(0, -C, B)$ . В силу 2-го замечания о направляющих векторах плоскости, вектор  $(A, B, C)$  ортогонален к двум неколлинеарным векторам, лежащим в плоскости с уравнением (5). Следовательно, справедливо

### Замечание о нормальном векторе плоскости

*Если система координат является прямоугольной декартовой, то главный вектор плоскости является ее нормальным вектором. Другими словами, если плоскость задана в прямоугольной декартовой системе координат уравнением (5), то вектор с координатами  $(A, B, C)$  является ее нормальным вектором.*



Пусть теперь  $\sigma$  — плоскость, не проходящая через начало координат и не параллельная ни одной из осей координат. Тогда  $\sigma$  пересекает все три оси координат. Обозначим первую координату точки пересечения  $\sigma$  с осью абсцисс через  $a$ , вторую координату точки пересечения  $\sigma$  с осью ординат — через  $b$ , а третью координату точки пересечения  $\sigma$  с осью аппликат — через  $c$ . Тогда  $a, b, c \neq 0$  и  $\sigma$  проходит через точки с координатами  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$  и  $(0, 0, c)$ . Напишем уравнение плоскости  $\sigma$  по этим трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x - a & y - 0 & z - 0 \\ 0 - a & b - 0 & 0 - 0 \\ 0 - a & 0 - 0 & c - 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ т. е. } \begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель из левой части последнего равенства, получим  $bcs + acy + abz = abc$ . Разделим обе части последнего равенства на  $abc$  (воспользовавшись тем, что  $a, b, c \neq 0$ ). Получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (7)$$

которое называется *уравнением плоскости в отрезках*. Этот термин объясняется тем, что параметры  $a$ ,  $b$  и  $c$ , фигурирующие в уравнении (7), суть, с точностью до знака, длины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

Мы закончили рассмотрение видов уравнений плоскости.

Рассмотрим теперь вопрос о взаимном расположении двух плоскостей.

## Теорема о взаимном расположении плоскостей

Пусть плоскость  $\sigma_1$  задана уравнением  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ , а плоскость  $\sigma_2$  — уравнением  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ . Плоскости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ :

- 1) пересекаются тогда и только тогда, когда  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$  или  $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ ;
- 2) параллельны тогда и только тогда, когда  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ ;
- 3) совпадают тогда и только тогда, когда  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2. \end{cases} \quad (8)$$

Ясно, что плоскости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  пересекаются тогда и только тогда, когда эта система имеет решение, но уравнения системы не равносильны;  
параллельны тогда и только тогда, когда система не имеет решений;  
совпадают тогда и только тогда, когда уравнения системы равносильны.

Предположим сначала, что коэффициенты при неизвестных не пропорциональны, т. е.  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$  или  $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ . Для определенности будем считать, что  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ . Убедимся, что в этом случае плоскости пересекаются. Придадим  $z$  произвольное значение  $z = z_0$  и запишем систему (8) в виде

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_0 - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2z_0 - D_2. \end{cases} \quad (9)$$

Условие  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$  равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому по теореме Крамера (см. § 9) система (9) имеет единственное решение. Обозначим его через  $(x_0, y_0)$ . Тогда тройка чисел  $(x_0, y_0, z_0)$  будет решением системы (8). Следовательно, плоскости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  имеют по крайней мере одну общую точку, т. е. либо пересекаются, либо совпадают.

## Взаимное расположение двух плоскостей (3)

Предположим, что плоскости совпадают. Обозначим через  $\sigma_3$  плоскость с уравнением  $z = z_0$ . Пересечение (совпадающих) плоскостей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  с  $\sigma_3$  содержит точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , а значит, оно содержит и некоторую прямую. У всех точек этой прямой третья координата равна  $z_0$  (так как эти точки лежат в плоскости  $\sigma_3$ ). Пусть  $M_1(x_1, y_1, z_0)$  — точка этой прямой, отличная от  $M_0$ . Тогда пара чисел  $(x_1, y_1)$  отлична от  $(x_0, y_0)$  и является решением системы (9). Но, как отмечалось выше, эта система имеет единственное решение. Полученное противоречие показывает, что плоскости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  пересекаются.

Мы доказали достаточность в утверждении 1) доказываемой теоремы. Достаточность в утверждениях 2) и 3) доказывается вполне аналогично тому, как это сделано в тех же случаях в доказательстве теоремы о взаимном расположении прямых на плоскости в § 15. После того, как достаточность во всех трех утверждениях доказана, легко понять, что в каждом из этих утверждений верна и необходимость (см. конец доказательства теоремы о взаимном расположении прямых на плоскости в § 15). □

Из п. 2) доказанной теоремы вытекает, что

- *любые два главных вектора плоскости коллинеарны.*

## Определение

*Пучком плоскостей* называется совокупность всех плоскостей, проходящих через некоторую фиксированную прямую.

Ясно, что любые две пересекающиеся плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$  определяют некоторый пучок плоскостей (состоящий из всех плоскостей, проходящих через прямую, по которой пересекаются плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$ ). Теорема, формулируемая на следующем слайде, показывает, как по уравнениям плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$  можно найти уравнение произвольной плоскости из пучка плоскостей, определяемых этими двумя плоскостями.

## Теорема о пучке плоскостей

Пусть  $\pi_1$  и  $\pi_2$  — пересекающиеся плоскости, первая из которых задана уравнением  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ , а вторая — уравнением  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ . Плоскость  $\pi$  принадлежит пучку плоскостей, определяемому плоскостями  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , тогда и только тогда, когда  $\pi$  задается уравнением вида

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (10)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные действительные числа, по крайней мере одно из которых отлично от нуля.

**Доказательство. Достаточность.** Прежде всего докажем, что уравнение (10), где хотя бы одно из чисел  $\alpha$  и  $\beta$  отлично от 0, задает плоскость. В силу теоремы об общем уравнении плоскости, для этого достаточно установить, что по крайней мере одно из чисел  $\alpha A_1 + \beta A_2$ ,  $\alpha B_1 + \beta B_2$  и  $\alpha C_1 + \beta C_2$  отлично от нуля. Предположим, напротив, что  $\alpha A_1 + \beta A_2 = \alpha B_1 + \beta B_2 = \alpha C_1 + \beta C_2 = 0$ . Тогда  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$ . Но тогда из теоремы о взаимном расположении плоскостей вытекает, что плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$  либо параллельны, либо совпадают, что противоречит условию. Осталось доказать, что плоскость, заданная уравнением (10), проходит через прямую, по которой пересекаются плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$ .

В самом деле, обозначим через  $(x_0, y_0, z_0)$  координаты произвольной точки, лежащей на этой прямой. Тогда  $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$  и  $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$ , откуда

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0.$$

**Необходимость.** Обозначим через  $\ell$  прямую, по которой пересекаются плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Пусть  $\pi$  — плоскость из пучка плоскостей, определяемого плоскостями  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , а  $Ax + By + Cz + D = 0$  — общее уравнение плоскости  $\pi$ . Если  $\pi = \pi_1$ , то  $\pi$  задается уравнением вида (10), где  $\alpha = 1$ , а  $\beta = 0$ . Аналогично разбирается случай, когда  $\pi = \pi_2$ . Будем теперь считать, что плоскость  $\pi$  отлична от плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . В частности, это означает, что плоскость  $\pi$  пересекается с каждой из плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , причем ясно, что  $\pi$  пересекается с каждой из этих плоскостей по прямой  $\ell$ . Обозначим через  $M$  произвольную точку, принадлежащую плоскости  $\pi$  и не лежащую на прямой  $\ell$ , а через  $(x', y', z')$  — координаты точки  $M$ . Ясно, что  $M \notin \pi_1$ , так как в противном случае точка  $M$  принадлежала бы прямой, по которой пересекаются плоскости  $\pi$  и  $\pi_1$ , т. е. прямой  $\ell$ . Аналогично проверяется, что  $M \notin \pi_2$ . Следовательно,  $A_1x' + B_1y' + C_1z' + D_1 \neq 0$  и  $A_2x' + B_2y' + C_2z' + D_2 \neq 0$ . Положим  $\alpha_0 = -(A_2x' + B_2y' + C_2z' + D_2)$  и  $\beta_0 = A_1x' + B_1y' + C_1z' + D_1$ . Тогда  $\alpha_0, \beta_0 \neq 0$ .



Как проверено при доказательстве достаточности, всякое уравнение вида (10), где хотя бы одно из чисел  $\alpha$  и  $\beta$  отлично от 0, задает некоторую плоскость. В частности, это справедливо по отношению к уравнению

$$\alpha_0(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta_0(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Обозначим плоскость, задаваемую этим уравнением, через  $\sigma$  и докажем, что  $\sigma = \pi$ . Напомним, что  $\ell \subseteq \pi$  и  $M \in \pi$ . Очевидно, что плоскость, проходящая через некоторую прямую и не лежащую на этой прямой точку, определена однозначно. Поэтому достаточно установить, что  $\sigma$  содержит прямую  $\ell$  и проходит через точку  $M$ . Первый факт вытекает из того, что, как показано при доказательстве достаточности,  $\ell$  лежит в любой плоскости, заданной уравнением вида (10). Второе утверждение вытекает из того, что

$$\alpha_0(A_1x' + B_1y' + C_1z' + D_1) + \beta_0(A_2x' + B_2y' + C_2z' + D_2) = \alpha_0\beta_0 - \beta_0\alpha_0 = 0.$$

Теорема доказана. □

# Полупространства, определяемые плоскостью (1)

Наша следующая цель состоит в том, чтобы выяснить, как по уравнению плоскости и координатам двух точек, не лежащих в этой плоскости, определить, лежат ли они по одну сторону или по разные стороны от плоскости. Пусть  $\sigma$  — плоскость, заданная уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Все пространство делится этой плоскостью на три непересекающиеся части: саму плоскость  $\sigma$  и два *полупространства* (в каждое из этих полупространств входят те и только те точки, которые расположены по какую-либо одну сторону от  $\sigma$ ). Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 3.

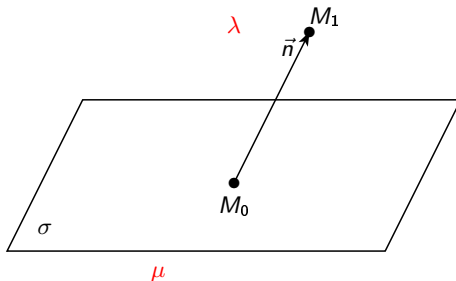


Рис. 3. Полупространства

## Полупространства, определяемые плоскостью (2)

Обозначим главный вектор плоскости  $\sigma$  через  $\vec{n}$ . Возьмем на  $\sigma$  произвольную точку  $M_0$  и отложим от нее вектор  $\vec{n}$ . Конец получившегося направленного отрезка обозначим через  $M_1$ . Из замечания о главном векторе плоскости вытекает, что точка  $M_1$  не принадлежит плоскости  $\sigma$ . Обозначим то полупространство, в котором лежит точка  $M_1$ , через  $\lambda$ , а другое — через  $\mu$ .

### Теорема о полупространствах

*Пусть  $M(x', y', z')$  — произвольная точка пространства. Если  $M \in \lambda$ , то  $Ax' + By' + Cz' + D > 0$ , а если  $M \in \mu$ , то  $Ax' + By' + Cz' + D < 0$ .* □

Доказательство этой теоремы мы не приводим, поскольку оно вполне аналогично доказательству теоремы о полуплоскостях из § 15. Из теоремы о полупространствах вытекает следующий ответ на сформулированный выше вопрос.

### Следствие о расположении двух точек относительно плоскости

*Точки  $P(x_1, y_1, z_1)$  и  $Q(x_2, y_2, z_2)$  расположены по одну сторону от плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  тогда и только тогда, когда числа  $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$  и  $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$  имеют одинаковый знак, и по разные стороны от этой плоскости тогда и только тогда, когда эти числа имеют разные знаки.* □

В заключение параграфа укажем формулу для расстояния от точки до плоскости. Будем предполагать, что система координат, заданная на плоскости, — прямоугольная декартова.

Пусть плоскость  $\sigma$  задана общим уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ , а  $M(x', y', z')$  — некоторая точка пространства. Обозначим через  $d(M, \sigma)$  расстояние от  $M$  до  $\sigma$ . Тогда справедлива следующая формула:

$$d(M, \sigma) = \frac{|Ax' + By' + Cz' + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Мы опускаем вывод этой формулы, поскольку он вполне аналогичен выводу формулы (15) из § 15.