Лекция 5: Определители

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

В курсе аналитической геометрии уже говорилось об определителях квадратных матриц 2-го и 3-го порядков. В данной лекции будет введено понятие определителя произвольного порядка, изучены свойства определителей и указан способ вычисления определителей, основанный на приведении матрицы к ступенчатому виду.

Понятие определителя будет введено на следующем слайде. Определение будет дано индукцией по порядку матрицы. Это означает, что сначала будет сказано, что такое определитель квадратной матрицы порядка 1 (*база индуктивного определения*), а затем, в предположении, что уже известно понятие определителя матрицы порядка $n-1$, будет дано определение определителя матрицы n-го порядка (*шаг индуктивного определения*).

Почти всюду в этой лекции речь будет идти только о квадратных матрицах. При этом слово «квадратная» будет иногда опускаться.

- *На протяжении данной лекции, если в явном виде не оговорено противное, слово «матрица» означает «квадратная матрица».*

Определение

База индукции. *Определителем квадратной матрицы* $A = (a_{11})$ *первого порядка* (или просто *определителем первого порядка*) называется число a_{11}.

Минор и алгебраическое дополнение элемента квадратной матрицы. Пусть n — натуральное число, большее 1. Будем считать, что уже введено понятие определителя квадратной матрицы порядка $n-1$. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. Зафиксируем в этой матрице элемент a_{ij} и вычеркнем в ней i-тую строку и j-й столбец. Определитель полученной квадратной матрицы $(n-1)$-го порядка обозначим через M_{ij}. Он называется *минором элемента* a_{ij}. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Шаг индукции. *Определителем квадратной матрицы* A порядка n (или просто *определителем* n*-го порядка*) называется число

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Другими словами, определитель квадратной матрицы порядка $n > 1$ — это сумма произведений элементов ее первой строки на их алгебраические дополнения.

Определитель матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$ обозначается через

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad |A|, \quad \text{или} \quad \det A.$$

Равенство $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$ называют *разложением определителя по первой строке*.

Вычисление определителя по определению

Приведенное выше определение определителя позволяет вычислить определитель произвольной квадратной матрицы. В самом деле, пусть A — квадратная матрица порядка n. Разложив ее определитель по первой строке, мы сведем вычисление $|A|$ к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка $M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{1n}$. Каждый из этих определителей также можно разложить по первой строке, сведя его вычисление к вычислению $(n-1)$-го определителя $(n-2)$-го порядка. Каждый из последних определителей вновь разложим по первой строке и т. д. В конце концов мы дойдем до определителей первого порядка, которые вычисляются легко (см. базу индукции в определении определителя). Ясно, что этот способ вычисления определителя весьма трудоемок, причем объем вычислений резко возрастает с увеличением порядка матрицы. В конце данной лекции будут указаны менее трудоемкие способы вычисления определителей произвольного порядка, основанные на свойствах определителей.

В силу сформулированного выше определения, имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = \\ = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Мы получили формулу для вычисления определителя второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1)$$

Мы видим, что

- для квадратных матриц 2-го порядка введенное только что понятие определителя совпадает с понятием определителя 2-го порядка, которое было введено в курсе аналитической геометрии.

Используя приведенное выше определение, имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot M_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Мы видим, что

- для квадратных матриц 3-го порядка введенное только что понятие определителя также совпадает с понятием определителя 3-го порядка, которое было введено в курсе аналитической геометрии.

В частности, это означает, что для вычисления определителей 3-го порядка по-прежнему можно пользоваться известными из курса аналитической геометрии фактами: правилом треугольников и формулами разложения по любой строке или любому столбцу.

Установим ряд свойств определителей n-го порядка.

Предложение 1

При умножении всех элементов некоторой строки матрицы на число t ее определитель умножается на t.

Доказательство. Докажем это свойство индукцией по порядку матрицы. Обозначим матрицу через A, а ее порядок через n. При $n = 1$ доказываемое утверждение тривиально (см. определение определителя первого порядка). Предположим, что оно выполняется для матриц порядка $< n$. Матрицу, получаемую при умножении строки матрицы A на число t, обозначим через A'. Предположим сначала, что на t умножается первая строка матрицы A. Тогда

$$|A'| = \begin{vmatrix} ta_{11} & ta_{12} & \dots & ta_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = ta_{11}A_{11} + ta_{12}A_{12} + \dots + ta_{1n}A_{1n} =$$

$$= t(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}) = t \cdot |A|.$$

Если же умножалась не первая строка, то по предположению индукции $A'_{1i} = tA_{1i}$ для всякого $2 \leqslant i \leqslant n$ (поскольку A'_{1i} и A_{1i} — определители $(n-1)$-го порядка) и

$$\begin{aligned}|A'| &= a_{11}A'_{11} + a_{12}A'_{12} + \cdots + a_{1n}A'_{1n} = \\ &= a_{11}tA_{11} + a_{12}tA_{12} + \cdots + a_{1n}tA_{1n} = \\ &= t(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}) = t \cdot |A|.\end{aligned}$$

Предложение доказано. □

Предложение 2

Если матрица содержит нулевую строку, то ее определитель равен нулю.

Доказательство. Это утверждение легко следует из предложения 1. Действительно, если матрица содержит нулевую строку, то можно считать, что эта строка получена умножением некоторой другой строки на 0. По предложению 1 определитель будет равен произведению нуля на определитель некоторой другой матрицы, т. е. нулю. □

Введем одно важное для дальнейшего понятие.

Определение

Пусть A — произвольная (не обязательно квадратная) матрица порядка $m \times n$, а k — натуральное число такое, что $k \leqslant m$ и $k \leqslant n$. Выберем в матрице A произвольные k строк и k столбцов. Определитель квадратной матрицы, стоящей на пересечении этих строк и столбцов, называется *минором* матрицы A. *Порядком минора* называется порядок той матрицы, определителем которой он является.

Фактически мы уже имели дело с минорами в определении определителя. В самом деле, ясно, что упоминаемый там минор M_{ij} является минором $(n-1)$-го порядка матрицы A. Отметим еще, что квадратная матрица A порядка n имеет только один минор порядка n, — а именно, $|A|$. Но если $k < n$, то матрица может иметь много миноров порядка k.

Предложение 3

Если матрица имеет порядок $n \geqslant 2$, то при перестановке местами двух ее различных строк ее определитель умножается на -1.

Доказательство. Это утверждение, как и предложение 1, мы докажем индукцией по порядку матрицы. Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

База индукции. Если $n = 2$, то

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Шаг индукции. Пусть теперь $n > 2$. Предположим, что доказываемое утверждение выполняется для матриц порядка $< n$ и докажем его для матриц порядка n. Матрицу, полученную из A перестановкой строк, обозначим через A'. По предположению индукции $A'_{1i} = -A_{1i}$ для всякого $2 \leqslant i \leqslant n$. Если среди переставляемых строк не было первой, то

$$|A'| = a_{11}A'_{11} + a_{12}A'_{12} + \cdots + a_{1n}A'_{1n} = -a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} - \cdots - a_{1n}A_{1n} = -|A|.$$

Предположим теперь, что среди переставляемых строк была первая. Для определенности будем считать, что переставлялись первая и вторая строки (в общем случае доказательство абсолютно аналогично).

Если $i, j, k, \ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$, причем $i \neq k$ и $j \neq \ell$, то через $M_{ij}^{k\ell}$ мы обозначаем минор матрицы A, полученный вычеркиванием из нее i-й и k-й строк и j-го и ℓ-го столбцов. Разлагая сначала определитель матрицы A по первой строке, а затем каждый из миноров вида M_{1j} по его первой строке, имеем

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \\
&= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n} = \\
&= a_{11}\big(a_{22}M_{22}^{11} - a_{23}M_{23}^{11} + \cdots + (-1)^n a_{2n}M_{2n}^{11}\big) - \\
&- a_{12}\big(a_{21}M_{21}^{12} - a_{23}M_{23}^{12} + \cdots + (-1)^n a_{2n}M_{2n}^{12}\big) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (-1)^{n+1}a_{1n}\big(a_{21}M_{21}^{1n} - a_{22}M_{22}^{1n} + \cdots + (-1)^n a_{2\,n-1}M_{2\,n-1}^{1n}\big).
\end{aligned}$$

Если проделать аналогичные действия с определителем матрицы A', то мы получим алгебраическую сумму тех же самых миноров с теми же самыми множителями. Осталось лишь проверить, что знаки соответствующих слагаемых в разложениях для определителей матриц A и A' будут противоположными. В самом деле, поскольку

$$A' = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

имеем

$$\begin{aligned} |A'| &= a_{21}A'_{11} + a_{22}A'_{12} + \dots + a_{2n}A'_{1n} = \\ &= a_{21}M'_{11} - a_{22}M'_{12} + \dots + (-1)^{n+1}a_{2n}M'_{1n}. \end{aligned}$$

Далее, $(M')^{1m}_{2j} = M^{2j}_{1m}$ для всех $j, m = 1, 2, \dots, n$, $j \neq m$, и потому

$$\begin{aligned} |A'| = {} & a_{21}\left(a_{12}M^{21}_{12} - a_{13}M^{21}_{13} + \dots + (-1)^n a_{1n}M^{21}_{1n}\right) - \\ & - a_{22}\left(a_{11}M^{22}_{11} - a_{13}M^{22}_{13} + \dots + (-1)^n a_{1n}M^{22}_{1n}\right) + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + (-1)^{n+1}a_{2n}\left(a_{11}M^{2n}_{11} - a_{12}M^{2n}_{12} + \dots + (-1)^n a_{1\,n-1}M^{2n}_{1\,n-1}\right). \end{aligned}$$

Ясно, что $a_{11}a_{22}M_{22}^{11} = a_{22}a_{11}M_{11}^{22}$. Но в разложение для $|A|$ это слагаемое входит со знаком плюс, а в разложение для $|A'|$ — со знаком минус. Аналогично, $a_{12}a_{21}M_{21}^{12} = a_{21}a_{12}M_{12}^{21}$. Но в разложение для $|A|$ это слагаемое входит со знаком минус, а в разложение для $|A|$ — со знаком плюс. Аналогично требуемый факт устанавливается для всех остальных слагаемых. Предложение доказано. $\square$

Предложение 4

Если матрица имеет две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю.

Доказательство. Это утверждение легко вытекает из предложения 3. В самом деле, если две одинаковые строки поменять местами, то определитель с одной строны сменит знак на противоположный (в силу предложения 3), а с другой не изменится, так как матрица останется прежней. Следовательно, определитель равен нулю. $\square$

Предложение 5

Если каждый элемент некоторой строки матрицы представлен в виде двух слагаемых, то ее определитель равен сумме определителей двух матриц, в первой из которых элементы этой строки равны первым слагаемым, а во второй — вторым слагаемым, а все остальные строки в обеих матрицах — те же, что и в исходной матрице.

Доказательство. Надо доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \dots & a'_{in}+a''_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вновь воспользуемся индукцией по порядку матрицы. Если $n = 1$, то доказываемое утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано для матриц порядка $< n$. Матрицы, входящие в равенство, приведенное на предыдущем слайде, обозначим через A, B и C (в том порядке, в котором они появляются в этом равенстве). Рассмотрим сначала случай, когда $i = 1$. Тогда $A_{1j} = B_{1j} = C_{1j}$ для всякого $1 \leqslant j \leqslant n$ (поскольку все строки со второй по n-ную в матрицах A, B и C совпадают). Имеем

$$\begin{aligned} |A| &= (a'_{11} + a''_{11})A_{11} + (a'_{12} + a''_{12})A_{12} + \cdots + (a'_{1n} + a''_{1n})A_{1n} = \\ &= (a'_{11}A_{11} + a'_{12}A_{12} + \cdots + a'_{1n}A_{1n}) + (a''_{11}A_{11} + a''_{12}A_{12} + \cdots + a''_{1n}A_{1n}) = \\ &= (a'_{11}B_{11} + a'_{12}B_{12} + \cdots + a'_{1n}B_{1n}) + (a''_{11}C_{11} + a''_{12}C_{12} + \cdots + a''_{1n}C_{1n}) = \\ &= |B| + |C|. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $i > 1$. Тогда, в силу предположения индукции, $A_{1j} = B_{1j} + C_{1j}$ для всякого $1 \leqslant j \leqslant n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \\ &= a_{11}(B_{11} + C_{11}) + a_{12}(B_{12} + C_{12}) + \cdots + a_{1n}(B_{1n} + C_{1n}) = \\ &= (a_{11}B_{11} + a_{12}B_{12} + \cdots + a_{1n}B_{1n}) + (a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}) = \\ &= |B| + |C|. \end{aligned}$$

Предложение доказано. $\square$

Предложение 6

Если к некоторой строке матрицы прибавить другую ее строку, умноженную на некоторое число, то определитель матрицы не изменится.

Доказательство. Это утверждение легко вытекает из предложений 1, 4 и 5. В самом деле, предположим, что мы прибавили к i-й строке матрицы ее j-тую строку, умноженную на t. Используя сначала предложения 5 и 1, а затем предложение 4, имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{j1}+ta_{i1} & a_{j2}+ta_{i2} & \dots & a_{jn}+ta_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + t \cdot 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

Предложение доказано. $\square$

Предложение 7

Сумма произведений элементов некоторой строки матрицы на их алгебраические дополнения равна определителю матрицы.

Иными словами,

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

для всякого $1 \leqslant i \leqslant n$. Это равенство называется *разложением определителя по i-й строке*.

Доказательство. Если $i = 1$, то доказываемое утверждение есть не что иное, как определение определителя n-го порядка. Предположим теперь, что $i > 1$. Переставляя последовательно i-тую строку с $(i-1)$-й, $(i-2)$-й, ..., наконец, с первой, и используя предложение 3, имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i-1}\left(a_{i1}(-1)^{1+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{1+2}M_{i2} + \dots + a_{in}(-1)^{1+n}M_{in}\right) =$$

$$= a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in} =$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Предложение доказано. □

Предложение 8

Сумма произведений элементов некоторой строки матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

Иными словами, если $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и $i \neq j$, то

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

Доказательство. Обозначим через A' матрицу, полученную из матрицы A заменой ее j-й строки на i-тую. Для всякого $k = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через A_k матрицу, получаемую при вычеркивании из матрицы A ее j-й строки и k-го столбца, а через A'_k — матрицу, получаемую при вычеркивании из матрицы A' ее i-й строки и k-го столбца. Легко понять, что либо для всех k матрицы A_k и A'_k совпадают, либо для всех k эти матрицы получаются одна из другой одной и той же перестановкой строк. Учитывая предложение 3 получаем, что либо $A_{ik} = A'_{ik}$ для всех k, либо $A_{ik} = -A'_{ik}$ для всех k. Поскольку в матрице A' имеются две одинаковые строки, по предложению 4 ее определитель равен нулю. Следовательно,

$$0 = a_{i1}A'_{i1} + a_{i2}A'_{i2} + \cdots + a_{in}A'_{in} = \pm(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}),$$

откуда $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0.$

Свойства определителей (14)

- Отметим, что предложения 7 и 8 можно записать одним равенством следующим образом:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Во всех сформулированных выше свойствах определителя речь шла о строках матрицы. Как мы увидим ниже, аналоги всех этих свойств, справедливы и для столбцов. В частности, мы докажем, что определитель всякой квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n можно разложить по первому столбцу, т. е. что справедливы равенства

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A + n_1 = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}.$$

Это вытекает из следующего утверждения.

Предложение 9

Определитель матрицы, транспонированной к данной, равен определителю исходной матрицы.

Доказательство проведем индукцией по порядку матрицы. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. При $n = 1$ доказываемое утверждение очевидно, так как в этом случае $A = A^{\top}$. Предположим теперь, что $n > 1$ и для матриц порядка $< n$ требуемое утверждение доказано.

Разложим определитель матрицы A по первой строке:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}.$$

Каждый из миноров M_{1j} является определителем порядка $n-1$. В силу предположения индукции эти определители можно разложить по первому столбцу. Проделаем это с минорами вида M_{1j} при $j > 1$. Используя обозначения типа $M_{ij}^{k\ell}$ в том же смысле, что и в доказательстве предложения 3, имеем:

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = \\
&= a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \left(\sum_{i=2}^{n} (-1)^{i} a_{i1} M_{i1}^{1j} \right) = \\
&= a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+j+1} a_{1j} a_{i1} M_{i1}^{1j}.
\end{aligned}$$

Разложим теперь определитель матрицы $A^\top$ по ее первой строке:

$$|A^\top| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}.$$

Пользуясь предположением индукции, разложим каждый из определителей M_{i1}, кроме M_{11}, по первому столбцу. Имеем:

$$|A^\top| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} = a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} =$$
$$= a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\Big(\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j}a_{1j}M_{1j}^{i1}\Big) =$$
$$= a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{i1}a_{1j}M_{1j}^{i1}.$$

Очевидно, что $M_{i1}^{1j} = M_{1j}^{i1}$ (в обеих частях этого равенства стоит определитель матрицы, полученной вычеркиванием из матрицы A первой и i-й строк и первого и j-го столбцов). Кроме того, ясно, что

$$\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}x_{ij} = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}x_{ij}$$

для любых величин x_{ij}, $i, j = 2, \ldots, n$. Сравнивая полученные нами выражения для $|A|$ и $|A^\top|$ и учитывая сделанные только что замечания, получаем, что эти определители равны.

Из предложений 7 и 9 вытекает, что для всякого $1 \leqslant j \leqslant n$ справедливо равенство

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},$$

которое называется *разложением определителя по j-му столбцу*.

Предложение 10

Если в формулировках предложений 1–8 заменить слово «строка» словом «столбец», то эти утверждения останутся справедливыми.

Доказательство. Этот факт вытекает из предложения 9 и определения транспонированной матрицы. □

Определение

Матрица называется *треугольной*, если она либо верхнетреугольна, либо нижнетреугольна.

Предложение 11

Определитель треугольной матрицы равен произведению ее элементов, стоящих на главной диагонали.

Доказательство этого предложения см. на следующем слайде.

Доказательство. Предположим, что матрица $A = (a_{ij})$ верхнетреугольна. Обозначим порядок матрицы через n и будем доказывать предложение индукцией по n. База индукции очевидна: если $n = 1$, то $|A| = a_{11}$ по определению определителя первого порядка. Предположим теперь, что утверждение верно для матриц порядка $< n$. Разложив определитель A по первому столбцу и воспользовавшись предположением индукции, имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{kk},$$

что и требовалось доказать.

В случае нижнетреугольной матрицы доказательство аналогично, надо только воспользоваться разложением определителя по первой строке. Предложение доказано. □

Из предложения 11 непосредственно вытекает

Замечание 1

Определитель единичной матрицы равен единице. □

Укажем способ вычисления определителей, основанный на изложенных выше их свойствах. Этот способ опирается на предложение 11. В лекции 4 было доказано, что произвольную квадратную матрицу A можно с помощью элементарных преобразований типов 1)–3) (указанных в той же лекции) привести к ступенчатой матрице B. Ясно, что ступенчатая квадратная матрица верхнетреугольна. Предложения 1, 3, 6 и 10 показывают, как связаны $|A|$ и $|B|$. Вычислив $|B|$ по предложению 11, можно найти и $|A|$.

На следующем слайде приведен пример вычисления определителя указанным способом.

Пример вычисления определителя (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -63 & 28 \\ 0 & 0 & -63 & 54 \end{vmatrix} = \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 7} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -63 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 26 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1 \cdot (-4) \cdot (-63) \cdot 26}{8 \cdot 9 \cdot 7} = 13.$$

Комментарии к приведенным здесь вычислениям см. на следующем слайде.

Пример вычисления определителя (2)

На первом шаге мы, воспользовавшись предложением 6, прибавили ко второй строке первую, умноженную на -1, к третьей — первую, умноженную на -2, а к четвертой — первую, умноженную на -3. На втором шаге умножили третью и четвертую строки на 4 и 2 соответственно и воспользовались предложением 1. На третьем шаге мы, вновь воспользовавшись предложением 6, прибавили к третьей строке вторую, умноженную на 1, а к четвертой — вторую, умноженную на -1. На четвертом шаге умножили третью и четвертую строки на 7 и 9 соответственно и воспользовались предложением 1. На пятом — прибавили к четвертой строке третью, умноженную на -1, еще раз использовав предложение 6, а на шестом — применили предложение 11.

В оставшейся части лекции мы вычислим один важный определитель, появляющийся во многих приложениях линейной алгебры.

Определение

Пусть n — натуральное число, $n \geqslant 2$, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные числа. *Определителем Вандермонда* называется следующий определитель порядка n:

$$d(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Предложение 12

$$d(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j). \tag{3}$$

Доказательство этого равенства дано на следующих двух слайдах.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n. При $n = 2$ требуемое равенство очевидно, поскольку

$$d(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Пусть доказываемое равенство уже доказано для определителей Вандермонда порядка $n - 1$. Преобразуем определитель (2) следующим образом: для каждого $k = n, n-1, \ldots, 2$ из k-й его строки вычтем $(k-1)$-вую, умноженную на a_1. Получим

$$d(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \ldots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Разлагая полученный определитель по первому столбцу, имеем

$$d(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \ldots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Мы пришли к определителю матрицы $(n-1)$-го порядка. Для всякого $k = 1, \ldots, n-1$ вынесем из k-го столбца этой матрицы множитель $a_{k+1} - a_1$. Получим

$$d(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\prod_{i=1}^{n}(a_i - a_1)\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Последний множитель является определителем Вандермонда порядка $n-1$, построенным на числах $a_2, \ldots, a_n$. По предположению индукции из (4) вытекает (3). $\square$

Из формулы (3) вытекает, что

- *определитель Вандермонда, построенный на числах $a_1, a_2, \ldots, a_n$, отличен от нуля тогда и только тогда, когда числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ попарно различны.*