

Глава II. Системы линейных уравнений

§ 6. Строение общего решения системы линейных уравнений

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Линейным уравнением (или **уравнением 1-го порядка**) с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b. \quad (1)$$

Величины a_1, a_2, \dots, a_n называются *коэффициентами* при неизвестных, а b — *свободным членом* уравнения (1). Коэффициенты при неизвестных и свободный член предполагаются известными.

Произвольная система линейных уравнений записывается следующим образом:

[illegible]

- Всюду далее мы будем предполагать, что коэффициенты при неизвестных и свободные члены в системах линейных уравнений лежат в некотором (вообще говоря, произвольном) поле F и называть систему (2) *системой линейных уравнений над полем F* . Элементы поля F мы будем называть *скалярами*.

Частное и общее решение системы. Совместные и несовместные системы

Определение

Частным решением (или просто *решением*) системы (2) называется упорядоченный набор скаляров $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ из поля F такой, что при подстановке в любое уравнение системы (2) x_1^0 вместо x_1 , x_2^0 вместо x_2 , \dots , x_n^0 вместо x_n получается верное равенство. Система линейных уравнений (2) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно частное решение, и *несовместной* в противном случае. *Общим решением* системы (2) называется множество всех ее частных решений.

- Общее решение есть у любой системы. В частности, у несовместной системы общим решением является пустое множество.
- Решить систему линейных уравнений – значит найти ее общее решение.

Как мы увидим в дальнейшем, во многих задачах, а также при анализе строения общего решения произвольной системы линейных уравнений важную роль играют системы, у которых правые части всех уравнений равны 0. Такие системы имеют специальное название.

Определение

Система линейных уравнений, в которой правые части всех уравнений равны 0, называется *однородной*.

Очевидно, что если в любое уравнение однородной системы вместо всех неизвестных подставить 0, то получится верное равенство. Иначе говоря, набор $\underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ раз}}$, где n — число неизвестных в системе, является

частным решением любой однородной системы. Это решение называется *нулевым* решением. Из сказанного вытекает

Замечание о совместности однородной системы

Любая однородная система линейных уравнений совместна.



Определение

Если в системе (2) все свободные члены заменить нулями, то мы получим однородную систему

[illegible]

которую мы будем называть *однородной системой, соответствующей системе (2)*.

Определение

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей* (или просто *матрицей*) *системы* (2).

Обозначим через A основную матрицу системы (2) и положим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2) равносильна матричному равенству $AX = B$. Это равенство (при условии, что X и B — матрицы, состоящие из одного столбца) называется *матричной записью системы линейных уравнений* (2). Столбец X называется *столбцом неизвестных*, а столбец B — *столбцом свободных членов* системы (2).

Всякое частное решение системы линейных уравнений является упорядоченным набором скаляров. Поэтому следующее определение позволяет говорить о сумме частных решений системы и произведении частного решения системы на скаляр.

Определение

Пусть (y_1, y_2, \dots, y_n) и (z_1, z_2, \dots, z_n) — два упорядоченных набора элементов поля F и $t \in F$. Тогда упорядоченный набор скаляров $(y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n)$ называется *суммой наборов* (y_1, y_2, \dots, y_n) и (z_1, z_2, \dots, z_n) , а упорядоченный набор $(ty_1, ty_2, \dots, ty_n)$ — *произведением набора* (y_1, y_2, \dots, y_n) *на скаляр* t .

Строение общего решения системы линейных уравнений

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема о строении общего решения системы линейных уравнений

- 1) Сумма двух решений однородной системы линейных уравнений является решением этой системы. Произведение решения однородной системы линейных уравнений на скаляр является решением этой системы.
- 2) Пусть система (2) совместна, а $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ — некоторое ее частное решение. Набор скаляров (y_1, y_2, \dots, y_n) является решением этой системы тогда и только тогда, когда он равен сумме набора $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ и некоторого частного решения однородной системы линейных уравнений, соответствующей системе (2).

Иллюстрацией к п. 2) этой теоремы служит рис. 1.

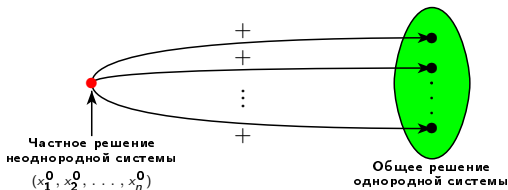


Рис. 1. Общее решение неоднородной системы

В доказательстве теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений используется операция умножения матрицы на скаляр. Определим эту операцию.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$ над кольцом R . *Произведением матрицы A на скаляр $t \in R$ называется матрица $D = (d_{ij}) \in R^{m \times n}$ такая, что $d_{ij} = ta_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$. Эта матрица обозначается через tA . Операции сложения матриц и умножения матрицы на скаляр часто объединяют термином *линейные операции над матрицами*.*

Следующие свойства операции умножения матрицы на скаляр проверяются непосредственно, исходя из определения операций.

Свойства умножения матрицы на скаляр

Если A и B — матрицы над (одним и тем же) кольцом R , а $t, s \in R$, то:

- 1) если A и B — матрицы одного и того же размера, то $t(A + B) = tA + tB$ (умножение матрицы на скаляр *дистрибутивно относительно сложения матриц*);
- 2) $(t + s)A = tA + sA$ (умножение матрицы на скаляр *дистрибутивно относительно сложения скаляров*);
- 3) если произведение матриц AB определено, то $(tA)B = A(tB) = t(AB)$;
- 4) $t(sA) = (ts)A$. □

Доказательство теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений (1)

Доказательство теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений. 1) Будем записывать наборы скаляров не в строку, а в столбец. Пусть

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

— решения системы (3), а A — основная матрица этой системы. Тогда $AY = O$ и $AZ = O$, где O — нулевой столбец. Следовательно,

$$A(Y + Z) = AY + AZ = O + O = O \quad \text{и} \quad A(tY) = t(AY) = t \cdot O = O$$

для произвольного скаляра t . Это означает, что наборы $Y + Z$ и tY являются решениями системы (3).

Доказательство теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений (2)

2) *Достаточность*. Положим

$$X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

— частное решение однородной системы линейных уравнений, соответствующей системе (2), а B — столбец свободных членов системы (2). Тогда

$$A(X^0 + Z) = AX^0 + AZ = B + O = B.$$

Мы видим, что набор $X^0 + Z$ является решением системы (2).

Доказательство теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений (3)

Необходимость. Пусть

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

— решение системы (2). Положим $Y = U - X^0$. Тогда Y — решение системы (3), поскольку

$$AY = A(U - X^0) = AU - AX^0 = B - B = O,$$

и $U = Y + X^0$. Теорема доказана. □

Пункт 2) теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений говорит о том, что набор скаляров принадлежит общему решению системы тогда и только тогда, когда он представим в виде суммы некоторого ее фиксированного частного решения и набора скаляров, принадлежащего общему решению соответствующей однородной системы. В связи с этим указанное утверждение часто кратко (и не вполне точно) формулируют следующим образом:

- *общее решение системы линейных уравнений равно сумме ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.*

Определенные и неопределенные системы линейных уравнений.

Число решений неопределенной системы над бесконечным полем (1)

Определение

Система линейных уравнений называется *определенной*, если она имеет ровно одно решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Следствие о числе решений неопределенной системы

Неопределенная система линейных уравнений над бесконечным полем имеет бесконечно много решений.

Доказательство. В силу п. 2) теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений достаточно доказать следствие для однородных систем. Пусть (3) — неопределенная однородная система линейных уравнений над бесконечным полем F . Ясно, что у нее есть по крайней мере одно ненулевое решение, т. е. решение $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ такое, что $x_i^0 \neq 0$ для некоторого $1 \leq i \leq n$. В силу п. 1) теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений набор $(tx_1^0, tx_2^0, \dots, tx_n^0)$ является решением нашей системы при любом $t \in F$.

Предположим, что $t_1, t_2 \in F$ и $t_1 x_i^0 = t_2 x_i^0$. Умножив обе части этого равенства справа на $(x_i^0)^{-1}$, мы получим, что $t_1 = t_2$. Таким образом, если $t_1 \neq t_2$, то $t_1 x_i^0 \neq t_2 x_i^0$, и потому $(t_1 x_1^0, t_1 x_2^0, \dots, t_1 x_n^0)$ и $(t_2 x_1^0, t_2 x_2^0, \dots, t_2 x_n^0)$ — различные решения системы (3). Поскольку поле F бесконечно, бесконечно и число решений этой системы. \square