Квадрики на плоскости

Селиве 19.05.20
Даниил
КН-102, МЕН-190207

Вариант-18

(1) Найти ур-ие квадрики: $M_1(0,0), M_2(-1,0), M_3(0,-1), M_4(4,-2), M_5(-2,4)$

по опр-ию ур-ие соотв. квадрике на плоскости, коорд. которой удовл. ему

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \text{ где } a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$$

Составим систему, подставляя вместо (x,y) точки:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{11} - 2a_1 + a_0 = 0 \\ a_{22} - 2a_2 + a_0 = 0, \\ 16a_{11} - 16_{12} + 4a_{22} + 8a_1 - 4a_2 + a_0 = 0 \\ 4a_{11} - 16a_{12} + 16a_{22} - 4a_1 + 8a_2 + a_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_{11} - 2a_1 = 0, \\ a_{22} - 2a_2 = 0, \\ 16a_{11} - 16a_{12} + 4a_{22} + 8a_1 - 4a_2 = 0, \\ 4a_{11} - 16a_{12} + 16a_{22} - 4a_1 + 8a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{22} & a_1 & a_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 16 & -16 & 4 & 8 & -4 \\ 4 & -16 & 16 & -4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -16 & 4 & 40 & -4 \\ 0 & -16 & 16 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -16 & 4 & 40 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -36 & 12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -16 & 4 & 40 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -36 & +36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -16 & 4 & 40 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_2 = C \\ a_1 = a_2 = C \\ a_{22} = 2C_1 \\ a_{12} = \frac{11}{4}C_1 \\ a_{11} = 2C_1 \end{cases}$$

ФСР:

	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_1	a_2
1	1	11/8	1	1/2	1/2

$$\boxed{x^2 + \frac{11}{4}xy + y^2 + x + y = 0}$$ — ур-ие квадрики

2) привести к каноническому виду и определить тип кривой:

$\cancel{x^2+\frac{11}{4}xy+2y^2+2x+2y=0}$ $\quad x^2+\frac{11}{4}xy+y^2+x+y=0$

Нужно избавиться от xy, повернув систему коорд. на угол α, удовл. ур-ию: $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} = \frac{1-1}{2\cdot a_{12}} = 0$

$2\alpha = \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \mathbb{Z} \quad k=0$

$\boxed{\alpha=\frac{\pi}{4}}$ на такой угол нужно повернуть с.к.

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1^{\circ}-y_1^{\circ}) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1^{\circ}+y_1^{\circ}) \end{cases}$$ — формулы поворота сист. коорд. на угол α:

Подставим в кв. форму x и y:

$$\frac{1}{2}(x_1^{\circ}-y_1^{\circ})^2+\frac{11}{4}\cdot\frac{1}{2}(x_1^{\circ 2}-y_1^{\circ 2})+\frac{1}{2}(x_1^{\circ}+y_1^{\circ})^2+\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1^{\circ}-y_1^{\circ})+\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1^{\circ}+y_1^{\circ})=0$$

$$x_1^{\circ 2}+y_1^{\circ 2}+\frac{11}{8}(x_1^{\circ 2}-y_1^{\circ 2})+\sqrt{2}\,x_1^{\circ}=0 \quad |\cdot 8$$

$$8x_1^{\circ 2}+8y_1^{\circ 2}+11x_1^{\circ 2}-11y_1^{\circ 2}+8\sqrt{2}\,x_1^{\circ}=0$$

$$19x_1^{\circ 2}+8\sqrt{2}\,x_1^{\circ}-3y_1^{\circ 2}=0$$

$$19\left(x_1^{\circ}+\frac{4}{19}\sqrt{2}\right)^2-3y_1^{\circ 2}=\frac{32}{19}$$

$$\frac{361}{32}\left(x_1^{\circ}+\frac{4}{19}\sqrt{2}\right)^2-\frac{57}{32}y_1^{\circ 2}=1$$

$$\begin{cases} x_2^{\circ} = x_1-\frac{4}{19}\sqrt{2} \\ y_2^{\circ} = y_1^{\,2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{361}{32}x_2^{\circ 2}-\frac{57}{32}y_2^{\circ 2}=1}$$ — каноническое уравнение квадрики

№3. $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1^0 - y_1^0) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1^0 + y_1^0) \end{cases}$ $\begin{cases} x_2^0 = x_1^0 - \frac{4}{19}\sqrt{2} \Rightarrow \quad x_1^0 = x_2^0 + \frac{4}{19}\sqrt{2} \\ y_2^0 = y_1^0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x_2^0 + \frac{4}{19}\sqrt{2} - y_2^0\right) = \frac{4}{19} + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2^0 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_2^0 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x_2^0 + \frac{4}{19}\sqrt{2} + y_2^0\right) = \frac{4}{19} + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2^0 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2^0 \end{cases}$$

№4. $\dfrac{{x_2^0}^2}{\left(\sqrt{\frac{32}{361}}\right)^2} - \dfrac{{y_2^0}^2}{\left(\sqrt{\frac{32}{57}}\right)^2} = 1$

$a = \frac{\sqrt{32}}{19} = \frac{4}{19}\sqrt{2}$ - действ. полуось

$b = \sqrt{\frac{32}{57}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{57}}$ - мнимая полуось

$$c = \sqrt{\frac{32 \cdot 418}{361 \cdot 57}} = \sqrt{\frac{32 \cdot 22}{361 \cdot 3}} = \frac{1}{19}\sqrt{\frac{32 \cdot 22}{3}} = \frac{8}{19}\sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{32 \cdot 22}{3 \cdot 32}} = \sqrt{\frac{22}{3}}$$

$$F_1(c, 0) = \left(\frac{1}{19}\sqrt{\frac{704}{3}}, 0\right) = \left(\frac{4}{19}\sqrt{\frac{44}{3}}, 0\right) = \left(\frac{8}{19}\sqrt{\frac{11}{3}}, 0\right)$$

$$F_2(-c, 0) = \left(-\frac{8}{19}\sqrt{\frac{11}{3}}, 0\right)$$

$x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{4}{19}\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{22}} = \pm\frac{4}{19}\sqrt{\frac{3}{11}}$ - дир-сы

$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{57}} \cdot \frac{19}{4\sqrt{2}}x = \pm\frac{19\sqrt{19}}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{3}}x = \pm\sqrt{\frac{19}{3}}x$ - асимптоты