Функциональные последовательности и ряды

Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}$, определённых на X.

Определение. Пусть для любого $x_0 \in X$ существует предел *числовой* последовательности $\{f_n(x_0)\}$:

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) =: f(x_0).$$

Тогда функция $f(x)$ называется *поточечным пределом последовательности* $\{f_n(x)\}$, а последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится к функции* $f(x)$ *поточечно на множестве* X.

Пример. $f_n(x) = x^n$, $X = (-1, 1]$.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно на множестве* X, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

При этом функция $f(x)$ называется *равномерным пределом последовательности* $\{f_n(x)\}$.

Обозначения: $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

Утверждение. Равномерная сходимость $\Rightarrow$ поточечная сходимость.
Обратное неверно.

Примеры: а) $f_n(x) = \dfrac{n}{1+n^2x^2}$, $X = \mathbb{R}$; б) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $X = \mathbb{R}$.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_n(x)\}$, определённых на X, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Определение. Пусть для любого $x_0 \in X$ *числовой* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится:

$$\exists\, S(x_0) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0).$$

Тогда говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится поточечно на множестве* X, а функция $S(x)$ называется *суммой ряда*:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in X.$$

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* X, если последовательность его частичных сумм сходится на X равномерно: $S_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$.

Замечания:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $X \quad \Leftrightarrow \quad R_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0.$
- Сходимость последовательности можно свести к изучению сходимости ряда:

$$u_1(x) := f_1(x), \quad u_{n+1}(x) := f_{n+1}(x) - f_n(x) \quad \Rightarrow \quad S_n(x) = f_n(x) \quad \text{и} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x)$$

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности)**.** Для того, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась на множестве X равномерно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n, p \in \mathbb{N} \;\; \forall\, x \in X \;\; (n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon).$$

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)**.** Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходился на множестве X равномерно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n, p \in \mathbb{N} \;\; \forall\, x \in X \;\; (n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |\sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x)| < \varepsilon).$$

Следствие. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве X, а функция $v(x)$ ограничена на X, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) v(x)$ также сходится равномерно на X.

Теорема (критерий равномерной сходимости функциональной последовательности)**.** Для того, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась к функции $f(x)$ равномерно на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы числовая последовательность $r_n := \sup\limits_{x \in X} |f(x) - f_n(x)|$ сходилась к нулю.

Примеры: а) $f_n(x) = \dfrac{n}{1 + n^2 x^2}$, $X = \mathbb{R}$; б) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x^2}$, $X = \mathbb{R}$.

Признаки равномерной сходимости

Теорема 1 (признак Вейерштрасса)**.** Пусть $|u_n(x)| \leqslant c_n$, $x \in X$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве X равномерно и абсолютно.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^s}$, $s > 1$.

Теорема 2 (признак Абеля)**.** Пусть

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X,
- $\forall\, x \in X \quad \{b_n(x)\}$ монотонна,
- $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена на X.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится на множестве X равномерно.

Теорема 3 (признак Дирихле)**.** Пусть

- последовательность частичных сумм $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)$ равномерно ограничена на X,
- $\forall\, x \in X \quad \{b_n(x)\}$ монотонна,
- $b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится на множестве X равномерно.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, а $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится условно.

Что можно сказать о сходимости/расходимости (в том числе абсолютной) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?