Двойной интеграл

Двойной интеграл

1. Напоминание о площади и квадрируемых множествах

Двойной интеграл

1. Напоминание о площади и квадрируемых множествах

Рассмотрим ограниченное плоское множество D ($D \subset \mathbb{R}^2$).

Двойной интеграл

1. Напоминание о площади и квадрируемых множествах

Рассмотрим ограниченное плоское множество D ($D \subset \mathbb{R}^2$).
Пусть P — произвольный вписанный в D многоугольник ($P \subseteq D$) и Q — произвольный многоугольник, описанный вокруг D ($Q \supseteq D$).

Двойной интеграл

1. Напоминание о площади и квадрируемых множествах

Рассмотрим ограниченное плоское множество D ($D \subset \mathbb{R}^2$).
Пусть P — произвольный вписанный в D многоугольник ($P \subseteq D$) и Q — произвольный многоугольник, описанный вокруг D ($Q \supseteq D$).
Будем обозначать $S(P)$ площадь многоугольника P.

Двойной интеграл

1. Напоминание о площади и квадрируемых множествах

Рассмотрим ограниченное плоское множество D ($D \subset \mathbb{R}^2$).
Пусть P — произвольный вписанный в D многоугольник ($P \subseteq D$) и Q — произвольный многоугольник, описанный вокруг D ($Q \supseteq D$).
Будем обозначать $S(P)$ площадь многоугольника P.

Определение 1. Множество D называется *квадрируемым*, если его внутренняя и внешняя площади совпадают:

Двойной интеграл

1. Напоминание о площади и квадрируемых множествах

Рассмотрим ограниченное плоское множество D ($D \subset \mathbb{R}^2$).
Пусть P — произвольный вписанный в D многоугольник ($P \subseteq D$) и Q — произвольный многоугольник, описанный вокруг D ($Q \supseteq D$).
Будем обозначать $S(P)$ площадь многоугольника P.

Определение 1. Множество D называется *квадрируемым*, если его внутренняя и внешняя площади совпадают:

$$S_*(D) = S^*(D), \quad \text{где} \quad S_*(D) = \sup_{P \subseteq D} S(P), \quad S^*(D) = \inf_{Q \supseteq D} S(Q).$$

Двойной интеграл

1. Напоминание о площади и квадрируемых множествах

Рассмотрим ограниченное плоское множество D ($D \subset \mathbb{R}^2$).
Пусть P — произвольный вписанный в D многоугольник ($P \subseteq D$) и Q — произвольный многоугольник, описанный вокруг D ($Q \supseteq D$).
Будем обозначать $S(P)$ площадь многоугольника P.

Определение 1. Множество D называется *квадрируемым*, если его внутренняя и внешняя площади совпадают:

$$S_*(D) = S^*(D), \quad \text{где} \quad S_*(D) = \sup_{P \subseteq D} S(P), \quad S^*(D) = \inf_{Q \supseteq D} S(Q).$$

При этом общее значение внутренней и внешней площадей называется *площадью квадрируемого множества* D и обозначается $S(D)$:

$$S(D) := S_*(D) = S^*(D).$$

Критериями квадрируемости множества D служат следующие условия:

Критериями квадрируемости множества D служат следующие условия:

1) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, P \subseteq D \;\exists\, Q \supseteq D \;\; : \;\; S(Q) - S(P) < \varepsilon$

Критериями квадрируемости множества D служат следующие условия:

1) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists P \subseteq D \; \exists Q \supseteq D \;:\; S(Q) - S(P) < \varepsilon$

2) граница множества D, ∂D, имеет площадь ноль

Критериями квадрируемости множества D служат следующие условия:

1) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, P \subseteq D\; \exists\, Q \supseteq D \;\; : \;\; S(Q) - S(P) < \varepsilon$

2) граница множества D, ∂D, имеет площадь ноль,
т.е. для любого наперёд взятого $\varepsilon > 0$ найдётся многоугольник площади меньше ε, покрывающий кривую ∂D.

Критериями квадрируемости множества D служат следующие условия:

1) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, P \subseteq D \;\exists\, Q \supseteq D \; : \; S(Q) - S(P) < \varepsilon$

2) граница множества D, ∂D, имеет площадь ноль,
т.е. для любого наперёд взятого $\varepsilon > 0$ найдётся многоугольник площади меньше ε, покрывающий кривую ∂D.

Напомним, что

Критериями квадрируемости множества D служат следующие условия:

1) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists P \subseteq D \; \exists Q \supseteq D \;:\; S(Q) - S(P) < \varepsilon$

2) граница множества D, ∂D, имеет площадь ноль,
т.е. для любого наперёд взятого $\varepsilon > 0$ найдётся многоугольник площади меньше ε, покрывающий кривую ∂D.

Напомним, что

а) любая спрямляемая кривая имеет площадь ноль

Критериями квадрируемости множества D служат следующие условия:

1) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, P \subseteq D \; \exists\, Q \supseteq D \;:\; S(Q) - S(P) < \varepsilon$

2) граница множества D, ∂D, имеет площадь ноль,
т.е. для любого наперёд взятого $\varepsilon > 0$ найдётся многоугольник площади меньше ε, покрывающий кривую ∂D.

Напомним, что

a) любая спрямляемая кривая имеет площадь ноль

b) кривая вида $\{(x, f(x)) |\; f(x)$ — непрерывна на $[a, b]\}$ имеет площадь ноль

Критериями квадрируемости множества D служат следующие условия:

1) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, P \subseteq D \;\exists\, Q \supseteq D \;:\; S(Q) - S(P) < \varepsilon$

2) граница множества D, ∂D, имеет площадь ноль,
т.е. для любого наперёд взятого $\varepsilon > 0$ найдётся многоугольник площади меньше ε, покрывающий кривую ∂D.

Напомним, что

a) любая спрямляемая кривая имеет площадь ноль

b) кривая вида $\{(x, f(x))|\; f(x)$ — непрерывна на $[a, b]\}$ имеет площадь ноль

Обратное неверно.

Критериями квадрируемости множества D служат следующие условия:

1) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists P \subseteq D \; \exists Q \supseteq D \; : \; S(Q) - S(P) < \varepsilon$

2) граница множества D, ∂D, имеет площадь ноль,
т.е. для любого наперёд взятого $\varepsilon > 0$ найдётся многоугольник площади меньше ε, покрывающий кривую ∂D.

Напомним, что

a) любая спрямляемая кривая имеет площадь ноль

b) кривая вида $\{(x, f(x)) | \; f(x)$ — непрерывна на $[a, b]\}$ имеет площадь ноль

Обратное неверно.

Упражнение. Укажите пример неспрямляемой кривой, имеющей площадь ноль.

Основные свойства площади

[1] Камилл Жордан (1838–1922), французский математик.

[2] Анри Лебег (1875–1941), французский математик.

Основные свойства площади

1) Монотонность:

[1]Камилл Жордан (1838–1922), французский математик.

[2]Анри Лебег (1875–1941), французский математик.

Основные свойства площади

1) Монотонность:

$$\forall\, D, G \;\; (D \subseteq G \;\Rightarrow\; S(D) \leqslant S(G))$$

---

[1] Камилл Жордан (1838–1922), французский математик.

[2] Анри Лебег (1875–1941), французский математик.

Основные свойства площади

1) Монотонность:

$$\forall\, D, G \ \ (D \subseteq G \ \Rightarrow \ S(D) \leqslant S(G))$$

2) Аддитивность:

[1]Камилл Жордан (1838–1922), французский математик.

[2]Анри Лебег (1875–1941), французский математик.

Основные свойства площади

1) Монотонность:

$$\forall\, D, G \ \ (D \subseteq G \ \Rightarrow \ S(D) \leqslant S(G))$$

2) Аддитивность:

$$\forall\, D, G \ \ (\mathring{D} \cap \mathring{G} = \emptyset \ \Rightarrow \ S(D \cup G) = S(D) + S(G))$$

[1] Камилл Жордан (1838–1922), французский математик.

[2] Анри Лебег (1875–1941), французский математик.

Основные свойства площади

1) Монотонность:

$$\forall\, D, G \;\; (D \subseteq G \;\Rightarrow\; S(D) \leqslant S(G))$$

2) Аддитивность:

$$\forall\, D, G \;\; (\mathring{D} \cap \mathring{G} = \emptyset \;\Rightarrow\; S(D \cup G) = S(D) + S(G))$$

3) Инвариантность:

[1] Камилл Жордан (1838–1922), французский математик.

[2] Анри Лебег (1875–1941), французский математик.

Основные свойства площади

1) Монотонность:

$$\forall\, D, G \;\; (D \subseteq G \;\Rightarrow\; S(D) \leqslant S(G))$$

2) Аддитивность:

$$\forall\, D, G \;\; (\mathring{D} \cap \mathring{G} = \emptyset \;\Rightarrow\; S(D \cup G) = S(D) + S(G))$$

3) Инвариантность: площади конгруэнтных фигур равны

---

[1] Камилл Жордан (1838–1922), французский математик.

[2] Анри Лебег (1875–1941), французский математик.

Основные свойства площади

1) Монотонность:

$$\forall\, D, G \ \ (D \subseteq G \ \Rightarrow \ S(D) \leqslant S(G))$$

2) Аддитивность:

$$\forall\, D, G \ \ (\mathring{D} \cap \mathring{G} = \emptyset \ \Rightarrow \ S(D \cup G) = S(D) + S(G))$$

3) Инвариантность: площади конгруэнтных фигур равны

Построенную площадь называют *Жордановой мерой* плоского множества (*площадью множества по Жордану*[1]). Эта мера конечно-аддитивна, но не счётно-аддитивна (в отличие от меры Лебега[2]).

[1] Камилл Жордан (1838–1922), французский математик.

[2] Анри Лебег (1875–1941), французский математик.

2. Определение двойного интеграла

2. Определение двойного интеграла

Пусть D — квадрируемая плоская фигура и пусть функция $f(x, y)$ определена на D.

2. Определение двойного интеграла

Пусть D — квадрируемая плоская фигура и пусть функция $f(x, y)$ определена на D.

Разобьём множество D произвольным образом на n квадрируемых фигур, не имеющих общих внутренних точек:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \ : \ D_i \text{ — квадрируема}, \quad \mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset \ \text{ при } i \neq j.$$

2. Определение двойного интеграла

Пусть D — квадрируемая плоская фигура и пусть функция $f(x, y)$ определена на D.
Разобьём множество D произвольным образом на n квадрируемых фигур, не имеющих общих внутренних точек:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \ : \ D_i \text{ — квадрируема,} \quad \mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset \ \text{ при } i \neq j.$$

Построенные таким образом множества $\{D_i\}_{i=1}^{n}$ называют *разбиением множества* D.

2. Определение двойного интеграла

Пусть D — квадрируемая плоская фигура и пусть функция $f(x, y)$ определена на D.
Разобьём множество D произвольным образом на n квадрируемых фигур, не имеющих общих внутренних точек:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \ : \ D_i \text{ — квадрируема}, \quad \mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset \ \text{ при } i \neq j.$$

Построенные таким образом множества $\{D_i\}_{i=1}^{n}$ называют *разбиением множества* D. Будем обозначать его τ

2. Определение двойного интеграла

Пусть D — квадрируемая плоская фигура и пусть функция $f(x, y)$ определена на D.
Разобьём множество D произвольным образом на n квадрируемых фигур, не имеющих общих внутренних точек:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \;:\; D_i \text{ — квадрируема,} \quad \mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset \;\text{ при } i \neq j.$$

Построенные таким образом множества $\{D_i\}_{i=1}^{n}$ называют *разбиением множества* D. Будем обозначать его τ $\left(\tau := \{D_i\}_{i=1}^{n}\right)$.

2. Определение двойного интеграла

Пусть D — квадрируемая плоская фигура и пусть функция $f(x, y)$ определена на D.
Разобьём множество D произвольным образом на n квадрируемых фигур, не имеющих общих внутренних точек:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \ : \ D_i \text{ — квадрируема}, \quad \overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset \ \text{ при } i \neq j.$$

Построенные таким образом множества $\{D_i\}_{i=1}^{n}$ называют *разбиением множества* D. Будем обозначать его τ $\ (\tau := \{D_i\}_{i=1}^{n})$.

Для каждого участка разбиения D_i найдём

$$S(D_i) \text{ — площадь} \quad \text{и} \quad d_i = \sup_{M, N \in D_i} \rho(M, N) \text{ — диаметр.}$$

2. Определение двойного интеграла

Пусть D — квадрируемая плоская фигура и пусть функция $f(x, y)$ определена на D.
Разобьём множество D произвольным образом на n квадрируемых фигур, не имеющих общих внутренних точек:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \ : \ D_i \text{ — квадрируема}, \quad \mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset \ \text{ при } i \neq j.$$

Построенные таким образом множества $\{D_i\}_{i=1}^{n}$ называют *разбиением множества* D. Будем обозначать его τ $\ (\tau := \{D_i\}_{i=1}^{n})$.

Для каждого участка разбиения D_i найдём

$$S(D_i) \text{ — площадь} \quad \text{и} \quad d_i = \sup_{M,N \in D_i} \rho(M, N) \text{ — диаметр.}$$

Введём *диаметр разбиения*: $d = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$.

2. Определение двойного интеграла

Пусть D — квадрируемая плоская фигура и пусть функция $f(x, y)$ определена на D.
Разобьём множество D произвольным образом на n квадрируемых фигур, не имеющих общих внутренних точек:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \ : \ D_i \text{ — квадрируема,} \quad \overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset \ \text{ при } i \neq j.$$

Построенные таким образом множества $\{D_i\}_{i=1}^{n}$ называют *разбиением множества* D. Будем обозначать его τ $\ (\tau := \{D_i\}_{i=1}^{n})$.

Для каждого участка разбиения D_i найдём

$$S(D_i) \text{ — площадь} \quad \text{и} \quad d_i = \sup_{M,N \in D_i} \rho(M, N) \text{ — диаметр.}$$

Введём *диаметр разбиения*: $d = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$.
Выберем произвольную точку на каждом участке разбиения: $N_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$.

Составим *интегральную сумму*:

$$\sigma = \sigma(\tau, \{N_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(N_i) S(D_i). \tag{1}$$

Составим *интегральную сумму*:

$$\sigma = \sigma(\tau, \{N_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(N_i)S(D_i). \qquad (1)$$

Определение 2. Если существует предел I интегральных сумм (1), не зависящий от способа τ разбиения множества D на части (указанным образом) и от выбора точек N_i, то функция f называется *интегрируемой* по множеству D, а число I называется интегралом от функции f по множеству D

Составим *интегральную сумму*:

$$\sigma = \sigma(\tau, \{N_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(N_i) S(D_i). \tag{1}$$

Определение 2. Если существует предел I интегральных сумм (1), не зависящий от способа τ разбиения множества D на части (указанным образом) и от выбора точек N_i, то функция f называется *интегрируемой* по множеству D, а число I называется интегралом от функции f по множеству D, обозначается:

$$I = \iint_D f(N)\, dS = \iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

3. Необходимые и достаточные условия существования двойного интеграла

3. Необходимые и достаточные условия существования двойного интеграла

Интегрируемость и ограниченность

3. Необходимые и достаточные условия существования двойного интеграла

Интегрируемость и ограниченность

Замечание 1. Ограниченность функции на измеримом плоском множестве не является необходимым условием её интегрируемости

3. Необходимые и достаточные условия существования двойного интеграла

Интегрируемость и ограниченность

Замечание 1. Ограниченность функции на измеримом плоском множестве не является необходимым условием её интегрируемости (в отличие от однократного интеграла).

3. Необходимые и достаточные условия существования двойного интеграла

Интегрируемость и ограниченность

Замечание 1. Ограниченность функции на измеримом плоском множестве не является необходимым условием её интегрируемости (в отличие от однократного интеграла).

Теорема 1. Если функция f интегрируема на (квадрируемом) множестве D и неограничена на нём, то найдётся $E \subset D$ такое, что $S(E) = 0$ и f ограничена на $D \setminus E$.

3. Необходимые и достаточные условия существования двойного интеграла

Интегрируемость и ограниченность

Замечание 1. Ограниченность функции на измеримом плоском множестве не является необходимым условием её интегрируемости (в отличие от однократного интеграла).

Теорема 1. Если функция f интегрируема на (квадрируемом) множестве D и неограничена на нём, то найдётся $E \subset D$ такое, что $S(E) = 0$ и f ограничена на $D \setminus E$.

Замечание 2. Существенным в доказательстве ограниченности функции на $D \setminus E$ послужило существование разбиений на сколь угодно мелкие части положительной меры.

3. Необходимые и достаточные условия существования двойного интеграла

Интегрируемость и ограниченность

Замечание 1. Ограниченность функции на измеримом плоском множестве не является необходимым условием её интегрируемости (в отличие от однократного интеграла).

Теорема 1. Если функция f интегрируема на (квадрируемом) множестве D и неограничена на нём, то найдётся $E \subset D$ такое, что $S(E) = 0$ и f ограничена на $D \setminus E$.

Замечание 2. Существенным в доказательстве ограниченности функции на $D \setminus E$ послужило существование разбиений на сколь угодно мелкие части положительной меры.

Следствие. Если f интегрируема на множестве D, имеющем разбиений на сколь угодно мелкие части положительной меры, то f ограниченна на D.

3. Необходимые и достаточные условия существования двойного интеграла

Интегрируемость и ограниченность

Замечание 1. Ограниченность функции на измеримом плоском множестве не является необходимым условием её интегрируемости (в отличие от однократного интеграла).

Теорема 1. Если функция f интегрируема на (квадрируемом) множестве D и неограничена на нём, то найдётся $E \subset D$ такое, что $S(E) = 0$ и f ограничена на $D \setminus E$.

Замечание 2. Существенным в доказательстве ограниченности функции на $D \setminus E$ послужило существование разбиений на сколь угодно мелкие части положительной меры.

Следствие. Если f интегрируема на множестве D, имеющем разбиений на сколь угодно мелкие части положительной меры, то f ограниченна на D.

Теорема 2. Если функция f интегрируема на открытом (квадрируемом) множестве, то она ограничена на нём.