

Квадрики на плоскости

Вариант-18

Семес 19.05.20

Расселен

Гр-102, Мен-190207

1) Найти ур-ие квадрики:
по опр-ию ур-ие соотв. квадрике на плоскости, координаты которой удовлетворяют

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \text{ где } a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$$

Составим систему, подставив вместо (x, y) точки:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ -2a_{11} - 2a_1 + a_0 = 0 \\ a_{22} - 2a_2 + a_0 = 0 \\ 16a_{11} - 16a_{12} + 4a_{22} + 8a_1 - 4a_2 + a_0 = 0 \\ 4a_{11} - 16a_{12} + 16a_{22} - 4a_1 + 8a_2 + a_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_{11} - 2a_1 = 0, \\ a_{22} - 2a_2 = 0, \\ 16a_{11} - 16a_{12} + 4a_{22} + 8a_1 - 4a_2 = 0, \\ 4a_{11} - 16a_{12} + 16a_{22} - 4a_1 + 8a_2 = 0 \end{cases}$$

$$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{22} \quad a_1 \quad a_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 16 & -16 & 4 & 8 & -4 \\ 4 & -16 & 16 & -4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -16 & 4 & 40 & -4 \\ 0 & -16 & 16 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -16 & 4 & 40 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -36 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -16 & 4 & 40 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -36 & 36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -16 & 4 & 40 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_2 = C \\ a_1 = a_2 = C \\ a_{22} = 2C \\ a_{12} = \frac{11}{4}C \\ a_{11} = 2C \end{cases}$$

Фер:

| | a_{11} | a_{12} | a_{22} | a_1 | a_2 |
|---|----------|----------|----------|-------|-------|
| 1 | 1 | 11/8 | 1 | 1/2 | 1/2 |

$$x^2 + \frac{11}{4}xy + y^2 + x + y = 0 \quad \text{— ур-ие квадрики}$$

2) привести к каноническому виду и определить тип кривой:

$$x^2 + \frac{11}{4}xy + 2y^2 + 2x + 2y = 0 \quad x^2 + \frac{11}{4}xy + y^2 + x + y = 0$$

Нужно избавиться от xy повернув систему координат на угол α , удовл.

ур-ние: $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{1-1}{2 \cdot \frac{11}{4}} = 0$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad k=0$$

$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$ на такой угол нужно повернуть с.к.

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1) \end{cases} \quad \text{— формулы поворота сист. координат на угол } \alpha$$

Подставим в кв. форму x и y :

$$\frac{1}{2}(x_1 - y_1)^2 + \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{2}(x_1^2 - y_1^2) + \frac{1}{2}(x_1 + y_1)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1) + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1) = 0$$

$$x_1^2 + y_1^2 + \frac{11}{8}(x_1^2 - y_1^2) + \sqrt{2}x_1 = 0 \quad | \cdot 8$$

$$8x_1^2 + 8y_1^2 + 11x_1^2 - 11y_1^2 + 8\sqrt{2}x_1 = 0$$

$$19x_1^2 + 8\sqrt{2}x_1 - 3y_1^2 = 0$$

$$19\left(x_1 + \frac{4}{19}\sqrt{2}\right)^2 - 3y_1^2 = \frac{32}{19}$$

$$\frac{361}{32}\left(x_1 + \frac{4}{19}\sqrt{2}\right)^2 - \frac{57}{32}y_1^2 = 1$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{4}{19}\sqrt{2} \\ y_2 = y_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{361}{32}x_2^2 - \frac{57}{32}y_2^2 = 1} \quad \text{— каноническое уравнение гиперболы}$$

3) Формулы перехода от: $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \text{матрица поворота}$$

$$\begin{cases} x_0 = x_1 \\ y_0 = y_1 \end{cases} \begin{cases} x = x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 \\ y = x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 \end{cases} - \text{формула поворота системы координат на } \angle \alpha$$



4) У нас гипербола, выбираем 4.2

4.2.1) Действ. и мнимая полуось

4.2.2) экстр-ет

4.2.3) коорд. фокусов

4.2.4) ур-ие директрис и асимптот.

(4.2.1) $\frac{x_0^2}{\left(\frac{32}{361}\right)^2} - \frac{y_0^2}{\left(\frac{57}{32}\right)^2} = 1$ $a = \sqrt{\frac{32}{361}}$ - действ. полуось

$b = \sqrt{\frac{32}{57}}$ - мнимая полуось

$$c = \sqrt{\frac{32}{361} + \frac{32}{57}} = \sqrt{\frac{1824 + 11552}{301 \cdot 57}} = \sqrt{\frac{13376}{20577}}$$

(4.2.2) $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\frac{13376}{20577}}}{\sqrt{\frac{32}{361}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{32}} \cdot \sqrt{361} = \frac{\sqrt{13376}}{\sqrt{1824}} = \sqrt{\frac{13376}{1824}}$ - экстр-ет

(4.2.3) $F_1(c, 0) = \left(\sqrt{\frac{13376}{20577}}, 0\right)$ - правый фокус

$F_2(-c, 0) = \left(-\sqrt{\frac{13376}{20577}}, 0\right)$ - левый фокус.

(4.2.4) $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \sqrt{\frac{32}{361}} \cdot \sqrt{\frac{1824}{13376}} = \pm \frac{58368}{14828736}$ - директрисы.

$$y = \pm \frac{b}{a} x = \pm \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{57}} \cdot \frac{\sqrt{361}}{\sqrt{32}} x = \pm \sqrt{\frac{361}{57}} x \text{ - acceleration}$$
