Самосопряженный оператор и псевдорешения системы линейных уравнений.

Семке Даниил
Кн-102, мен-190207

① Найдите все псевдорешения системы линейных ур-ий:

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+3z=-1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

Проверим на совместность:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ система не совместна.

Тогда решим систему $A^T A x = A^T b$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\tfrac{3}{2} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 9 & -1 & 14 & 2 \end{array}\right) \sim \tfrac{1}{2} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1/2 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Частное решение: $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1/3 \end{cases}$

Общее решение однор. системы: $\begin{cases} x_3 = c \\ x_2 = \frac{c}{2} \\ x_1 = -\frac{3}{2}c \end{cases}$

ФСР:	x_1	x_2	x_3
f_1	$-3/2$	$1/2$	1

Ответ: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, где α - любое.

② Найти ОНБ, в котором матр. лин. опер. диагональна.

Найдем харак-ое ур-ие и его корни:
$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2-\alpha&1&1\\1&1-\alpha&0\\1&0&1-\alpha\end{vmatrix}=(1-\alpha)^2(2-\alpha)-(1-\alpha)-(1-\alpha)=(1-\alpha)((1-\alpha)(2-\alpha)-2)=$$
$$=(1-\alpha)(\alpha^2-3\alpha)=\alpha(1-\alpha)(\alpha-3)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=0\\\alpha=1\\\alpha=3\end{array}\right.$$ – собственные значения.

① $\alpha=0$

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&y&z\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\quad\begin{cases}z=C\\y=C=z\\x=-C\end{cases}$$

ФСР:

	x	y	z
f_1	-1	1	1

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$ – собств. вектор.

② $\alpha=1$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&y&z\end{array}\\\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\quad\begin{cases}z=C\\y=-C\\x=0\end{cases}$$

ФСР:

	x	y	z
f_1	0	+1	-1

$$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

③ $\alpha=3$

$$\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-2&0\\1&0&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&y&z\end{array}\\\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\quad\begin{cases}x=2C\\z=C\\y=z=C\end{cases}$$

$$\vec{v}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

ФСР:

	x	y	z
f_1	2	1	1

Пронормируем собственные векторы:

$$e_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

По критерию приводимости оператора к диагональному виду линейный оператор имеет диагональную матрицу и ОНБ состоит из собственных векторов оператора.

Ответ: $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$

---

(3) (11.4.1 е) Найти ОНБ из собств. векторов и матрицу в этом базисе для сопряженного линейного оператора, заданного в некотором ОНБ матрицей:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собств. значение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-\lambda^3+\lambda) - \lambda^2 + 1 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2-1)^2 = 0$$

$\lambda = \pm 1$

$\boxed{\lambda = 1}$:
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \\ x_2 = C_1 \\ x_1 = C_2 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
f_1	1	0	0	1
f_2	0	1	1	0

$\vec{v_1} = (1, 0, 0, 1)$

$\vec{v_2} = (0, 1, 1, 0)$

$\lambda = -1$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \\ x_2 = -C_1 \\ x_1 = -C_2 \end{cases}$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3	x_4
-1	0	0	1
0	-1	1	0

$\vec{v_3} = (-1, 0, 0, 1)$

$\vec{v_4} = (0, -1, 1, 0)$

Пронормируем векторы:

$e_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$e_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \left(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right)$

$e_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \left(-1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}\right)$

$e_4 = \frac{v_4}{|v_4|} = \left(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right)$

$\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ - искомый базис.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$, т.к. собств. значения - корни кратности 2.