# Лекция 2: Многочлены

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

## Определения

*Многочленом от одной переменной* называется выражение вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — произвольные (комплексные) числа и $a_n \neq 0$. В дальнейшем, говоря о многочленах, мы опускаем слова «от одной переменной», поскольку многочлены от нескольких переменных мы рассматривать не будем. Число $n$ называется *степенью* многочлена $f$ и обозначается через $\deg f$. Числа $a_0, a_1, \dots, a_n$ называются *коэффициентами* многочлена $f$, число $a_0$ — его *свободным членом*, а число $a_n$ — его *старшим коэффициентом*. Любое число является многочленом нулевой степени. Такие многочлены называются *константами*. Многочлены степени 1 называются *линейными*.

## Теорема о делении многочленов с остатком (1)

Важную роль в теории многочленов играет следующее утверждение.

**Теорема 1**

*Пусть $f$ и $g$ — многочлены и $g \neq 0$. Тогда существуют, причем единственные, многочлены $q$ и $r$ такие, что*

$$f = qg + r \text{ и } \deg r < \deg g. \qquad (1)$$

Доказательство. Если $\deg g = 0$, то $g$ — ненулевое число. Но тогда

$$f = \left(\frac{1}{g} \cdot g\right) f = \left(\frac{1}{g} \cdot f\right) g$$

и равенство (1) будет выполнено, если положить $q = \frac{1}{g} \cdot f$ и $r = 0$. Предположим теперь, что $\deg g > 0$. Если $\deg f < \deg g$, то (1) выполнено при $q = 0$ и $r = f$. Пусть теперь $\deg f \geqslant \deg g$. Существование многочленов $q$ и $r$ в этом случае докажем индукцией по $\deg f$. Положим $\deg f = n$ и $\deg g = m$. Ясно, что $n \geqslant m$. Поэтому базой индукции будет случай, когда $n = m$.

# Теорема о делении многочленов с остатком (2)

База индукции. Пусть $n = m$. Тогда $f = ax^m + f_1$ и $g = bx^m + g_1$, где $\deg f_1, \deg g_1 < m$ и $a, b \neq 0$. Положим $q = \frac{a}{b}$. Ясно, что

$$f - gq = (ax^m + f_1) - \frac{a}{b} \cdot (bx^m + g_1) = f_1 - \frac{a}{b} \cdot g_1.$$

Поскольку

$$\deg(f - gq) = \deg(f_1 - \frac{a}{b} \cdot g_1) \leqslant \max\{\deg f_1, \deg g_1\} < \deg g,$$

равенство (1) выполнено при $q = \frac{a}{b}$ и $r = f - gq$.

Шаг индукции. Пусть теперь $n > m$ и для всех многочленов $h$ таких, что $\deg h < n$, существуют такие многочлены $q$ и $r$, что $h = qg + r$ и $\deg r < \deg g$. Рассмотрим произвольный многочлен $f$ степени $n$. Имеем $f = ax^n + f_1$ и $g = bx^m + g_1$, где $\deg f_1 < n$, $\deg g_1 < m$ и $a, b \neq 0$. Положим $h_1 = \frac{a}{b} \cdot x^{n-m}$. Тогда $h_1 g = ax^n + h_1 g_1$, откуда

$$f - h_1 g = ax^n + f_1 - ax^n - h_1 g_1 = f_1 - h_1 g_1.$$

Заметим, что $\deg h_1 g_1 = \deg h_1 + \deg g_1 < (n - m) + m = n$, и потому $\deg(f - h_1 g) = \deg(f_1 - h_1 g_1) \leqslant \max\{\deg f_1, \deg h_1 g_1\} < n$. Применяя к многочлену $f - h_1 g$ предположение индукции, констатируем существование многочленов $q_1$ и $r$ таких что $f - h_1 g = q_1 g + r$ и $\deg r < \deg g$. Поскольку $f = h_1 g + q_1 g + r = (h_1 + q_1)g + r$, шаг индукции доказан.

# Теорема о делении многочленов с остатком (3)

Осталось доказать единственность многочленов $q$ и $r$. Предположим, что $f = q_1 g + r_1$ и $f = q_2 g + r_2$ для некоторых многочленов $q_1, q_2, r_1, r_2$ таких что $\deg r_1, \deg r_2 < \deg g$. Из равенства $q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2$ получаем, что

$$(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1. \tag{2}$$

Если $q_1 - q_2 \neq 0$, то

$$\deg(r_2 - r_1) \leqslant \max\{\deg r_1, \deg r_2\} < \deg g \leqslant \deg\big((q_1 - q_2)g\big)$$

вопреки равенству (2). Следовательно, $q_1 - q_2 = 0$, откуда $q_1 = q_2$. С учетом (2), отсюда вытекает, что и $r_1 = r_2$. Теорема доказана. □

**Определения**

В равенстве (1) многочлен $q$ называется *частным*, а многочлен $r$ — *остатком* от деления $f$ на $g$. Если $r = 0$, то говорят, что многочлен $f$ *делится* на многочлен $g$; в этом случае $f = qg$.

Из доказательства теоремы 1 извлекается следующий алгоритм деления многочлена на многочлен, который обычно называется *алгоритмом деления многочленов столбиком* (происхождение этого названия будет объяснено на следующем слайде).

**Алгоритм деления многочленов столбиком**

Пусть

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ и } g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

причем $a_n, b_m \neq 0$ и $n \geqslant m > 0$. Положим $f_1 = f$ и $q_1 = 0$. Шаг алгоритма состоит в замене многочлена $f_1$ на многочлен $f_1 - \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} g$, а многочлена $q_1$ — на многочлен $q_1 + \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m}$. Шаги повторяются до тех пор, пока выполнено неравенство $\deg f_1 \geqslant m$. Так как степень $f_1$ на каждом шаге уменьшается на $m$, алгоритм закончит работу через конечное число шагов. При этом частное будет равно последнему значению многочлена $q_1$, а остаток — последнему значению многочлена $f_1$.

# Деление многочленов столбиком (пример)

Рассмотрим конкретный пример деления многочленов. Вычисления записываются так же, как при делении многозначных чисел столбиком (этим и объясняется название алгоритма).

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & x^3 - 2x^2 & + 5x & + 1 & & x^2 - x + 2 \\ \cline{6-6}
- & x^3 - x^2 & + 2x & & & x - 1 \\ \cline{2-3}
 & - x^2 & + 3x & + 1 & & \\
- & - x^2 & + x & - 2 & & \\ \cline{2-4}
 & & 2x & + 3 & &
\end{array}
$$

Таким образом, $x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = (x-1)(x^2 - x + 2) + (2x+3)$, частное равно $x - 1$, а остаток — $2x + 3$.

**Определение**

Число $\alpha$ называется *корнем* многочлена $f$, если $f(\alpha) = 0$.

Из теоремы 1 легко вытекает

**Следствие 1**

*Если $\alpha$ — корень многочлена $f$, то $f$ делится на $x - \alpha$.*

Доказательство. Поскольку $\deg(x - \alpha) = 1$, в силу теоремы 1 существуют такие многочлены $q$ и $r$, что для всякого $x \in \mathbb{C}$ выполнено равенство

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x) \tag{3}$$

и $\deg r < 1$. Последнее неравенство означает, что $\deg r = 0$, т. е. $r$ — константа. Подставим в (3) $\alpha$ вместо $x$. Получим $0 = 0 \cdot q(x) + r$, откуда $r = 0$. Следовательно, $f(x) = (x - \alpha)q(x)$. □

Одним из мотивов расширения множества действительных чисел до множества комплексных чисел является то, что существуют многочлены с действительными коэффициентами, которые не имеют действительных корней. Таков, например, многочлен $x^2 + 1$. Между тем, этот многочлен имеет два комплексных корня: $i$ и $-i$ (см. задачу 2 в лекции 1). Возникает вопрос: всякий ли многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень? При этом, разумеется, следует исключить из рассмотрения многочлены степени 0 (т. е. константы). Ответ на поставленный вопрос дает следующее утверждение, которое называют *теоремой Гаусса* или *основной теоремой высшей алгебры*.

**Теорема 2**

*Произвольный многочлен с комплексными коэффициентами, степень которого больше 0, имеет по крайней мере один комплексный корень.* □

Известно несколько доказательств этой теоремы, но все они достаточно сложные, и мы их рассматривать не будем. Отметим только некоторые следствия из теоремы.

Пусть $f(x)$ — многочлен степени $n > 0$ с комплексными коэффициентами. По теореме Гаусса он имеет некоторый корень $t_1$. В силу следствия 1 $f(x) = (x - t_1)g(x)$ для некоторого многочлена $g(x)$ степени $n - 1$. Если $n - 1 > 0$, то по теореме Гаусса многочлен $g(x)$ имеет некоторый корень $t_2$. Вновь применяя следствие 1, имеем

$$f(x) = (x - t_1)g(x) = (x - t_1)(x - t_2)h(x)$$

для некоторого многочлена $h(x)$ степени $n - 2$. Продолжая этот процесс, мы в конечном счете представим $f(x)$ в виде произведения $n$ линейных множителей и многочлена степени 0, т. е. константы. Иными словами,

$$f(x) = c(x - t_1)(x - t_2)\cdots(x - t_n). \tag{4}$$

Правую часть этого равенства можно переписать в виде $(cx - ct_1)(x - t_2)\cdots(x - t_n)$. Таким образом, справедливо

**Следствие 2**

*Если $n > 0$, то произвольный многочлен степени $n$ с комплексными коэффициентами разложим в произведение $n$ линейных множителей.* $\square$

# Следствия из теоремы Гаусса (2)

Для того, чтобы доказать еще одно следствие из теоремы Гаусса, нам понадобится следующая

**Лемма 1**

*Если комплексное число $x$ является корнем многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, то $\overline{x}$ — также корень этого многочлена.*

Доказательство. Пусть $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ — многочлен с действительными коэффициентами, а $x$ — его корень. Используя свойства комплексно сопряженных чисел (см. лекцию 1), имеем

$$
\begin{aligned}
f(\overline{x}) &= a_n \overline{x}^n + a_{n-1}\overline{x}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{x} + a_0 = \\
&= \overline{a_n} \cdot \overline{x^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{x^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1} \cdot \overline{x} + \overline{a_0} = \\
&= \overline{a_n x^n} + \overline{a_{n-1}x^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 x} + \overline{a_0} = \\
&= \overline{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} = \overline{f(x)} = \overline{0} = 0,
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать. □

Вернемся к следствиям из теоремы Гаусса.

**Следствие 3**

*Произвольный многочлен степени $> 0$ с действительными коэффициентами разложим в произведение многочленов с действительными коэффициентами, каждый из которых либо линеен, либо является квадратным трехчленом с отрицательным дискриминантом.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — многочлен степени $n > 0$ с действительными коэффициентами. В силу (4)

$$f(x) = c(x - t_1)(x - t_2) \cdots (x - t_n),$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — комплексные числа. Ясно, что $c$ — коэффициент при $x^n$ в многочлене $f(x)$, и потому $c \in \mathbb{R}$. Расположив, при необходимости, числа $t_1, t_2, \ldots, t_n$ в другом порядке, мы можем считать, что $t_1, t_2, \ldots, t_m$ — действительные числа, а $t_{m+1}, \ldots, t_n$ — комплексные числа, не являющиеся действительными (для некоторого $0 \leqslant m \leqslant n$). Если $m = n$, то все доказано. Предположим теперь, что $m < n$. Положим

$$g(x) = (x - t_{m+1}) \cdots (x - t_n).$$

Тогда $f(x) = (cx - ct_1)(x - t_2) \cdots (x - t_m)g(x)$.

Осталось показать, что многочлен $g(x)$ разложим в произведение квадратных трехчленов с действительными коэффициентами, дискриминанты которых отрицательны. В силу леммы 1 числа $x_{m+1}, \ldots, x_n$ распадаются на пары комплексно сопряженных друг к другу чисел. Поэтому достаточно проверить, что если $z = a + bi$ — комплексное число, не являющееся действительным, то $(x - z)(x - \overline{z})$ — квадратный трехчлен с действительными коэффициентами, дискриминант которого отрицателен. В самом деле,

$$(x - z)(x - \overline{z}) = (x - a - bi)(x - a + bi) = (x - a)^2 - (bi)^2 = \\ = x^2 - 2ax + a^2 - b^2 i^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2.$$

Очевидно, что получившийся квадратный трехчлен имеет действительные коэффициенты. Его дискриминант равен $4a^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2$. Учитывая, что $b \neq 0$ (поскольку число $a + bi$ не является действительным), получаем, что этот дискриминант отрицателен. □

# Следствия из теоремы Гаусса (5)

Ясно, что если многочлен $f$ имеет вид (4), то $t_1, t_2, \dots, t_n$ — его корни. Разумеется, некоторые из корней могут совпадать. При этом, если, например, $t_1 = \dots = t_k$, то $f$ делится на $(x - t_1)^k$.

**Определение**

Корень $t$ многочлена $f$ называется корнем *кратности* $k$, если $f$ делится на $(x - t)^k$, но не делится на $(x - t)^{k+1}$.

С учетом сказанного выше, получаем

**Следствие 4**

*Многочлен степени $n > 0$ с комплексными коэффициентами имеет ровно $n$ комплексных корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.* □

Все известные доказательства теоремы Гаусса неконструктивны в том смысле, что они устанавливают лишь существование корня, но не указывают способа его нахождения. Естественно возникает вопрос о том, как найти корень того или иного конкретного многочлена. Для многочленов первой степени ответ на этот вопрос очевиден: многочлен $ax + b$ при $a \neq 0$ имеет единственный корень, равный $-\frac{b}{a}$. Для многочленов второй степени ответ дается известной формулой корней квадратного уравнения. Действительно, проанализировав вывод этой формулы для случая действительных чисел, изучаемый в школьном курсе, нетрудно понять, что он остается верным и для уравнений с комплексными коэффициентами. Более того, в комплексном случае формула несколько упрощается. Если $ax^2 + bx + c = 0$ — уравнение с комплексными коэффициентами и $a \neq 0$, то его корни вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{5}$$

Знак минус перед корнем из дискриминанта можно не ставить, так как здесь подразумевается комплексный корень, имеющий два значения, а не арифметическое значение действительного корня. В математике известны формулы для нахождения комплексных корней многочленов третьей и четвертой степени, но они громоздки и неудобны для практического применения, и потому мы не будем их приводить.

При $n \geqslant 5$ единой формулы для нахождения корней произвольного многочлена степени $n$ не существует (этот факт доказан в конце XVIII — начале XIX века итальянским математиком Руффини и норвежским математиком Абелем). На практике при нахождении корней многочленов степени $> 2$ используются приближенные методы, но их изложение выходит за рамки нашего курса. Если все коэффициенты многочлена являются целыми числами, то найти его рациональные корни (если они существуют) можно с помощью сдедующего утверждения.

**Предложение 1**

*Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ — многочлен с целыми коэффициентами, а $\frac{p}{q}$ — рациональное число и несократимая дробь. Если $\frac{p}{q}$ — корень многочлена $f(x)$, то $p$ является делителем свободного члена многочлена $f(x)$, а $q$ — делителем его старшего коэффициента.*

Доказательство. По условию $a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot \frac{p}{q} + a_n = 0$. Умножив обе части этого равенства на $q^n$, получим

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0. \tag{6}$$

Отсюда

$$a_nq^n = -a_0p^n - a_1p^{n-1}q - \cdots - a_{n-1}pq^{n-1} =$$
$$= (-a_0p^{n-1} - a_1p^{n-2}q - \cdots - a_{n-1}q^{n-1})p,$$

и потому $p$ делит $a_nq^n$. Так как числа $p$ и $q$ взаимно просты, $p$ делит $a_n$. С другой стороны, из (6) вытекает, что

$$a_0p^n = -a_1p^{n-1}q - \cdots - a_{n-1}pq^{n-1} - a_nq^n =$$
$$= (-a_1p^{n-1} - \cdots - a_{n-1}pq^{n-2} - a_nq^{n-1})q,$$

и потому $q$ делит $a_0p^n$. Вновь учитывая, что числа $p$ и $q$ взаимно просты, получаем, что $q$ делит $a_0$. □

- Ясно, что существует лишь конечное число дробей вида $\frac{p}{q}$, где $p$ — делитель $a_n$, а $q$ — делитель $a_0$. Вычислив значение многочлена $f(x)$ от каждой из таких дробей и отобрав те дроби, для которых это значение равно 0, мы найдем все рациональные корни этого многочлена.

Из предложения 1 непосредственно вытекает

**Следствие 5**

*Пусть $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ — многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Все рациональные корни многочлена $f(x)$ являются целыми числами. Если при этом целое число $p$ является корнем многочлена $f(x)$, то $p$ является делителем свободного члена многочлена $f(x)$.* □

В некоторых случаях следствие 5 позволяет находить все комплексные корни многочленов высоких степеней. Продемонстрируем это на следующем примере.

Задача 1. Найти все корни многочлена

$$f(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 52x^2 - 84x - 48.$$

Решение. В силу следствия 5 все целые корни этого многочлена (если они существуют) находятся среди делителей числа $-48$. Это число имеет 20 делителей: 1, $-1$, 2, $-2$, 3, $-3$, 4, $-4$, 6, $-6$, 8, $-8$, 12, $-12$, 16, $-16$, 24, $-24$, 48, $-48$. Вычисляя последовательно значение $f(x)$ от этих чисел, получаем, что если $x \in \{1, -1, 2\}$, то $f(x) \neq 0$, а $f(-2) = 0$. Итак, мы нашли первый корень многочлена $f(x)$: $x_1 = -2$. Разделив столбиком $f(x)$ на $x + 2$, получаем, что $f(x) = (x + 2)(x^4 + x^3 - 11x^2 - 30x - 24)$.

Осталось найти корни многочлена $g(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 30x - 24$. В силу следствия 5 его целые корни (если они существуют) являются делителями числа $-24$. Это число имеет 18 делителей: 1, $-1$, 2, $-2$, 3, $-3$, 4, $-4$, 6, $-6$, 8, $-8$, 12, $-12$, 16, $-16$, 24, $-24$. Ясно, что если $x \in \{1, -1, 2\}$, то $g(x) \neq 0$, так как в этом случае $f(x) \neq 0$. Поэтому вычислять значения многочлена $g(x)$ имеет смысл начиная с $x = -2$. Как показывают вычисления, $g(-2) = 0$. Мы нашли второй корень многочлена $f(x)$: $x_2 = -2$. Он совпадает с первым корнем. Иными словами, $-2$ — корень кратности не ниже 2 (как мы сейчас увидем, кратность этого корня равна 2). Разделив столбиком $g(x)$ на $x + 2$, мы получаем, что $g(x) = (x + 2)(x^3 - x^2 - 9x - 12)$.

Теперь надо найти корни многочлена $h(x) = x^3 - x^2 - 9x - 12$. Как и ранее, применяя следствие 5, получаем, что если этот многочлен имеет целые корни, то они находятся среди чисел $-2$, 3, $-3$, 4, $-4$, 6, $-6$, 12, $-12$. Как показывают вычисления, если $x \in \{-2, 3, -3\}$, то $h(x) \neq 0$, а $h(4) = 0$. Таким образом, $x_3 = 4$. Разделив столбиком $h(x)$ на $x - 4$, мы получаем, что $h(x) = (x - 4)(x^2 + 3x + 3)$.

# Корни многочленов с целыми коэффициентами — пример (3)

Осталось решить уравнение $x^2 + 3x + 3 = 0$. По формуле (5) имеем $x_{4,5} = \frac{-3+\sqrt{-3}}{2}$ (напомним, что в данном случае $\sqrt{-3}$ — комплексный корень, принимающий два значения). По формуле (4) из лекции 1 находим, что $\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$. Таким образом, мы нашли еще два корня многочлена $f(x)$: $x_4 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $x_5 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. В силу следствия 4 других корней у многочлена $f(x)$ нет.

Ответ. $x_{1,2} = -2$, $x_3 = 4$, $x_{4,5} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.