Глава X. Квадратичные формы

§ 39. Приведение формы к каноническому виду и закон инерции

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определения

Формой над полем F называется многочлен от произвольного числа переменных над этим полем, в котором все одночлены имеют одну и ту же ненулевую степень. Эта степень называется *степенью формы*. Формы 1-й степени, т. е. многочлены вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные, называются *линейными*. Формы 2-й степени называются *квадратичными*. Квадратичную форму принято записывать в виде

$$\begin{array}{rcccccccc} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & a_{11}x_1^2 & + & a_{22}x_2^2 & + \cdots + & a_{nn}x_n^2 & + \\ + & 2a_{12}x_1x_2 & + & 2a_{13}x_1x_3 & + \cdots + & 2a_{1n}x_1x_n & + \\ & & + & 2a_{23}x_2x_3 & + \cdots + & 2a_{2n}x_2x_n & + \\ & & & & + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & + \\ & & & & & + \; 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n & , \end{array} \qquad (1)$$

где $a_{ij} \in F$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \leqslant j$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные. Скаляры a_{ij} называются *коэффициентами* формы (1).

В дальнейшем мы будем иметь дело почти исключительно с квадратичными формами. Поэтому слово «квадратичная» часто будет опускаться.

! *Всюду в дальнейшем, кроме тех случаев, когда в явном виде оговорено противное, слово «форма» означает «квадратичная форма».*

Матрица квадратичной формы

Определение

Матрицей квадратичной формы (1) называется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- *Матрица любой квадратичной формы является симметрической.*
- Кратко матрицу формы (1) записывают в виде $A = (a_{ij})$, полагая (как правило, неявно), что $a_{ij} = a_{ji}$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть A — матрица квадратичной формы (1). Положим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Вычислив, согласно определению, произведение матриц $X^\top AX$, можно убедиться, что оно представляет собой квадратную матрицу порядка 1, единственным элементом которой является правая часть равенства (1). Отождествляя, как это часто делается, квадратную матрицу 1-го порядка с ее единственным элементом, можно записать форму (1) в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^\top AX. \tag{2}$$

Определение

Правая часть равенства (2) называется *матричной записью* квадратичной формы (1).

Определение

Система равенств вида

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n, \end{cases} \qquad (3)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ — наборы переменных, а b_{ij} — скаляры, называется *линейной заменой переменных*. Замена переменных (3) называется *невырожденной*, если матрица $B = (b_{ij})$ невырождена. Матрица B называется *матрицей замены переменных* (3). Замену (3) можно записать в виде $X = BY$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Замена переменных $Y = B^{-1}X$ называется *обратной к замене* $X = BY$.

Определение

Говорят, что квадратичная форма имеет *канонический вид*, если матрица этой формы диагональна. Иными словами, форма имеет канонический вид, если в ней все коэффициенты при произведениях различных переменных равны 0.

Теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду

Из любой квадратичной формы можно с помощью невырожденной линейной замены переменных получить квадратичную форму, имеющую канонический вид.

Доказательство. Мы приведем два доказательства этого факта. Оба они конструктивны, т. е. содержат алгоритмы приведения формы к каноническому виду. Первый алгоритм (*метод Лагранжа*) менее громоздок и его удобно применять при решении задач. Второй алгоритм (*метод приведения формы к главным осям*) применим только к формам над полем $\mathbb{R}$. Он пригодится нам в § 47 при изучении поверхностей второго порядка. Более подробные комментарии на эту тему см. после доказательства теоремы.

Метод Лагранжа. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма с матрицей $A = (a_{ij})$. Назовем переменную x_i *фиктивной*, если $a_{ij} = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Если форма f содержит фиктивные переменные, то мы можем сначала привести к каноническому виду сумму всех слагаемых формы без фиктивных переменных, а затем добавить квадраты всех фиктивных переменных с коэффициентами 0. Поэтому будем далее считать, что форма не содержит фиктивных переменных. Покажем, что мы можем привести форму к виду

$$b_{11}y_1^2 + g(y_2, \ldots, y_n), \tag{4}$$

где $g(y_2, \ldots, y_n)$ — квадратичная форма, зависящая только от переменных $y_2, \ldots, y_n$. Если $a_{1i} = 0$ для всех $i > 1$, то форма уже имеет такой вид (с точностью до обозначения переменных). Предположим поэтому, что $a_{1i} \neq 0$ для некоторого $i > 1$. Для простоты обозначений будем считать, что $i = 2$ (в общем случае рассуждения аналогичны). Дальнейшие рассмотрения разбиваются на два случая.

Случай 1: $a_{11} \neq 0$. Обозначим через f' сумму всех слагаемых формы f, не содержащих переменную x_1. Тогда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + f'(x_2, \ldots, x_n).$$

Сумму слагаемых, содержащих x_1, дополним до полного квадрата:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11} \cdot \left(x_1^2 + 2x_1 \cdot \frac{a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{11}} + \right.$$
$$\left. + \frac{(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}^2} \right) -$$
$$- \frac{(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}} + f'(x_2, \dots, x_n) =$$
$$= a_{11} \cdot \left(x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{11}} \right)^2 + g(x_2, \dots, x_n),$$

где

$$g(x_2, \dots, x_n) = f'(x_2, \dots, x_n) - \frac{(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}}.$$

Рассмотрим замену переменных

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot y_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot y_n, \\ x_2 & = & y_2, \\ \dots & & \dots \\ x_n & = & y_n. \end{array} \right. \tag{5}$$

Матрица этой замены имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен 1. В частности, замена (5) невырождена. Ясно, что

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{11}}, \quad y_2 = x_2, \quad \dots, \quad y_n = x_n.$$

Следовательно, замена (5) приводит форму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ к виду $a_{11}y_1^2 + g(y_2, \dots, y_n)$, т. е. к форме вида (4).

Случай 2: $a_{11} = 0$. Напомним, что $a_{12} \neq 0$. Рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = y_n. \end{cases} \tag{6}$$

Матрица этой замены имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим ее через B. По предложению об определителе полураспавшейся матрицы (см. § 25) имеем:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 = -2 \neq 0.$$

Таким образом, замена (6) невырождена. Применив ее, получим форму, в которой коэффициент при y_1^2 равен $2a_{12}$, и, в частности, отличен от 0. Это сводит ситуацию к случаю 1.

Итак, мы можем невырожденной линейной заменой переменных привести форму f к виду (4), т. е. избавиться от слагаемых, содержащих произведения x_1 на другие переменные. После этого аналогичными действиями можно избавиться от слагаемых, содержащих произведения x_2 на другие переменные, затем произведения x_3 на другие переменные и т. д.

Через конечное число шагов слагаемых, содержащих произведения различных переменных не останется, и форма примет канонический вид. Теорема доказана (первым способом). □

Прежде чем приводить второе доказательство теоремы, заметим, что справедливо следующее

Замечание об изменении матрицы формы при замене переменных

Если к квадратичной форме $f = X^\top AX$ применить замену переменных $X = BY$, то получится квадратичная форма с матрицей $B^\top AB$.

Доказательство. Подставив BY вместо X в форму $X^\top AX$, мы получим форму $(BY)^\top A(BY) = Y^\top(B^\top AB)Y$, матрица которой равна $B^\top AB$. □

Из этого замечания вытекает

Следствие о знаке определителя матрицы формы

Если квадратичная форма g получена из формы f невырожденной линейной заменой переменных, то определители матриц форм f и g либо оба положительны, либо оба отрицательны, либо оба равны 0.

Доказательство. Пусть форма $g = Y^\top CY$ получена из формы $f = X^\top AX$ невырожденной линейной заменой переменных $X = BY$. В силу замечания об изменении матрицы формы при замене переменных, $C = B^\top AB$. Поскольку $|B^\top| = |B|$, имеем $|C| = |B^\top AB| = |B^\top| \cdot |A| \cdot |B| = |A| \cdot |B|^2$. Доказываемое утверждение вытекает теперь из того факта, что $|B|^2 > 0$. □

Метод приведения к главным осям. Пусть f — квадратичная форма от n переменных над полем $\mathbb{R}$. Будем рассматривать матрицу A формы f как матрицу в стандартном базисе некоторого линейного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве $\mathbb{R}_n$. Матрица A симметрична. В силу следствия о матрице самосопряженного оператора в евклидовом пространстве (см. § 38), оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен. По следствию о симметрических матрицах (см. тот же параграф), существуют ортогональная матрица T и диагональная матрица D такие, что $D = T^{\top}AT$. Применим к форме $f = X^{\top}AX$ невырожденную линейную замену переменных $X = TY$. В силу замечания об изменении матрицы формы при замене переменных мы получим форму, матрицей которой является матрица $T^{\top}AT = D$. Таким образом, в результате этой замены матрица формы станет диагональной, т. е. форма будет приведена к каноническому виду. Теорема доказана (вторым способом). □

Более подробно алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям изложен на следующем слайде.

Алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям

Дана квадратичная форма $X^\top AX$ от n переменных над полем $\mathbb{R}$. Матрица A симметрична. Линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}_n$, имеющий в стандартном базисе этого пространства матрицу A, самосопряжен (см. следствие о матрице самосопряженного оператора в евклидовом пространстве в § 38). Находим сначала все собственные значения, а затем все линейно независимые собственные векторы матрицы A. Они образуют базис в $\mathbb{R}_n$ (см. доказательство основной теоремы о самосопряженном операторе в § 38). Применяя процесс ортогонализации в тех случаях, когда к какому-то собственному значению относится более одного линейно независимого собственного вектора, находим ортогональный базис в $\mathbb{R}_n$ (см. лемму о собственных векторах самосопряженного оператора в § 38). Нормируем векторы этого базиса и получаем ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы A. Записываем векторы этого базиса в матрицу по столбцам, обозначаем эту матрицу через T. Вычисляем матрицу $D = T^\top AT$. Эта матрица диагональна (см. критерий приводимости оператора к диагональному виду и его доказательство в § 31) и является матрицей искомой квадратичной формы, имеющей канонический вид. Вычисление матрицы D можно заменить применением замены переменных $X = TY$.

Изложение метода приведения к главным осям занимает намного меньше места, чем метода Лагранжа, но при применении этих методов для решения задач ситуация прямо противоположна. Для применения метода Лагранжа надо несколько раз выделить полный квадрат по той или иной переменной и/или применить замену переменных вида (6). На практике это сводится к несложным арифметическим манипуляциям с многочленами. В то же время, алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям, описанный на предыдущем слайде, предусматривает: 1) вычисление определителя матрицы $A - xE$, 2) решение уравнения $|A - xE| = 0$ (эти два действия нужны для нахождения собственных значений матрицы A), 3) решение систем линейных уравнений (для нахождения собственных векторов этой матрицы), 4) применение процесса ортогонализации Грама–Шмидта (для получения ортонормированного базиса из собственных векторов), 5) перемножение матриц (для нахождения матрицы $D = T^{\top}AT$). Таким образом, метод приведения формы к главным осям значительно более трудоемок, чем метод Лагранжа, особенно если число переменных в форме больше 3. Поэтому при решении задач метод приведения к главным осям рекомендуется применять только тогда, когда без этого обойтись нельзя — например, при упрощении уравнения поверхности второго порядка (см. §47). Отметим, что в последнем случае форма зависит всего от трех переменных, и потому объем необходимых вычислений сравнительно невелик.

Из одной и той же квадратичной формы с помощью различных невырожденных линейных замен переменных можно получить бесконечно много форм канонического вида. Но, как показывает следующее утверждение, некоторые важные характеристики всех этих форм должны совпадать.

Закон инерции квадратичных форм

Если квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$ двумя различными невырожденными линейными заменами переменных приведена к двум различным формам, имеющим канонический вид, то полученные формы имеют одинаковое число положительных коэффициентов при квадратах переменных и одинаковое число отрицательных коэффициентов при квадратах переменных.

Доказательство. Предположим, что мы привели квадратичную форму $f = X^\top AX$ к каноническому виду $g = Y^\top DY$. По определению канонического вида формы, матрица D диагональна. Согласно второму доказательству теоремы о приведении квадратичной формы к каноническому виду, можно считать, что переход от формы f к форме g сделан с помощью замены $X = TY$, где матрица T ортогональна (и, в частности, невырождена). Тогда $D = T^\top AT$.

В силу следствия о ранге произведения квадратных матриц (см. § 27), ранги матриц A и D совпадают. Очевидно, что ранг диагональной матрицы равен числу ненулевых элементов на ее главной диагонали. Итак, число ненулевых элементов на главной диагонали матрицы D, т. е. число ненулевых коэффициентов при квадратах переменных в форме g, равно рангу матрицы A, и потому не зависит от способа приведения формы f к каноническому виду.

Пусть теперь форма $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ невырожденной линейной заменой переменных

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n \end{cases} \tag{7}$$

приводится к каноническому виду

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & t_1y_1^2 + t_2y_2^2 + \cdots + t_ky_k^2 - \\ & - t_{k+1}y_{k+1}^2 - t_{k+2}y_{k+2}^2 - \cdots - t_{k+\ell}y_{k+\ell}^2, \end{aligned} \tag{8}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_{k+\ell} > 0$,

а невырожденной линейной заменой переменных

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1n}z_n, \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{2n}z_n, \\ \dotfill \\ x_n = c_{n1}z_1 + c_{n2}z_2 + \cdots + c_{nn}z_n \end{cases} \tag{9}$$

— к каноническому виду

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & s_1 z_1^2 + s_2 z_2^2 + \cdots + s_p z_p^2 - \\ & - s_{p+1} z_{p+1}^2 - s_{p+2} z_{p+2}^2 - \cdots - s_{p+q} z_{p+q}^2, \end{aligned} \tag{10}$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_{p+q} > 0$. В силу сказанного выше, $k + \ell = p + q$. Требуется доказать, что $k = p$ и $\ell = q$. Ясно, что одно из этих равенств следует из другого, и потому достаточно доказать какое-нибудь одно из них. Докажем, что $k = p$. Предположим противное: пусть $k \neq p$. Для определенности будем считать, что $k < p$.

Так как замены переменных (7) и (9) невырожденны, существуют обратные к ним замены переменных. Пусть замена переменных

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1n}x_n, \\ y_2 & = & d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \cdots + d_{2n}x_n, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ y_n & = & d_{n1}x_1 + d_{n2}x_2 + \cdots + d_{nn}x_n \end{array}\right. \tag{11}$$

обратна к (7), а замена переменных

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \cdots + f_{1n}x_n, \\ z_2 & = & f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \cdots + f_{2n}x_n, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ z_n & = & f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \cdots + f_{nn}x_n \end{array}\right. \tag{12}$$

обратна к (9). Замены (11) и (12) также невырожденны.

Положим
$$y_1 = y_2 = \cdots = y_k = z_{p+1} = z_{p+2} = \cdots = z_n = 0.$$
Тогда выполняются равенства
$$\begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1n}x_n = 0, \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \cdots + d_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{k1}x_1 + d_{k2}x_2 + \cdots + d_{kn}x_n = 0, \\ f_{p+1\,1}x_1 + f_{p+1\,2}x_2 + \cdots + f_{p+1\,n}x_n = 0, \\ f_{p+2\,1}x_1 + f_{p+2\,2}x_2 + \cdots + f_{p+2\,n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \cdots + f_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{13}$$
Мы получили однородную систему линейных уравнений, число уравнений в которой равно $k + n - p$. Поскольку $k < p$, получаем, что $k + n - p < n$. В силу замечания о существовании ненулевого решения однородной системы (см. § 7) система (13) имеет ненулевое решение $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$.

Подставив эти значения вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в правые части равенств (11) и (12), получим значения левых частей этих равенств:

$$y_1 = y_1', y_2 = y_2', \ldots, y_n = y_n', z_1 = z_1', z_2 = z_2', \ldots, z_n = z_n'.$$

Отметим, что

$$y_1' = y_2' = \cdots = y_k' = z_{p+1}' = z_{p+2}' = \cdots = z_n' = 0. \qquad (14)$$

Равенство (8) означает, что если в его левой части произвести замену переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то мы получим правую часть этого равенства. Отсюда и из того, что $y_1' = y_2' = \cdots = y_k' = 0$, следует, что

$$\begin{aligned} f(x_1', x_2', \ldots, x_n') &= t_1(y_1')^2 + t_2(y_2')^2 + \cdots + t_k(y_k')^2 - \\ &- t_{k+1}(y_{k+1}')^2 - t_{k+2}(y_{k+2}')^2 - \cdots - t_{k+\ell}(y_{k+\ell}')^2 = \\ &= -t_{k+1}(y_{k+1}')^2 - t_{k+2}(y_{k+2}')^2 - \cdots - t_{k+\ell}(y_{k+\ell}')^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Аналогично из равенства (10) и того, что $z_{p+1}' = z_{p+2}' = \cdots = z_n' = 0$, следует, что

$$\begin{aligned} f(x_1', x_2', \ldots, x_n') &= s_1(z_1')^2 + s_2(z_2')^2 + \cdots + s_p(z_p')^2 - \\ &- s_{p+1}(z_{p+1}')^2 - s_{p+2}(z_{p+2}')^2 - \cdots - s_{p+q}(z_{p+q}')^2 = \\ &= s_1(z_1')^2 + s_2(z_2')^2 + \cdots + s_p(z_p')^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Итак, $f(x_1', x_2', \ldots, x_n') \leqslant 0$ и $f(x_1', x_2', \ldots, x_n') \geqslant 0$. Следовательно, $f(x_1', x_2', \ldots, x_n') = 0$. Но тогда $s_1(z_1')^2 + s_2(z_2')^2 + \cdots + s_p(z_p')^2 = 0$.

Поскольку $s_1, s_2, \ldots, s_p > 0$, это означает, что $z'_1 = z'_2 = \cdots = z'_p = 0$. Учитывая равенства (14), имеем

$$z'_1 = z'_2 = \cdots = z'_n = 0. \tag{15}$$

Пусть $F = (f_{ij})$ — матрица замены (12). Обозначим векторы-столбцы этой матрицы через $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$. Равенства (12) можно переписать в виде векторного равенства $x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \cdots + x_n\mathbf{f}_n = \mathbf{z}$, где $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Положим $\mathbf{z}' = (z'_1, z'_2, \ldots, z'_n)$. В силу (15), $x'_1\mathbf{f}_1 + x'_2\mathbf{f}_2 + \cdots + x'_n\mathbf{f}_n = \mathbf{z}' = \mathbf{0}$. Поскольку среди чисел $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ есть ненулевые, получаем, что векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ линейно зависимы. Следовательно, ранг матрицы F по столбцам меньше n. В силу теоремы о ранге матрицы, ее ранг по минорам также меньше n. Это означает, что $|F| = 0$. Но это не так, поскольку замена (12) невырождена. Полученное противоречие доказывает, что предположение о том, что $k \neq p$, ложно. Следовательно, $k = p$. □