Лекция 14: Линейный оператор

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

В этой лекции мы приступаем к рассмотрению функций из векторного пространства V в себя. Такие функции называются *операторами*. Для их обозначения мы будем использовать буквы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ и т.д. — «рукописные» заглавные буквы латинского алфавита. В действительности мы будем рассматривать не произвольные операторы, а только те из них, которые удовлетворяют некоторым достаточно сильным дополнительным ограничениям и называются *линейными операторами*. Теория линейных операторов, первоначальным сведениям из которой посвящены эта и две последующих лекции, является важной составной частью линейной алгебры, имеющей многочисленные приложения как в других разделах математики, так и во многих других областях знания, в том числе в физике и экономике.

Определение

Пусть V — векторное пространство. Функция $\mathcal{A}\colon V \longmapsto V$ называется *линейным оператором*, если для любых векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ и любого числа $t \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) \quad \text{и} \quad \mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1).$$

Относительно первого равенства говорят, что $\mathcal{A}$ *сохраняет сумму векторов*, относительно второго — что $\mathcal{A}$ *сохраняет произведение вектора на число*.

Отметим, что если $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V и $\mathbf{x} \in V$, то $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathcal{A}(0 \cdot \mathbf{x}) = 0 \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Следовательно, справедливо следующее

Замечание 1

Любой линейный оператор отображает нулевой вектор в себя. □

Приведем примеры линейных операторов.

Пример 1. Представим пространство $\mathbb{R}_2$ как множество векторов (точнее, направленных отрезков) на плоскости, выходящих из начала координат O. Тогда поворот векторов на угол α, симметрия относительно прямой, проходящей через точку O (в частности, относительно любой из осей координат), симметрия относительно точки O, проекция вектора на любую из осей координат — примеры линейных операторов в пространстве $\mathbb{R}_2$. Если интерпретировать $\mathbb{R}_3$ как множество векторов трехмерного пространства, выходящих из начала координат O, то поворот на угол α, симметрия относительно прямой или плоскости, проходящей через точку O, симметрия относительно этой точки, проекция на любую из координатных плоскостей — примеры линейных операторов в пространстве $\mathbb{R}_3$.

Укажем еще два линейных оператора, которые можно определить в произвольном векторном пространстве V.

Пример 2. Зафиксируем произвольное число t и зададим оператор $\mathcal{A}$ следующим правилом: $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = t\mathbf{x}$ для всякого вектора $\mathbf{x} \in V$. Этот оператор называется *оператором растяжения в t раз*. Линейность оператора растяжения с очевидностью вытекает из аксиом 5) и 7) векторного пространства (см. лекцию 7). Особо отметим два частных случая оператора растяжения. Первый из них — это оператор растяжения при $t = 0$. Он обозначается буквой $\mathcal{O}$ и называется *нулевым*. Ясно, что нулевой оператор переводит произвольный вектор из V в нулевой вектор. Второй частный случай оператора растяжения возникает при $t = 1$. Соответствующий оператор обозначается буквой $\mathcal{E}$ и называется *тождественным* или *единичным*. Этот оператор переводит произвольный вектор из V в себя.

Пример 3. Зафиксируем в пространстве V некоторое подпространство M. В силу предложения 2 из лекции 9 существует такое подпространство M' в V, что $V = M \oplus M'$. Следовательно, произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ можно, и притом единственным образом, представить в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in M$ и $\mathbf{x}_2 \in M'$ (см. теорему 2 в лекции 9). Рассмотрим оператор $\mathcal{P}$ в пространстве V, задаваемый правилом $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1$. Легко проверяется, что этот оператор — линейный. Он называется *оператором проектирования на подпространство M параллельно M'*.

Можно выделить три способа задания линейных операторов. Первый из них — «словесный» способ. Он состоит в том, что мы указываем, в каком пространстве действует оператор, и затем словами описываем, как он действует, т. е. в какой вектор он переводит произвольный вектор из указанного пространства. Именно этим способом задавались линейные операторы во все приведенных выше примерах. Ясно, что этот способ плохо приспособлен к тому, чтобы как-то исследовать оператор, применять к нему те или иные действия — для этого оператор должен быть задан с помощью каких-либо математических объектов, таких, например, как системы равенств или матрицы.

Пусть V — произвольное n-мерное векторное пространство. Зафиксируем в пространстве V произвольный базис F и рассмотрим следующую систему линейных равенств:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Числа a_{ij} будем полагать известными. Пусть, далее, $\mathbf{x}$ — произвольный вектор из V. Обозначим через $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе F. Вычислим с помощью равенств (1) числа $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и обозначим через $\mathbf{y}$ вектор, имеющий в базисе F координаты $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Оператор $\mathcal{A}$, задаваемый правилом $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, является линейным. Чтобы убедиться в этом, обозначим через A квадратную матрицу порядка n, определяемую равенством $A = (a_{ij})$, а через X и Y матрицы размера $n \times 1$ (т. е. столбцы), в которых записаны координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в базисе F соответственно. Тогда равенства (1) можно переписать в виде $Y = AX$. Пусть теперь $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — векторы из V, X_1 и X_2 — столбцы координат этих векторов в базисе F, а $t \in \mathbb{R}$. Тогда $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2$ и $A(tX_1) = t(AX_1)$, т. е. $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2)$ и $\mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ линеен.

Перейдем к наиболее употребительному способу задания линейного оператора. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V, а $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис V. Предположим, что мы знаем образы базисных векторов, т. е. векторы $\mathcal{A}(\mathbf{b}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{b}_2)$, ..., $\mathcal{A}(\mathbf{b}_n)$. В этом случае мы сможем найти образ произвольного вектора $\mathbf{x} \in V$. В самом деле, если $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, то

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + \cdots + t_n\mathbf{b}_n) = t_1\mathcal{A}(\mathbf{b}_1) + t_2\mathcal{A}(\mathbf{b}_2) + \cdots + t_n\mathcal{A}(\mathbf{b}_n).$$

Итак,

!! чтобы узнать, как оператор действует на произвольный вектор, достаточно знать, как он действует на базисные векторы.

Это делает естественным следующее

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V, а $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис этого пространства. Квадратная матрица порядка n, i-й столбец которой состоит из координат вектора $\mathcal{A}(\mathbf{b}_i)$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ (для всех $i = 1, 2, \ldots, n$), называется *матрицей оператора $\mathcal{A}$ в базисе* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$.

Легко понять, что оператор растяжения в t раз имеет в любом базисе матрицу

$$tE = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \end{pmatrix}$$

(при любом t). В частности, нулевой оператор имеет нулевую матрицу, а тождественный оператор — единичную матрицу.

Найдем матрицу оператора проектирования $\mathcal{P}$ на подпространство M параллельно M' в базисе, полученном объединением базисов M и M'. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ — базис M, а $\mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+2}, \ldots, \mathbf{a}_n$ — базис M'. Тогда

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}_i) = \begin{cases} \mathbf{a}_i & \text{для всякого } i = 1, 2, \ldots, m, \\ \mathbf{0} & \text{для всякого } i = m+1, m+2, \ldots, n. \end{cases}$$

Следовательно, матрица оператора $\mathcal{P}$ в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

где число единиц на главной диагонали равно m (т. е. размерности подпространства M).

При решении некоторых задач оказывается полезным следующее

Замечание 2

Если линейный оператор $\mathcal{A}$ задан системой линейных равенств (1) и $A = (a_{ij})$ — матрица, составленная из коэффициентов в этих равенствах, то A — матрица оператора $\mathcal{A}$ стандартном базисе.

Доказательство. Подставив 1 вместо x_1 и 0 вместо $x_2, \ldots, x_n$ в равенства (1), мы получим $y_1 = a_{11}$, $y_2 = a_{21}$, ..., $y_n = a_{n1}$. Это означает, что $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$. В силу замечания 4 из лекции 8 получаем, что в первом стобце матрицы A записаны координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)$ в стандартном базисе. Аналогично проверяется, что, для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$, в i-м стобце матрицы A записаны координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)$ в стандартном базисе. Но это и означает, что A — матрица оператора $\mathcal{A}$ стандартном базисе. $\square$

Как мы видели, если в векторном пространстве зафиксирован базис, то всякому линейному оператору в этом пространстве соответствует матрица оператора в этом базисе, являющаяся квадратной матрицей, порядок которой равен размерности пространства. Обратно, по любой квадратной матрице, порядок которой равен размерности пространства, можно построить линейный оператор в этом пространстве. В самом деле, пусть V — n-мерное векторное пространство, а $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. Выберем в пространстве V произвольный базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$. Определим оператор $\mathcal{A}$ в пространстве V следующими правилами:

1) $\mathcal{A}(\mathbf{b}_j) = a_{1j}\mathbf{b}_1 + a_{2j}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{nj}\mathbf{b}_n$ для всякого $j = 1, 2, \ldots, n$;
2) если $\mathbf{x}$ — произвольный вектор из V и $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, то

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = x_1\mathcal{A}(\mathbf{b}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{b}_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{b}_n).$$

Тогда, как легко понять, $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V, причем матрицей этого оператора в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ является матрица A.

Нахождение координат образа вектора с помощью матрицы оператора (1)

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в пространстве V, имеет матрицу $A = (a_{ij})$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ и $\mathbf{x} \in V$. Обозначим координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ через $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Как найти координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ в том же базисе? Пусть
$\mathbf{y} = y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + \cdots + y_n\mathbf{b}_n$. Тогда

$$\begin{gathered}y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + \cdots + y_n\mathbf{b}_n = \mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \\ = \mathcal{A}(x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n) = x_1\mathcal{A}(\mathbf{b}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{b}_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{b}_n).\end{gathered}$$

Поскольку столбцы матрицы A — координаты векторов $\mathcal{A}(\mathbf{b}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{b}_2)$, ..., $\mathcal{A}(\mathbf{b}_n)$, преобразуем последнее выражение в соответствие с равенствами

$$\begin{array}{lcl}\mathcal{A}(\mathbf{b}_1) & = & a_{11}\mathbf{b}_1 + a_{21}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{b}_n, \\ \mathcal{A}(\mathbf{b}_2) & = & a_{12}\mathbf{b}_1 + a_{22}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{b}_n, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \mathcal{A}(\mathbf{b}_n) & = & a_{1n}\mathbf{b}_1 + a_{2n}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{b}_n.\end{array}$$

После приведения подобных членов мы получим равенство

$$\begin{array}{rcl}y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + \cdots + y_n\mathbf{b}_n & = & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\mathbf{b}_1 + \\ & + & (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\mathbf{b}_2 + \\ & & \dotfill \\ & + & (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)\mathbf{b}_n.\end{array}$$

В силу единственности разложения по базису это означает, что выполнены равенства (1). Эти равенства можно записать в виде $Y = AX$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, справедливо следующее

Замечание 3

Если A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе, а X — столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в том же базисе, то столбец Y координат вектора $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ в том же базисе вычисляется по формуле $Y = AX$. □

Ответим теперь на вопрос о том, как связаны матрицы одного и того же оператора в разных базисах.

Теорема 1

Пусть оператор $\mathcal{A}$ в базисе F имеет матрицу A_F, а в базисе G — матрицу A_G. Тогда

$$A_G = T_{GF} A_F T_{FG}, \tag{2}$$

где T_{FG} и T_{GF} — матрицы перехода от базиса F к базису G и от базиса G к базису F соответственно. □

Доказывать эту теорему мы не будем.

Как было показано в лекции 12, матрица перехода от одного базиса к другому, невырождена. В силу критерия обратимости матрицы получаем, что матрицы T_{FG} и T_{GF} обратимы. Для использования формулы (2) при решении задач существенным является следующее утверждение.

Лемма 1

Матрицы T_{FG} и T_{GF} обратны друг к другу.

Доказательство. Обозначим через n порядок матриц T_{FG} и T_{GF}. Положим $T_{FG} = (t_{ij})$ и $T_{GF} = (t'_{ij})$. Далее, пусть $T_{FG}T_{GF} = X = (x_{ij})$. Требуется доказать, что $X = E$, т. е. что

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Используя определение матрицы перехода от одного базиса к другому, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_j &= t'_{1j}\mathbf{g}_1 + t'_{2j}\mathbf{g}_2 + \cdots + t'_{nj}\mathbf{g}_n = \\ &= t'_{1j}(t_{11}\mathbf{f}_1 + t_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + t_{n1}\mathbf{f}_n) + \\ &+ t'_{2j}(t_{12}\mathbf{f}_1 + t_{22}\mathbf{f}_2 + \cdots + t_{n2}\mathbf{f}_n) + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ t'_{nj}(t_{1n}\mathbf{f}_1 + t_{2n}\mathbf{f}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{f}_n). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, перегруппировывая слагаемые и учитывая определение произведения матриц, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_j &= (t_{11}t'_{1j} + t_{12}t'_{2j} + \cdots + t_{1n}t'_{nj})\mathbf{f}_1 + \\ &+ (t_{21}t'_{1j} + t_{22}t'_{2j} + \cdots + t_{2n}t'_{nj})\mathbf{f}_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (t_{n1}t'_{1j} + t_{n2}t'_{2j} + \cdots + t_{nn}t'_{nj})\mathbf{f}_n = \\ &= x_{1j}\mathbf{f}_1 + x_{2j}\mathbf{f}_2 + \cdots + x_{nj}\mathbf{f}_n. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\mathbf{f}_j = 0 \cdot \mathbf{f}_1 + \cdots + 0 \cdot f_{j-1} + 1 \cdot \mathbf{f}_j + 0 \cdot f_{j+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{f}_n$. В силу единственности разложения вектора по базису получаем равенство (3). $\square$

Отметим особо случай, когда речь идет о линейном операторе в пространстве $\mathbb{R}_n$ и один из базисов F и G — стандартный. Предположим, что нам известна матрица оператора в стандартном базисе E и требуется найти его матрицу в базисе F. В силу замечания 4 из лекции 8 компоненты вектора из $\mathbb{R}_n$ являются его координатами в стандартном базисе. Отсюда вытекает, что матрица T_{EF} совпадает с матрицей, в которой по столбцам записаны векторы базиса F. Поскольку эти векторы известны, матрицу T_{EF} тоже можно считать известной. Чтобы найти матрицу A_F, остается найти матрицу, обратную к T_{EF}, и воспользоваться формулой $A_F = (T_{EF})^{-1} A_E T_{EF}$. Аналогично обстоит дело и в случае, когда известна матрица оператора в базисе F и требуется найти его матрицу в стандартном базисе E. В этом случае нужная формула приобретает вид $A_E = T_{EF} A_F (T_{EF})^{-1}$.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в пространстве $\mathbb{R}_3$, в базисе F, состоящем из векторов $\mathbf{f}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{f}_2 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{f}_3 = (-1, 1, 1)$, имеет матрицу

$$A_F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе G, состоящем из векторов $\mathbf{g}_1 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{g}_2 = (1, 2, -3)$, $\mathbf{g}_3 = (1, -1, 5)$.

Сначала найдем матрицу перехода от базиса F к базису G. Действуя по алгоритму, изложенному в лекции 8, имеем:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & 12 & 0 & 12 & 0 & 18 \\ 0 & -6 & 0 & -6 & 6 & -18 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & 0 & 0 & 0 & 12 & -18 \\ 0 & -6 & 0 & -6 & 6 & -18 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Таким образом,

$$T_{FG} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь матрицу перехода от базиса G к базису F. Опираясь на лемму 1 и используя алгоритм нахождения обратной матрицы из лекции 11, имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Таким образом,

$$T_{GF} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Применяя формулу (2), окончательно получаем:

$$A_G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 11 & -6 \\ 4 & -11 & 5 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 18 \\ -11 & 14 & -35 \\ -7 & 8 & -21 \end{pmatrix}.$$