§ 8. Определители

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение определителя

Напомним, что если $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, то через $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ обозначается число инверсий в этой перестановке. Множество всех перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ обозначается так же, как и группа подстановок на этом множестве, т. е. через $\mathbf{S}_n$.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n над полем F. *Определителем* (или *детерминантом*) матрицы A называется скаляр, который обозначается через $|A|$ или $\det A$ и вычисляется по формуле

$$|A| = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbf{S}_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}. \tag{1}$$

Ясно, что слагаемое $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ в правой части равенства (1) берется со знаком плюс, если перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ четна, и со знаком минус, если эта перестановка нечетна. Из следствия о числе [не]четных перестановок (см. § 3) вытекает, что

- *определитель матрицы A равен алгебраической сумме $n!$ слагаемых, половина из которых берется со знаком плюс, а половина — со знаком минус; каждое слагаемое есть произведение n элементов матрицы, по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца.*

Для удобства изложения договоримся называть элементами, строками, столбцами и порядком определителя квадратной матрицы A, соответственно, элементы, строки, столбцы и порядок этой матрицы. Посмотрим, к чему приводит определение, данное на предыдущем слайде, при $n = 1, 2, 3$.

Определители 1-го порядка. Пусть $A = (a_{11})$ — квадратная матрица 1-го порядка. На множестве $\{1\}$ существует только одна перестановка, а именно — тривиальная перестановка (1). Число инверсий в этой перестановке равно 0, следовательно она четна. В силу формулы (1) имеем: $|A| = a_{11}$. Иными словами,

- *определитель 1-го порядка равен единственному элементу соответствующей матрицы.*

Определение

Если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n, то элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}$ образуют ее *побочную диагональ*.

В следующей матрице побочная диагональ выделена красным цветом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \ldots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определители 2-го порядка. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица 2-го порядка. На множестве $\{1, 2\}$ существует ровно две перестановки: $(1, 2)$ и $(2, 1)$. Первая из них четна (число инверсий равно 0), вторая нечетна (число инверсий равно 1). Следовательно, $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Таким образом,

- *определитель второго порядка равен произведению элементов на главной диагонали соответствующей матрицы минус произведение элементов на ее побочной диагонали.*

Определители 3-го порядка. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица 3-го порядка. На множестве $\{1, 2, 3\}$ существует $3! = 6$ перестановок:

$(1, 2, 3)$ — 0 инверсий, перестановка четна,

$(2, 3, 1)$ — 2 инверсии, перестановка четна,

$(3, 1, 2)$ — 2 инверсии, перестановка четна,

$(3, 2, 1)$ — 3 инверсии, перестановка нечетна,

$(2, 1, 3)$ — 1 инверсия, перестановка нечетна,

$(1, 3, 2)$ — 1 инверсия, перестановка нечетна.

Следовательно,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Формула для вычисления определителя третьего порядка выглядит весьма громоздко. На следующем слайде мы укажем правило, позволяющее ее запомнить. Чтобы его сформулировать, заметим, что определитель 3-го порядка является алгебраической суммой шести слагаемых, из которых три берутся со знаком плюс, а три — со знаком минус. Каждое слагаемое — это произведение трех элементов матрицы. На рис. 1 изображены два экземпляра определителя квадратной матрицы 3-го порядка. Элементы матрицы изображены точками.

Линии соединяют те элементы, которые при вычислении определителя перемножаются, при этом красным цветом соединены элементы, произведение которых подсчитывается со знаком плюс, а синим — элементы, произведение которых подсчитывается со знаком минус.

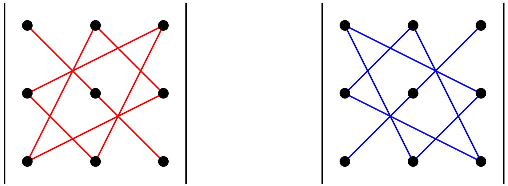

Рис. 1. Правило треугольников

Мы видим, что справедливо следующее

Правило треугольников

При вычислении определителя 3-го порядка со знаком плюс берется произведение элементов, образующих главную диагональ соответствующей матрицы, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком минус — произведение элементов, образующих побочную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали.

Понятие определителя можно ввести несколько иначе, чем было сделано выше. Это будет сделано на следующем слайде. Чтобы сформулировать «альтернативное» определение, заметим, что между множеством всех перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ и множеством всех подстановок на этом множестве существует очевидная биекция, которая перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ ставит в соответствие подстановку σ, определяемую правилом: $\sigma(k) = i_k$ для всякого $k = 1, 2, \ldots, n$. Эту подстановку часто записывают в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

Эта подстановка называется *четной* [*нечетной*], если четна [нечетна] перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Для всякой подстановки σ положим

$$(-1)^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ четна,} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ нечетна.} \end{cases}$$

Очевидно, что определение определителя, даваемое формулой (1), эквивалентно следующему определению.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n над полем F. *Определителем* (или *детерминантом*) матрицы A называется скаляр, который обозначается через $|A|$ или $\det A$ и вычисляется по формуле

$$|A| = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Прежде чем переходить к изложению свойств определителей, докажем некоторые вспомогательные утверждения. Для этого нам понадобится следующее понятие.

Подстановка τ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется *транспозицией*, если найдутся $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ такие, что $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ и $\tau(k) = k$ для всякого $k = 1, 2, \ldots, n$, отличного от i и j. Такая транспозиция обозначается через (ij). Связь между транспозициями в смысле введенного только что определения и транспозициями в смысле определения, данного в § 3, очевидна: транспозиция (ij) в «новом смысле» соответствует применению к тождественной перестановке $(1, 2, \ldots, n)$ транспозиции в «старом смысле», меняющей местами числа i и j.

Предложение о произведении транспозиций

Произвольная подстановка σ является произведением конечного числа транспозиций. Если подстановка σ является произведением m транспозиций, то σ [не]четна тогда и только тогда, когда число m [не]четно.

Доказательство. Пусть

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы о перечислении перестановок (см. § 3), существует последовательность перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, начинающаяся с тождественной перестановки $\varepsilon = (1, 2, \dots, n)$ и содержащая все перестановки на этом множестве, в которой каждая следующая перестановка получается из предыдущей транспозицией пары символов. Рассмотрим часть этой последовательности перестановок от тождественной перестановки до перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Обозначим перестановки, возникающие в этой части исходной последовательности перестановок через $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$. В частности, $\xi_0 = \varepsilon$ и $\xi_m = (i_1, i_2, \dots, i_n)$. Допустим, что, для всякого $k = 1, 2, \dots, m$, перестановка ξ_k получается из ξ_{k-1} транспозицией символов r_k и s_k.

Обозначим через τ_k транспозицию $(r_k s_k)$ (здесь уже транспозиция понимается как частный случай подстановки). Ясно, что $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m$. Первое утверждение предложения доказано. Чтобы доказать второе, заметим, что, в силу предложения о транспозиции и четности из § 3, четные и нечетные перестановки в последовательности $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$ чередуются. Перестановка $\xi_0 = \varepsilon$ четна. Поэтому перестановка $\xi_m = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ четна, если m четно, и нечетна, если m нечетно. $\square$

Любая подстановка является инъекцией, и потому существует обратная к ней подстановка.

Следствие о четности обратной подстановки

Если подстановка σ [не]четна, то и подстановка σ^{-1} [не]четна.

Доказательство. В силу предложения о произведении транспозиций, $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m$ для некоторых транспозиций $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$. Ясно, что если τ — произвольная транспозиция, то τ^2 — тождественное отображение. Это означает, что $\tau^{-1} = \tau$. Следовательно, $\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \tau_{m-1}^{-1} \cdots \tau_1^{-1} = \tau_m \tau_{m-1} \cdots \tau_1$. Таким образом, σ^{-1} является произведением m транспозиций. Из предложения о произведении транспозиций вытекает, что каждая из подстановок σ и σ^{-1} четна, если четно число m, и нечетна, если это число нечетно. Следовательно, подстановки σ и σ^{-1} либо обе четны, либо обе нечетны. $\square$

Введем одно важное для дальнейшего понятие.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$. Матрицей, *транспонированной* к A, называется матрица $B = (b_{ij})$ размера $n \times m$, определяемая равенством $b_{ij} = a_{ji}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, m$. Иными словами, матрица B получается из A заменой строк на столбцы: первая строка матрицы A становится первым стобцом матрицы B, вторая строка матрицы A — вторым стобцом матрицы B и т. д. Матрица, транспонированная к A, обозначается через $A^\top$.

Очевидно, что

- матрица, транспонированная к квадратной, является квадратной матрицей того же порядка, что и исходная матрица.

Свойства операции транспонирования

Пусть A *и* B *— матрицы над (одним и тем же) кольцом* R, *а* $t \in R$. *Тогда:*

1) $(A^\top)^\top = A$;
2) *если матрицы* A *и* B *имеют один и тот же размер, то* $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$;
3) $(tA)^\top = tA^\top$;
4) *если произведение матриц* AB *определено, то* $(AB)^\top = B^\top A^\top$. □

Мы не будем доказывать эти свойства, поскольку они непосредственно вытекают из определений операций.

Перейдем к изложению свойств определителей.

1-е свойство определителей (инвариантность относительно транспонирования)

При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. Положим $A^\top = (b_{ij})$. Таким образом, $b_{ij} = a_{ji}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Определитель каждой из матриц A и $A^\top$ является алгебраической суммой $n!$ слагаемых. Рассмотрим отображение из множества всех слагаемых, алгебраической суммой которых является $|A|$, в множество всех слагаемых, алгебраической суммой которых является $|A^\top|$, которое переводит слагаемое $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ в слагаемое $b_{i_11}b_{i_22}\cdots b_{i_nn}$. Ясно, что это отображение биективно, и что указанные сомножители равны. Остается убедиться в том, что они входят в соответствующие определители с одним и тем же знаком. Переставим в произведении $b_{i_11}b_{i_22}\cdots b_{i_nn}$ сомножители так, чтобы первые индексы шли в возрастающем порядке от 1 до n. Получим произведение вида $b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$ для некоторой перестановки $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Рассмотрим подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \text{ и } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Легко понять, что они обратны друг к другу. В самом деле, пусть $1 \leq k \leq n$. Тогда $\sigma(k) = i_k$ и $\tau(i_k) = k$. Следовательно, $(\sigma\tau)(k) = \tau(\sigma(k)) = \tau(i_k) = k$. В силу следствия о четности обратной подстановки, подстановки σ и τ либо обе четны, либо обе нечетны. Следовательно, перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ и $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ также либо обе четны, либо обе нечетны, и потому знаки перед слагаемым $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ в $|A|$ и слагаемым $b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n}$ в $|A^\top|$ совпадают. $\square$

Из инвариантности определителя относительно транспонирования вытекает следующий неформальный

Принцип равноправия строк и столбцов

Любое свойство определителей, формулируемое в терминах строк матрицы, останется справедливым, если слово «строка» заменить словом «столбец».

!! С учетом этого принципа, *все последующие свойства определителей формулируются только для строк, но использоваться будут как для строк, так и для столбцов.*

Во всех последующих свойствах определителей $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица произвольного порядка n над произвольным полем F.

2-е свойство определителей (однородность относительно строки)

Если все элементы некоторой строки матрицы A умножить на один и тот же скаляр, то ее определитель умножится на тот же самый скаляр.

Доказательство. Предположим, что мы умножаем k-ю строку матрицы на скаляр t. Обозначим полученную матрицу через A'. Тогда

$$|A'| = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{1 i_1} \cdots a_{k-1\, i_{k-1}} (t a_{k i_k}) a_{k+1\, i_{k+1}} \cdots a_{n i_n} =$$

$$= t \cdot \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{1 i_1} \cdots a_{n i_n} = t|A|,$$

что и требовалось доказать. □

Поскольку умножение матрицы на скаляр равносильно умножению каждой строки матрицы на этот скаляр, из 2-го свойства определителей вытекает

Следствие об определителе произведения матрицы на скаляр

Если A — квадратная матрица порядка n, а t — произвольный скаляр, то $|tA| = t^n \cdot |A|$. □

Применяя 2-е свойство определителей в случае, когда строка умножается на 0, немедленно получаем

3-е свойство определителей

Если матрица A содержит нулевую строку, то ее определитель равен 0. □

4-е свойство определителей

Если две строки матрицы A поменять местами, то ее определитель умножится на -1.

Доказательство. Предположим, что мы поменяли местами k-ю и m-ю строки матрицы A, причем $k < m$. Обозначим полученную матрицу через A'. Тогда при переходе от $|A|$ к $|A'|$ всякое слагаемое вида

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{k-1\, i_{k-1}} a_{ki_k} a_{k+1\, i_{k+1}} \cdots a_{m-1\, i_{m-1}} a_{mi_m} a_{m+1\, i_{m+1}} \cdots a_{ni_n}$$

заменится на равное ему по модулю слагаемое

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{k-1\, i_{k-1}} a_{mi_m} a_{k+1\, i_{k+1}} \cdots a_{m-1\, i_{m-1}} a_{ki_k} a_{m+1\, i_{m+1}} \cdots a_{ni_n}$$

(оба раза мы указали слагаемые без знаков). Перестановка

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_m, i_{k+1}, \ldots, i_{m-1}, i_k, i_{m+1}, \ldots, i_n)$$

получается из перестановки

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_{m-1}, i_m, i_{m+1}, \ldots, i_n)$$

транспозицией символов i_k и i_m. В силу предложения о транспозиции и четности (см. § 3), эти транспозиции имеют разную четность. Следовательно, указанные выше слагаемые входят в выражения для $|A|$ и $|A'|$ с разными знаками, и потому $|A'| = -|A|$.

5-е свойство определителей

Если матрица A содержит две одинаковые строки, то ее определитель равен 0.

Доказательство. После перестановки двух равных строк местами определитель, с одной стороны, не изменится (что очевидно), а с другой умножится на -1 (в силу предыдущего свойства). Следовательно, он равен 0. $\square$

Из 2-го и 5-го свойств определителей вытекает

Следствие об определителе матрицы с пропорциональными строками

Если матрица A содержит две пропорциональные строки, то ее определитель равен 0.

Доказательство. Предположим, что в матрице A i-я строка равна j-й строке, умноженной на t. Обозначим через A' матрицу, полученную из матрицы A заменой ее i-й строки на j-ю. Используя сначала 2-е, а затем 5-е свойство определителей, имеем $|A| = t|A'| = t \cdot 0 = 0$. $\square$

6-е свойство определителей (аддитивность относительно строки)

Если каждый элемент некоторой строки матрицы представлен в виде двух слагаемых, то ее определитель равен сумме определителей двух матриц, в первой из которых элементы этой строки равны первым слагаемым, а во второй — вторым слагаемым, а все остальные строки в обеих матрицах — те же, что и в исходной матрице.

Доказательство. Положим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a'_{k1} + a''_{k1} & a'_{k2} + a''_{k2} & \dots & a'_{kn} + a''_{kn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a'_{k1} & a'_{k2} & \dots & a'_{kn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a''_{k1} & a''_{k2} & \dots & a''_{kn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|A| = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{k-1\,i_{k-1}} (a'_{ki_k} + a''_{ki_k}) a_{k+1\,i_{k+1}} \cdots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{k-1\,i_{k-1}} a'_{ki_k} a_{k+1\,i_{k+1}} \cdots a_{ni_n} +$$

$$+ \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{k-1\,i_{k-1}} a''_{ki_k} a_{k+1\,i_{k+1}} \cdots a_{ni_n} = |B| + |C|.$$

Свойство доказано. $\square$

7-е свойство определителей

Если к некоторой строке матрицы A прибавить другую ее строку, умноженную на некоторый скаляр, то определитель матрицы не изменится.

Доказательство. Положим $A = (a_{ij})$ и обозначим через A' матрицу, полученную прибавлением к k-й строке матрицы A ее m-й строки, умноженной на скаляр t. Используя 2-е, 5-е и 6-е свойства определителей, имеем

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1}+ta_{m1} & a_{k2}+ta_{m2} & \dots & a_{kn}+ta_{mn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + t \cdot 0 = |A|.$$

Свойство доказано.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Определитель квадратной матрицы $(n-1)$-го порядка, получающейся при вычеркивании из матрицы A i-й строки и j-го столбца, называется *минором элемента* a_{ij} и обозначается через M_{ij}. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется скаляр $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

8-е свойство определителей (разложение определителя по строке)

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов произвольной строки на их алгебраические дополнения.

Иными словами, если $A = (a_{ij}) \in F^{n \times n}$ и $1 \leqslant k \leqslant n$, то

$$|A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}. \tag{2}$$

Эта формула называется *разложением определителя по k-й строке*. В силу принципа равноправия строк и столбцов имееет место также следующая формула *разложения определителя по k-му столбцу*:

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}.$$

Доказательство. Докажем сначала равенство (2) в случае, когда $k = 1$. Для всякого $1 \leq m \leq n$ рассмотрим сумму всех тех слагаемых, входящих в правую часть равенства (1), которые содержат множитель a_{1m} (каждое слагаемое берется с тем знаком, с каким оно входит в правую часть равенства (1)). В этой сумме вынесем a_{1m} за скобку и обозначим выражение в скобках через R_m. Ясно, что $|A| = a_{11}R_1 + a_{12}R_2 + \cdots + a_{1n}R_n$. Требуется доказать, что $R_m = A_{1m}$ для всякого $m = 1, 2, \ldots, n$.

Всякое слагаемое, входящее в R_m, имеет вид $a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, где σ пробегает множество всех взаимно-однозначных отображений из множества $\{2, \ldots, n\}$ на множество $\{1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n\}$. Заметим, что в точности так же выглядят и те слагаемые, алгебраической суммой которых является минор M_{1m}, а значит и алгебраическое дополнение A_{1m}. Осталось показать, что слагаемое $a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ входит в R_m и A_{1m} с одним и тем же знаком.

Пусть σ — произвольное взаимно-однозначное отображение σ из множества $\{2, \ldots, n\}$ на множество $\{1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n\}$. Расширим σ до подстановки на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ правилом $\sigma(1) = m$. Иными словами, будем рассматривать σ как подстановку из $\mathbf{S}_n$ такую, что $\sigma(1) = m$.

Слагаемое $a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ входит в R_m с тем же знаком, с которым в $|A|$ входит слагаемое $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} = a_{1m}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$. Этот знак определяется четностью перестановки

$$(m, \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(n)). \qquad (3)$$

Инверсиями этой перестановки являются в точности пары вида $(1, i)$ для всех чисел i таких, что $\sigma(i) < m$, и все пары вида (r, s) такие, что $2 \le r < s \le n$, но $\sigma(r) > \sigma(s)$. Число пар первого вида равно $m-1$. Обозначим число пар второго вида через $i(\sigma)$. Тогда число инверсий перестановки (3) равно $m-1+i(\sigma)$. Следовательно, $a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ входит в R_m со знаком $(-1)^{m-1+i(\sigma)}$. С другой стороны, из определения минора M_{1m} и алгебраического дополнения A_{1m} вытекает, что слагаемое $a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ входит в M_{1m} со знаком $(-1)^{i(\sigma)}$, а в A_{1m} — со знаком $(-1)^{1+m}\cdot(-1)^{i(\sigma)}$. Учитывая, что

$$(-1)^{m-1+i(\sigma)} = (-1)^{m-1+i(\sigma)}\cdot(-1)^2 = (-1)^{m+1+i(\sigma)} = (-1)^{m+1}\cdot(-1)^{i(\sigma)},$$

получаем, что $a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ входит в R_m и в A_{1m} с одним и тем же знаком. Следовательно, $R_m = A_{1m}$. Равенство (2) при $k=1$ доказано.

Пусть теперь $1 < k \leqslant n$. Переставляя последовательно k-ю строку с $(k-1)$-й, $(k-2)$-й, ..., наконец, с первой, и используя 4-е свойство определителей, имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1\,1} & a_{k-1\,2} & \dots & a_{k-1\,n} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \dots & a_{k+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель, стоящий в правой части последнего равенства, по первой строке. Поскольку миноры элементов первой строки этого определителя совпадают с минорами соответствующих элементов k-й строки исходного определителя, получим

$$|A| = (-1)^{k-1}\left(a_{k1} \cdot (-1)^{1+1} M_{k1} + a_{k2} \cdot (-1)^{1+2} M_{k2} + \dots + a_{kn} \cdot (-1)^{1+n} M_{kn}\right) =$$
$$= a_{k1} \cdot (-1)^{k+1} M_{k1} + a_{k2} \cdot (-1)^{k+2} M_{k2} + \dots + a_{kn} \cdot (-1)^{k+n} M_{kn} =$$
$$= a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kn}A_{kn}.$$

Свойство доказано.

Сумма произведений элементов строки на алгебраические дополнения элементов другой строки

9-е свойство определителей

Сумма произведений элементов некоторой строки матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

Доказательство. Пусть $A = (a_{rs})$ — квадратная матрица порядка n и $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$. Обозначим через A' матрицу, полученную из матрицы A заменой ее j-й строки на i-ю. Алгебраические дополнения элементов матриц A и A' будем обозначать через A_{rs} и A'_{rs} соответственно. Если $1 \leq r \leq n$ и $r \neq j$, то r-е строки в матрицах A и A' совпадают. Следовательно, $A_{jk} = A'_{jk}$ для всякого $k = 1, 2, \ldots, n$. Разложим определитель матрицы A' по ее j-й строке. Учитывая, что элементы этой строки совпадают с элементами i-й строки матрицы A, получаем, что $|A'| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A'_{jk} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$. С другой стороны, $|A'| = 0$ по 5-му свойству определителей. Таким образом, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0$. □

Предложение об определителе треугольной матрицы

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на ее главной диагонали.

Доказательство. Предположим, что матрица $A = (a_{ij})$ верхнетреугольна. Обозначим порядок матрицы через n и будем доказывать предложение индукцией по n. Если $n = 1$, то, как мы видели выше, $|A| = a_{11}$. Пусть теперь $n > 1$. Разложив определитель A по первому столбцу и воспользовавшись предположением индукции, имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}.$$

В случае нижнетреугольной матрицы доказательство аналогично, надо только воспользоваться разложением определителя по первой строке. □

Из этого предложения автоматически вытекает

Следствие об определителе единичной матрицы

Определитель единичной матрицы равен 1. □

Вычисление определителя с помощью приведения матрицы к треугольному виду (1)

Предложение об определителе треугольной матрицы в сочетании со свойствами определителей подсказывает один из способов вычисления определителя. Пусть дана квадратная матрица A. С помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду. При этом нулевые строки, если они будут появляться, вычеркивать не будем, а будем «накапливать» в нижней части матрицы. В результате получим ступенчатую квадратную матрицу A'. Ясно, что всякая такая матрица верхнетреугольна. Ее определитель легко подсчитать (см. предложение об определителе треугольной матрицы). А из 2-го, 4-го и 7-го свойств определителей и принципа равноправия строк и столбцов вытекает, как связаны между собой определители матриц A и A'.

На практике при применении этого способа вычисления определителя следует помнить о том, что:

1) если в процессе преобразований переставлены местами две строки, то определитель следует умножить на -1 (по 4-му свойству определителей);
2) если в процессе преобразований была умножена на скаляр t некоторая *изменяемая* строка (т. е. та строка, к которой сразу после этого будет прибавлена другая строка, возможно, тоже умноженная на какой-то скаляр), то определитель надо разделить на t (по 2-му свойству определителей); если на какой-то скаляр умножается *пассивная* строка (та, которая будет прибавлена к другой строке, а сама меняться не будет), то ничего дополнительно делать не надо (по 7-му свойству определителей).