§ 40. Положительно определенные квадратичные формы

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Квадратичную форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над полем F можно рассматривать как отображение из множества F^n в F, которое каждому упорядоченному набору скаляров $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in F^n$ ставит в соответствие скаляр $f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in F$. Этот скаляр естественно называть *значением формы* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на наборе значений переменных $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Набор значений переменных $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется *ненулевым*, если найдется $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такой, что $x_i^0 \neq 0$.

Во многих приложениях важную роль играют формы над полем $\mathbb{R}$, значение которых на любом ненулевом наборе значений переменных больше 0. Их изучению и посвящен данный параграф.

Определение

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$, значение которой на любом ненулевом наборе значений переменных положительно, называется *положительно определенной*.

- *Всюду далее в этом параграфе рассматриваются только квадратичные формы над полем $\mathbb{R}$. В явном виде это, как правило, оговариваться не будет.*

1-й критерий положительной определенности

Пусть квадратичная форма $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет канонический вид $t_1 y_1^2 + t_2 y_2^2 + \cdots + t_n y_n^2$. Форма f положительно определена тогда и только тогда, когда $t_1, t_2, \ldots, t_n > 0$.

Доказательство. Пусть форма f приводится к указанному в формулировке критерия каноническому виду невырожденной линейной заменой переменных

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 & = & b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x_n & = & b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n. \end{array}\right. \tag{1}$$

Нам понадобится также обратная замена:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n, \\ y_2 & = & c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ y_n & = & c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n. \end{array}\right. \tag{2}$$

Она тоже невырождена.

Необходимость. Предположим, что $t_i \leqslant 0$ для некоторого i. Положим $y_i' = 1$ и $y_j' = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$, $j \neq i$. Подставим в левые части равенств (2) y_1' вместо y_1, y_2' вместо y_2, ..., y_n' вместо y_n. Получим неоднородную крамеровскую систему линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & + & \cdots & + & c_{1n}x_n & = & 0, \\
c_{21}x_1 & + & c_{22}x_2 & + & \cdots & + & c_{2n}x_n & = & 0, \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
c_{i-1\,1}x_1 & + & c_{i-1\,2}x_2 & + & \cdots & + & c_{i-1\,n}x_n & = & 0, \\
c_{i1}x_1 & + & c_{i2}x_2 & + & \cdots & + & c_{in}x_n & = & 1, \\
c_{i+1\,1}x_1 & + & c_{i+1\,2}x_2 & + & \cdots & + & c_{i+1\,n}x_n & = & 0, \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
c_{n1}x_1 & + & c_{n2}x_2 & + & \cdots & + & c_{nn}x_n & = & 0.
\end{array}\right. \qquad (3)$$

Матрица этой крамеровской системы совпадает с матрицей замены (2). Поскольку эта замена невырождена, получаем, что определитель системы (3) отличен от нуля. По теореме Крамера система (3) имеет единственное решение $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$. Это решение — ненулевое, так как система (3) неоднородна. Поскольку $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t_1 y_1^2 + t_2 y_2^2 + \cdots + t_n y_n^2$, имеем

$$f(x_1', x_2', \ldots, x_n') = t_1 (y_1')^2 + t_2 (y_2')^2 + \cdots + t_n (y_n')^2 = t_i \leqslant 0.$$

Следовательно, форма f не является положительно определенной. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ — произвольный ненулевой набор значений переменных формы f. Подставив их в равенства (2), получим набор $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ значений переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Если $y_1' = y_2' = \cdots = y_n' = 0$, то, подставив эти значения в правые части равенств (1), получим, что $x_1' = x_2' = \cdots = x_n' = 0$. Следовательно, набор $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ — ненулевой. Поскольку, по условию, $t_1, t_2, \ldots, t_n > 0$, имеем

$$f(x_1', x_2', \ldots, x_n') = t_1(y_1')^2 + t_2(y_2')^2 + \cdots + t_n(y_n')^2 > 0.$$

Следовательно, форма f положительно определена. $\square$

Для того, чтобы сформулировать еще один критерий положительной определенности формы, нам понадобится одно новое понятие.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. Миноры этой матрицы, расположенные в ее первых k строках и первых k столбцах (для всех $k = 1, 2, \ldots, n$) называются *угловыми минорами* матрицы A. Угловой минор порядка k обозначается через Δ_k.

В частности, $\Delta_1 = a_{11}$ и $\Delta_n = |A|$.

Критерий Сильвестра (2-й критерий положительной определенности)

Квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма, а $A = (a_{ij})$ — ее матрица. Проведем доказательство индукцией по n.

База индукции очевидна: форма от одной переменной имеет вид $a_{11}x_1^2$. Ясно, что она положительно определена тогда и только тогда, когда $a_{11} > 0$, а единственным угловым минором матрицы $A = (a_{11})$ этой формы является число a_{11}.

Шаг индукции. Пусть теперь $n > 1$. Представим форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + a_{nn}x_n^2 + \\ &+ 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1\,n}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ — сумма всех слагаемых формы $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$, не содержащих x_n. Обозначим угловые миноры матрицы A через $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Необходимость. Предположим, что форма f положительно определена. Если форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ не является положительно определенной, то существует ненулевой набор значений переменных $(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}')$ такой, что $g(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}') \leqslant 0$. Тогда

$$f(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', 0) = g(x_1', \ldots, x_{n-1}') \leqslant 0,$$

что противоречит положительной определенности формы f. Таким образом, форма g положительно определена. По предположению индукции, ее угловые миноры, совпадающие с минорами Δ_1, Δ_2, ..., Δ_{n-1}, положительны. Сделаем замену $X = TY$, которая приводит форму f к каноническому виду, и обозначим через D (диагональную) матрицу полученной формы. Из 1-го критерия положительной определенности вытекает, что $|D| > 0$. В силу следствия о знаке определителя матрицы формы (см. § 39), $\Delta_n = |A| > 0$.

Достаточность. Предположим теперь, что $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n > 0$. Угловыми минорами формы $g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ являются миноры $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$. Поскольку все они положительны, по предположению индукции форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ положительно определена. Пусть

$$\begin{cases} x_1 = t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + \cdots + t_{1\,n-1}y_{n-1}, \\ x_2 = t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \cdots + t_{2\,n-1}y_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = t_{n-1\,1}y_1 + t_{n-1\,2}y_2 + \cdots + t_{n-1\,n-1}y_{n-1} \end{cases} \tag{5}$$

— невырожденная линейная замена переменных, которая приводит форму g к каноническому виду $b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \cdots + b_{n-1\,n-1}y_{n-1}^2$. Поскольку форма g положительно определена, из 1-го критерия положительной определенности вытекает, что

$$b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{n-1\,n-1} > 0. \tag{6}$$

Рассмотрим замену переменных

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + \dots + t_{1\,n-1}y_{n-1}\,, \\ x_2 &=& t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \dots + t_{2\,n-1}y_{n-1}\,, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x_{n-1} &=& t_{n-1\,1}y_1 + t_{n-1\,2}y_2 + \dots + t_{n-1\,n-1}y_{n-1}\,, \\ x_n &=& y_n. \end{array}\right. \qquad (7)$$

Обозначим матрицу замены (7) через T, а матрицу замены (5) — через T'. Разлагая определитель матрицы T по последней строке, имеем:

$$|T| = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1\,n-1} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2\,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n-1\,1} & t_{n-1\,2} & \dots & t_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1\,n-1} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n-1\,1} & t_{n-1\,2} & \dots & t_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} = |T'|.$$

Поскольку замена (5) невырождена, получаем, что $|T| = |T'| \neq 0$, т. е. замена (7) тоже невырождена.

Замена (7) переводит форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в форму

$$
\begin{aligned}
h(y_1, y_2, \ldots, y_n) = {} & b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \cdots + b_{n-1\,n-1}y_{n-1}^2 + a_{nn}y_n^2 \quad + \\
& + 2a_{1n}(t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + \cdots + t_{1\,n-1}y_{n-1})y_n \quad + \\
& + 2a_{2n}(t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \cdots + t_{2\,n-1}y_{n-1})y_n \quad + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + 2a_{n-1\,n}(t_{n-1\,1}y_1 + t_{n-1\,2}y_2 + \cdots + t_{n-1\,n-1}y_{n-1})y_n = \\
= {} & b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \cdots + b_{n-1\,n-1}y_{n-1}^2 + a_{nn}y_n^2 \quad + \\
& + 2(a_{1n}t_{11} + a_{2n}t_{21} + \cdots + a_{n-1\,n}t_{n-1\,1})y_1y_n \quad + \\
& + 2(a_{1n}t_{12} + a_{2n}t_{22} + \cdots + a_{n-1\,n}t_{n-1\,2})y_2y_n \quad + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + 2(a_{1n}t_{1\,n-1} + a_{2n}t_{2\,n-1} + \cdots + a_{n-1\,n}t_{n-1\,n-1})y_{n-1}y_n = \\
= {} & b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \cdots + b_{n-1\,n-1}y_{n-1}^2 + a_{nn}y_n^2 \quad + \\
& + 2b_{1n}y_1y_n + 2b_{2n}y_2y_n + \cdots + 2b_{n-1\,n}y_{n-1}y_n \quad ,
\end{aligned}
$$

где $b_{in} = a_{1n}t_{1i} + a_{2n}t_{2i} + \cdots + a_{n-1\,n}t_{n-1\,i}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Выделив полный квадрат по каждой из переменных y_1, y_2, $\dots$, y_{n-1}, получим:

$$h(y_1, y_2, \dots, y_n) = b_{11}\left(y_1 + \frac{b_{1n}}{b_{11}} \cdot y_n\right)^2 + b_{22}\left(y_2 + \frac{b_{2n}}{b_{22}} \cdot y_n\right)^2 + \\ + \dots + b_{n-1\,n-1}\left(y_{n-1} + \frac{b_{n-1\,n}}{b_{n-1\,n-1}} \cdot y_n\right)^2 + \\ + \left(a_{nn} - \frac{b_{1n}^2}{b_{11}} - \frac{b_{2n}^2}{b_{22}} - \dots - \frac{b_{n-1\,n}^2}{b_{n-1\,n-1}}\right) y_n^2.$$

Сделаем замену переменных

$$\left\{\begin{array}{rcll} y_1 & = & z_1 & - \frac{b_{1n}}{b_{11}} \cdot z_n, \\ y_2 & = & z_2 & - \frac{b_{2n}}{b_{22}} \cdot z_n, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ y_{n-1} & = & z_{n-1} & - \frac{b_{n-1\,n}}{b_{n-1\,n-1}} \cdot z_n, \\ y_n & = & & z_n. \end{array}\right. \tag{8}$$

Матрица этой замены имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -\frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\frac{b_{2n}}{b_{22}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\frac{b_{n-1\,n}}{b_{n-1\,n-1}} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен 1. Следовательно, замена (8) невырождена. Ясно, что

$$y_1 + \frac{b_{1n}}{b_{11}} \cdot y_n = z_1, y_2 + \frac{b_{2n}}{b_{22}} \cdot y_n = z_2, \ldots, y_{n-1} + \frac{b_{n-1\,n}}{b_{n-1\,n-1}} \cdot y_n = z_{n-1}, y_n = z_n.$$

Поэтому после применения замены (8) форма $h(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ перейдет в форму

$$q(z_1, z_2, \ldots, z_n) = b_{11}z_1^2 + b_{22}z_2^2 + \cdots + b_{n-1\,n-1}z_{n-1}^2 + b_{nn}z_n^2,$$

где $b_{nn} = a_{nn} - \frac{b_{1n}^2}{b_{11}} - \frac{b_{2n}^2}{b_{22}} - \cdots - \frac{b_{n-1\,n}^2}{b_{n-1\,n-1}}$. Обозначим матрицу этой формы через D.

Форма $q(z_1, z_2, \dots, z_n)$ получена из формы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ последовательным применением замен (7) и (8). По условию $|A| = \Delta_n > 0$. В силу следствия о знаке определителя матрицы формы (см. § 39), $|D| > 0$. Матрица D диагональна, а на ее главной диагонали стоят числа $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$. Следовательно, $|D| = b_{11}b_{22}\cdots b_{nn} > 0$. Учитывая (6), получаем, что $b_{nn} > 0$. Еще раз учитывая (6), получаем, что форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ положительно определена в силу 1-го критерия положительной определенности. $\square$