

Гиперболы на плоскости.

ГК-102

ММ-190207

Саша

Даниил

13.05.2020.

№ 12.2.1 (а)

Найти полуоси, координаты вершин и фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса:

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

Полуоси: $x=0 \Rightarrow y = \pm 2$
 $y=0 \Rightarrow x = \pm 3$ $\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$ - полуоси, вершины $\begin{cases} (0; \pm 2) \\ (\pm 3; 0) \end{cases}$

Координаты фокусов: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

$F_{1,2} (\pm \sqrt{5}; 0)$

Эксцентриситет: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Уравнения директрис: $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \pm \frac{9}{\sqrt{5}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{9}{\sqrt{5}} \end{cases}$

№ 12.2.3 $e = \frac{1}{2} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

О - центр, $O(0,0)$

$x - 16 = 0$ - дир.-ца $\Rightarrow x = 16$

рассматриваем точку с абсциссой (-4) до фокуса, соответствующей директрисе.
 $x = 16 = \frac{a}{e} \Rightarrow 16 = \frac{a}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a = 8$

Найдем о фокальных радиусах эллипса: Ответ: 10

$r_1 = a - ex = a - \frac{x}{2} = 8 - \frac{-4}{2} = 10$ (так как выбираем соответствующий фокус)
 $r_2 = a + ex = 8 + \frac{-4}{2} = 6$

№ 12.2.5(a) Найти e эллипса:

а) если малая ось эллипса видна из фокуса под углом 90° :

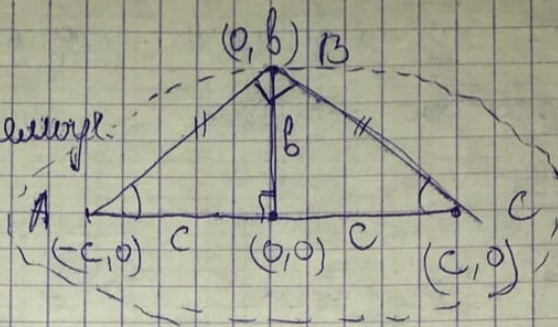
$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, a \geq b$$

Очевидно, что $\triangle ABC$ - р/б прямоугольный, т.к.

высота = медиана =

= биссектриса \Rightarrow

$$\Rightarrow b = c \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow c^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$$



$$e = \frac{c}{a} = \frac{a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

12.2.6(a)

Дан эллипс: $9x^2 + 4y^2 = 36$

прямая l : $2x + 3y - 6 = 0$

~~Вопрос?~~ $l \cap E = ?$

Точки P с Ox и Oy : $x=0 \Rightarrow y=2$
 $y=0 \Rightarrow x=3$

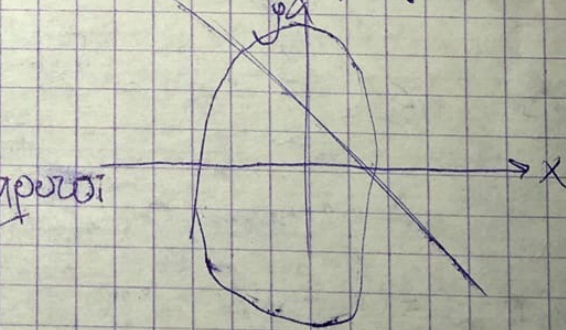
Точка $M = l \cap Oy$ лежит ниже

вершины $(0, b)$ эллипса, но выше точки $(0, 2)$
 $3y = 6 - 2x \Rightarrow y = 2 - \frac{2}{3}x$ более строго

Получим E : $a=3$
 $b=2$

Вершины: $(0; \pm 2)$

$(\pm 2; 0)$
Схематический график:



$$9x^2 + 4\left(2 - \frac{2}{3}x\right)^2 = 36$$

$$\frac{97x^2}{81} - \frac{32x}{3} - 20 = 0 \quad | \cdot 81$$

$$97x^2 - 27 \cdot 32x - 20 \cdot 81 = 0$$

Ответ: $l \cap E$

$$D = 27 \cdot 27 \cdot 32 \cdot 32 + 4 \cdot 20 \cdot 81 \cdot 97 > 0 \Rightarrow 2 \text{ решения.}$$

№12.2.7. (a) Нарисовать уравнение кас-овых l_1 и l_2 эллипсу
 $x^2 + 4y^2 = 20$

a) l_1 и $l_2 \parallel x - y + 10 = 0 \Rightarrow y = x + 10 \Rightarrow l_1: x + b_1 = y_1$

Решение: $x^2 + 4(x^2 + 2xb_1 + b_1^2) - 20 = 0$ $l_2: x + b_2 = y_2$

$$5x^2 - 8xb_1 + 4b_1^2 - 20 = 0$$

$$\Delta = 64b_1^2 - 20(4b_1^2 - 20) = -16b_1^2 + 400 = 0$$

$$b_1^2 = \frac{400}{16} = \frac{100}{4} = 25$$

$$b_{1,2} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Ответ: $\begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases}$

№12.8. 12.2.9(a) Найти фокусы, е, уравнение асимптот, уравнение директрис
 гиперболы:

$$x^2 - 4y^2 = 20 \Rightarrow \frac{x^2}{(2\sqrt{5})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{5} \\ b = \sqrt{5} \end{cases}$$

Действ. ось: $y = 0$ $x = \pm 2\sqrt{5} \pm 10 = \pm 2\sqrt{5}$, вершины $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$

Мнимая ось: $x = 0$ $y = \pm \sqrt{5}$ ~~$b = \sqrt{5}$~~ ~~$(0, \pm \sqrt{5})$~~

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$$

$$F_{1,2}(\pm c, 0) = (\pm 5, 0)$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \pm 4 \text{ - директрисы}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x = \pm \frac{1}{2} x \text{ - асимптоты}$$

(12.2.10.) (a)

Вставить канонич. ур-е эллипса:

$$\begin{matrix} M_1(6, -2) \\ M_2(-8, \sqrt{11}) \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} G \\ \Gamma \end{matrix} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right.$$

$$\begin{cases} \frac{36}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{64}{a^2} - \frac{11}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36b^2 - 4a^2 = a^2b^2 \\ 64b^2 - 11a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36b^2 - 4a^2 = 64b^2 - 11a^2 \\ 28b^2 - 7a^2 = 0 \end{cases}$$

$$4b^2 = a^2$$

$$64b^2 - 44b^2 = 4b^4$$

$$4b^4 - 20b^2 = 0$$

$$4b^2(b^2 - 5) = 0$$

$$b = \pm\sqrt{5}, \text{ т.к. } b > 0 \text{ из опр-ия.}$$

$$b = 0, \text{ но } b \neq 0 \text{ (по опр-ию)}$$

$$\Rightarrow a^2 = 4b^2 \Rightarrow a^2 = \pm 4 \cdot 5 = \pm 20, \text{ т.к. } a > 0$$

Ответ: $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$

№12.2.15(a) найти вершину, фокус, у-ие дир-ей параболы

$$y^2 = 4x - 8$$

$$y^2 = 4(x-2) = 2 \cdot 2(x-2)$$

$$z = x - 2$$

$$y^2 = 2pz \Rightarrow p = 2$$

Вершина $(2, 0)$, т.к. $z = 0 \Rightarrow x = 2$

$F(\frac{p}{2}, 0)$ - фокус $\Rightarrow z = x - 2 \Rightarrow x = 3, y = 0 \Rightarrow F(3, 0)$

Дир-ей: $z = -\frac{p}{2} = -1$ $z + 1 = 0 \Rightarrow x - 2 + 1 = 0$

у-ие дир-ей $x - 1 = 0$

№12.2.16(a) $F(-7, 0)$, $x - 7 = 0$ - дир-ей: $x = 7 = -\frac{p}{2} \Rightarrow p = -14$

$$y^2 = -28x = 2px = 2 \cdot (-14)x$$

Отв. $y^2 = -28x$