

§7. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

В этом параграфе излагается метод решения произвольной системы линейных уравнений, известный под названием *метода Гаусса* (его называют также *методом последовательного исключения неизвестных*). Метод Гаусса можно реализовывать двумя способами — на языке линейных уравнений и на языке матриц. Мы изложим второй из этих способов. В дальнейшем мы постоянно будем использовать этот метод при решении самых разных задач.

- Метод Гаусса назван в честь великого немецкого математика Карла Фридриха Гаусса, жившего с 1777 по 1855 г. Хотя это название и является общепринятым, Гаусс не является его автором: метод был известен задолго до него. Первое его описание имеется в китайском трактате «Математика в девяти книгах», который составлен между II в. до н. э. и I в. н. э. и представляет собой компиляцию более ранних трудов, написанных в X–II вв. до н. э.

Определение

Пусть дана система линейных уравнений

[illegible]

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

называется *расширенной матрицей* этой системы.

В расширенной матрице системы каждая строка соответствует какому-то уравнению, каждый столбец, кроме последнего, — это набор коэффициентов при некотором неизвестном в различных уравнениях системы, а последний столбец — это совокупность свободных членов системы. Таким образом,

- расширенная матрица системы содержит в себе полную информацию о системе.

Иными словами, не только по системе линейных уравнений однозначно выписывается ее расширенная матрица, но и наоборот, по произвольной матрице A , содержащей более одного столбца¹, однозначно восстанавливается система линейных уравнений, расширенной матрицей которой является матрица A .

Определение

Мы будем говорить, что система (1) *соответствует* матрице (2).

¹Эта оговорка необходима, так как требуется один столбец для свободных членов и как минимум один столбец для коэффициентов при неизвестных.

Приступим к изложению метода Гаусса. В самом общем виде его можно описать как последовательность из следующих четырех шагов:

- 1) записываем расширенную матрицу данной системы линейных уравнений
- 2) с помощью некоторых преобразований (называемых *элементарными преобразованиями матрицы*) приводим эту матрицу к некоторому специальному виду (так называемой *ступенчатой* матрице);
- 3) восстанавливаем систему, соответствующую полученной ступенчатой матрице;
- 4) решаем систему, полученную на предыдущем шаге.

При этом оказывается, что:

- (i) общее решение системы, соответствующей полученной ступенчатой матрице, совпадает с общим решением исходной системы;
- (ii) система, соответствующая произвольной ступенчатой матрице, решается легко.

Шаги 1) и 3) тривиальны и мы их далее комментировать не будем (отметим, что при решении конкретных задач шаг 3), как правило, в явном виде не осуществляют).

Определение

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие действия:

- 1) умножение строки на ненулевой скаляр;
- 2) прибавление одной строки к другой;
- 3) перестановка двух строк;
- 4) перестановка двух столбцов;
- 5) вычеркивание или добавление нулевой строки.

Определение

Матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них может быть получена из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований.

- Очевидно, что отношение «быть эквивалентными» на множестве всех матриц рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

Определение

Системы линейных уравнений называются *равносильными*, если они имеют одно и то же общее решение.

- Отношение равносильности на множестве всех систем линейных уравнений, очевидно, рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

Следующее несложно проверяемое утверждение принципиально важно, так как оно обосновывает корректность метода Гаусса.

Предложение о корректности метода Гаусса

Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований типов 1)–3) и 5), то системы линейных уравнений, соответствующие матрицам A и B равносильны.

Доказательство предложения приведено на двух следующих слайдах.

Доказательство. Договоримся называть систему линейных уравнений, соответствующую матрице A , старой, а систему, соответствующую матрице B , — новой. Достаточно рассмотреть случай, когда матрица B получена из A с помощью одного элементарного преобразования. В зависимости от типа этого преобразования возможны 4 случая.

Случай 1: B получена из A умножением i -й строки на ненулевой скаляр t . В этом случае новая система получена из старой умножением i -го уравнения на t . Ясно, что всякое решение старой системы является решением новой. Поскольку старая система получается из новой умножением i -го уравнения на ненулевой скаляр $\frac{1}{t}$, верно и обратное утверждение.

Случай 2: B получена из A прибавлением j -й строки к i -й. Поскольку сумма двух верных равенств является верным равенством, всякое решение старой системы является решением новой. Далее, матрицу A можно получить из матрицы B выполнением трех элементарных преобразований — сначала умножаем j -ю строку матрицы B (совпадающую с j -й строкой матрицы A !) на -1 , затем прибавляем полученную строку к i -й строке матрицы B , и, наконец, еще раз умножаем j -ю строку матрицы B на -1 . В силу сказанного выше, всякое решение новой системы является и решением старой.

Случай 3: *B* получена из *A* перестановкой строк. В этом случае системы, соответствующие матрицам *A* и *B*, различаются лишь порядком записи уравнений, что, очевидно, не влияет на общее решение системы.

Случай 4: *B* получена из *A* вычеркиванием или добавлением нулевой строки. Это означает, что новая система получена из старой вычеркиванием или добавлением «тривиального» уравнения, т. е. уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$. Очевидно, что эта операция никак не может повлиять на общее решение системы. \square

В предложении о корректности метода Гаусса не упоминается об элементарном преобразовании типа 4) (перестановке столбцов). Дело в том, что если при элементарных преобразованиях расширенной матрицы системы переставить местами последний столбец матрицы с некоторым другим ее столбцом, то система, соответствующая полученной матрице, может оказаться не равносильной исходной системе. Как мы увидим ниже, при приведении матрицы к ступенчатому виду всегда можно обойтись без этого элементарного преобразования. Но исключать его из числа элементарных преобразований невыгодно, так как им бывает удобно пользоваться при решении задач, не связанных с решением систем линейных уравнений.

Введем понятие, которое будет играть важную роль в дальнейшем.

Определение

Матрица называется *ступенчатой*, если выполнено следующее условие: если некоторая строка матрицы, отличная от первой, не является нулевой, то в начале этой строки стоит больше нулей, чем в начале предыдущей строки.

Из определения непосредственно вытекает, что если некоторая строка ступенчатой матрицы является нулевой, то и все ее последующие строки — нулевые. В самом деле, если в матрице после нулевой строки идет ненулевая, то для этой ненулевой строки нарушено условие из определения ступенчатой матрицы (в начале этой строки стоит меньше нулей, чем в начале предыдущей).

Общий вид ступенчатой матрицы

Произвольная ступенчатая матрица имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы, обозначенные звездочками, не должны быть равны 0.


Напротив, все элементы, стоящие в «серой зоне» (левее и ниже синей ломаной линии), обязаны быть равны 0. Элементы, стоящие выше ломаной (кроме тех, что обозначены звездочками), могут быть любыми. Нулевых столбцов в левой части матрицы, как и нулевых строк в ее нижней части, может не быть.

- Ломаная линия, ограничивающая сверху «нулевую часть» ступенчатой матрицы имеет вид ступенек. Именно этим объясняется термин «ступенчатая матрица».

Замечание о числе строк и столбцов в ступенчатой матрице

Если переходить от ненулевой строки ступенчатой матрицы к следующей за ней ненулевой строке (до тех пор, пока это возможно), то мы каждый раз будем сдвигаться ровно на одну строку вниз и на, вообще говоря, произвольное число столбцов вправо. Следовательно, справедливо

Замечание о числе строк и столбцов в ступенчатой матрице

В любой ступенчатой матрице число ненулевых строк не превышает числа столбцов. 

На следующем слайде приводится алгоритм, который показывает, что произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.

Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду

Пусть A — произвольная матрица. Можно считать, что $A \neq O$, так как нулевая матрица является ступенчатой. Выберем в A самый левый ненулевой столбец (обозначим его номер через j), а в этом столбце — самый верхний ненулевой элемент (обозначим этот элемент через x , а номер строки, в которой он стоит, — через i). Если $i > 1$, поменяем местами первую и i -ю строки. Если в j -м столбце есть ненулевой элемент y , стоящий в k -й строке, где $k > 1$, прибавим к k -й строке, умноженной на x , первую строку, умноженную на $-y$. После этого в k -й строке и j -м столбце будет стоять элемент $xy - yx = 0$. Действуя таким образом, обнулим в j -м столбце все элементы, расположенные ниже первой строки. Если после этого ниже первой строки и правее j -го столбца все элементы будут равны 0, то полученная матрица является ступенчатой. В противном случае повторим все описанные выше действия применительно к той части полученной матрицы, которая расположена ниже первой строки и правее j -го столбца. В результате заполненная нулями зона в левой нижней части матрицы продвинется на одну строку вниз и как минимум на один столбец вправо. Будем продолжать эти действия. Рано или поздно этот процесс оборвется, так как число строк и столбцов в матрице конечно. Полученная матрица будет ступенчатой.

Комментарий 1. В алгоритме приведения матрицы к ступенчатому виду упоминается о прибавлении к k -й строке, умноженной на x , первой строки, умноженной на $-y$. Заметим, что фактически речь здесь идет о последовательности из четырех элементарных преобразований: сначала мы умножаем первую строку на $-y$, затем умножаем k -ю строку на x , затем прибавляем первую строку к k -й, и, наконец, умножаем первую строку на $-\frac{1}{y}$ (возвращая ее в исходное состояние).

Комментарий 2. В алгоритме приведения матрицы к ступенчатому виду используются только первые три элементарных преобразования. Таким образом, при приведении матрицы к ступенчатому виду можно обойтись не только без перестановки столбцов (что принципиально важно с точки зрения предложения о корректности метода Гаусса), но и без вычеркивания или добавления нулевых строк². Но совсем отказываться от возможности применить последнее элементарное преобразование невыгодно: вместо того, чтобы, строго придерживаясь алгоритма приведения матрицы к ступенчатому виду, «сбрасывать» нулевые строки в нижнюю часть матрицы, их можно вычеркивать, тем самым экономя время и место (а при компьютерной реализации метода Гаусса — объем используемой памяти).

² Более того, как мы увидим в § 27, третье преобразование (перестановку строк) также можно не использовать.

Нахождение общего решения системы по ступенчатой матрице: случай несовместной системы

Для того, чтобы завершить изложение метода Гаусса, нам осталось объяснить, как искать общее решение системы линейных уравнений, соответствующей ступенчатой матрице. Здесь возможны три случая.

Случай 1: ступенчатая матрица содержит строку, в которой все элементы, кроме последнего, равны 0, а последний элемент нулю не равен. Эта строка соответствует уравнению вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$. Ясно, что это уравнение, а значит и произвольная система, его содержащая, решений не имеет. Учитывая предложение о корректности метода Гаусса, получаем, что

- *в рассматриваемом случае система несовместна.*

Для удобства будем называть строки матрицы, в которых все элементы, кроме последнего, равны 0, а последний элемент нулю не равен, *плохими*. Заметим, что

- если при приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду плохая строка возникла в тот момент, когда матрица еще не является ступенчатой, то продолжать преобразования не имеет смысла, так как уже в этот момент стало ясно, что система несовместна.

Нахождение общего решения системы по ступенчатой матрице: переход к двум оставшимся случаям

- *Всюду в дальнейшем мы будем считать, что при приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду плохих строк не возникло и мы довели матрицу до ступенчатого вида.*

Определение

Совокупность всех столбцов расширенной матрицы системы, кроме ее последнего столбца, мы будем называть *основной частью* расширенной матрицы.

В силу замечания о числе строк и столбцов в ступенчатой матрице возможны два случая: в основной части полученной ступенчатой матрицы число ненулевых строк либо равно числу столбцов, либо меньше этого числа.

Нахождение общего решения системы по ступенчатой матрице: случай неопределенной системы (1)

Случай 3: число ненулевых строк ступенчатой матрицы меньше числа столбцов в ее основной части. Вычеркнем из матрицы нулевые строки (если они в ней есть). Система линейных уравнений, соответствующая полученной матрице, может быть схематично записана в виде

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} + \dots = b_1, \\ \qquad \qquad \qquad a_{2i_2}x_{i_2} + \dots = b_2, \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \dots \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad a_{mi_m}x_{i_m} + \dots = b_m, \end{cases}$$

где $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ и $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \dots, a_{mi_m} \neq 0$. При этом в систему входит как минимум одна неизвестная, отличная от $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$, так как в противном случае число ненулевых строк было бы равно числу столбцов в основной части матрицы. Перенесем все неизвестные, кроме $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$, в правые части равенств с обратным знаком. Получим систему, которую можно схематично записать в виде

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} + \dots = b_1 - \dots, \\ \qquad \qquad \qquad a_{2i_2}x_{i_2} + \dots = b_2 - \dots, \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \dots \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad a_{mi_m}x_{i_m} = b_m - \dots. \end{cases} \quad (3)$$

Нахождение общего решения системы по ступенчатой матрице: случай неопределенной системы (2)

Переменные, входящие в правые части уравнений системы (3), называются *свободными*, а переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ — *основными* или *связанными*. Придадим свободным переменным произвольные значения, подставим их в систему (3) и обозначим правые части полученных равенств через b'_1, b'_2, \dots, b'_m . Получим систему m линейных уравнений с m неизвестными:

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} + \dots = b'_1, \\ a_{2i_2}x_{i_2} + \dots = b'_2, \\ \dots \\ a_{mi_m}x_{i_m} = b'_m. \end{cases}$$

В ступенчатой матрице, соответствующей этой системе, число ненулевых строк равно числу столбцов в основной части матрицы. Как мы видели выше при рассмотрении случая 2, эта система имеет единственное решение. Найдя его и объединив полученные значения переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ с теми значениями, которые мы подставили вместо свободных переменных в правые части системы (3), мы найдем одно частное решение исходной системы. Ясно, что система имеет более одного решения. Таким образом,

- в рассматриваемом случае система является неопределенной.

Таким образом, общее решение неопределенной системы можно записать в виде

[illegible]

где $f_1(c_1, c_2, \dots, c_k), f_2(c_1, c_2, \dots, c_k), \dots, f_m(c_1, c_2, \dots, c_k)$ — выражения для переменных x_1, x_2, \dots, x_m через константы c_1, c_2, \dots, c_k , способ получения которых описан на предыдущем слайде. Равенства (5) называются **координатной записью** общего решения системы линейных уравнений. Другой способ записи общего решения системы будет указан в конце § 28.

Мы видим, что каждая из свободных переменных независимо от других может принимать любое значение из поля F . Таким образом,

- если поле F бесконечно, то система имеет бесконечно много решений, а если оно конечно, то система имеет $|F|^k$ решений, где k — число свободных переменных.

Из сказанного при рассмотрении случая 3 вытекает важный для дальнейшего вывод:

Замечание о числе свободных переменных

Если система линейных уравнений является неопределенной, то число ее свободных переменных равно $n - m$, где n — число столбцов в основной матрице системы (или, что то же самое, число неизвестных в системе), а m — число ненулевых строк в матрице, полученной из расширенной матрицы системы приведением к ступенчатому виду. □

- Расширенную матрицу системы можно привести к ступенчатому виду многими различными способами, причем полученные ступенчатые матрицы могут различаться. Возникает вопрос: однозначно ли определено число свободных переменных в системе. Иначе говоря, верно ли, что приводя матрицу к ступенчатому виду различными способами, мы всегда будем получать ступенчатые матрицы с одним и тем же числом ненулевых строк. Ответ на этот вопрос положителен, но доказать мы это сможем только в § 27 (это вытекает из приводимого там доказательства теоремы о ранге матрицы).

Замечания об однородных системах

Если решать методом Гаусса однородную систему линейных уравнений, то последний столбец расширенной матрицы системы на всех этапах будет нулевым. Переписывать его все время нет никакого смысла. Поэтому

- при решении однородных систем, как правило, выписывают и приводят к ступенчатому виду основную матрицу системы, а при нахождении общего решения «вспоминают», что в матрице неявно присутствует еще последний нулевой столбец.

Замечание о существовании ненулевого решения однородной системы

Если в однородной системе линейных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, то она имеет по крайней мере одно ненулевое решение.

Доказательство. Запишем основную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду. В исходной матрице число строк равно числу уравнений, а число столбцов — числу неизвестных. По условию первое число меньше второго. При приведении матрицы к ступенчатому виду число ее ненулевых строк может разве что уменьшиться. Следовательно, и в полученной ступенчатой матрице число ненулевых строк будет меньше числа столбцов. Иными словами, мы попадаем в условия рассмотренного выше случая 3, в котором исходная система имеет более одного решения. Все эти решения, кроме одного, являются ненулевыми.

Введем в рассмотрение несколько новых типов матриц, которые часто будут возникать в дальнейшем по самым разным поводам.

Определения

Квадратная матрица называется: *верхнетреугольной* [*нижнетреугольной*], если все ее элементы, расположенные ниже [выше] главной диагонали, равны 0; *треугольной*, если она либо верхнетреугольна, либо нижнетреугольна; *диагональной*, если все ее элементы, не лежащие на главной диагонали, равны 0.

Ниже слева изображена произвольная верхнетреугольная матрица, а справа — произвольная диагональная матрица:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Мы переходим к изложению модификации метода Гаусса, которая называется *методом Гаусса–Жордана*.

Обозначим через A матрицу, полученную из расширенной матрицы системы приведением к ступенчатому виду, а через B — матрицу, полученную из A вычеркиванием нулевых строк, последнего столбца (содержащего свободные члены) и столбцов, соответствующие свободным переменным (если они существуют). Из замечания о числе свободных переменных вытекает, что матрица B квадратна. Кроме того, она верхнетреугольна, поскольку, очевидно, всякая квадратная ступенчатая матрица верхнетреугольна. Для краткости будем называть матрицу B *базовой частью* матрицы A . Идея метода Гаусса–Жордана состоит в том, что

- после приведения расширенной матрицы системы к ступенчатому виду можно продолжить элементарные преобразования и довести базовую часть матрицы сначала до диагонального, а затем и до единичного вида. После этого общее решение системы находится очень легко.

В самом деле, предположим, что расширенная матрица системы приведена к ступенчатому виду. Обозначим число ее ненулевых строк через n , а число столбцов в ее основной части — через m . В силу замечания о числе строк и столбцов в ступенчатой матрице $n \geq m$. Вычеркнем из матрицы все нулевые строки. Будем считать, что базовая часть матрицы занимает первые m столбцов в основной части матрицы (этого всегда можно добиться, переставив при необходимости столбцы в основной части матрицы). При этом на главной диагонали базовой части все элементы не равны 0. К каждой строке матрицы, кроме m -й, можно прибавить m -ю строку, умноженную на подходящее число (свое для каждой строки), таким образом, чтобы все элементы m -го столбца выше m -й строки оказались равны 0. После этого аналогичным образом, за счет $(m-1)$ -й строки, можно обнулить все элементы $(m-1)$ -го столбца, стоящие выше $(m-1)$ -й строки. Продолжая этот процесс и двигаясь снизу вверх и справа налево (в отличие от «прямого хода» в методе Гаусса, когда мы, приводя матрицу к ступенчатому виду, двигались сверху вниз и слева направо), мы в конце концов добьемся того, что базовая часть станет диагональной матрицей с ненулевыми элементами на главной диагонали. Разделив после этого i -ю строку на элемент a_{ii} (для всех $i = 1, 2, \dots, m$), мы приведем базовую часть к единичному виду.

Для простоты обозначений будем далее считать, что столбцы в основной части матрицы не переставлялись и потому столбцы в базовой части соответствуют неизвестным x_1, \dots, x_m . Рассмотрим сначала случай, когда $n > m$. Ясно, что мы находимся в условиях рассмотренного выше случая 3, и потому система является неопределенной. Она имеет вид

$$\begin{cases} x_1 & + a_{1\ m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 & + a_{2\ m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ & \dots\dots\dots \\ & x_m + a_{m\ m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Переменные x_1, \dots, x_m являются основными, а переменные x_{m+1}, \dots, x_n — свободными. Положим $k = n - m$. Переносим слагаемые, содержащие свободные переменные, в правые части уравнений и полагая $x_{m+1} = c_1, \dots, x_n = c_k$, получаем координатную запись общего решения системы:

[illegible]

Предположим теперь, что $n = m$, т.е. что после описанных выше действий базовая часть матрицы совпадает с ее основной частью. В этом случае мы находимся в условиях рассмотренного выше случая 2, и потому система имеет единственное решение. Она имеет вид

$$\begin{cases} x_1 & = b_1, \\ x_2 & = b_2, \\ & \dots\dots\dots \\ & x_n = b_n. \end{cases}$$

Ясно, что с содержательной точки зрения это не система линейных уравнений, а ее (единственное) решение. Исходя из этого, получаем следующий алгоритм, на котором в дальнейшем будут основаны алгоритмы решения некоторых важных задач.

Алгоритм нахождения решения системы линейных уравнений, имеющей единственное решение

Пусть дана система линейных уравнений, имеющая единственное решение. Запишем ее расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований всей матрицы приведем ее основную часть к единичному виду (в рассматриваемом случае это всегда можно сделать). В этот момент в последнем столбце расширенной матрицы будет стоять (единственное) решение системы.