Вариант 18. Квадратичные формы. Семке Даниил

11.05.2020

КН-102, МЕН-190207

(1) Привести квадр. форму $f = -3x_1^2 + 4x_1x_2$ к каноническому виду методом приведения к главным осям.

Составим матрицу A квадр. формы:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собств. значения матрицы A:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 3\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

По Теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -4 \end{array}\right.$$

1) $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = C \\ x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{C}{2} \end{cases}$$

ФСР:

	x_1	x_2
f_1	1	2

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_2 = -4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_2 = C \\ x_1 = -2C \end{cases}$$

ФСР:

	x_1	x_2
f_1	-2	1

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пронормируем векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2$:

$$e_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$D = T^T A T$:

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad T^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Тогда: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_2 \\ x_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_2 \end{cases}$ $\boxed{f = y_1^2 - 4y_2^2}$

невырожденная матрица.

② μ - ?

$f = \mu x_1^2 - 5x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ — отриц-о определена?

Заметим, что f - отр-о определена, если для любого ненулевого набора значений переменных значение формы < 0, тогда, если умножить f на (-1), то она будет положительно определена $\Rightarrow$

Тогда остается проверить по критерию Сильвестра полож-ую определенность формы $(-1) * f$:

$(-1) f = -\mu x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

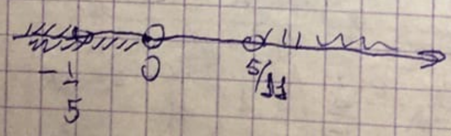
1) $|-\mu| = -\mu > 0 \Rightarrow \boxed{\mu < 0}$

2) $\begin{vmatrix} -\mu & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5\mu - 1 > 0 \Rightarrow \mu < -\frac{1}{5}$

3) $\begin{vmatrix} -\mu & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -5\mu + 8 + 8 - 20 + 16\mu - 1 =$

$= 11\mu - 5 > 0$

$\mu > \frac{5}{11}$



$\varnothing$

Значит, ни при каких μ

f отрицательно определена.