Несобственные интегралы

Несобственные интегралы 1 рода (по бесконечному промежутку)

Пусть $f(x)$ определена на $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, A]$, $A \geqslant a$.

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx.$$

Примеры: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ $(a > 0)$

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

Пример: v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$

Несобственные интегралы 2 рода (от неограниченных функций)

Пусть $f(x)$ определена на $[a, b)$, неограничена при $x \to b$ (b — особая точка функции f) и интегрируема на любом отрезке $[a, \beta]$, $a < \beta < b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta\to b-0} \int_a^{\beta} f(x)\,dx.$$

Пример. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$

Замечание. Если $f(x)$ определена на $[a, b]$ и $c \in (a, b)$ — особая точка функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\alpha\to c-0} \int_a^{\alpha} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to c+0} \int_{\beta}^b f(x)\,dx.$$

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Пример: v.p. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\,dx$

Свойства несобственных интегралов

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{где } b \text{ — особая точка } f(x) \text{ или } b = +\infty.$$

- Если $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, то для любого $a_1 \in (a, b)$ $\displaystyle\int_{a_1}^b f(x)\,dx$ сходится и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^b f(x)\,dx.$$

- Если $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ сходится и $f(x)$ интегрируема на $[a_1, a]$, то $\displaystyle\int_{a_1}^b f(x)\,dx$ сходится и

$$\int_{a_1}^b f(x)\,dx = \int_{a_1}^{a} f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx.$$

- Если $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, то $\int_A^b f(x)\,dx \to 0$ при $A \to b-0$.
- Если $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$
- Если $f(x)$ имеет первообразную на $[a,b)$, $\Phi(x)$, то
$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to b-0} \Phi(x) \in \mathbb{R}.$$
- Критерий Коши
- Интегрирование по частям:
$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x),$$
где $u(x)v(x)|_a^b = \lim\limits_{x\to b-0} u(x)v(x) - u(a)v(a)$, если этот предел существует и один из интегралов сходится.

  Пример: $\int_0^1 \ln x\,dx$
- Замена переменной:

  Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$. Пусть $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta)$, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t) = b$ и $\varphi : [\alpha,\beta) \to [a,b)$. Тогда
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$
при этом интегралы сходятся или расходятся одновременно.

  Пример: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Интегралы от неотрицательных функций

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad f(x) \geqslant 0, \quad b \text{ — особая точка } f(x) \text{ или } b = +\infty.$$

Пусть $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$. Тогда $F(x)$ — неубывающая функция и
$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad F(x) \text{ — ограничена.}$$

Признаки сравнения:

(I) Если, начиная с некоторого a_0, $f(x) \leqslant g(x)$, то
$$\int_a^b g(x)\,dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx < \infty$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(x)\,dx = \infty$$

(II) Пусть $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$. Тогда

$$\text{если } k \in [0, +\infty), \text{ то } \int_a^b g(x)\,dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx < \infty$$

$$\text{если } k \in (0, +\infty], \text{ то } \int_a^b g(x)\,dx = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \infty$$

Примеры: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}}\,dx, \quad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx, \quad \int_2^\infty \frac{dx}{\ln x}$

Интегралы от произвольных функций

Признак Абеля. Пусть $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, $g(x)$ монотонна и ограничена на $[a, b)$. Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Признак Дирихле. Пусть интегралы $\displaystyle\int_a^A f(x)\,dx$ ограничены в совокупности при $A \in [a, b)$, $g(x) \to 0$ при $x \to b - 0$ и монотонна на $[a, b)$. Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Абсолютная и условная сходимость интегралов

Если сходится $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$, то интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*.

Абсолютная сходимость $\Rightarrow$ сходимость.

Сходимость $\not\Rightarrow$ абсолютная сходимость.

Пример.

Если $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, а $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ расходится, то интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ называется *условно сходящимся*.