§ 2. Бинарные отношения

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Пусть n — произвольное натуральное число. n-*арным отношением* на множестве S называется произвольное подмножество множества S^n. При $n = 2, 3$ n-арные отношения имеют специальные названия: 2-арные отношения называются *бинарными*, а 3-арные — *тернарными*.

- Из «теоретико-множественного» определения отображения из одного множества в другое (см. § 1) видно, что всякое отображение из множества S в себя является бинарным отношением на S.

В дальнейшем мы будем иметь дело почти исключительно с бинарными отношениями. Поэтому слово «бинарное» часто будет опускаться.

! *Всюду в дальнейшем, кроме тех случаев, когда в явном виде оговорено противное, слово «отношение» означает «бинарное отношение».*

Пусть S — произвольное множество, а α — бинарное отношение на S. По определению, α — это множество, элементами которого являются упорядоченные пары элементов из S. Если это множество содержит пару (x, y), то, наряду с записью $(x, y) \in \alpha$, мы часто будем писать $x\,\alpha\,y$.

Пример 1. Пусть S — произвольное множество. Положим $\alpha = S^2$. В соответствии с определением, α — бинарное отношение на S. Оно содержит *все* упорядоченные пары элементов из S и является самым большим (по включению) отношением на S. Это отношение называется *универсальным отношением* на S. Оно обозначается через Δ_S, а если из контекста ясно, какое множество выступает в качестве S, — то просто через Δ.

Пример 2. Пусть S — произвольное множество. Определим отношение α на S правилом: $x \,\alpha\, y$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Это отношение называется *отношением равенства* на S. Оно обозначается через ∇_S, а если множество S ясно из контекста, — то просто через ∇.

Пример 3. Пусть S — любое из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. Определим отношение α на S правилом: $x \,\alpha\, y$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant y$. Это отношение называется *стандартным отношением порядка* на S. Можно рассматривать также *стандартное отношение строгого порядка* β на S: $x \,\beta\, y$ тогда и только тогда, когда $x < y$.

Пример 4. На любом из множеств $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ определим отношение $\prec$ правилом: $x \prec y$ тогда и только тогда, когда $y = x + 1$. Оно называется *отношением предшествования*.

Пример 5. Определим отношение α на любом из множестве $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ правилом: $x \,\alpha\, y$ тогда и только тогда, когда x делит y нацело. Если это условие выполнено, то будем, как обычно, писать $x \mid y$. Это отношение называется *отношением делимости*.

Пример 6. Пусть S — любое из множеств $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, а n — натуральное число такое, что $n > 1$. Определим отношение α на множестве S правилом: $x \,\alpha\, y$ тогда и только тогда, когда x и y имеют одинаковые остатки при делении на n. Если это условие выполнено, то будем писать $x \equiv y \pmod{n}$. Это отношение называется *отношением сравнимости по модулю* n.

Пример 7. На любом из множеств $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ определим отношение α *равенства по модулю*, полагая $x \,\alpha\, y$ тогда и только тогда, когда $|x| = |y|$.

Пример 8. Пусть S — произвольное множество. Определим отношение α на множестве $\mathcal{B}(S)$ правилом: если $A, B \subseteq S$, то $A \,\alpha\, B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$. Это отношение называется *отношением включения* на булеане множества S. Представляет интерес и отношение *строгого включения* β на $\mathcal{B}(S)$, определяемое правилом: $A \,\beta\, B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$.

Пример 9. На множестве всех конечных множеств определим *отношение равномощности* α: $A \, \alpha \, B$ тогда и только тогда, когда A и B равномощны.

Пример 10. Определим *отношение подобия* α на множестве всех треугольников: если x и y — треугольники, то $x \, \alpha \, y$ тогда и только тогда, когда эти два треугольника подобны.

Пример 11. На множестве всех прямых можно определить *отношение параллельности*: прямые ℓ_1 и ℓ_2 находятся в этом отношении тогда и только тогда, когда они параллельны (т.е. лежат в одной плоскости и не имеют общих точек).

Пример 12. Если множество состоит из небольшого числа элементов, то бинарное отношение на нем можно задать, явно указав все упорядоченные пары, принадлежащие этому отношению. Например, на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ можно ввести следующее бинарное отношение:

$$\alpha = \{(1,2), (1,4), (2,2), (2,3), (4,1), (5,3)\}. \tag{1}$$

Определение

Пусть α и β — бинарные отношения на множестве S. *Произведением* отношений α и β называется бинарное отношение на S, которое обозначается через $\alpha\beta$ и определяется следующим образом: $(x, y) \in \alpha\beta$ тогда и только тогда, когда найдется элемент $z \in S$ такой, что $x \,\alpha\, z$ и $z \,\beta\, y$.

Используя произведение бинарных отношений, можно определить произвольную натуральную степень отношения α: используя индукцию по n, полагаем $\alpha^1 = \alpha$ и, для всякого $n > 1$, $\alpha^n = \alpha^{n-1} \cdot \alpha$.

Легко привести примеры, показывающие, что произведение бинарных отношений не коммутативно, т. е. вообще говоря, не обладает свойством $\alpha\beta = \beta\alpha$. Пусть, например, α — стандартное отношение порядка на множестве $\mathbb{R}$, а β — отношение равенства по модулю на том же множестве. Тогда $(1, -2) \in \alpha\beta$, так как $1 \,\alpha\, 2 \,\beta\, (-2)$. Но $(1, -2) \notin \beta\alpha$. В самом деле, предположив, что $(1, -2) \in \beta\alpha$, т. е. что $1 \,\beta\, x \,\alpha\, (-2)$ для некоторого $x \in \mathbb{R}$ мы приходим к противоречию: из $1 \,\beta\, x$ вытекает, что $x \in \{1, -1\}$, а из $x \,\alpha\, (-2)$ — что $x \leqslant -2$.

В то же время, произведение бинарных отношений *ассоциативно*. Другими словами, если α, β и γ — бинарные отношения на произвольном множестве S, то $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$. Докажем это утверждение. Иллюстрацией к дальнейшим рассуждениям служит рис. 1. Пусть $(x, y) \in (\alpha\beta)\gamma$ для некоторых $x, y \in S$. Тогда существует $z \in S$ такое, что $(x, z) \in \alpha\beta$ и $z\,\gamma\,y$. Первое из этих включений означает, что $x\,\alpha\,w\,\beta\,z$ для некоторого $w \in S$. Тогда $(w, y) \in \beta\gamma$, поскольку $w\,\beta\,z\,\gamma\,y$. Учитывая еще, что $x\,\alpha\,w$, получаем, что $(x, y) \in \alpha(\beta\gamma)$. Следовательно, $(\alpha\beta)\gamma \subseteq \alpha(\beta\gamma)$. Обратное включение проверяется аналогично. $\square$

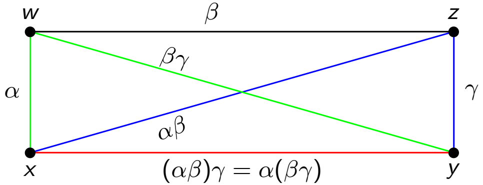

Рис. 1. Ассоциативность произведения бинарных отношений

Определение

Пусть α — бинарное отношение на множестве S. *Обратным* к α называется бинарное отношение на множестве S, обозначаемое через α^{-1} и определяемое правилом: $x\,\alpha^{-1}\,y$ тогда и только тогда, когда $y\,\alpha\,x$.

Например, очевидно, что отношением, обратным к $\leqslant$, является отношение $\geqslant$.

Свойства обратного отношения

Пусть α и β — бинарные отношения на множестве S. Тогда:

1) $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$;
2) $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$.

Доказательство. Свойство 1) легко вытекает из определения обратного отношения. Проверим свойство 2). Пусть $x, y \in S$ и $(x, y) \in \beta^{-1}\alpha^{-1}$. Тогда $x\,\beta^{-1} z\,\alpha^{-1} y$ для некоторого $z \in S$. Следовательно, $y\,\alpha\,z\,\beta\,x$, и потому $(y, x) \in \alpha\beta$. Но тогда $(x, y) \in (\alpha\beta)^{-1}$. Мы показали, что $\beta^{-1}\alpha^{-1} \subseteq (\alpha\beta)^{-1}$. Обратное включение проверяется повторением тех же рассуждений в обратном порядке. $\square$

Определим несколько важных типов бинарных отношений.

Определение

Бинарное отношение α на множестве S называется:

- *рефлексивным*, если $x \,\alpha\, x$ для любого $x \in S$;
- *симметричным*, если для любых $x, y \in S$ из того, что $x \,\alpha\, y$ вытекает, что $y \,\alpha\, x$;
- *антисимметричным*, если для любых $x, y \in S$ из того, что $x \,\alpha\, y$ и $y \,\alpha\, x$ вытекает, что $x = y$;
- *транзитивным*, если для любых $x, y, z \in S$ из того, что $x \,\alpha\, y$ и $y \,\alpha\, z$ вытекает, что $x \,\alpha\, z$.

Основные типы бинарных отношений: примеры (таблица)

В табл. 1 указано, какие из отношений, упоминаемых в примерах 1–12, являются рефлексивными, симметричными, антисимметричными и транзитивными, а какие нет.

Табл. 1. Основные типы бинарных отношений: примеры

Отношение	Множество	Рефлексивность	Симметричность	Антисимметричность	Транзитивность
Δ_S	Любое	+	+	−	+
∇_S	Любое	+	+	+	+
$\leqslant$	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	+	−	+	+
$<$	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	−	−	+	+
$\prec$	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$	−	−	+	−
$\mid$ (делимость)	$\mathbb{N}$	+	−	+	+
	$\mathbb{Z}$	+	−	−	+
$\equiv \pmod{n}$	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$	+	+	−	+
Равенство по модулю	$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	+	+	−	+
$\subseteq$	$\mathcal{B}(S)$, S — любое	+	−	+	+
$\subset$	$\mathcal{B}(S)$, S — любое	−	−	+	+
Равномощность	Множество всех конечных множеств	+	+	−	+
Подобие треугольников	Множество всех треугольников	+	+	−	+
Параллельность прямых	Множество всех прямых	−	+	−	−
Задано равенством (1)	$\{1,2,3,4,5,6\}$	−	−	−	−

Отметим, что свойства отношения делимости зависят от того, на каком множестве оно рассматривается: на множестве $\mathbb{N}$ оно антисимметрично, а на множестве $\mathbb{Z}$ — нет (поскольку, например, $1 \mid -1$ и $-1 \mid 1$, но $1 \neq -1$).

Почти все утверждения, содержащиеся в табл. 1, очевидны. В специальном обосновании нуждается лишь антисимметричность отношений строгого порядка, предшествования и строгого включения и нетранзитивность отношения параллельности прямых. Ясно, что чисел x и y, для которых одновременно выполнялись бы условия $x < y$ и $y < x$, не существует. Но это означает, что о любой паре чисел с такими свойствами можно утверждать все, что угодно, в том числе и то, что $x = y$. Следовательно, отношение строгого порядка антисимметрично. Аналогично устанавливается антисимметричность отношений предшествования и строгого включения. Наконец, если обозначить через ℓ_1 и ℓ_2 параллельные прямые и положить $\ell_3 = \ell_1$, то мы получим, что $\ell_1 \parallel \ell_2$ и $\ell_2 \parallel \ell_3$, но $\ell_1 \nparallel \ell_3$ (последнее вытекает из того, что совпадающие прямые не параллельны). Следовательно, отношение параллельности прямых не транзитивно.

Определение

Бинарное отношение называется *отношением эквивалентности* или просто *эквивалентностью*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Из табл. 1 видно, что из отношений, упомянутых в примерах 1–11, отношениями эквивалентности являются шесть: универсальное отношение и отношения равенства, равенства по модулю, сравнимости по данному модулю, равномощности и подобия треугольников.

Определение

Пусть S — произвольное множество, α — эквивалентность на S и $x \in S$. Множество всех элементов $y \in S$ таких, что $x \, \alpha \, y$, называется α-*классом* элемента x и обозначается через x^α. Подмножество T в S называется *классом эквивалентности* отношения α, если $T = x^\alpha$ для некоторого $x \in S$.

Например, если α — отношение равенства по модулю на $\mathbb{Z}$, то $5^\alpha = \{5, -5\}$, если α — отношение сравнимости по модулю 3 на $\mathbb{N}$, то 8^α — множество всех натуральных чисел, имеющих остаток 2 при делении на 3, а если α — отношение равномощности на множестве всех конечных множеств, то $\{-1, 0, 1\}^\alpha$ — множество всех 3-элементных множеств.

С понятием отношения эквивалентности тесно связано понятие разбиения множества.

Определение

Разбиением множества S называется семейство непустых подмножеств этого множества такое, что объединение всех множеств из этого семейства равно S, а пересечение любых двух различных множеств из семейства пусто. Множества из этого семейства называются *классами* разбиения.

Приведем несколько примеров разбиений.

1) Для любого множества S можно определить разбиение, состоящее из одного класса S.

2) Еще одно разбиение произвольного множества — это его разбиение на всевозможные одноэлементные подмножества.

3) Семейство множеств $S_1 = \{1, 2, 5\}$, $S_2 = \{3\}$, $S_3 = \{4, 7, 8\}$, $S_4 = \{6, 9\}$ является разбиением множества $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ на четыре класса.

4) Множество $\mathbb{N}$ можно разбить на 3 класса: S_0, S_1 и S_2, где S_i — это множество всех натуральных чисел, которые при делении на 3 дают остаток i $(i = 0, 1, 2)$.

5) Множество всех непустых конечных множеств можно разбить в объединение бесконечного числа классов $S_1, S_2, \ldots,$ где, для всякого $n \in \mathbb{N}$, S_n — это множество всех n-элементных множеств.

6) Множество всех треугольников на плоскости разбивается на бесконечное число классов, в каждый из которых входят все треугольники, подобные некоторому фиксированному треугольнику, и только они.

7) На рис. 2 приведен еще один пример разбиения: множество всех точек прямоугольника разбито на семь подмножеств, раскрашенных в разные цвета.

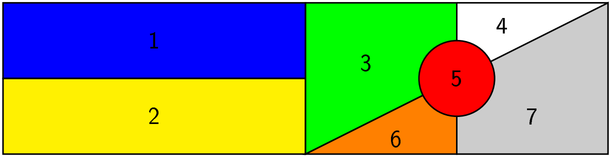

Рис. 2. Разбиение прямоугольника на семь частей

Теорема об отношениях эквивалентности

Пусть S — произвольное множество. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех отношений эквивалентности на множестве S и множеством всех разбиений этого множества.

Доказательство. Пусть S — произвольное множество, а α — эквивалентность на S. Пусть $\{S_i \mid i \in I\}$ — совокупность всевозможных классов эквивалентности отношения α. Проверим, что этот набор подмножеств множества S образует разбиение S. В самом деле, пусть $S_i = x^\alpha$ — некоторый α-класс. Из рефлексивности отношения α вытекает, что $x\,\alpha\,x$. Следовательно, $x \in x^\alpha$, и потому $S_i = x^\alpha \neq \varnothing$. Из того, что $x \in x^\alpha$, вытекает, что $S \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} S_i$. Обратное включение очевидно, и потому $S = \bigcup\limits_{i\in I} S_i$. Осталось проверить, что пересечение любых двух различных α-классов пусто. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 3. Пусть $S_i = x^\alpha$, $S_j = y^\alpha$, $S_i \neq S_j$ и $z \in S_i \cap S_j$. Тогда $x\,\alpha\,z$ и $y\,\alpha\,z$. Поскольку α симметрично, имеем $z\,\alpha\,y$. Тогда $x\,\alpha\,z\,\alpha\,y$. Поскольку α транзитивно, $x\,\alpha\,y$. Если $a \in S_i = x^\alpha$, то $a\,\alpha\,x\,\alpha\,y$, откуда $a\,\alpha\,y$, т.е. $a \in y^\alpha = S_j$. Следовательно, $S_i \subseteq S_j$. Аналогично проверяется, что $S_j \subseteq S_i$, и потому $S_i = S_j$ вопреки выбору S_i и S_j.

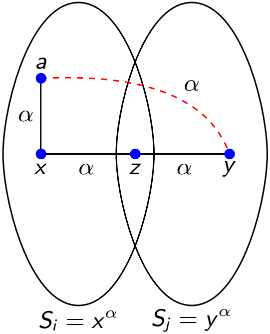

Рис. 3. К доказательству теоремы об отношениях эквивалентности

Обозначим через $\mathrm{Eq}(S)$ множество всех отношений эквивалентности на S, а через $\mathrm{Part}(S)$ — множество всех разбиений множества S. Из сказанного на слайде перед рис. 3 вытекает, что отображение f, которое ставит в соответствие всякой эквивалентности α на S набор всевозможных α-классов, отображает $\mathrm{Eq}(S)$ в $\mathrm{Part}(S)$. Проверим, что это отображение биективно.

Убедимся сначала в том, что f взаимно однозначно. Пусть α и β — различные отношения эквивалентности на S. Без ограничения общности можно считать, что существуют элементы $x, y \in S$ такие, что $x \, \alpha \, y$, но $(x, y) \notin \beta$. Но тогда элементы x и y лежат в одном и том же классе разбиения $f(\alpha)$, но в разных классах разбиения $f(\beta)$. Следовательно, разбиения $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ различны, и потому отображение f взаимно однозначно.

Осталось проверить, что f отображает $\mathrm{Eq}(S)$ на $\mathrm{Part}(S)$. Пусть $\Psi = \{S_i \mid i \in I\} \in \mathrm{Part}(S)$. Требуется указать эквивалентность α на S такую, что $f(\alpha) = \Psi$. Определим бинарное отношение α на S правилом: $x \, \alpha \, y$ тогда и только тогда, когда $x, y \in S_i$ для некоторого $i \in I$. Очевидно, что отношение α рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности. А из построения отношения α и определения отображения f с очевидностью вытекает, что $f(\alpha) = \Psi$. $\square$

Определение

Пусть α — отношение эквивалентности на множестве S. Множество всех α-классов элементов множества S называется *фактор-множеством* множества S по отношению α и обозначается через S/α.

Например, если α — отношение сравнимости по модулю 2 на множестве $\mathbb{Z}$, то фактор-множество S/α состоит из двух элементов: множества всех четных чисел и множества всех нечетных чисел.

Определение

Бинарное отношение называется *отношением частичного порядка* (а также *отношением порядка*, *частичным порядком* или просто *порядком*), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Множество, на котором задано отношение частичного порядка, будем называть *частично упорядоченным* (или просто *упорядоченным*) *множеством*, сокращенно — *чумом*. Если α — отношение частичного порядка на множестве S, то будем говорить, что S *частично упорядочено* (или просто *упорядочено*) отношением α.

С помощью табл. 1 легко установить, что из отношений, упомянутых в примерах 1–11, отношениями частичного порядка являются четыре: отношение равенства, отношение $\leqslant$ на числовых множествах, отношение делимости на $\mathbb{N}$ (но не на $\mathbb{Z}$!) и отношение включения на булеане некоторого множества.

- Чум — это пара, состоящая из множества S и заданного на нем отношения частичного порядка α. Мы будем обозначать эту пару через $\langle S; \alpha \rangle$.

В дальнейшем мы часто будем использовать символ $\leqslant$ для обозначения произвольного отношения частичного порядка на любом множестве (в тех случаях, когда этот символ будет означать обычное отношение порядка на числовом множестве, это будет оговариваться особо). При этом, если $x \leqslant y$ и $x \neq y$, то мы будем писать $x < y$ или $y > x$. Отношение $<$ на произвольном чуме называется отношением *отношением строгого порядка* или просто *строгим порядком*.

Определение

Пусть S — множество, упорядоченное отношением $\leqslant$. Элементы $x, y \in S$ называются *сравнимыми относительно* $\leqslant$, если либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$. Отношение $\leqslant$ называется *отношением линейного порядка* (или просто *линейным порядком*), если любые два элемента из S сравнимы относительно $\leqslant$. Множество, на котором задано отношение линейного порядка, называется *линейно упорядоченным множеством* или *цепью*.

Например, стандартные отношения $\leqslant$ и $\geqslant$ на числовых множествах являются линейными порядками, а отношения равенства, делимости (на $\mathbb{N}$) и включения — не являются. На следующем слайде приведен еще один пример отношения линейного порядка, играющий важную роль в теоретической информатике.

Определение

Пусть $\langle X; \leqslant\rangle$ — непустое конечное линейно упорядоченное множество, а X^+ — множество всевозможных конечных последовательностей элементов из X. Распространим отношение $\leqslant$ с X на X^+ следующим образом. Если $u = x_1x_2\cdots x_k$ и $v = y_1y_2\cdots y_m$, где $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$, то $u \leqslant v$ тогда и только тогда, когда либо $k \leqslant m$ и $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots$, $x_k = y_k$, либо существует $j \leqslant \min\{k, m\}$ такой, что $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots$, $x_{j-1} = y_{j-1}$ и $x_j < y_j$. Отношение $\leqslant$ называется *отношением лексикографического порядка* на X^+.

- Рутинные выкладки показывают, что *отношение лексикографического порядка является линейным порядком*.
- Если отношение $\leqslant$, заданное на множестве X^+, ограничить на множество X, то получится исходно заданное на X отношение линейного порядка $\leqslant$. Это и позволяет обозначать указанные отношения на X и на X^+ одним и тем же символом.
- Если X — множество букв русского языка, упорядоченное в алфавитном порядке (а $\leqslant$ б $\leqslant \cdots \leqslant$ я), то лексикографический порядок на множестве всех слов русского языка — это именно тот порядок, в котором слова идут в словаре. Этим и объясняется термин «лексикографический порядок».

Определение

Пусть $\langle S; \leqslant \rangle$ — произвольный чум и $x, y \in S$. Говорят, что y *покрывает* x, если $x < y$ и не существует элемента z такого, что $x < z < y$.

Заметим, что если $\leqslant$ — стандартное отношение порядка на одном из множеств $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, то y покрывает x тогда и только тогда, когда $x \prec y$. Чумы с небольшим числом элементов (а иногда и бесконечные, но просто устроенные чумы) удобно изображать с помощью так называемых *диаграмм* частично упорядоченных множеств. Диаграмма чума рисуется следующим образом: каждый элемент чума изображается точкой. Если при этом y покрывает x, то y рисуется выше, чем x, и соответствующие точки соединяют линией (как правило, отрезком прямой).

- Допуская вольность речи, часто говорят, что на рисунках изображаются не диаграммы чумов, а сами чумы.

На рис. 4 изображены диаграммы следующих частично упорядоченных множеств: S_1 — множество $\mathcal{B}(\{1,2,3\})$ с отношением включения, S_2 — множество $\{2,3,\dots,12\}$ с отношением делимости, S_3 и S_4 — множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ соответственно с естественным отношением порядка, S_5 — произвольное множество $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ с отношением равенства. Из этих диаграмм наглядно видно, что чумы S_3 и S_4 являются цепями, а чумы S_1, S_2 и S_5 — не являются. В чуме S_5 любые два различных элемента несравнимы. Такие чумы называются *антицепями*.

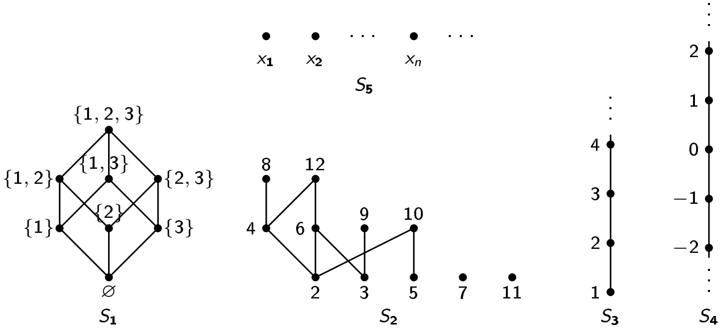

Рис. 4. Диаграммы чумов

Минимальные, максимальные, наименьшие и наибольшие элементы (определения и примеры)

Определения

Элемент x частично упорядоченного множества $\langle S; \leqslant \rangle$ называется:

- *минимальным*, если не существует элемента $y \in S$ такого, что $y < x$;
- *максимальным*, если не существует элемента $y \in S$ такого, что $x < y$;
- *наименьшим*, если $x \leqslant y$ для любого $y \in S$;
- *наибольшим*, если $y \leqslant x$ для любого $y \in S$.

В табл. 2 указаны минимальные, максимальные, наименьшие и наибольшие элементы пяти чумов, изображенных на рис. 4.

Табл. 2. Типы элементов: примеры

Чум	Минимальные элементы	Максимальные элементы	Наименьшие элементы	Наибольшие элементы
S_1	$\varnothing$	$\{1, 2, 3\}$	$\varnothing$	$\{1, 2, 3\}$
S_2	2,3,5,7,11	7,8,9,10,11,12	нет	нет
S_3	1	нет	1	нет
S_4	нет	нет	нет	нет
S_5	$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$	$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$	нет	нет

Замечание о наименьшем и наибольшем элементах

Если чум содержит наименьший [наибольший] элемент, то этот элемент является единственным минимальным [максимальным] элементом.

Доказательство. Докажем утверждение о минимальных элементах, утверждение о максимальных элементах проверяется аналогично. Пусть x — наименьший элемент чума S и $y \in S$. Тогда $x \leqslant y$. Следовательно, $y \nless x$, и потому элемент x минимален. Предположим, что z — другой минимальный элемент в S. Тогда $x \leqslant z$ (так как x — наименьший элемент) и $x \nless z$ (в силу минимальности z). Следовательно, $x = z$. $\square$

В заключение параграфа упомянем некоторое ослабление понятия частичного порядка.

Определение

Бинарное отношение на множестве S называется *отношением квазипорядка* или просто *квазипорядком*, если оно рефлексивно и транзитивно. Множество, на котором задано отношение квазипорядка, называется *квазиупорядоченным*.

Ясно, что любой порядок, как и любое отношение эквивалентности, является квазипорядком. Обратное неверно. Естественный пример отношения квазипорядка, не являющегося ни отношением порядка, ни эквивалентностью, — это отношение делимости на множестве $\mathbb{Z}$. Очевидно, что оно рефлексивно и транзитивно. В то же время, оно не симметрично и не антисимметрично. В дальнейшем мы еще встретимся с примером отношения квазипорядка при изучении многочленов (см. § 18).

Определение

Пусть $\langle S;\alpha\rangle$ — квазиупорядоченное множество. Элементы $x, y \in S$ называются *ассоциированными*, если $x\,\alpha\,y$ и $y\,\alpha\,x$.

Например, как легко понять, элементы m и n квазиупорядоченного множества $\langle \mathbb{Z}; |\rangle$ ассоциированы тогда и только тогда, когда $|m| = |n|$.

Замечание о квазиупорядоченном множестве

Пусть $\langle S;\alpha\rangle$ — квазиупорядоченное множество, а σ — отношение ассоциированности на S. Тогда σ — отношение эквивалентности.

Доказательство. Пусть $x, y, z \in S$. Из рефлексивности отношения α вытекает, что $x\,\alpha\,x$, а значит $x\,\sigma\,x$. Следовательно, отношение σ рефлексивно. Далее, если $x\,\sigma\,y$, то $x\,\alpha\,y$ и $y\,\alpha\,x$. Но тогда, очевидно, $y\,\sigma\,x$. Следовательно, σ симметрично. Пусть, наконец, $x\,\sigma\,y$ и $y\,\sigma\,z$. Это означает, что $x\,\alpha\,y$, $y\,\alpha\,x$, $y\,\alpha\,z$ и $z\,\alpha\,y$. Поскольку отношение α транзитивно, из того, что $x\,\alpha\,y$ и $y\,\alpha\,z$ вытекает, что $x\,\alpha\,z$, а из того, что $z\,\alpha\,y$ и $y\,\alpha\,x$ следует, что $z\,\alpha\,x$. Следовательно, $x\,\sigma\,z$, и потому отношение σ транзитивно. $\square$