Числовые ряды

Пусть $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. $\quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

Пусть $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. $\quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Пусть $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. $$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n — *общий член ряда*

Пусть $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. $\qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

a_n — *общий член ряда*

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ — *частичная сумма ряда*

Пусть $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. $\quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

a_n — *общий член ряда*

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ — *частичная сумма ряда*

Определение. Если существует (конечный) предел S частичных сумм ряда, то ряд называется *сходящимся*, а число S называется *суммой ряда*:

Пусть $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. $\quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

a_n — *общий член ряда*

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ — *частичная сумма ряда*

Определение. Если существует (конечный) предел S частичных сумм ряда, то ряд называется *сходящимся*, а число S называется *суммой ряда*:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Пусть $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. $\qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

a_n — *общий член ряда*

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ — *частичная сумма ряда*

Определение. Если существует (конечный) предел S частичных сумм ряда, то ряд называется *сходящимся*, а число S называется *суммой ряда*:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Обозначения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сх.}$$

Пусть $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. $\qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

a_n — *общий член ряда*

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ — *частичная сумма ряда*

Определение. Если существует (конечный) предел S частичных сумм ряда, то ряд называется *сходящимся*, а число S называется *суммой ряда*:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Обозначения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сх.}$$

В противном случае говорят, что *ряд расходится*.

Примеры: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1$

Примеры: $\sum_{n=1}^{\infty} 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

Примеры: $$\sum_{n=1}^{\infty} 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^n.$$

Необходимые условия сходимости ряда

Необходимые условия сходимости ряда

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Необходимые условия сходимости ряда

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $r_n := S - S_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i$ — *остаток ряда*.

Необходимые условия сходимости ряда

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $r_n := S - S_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i$ — *остаток ряда*.

1) $a_n \to 0$;

Необходимые условия сходимости ряда

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $r_n := S - S_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i$ — *остаток ряда*.

1) $a_n \to 0$;
2) $r_n \to 0$.

Необходимые условия сходимости ряда

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $r_n := S - S_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i$ — *остаток ряда*.

1) $a_n \to 0$;
2) $r_n \to 0$.

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n.$

Необходимые и достаточные условия сходимости ряда: критерий Коши

Необходимые и достаточные условия сходимости ряда: критерий Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; : \; \forall n > n(\varepsilon) \; \forall p \in \mathbb{N} \; \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$$

Необходимые и достаточные условия сходимости ряда: критерий Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; : \; \forall n > n(\varepsilon) \, \forall p \in \mathbb{N} \; \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$$

Пример: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$

Простейшие свойства:

Простейшие свойства:

1) Присоединение, удаление, изменение конечного числа элементов ряда не влияет на его сходимость/расходимость.

Простейшие свойства:

1) Присоединение, удаление, изменение конечного числа элементов ряда не влияет на его сходимость/расходимость.
2) Умножение (всех элементов) ряда на $const \neq 0$ не влияет на его сходимость/расходимость.

Простейшие свойства:

1) Присоединение, удаление, изменение конечного числа элементов ряда не влияет на его сходимость/расходимость.
2) Умножение (всех элементов) ряда на $const \neq 0$ не влияет на его сходимость/расходимость.
3) Сумма сходящихся рядов есть сходящийся ряд.

Простейшие свойства:

1) Присоединение, удаление, изменение конечного числа элементов ряда не влияет на его сходимость/расходимость.
2) Умножение (всех элементов) ряда на $const \neq 0$ не влияет на его сходимость/расходимость.
3) Сумма сходящихся рядов есть сходящийся ряд.
4) Члены сходящегося ряда можно группировать в произвольном порядке, не меняя порядка их следования, при этом сумма ряда не изменится.

Теорема. Пусть $\{a_n\}$ — неубывающая последовательность и $a_n \to +\infty$.

Теорема. Пусть $\{a_n\}$ — неубывающая последовательность и $a_n \to +\infty$. Тогда

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$ сходится.

Теорема. Пусть $\{a_n\}$ — неубывающая последовательность и $a_n \to +\infty$. Тогда

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$ сходится.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

1. Ряды с неотрицательными членами

1. Ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n \geqslant 0.$$

1. Ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n \geqslant 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \{S_n\} \text{ — ограничена.}$$

1. Ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n \geqslant 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \{S_n\} \text{ — ограничена.}$$

Теорема (признак сравнения)**.**

1. Ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n \geqslant 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \{S_n\} \text{ — ограничена.}$$

Теорема (признак сравнения)**.** Пусть даны два ряда с неотрицательными членами: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

1. Ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n \geqslant 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \{S_n\} \text{ — ограничена.}$$

Теорема (признак сравнения)**.** Пусть даны два ряда с неотрицательными членами: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ (при $n \geqslant n_0$).

1. Ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n \geqslant 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \{S_n\} \text{ — ограничена.}$$

Теорема (признак сравнения). Пусть даны два ряда с неотрицательными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ (при $n \geqslant n_0$). Тогда

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

1. Ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n \geqslant 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \{S_n\} \text{ — ограничена.}$$

Теорема (признак сравнения)**.** Пусть даны два ряда с неотрицательными членами: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ (при $n \geqslant n_0$). Тогда

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – расходится.

Теорема (признак сравнения в предельной форме).

Теорема (признак сравнения в предельной форме)**.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n,$

Теорема (признак сравнения в предельной форме)**.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ (при $n \geqslant n_0$).

Теорема (признак сравнения в предельной форме)**.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ (при $n \geqslant n_0$). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k \in [0, +\infty]$.

Теорема (признак сравнения в предельной форме)**.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ (при $n \geqslant n_0$). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k \in [0, +\infty]$. Тогда

1) если $0 \leqslant k < \infty$, то $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится $\quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

Теорема (признак сравнения в предельной форме)**.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ (при $n \geqslant n_0$). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k \in [0, +\infty]$. Тогда

1) если $0 \leqslant k < \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $0 < k \leqslant +\infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$– расходится $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$– расходится.

Теорема (признак сравнения в предельной форме)**.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ (при $n \geqslant n_0$). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k \in [0, +\infty]$. Тогда

1) если $0 \leqslant k < \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;
2) если $0 < k \leqslant +\infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$– расходится $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$– расходится.

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$.

Теорема (признак сравнения в предельной форме)**.** Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ (при $n \geqslant n_0$). Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in [0, +\infty]$. Тогда

1) если $0 \leqslant k < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $0 < k \leqslant +\infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$– расходится $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$– расходится.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Примерs: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Теорема (признак сравнения в предельной форме)**.** Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ (при $n \geqslant n_0$). Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in [0, +\infty]$. Тогда

1) если $0 \leqslant k < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $0 < k \leqslant +\infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$– расходится $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$– расходится.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Примерs: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n}$

Теорема (признак сравнения в предельной форме)**.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ (при $n \geqslant n_0$). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k \in [0, +\infty]$. Тогда

1) если $0 \leqslant k < \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $0 < k \leqslant +\infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$– расходится $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$– расходится.

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$.

Примерs: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{x}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\dfrac{x}{n}\right)$.

Теорема (признак Коши).

Теорема (признак Коши)**.** Пусть $a_n \geqslant 0$.

Теорема (признак Коши)**.** Пусть $a_n \geqslant 0$.

1) Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

Теорема (признак Коши)**.** Пусть $a_n \geqslant 0$.

1) Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема (признак Коши)**.** Пусть $a_n \geqslant 0$.

1) Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема (признак Коши в предельной форме)**.**

Теорема (признак Коши)**.** Пусть $a_n \geqslant 0$.

1) Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема (признак Коши в предельной форме)**.** Пусть $a_n \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

Теорема (признак Коши)**.** Пусть $a_n \geqslant 0$.

1) Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема (признак Коши в предельной форме)**.** Пусть $a_n \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

1) Если $q < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

Теорема (признак Коши). Пусть $a_n \geqslant 0$.

1) Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема (признак Коши в предельной форме). Пусть $a_n \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

1) Если $q < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $q > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится;

Теорема (признак Коши)**.** Пусть $a_n \geqslant 0$.

1) Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема (признак Коши в предельной форме)**.** Пусть $a_n \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

1) Если $q < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $q > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится;

3) если $q = 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться.

Теорема (признак Даламбера)**.**

Теорема (признак Даламбера)**.** Пусть $a_n > 0$.

Теорема (признак Даламбера)**.** Пусть $a_n > 0$. Тогда

1) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

Теорема (признак Даламбера)**.** Пусть $a_n > 0$. Тогда

1) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Даламбера)**.** Пусть $a_n > 0$. Тогда

1) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Даламбера в предельной форме)**.**

Теорема (признак Даламбера)**.** Пусть $a_n > 0$. Тогда

1) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Даламбера в предельной форме)**.**
Пусть $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = d$.

Теорема (признак Даламбера)**.** Пусть $a_n > 0$. Тогда

1) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Даламбера в предельной форме)**.**
Пусть $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Тогда

1) если $d < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

Теорема (признак Даламбера)**.** Пусть $a_n > 0$. Тогда

1) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;
2) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Даламбера в предельной форме)**.** Пусть $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Тогда

1) если $d < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;
2) если $d > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится;

Теорема (признак Даламбера)**.** Пусть $a_n > 0$. Тогда

1) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Даламбера в предельной форме)**.**
Пусть $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Тогда

1) если $d < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $d > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится;

3) если $d = 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться.

Примеры: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

Примеры: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Примеры: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}.$$

Теорема (признак Раабе)**.**

Теорема (признак Раабе)**.** Пусть $a_n > 0$.

Теорема (признак Раабе)**.** Пусть $a_n > 0$.

1) Если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \geqslant r > 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

Теорема (признак Раабе)**.** Пусть $a_n > 0$.

1) Если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \geqslant r > 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \leqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Раабе)**.** Пусть $a_n > 0$.

1) Если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \geqslant r > 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \leqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Раабе в предельной форме)**.**

Теорема (признак Раабе). Пусть $a_n > 0$.

1) Если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \geqslant r > 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \leqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Раабе в предельной форме). Пусть $a_n > 0$

Теорема (признак Раабе)**.** Пусть $a_n > 0$.

1) Если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \geqslant r > 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \leqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Раабе в предельной форме)**.** Пусть $a_n > 0$ и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \cdot n = r$.

1) Если $r > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

Теорема (признак Раабе)**.** Пусть $a_n > 0$.

1) Если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \geqslant r > 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \leqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Раабе в предельной форме)**.** Пусть $a_n > 0$ и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \cdot n = r$.

1) Если $r > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $r < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится;

Теорема (признак Раабе)**.** Пусть $a_n > 0$.

1) Если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \geqslant r > 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \leqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Раабе в предельной форме)**.** Пусть $a_n > 0$ и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \cdot n = r$.

1) Если $r > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $r < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится;

3) если $r = 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться.

Теорема (признак Коши–Маклорена (интегральный признак)).

Теорема (признак Коши–Маклорена (интегральный признак))**.** Пусть $a_n \geqslant 0$. Пусть на $[1, +\infty)$ определена функция $f(x)$ такая, что

Теорема (признак Коши–Маклорена (интегральный признак))**.** Пусть $a_n \geqslant 0$. Пусть на $[1, +\infty)$ определена функция $f(x)$ такая, что

a) $f(x) \geqslant 0$;

Теорема (признак Коши–Маклорена (интегральный признак))**.** Пусть $a_n \geqslant 0$. Пусть на $[1, +\infty)$ определена функция $f(x)$ такая, что

a) $f(x) \geqslant 0$;

b) $f(x)$ — невозрастающая;

Теорема (признак Коши–Маклорена (интегральный признак))**.** Пусть $a_n \geqslant 0$. Пусть на $[1, +\infty)$ определена функция $f(x)$ такая, что

a) $f(x) \geqslant 0$;

b) $f(x)$ — невозрастающая;

c) $f(n) = a_n$;

Теорема (признак Коши–Маклорена (интегральный признак))**.** Пусть $a_n \geqslant 0$. Пусть на $[1, +\infty)$ определена функция $f(x)$ такая, что

a) $f(x) \geqslant 0$;
b) $f(x)$ — невозрастающая;
c) $f(n) = a_n$;
d) интегрируема на $[1, A]$ при любом $A > 1$.

Теорема (признак Коши–Маклорена (интегральный признак))**.** Пусть $a_n \geqslant 0$. Пусть на $[1, +\infty)$ определена функция $f(x)$ такая, что

a) $f(x) \geqslant 0$;

b) $f(x)$ — невозрастающая;

c) $f(n) = a_n$;

d) интегрируема на $[1, A]$ при любом $A > 1$.

Тогда, если

1) если $\exists \lim\limits_{A \to +\infty} \int_1^A f(x)\,dx$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

Теорема (признак Коши–Маклорена (интегральный признак))**.** Пусть $a_n \geqslant 0$. Пусть на $[1, +\infty)$ определена функция $f(x)$ такая, что

a) $f(x) \geqslant 0$;

b) $f(x)$ — невозрастающая;

c) $f(n) = a_n$;

d) интегрируема на $[1, A]$ при любом $A > 1$.

Тогда, если

1) если $\exists \lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\,dx$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\,dx = +\infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Коши–Маклорена (интегральный признак))**.** Пусть $a_n \geqslant 0$. Пусть на $[1, +\infty)$ определена функция $f(x)$ такая, что

a) $f(x) \geqslant 0$;
b) $f(x)$ — невозрастающая;
c) $f(n) = a_n$;
d) интегрируема на $[1, A]$ при любом $A > 1$.

Тогда, если

1) если $\exists \lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\,dx$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;
2) если $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\,dx = +\infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Пример: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}.$$

Оценка остатка ряда:

$$F(+\infty) - F(n+1) \leqslant r_n \leqslant F(+\infty) - F(n).$$