22.04.2020 Семке Даниил

Кн-102, МЕН-190207

Матрицы Грама.

Вариант 18

① Вычислить опр-ль Грама, не находя матрицы Грама системы векторов.

$a_1 = (1,0,2,1)$

$a_2 = (0,2,5,2)$

$a_3 = (-2,5,4,0)$

Проверим данную систему на линейную независимость:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$r(A) = 3$ = количеству векторов $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ система лнз.

Найдем $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ - ортогон. систему ~~векторов~~ векторов из A с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта:

$$b_n = a_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(a_n, b_i)}{(b_i, b_i)} \cdot b_i$$

$b_1 = a_1 = (1,0,2,1)$

$$b_2 = (0,2,5,2) - \frac{(0,2,5,2)(1,0,2,1)}{(1,0,2,1)(1,0,2,1)}(1,0,2,1) = (0,2,5,2) - \frac{12}{6}(1,0,2,1) = (-2,2,1,0)$$

$$b_3 = (-2,5,4,0) - \frac{(-2,5,4,0)(1,0,2,1)}{6}(1,0,2,1) - \frac{(-2,5,4,0)(-2,2,1,0)}{9}(-2,2,1,0) =$$

$$= (-2,5,4,0) - (1,0,2,1) - 2(-2,2,1,0) = (1,1,0,-1)$$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, тогда согласно предложению об определителе Грама и процессе ортогонализации: $g_A = g_B = |b_1|^2 \cdot |b_2|^2 \cdot |b_3|^2 = 6 \cdot 9 \cdot 3 = 162$

Ответ: 162

② Найти объем параллелотопа, порожденного векторами, не находя матрицы Грама

$a_1 = (1, 0, 1, -1)$ Проделаем те же действия, что и в пред. задаче:

$a_2 = (2, 1, 0, -1)$ проверим систему на лнз:

$a_3 = (2, 2, 1, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 3 =$ кол-ву векторов $\Rightarrow$ система лнз.

Найдем $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ - орт. систему векторов из A с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта:

$$b_n = a_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(a_n, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i$$

$b_1 = (1, 0, 1, -1)$

$$b_2 = (2, 1, 0, -1) - \frac{(2,1,0,-1)(1,0,1,-1)}{(1,0,1,-1)(1,0,1,-1)}(1,0,1,-1) = (2,1,0,-1) - (1,0,1,-1) = (1, 1, -1, 0)$$

$$b_3 = (2,2,1,0) - \frac{(2,2,1,0)(1,0,1,-1)}{3}(1,0,1,-1) - \frac{(2,2,1,0)(1,1,-1,0)}{3}(1,1,-1,0) =$$

$$= (2,2,1,0) - (1,0,1,-1) - (1,1,-1,0) = (0, 1, 1, 1)$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Согласно предложению об объеме параллелотопа

$$V_A = \sqrt{g_A} = \sqrt{g_B} = |b_1||b_2||b_3| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

Ответ: 27