

Самосопряженные операторы.

01.05.20

Семен Даниил

① Найти ОНБ F оператора A , act. из сб. в. векторов.

КН-102, МЕН-190207
Вариант 18

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (1-\lambda)(1-\lambda) = \\ = (1-2\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) - 2+2\lambda = \\ = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0 \\ -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0 \\ \lambda(\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

Матрица A в F , act. из сб. в. векторов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

Найдем собственные векторы:

$$1) \lambda = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_3 - свобод.

$x_{1,2}$ - зависимы.

ФРП:

	x_1	x_2	x_3
1	1	1	1

$$\begin{cases} x_3 = C \\ x_2 = C \\ x_1 = x_2 = C \end{cases}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_2 = 1$

$$(-5x) + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x_3 = C \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -C \end{cases}$$

ФСР:

	x_1	x_2	x_3
f_1	-1	0	1

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x_3 = C \\ x_2 = -2C \\ x_1 = C \end{cases}$$

ФСР:

	x_1	x_2	x_3
f_1	1	-2	1

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

v_1, v_2, v_3 — попарно ортогональны.
(по лемме о собственных векторах),

тогда нормируем:

$$e_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $F = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$
 $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ — матрица опер. в F.

(№2) Является ли самосопряженным линейный оператор?

$$F = \langle f_1, f_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Возьмем стандартный ^{ортонормированный} базис $E = \langle e_1, e_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Найдем матрицу линейного оператора в E

$$e_1 = (1, 0) = f_1 - f_2$$

$$e_2 = (0, 1) = 0 \cdot f_1 - f_2$$

$$T_{FE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T_{FE}^{-1} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_E = T_{FE}^{-1} A T_{FE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\sim \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -13 & -9 \end{pmatrix} \text{ — не симметрично}$$

\Downarrow
лин. опер. не является
самосопряженным