Поверхностные интегралы

3.1 Замечания к формуле площади поверхности

Пусть Σ — кусочно-гладкая поверхность с кусочно-гладкой границей:

$$\Sigma = \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \qquad (u,v) \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^2, \qquad\qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v).$$

Тогда

$$S(\Sigma) = \iint\limits_{\Delta} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dudv = \iint\limits_{\Delta} |\vec{\mathbf{N}}| \, dudv = \iint\limits_{\Sigma} d\sigma, \qquad \vec{\mathbf{N}} = (A, B, C).$$

Если

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{A}{|\vec{\mathbf{N}}|}, \frac{B}{|\vec{\mathbf{N}}|}, \frac{C}{|\vec{\mathbf{N}}|} \right),$$

то

$$d\sigma = \frac{A}{\cos\alpha} \, dudv = \frac{B}{\cos\beta} \, dudv = \frac{C}{\cos\gamma} \, dudv.$$

В частности,

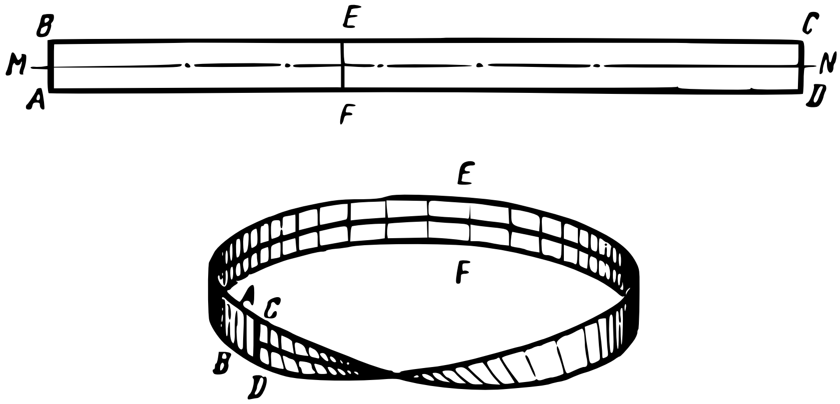
$$\Sigma = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad \vec{\mathbf{N}} = (-f'_x, -f'_y, 1), \quad C = 1, \quad d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma}.$$

$$\Sigma = \begin{cases} x = x \\ y = g(x,z) \\ z = z \end{cases} \qquad \vec{\mathbf{N}} = (-g'_x, 1, -g'_z), \quad B = 1, \quad d\sigma = \frac{dzdx}{\cos\beta}.$$

$$\Sigma = \begin{cases} x = h(y,z) \\ y = y \\ z = z \end{cases} \qquad \vec{\mathbf{N}} = (1, -h'_y, -h'_z), \quad A = 1, \quad d\sigma = \frac{dydz}{\cos\alpha}.$$

3.2 Ориентация (сторона) поверхности

Лист Мёбиуса



4 Поверхностный интеграл 1 рода

Пусть Σ — кусочно-гладкая поверхность с кусочно-гладкой границей:

$$\Sigma = \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \quad (u,v) \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v).$$

Пусть $f(M) = f(x,y,z)$ определена на Σ.
$\Sigma = \bigcup_{i=1}^n \Sigma_i$ — разбиение Σ на части Σ_i кусочно-гладкими кривыми.
$d_i = \sup\{\rho(M,N) |\ M,N \in \Sigma_i\}, \quad d = \max d_i$ — диаметр разбиения.
$M_i \in \Sigma_i$.

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) S(\Sigma_i) \to_{d\to 0} \iint\limits_{\Sigma} f(M)\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, d\sigma.$$

Теорема. Пусть Σ — кусочно-гладкая поверхность с кусочно-гладкой границей, f непрерывна на Σ. Тогда поверхностный интеграл 1 рода может быть вычислен по формуле:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(M)\, d\sigma = \iint\limits_{\Delta} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \sqrt{EG - F^2}\, du dv.$$

5 Поверхностный интеграл 2 рода

Пусть Σ — кусочно-гладкая поверхность с кусочно-гладкой границей:

$$\Sigma = \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \quad (u,v) \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v).$$

Пусть $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — выбранная ориентация поверхности.
Пусть $\mathbf{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ определена на Σ.
$\Sigma = \bigcup_{i=1}^n \Sigma_i$ — разбиение Σ на части Σ_i кусочно-гладкими кривыми.

$d_i = \sup\{\rho(M,N)|\ M,N \in \Sigma_i\}$, $d = \max d_i$ — диаметр разбиения.
$M_i \in \Sigma_i$.

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F},\mathbf{n})(M_i)\cdot S(\Sigma_i) \to_{d\to 0} \iint\limits_{\Sigma} (\mathbf{F},\mathbf{n})\,d\sigma.$$

Обозначения:

$$\iint\limits_{\Sigma} (\mathbf{F},\mathbf{n})\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$$

Поверхностный интеграл 2 рода меняет знак при смене стороны поверхности:

$$\iint\limits_{\Sigma^+} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = -\iint\limits_{\Sigma^-} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy.$$

Теорема. Пусть Σ — кусочно-гладкая поверхность с кусочно-гладкой границей, вектор-функция $\vec{F}$ непрерывна на Σ. Тогда поверхностный интеграл 2 рода может быть вычислен по формуле:

$$\iint\limits_{\Sigma} (\mathbf{F},\mathbf{n})\,d\sigma = (\pm)\iint\limits_{\Delta} (PA + QB + RC)\,dudv,$$

где $P = P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, то же самое — для Q и R.

В частности,

$$\Sigma = \begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = f(x,y), \end{cases} \quad (x,y) \in D_{xy}, \qquad \iint\limits_{\Sigma} R\cos\gamma\,d\sigma = (\pm)\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,f(x,y))\,dxdy$$

6 Формула Остроградского–Гаусса

Пусть V — элементарная замкнутая область в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\Sigma = \partial V$ и $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Σ. Пусть $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в V. Тогда

$$\oiint\limits_{\Sigma^+} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

или

$$\oiint\limits_{\Sigma^+} (\mathbf{F},\mathbf{n})\,d\sigma = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dv.$$

7 Формула Стокса

Пусть V — некоторая область в $\mathbb{R}^3$. Пусть Σ — гладкая ориентированная поверхность с полем нормали $\mathbf{n}$, лежащая в V. Пусть $L = \partial\Sigma$ (ориентации L и Σ согласованы). Пусть P, Q, R непрерывны в V вместе со своими частными производными. Тогда

$$\oint_{L^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

или

$$\oint\limits_{L^+} (\mathbf{F}, \vec{\tau})\, dl = \iint\limits_{\Sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n})\, d\sigma \quad \text{где } \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F},$$

или

$$\oint\limits_{L^+} (\mathbf{F}, \vec{\tau})\, dl = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$