Тест по лин. операторам   Вариант 19   Семке Даниил

КН-102, МЕН-190207

① $\mathbb{R}_3$, $\mathcal{A}(\vec{x}) = (\vec{a}\,\vec{x})\cdot\vec{a}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\mathcal{A}$ – в стандартном базисе?

Станд. базис в $\mathbb{R}_3$:

$e_1 = (1,0,0) \Rightarrow \mathcal{A}(e_1) = 3\cdot(3,-4,5) = (9,-12,15)$

$e_2 = (0,1,0) \Rightarrow \mathcal{A}(e_2) = -4(3,-4,5) = (-12,16,-20)$

$e_3 = (0;0,1) \Rightarrow \mathcal{A}(e_3) = 5(3,-4,5) = (15,-20,25)$

Матрица A линейного оператора $\mathcal{A}$:

$$A = (\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \mathcal{A}(e_3)) = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 15 \\ -12 & 16 & -20 \\ 15 & -20 & 25 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 9 & -12 & 15 \\ -12 & 16 & -20 \\ 15 & -20 & 25 \end{pmatrix}$

② $\mathbb{R}_2$ $\mathcal{A}(X) = AX$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}(e_{11}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = 2e_{11} + 0\cdot e_{12} - 4e_{21} + 0\cdot e_{22}$

$e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}(e_{22}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 0\cdot e_{11} + 2e_{12} + 0\cdot e_{21} - 4e_{22}$

$e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}(e_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 3e_{11} + 0\cdot e_{12} + 5\cdot e_{21} + 0\cdot e_{22}$

$e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}(e_{22}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 0\cdot e_{11} + 3e_{12} + 0\cdot e_{21} + 5e_{22}$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

№3. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & -8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 13 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 13 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

$n = 5$

$\Rightarrow c = n - r = 2$ – число своб. переменных $= d(\mathcal{A})$ $\xRightarrow{\text{Т. о ранге и дефекте}}$

$r = 3$

$r(\mathcal{A}) = \dim \operatorname{Im} = \boxed{5-2=3}$

Ответ: 3

④ D – оператор дифф. в $\mathbb{R}_4[x]$

$p_1 = -1 \Rightarrow D(p_1) = 0$;

$p_2 = x \Rightarrow D(p_2) = 1 = -p_1$;

$p_3 = x^2 \Rightarrow D(p_3) = 2x = 2p_2$;

$p_4 = -x^3 \Rightarrow D(p_4) = -3x^2 = -3p_3$

$p_5 = x^4 \Rightarrow D(p_5) = 4x^3 = -4p_4$

$$[D]_{\text{(p)}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собств. векторы и собств. значения матр. опер. D:

Составим хар-ое ур-ие:
$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Разложим по ~~строке~~ столбцу 2 раза:

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 \\ 0 & -\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^5 = 0 \Rightarrow \lambda = \sqrt[5]{0} = 0$$

собств. значение

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 - x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 2x_3 = 0 \\ 0 \cdot x_1 - 3x_4 = 0 \\ 0 \cdot x_1 - 4x_5 = 0 \\ 0 \cdot x_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = C \\ x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0 \end{cases}$$

При $x \neq 0$ набор $(x_1, \ldots, x_5)$ – собств. вектор.

Возьмем за $x_1 = 1$, тогда собствен. вектор: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ответ: $\lambda = 0$

$\vec{x} = (1, 0, 0, 0, 0)$

D (см. нач. стр.)