Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Необходимые и достаточные условия сходимости интегралов

Теорема (критерий Коши)**.** Интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на Y тогда и только тогда, когда

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)\in(0,b-a)\ \ \forall\,A,B\in(b-\delta,b)\ \ \forall\,y\in Y\qquad \Big|\int_A^B f(x,y)\,dx\Big|<\varepsilon.$$

Теорема (признак Вейерштрасса)**.** Если найдётся такая функция $\varphi(x)$, что

$$|f(x,y)|\leqslant\varphi(x),\quad x\in[a,b),\quad y\in Y,$$

и интеграл $\displaystyle\int_a^b\varphi(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно и абсолютно на Y.

Теорема (признак Абеля)**.** Пусть интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на Y. Пусть функция $g(x,y)$ при каждом $y\in Y$ монотонна по x и

$$\exists\,C>0\ :\ |g(x,y)|\leqslant C,\quad x\in[a,b),\quad y\in Y.$$

Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x,y)g(x,y)\,dx$ сходится равномерно на Y.

Теорема (признак Дирихле)**.** Пусть интегралы $\displaystyle\int_a^A f(x,y)\,dx$ равномерно по $A\in[a,b)$ и $y\in Y$ ограничены. Пусть функция $g(x,y)$ при каждом $y\in Y$ монотонна по x и

$$g(x,y)\overset{Y}{\rightrightarrows}0\quad\text{при}\ \ x\to b-0.$$

Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x,y)g(x,y)\,dx$ сходится равномерно на Y.

Пример. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(ax)}{n^2+x^2}\,dx,\ 0<a_0\leqslant a.$

Пример. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot e^{-ax}\,dx,\ a\geqslant 0.$

Предельный переход под знаком несобственного интеграла

Пример.

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{n}{x^2}e^{-\frac{n}{x}}, & x>0;\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad n\in\mathbb{N}$$

Теорема (о предельном переходе под знаком несобственного интеграла).

Пусть интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$. Пусть $y_0 \in Y'$ и для каждого $A \in [a,+\infty)$

$$f(x,y) \overset{[a,A]}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad y \to y_0.$$

Тогда

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Теорема (о непрерывности несобственного интеграла).

Пусть при каждом $A \in [a,+\infty)$ функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,A]\times[c,d]$ и пусть интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда $I(y) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ непрерывна на $[c,d]$.

Теорема (о дифференцируемости несобственного интеграла).

Пусть при каждом $y \in [c,d]$ функция $f(x,y)$ непрерывна по x на $[a,+\infty)$, а функция $f'_y(x,y)$ непрерывна на $[a,+\infty)\times[c,d]$. Пусть интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится при каждом $y \in [c,d]$, а интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx, \quad y \in [c,d].$$

Теорема (об интегрируемости несобственного интеграла).

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,+\infty)\times[c,d]$ и интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно $y \in [c,d]$. Тогда

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Теорема (о перестановке двух несобственных интегралов). Пусть

(a) функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$,

(b) интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно $y \geqslant c$,

(c) интеграл $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ сходится равномерно относительно $x \geqslant a$,

(d) один из интегралов $\displaystyle\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x,y)|\,dy$ или $\displaystyle\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx$ определён.

Тогда

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy.$$