Криволинейные интегралы

1 Криволинейный интеграл по длине дуги (интеграл 1 рода)

Пусть $\breve{AB}$ — пространственная спрямляемая кривая и функция $f(x, y, z)$ определена на $\breve{AB}$.

$A = M_0 \prec M_1 \prec M_2 \prec \ldots \prec M_n = B$ — *разбиение* кривой $\breve{AB}$ на *частичные дуги* $M_i\breve{M}_{i+1}$ в направлении от точки A к точке B

$\Delta l_i := |M_i\breve{M}_{i+1}|$ — *длина частичной дуги* $M_i\breve{M}_{i+1}$

$\lambda = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} \{\Delta l_i\}$ — *диаметр разбиения*

$\forall\, N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in M_i\breve{M}_{i+1}$

$\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(N_i)\Delta l_i$ — *интегральная сумма*

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(N)\, dl := \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(N_i)\Delta l_i$$

— *криволинейный интеграл 1 рода* (или *интеграл по длине дуги*) от функции f по кривой $\breve{AB}$.

Обозначения:

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(N)\, dl = \int\limits_{\breve{AB}} f(x, y, z)\, dl.$$

Теорема. Если f непрерывна на спрямляемой кривой $\breve{AB}$, то она интегрируема по этой кривой.

Вычисление криволинейного интеграла 1 рода

Теорема. Пусть

$$\breve{AB}: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \qquad t \in [\alpha, \beta], \\ z = \chi(t), \end{cases}$$

— гладкая кривая, где $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha))$ и $B(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta))$. Пусть функция f непрерывна на $\breve{AB}$. Тогда

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(N)\,dl = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\,dt.$$

В частности, если

$$\breve{AB}: \begin{cases} x = x, \\ y = y(x), \qquad x \in [a, b], \end{cases}$$

— плоская кривая, то

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(N)\,dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx.$$

Свойства криволинейного интеграла 1 рода

1) независимость от выбора направления на кривой: $\int\limits_{\smile{AB}} f(N)\,dl = \int\limits_{\smile{BA}} f(N)\,dl$

2) линейность

3) аддитивность: $\int\limits_{\smile{AB}} f(N)\,dl + \int\limits_{\smile{BC}} f(N)\,dl = \int\limits_{\smile{AC}} f(N)\,dl$

4) монотонность: если f — неотрицательная функция, то $\int\limits_{\smile{AB}} f(N)\,dl \geqslant 0$

5) оценка модуля: $\Big|\int\limits_{\smile{AB}} f(N)\,dl\Big| \leqslant \int\limits_{\smile{AB}} |f(N)|\,dl$

6) теорема о среднем: если f непрерывна на кривой $\overset{\smile}{AB}$, то $\int\limits_{\smile{AB}} f(N)\,dl = f(N^*)\cdot L$

2 Криволинейный интеграл от вектор-функции (интеграл 2 рода)

Пусть $\breve{AB}$ — пространственная спрямляемая кривая.

Пусть на $\breve{AB}$ определена вектор-функция $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$.

$A = M_0 \prec M_1 \prec M_2 \prec \ldots \prec M_n = B$ — *разбиение* кривой $\breve{AB}$ на *частичные дуги* $M_i\breve{M}_{i+1}$ в направлении от точки A к точке B

$M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$

$\Delta x_i := x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i := y_{i+1} - y_i, \quad \Delta z_i := z_{i+1} - z_i$ — координаты вектора $\overrightarrow{M_iM}_{i+1}$

$\Delta l_i := |M_i\breve{M}_{i+1}|$ — *длина частичной дуги* $M_i\breve{M}_{i+1}$

$\lambda = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} \{\Delta l_i\}$ — *диаметр разбиения*

$\forall\, N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in M_i\breve{M}_{i+1}$

$\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (\mathbf{F}(N_i), \overrightarrow{M_iM}_{i+1})$ — *интегральная сумма*

$\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} P(N_i)\Delta x_i + \sum\limits_{i=0}^{n-1} Q(N_i)\Delta y_i + \sum\limits_{i=0}^{n-1} R(N_i)\Delta z_i$

$$I := \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{F}(N_i), \overrightarrow{M_iM}_{i+1})$$

— *интеграл от вектор–функции* $\mathbf{F}$ по кривой $\breve{AB}$ или *(общий) криволинейный интеграл 2 рода* от функций P, Q, R по кривой $\breve{AB}$ (или *интеграл по координатам*).

Обозначения:

$$\int\limits_{\breve{AB}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\breve{AB}} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz,$$

где $d\mathbf{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор переменной точки кривой $\breve{AB}$.

Вычисление криволинейного интеграла от вектор-функции

Теорема. Пусть

$$\breve{AB}: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \qquad t \in [\alpha, \beta], \\ z = \chi(t), \end{cases}$$

— гладкая кривая, где $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha))$ и $B(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta))$. Пусть функции P, Q, R непрерывны на $\breve{AB}$. Тогда

$$\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int_\alpha^\beta \Big(P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\cdot\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\cdot\psi'(t)+R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\cdot\chi'(t)\Big)\,dt.$$

В частности, если

$$\breve{AB}: \begin{cases} x = x, \\ y = y(x), \qquad x \in [a, b], \end{cases}$$

— плоская кривая, то

$$\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_a^b \Big(P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)\Big)\,dx.$$

Свойства криволинейного интеграла 2 рода

1) смена знака интеграла при изменении направления на кривой:

$$\int\limits_{\breve{AB}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = -\int\limits_{\breve{BA}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$$

2) линейность

3) аддитивность

4) оценка модуля: $\Big|\int\limits_{\breve{AB}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r})\Big| \leqslant \int\limits_{\breve{AB}} |\mathbf{F}(N)|\, dl$

Связь между криволинейными интегралами 1 и 2 рода

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \int\limits_{\breve{AB}} \Big(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\Big) dl$$

где $\vec{\tau} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$ — касательный вектор к кривой $\breve{AB}$.

$$\int\limits_{\breve{AB}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\breve{AB}} (\mathbf{F}, \vec{\tau}) dl$$