§ 46. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

В этом параграфе рассматриваются еще пять квадрик в пространстве: эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды и эллиптический и гиперболический параболоиды.

Определение

Эллипсоидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где $a, b, c > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллипсоида.

Отметим, что при $a = b = c$ приведенное только что уравнение равносильно уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, которое, как известно из школьного курса, задает сферу радиуса a с центром в начале координат. Таким образом,

- сфера является частным случаем эллипсоида (подобно тому, как окружность есть частный случай эллипса).

Исследуем форму эллипсоида, применив так называемый *метод сечений*. Суть этого метода состоит в следующем.

Метод сечений

Рассмотрим сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям (эти плоскости имеют уравнения вида $x = h$, $y = h$ и $z = h$, где h — некоторая константа). В сечениях получаются кривые, вид которых мы распознаем. Проведя достаточно много таких сечений, мы в итоге получим представление о форме поверхности.

Прежде чем начинать исследование формы эллипсоида методом сечений, договоримся о следующем. На протяжении всего этого параграфа мы будем рассматривать кривые, получающиеся в сечении той или иной поверхности плоскостями с уравнениями вида $w = h$, где w — одна из букв x, y и z. Для экономии места мы вместо записи общих уравнений полученнной кривой вида

$$\begin{cases} F(u, v) = 0, \\ w = h, \end{cases}$$

где u, v и w — буквы такие, что $\{u, v, w\} = \{x, y, z\}$, будем писать только уравнение $F(u, v) = 0$ и называть его уравнением полученной кривой внутри плоскости $w = h$ (или просто «плоскостным» уравнением этой кривой).

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостями вида $z = h$. Получим кривую, которая внутри этой плоскости задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

При $|h| > c$ эта кривая является пустым множеством, при $|h| = c$ — точкой, а при $|h| < c$ — эллипсом с «плоскостным» уравнением

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1.$$

При $h = 0$ полуоси этого эллипса имеют наибольшие значения (равные a и b), с ростом $|h|$ они уменьшаются и стремятся к 0 при $|h| \to c$. Абсолютно аналогично устроены сечения эллипсоида плоскостями вида $x = h$ и $y = h$ (надо только соответствующим образом заменить неизвестные и параметры a, b, c в уравнении получающегося эллипса). Окончательно представление о форме эллипсоида дает рис. 1 на следующем слайде.

Таким образом, можно сказать, что эллипсоид — это «вытянутая» (или, наоборот, «сплющенная» — смотря вдоль какой оси смотреть) сфера. Говоря нематическим языком, можно сказать, что эллипсоид имеет форму яйца.

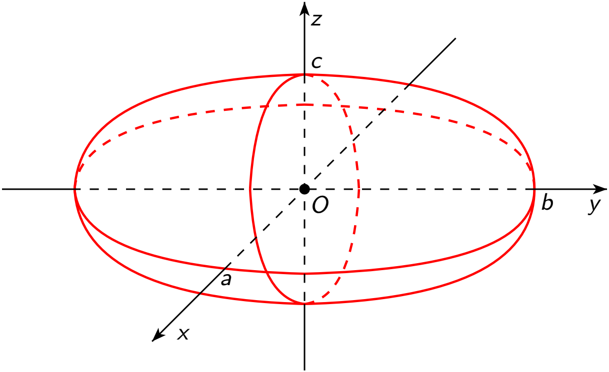

Рис. 1. Эллипсоид

Определение

Однополостным гиперболоидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a, b, c > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* однополостного гиперболоида.

Изучим форму этой поверхности методом сечений. В сечении плоскостью $z = h$ получается эллипс с полуосями $a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$. Значения полуосей минимальны при $h = 0$ и возрастают с ростом $|h|$.

В сечении плоскостью $x = h$ получается:

- при $|h| < a$ — гипербола, задаваемая внутри этой плоскости уравнением
$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} = 1;$$
действительной и мнимой осями гиперболы являются проекции осей Oy и Oz соответственно на плоскость $x = h$, полуоси гиперболы максимальны при $h = 0$ и убывают с ростом $|h|$;
- при $h = \pm a$ — пара пересекающихся прямых, задаваемых внутри плоскости $x = h$ уравнениями $y = \frac{b}{c} \cdot z$ и $y = -\frac{b}{c} \cdot z$;
- при $|h| > a$ — гипербола, задаваемая «плоскостным» уравнением
$$\frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{a^2} - 1\right)} - \frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{a^2} - 1\right)} = 1;$$
действительной и мнимой осями гиперболы являются проекции осей Oz и Oy соответственно на плоскость $x = h$; полуоси гиперболы возрастают с ростом $|h|$.

Наконец, сечения плоскостями вида $y = h$ устроены аналогично сечениям плоскостями вида $x = h$. В целом однополостный гиперболоид выглядит так, как показано на рис. 2 на следующем слайде.

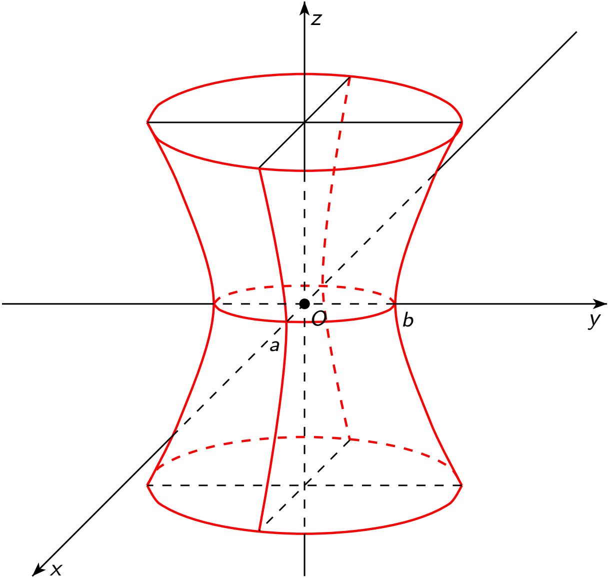

Рис. 2. Однополостный гиперболоид

Определение

Двуполостным гиперболоидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

где $a, b, c > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* двуполостного гиперболоида.

Как и предыдущих случаях, изучим форму этой поверхности методом сечений. В сечении плоскостью $z = h$ получается кривая, которая внутри этой плоскости задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{h^2}{c^2}$. Если $|h| < c$, то эта кривая представляет собой пустое множество; если $|h| = c$, то наша кривая является точкой; если же $|h| > c$, то эта кривая является эллипсом с «плоскостным» уравнением

$$\frac{x^2}{a^2\left(-1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(-1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1,$$

полуоси которого растут с ростом $|h|$.

В сечении плоскостями $x = h$ и $y = h$ получаются гиперболы с «плоскостными» уравнениями

$$\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right)} - \frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right)} = 1$$

и

$$\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right)} - \frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right)} = 1$$

соответственно, полуоси которых минимальны при $h = 0$ (т. е. при сечении координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$) и растут с ростом $|h|$.

В результате получается поверхность, изображенная на рис. 3 на следующем слайде. Отметим, что эта поверхность состоит из двух частей, что и объясняет слово «двуполостный» в ее названии (аналогичное происхождение имеет слово «однополостный» в названии предыдущей поверхности).

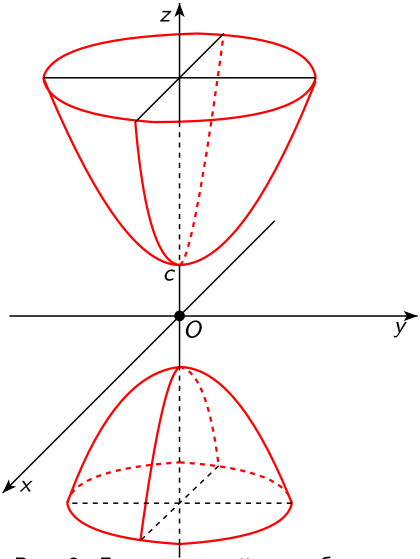

Рис. 3. Двуполостный гиперболоид

Определение

Эллиптическим параболоидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

где $a, b > 0$ и $a \geqslant b$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллиптического параболоида.

В сечении этой поверхности плоскостью $z = h$ получается:

- при $h < 0$ — пустое множество;
- при $h = 0$ — точка (начало координат);
- при $h > 0$ — эллипс с «плоскостным» уравнением

$$\frac{x^2}{2ha^2} + \frac{y^2}{2hb^2} = 1,$$

полуоси которого растут с ростом h.

В сечении плоскостью $y = h$ получается кривая с «плоскостным» уравнением

$$x^2 = 2a^2\left(z - \frac{h^2}{2b^2}\right)$$

Это парабола с параметром a^2, ветви которой направлены вверх, т. е. в положительном направлении оси Oz. При $h = 0$ ее вершина совпадает с началом координат, с увеличением $|h|$ она поднимается вдоль оси Oz.

Аналогичным образом устроено сечение плоскостью $x = h$: это парабола с «плоскостным» уравнением

$$y^2 = 2b^2\left(z - \frac{h^2}{2a^2}\right),$$

параметр которой равен b^2, ветви направлены в положительном направлении оси Oz, а вершина совпадает с началом координат при $h = 0$ и поднимается вдоль оси Oz с ростом $|h|$.

Получающаяся поверхность изображена на рис. 4 на следующем слайде.

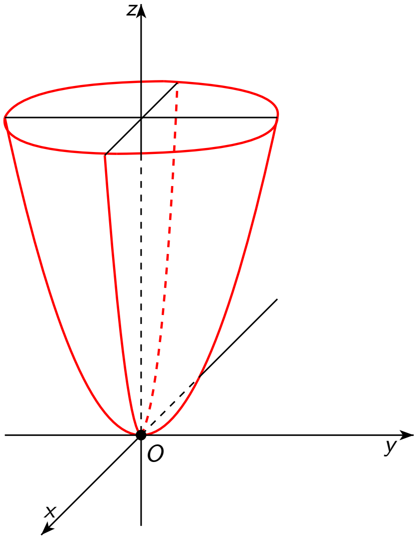

Рис. 4. Эллиптический параболоид

Определение

Гиперболическим параболоидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

где $a, b > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* гиперболического параболоида.

Рассмотрим сечение этой поверхности плоскостью $z = h$. Получим кривую, которая внутри этой плоскости имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h$. При $h = 0$ в сечении получается пара пересекающихся прямых, которые в плоскости Oxy задаются уравнениями $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$. При $h > 0$ наше сечение является гиперболой с «плоскостным» уравнением

$$\frac{x^2}{2a^2h} - \frac{y^2}{2b^2h} = 1,$$

у которой ортогональные проекции осей Ox и Oy на плоскость $z = h$ являются действительной и мнимой осью соответственно, а полуоси гиперболы растут с ростом h.

При $h < 0$ также получается гипербола, только здесь полуоси гиперболы «меняются ролями» (по сравнению со случаем $h > 0$), а ее полуоси растут с убыванием h.

Рассмотрим теперь сечение гиперболического параболоида плоскостью $y = h$. Получим кривую, задаваемую внутри плоскости уравнением

$$x^2 = 2a^2\left(z + \frac{h^2}{2b^2}\right).$$

Это парабола с параметром a^2, ветви которой направлены вверх, т. е. в положительном направлении оси Oz. При $h = 0$ ее вершина совпадает с началом координат, с увеличением $|h|$ она поднимается вдоль оси Oz.

Аналогичная картина получается при сечении плоскостью $x = h$: вновь возникает парабола, которая теперь имеет «плоскостное» уравнение

$$y^2 = -2b^2\left(z - \frac{h^2}{2a^2}\right).$$

Ее параметр равен b^2, ветви параболы направлены вниз (в отрицательном направлении оси Oz). При $h = 0$ вершина параболы совпадает с началом координат, а с увеличением $|h|$ она опускается вдоль оси Oz.

В результате получается поверхность, изображенная на рис. 5 на следующем слайде. Используя нематематическую терминологию, можно сказать, что она имеет форму седла.

Гиперболический параболоид (рисунок)

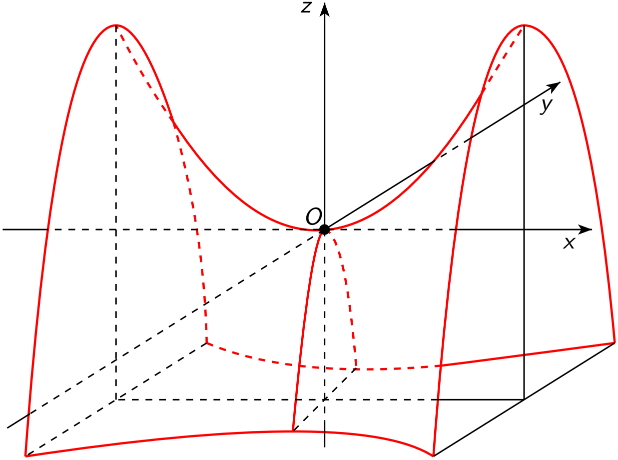

Рис. 5. Гиперболический параболоид