

Глава VI. Векторные пространства

§ 22. Векторное пространство, линейная зависимость и независимость векторов

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определения

Пусть F — произвольное поле. **Векторным** (или **линейным**) **пространством** над полем F называется произвольное непустое множество V на котором заданы бинарные операции сложения и, для каждого элемента $t \in F$, унарная операция умножения на t , удовлетворяющие следующим условиям, которые называются **аксиомами векторного пространства**:

- 1) если $x, y \in V$, то $x + y = y + x$ (сложение **коммутативно**);
- 2) если $x, y, z \in V$, то $(x + y) + z = x + (y + z)$ (сложение **ассоциативно**);
- 3) существует элемент $0 \in V$ такой, что $x + 0 = x$ для любого $x \in V$;
- 4) для любого $x \in V$ существует $y \in V$ такой, что $x + y = 0$;
- 5) если $x, y \in V$, а $t \in F$, то $t(x + y) = tx + ty$;
- 6) если $x \in V$, а $t, s \in F$, то $(t + s)x = tx + sx$;
- 7) если $x \in V$, а $t, s \in F$, то $t(sx) = (ts)x$;
- 8) если $x \in V$, то $1 \cdot x = x$.

Элементы множества V называются **векторами**. Поле F иногда будет называться **основным** полем.

- Векторное пространство V над полем F можно рассматривать как универсальную алгебру в сигнатуре, состоящей из одной бинарной операции (сложения векторов) и множества унарных операций умножения на элементы поля F (по одной операции для каждого $t \in F$). При этом, как показывают аксиомы 1)–4), $\langle V; + \rangle$ — абелева группа. Нейтральный элемент этой группы (вектор $\mathbf{0}$) называется *нулевым вектором*. Вектор, противоположный к вектору \mathbf{a} , обозначается через $-\mathbf{a}$.

Приведем примеры векторных пространств.

Пример 1. Пусть V — множество всех обычных («геометрических») векторов трехмерного физического пространства с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на (действительное) число. Все аксиомы векторного пространства в этом случае выполнены; в частности, роль нулевого вектора $\mathbf{0}$ играет вектор $\vec{0}$ (см. § 10). Поэтому V является векторным пространством над полем \mathbb{R} . Векторным пространством над \mathbb{R} будет также множество всех векторов (в обычном смысле этого слова), коллинеарных некоторой плоскости или некоторой прямой.

- Таким образом, свойства векторов в векторном пространстве являются обобщением свойств обычных, «геометрических» векторов. Именно этим и объясняется и термин «векторное пространство», и использование термина «вектор» применительно к элементам произвольного векторного пространства.

Пример 2. Пусть F — произвольное поле, а n — произвольное натуральное число. Обозначим через F_n множество всевозможных упорядоченных последовательностей вида $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$. На множестве F_n введем операции сложения и умножения на скаляр. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in F_n$, а $t \in F$. Положим

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad \text{и} \quad tx = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n).$$

Легко проверяется, что множество F_n с такими операциями является векторным пространством (роль нулевого вектора играет последовательность $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$). Это пространство называют *пространством строк длины n над полем F* или просто *пространством строк*. Оно играет особую роль в теории векторных пространств. Объяснение этому будет дано в конце следующего параграфа. Скаляры x_1, x_2, \dots, x_n будем называть *компонентами* вектора x .

- Пространство F_1 , т. е. множество всех последовательностей вида (x_1) , где $x_1 \in F$, естественно отождествить с полем F . Таким образом, любое поле можно рассматривать как векторное пространство над самим собой. Нулевым вектором этого пространства является нуль поля.

При $n = 1, 2, 3$ пространство \mathbb{R}_n имеет естественную геометрическую интерпретацию. Предположим, что в обычном трехмерном пространстве зафиксирован некоторый базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Тогда произвольному вектору \vec{x} из этого пространства можно поставить в соответствие упорядоченную тройку чисел (x_1, x_2, x_3) — координат вектора \vec{x} в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Эта тройка чисел является элементом пространства \mathbb{R}_3 . Отображение f из обычного трехмерного пространства в пространство \mathbb{R}_3 , заданное правилом $f(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3)$, является изоморфизмом (см. замечание о координатах векторов $\vec{x} + \vec{y}$ и $t\vec{x}$ в § 10). Таким образом,

!! пространство \mathbb{R}_3 изоморфно обычному («физическому») трехмерному пространству. Аналогично, пространство \mathbb{R}_2 изоморфно плоскости, а пространство \mathbb{R}_1 — прямой в обычном трехмерном пространстве.

Примеры векторных пространств: пространство многочленов и пространство функций

Пример 3. Рассмотрим множество $F[x]$ всех многочленов над полем F . В § 18 была определена операция сложения многочленов. Для всякого $t \in F$ определим операцию умножения многочлена на скаляр t правилом: если $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in F[x]$, то $tf = ta_n x^n + ta_{n-1} x^{n-1} + \dots + ta_0$. Выполнимость всех аксиом векторного пространства легко проверяется (роль нулевого вектора при этом играет многочлен 0). Таким образом, множество $F[x]$ является векторным пространством. Оно называется *пространством многочленов*. Для всякого натурального n обозначим через $F_n[x]$ множество всех многочленов степени $\leq n$ над полем F . Ясно, что $F_n[x]$ также будет векторным пространством относительно сложения многочленов и умножения многочлена на скаляры из F .

Пример 4. Рассмотрим множество всех функций от одной переменной из \mathbb{R} в \mathbb{R} . Введем операции сложения функций и умножения функции на число стандартным образом: если f и g — две функции, а $t \in \mathbb{R}$, то $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(tf)(x) = t \cdot f(x)$ для всякого $x \in \mathbb{R}$. Ясно, что эти операции удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства (в качестве нулевого вектора выступает функция, значение которой при любом x равно 0). Это векторное пространство называется *пространством функций*.

Примеры векторных пространств: пространство решений однородной системы линейных уравнений

Пример 5. Рассмотрим произвольную однородную систему линейных уравнений с n неизвестными над полем F и обозначим через V множество всех ее частных решений. Ясно, что $V \subseteq F_n$. Из теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений (см. § 6) вытекает, что операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр, определенные в пространстве F_n , являются и операциями в V . Все аксиомы векторного пространства для множества V с этими операциями выполнены (в качестве нулевого вектора выступает нулевое решение системы). Таким образом, множество V является векторным пространством, которое называется *пространством решений однородной системы*.

Примеры векторных пространств: пространство матриц и нулевое пространство

В § 4 была введена операция сложения матриц, а в § 6 — операция умножения матрицы на скаляр.

Пример 6. Пусть F — поле, а m и n — натуральные числа. Множество $F^{m \times n}$ с операциями сложения матриц и умножения матриц на скаляры из F является векторным пространством, которое называется *пространством матриц размера $m \times n$* . Нулевым вектором этого пространства является нулевая матрица размера $m \times n$.

Пример 7. Пусть V — произвольное множество, состоящее из одного элемента \mathbf{a} . Операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр в таком множестве вводятся просто: $\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ и $t \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ для любого t . Ясно, что все аксиомы векторного пространства выполняются. Таким образом, V можно рассматривать как векторное пространство. При этом его единственный элемент \mathbf{a} будет нулевым вектором. Такое пространство называется *нулевым*.

Когда произведение скаляра на вектор равно нулевому вектору?

Укажем одно полезное свойство операций в векторном пространстве.

Лемма о равенстве $tx = \mathbf{0}$

Пусть x — произвольный вектор из векторного пространства, а t — произвольный скаляр. Равенство $tx = \mathbf{0}$ выполнено тогда и только тогда, когда либо $t = 0$, либо $x = \mathbf{0}$.

Доказательство. Достаточность. Ясно, что

$$0 \cdot x = (t - t)x = tx - tx = \mathbf{0},$$

$$t \cdot \mathbf{0} = t(x - x) = tx - tx = \mathbf{0}.$$

Необходимость. Пусть $tx = \mathbf{0}$ и $t \neq 0$. Из сказанного в предыдущем абзаце вытекает, что $t^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Умножая обе части равенства $tx = \mathbf{0}$ на t^{-1} , получаем, что $x = \mathbf{0}$. □

Из леммы о равенстве $tx = \mathbf{0}$ вытекает

Замечание о числе векторов в векторном пространстве

Всякое ненулевое векторное пространство V над бесконечным полем F состоит из бесконечного числа векторов.

Доказательство. Пусть x — ненулевой вектор из V , а t_1 и t_2 — различные скаляры из F . Поскольку $t_1 - t_2 \neq 0$, из леммы о равенстве $tx = \mathbf{0}$ вытекает, что $(t_1 - t_2)x \neq \mathbf{0}$, откуда $t_1x \neq t_2x$. Поскольку поле F бесконечно, получаем, что бесконечным является уже множество векторов $\{tx \mid t \in F\}$, а тем более и все пространство V . □

Линейная комбинация векторов. Линейно зависимые и независимые системы векторов

Перейдем к понятиям, которые будут играть весьма важную роль в дальнейшем.

Определения

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — система векторов из векторного пространства V над полем F , а $t_1, t_2, \dots, t_k \in F$. Вектор вида

$$t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k \quad (1)$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Линейная комбинация (1) называется *тривиальной*, если $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$, и *нетривиальной*, если хотя бы один из скаляров t_1, t_2, \dots, t_k отличен от нуля. Если вектор \mathbf{b} является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, то говорят, что \mathbf{b} *линейно выражается* через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, и *линейно независимыми* в противном случае, т. е. если любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нулевому вектору.

Линейная зависимость и независимость в обычном пространстве (1)

Как отмечалось выше, плоскость можно отождествить с пространством \mathbb{R}_2 , а трехмерное физическое пространство — с пространством \mathbb{R}_3 . Оказывается, что введенные только что понятия линейной зависимости и независимости векторов в этих двух частных случаях равносильны некоторым хорошо знакомым нам понятиям.

Замечание о линейной зависимости на плоскости и в трехмерном пространстве

- а) Два вектора на плоскости или в трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.
- б) Три вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство. а) Если векторы \vec{a} и \vec{b} линейно зависимы, то $p\vec{a} + q\vec{b} = \vec{0}$ для некоторых скаляров p и q , хотя бы один из которых отличен от 0. Пусть, без ограничения общности, $p \neq 0$. Тогда $\vec{a} = -\frac{q}{p} \cdot \vec{b}$, и векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны по критерию коллинеарности векторов (см. § 10).

Предположим теперь, что векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны. Если $\vec{b} = \vec{0}$, то $0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = \vec{0}$. Если же $\vec{b} \neq \vec{0}$, то по критерию коллинеарности $\vec{a} = t\vec{b}$ для некоторого t , т. е. $1 \cdot \vec{a} - t\vec{b} = \vec{0}$. В обоих случаях получаем, что векторы \vec{a} и \vec{b} линейно зависимы.

6) Если векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} линейно зависимы, то $p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \vec{0}$ для некоторых скаляров p , q и r , хотя бы один из которых отличен от 0. Пусть, без ограничения общности, $p \neq 0$. Тогда $\vec{a} = -\frac{q}{p} \cdot \vec{b} - \frac{r}{p} \cdot \vec{c}$. Это значит, что вектор \vec{a} лежит в той плоскости, которой принадлежат векторы \vec{b} и \vec{c} , и потому векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны. Предположим теперь, что векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны. Если $\vec{c} = \vec{0}$, то $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Если $\vec{c} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \parallel \vec{c}$, то по критерию коллинеарности векторов $\vec{b} = t\vec{c}$ для некоторого t , и потому $0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} - t\vec{c} = \vec{0}$. Наконец, если $\vec{b} \nparallel \vec{c}$, то векторы \vec{b} и \vec{c} образуют базис той плоскости, в которой лежат векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . По теореме о разложении вектора по базису на плоскости (см. § 10) $\vec{c} = t\vec{a} + s\vec{b}$ для некоторых скаляров t и s , откуда $t\vec{a} + s\vec{b} - 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Во всех трех случаях получаем, что векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} линейно зависимы. \square

Пример линейно независимой системы векторов

Приведем пример линейно независимой системы векторов в пространстве F_n , которая будет многократно возникать и играть особую роль в дальнейшем.

Положим $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$.

1-е замечание о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$

Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независима.

Доказательство. Предположим, что $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ для некоторых $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$. Очевидно, что

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Таким образом, $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{0}$, т. е. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Мы доказали, что если какая-то линейная комбинация векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ равна нулевому вектору, то эта комбинация тривиальна. □

В процессе доказательства этого замечания фактически доказано следующее полезное для дальнейшего утверждение.

2-е замечание о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$

Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольный вектор из пространства F_n , то $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. □

Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов (1)

Отметим несколько простых свойств линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

Лемма о системе векторов, содержащей нулевой вектор

Если среди векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ имеется нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Тогда

$$0 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_{i-1} + 1 \cdot \mathbf{a}_i + 0 \cdot \mathbf{a}_{i+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Лемма доказана. □

Лемма о подсистеме линейно независимой системы векторов

Подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима. Если к линейно зависимой системе векторов добавить произвольную конечную систему векторов, то расширенная система векторов также будет линейно зависимой.

Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов (2)

Доказательство. Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы. Выберем произвольное подмножество этой системы векторов. Для простоты обозначений будем считать, что мы взяли сколько-то первых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, где $m \leq k$ (в противном случае мы всегда можем перенумеровать исходные векторы). Предположим, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы, т. е. что существуют скаляры t_1, t_2, \dots, t_m , по крайней мере один из которых отличен от нуля, такие, что $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$. Тогда

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m + 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Поскольку среди скаляров t_1, t_2, \dots, t_m хотя бы один отличен от нуля, последнее равенство противоречит линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Первое утверждение леммы доказано.

Пусть теперь система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ линейно зависима, т. е. существует нетривиальная линейная комбинация $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m$ этих векторов, равная нулевому вектору. Добавим к исходной системе векторы $\mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_k$. Тогда

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m + 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Следовательно, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы.



Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов (3)

Лемма о добавлении вектора к линейно независимой системе векторов

Если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы, а векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ линейно зависимы, то вектор \mathbf{b} линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Доказательство. По условию существуют скаляры t_1, t_2, \dots, t_k, s , по крайней мере один из которых не равен нулю такие, что

$$t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k + s \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Если $s = 0$, то $t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ и по крайней мере один из скаляров t_1, t_2, \dots, t_k отличен от нуля. Это, однако, противоречит линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Следовательно, $s \neq 0$, и потому $\mathbf{b} = -\frac{t_1}{s} \cdot \mathbf{a}_1 - \frac{t_2}{s} \cdot \mathbf{a}_2 - \dots - \frac{t_k}{s} \cdot \mathbf{a}_k$. □

Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов (4)

Критерий линейной зависимости

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через остальные.

Доказательство. Необходимость. Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы, т. е. $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ для некоторых скаляров t_1, t_2, \dots, t_k , не все из которых равны нулю. Пусть $t_i \neq 0$. Тогда

$$\mathbf{a}_i = -\frac{t_1}{t_i} \cdot \mathbf{a}_1 - \frac{t_2}{t_i} \cdot \mathbf{a}_2 - \dots - \frac{t_{i-1}}{t_i} \cdot \mathbf{a}_{i-1} - \frac{t_{i+1}}{t_i} \cdot \mathbf{a}_{i+1} - \dots - \frac{t_k}{t_i} \cdot \mathbf{a}_k,$$

т. е. вектор \mathbf{a}_i линейно выражается через остальные.

Достаточность. Если вектор \mathbf{a}_i линейно выражается через остальные, т. е. $\mathbf{a}_i = r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2 + \dots + r_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + r_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \dots + r_k\mathbf{a}_k$ для некоторых скаляров $r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_k$, то

$$r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2 + \dots + r_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} - 1 \cdot \mathbf{a}_i + r_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \dots + r_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0},$$

и потому векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы. □