Вариант 18

Семке Даниил
ИУ4-102, МСН-190207

① Существует ли скалярное произведение в R_2 по формулам:

$$x = (x_1, x_2) \qquad (x \cdot y) = 2x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 3x_2 y_2$$
$$y = (y_1, y_2)$$

Проверим, выполняются ли аксиомы скалярного произведения?

① $xy = yx$ (коммутативность), т.к. мы в пр-ве евклидовом.

$x \circ y =$
$(x, y) = 2x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 3x_2 y_2 = 2y_1 x_1 - 2y_1 x_2 - 2y_2 x_1 + 3y_2 \cdot x_2 = (y, x) = y \circ x$

мы воспользовались ~~ассоциативностью~~ коммутативностью по сложению и умножению. в R

② $\forall \alpha \in R : (\alpha x) y = \alpha (xy)$

$(\alpha x) y = 2(\alpha x_1) y_1 - 2(\alpha x_1) y_2 - 2(\alpha x_2) y_1 + 3(\alpha x_2) y_2 = 2\alpha (x_1 y_1) - 2\alpha (x_1 y_2) -$
$- 2\alpha (x_2 y_1) + 3\alpha (x_2 y_2) = \alpha (xy) = \alpha (2x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 3 x_2 y_2) =$

воспользовались ассоциативностью $= \alpha (xy)$
по умножению.

③ $(x + y) \bar{z} = x\bar{z} + y\bar{z}$

$((x_1 + y_1), (x_2 + y_2)) \bar{z} = 2 (x_1 + y_1) z_1 - 2 (x_1 + y_1) z_2 - 2 (x_2 + y_2) z_1 + 3 (x_2 + y_2) z_2 =$
$= 2x_1 z_1 - 2x_1 z_2 - 2x_2 z_1 + 3 x_2 z_2 + 2y_1 z_1 - 2y_1 z_2 - 2y_2 z_1 + 3 y_2 z_2 = x\bar{z} + y\bar{z}$

воспользовались дистрибутивностью и коммутативностью по сложению.

④ $\begin{cases} x \cdot x \geqslant 0 \\ x = 0 \Longleftrightarrow xx = 0 \end{cases}$ $(x \cdot x) = 2x_1^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_1 + 3x_2^2 = 2x_1^2 - 4x_1 x_2 + 3x_2^2$ ⑦

По нер-ву Коши: $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2x_1 x_2 \ | \cdot 2$ ⑦ $x_2^2 \geqslant 0 \Rightarrow$

Доказывается легко, $\longleftarrow \quad 2x_1^2 + 2x_2^2 \geqslant 4x_1 x_2 \quad \Rightarrow \quad X \cdot X = 0 \Longleftrightarrow$

перенеся всё в одну часть $(2(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0) \qquad \Longleftrightarrow \underline{X = 0}$

нер-ва. и равенство выполняется $\Longleftrightarrow \boxed{X_1 = X_2}$ ✓чтд

№2) $a = (3,2)$ Найти:

$b = (1,-3)$ а) $(a \cdot b) = 3 - 6 = -3$

$x \circ y = 2x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 3x_2 y_2$

а) $(a \circ b) = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = 6 + 18 - 4 - 18 = 2$

б) $|a| = \sqrt{2 \cdot 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{6}$

$|b| = \sqrt{2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2} = \sqrt{2 + 6 + 6 + 27} = \sqrt{41}$

в) $\cos \ell = \dfrac{ab}{|a||b|} = \dfrac{2}{\sqrt{246}}$ $\ell = \arccos \dfrac{2}{\sqrt{246}}$

г) $a - b = (2,5)$

$\rho(a,b) = |a-b| = \sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{2 \cdot 4 - 20 - 20 + 3 \cdot 25} = \sqrt{35 + 8} = \sqrt{43}$

Ответ: $2, \sqrt{6}, \sqrt{41}, \arccos \dfrac{2}{\sqrt{246}}, \sqrt{43}$.