Глава XII. Квадрики в пространстве

§ 45. Цилиндрические и конические поверхности

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Оставшиеся четыре параграфа посвящены квадрикам в пространстве, т. е. поверхностям, которые задаются уравнениями второго порядка. В данном параграфе вводятся в рассмотрение два широких класса поверхностей, указанных в названии параграфа. Оба этих класса содержат далеко не только поверхности второго порядка. В каждом из них мы указываем некоторые конкретные поверхности второго порядка (три цилиндрические и одну коническую).

Определение

Пусть в пространстве заданы кривая ℓ и ненулевой вектор $\vec{a}$. Поверхность, образованная прямыми, проходящими через всевозможные точки кривой ℓ и коллинеарными вектору $\vec{a}$, называется *цилиндрической*. Кривая ℓ называется *направляющей* цилиндрической поверхности, а упомянутые выше прямые — ее *образующими*.

Общий вид цилиндрической поверхности изображен на рис. 1 на следующем слайде.

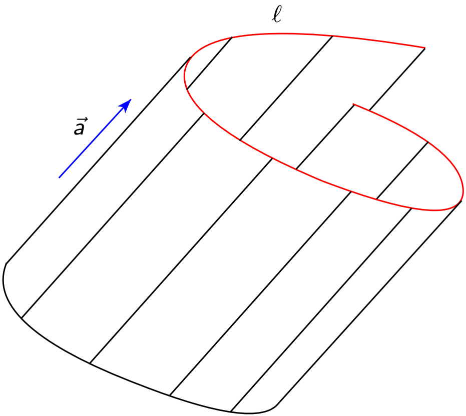

Рис. 1. Произвольная цилиндрическая поверхность

Пусть σ — цилиндрическая поверхность с направляющей ℓ, образующие которой параллельны вектору $\vec{a}$, а μ — плоскость, неколлинеарная $\vec{a}$ и пересекающая σ по некоторой кривой s. Очевидно, что σ совпадает с цилиндрической поверхностью, направляющей которой является s, а образующие параллельны $\vec{a}$ (см. рис. 2 на следующем слайде). Кривая s, очевидно, является плоской. Таким образом, справедливо следующее

Замечание о направляющей цилиндрической поверхности

Любая цилиндрическая поверхность имеет направляющую, являющуюся плоской кривой. $\square$

Выбор плоской направляющей для цилиндрической поверхности (рисунок)

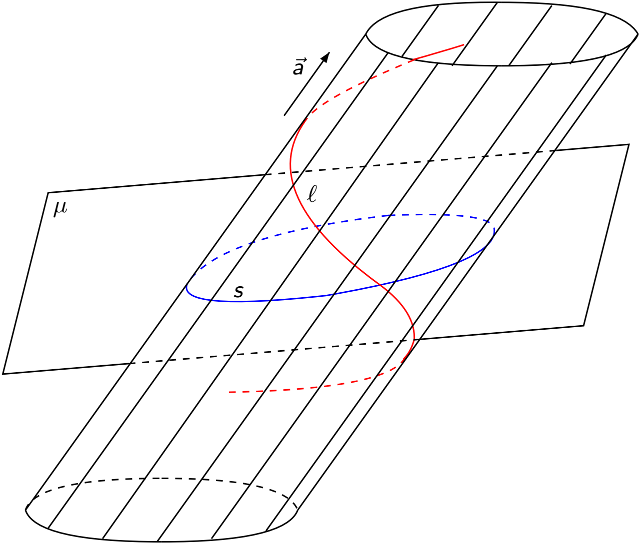

Рис. 2. Сечение цилиндрической поверхности плоскостью

Следующая теорема показывает, как выглядит общее уравнение произвольной цилиндрической поверхности в подходящей системе координат.

Теорема о цилиндрической поверхности

Произвольная цилиндрическая поверхность может быть задана в подходящей системе координат общим уравнением вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — некоторая функция от двух переменных. Обратно, уравнение вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — произвольная функция от двух переменных, задает в пространстве цилиндрическую поверхность.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть σ — цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны вектору $\vec{a}$. Обозначим через m произвольную прямую, коллинеарную вектору $\vec{a}$, а через O — произвольную точку на этой прямой. Возьмем точку O в качестве начала координат. Далее, проведем через точку O плоскость π, перпендикулярную к прямой m, и выберем в этой плоскости произвольный базис, векторы которого обозначим через $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Посмотрим, как выглядит уравнение поверхности σ в системе координат $(O; \vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$. Обозначим через ℓ кривую, по которой плоскость π пересекает поверхность σ. Ясно, что ℓ — плоская кривая, являющаяся направляющей поверхности σ. Эта кривая задается в плоскости π некоторым общим уравнением $F(x, y) = 0$.

Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка пространства. Проведем через M прямую, коллинеарную $\vec{a}$, и обозначим через M' точку пересечения этой прямой с плоскостью Oxy. Ясно, что точка M' имеет координаты $(x_0, y_0, 0)$. При этом $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $M' \in \ell$, а $M' \in \ell$ тогда и только тогда, когда $F(x_0, y_0) = 0$. Таким образом, точка M принадлежит σ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение. Предположим, что поверхность σ имеет в некоторой системе координат уравнение $F(x, y) = 0$. Обозначим через ℓ пересечение σ с плоскостью Oxy и положим $\vec{a} = (0, 0, 1)$. Произвольная точка пространства M лежит на σ тогда и только тогда, когда координаты ее проекции на плоскость Oxy (при проектировании вдоль оси Oz) удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Следовательно, σ — цилиндрическая поверхность с направляющей ℓ, образующие которой коллинеарны вектору $\vec{a}$. $\square$

Теорема о цилиндрической поверхности показывает, что канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы, рассматриваемые как уравнения поверхностей, задают в пространстве цилиндрические поверхности. Укажем названия этих поверхностей.

Определения

Эллиптическим цилиндром называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a, b > 0$ и $a \geqslant b$. *Гиперболическим цилиндром* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a, b > 0$. *Параболическим цилиндром* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида $y^2 = 2px$, где $p > 0$. Каждое из этих трех уравнений называется *каноническим уравнением* той поверхности, которую оно задает.

«Внешний вид» эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров указан на рис. 3, 4 и 5 соответственно (см. следующие три слайда).

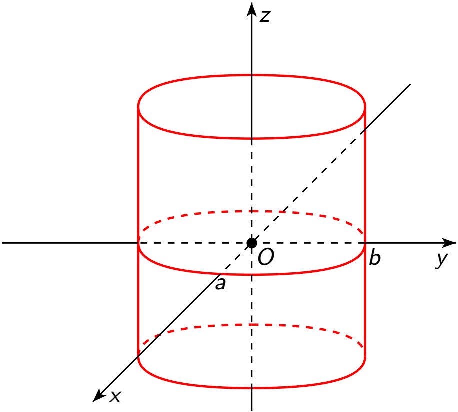

Рис. 3. Эллиптический цилиндр

Гиперболический цилиндр

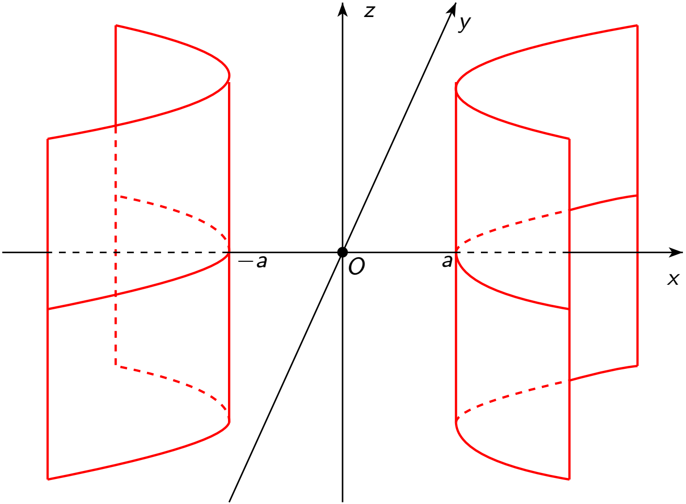

Рис. 4. Гиперболический цилиндр

Параболический цилиндр

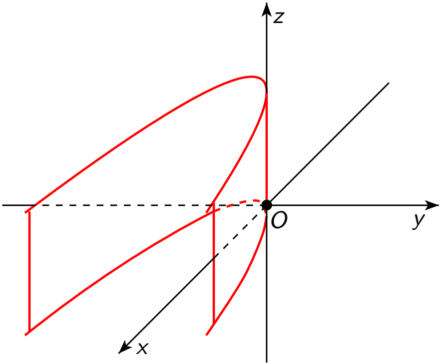

Рис. 5. Параболический цилиндр

Определение

Пусть в пространстве заданы кривая ℓ и точка P, не лежащая на ℓ. Поверхность, образованная прямыми, проходящими через точку P и всевозможные точки кривой ℓ, называется *конической*. Кривая ℓ называется *направляющей* конической поверхности, упомянутые выше прямые — ее *образующими*, а точка P — ее *вершиной*.

Общий вид конической поверхности изображен на рис. 6 на следующем слайде.

Класс конических поверхностей (как и класс цилиндрических поверхностей) весьма обширен, поскольку в качестве ℓ можно брать *произвольную* кривую в пространстве. В дальнейшем нас будет интересовать лишь одна поверхность из этого класса, определение которой дано на слайде, следующем после слайда с рис. 6.

Общий вид конической поверхности

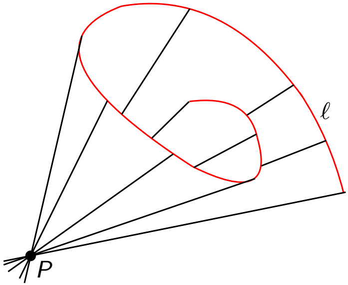

Рис. 6. Произвольная коническая поверхность

Определение

Конусом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad (1)$$

где $a, b, c > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* конуса.

Очевидно, что конус является квадрикой, но из его определения никоим образом не вытекает, что он является конической поверхностью. Докажем, что это так.

Теорема о конусе

Конус, заданный уравнением (1), *является конической поверхностью с вершиной в начале координат, направляющая которой задана уравнениями*

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c, \end{cases} \qquad (2)$$

где $c \neq 0$.

Заметим, что, в силу теоремы о конусе, направляющая конуса является эллипсом.

Доказательство теоремы о конусе. Пусть σ — коническая поверхность с вершиной в начале координат и направляющей (2). Как и ранее, вершину будем обозначать буквой P. Ясно, что координаты вершины поверхности σ удовлетворяют уравнению (1). Если $M(x_0, y_0, z_0)$ — точка этой конической поверхности, отличная от вершины, то образующая PM имеет уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = z_0 t. \end{cases}$$

Легко понять, что точка пересечения образующей PM и плоскости $z = c$ имеет координаты $\left(\frac{cx_0}{z_0}, \frac{cy_0}{z_0}, c\right)$. Подставив их в уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, получим равенство $\frac{c^2 x_0^2}{z_0^2 a^2} + \frac{c^2 y_0^2}{z_0^2 b^2} = 1$, откуда

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}. \qquad (3)$$

Таким образом, координаты точки M удовлетворяют уравнению (1). Мы показали, что если точка принадлежит σ, то ее координаты удовлетворяют уравнению (1).

Проверим обратное утверждение. Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ — точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (1). Тогда выполнено равенство (3). Если $z_0 = 0$, то $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 0$, откуда $x_0 = y_0 = 0$. Но тогда M — начало координат, и потому $M \in \sigma$. Пусть теперь $z_0 \neq 0$. Рассмотрим точку $M'\left(\frac{x_0 c}{z_0}, \frac{y_0 c}{z_0}, c\right)$. Точка M' принадлежит направляющей (2). В самом деле, ее третья координата равна c, а из равенства (3) вытекает, что

$$\frac{x_0^2 c^2}{z_0^2 a^2} + \frac{y_0^2 c^2}{z_0^2 b^2} = \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) \cdot \frac{c^2}{z_0^2} = \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) \cdot \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}} = 1.$$

Поэтому осталось проверить, что точка M принадлежит прямой OM'. В самом деле, эта прямая имеет уравнения

$$\begin{cases} x = \frac{x_0 c}{z_0} \cdot t, \\ y = \frac{y_0 c}{z_0} \cdot t, \\ z = c \cdot t. \end{cases}$$

Подставляя в эти уравнения $\frac{z_0}{c}$ вместо t, имеем $x = x_0$, $y = y_0$ и $z = z_0$. Следовательно, $M \in OM'$. Таким образом, если кординаты точки M удовлетворяют уравнению (1), то $M \in \sigma$. Объединяя это с доказанным на предыдущем слайде, получаем, что конус совпадает с конической поверхностью σ.

«Внешний вид» конуса указан на рис. 7.

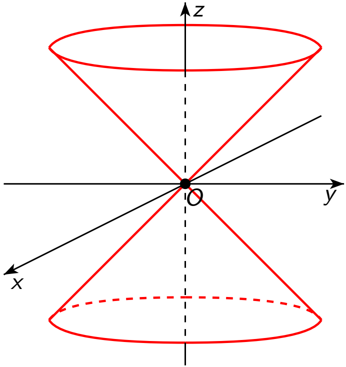

Рис. 7. Конус