Функциональные последовательности и ряды

2 Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad a_n \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Функциональные свойства суммы степенного ряда

Теорема. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R; R)$, где R — радиус сходимости. Тогда

1) $f(x)$ непрерывна на $(-R; R)$;

2) для любого $x \in (-R; R)$ $\quad \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$;

3) для любого $x \in (-R; R)$ $\quad \displaystyle f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Следствие 1. Сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема на $(-R; R)$.

Следствие 2 (единственность представления функции степенным рядом)**.** Если $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R; R)$, то это представление единственно.

Определение. Ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n$ называется *рядом Тейлора функции* $f(x)$.

Замечания.

- Если функция раскладывается в степенной ряд, то это ряд Тейлора этой функции.
- Любой степенной ряд есть ряд Тейлора своей суммы.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Теорема (Необходимые и достаточные условия разложимости функции в степенной ряд)**.** Функция $f(x)$ представима степенным рядом на $(-R; R)$ тогда и только тогда, когда

а) $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-R; R)$;

б) остаточный член формулы Тейлора $R_n(x; 0) \overset{[-r;r]}{\rightrightarrows} 0$ на любом отрезке $[-r; r] \subset (-R; R)$.

Следствие. Функция $f(x)$ представима степенным рядом на $(-R; R)$ тогда и только тогда, когда

а) $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-R; R)$;

б) остаточный член формулы Тейлора $R_n(x; 0) \to 0$, $x \in (-R; R)$.

Поведение степенных рядов в граничных точках интервала

Теорема. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится (хотя бы условно) в точке $x = R$ $(x = -R)$, то сумма ряда непрерывна на $[0; R]$.

Следствие. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится (хотя бы условно) в точке $x = R$ $(x = -R)$, то на $[0; R]$ (на $[-R; 0]$) он сходится равномерно.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Теорема. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится в точке $x = R$ $(x = -R)$, то на $[0; R)$ (на $(-R; 0]$) он сходится неравномерно.

Теорема (Коши–Адамара)**.**

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$