Самосопряженные операторы. 01.05.20 Семке Даниил

КН-102, МЕН-190207

Вариант 18

1) Найти ОНБ F оператора $\mathcal{A}$, сост. из собств. векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)-(1-\lambda)-(1-\lambda) =$$
$$= (1-2\lambda+\lambda^2)(2-\lambda)-2-2\lambda =$$
$$= -\lambda^3+4\lambda^2-3\lambda=0$$
$$-\lambda(\lambda^2-4\lambda+3)=0$$
$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$
$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=1 \\ \lambda_3=3 \end{array}\right.$$

Матрица $\mathcal{A}$ в F, сост. из собств. векторов:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные векторы:

1) $\lambda=0$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

x_3 - своб.

$x_{1,2}$ - базисные.

$$\begin{cases} x_3=c \\ x_2=c \\ x_1=x_2=c \end{cases}$$

ФСР:

	x_1	x_2	x_3
1	1	1	1

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_3 = C \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -C \end{cases}$$

ФСР:

	x_1	x_2	x_3
f_1	-1	0	1

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_3 = C \\ x_2 = -2C \\ x_1 = C \end{cases}$$

ФСР:

	x_1	x_2	x_3
f_1	1	-2	1

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ $\quad$ v_1, v_2, v_3 – попарно ортогональны (по Лемме о собственных векторах), тогда пронормируем:

$$e_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ – матр. опер. в F.

[illegible] оператора в F

Семке Даниил
КН-102
МЕН-190207

~~Дополнение (переписанное)~~

$\boxed{№2}$ (Переделанное)

$$F:\ f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Возьмем стандартный ортонорм. базис $E:\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A_F = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$T_{FE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T_{FE}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_E = T_{FE}^{-1} \cdot A_F T_{FE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -13 & -9 \end{pmatrix}$$ – матрица не симметр.

линейный оператор не является самосопряженным

Ответ: нет