

Лекция 7: Векторные пространства

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

В этой лекции мы приступаем к изучению линейной алгебры как таковой, т. е. теории конечномерных векторных пространств. Основная идея этой теории, объясняющая ее унифицирующую роль, состоит в следующем. При рассмотрении математических объектов самой разной природы (векторов, матриц, многочленов, решений однородных систем линейных уравнений и др.) оказывается, что на этих объектах можно естественным образом ввести операции, называемые обычно сложением и умножением на число, которые обладают одними и теми же свойствами и во многом определяют свойства рассматриваемых объектов. Это позволяет выделить эти общие свойства операций, объявить их аксиомами, и исследовать произвольное множество, на котором введены операции, удовлетворяющие этим аксиомам. Получающаяся теория оказывается очень содержательной и, что важно, применимой в самых разных конкретных ситуациях.

В этой лекции будет введено понятие векторного пространства, приведены примеры векторных пространств, доказаны некоторые их простейшие свойства, а также введены понятия линейно зависимого и линейно независимого наборов векторов и доказаны некоторые свойства таких наборов.

Определение

Пусть V — произвольное непустое множество, элементы которого мы будем называть *векторами* (объяснение использования этого термина будет дано ниже). В дальнейшем мы будем обозначать векторы (в новом смысле этого слова) буквами, набранными жирным шрифтом, чтобы отличить их от обычных, «геометрических» векторов, рассматривавшихся в курсе аналитической геометрии. Будем говорить, что:

- на множестве V *задана операция сложения*, если любым двум векторам $x, y \in V$ поставлен в соответствие некоторый однозначно определенный вектор $z \in V$, называемый *суммой* векторов x и y и обозначаемый через $x + y$;
- на множестве V *задана операция умножения вектора на число*, если любому вектору $x \in V$ и любому числу t поставлен в соответствие некоторый однозначно определенный вектор $y \in V$, называемый *произведением вектора x на число t* и обозначаемый через tx .

- ♣ Под словом «число» в этом определении и всюду далее в нашем курсе понимается произвольное действительное число.
- ♣ Строго говоря, умножение вектора на число — это не одна операция, а бесконечное множество операций (по одной для каждого числа).

Определение

Векторным (или линейным) пространством называется произвольное непустое множество V , на котором заданы операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющие следующим условиям, которые называются *аксиомами векторного пространства*:

- 1) если $x, y \in V$, то $x + y = y + x$ (сложение векторов *коммутативно*);
- 2) если $x, y, z \in V$, то $(x + y) + z = x + (y + z)$ (сложение векторов *ассоциативно*);
- 3) для всякого $x \in V$ существует вектор $0 \in V$ (называемый *нулевым вектором*) такой, что $x + 0 = x$;
- 4) для всякого $x \in V$ существует вектор $y \in V$ (называемый *противоположным к x* и обозначаемый через $-x$) такой, что $x + y = 0$;
- 5) если $x, y \in V$, а $t \in \mathbb{R}$, то $t(x + y) = tx + ty$ (умножение вектора на число *дистрибутивно относительно сложения векторов*);
- 6) если $x \in V$, а $t, s \in \mathbb{R}$, то $(t + s)x = tx + sx$ (умножение вектора на число *дистрибутивно относительно сложения чисел*);
- 7) если $x \in V$, а $t, s \in \mathbb{R}$, то $t(sx) = (ts)x$;
- 8) если $x \in V$, то $1 \cdot x = x$.

Приведем примеры векторных пространств.

Пример 1. Пусть V — множество всех обычных («геометрических») векторов трехмерного физического пространства с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число. Как известно из курса аналитической геометрии, все аксиомы 1)–8) в этом случае выполнены (при этом роль нулевого вектора 0 играет вектор $\vec{0}$), и потому V является векторным пространством. Векторным пространством будет также множество всех векторов (в обычном смысле этого слова), коллинеарных некоторой плоскости или некоторой прямой.

Таким образом, свойства векторов в векторном пространстве являются обобщением свойств обычных, «геометрических» векторов. Именно этим и объясняется использование термина «вектор» применительно к элементам произвольного векторного пространства.

Пример 2. Пусть n — произвольное натуральное число. Обозначим через \mathbb{R}_n множество всевозможных упорядоченных последовательностей вида $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, состоящих из действительных чисел. Эти последовательности будем называть векторами (как мы увидим чуть ниже, это название оправдано, так как множество всех таких последовательностей является векторным пространством). Числа x_1, x_2, \dots, x_n назовем *компонентами* вектора \mathbf{x} . На множестве \mathbb{R}_n введем операции сложения и умножения на число. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, а t — произвольное число. Положим

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad \text{и} \quad t\mathbf{x} = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n).$$

Легко проверяется, что при таких определениях выполняются все аксиомы 1)–8). При этом роль нулевого вектора играет вектор $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Следовательно, множество \mathbb{R}_n с введенными операциями является векторным пространством. Это пространство называют *пространством строк длины n* или просто *пространством строк*. Оно играет особую роль в теории векторных пространств. Объяснение этому будет дано в конце следующей лекции.

При $n = 2, 3$ пространство \mathbb{R}_n имеет естественную геометрическую интерпретацию. Предположим, что в обычном трехмерном пространстве зафиксирован некоторый базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Тогда произвольный вектор \vec{x} из этого пространства можно отождествить с упорядоченной тройкой чисел — координатами вектора \vec{x} в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, т. е. с элементом пространства \mathbb{R}_3 . При сложении векторов из обычного трехмерного пространства и их умножении на число координаты векторов меняются по тем же правилам, по которым складываются и умножаются на числа векторы из \mathbb{R}_3 . Таким образом,

!! *пространство \mathbb{R}_3 можно отождествить с обычным («физическим») трехмерным пространством. Аналогично, пространство \mathbb{R}_2 можно отождествить с плоскостью в обычном трехмерном пространстве.*

Отметим еще, что

- пространство \mathbb{R}_1 — это не что иное, как множество всех действительных чисел \mathbb{R} , которое, таким образом, также можно рассматривать как векторное пространство.

Пример 3. Пусть m и n — произвольные целые числа. Обозначим через $\mathbf{Mat}_{m,n}$ совокупность всех матриц размера $m \times n$. Определим на множестве $\mathbf{Mat}_{m,n}$ операции сложения матриц и умножения матрицы на число следующим образом: если A и B — матрицы размера $m \times n$, то их *суммой* называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$, обозначаемая через $A + B$ и определяемая правилом $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$, а *произведением матрицы A на число t* называется матрица $D = (d_{ij})$ размера $m \times n$, обозначаемая через tA и определяемая правилом $d_{ij} = ta_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$. Легко проверяется, что при таких определениях выполняются все аксиомы векторного пространства. При этом роль нулевого вектора играет нулевая матрица O размера $m \times n$. Пространство $\mathbf{Mat}_{m,n}$ называется *пространством матриц размера $m \times n$* . При $m = n$ получаем *пространство квадратных матриц порядка n* . Векторным пространством будет также множество всех верхнетреугольных [нижнетреугольных] квадратных матриц одного и того же порядка.

Примеры векторных пространств: пространство многочленов и пространство функций

Пример 4. На множестве **Pol** всех многочленов от одной переменной определим обычные операции сложения многочленов и умножения многочлена на число. Выполнимость всех аксиом векторного пространства легко проверяется (роль нулевого вектора при этом играет многочлен, в котором все коэффициенты равны 0). Таким образом, множество **Pol** является векторным пространством. Оно называется *пространством многочленов*. Векторным пространством будет и множество **Pol_n** всех многочленов степени $\leq n$, где n — произвольное натуральное число.

Пример 5. Рассмотрим множество всех функций от одной переменной, область определения которых совпадает с множеством \mathbb{R} (или с каким-то интервалом в \mathbb{R}). Введем операции сложения функций и умножения функции на число стандартным образом: если f и g — две функции, а t — действительное число, то функции $f + g$ и tf определяются соответственно правилами $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(tf)(x) = t \cdot f(x)$ для всякого x из области определения. Ясно, что все аксиомы векторного пространства выполнены (в качестве нулевого вектора выступает функция, значение которой при любом x равно 0). Это векторное пространство называется *пространством функций*. Векторным пространством будет также множество всех дифференцируемых (или интегрируемых) функций с фиксированной областью определения.

Примеры векторных пространств: пространство решений однородной системы линейных уравнений и нулевое пространство

Пример 6. Рассмотрим произвольную однородную систему линейных уравнений с n неизвестными и обозначим через V множество всех ее частных решений. Ясно, что $V \subseteq \mathbb{R}_n$. Из теоремы 1 в лекции 3 вытекает, что операции сложения векторов и умножения вектора на число, определенные в пространстве \mathbb{R}_n , являются и операциями в V . Ясно, что все аксиомы векторного пространства для множества V с этими операциями выполнены (в качестве нулевого вектора выступает нулевое решение системы). Таким образом, множество V является векторным пространством, которое называется *пространством решений* однородной системы. Его рассмотрению будет целиком посвящена лекция 13.

Пример 7. Пусть V — произвольное множество, состоящее из одного элемента \mathbf{a} . Операции сложения векторов и умножения вектора на число в таком множестве вводятся просто: $\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ и $t \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ для любого t . Ясно, что все аксиомы векторного пространства выполняются. Таким образом, V можно рассматривать как векторное пространство. При этом его единственный элемент \mathbf{a} будет нулевым вектором. Такое пространство называется *нулевым*.

Простейшие свойства векторных пространств: единственность нулевого вектора

Укажем ряд простых следствий из аксиом векторного пространства.

Аксиома 3) утверждает существование нулевого вектора, но не говорит о том, сколько нулевых векторов может быть в пространстве.

Лемма 1

Векторное пространство содержит только один нулевой вектор.

Доказательство. Пусть $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$ — два нулевых вектора векторного пространства V . Тогда из аксиомы 3) вытекает, что $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$, а из аксиом 1) и 3) — что $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$. Следовательно, $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$. □

Простейшие свойства векторных пространств: единственность противоположного вектора

Далее, аксиома 4) утверждает существование вектора, противоположного к вектору x , но не говорит о том, сколько таких векторов может быть.

Лемма 2

Для всякого вектора x из векторного пространства существует ровно один противоположный к нему вектор.

Доказательство. Предположим, что векторы y_1 и y_2 противоположны к x , т.е. $x + y_1 = x + y_2 = \mathbf{0}$. Тогда, с одной стороны, используя аксиомы 1) и 2), имеем

$$y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = (x + y_2) + y_1 = \mathbf{0} + y_1 = y_1 + \mathbf{0} = y_1.$$

С другой стороны $y_2 + (x + y_1) = y_2 + \mathbf{0} = y_2$. Следовательно, $y_1 = y_2$. \square

Простейшие свойства векторных пространств: когда произведение числа на вектор равно нулевому вектору?

Укажем еще одно свойство операций в векторном пространстве.

Лемма 3

Пусть x — произвольный вектор из векторного пространства, а t — произвольное число. Равенство $tx = \mathbf{0}$ выполнено тогда и только тогда, когда либо $t = 0$, либо $x = \mathbf{0}$.

Доказательство. Достаточность. Проверим, что $0 \cdot x = \mathbf{0}$. В силу аксиом 6) и 8), $x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = x + 0 \cdot x$ для любого вектора x . Учитывая лемму 1, имеем $0 \cdot x = \mathbf{0}$. Аналогичным образом равенство $t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ следует из того, что $tx = t(x + \mathbf{0}) = tx + t \cdot \mathbf{0}$.

Необходимость. Пусть $tx = \mathbf{0}$ и $t \neq 0$. Тогда, используя аксиомы 7) и 8), имеем $x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{t} \cdot t\right)x = \frac{1}{t} \cdot (tx) = \frac{1}{t} \cdot \mathbf{0}$. Из сказанного в предыдущем абзаце вытекает, что $\frac{1}{t} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Итак, если $tx = \mathbf{0}$ и $t \neq 0$, то $x = \mathbf{0}$. \square

Определим *разность* векторов x и y , полагая $x - y = x + (-y)$. Из аксиом векторного пространства и леммы 3 легко выводятся следующие равенства (где x и y — произвольные векторы, а t и s — произвольные числа):

$$t(-x) = -tx, \quad t(x - y) = tx - ty \quad \text{и} \quad (t - s)x = tx - sx. \quad (1)$$

В самом деле:

$$t(-x) + tx = t(-x + x) = t \cdot 0 = 0$$

(использованы аксиома 5) и лемма 3), откуда $t(-x) = -tx$;

$$t(x - y) = t(x + (-y)) = tx + t(-y) = tx - ty$$

(использованы аксиома 5) и первое из равенств (1)), и

$$(t - s)x = tx + (-s)x = tx + s(-x) = tx - sx$$

(использованы аксиомы 6) и 7) и первое из равенств (1)).

Линейная комбинация векторов. Линейно зависимые и независимые системы векторов

Перейдем к понятиям, которые будут играть весьма важную роль в дальнейшем.

Определения

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — система векторов из векторного пространства V , а t_1, t_2, \dots, t_k — числа. Вектор вида

$$t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k \quad (2)$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Линейная комбинация (2) называется *тривиальной*, если $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$, и *нетривиальной*, если хотя бы одно из чисел t_1, t_2, \dots, t_k отлично от нуля. Если вектор \mathbf{b} является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, то говорят, что \mathbf{b} *линейно выражается* через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, и *линейно независимыми* в противном случае, т. е. если любая нетривиальная комбинация этих векторов не равна нулевому вектору.

Как отмечалось выше, плоскость можно отождествить с пространством \mathbb{R}_2 , а трехмерное физическое пространство — с пространством \mathbb{R}_3 . Оказывается, что введенные только что понятия линейной зависимости и независимости векторов в этих двух частных случаях равносильны некоторым хорошо знакомым нам из курса аналитической геометрии понятиям.

Замечание 1

- а) Два вектора на плоскости или в трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*
- б) Три вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Доказательство замечания 1 приведено на следующем слайде.

Линейная зависимость и независимость в обычном пространстве (2)

Доказательство. а) Если векторы \vec{a} и \vec{b} линейно зависимы, то $p\vec{a} + q\vec{b} = \vec{0}$ для некоторых чисел p и q , хотя бы одно из которых отлично от 0. Пусть, без ограничения общности, $p \neq 0$. Тогда $\vec{a} = -\frac{q}{p} \cdot \vec{b}$, и векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны по критерию коллинеарности векторов. Предположим теперь, что векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны. Если $\vec{b} = \vec{0}$, то $0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = \vec{0}$. Если же $\vec{b} \neq \vec{0}$, то по критерию коллинеарности $\vec{a} = t\vec{b}$ для некоторого t , т. е. $1 \cdot \vec{a} - t\vec{b} = \vec{0}$. В обоих случаях получаем, что векторы \vec{a} и \vec{b} линейно зависимы.

б) Если векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} линейно зависимы, то $p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \vec{0}$ для некоторых чисел p , q и r , хотя бы одно из которых отлично от 0. Пусть, без ограничения общности, $p \neq 0$. Тогда $\vec{a} = -\frac{q}{p} \cdot \vec{b} - \frac{r}{p} \cdot \vec{c}$. Это значит, что вектор \vec{a} лежит в той плоскости, которой принадлежат векторы \vec{b} и \vec{c} , и потому векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны. Предположим теперь, что векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны. Если $\vec{c} = \vec{0}$, то $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Если $\vec{c} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \parallel \vec{c}$, то по критерию коллинеарности векторов $\vec{b} = t\vec{c}$ для некоторого t , и потому $0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} - t\vec{c} = \vec{0}$. Наконец, если $\vec{b} \nparallel \vec{c}$, то векторы \vec{b} и \vec{c} образуют базис той плоскости, в которой лежат векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . По теореме о разложении вектора по базису на плоскости $\vec{c} = t\vec{a} + s\vec{b}$ для некоторых чисел t и s , откуда $t\vec{a} + s\vec{b} - 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Во всех трех случаях получаем, что векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} линейно зависимы.



Пример линейно независимой системы векторов

Приведем пример линейно независимой системы векторов в пространстве \mathbb{R}_n , которая будет многократно возникать и играть особую роль в дальнейшем.

Положим $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Замечание 2

Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независима.

Доказательство. Предположим, что $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ для некоторых чисел x_1, x_2, \dots, x_n . Очевидно, что

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Таким образом, $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{0}$, т. е. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Мы доказали, что если какая-то линейная комбинация векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ равна нулевому вектору, то эта комбинация тривиальна. □

В процессе доказательства замечания 2 фактически доказано следующее полезное для дальнейшего утверждение.

Замечание 3

Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольный вектор из \mathbb{R}_n , то $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. □

Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов (1)

Отметим несколько простых свойств линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

Лемма 4

Если среди векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ имеется нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Тогда

$$0 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_{i-1} + 1 \cdot \mathbf{a}_i + 0 \cdot \mathbf{a}_{i+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 5

Подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима. Если к линейно зависимой системе векторов добавить произвольную конечную систему векторов, то расширенная система векторов также будет линейно зависимой.

Доказательство леммы 5 дано на следующем слайде.

Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов (2)

Доказательство. Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы. Выберем произвольное подмножество этой системы векторов. Для простоты обозначений будем считать, что мы взяли сколько-то первых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, где $m \leq k$ (в противном случае мы всегда можем перенумеровать исходные векторы). Предположим, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы, т. е. что существуют числа t_1, t_2, \dots, t_m , по крайней мере одно из которых отлично от нуля, такие, что $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$. Тогда

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m + 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Поскольку среди чисел t_1, t_2, \dots, t_m хотя бы одно отлично от нуля, последнее равенство противоречит линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Первое утверждение леммы доказано.

Пусть теперь система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ линейно зависима, т. е. существует нетривиальная линейная комбинация $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m$ этих векторов, равная нулевому вектору. Добавим к исходной системе векторы $\mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_k$. Тогда

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m + 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Следовательно, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы.



Лемма 6

Если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы, а векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ линейно зависимы, то вектор \mathbf{b} линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Доказательство. По условию существуют такие числа t_1, t_2, \dots, t_k, s , по крайней мере одно из которых не равно нулю, что

$$t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k + s \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Если $s = 0$, то $t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ и по крайней мере одно из чисел t_1, t_2, \dots, t_k отлично от нуля. Это, однако, противоречит линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Следовательно, $s \neq 0$, и потому

$$\mathbf{b} = -\frac{t_1}{s} \cdot \mathbf{a}_1 - \frac{t_2}{s} \cdot \mathbf{a}_2 - \dots - \frac{t_k}{s} \cdot \mathbf{a}_k.$$

Лемма доказана. □

Лемма 7

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через остальные.

Доказательство. Предположим сначала, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы, т. е. что $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ для некоторых чисел t_1, t_2, \dots, t_k , не все из которых равны нулю. Пусть $t_i \neq 0$. Тогда

$$\mathbf{a}_i = -\frac{t_1}{t_i} \cdot \mathbf{a}_1 - \frac{t_2}{t_i} \cdot \mathbf{a}_2 - \dots - \frac{t_{i-1}}{t_i} \cdot \mathbf{a}_{i-1} - \frac{t_{i+1}}{t_i} \cdot \mathbf{a}_{i+1} - \dots - \frac{t_k}{t_i} \cdot \mathbf{a}_k,$$

т. е. вектор \mathbf{a}_i линейно выражается через остальные.

Обратно, если вектор \mathbf{a}_i линейно выражается через остальные, т. е. если

$$\mathbf{a}_i = r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2 + \dots + r_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + r_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \dots + r_k\mathbf{a}_k$$

для некоторых чисел $r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_k$, то

$$r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2 + \dots + r_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} - 1 \cdot \mathbf{a}_i + r_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \dots + r_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0},$$

и потому векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы.

В заключение лекции укажем способ выяснения того, является ли данная система векторов из пространства \mathbb{R}_n линейно зависимой или линейно независимой.

Алгоритм определения линейной зависимости или независимости системы векторов из пространства \mathbb{R}_n

Чтобы выяснить, является ли данная система векторов из пространства \mathbb{R}_n линейно зависимой или линейно независимой, надо записать эти векторы в матрицу по строкам и начать приводить эту матрицу к ступенчатому виду. Если в процессе элементарных преобразований возникнет хотя бы одна нулевая строка, система линейно зависима. Если мы доведем матрицу до ступенчатого вида и нулевые строки в процессе преобразований не возникнут, система линейно независима.

Обоснование этого алгоритма будет дано в лекции 12.