Числовые ряды

1. Ряды с неотрицательными членами

Теорема (признак Даламбера)**.** Пусть $a_n > 0$. Тогда

1) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Даламбера в предельной форме)**.**
Пусть $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Тогда

1) если $d < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $d > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится;

3) если $d = 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться.

Примеры: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}.$$

Теорема (признак Раабе). Пусть $a_n > 0$.

1) Если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \geqslant r > 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \leqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Теорема (признак Раабе в предельной форме). Пусть $a_n > 0$ и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \cdot n = r$.

1) Если $r > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $r < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится;

3) если $r = 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться.

Теорема (признак Коши–Маклорена (интегральный признак))**.** Пусть $a_n \geqslant 0$. Пусть на $[1, +\infty)$ определена функция $f(x)$ такая, что

a) $f(x) \geqslant 0$;

b) $f(x)$ — невозрастающая;

c) $f(n) = a_n$;

d) интегрируема на $[1, A]$ при любом $A > 1$.

Тогда, если

1) если $\exists \lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\,dx$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится;

2) если $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\,dx = +\infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Пример: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}.$$

Следствие (оценка остатка ряда)**.** В условиях признака Коши–Маклорена

$$F(+\infty) - F(n+1) \leqslant r_n \leqslant F(+\infty) - F(n).$$

где $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.

2. Знакопеременные ряды

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Теорема (признак Лейбница)**.** Пусть $c_n \geqslant 0$ и $c_n \to 0$ монотонно. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ сходится.

Следствие (оценка остатка ряда)**.** В условиях признака Лейбница

$$|r_n| < c_{n+1}.$$