Задание №7

Семке Даниил
Кн 102, МЕН-190207

№2217

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx=\left[\begin{array}{l}\text{т.к. функция под интегралом}\\ \text{разрывна в } x=0 \Rightarrow\\ \Rightarrow \text{распишем на 2 интеграла}\end{array}\right]=$$

$$=\int_{-1}^{0-}f(x)dx+\int_{0+}^{1}f(x)dx=\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\Bigg|_{-1}^{0-}+\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\Bigg|_{0+}^{1}=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4-2}{3}=\frac{2}{3}$$

Ответ: $2/3$

№2264

$$I=\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx, \text{ если } f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$$

$$\int\frac{d\,f(x)}{1+f^2(x)}=\operatorname{arctg} f(x)+C=\operatorname{arctg}\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}+C$$

Заметим, что $F(x)$ разрывна в точках $x=0$ и $x=2$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ разобьем интеграл на 3.

$$I=\int_{-1}^{3}=\operatorname{arctg} f(x)\Big|_{-1}^{0-}+\operatorname{arctg} f(x)\Big|_{0+}^{2-}+\operatorname{arctg} f(x)\Big|_{2+}^{3}=-\frac{\pi}{2}-\pi+\operatorname{arctg}\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{32}{27}-2\pi$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{32}{27}-2\pi$

№2250

$$\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\Big|_{-1}^{0-}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\Big|_{0+}^{1}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C$$

Заметим, что $F(x)$ разрывна в $x=0$ $\Rightarrow$ разобьем на 2 интеграла.

Ответ: $\pi/\sqrt{2}$

№2227

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\dots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right]=\left[\text{Разложим } \sin x \text{ по Тейлору}\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{n^2}-o\left(\left(\frac{\pi}{n^2}\right)^3\cdot 3!\right)\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(\frac{2\pi}{n^2}-o\left(\frac{\left(\frac{2\pi}{n^2}\right)^3}{3!}\right)\right)+\dots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\left(\left(\frac{n-1}{n^2}\right)\pi-o\left(\frac{\left(\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right)^3}{3!}\right)\right)\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{сократим все бесконечно}\\ \text{малые функции, т.к. бм+бм=}\\ \text{=бм}\end{array}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{n^2}+\frac{\pi}{n^3}+\frac{2\pi}{n^2}+\frac{4\pi}{n^3}+\dots+\frac{n-1}{n^2}\pi+\frac{(n-1)^2}{n^3}\pi\right)=$$

и бм−бм=бм

$$=\pi\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n-1}{n^2}+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)=\pi\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)+\frac{1}{n^3}\left(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}\right)\right)$$

$$=\pi\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+\frac{2n^3-n^2-\cancel{2}-2n^2+n}{6n^3}\right)=\pi\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\underbrace{\frac{1}{2n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{-3n^2+n}{6n^3}}_{\to 0}\right)=$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$$

Ответ: $\frac{5\pi}{6}$

№2244

$$\int_0^{\sqrt3} x\cdot\operatorname{arctg}x\,dx = \frac12\int_0^{\sqrt3}\operatorname{arctg}x\,dx^2 = \frac12\operatorname{arctg}x\cdot x^2\Big|_0^{\sqrt3} - \int_0^{\sqrt3}\frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac12\int_0^{\sqrt3}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{2}-\frac12\left(x-\operatorname{arctg}x\right)\Big|_0^{\sqrt3} = \frac{\pi}{2}-\frac12\left(\sqrt3-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt3}{2}$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt3}{2}$

№2274 $$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx = x\cdot\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Big|_0^3 - \frac12\int_0^3\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x} = \pi - \frac12\int_0^3\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x} =$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \frac12\sqrt3\cdot2 = \frac{4\pi}{3}-\sqrt3$$

$$\int_0^3\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x} = \left[\begin{array}{l} t\in[0,\sqrt3] \\ \sqrt{x}=t \\ t^2=x \\ dx=2t\,dt\end{array}\right] = 2\int_0^{\sqrt3}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= 2(t-\operatorname{arctg}t)\Big|_0^{\sqrt3} = 2\sqrt3-\frac23\pi$$

Ответ: $\frac43\pi-\sqrt3$

№2265 Если T – период ф-ии $f(x)$ => $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$, a-любое.

Воспользуемся аддитивностью опр-го интеграла:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx =$$

$$= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx + \int_0^T f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Ответ: чтд

$$+\int_0^a f(x)dx$$

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = [x-T=t] = \int_0^a f(t)dt$$

№2218

$$\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=\int_0^{100\pi}\sqrt{1-1+2\sin^2 x}\,dx=\int_0^{100\pi}\sqrt{2\sin^2 x}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{100\pi}|\sin x|\,dx \ominus$$

Т.к. синус принимает разные по знаку значения, разобьем на отрезки $[2\pi k; 2\pi k+\pi]$ и $[\pi+2\pi k; 2\pi k+2\pi]$, $k\in\overline{0,49}$, $k\in\mathbb{Z}$, но из предыдущей

$\ominus$ задачи мы выяснили, что $\int_T^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx$, T – период.

a – любое

Тогда:

$$\ominus\ \sqrt{2}\sum_{k=0}^{49}\left(\int_{2\pi k}^{2\pi k+\pi}|\sin x|\,dx+\int_{2\pi k+\pi}^{2\pi k+2\pi}|\sin x|\,dx\right)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{49}\left(\int_{2\pi k}^{2\pi k+\pi}\sin x\,dx-\int_{2\pi k+\pi}^{2\pi k+2\pi}\sin x\,dx\right)=$$

$$=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{49}\left(-\cos x\Big|_{2\pi k}^{2\pi k+\pi}+\cos x\Big|_{2\pi k+\pi}^{2\pi k+2\pi}\right)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{49}(1+1+1+1)=\sqrt{2}\cdot 50\cdot 4=$$

$$=200\sqrt{2}$$

Ответ: $200\sqrt{2}$

Найти первообразную:

$f(x)=(2+\cos x)^{-1}$ на $x\in[0;\pi]$ $\qquad f(x)=\dfrac{1}{2+\cos x}$

~~Проверим наличие обратной ф-и~~

$$\int\frac{1}{2+\cos x}\,dx=\int\frac{1\cdot dx}{\sin^2\frac{x}{2}+3\cos^2\frac{x}{2}}=$$

$$=2\int\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+C$$ – множество всех первообр.

Ответ: $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}+C$