

Лекция 17: Евклидово пространство

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

При решении многих задач возникает необходимость иметь числовые характеристики векторов (такие, как длина) и их взаимного расположения (угол между векторами). Это осуществляется введением в векторном пространстве дополнительной операции, называемой скалярным произведением. Изложению соответствующих понятий и результатов посвящена оставшаяся часть нашего курса.

Определение

Пусть V — векторное пространство. Говорят, что в V задано *скалярное произведение*, если любым двум векторам $x, y \in V$ поставлено в соответствие действительное число, называемое *скалярным произведением* этих векторов и обозначаемое через xy или (x, y) , так, что выполнены следующие условия (здесь x, y, z — произвольные векторы из V , а t — произвольное действительное число):

- 1) $xy = yx$ (скалярное произведение *коммутативно*);
- 2) $(tx)y = t(xy)$;
- 3) $(x + y)z = xz + yz$ (скалярное произведение *дистрибутивно относительно сложения*);
- 4) $xx \geq 0$, причем $xx = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Векторное пространство, в котором задано скалярное произведение, называется *евклидовым*. Свойства 1)–4) называются *аксиомами евклидова пространства*.

Примеры евклидовых пространств (1)

Приведем примеры евклидовых пространств.

Пример 1. Множество всех векторов обычного трехмерного пространства с обычным (определяемым в аналитической геометрии) скалярным произведением является евклидовым пространством, так как все аксиомы 1)–4) в этом случае выполнены. То же самое можно сказать и о множестве всех векторов на плоскости с обычным скалярным произведением.

Следующий пример, в сочетании с примером 1, показывает, что в одном и том же векторном пространстве скалярное произведение можно вводить разными способами.

Пример 2. На множестве всех векторов на плоскости введем следующую операцию \bullet : если векторы \vec{x} и \vec{y} этой плоскости имеют в некотором базисе координаты (x_1, x_2) и (y_1, y_2) соответственно, то

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2.$$

Несложно проверить, что все аксиомы евклидова пространства будут при этом выполнены, и потому множество векторов на плоскости с указанной операцией является евклидовым пространством.

Пример 3. Ясно, что нулевое векторное пространство станет евклидовым, если мы определим скалярное произведение правилом $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$.

Примеры евклидовых пространств (2)

Пример 4. Рассмотрим векторное пространство **Pol** всех многочленов от одной переменной. Для произвольных многочленов $f, g \in \mathbf{Pol}$ положим

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Нетрудно убедиться, что эта операция удовлетворяет аксиомам 1)–4). Это означает, что **Pol** превращается в евклидово пространство. Точно таким же образом можно ввести скалярное произведение в пространстве **Pol_n** всех многочленов от одной переменной степени $\leq n$.

Следующий пример показывает, что операцию скалярного произведения можно ввести в произвольном конечномерном векторном пространстве.

Пример 5. Пусть V — произвольное ненулевое конечномерное векторное пространство, а $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ — его базис. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Обозначим координаты векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ через (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) соответственно. Положим

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Простая проверка показывает, что аксиомы 1)–4) в этом случае также выполняются. Следовательно, пространство V с введенной операцией — евклидово пространство.

Простейшие свойства евклидовых пространств

Укажем несколько простых следствий из аксиом евклидова пространства.

Аксиома 2) утверждает, что скалярный множитель можно выносить от первого сомножителя скалярного произведения. Несложно показать, что скалярный множитель можно выносить и от второго сомножителя. В самом деле, используя аксиомы 1) и 2), имеем

$$x(ty) = (ty)x = t(yx) = t(xy).$$

Аналогичное замечание можно сделать об аксиоме 3), в которой утверждается дистрибутивность по первому аргументу, — в действительности имеет место и дистрибутивность по второму аргументу: используя аксиомы 1) и 3), имеем

$$x(y + z) = (y + z)x = yx + zx = xy + xz.$$

Несложно доказать дистрибутивность скалярного произведения относительно вычитания:

$$(x - y)z = (x + (-1) \cdot y)z = xz + ((-1) \cdot y)z = xz + (-1) \cdot (yz) = xz - yz.$$

Отметим еще, что

$$0 \cdot x = 0 \tag{1}$$

для любого вектора x . Действительно,

$$0 \cdot x = (0 \cdot x)x = 0 \cdot (xx) = 0.$$

Скалярное произведение вектора x на себя называется *скалярным квадратом* вектора x . Аксиома 4) позволяет дать следующее

Определение

Длиной вектора x называется число \sqrt{xx} , обозначаемое через $|x|$.

Это определение представляется естественным, так как в обычном пространстве длина вектора также равна корню квадратному из его скалярного квадрата. Как мы увидим ниже, на евклидовы пространства переносятся и многие другие свойства, связанные с длинами векторов в обычном пространстве. В частности, легко понять, что если $t \in \mathbb{R}$, то

$$|tx| = |t| \cdot |x|. \quad (2)$$

В самом деле, $|tx| = \sqrt{(tx)(tx)} = \sqrt{t^2(xx)} = |t|\sqrt{xx} = |t| \cdot |x|$. Отсюда вытекает, что, как и в обычном пространстве, справедливо

Замечание 1

Если $x \neq 0$, то длина вектора $\frac{x}{|x|}$ равна 1.

Доказательство. Используя (2), имеем

$$\left| \frac{x}{|x|} \right| = \left| \frac{1}{|x|} \cdot x \right| = \left| \frac{1}{|x|} \right| \cdot |x| = \frac{1}{|x|} \cdot |x| = 1.$$



Для того чтобы ввести понятие угла между векторами в евклидовом пространстве, нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 1

- 1) Для любых векторов x и y евклидова пространства выполняется неравенство

$$|xy| \leq |x| \cdot |y|. \quad (3)$$

- 2) Равенство $|xy| = |x| \cdot |y|$ выполняется тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

Неравенство (3) называется *неравенством Коши–Буняковского*.

Доказательство. 1) Из (1) вытекает, что если $y = 0$, то обе части неравенства (3) равны нулю и потому неравенство выполняется. Поэтому далее можно считать, что $y \neq 0$, и, в силу аксиомы 4), $yy > 0$. Рассмотрим вектор $x - ty$, где t — некоторое действительное число. По аксиоме 4) $(x - ty)(x - ty) \geq 0$. Раскрывая скобки и используя аксиому 1), получаем неравенство

$$xx - 2txy + t^2yy \geq 0. \quad (4)$$

Подставим в (4) вместо t число $\frac{xy}{yy}$ и умножим обе части неравенства на положительное число yy . Получим $(xx)(yy) - 2(xy)^2 + (xy)^2 \geq 0$, откуда $(xy)^2 \leq (xx)(yy)$. Заменяя в последнем неравенстве xx на $|x|^2$ и yy на $|y|^2$ и извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, получаем (3).

2) Если векторы x и y линейно независимы, то $x - ty \neq 0$ для всякого t и вместо неравенства (4) можно взять неравенство $xx - 2txy + t^2yy > 0$. После этого во всех последующих неравенствах можно заменить нестрогое неравенство на строгое и вместо (3) получить неравенство $|xy| < |x| \cdot |y|$. Таким образом, если в (3) имеет место равенство, то x и y линейно зависимы. Докажем обратное утверждение. Пусть x и y линейно зависимы, т. е. $t_1x + t_2y = 0$ для некоторых чисел t_1 и t_2 , по крайней мере одно из которых не равно 0. Если $t_1 = 0$, то $t_2 \neq 0$ и $t_2y = 0$. Но тогда $y = 0$, и в силу (1) обе части неравенства (3) равны нулю. В частности, это неравенство превращается в равенство. Пусть теперь $t_1 \neq 0$. Тогда $x = ty$, где $t = -\frac{t_2}{t_1}$. Используя (2), имеем

$$|xy| = |(ty)y| = |t(yy)| = |t| \cdot |yy| = |t| \cdot |y| \cdot |y| = |ty| \cdot |y| = |x| \cdot |y|.$$

Теорема доказана. □

Если $x, y \neq 0$, то неравенство Коши–Буняковского равносильно тому, что

$$-1 \leq \frac{xy}{|x| \cdot |y|} \leq 1.$$

Это делает корректным следующее определение.

Определение

Углом между ненулевыми векторами x и y евклидова пространства называется наименьший угол φ такой, что

$$\cos \varphi = \frac{xy}{|x| \cdot |y|}.$$

Угол между нулевым вектором и любым другим вектором не определен. Угол между векторами x и y обозначается через $(\widehat{x, y})$.

Отметим, что формула для вычисления косинуса угла между векторами в евклидовом пространстве полностью аналогична соответствующей формуле для векторов в обычном пространстве, возникавшей в курсе аналитической геометрии.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1

Для произвольных векторов x и y евклидова пространства выполнено неравенство

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (5)$$

Доказательство. Используя теорему 1 и тот факт, что $xy \leq |xy|$ (поскольку $t \leq |t|$ для любого действительного числа t), имеем

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y)(x + y) = xx + xy + yx + yy = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \leq \\ &\leq |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

Мы видим, что $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$. Извлекая из обеих частей этого неравенства квадратный корень, получаем неравенство (5). □

Неравенство (5) обобщает известный факт из элементарной геометрии, называемый неравенством треугольника: сумма длин двух сторон треугольника больше длины третьей стороны. Поэтому неравенство (5) также называется *неравенством треугольника*.

Определение

Расстоянием между векторами x и y в евклидовом пространстве называется длина вектора $x - y$. Оно обозначается через $\rho(x, y)$.

Отметим, что приведенное определение естественно. В самом деле, предположим, что в качестве евклидова пространства выступает обычное пространство с обычным скалярным произведением векторов. Представим себе, что все векторы откладываются от начала координат, и отождествим вектор с точкой, являющейся его концом. Тогда расстояние между двумя точками есть длина вектора, соединяющего их концы, т. е. длина разности векторов, соответствующих этим двум точкам (см. рис. 1).

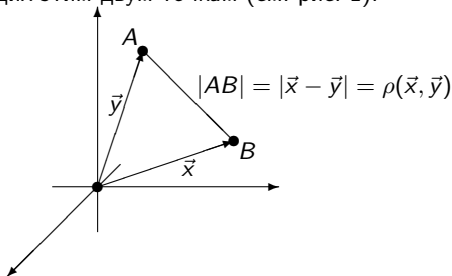


Рис. 1

Укажем еще одно следствие из теоремы 1.

Следствие 2

Если x , y и z — произвольные векторы из евклидова пространства, то

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z). \quad (6)$$

Доказательство. Используя неравенство треугольника, имеем

$$\rho(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Следствие доказано. □

Неравенство (6) можно рассматривать как еще одно обобщение упоминавшегося выше неравенства треугольника из элементарной геометрии.

В обычном пространстве координаты вектора, отложенного от начала координат, совпадают с координатами точки, в которой этот вектор заканчивается. По аналогии, при рассмотрении евклидовых пространств нередко вместо слов «вектор с координатами (x_1, x_2, \dots, x_n) » говорят о *точке с координатами (x_1, x_2, \dots, x_n)* . В частности, это позволяет говорить не о расстоянии между векторами, а о расстоянии между точками в евклидовом пространстве. Кроме того, становится возможным использовать для евклидовых пространств такие геометрические термины, как длины сторон или величины углов треугольника и т. п. Пусть A , B и C — точки в евклидовом пространстве, соответствующие векторам \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} соответственно. Тогда длина стороны AB в $\triangle ABC$ — это, естественно, расстояние между точками A и B , т. е. длина вектора $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Исходя из аналогии с обычным пространством, за внутренний угол при вершине A в $\triangle ABC$ принимают угол между векторами $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ и $\mathbf{c} - \mathbf{a}$. Длины других сторон и величины других углов в $\triangle ABC$ определяются аналогично.