# § 42. Гипербола

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

**Определение**

*Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

где $a, b > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* гиперболы.

- Как и в случае эллипса, каноническое уравнение гиперболы является ее общим уравнением в смысле понятия общего уравнения кривой на плоскости, введенного в начале § 15.
- В школьном курсе математики дается другое определение гиперболы. Связь между «школьной» гиперболой и тем понятием гиперболы, которое введено только что, будет обсуждена в конце данного параграфа.

## Вершины, фокусы, фокальные радиусы, эксцентриситет и директрисы гиперболы

Введем ряд понятий, играющих важную роль в изучении гиперболы. Пусть гипербола задана уравнением (1). Положим $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ясно, что $c > a$.

**Определения**

Точки с координатами $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ и $(0, -b)$ называются *вершинами* гиперболы, величина $a$ — *действительной полуосью* гиперболы, а величина $b$ — ее *мнимой полуосью*. Точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ называются *фокусами* гиперболы, причем фокус $F_1$ называется *правым*, а фокус $F_2$ — *левым*. Если точка $M$ принадлежит гиперболе, то расстояния $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются *фокальными радиусами*. Величина $e = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Прямые с уравнениями $x = \frac{a}{e}$ и $x = -\frac{a}{e}$ называются *директрисами* гиперболы.

«Физический смысл» введенных сейчас понятий станет ясен позднее, после того, как мы изучим форму гиперболы. Пока отметим только, что из определения эксцентриситета непосредственно вытекает следующий факт:

- *для любой гиперболы выполнено неравенство* $e > 1$.

Изучим «внешний вид» гиперболы. Предположим, что точка $M(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1). Как и в случае эллипса, легко убедиться, что гипербола симметрична относительно обеих осей координат. Поэтому достаточно изучить форму гиперболы лишь в первой четверти. Это позволяет далее считать, что $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Тогда, в силу (1),

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}. \tag{2}$$

Рассмотрим прямую с уравнением $y = \frac{b}{a} \cdot x$, точнее, луч этой прямой, расположенный в первой четверти. Ясно, что $\frac{b}{a} \cdot x > \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$. Это означает, что гипербола расположена ниже прямой. Далее,

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{b}{a} \cdot x - \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{a} \cdot \left( x - \sqrt{x^2 - a^2} \right) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{a} \cdot \frac{\left( x - \sqrt{x^2 - a^2} \right)\left( x + \sqrt{x^2 - a^2} \right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ гипербола неограниченно приближается к прямой $y = \frac{b}{a} \cdot x$, которая, таким образом, является асимптотой гиперболы.

Нетрудно видеть, что в первой четверти нет точек гиперболы, для которых $x < a$. (В самом деле, $x^2 = a^2(1 + \frac{y^2}{b^2})$, и потому если $x \geqslant 0$, то $x = a \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} \geqslant a$.) Вычислив первую и вторую производные функции (2), получим:

$$y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} \quad \text{и} \quad y'' = \frac{-ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}}.$$

В частности, $y' > 0$ и $y'' < 0$ при любом $x > 0$. Следовательно, в первой четверти гипербола возрастает и вогнута (т. е. выпукла вверх). Кроме того, из (2) легко вытекает, что в первой четверти гипербола пересекает ось абсцисс в точке $(a, 0)$, а ось ординат не пересекает. С учетом симметрии относительно осей координат и того, что прямая $y = \frac{b}{a} \cdot x$ является асимптотой, получаем кривую, изображенную на рис. 1 на следующем слайде (чтобы выделить гиперболу среди вспомогательных линий, она изображена красным цветом).

# Расположение гиперболы на плоскости (рисунок)

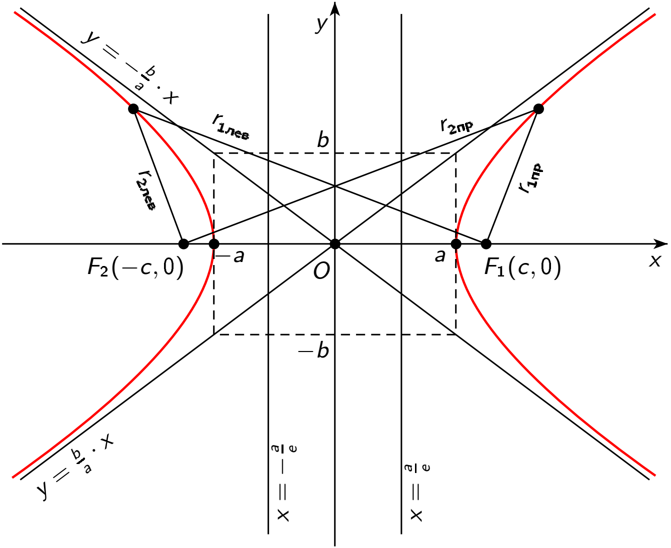


Рис. 1. Гипербола

Мы видим, что гипербола распадается на две части, одна из которых лежит в правой полуплоскости, а другая — в левой. Эти части называются, соответственно, *правой* и *левой ветвью* гиперболы. Отметим, что, в силу симметрии относительно осей координат, асимптотой гиперболы является не только прямая $y = \frac{b}{a} \cdot x$, но также и прямая $y = -\frac{b}{a} \cdot x$. Как и в случае эллипса (см. рис. 1 в § 41), директрисы гиперболы не пересекают кривую, а ее фокусы расположены «внутри» кривой. Отметим еще, что точки с координатами $(0, b)$ и $(0, -b)$ не принадлежат гиперболе, хотя и называются ее вершинами.

На рис. 1 указаны также используемые в дальнейшем обозначения для фокальных радиусов: если точка лежит на левой [правой] ветви гиперболы, то расстояния от нее до фокусов обозначаются через $r_{1\text{лев}}$ и $r_{2\text{лев}}$ [соответственно $r_{1\text{пр}}$ и $r_{2\text{пр}}$] (оба раза цифра 1 в индексах соответствует фокусу $F_1$, а цифра 2 — фокусу $F_2$).

Основная цель данного параграфа — указать два утверждения, характеризующих гиперболу как геометрическое место точек с некоторыми свойствами. Для этого нам понадобится следующий вспомогательный факт.

**Лемма о фокальных радиусах гиперболы**

*Если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, заданной уравнением (1), то*

$$r_{\mathbf{1пр}} = ex - a, \ r_{\mathbf{2пр}} = ex + a, \ r_{\mathbf{1лев}} = -ex + a, \ r_{\mathbf{2лев}} = -ex - a.$$

*Доказательство.* Если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, то

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1,$$

откуда

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 - b^2. \tag{3}$$

Предположим, что точка $M$ лежит на правой ветви гиперболы.

Используя (3), получаем, что выполнены равенства

$$r_{1\text{пр}} = |F_1 M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \\ = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}\cdot x^2 - b^2} = \\ = \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + c^2 - b^2}.$$

Учитывая, что

$$1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = e^2, \quad c = ea, \quad \text{и} \quad c^2 - b^2 = a^2,$$

имеем

$$r_{1\text{пр}} = \sqrt{e^2x^2 - 2eax + a^2} = \sqrt{(ex-a)^2} = |\, ex - a|.$$

Поскольку $x \geqslant a$, а $e > 1$, то $|ex - a| = ex - a$, и потому $r_{1\text{пр}} = ex - a$. Остальные равенства из формулировки леммы проверяются вполне аналогично. □

Следующее утверждение дает характеризацию гиперболы, которую нередко принимают за ее определение.

**Фокальное свойство гиперболы**

*Точка $M$ принадлежит гиперболе, заданной уравнением (1), тогда и только тогда, когда модуль разности расстояний от $M$ до фокусов равен $2a$.*

*Доказательство. Необходимость.* В силу леммы о фокальных радиусах гиперболы, имеем $|r_{1\text{пр}} - r_{2\text{пр}}| = |r_{1\text{лев}} - r_{2\text{лев}}| = 2a$.

*Достаточность.* Пусть $M(x, y)$ — точка плоскости, для которой выполнено равенство $\big||F_1M| - |F_2M|\big| = 2a$. Тогда

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\,\right| = 2a,$$

или

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2}\,.$$

# Фокальное свойство гиперболы (2)

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2.$$

После очевидных преобразований имеем

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Еще раз возведем полученное равенство в квадрат. Получим

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

или

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Поскольку $a^2 - c^2 = -b^2$, последнее равенство можно переписать в виде

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Разделив это равенство на $-a^2b^2$, мы получим уравнение (1). $\square$

Следующее утверждение дает еще одну характеризацию гиперболы.

**Директориальное свойство гиперболы**

*Точка $M$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда отношение расстояния от $M$ до фокуса к расстоянию от $M$ до соответствующей этому фокусу директрисы равно эксцентриситету гиперболы.* $\square$

Мы не приводим доказательство этого утверждения, поскольку оно вполне аналогично доказательству директориального свойства эллипса (см. § 41).

Гипербола обладает следующим *оптическим свойством*:

**Оптическое свойство гиперболы**

*Свет от источника, находящегося в одном из фокусов гиперболы, отражается противоположной ветвью гиперболы таким образом, что продолжения отраженных лучей пересекаются во втором фокусе.*

*Доказательство* этого утверждения во многом аналогично доказательству оптического свойства эллипса (см. § 41), отличаясь от него лишь незначительными деталями. Поэтому мы не будем воспроизводить все выкладки, а ограничимся только схемой рассуждений. Эти рассуждения иллюстрирует рис. 2.

Будем считать, что луч света выпущен из правого фокуса (случай левого фокуса разбирается вполне аналогично). Обозначим точку пересечения этого луча с левой ветвью гиперболы через $M$, а ее координаты — через $(x_0, y_0)$. Требуется доказать, что луч $MF_2$ является продолжением отражения исходного луча от гиперболы. Обозначим касательную к гиперболе в точке $M$ через $\ell$, угол между прямой $\ell$ и лучом $F_1M$ — через $\varphi$, а угол между $\ell$ и лучом $MF_2$ — через $\psi$ (см. рис. 2). Поскольку угол падения равен углу отражения, требуется доказать, что $\varphi = \psi$.

Как и в § 41 при доказательстве оптического свойства эллипса, мы докажем, что $\sin\varphi = \sin\psi$. Ясно, что этого достаточно для наших целей. Рассуждая так же, как в § 41 при выводе уравнения касательной к эллипсу, получаем, что прямая $\ell$ имеет уравнение $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$. Положим $N = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}$. Используя формулу для расстояния от точки до прямой на плоскости (формула (15) в § 15), найдем расстояние $d_1$ от фокуса $F_1$ до прямой $\ell$:

$$d_1 = \frac{\left|\frac{x_0 c}{a^2} - 1\right|}{N} = \frac{|x_0 c - a^2|}{Na^2} = \frac{a^2 - x_0 c}{Na^2}$$

(последнее равенство объясняется тем, что $x_0 < 0$, а $c > 0$, откуда $x_0 c - a^2 < 0$). С другой стороны, в силу леммы о фокальных радиусах гиперболы, $r_{1\text{лев}} = -ex_0 + a = -\frac{c}{a} \cdot x_0 + a = \frac{a^2 - x_0 c}{a}$. Следовательно,

$$\sin\varphi = \frac{d_1}{r_{1\text{лев}}} = \frac{(a^2 - x_0 c)a}{Na^2(a^2 - x_0 c)} = \frac{1}{Na}.$$

Аналогично, обозначив через $d_2$ расстояние от $F_2$ до $\ell$, находим, что $d_2 = \frac{-x_0 c - a^2}{Na^2}$ и $r_{2\text{лев}} = \frac{-x_0 c - a^2}{a}$, откуда $\sin\psi = \frac{d_2}{r_{2\text{лев}}} = \frac{1}{Na}$. Следовательно, $\sin\varphi = \sin\psi$. $\square$

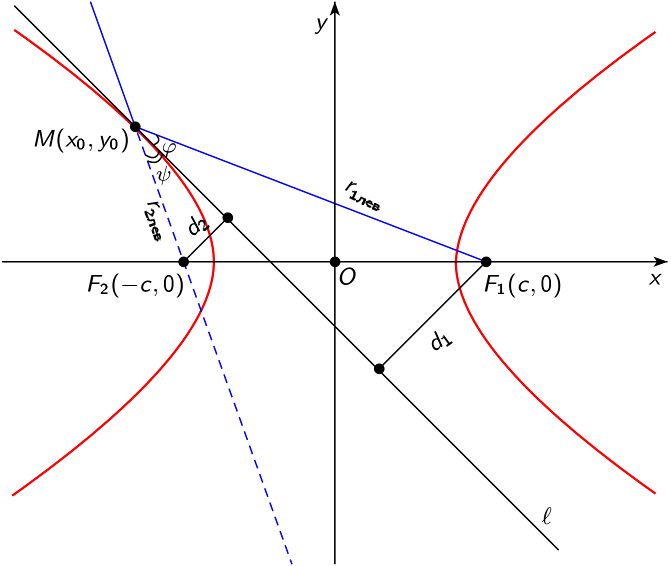


Рис. 2. К доказательству оптического свойства гиперболы

В школьном курсе математики гиперболой называется график функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$. Естественно возникает вопрос, как соотносится «школьная» гипербола с гиперболой, введенной в этом параграфе. Отвечая на этот вопрос, можно ограничиться случаем, когда $k > 0$ (если $k < 0$, можно сделать замену неизвестных $x' = -x$, $y' = y$).

Рассмотрим новую систему координат $Ox'y'$, полученную из старой поворотом на $45°$. Используя формулы поворота системы координат (см. формулы (9) в § 14), получаем, что

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases} \qquad (4)$$

Можно считать, что $x \neq 0$, так как кривая, заданная уравнением $y = \frac{k}{x}$, очевидно не имеет точек, абсцисса которых равна 0. Поэтому равенство $y = \frac{k}{x}$ эквивалентно равенству $xy = k$. Если подставить в него $x$ и $y$ из формул (4), мы получим

$$k = xy = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{1}{2}\big((x')^2 - (y')^2\big).$$

Это означает, что в системе координат $Ox'y'$ «школьная» гипербола определяется уравнением $\frac{(x')^2}{2k} - \frac{(y')^2}{2k} = 1$. Поскольку $k > 0$, то $2k = a^2$ для некоторого $a > 0$. Следовательно, последнее уравнение можно переписать в виде $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{a^2} = 1$. Мы получили уравнение вида (1), в котором $a = b$.

**Определение**

Гипербола, заданная уравнением вида (1), в котором $a = b$, называется *равносторонней*.

Таким образом,

- *«школьная» гипербола является частным случаем гиперболы, определяемой уравнением* (1)*, а именно, равносторонней гиперболой. Каноническое уравнение эта гипербола имеет в системе координат, которая получается поворотом на угол* $45^\circ$ *той системы координат, в которой она имеет уравнение вида* $y = \frac{k}{x}$ *при* $k > 0$.

Проведенные рассуждения иллюстрирует рис. 3 на следующем слайде.

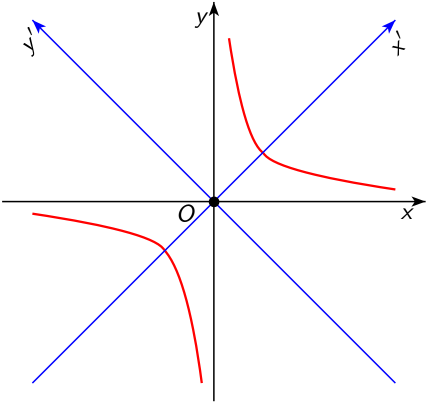


Рис. 3. «Школьная» гипербола