Двойной интеграл

02.09.20

Квадрируемость. Множ-во D наз-ся квадрируемым, если его внутр. и внешняя площади совпадают: $S_*(D) = S^*(D)$, где $S_*(D) = \sup\limits_{P \subseteq D} S(P)$, $S^*(D) = \inf\limits_{Q \supseteq D} S(Q) \Rightarrow S(D) := S_*(D) = S^*(D)$

Критерий квадрируемости:

1) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists P \subseteq D \; \exists Q \supseteq D : S(Q) - S(P) < \varepsilon$

2) граница D, ∂D, имеет площадь ноль, то есть для любого наперед взятого $\varepsilon > 0$ найдется мн-ек площади меньше ε, покр. кривую ∂D

Напомним, что

а) любая спрямляемая кривая имеет площадь ноль

б) кривая вида $\{(x, f(x)) \mid f(x)$ - непрерывна на $[a, b]\}$ имеет площадь ноль

Обратное неверно.

Основные свойства площади.

1) Монотонность. $\forall D, G \, (D \subseteq G \Rightarrow S(D) \leq S(G))$

2) Аддитивность: $\forall D, G \, (\mathring{D} \cap \mathring{G} = \emptyset \Rightarrow S(D \cup G) = S(D) + S(G))$

3) Инвариантность: площади конгруэнтных фигур равны

Опр-ие двойного интеграла

Пусть D - квадр. плоская фигура и пусть функция $f(x, y)$ опр. на D. Разобьем D пр-ным образом на n квадр. фигур, не имеющих общих внутренних точек: $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$: D_i - кв., $\mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset$ при $i \neq j$

$\{D_i\}_{i=1}^{n}$ - разбиение мн-ва D. Обозн его как τ ($\tau := \{D_i\}_{i=1}^{n}$)

Для каждого участка разбиения D_i находим

$S(D_i)$ - площадь и $d_i = \sup\limits_{M,N \in D_i} \rho(M,N)$ - диаметр

Введем диаметр разбиения $d = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$

Выберем пр. точку на каждом участке разбиения $N_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$

Составим интегр. сумму:

$$\sigma = \sigma(\tau, \{N_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(N_i) S(D_i)$$

Опр.

Если сущ-ет предел I интегр. суммы (1), не зависящий от способа τ разбиения множества D на части и от выбора точек N_i, то f наз-ся интегрируемой по мн-ву D, а число I наз-ся интегралом от функции f по множеству D, обозначается:

$$\boxed{I = \iint_D f(N)\,dS = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy}$$

Необходимые и дост. условия сущ-ия двойного интеграла

• Интегрируемость и ограниченность.

о/п $\forall E \subset D: S(E) = 0$ f - неогр на $D \setminus E$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall \tau: d < \delta_\varepsilon\ \forall \{N_i\}$ ~~вып~~ $|\sigma - I| < \varepsilon$

$\tau = \{D_i\}$ $D_j: S(D_j) = 0$, $E = \cup D_j \Rightarrow S(E) = 0$

f - неогр. на $D \setminus E = \cup D_k$, $S(D_k) > 0$

f неогр. на D_1

$$\exists \{N^{(p)}\}_{p=1}^{\infty} \subset D_1 \quad f(N^{(p)}) \xrightarrow[p\to\infty]{} \infty$$

$\forall i = \overline{2,n} \quad \forall N_i \in D_i$

$$I - \varepsilon < \sigma = \underbrace{\sum_{i=2}^{n} f(N_i)\, S(D_i)}_{\sigma_1} + f(N^{(p)})\, S(D_1) < I + \varepsilon$$

$$\frac{I - \varepsilon - \sigma_1}{S(D_1)} < f(N^{(p)}) < \frac{I + \varepsilon - \sigma_1}{S(D_1)}$$

при $p \to \infty$ получаем противоречие.

Замечание 1. Огр-ть функции на измеримом ~~плоском множестве D и неограничена на~~ плоском множестве не является необх. усл. ее интегрируемости.

Теорема 1. Если ф-ия f инт. на квадрируемом мн-ве D и неогр. на нем, то найдется $E \subset D$ такое, что $S(E) = 0$ и f огр. на $D \setminus E$. (док-во слева)

Замечание 2 Сущ-ым в док-ве огр-ти f на $D \setminus E$ послужило сущ-ие разбиений насколь угодно мелкие части пол-ой меры

Следствие Если f - инт. на D, имеющем разбиения насколь угодно мелкие части пол-ой меры, то f огр-на на D.

Теорема 2 Если функция f интегрируема на открытом (квадр) множестве, то она огр-на на нём.

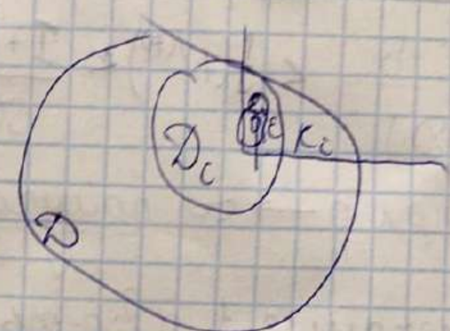
D - открытое f - инт. на D

$\cancel{\forall\varepsilon}\ \forall\delta>0\ \exists\tau: d<\delta \wedge S(D_i)>0$

$K,\ d<\delta$

$K_i: \underbrace{D\cap K_i}_{D_i}\neq\varnothing,\ i=\overline{1,n}$

$\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i = D \qquad \forall q\in D \to q\in K_i \to q\in D_i$



$\forall i\ S(D_i)>0$

$\forall q\in D_i\subset D\ \exists\varepsilon>0: B(q,\varepsilon)\subset D$

2 случая:

1) $q\in \mathring{K}_i \quad \exists \varepsilon_1>0: B(q,\varepsilon_1)\subset K_i$

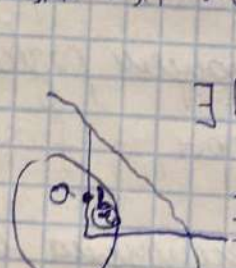
$r=\min\{\varepsilon,\varepsilon_1\}$

$B(q,r)\subset D_i$

$S(D_i)\geq S(q,r) = \pi r^2>0$

2) $q\in\partial K_i \setminus \mathring{K}_i$

граничная



$\exists b\in K_i\cap B(q,\varepsilon)$

$\exists\varepsilon_1>0: B(b,\varepsilon_1)\subset K_i$

$B(q,\varepsilon)\cap B(b,\varepsilon_1)$ - открытое множество $\subset$

$\subset D_i$

$\exists\, r > 0 : B(b, r) \subset D_i$

$S(D_i) > 0$

rmg