Поверхностные интегралы

6 Формула Остроградского–Гаусса

Пусть V — элементарная замкнутая область в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\Sigma = \partial V$ и $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Σ. Пусть $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в V. Тогда

$$\oiint\limits_{\Sigma^+} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

или

$$\oiint\limits_{\Sigma^+} (\mathbf{F}, \mathbf{n})\,d\sigma = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dv,$$

где $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}, \quad \operatorname{div}\mathbf{F} = (\nabla, \mathbf{F}), \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$.

7 Формула Стокса

Пусть V — некоторая область в $\mathbb{R}^3$. Пусть Σ — гладкая ориентированная поверхность с полем нормали $\mathbf{n}$, лежащая в V. Пусть $L = \partial\Sigma$ (ориентации L и Σ согласованы). Пусть P, Q, R непрерывны в V вместе со своими частными производными. Тогда

$$\oint_{L^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

или

$$\oint_{L^+} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \iint\limits_\Sigma (\operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{n})\,d\sigma, \quad \text{где } \operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F},$$

или

$$\oint_{L^+} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \iint\limits_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$

Числовые ряды

Пусть $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

a_n — *общий член ряда*

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ — *частичная сумма ряда*

Определение. Если существует (конечный) предел S частичных сумм ряда, то ряд называется *сходящимся*, а число S называется *суммой ряда*:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Обозначения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ – сх.}$$

В противном случае говорят, что *ряд расходится*.

Примеры: $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n.$

Замечания:

1) Присоединение, удаление, изменение конечного числа элементов ряда не влияет на его сходимость/расходимость.

2) Умножение (всех элементов) ряда на $const \neq 0$ не влияет на его сходимость/расходимость.

3) Сумма сходящихся рядов есть сходящийся ряд.

Необходимые условия сходимости ряда

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $r_n := S - S_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i$ — *остаток ряда*.

1) $a_n \to 0$;

2) $r_n \to 0$.