Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Теорема (о перестановке двух несобственных интегралов)**.** Пусть

(a) функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$,

(b) интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно $y\geqslant c$,

(c) интеграл $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ сходится равномерно относительно $x\geqslant a$,

(d) один из интегралов $\displaystyle\int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty} |f(x,y)|\,dy$ или $\displaystyle\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx$ определён.

Тогда
$$\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy.$$

Следствие. Если

(a) функция $f(x,y)\geqslant 0$ и непрерывна на $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$,

(b) интеграл $I(y)=\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ — непрерывная функция на $y\geqslant c$,

(c) интеграл $I(x)=\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ — непрерывная функция на $x\geqslant a$,

(d) один из повторных интегралов $\displaystyle\int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ или $\displaystyle\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ определён,

то существует и второй повторный интеграл и
$$\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy.$$

Пример. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

Разрывный множитель Дирихле:
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & a>0;\\ 0, & a=0;\\ -\frac{\pi}{2}, & a<0.\end{cases}$$

Пример. Вычислить интеграл Эйлера–Пуассона: $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Пример. Вычислить интегралы Лапласа: $(k\neq 0)$
$$y(a)=\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{k^2+x^2}\,dx,\quad a\geqslant 0,\qquad z(a)=\int_0^{\infty}\frac{x\sin ax}{k^2+x^2}\,dx,\quad a>0.$$

Эйлеровы интегралы

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \qquad \text{— интеграл Эйлера 1 рода (B-функция)}$$

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx \qquad \text{— интеграл Эйлера 2 рода (Г-функция)}$$

Свойства* B*-функции:

- Область определения: $a > 0$, $b > 0$
- Симметричность: $\mathrm{B}(a,b) = \mathrm{B}(b,a)$
- Формула приведения: $\mathrm{B}(a+1,b) = \frac{a}{a+b}\mathrm{B}(a,b)$
- Представление в форме интеграла 1 рода: $\mathrm{B}(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt$

Свойства* Γ*-функции:

- Область определения: $a > 0$
- Непрерывность
- Дифференцируемость
- Формула приведения: $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$
- Связь с B-функцией: $\mathrm{B}(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$
- Формула дополнения: $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin a\pi}$, $0 < a < 1$