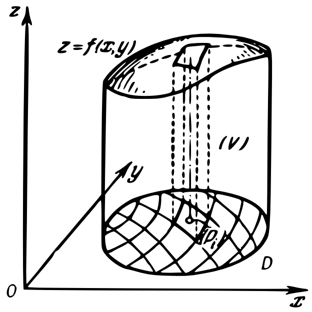
Двойной интеграл

8 Приложения двойного интеграла

1. $\iint_D dS = S(D)$

2. Если $f(x,y) \geqslant 0$ в D, то $\iint_D f(x,y)\,dS = V(\text{цил.})$ — объём криволинейного цилиндра с образующими, параллельными оси Oz, основанием D, лежащим в плоскости Oxy, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$.



3. Если $\rho(x,y)$ — плотность распределения массы на плоской пластине D ($\rho(x,y) \geqslant 0$ в D), то $\iint_D \rho(x,y)\,dS = m$ — масса пластины D.

Тройной интеграл

1 Объём пространственной фигуры

Рассмотрим ограниченное пространственное множество (тело) Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$). Пусть P — произвольный вложенный в Ω многогранник ($P \subseteq \Omega$) и Q — произвольный многогранник, объемлющий Ω ($Q \supseteq \Omega$). Обозначим $V(P)$ объём многогранника P.

Определение 1. *Внутренним объёмом* тела Ω называется точная верхняя грань объёмов многогранников, вложенных в Ω:

$$V_*(\Omega) = \sup_{P \subseteq \Omega} V(P).$$

Внешним объёмом тела Ω называется точная нижняя грань объёмов многогранников, объемлющих Ω:

$$V^*(\Omega) = \inf_{Q \supseteq \Omega} V(Q).$$

Тело Ω называется *кубируемым*, если его внутренний и внешний объёмы совпадают. Общее значение внутреннего и внешнего объёмов называется *объёмом кубируемого тела* Ω:

$$V(\Omega) := V_*(\Omega) = V^*(\Omega).$$

Критерии кубируемости тела Ω:

1) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists P \subseteq \Omega \;\; \exists \Omega \supseteq D \;:\; V(Q) - V(P) < \varepsilon$ $\quad$ (P, Q — многогранники);

2) граница множества Ω, $\partial\Omega$, имеет объём ноль, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \text{многогранник } R \supseteq \partial\Omega \;:\; V(R) < \varepsilon.$$

Основные свойства объёма

1. Монотонность:
$$\forall\, \Omega_1, \Omega_2 \quad (\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \;\Rightarrow\; V(\Omega_1) \leqslant V(\Omega_2))$$

2. Аддитивность:
$$\forall\, \Omega_1, \Omega_2 \quad (\mathring{\Omega}_1 \cap \mathring{\Omega}_2 = \emptyset \;\Rightarrow\; V(\Omega_1 \cup \Omega_2) = V(\Omega_1) + V(\Omega_2))$$

3. Инвариантность: объёмы конгруэнтных тел равны

Т.О. объём есть *Жорданова мера* пространственных множеств.

2 Определение тройного интеграла

Пусть Ω — кубируемое тело и пусть функция $f(x,y,z)$ определена на Ω.

Разобьём множество Ω произвольным образом на n кубируемых тел, не имеющих общих внутренних точек:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \; : \; \Omega_i \text{ — кубируемо,} \quad \mathring{\Omega}_i \cap \mathring{\Omega}_j = \emptyset \;\text{ при } i \neq j.$$

Построенные таким образом множества $\{\Omega_i\}_{i=1}^{n}$ называют *разбиением тела* Ω. Будем обозначать его τ.

Для каждого участка разбиения Ω_i найдём

$$V(\Omega_i) \text{ — объём} \quad \text{и} \quad d_i = \sup_{M,N \in \Omega_i} \rho(M,N) \text{ — диаметр.}$$

Введём *диаметр разбиения*:

$$d = \max_{i=\overline{1,n}} d_i.$$

Выберем произвольную точку на каждом участке разбиения: $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Omega_i$.
Составим *интегральную сумму*:

$$\sigma = \sigma(\tau, \{N_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(N_i) V(\Omega_i). \tag{1}$$

Определение 2. Если существует предел I интегральных сумм (1), не зависящий от способа τ разбиения тела Ω на части (указанным образом) и от выбора точек N_i, то функция f называется *интегрируемой* по множеству Ω, а число I называется интегралом от функции f по множеству Ω, обозначается:

$$I = \iiint_{\Omega} f(N)\, dV = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz.$$

3 Вычисление тройного интеграла

Случай 1: Ω — прямоугольный параллелепипед: $\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [k,l]$.

Обозначим $\Pi = [a,b] \times [c,d]$ проекцию Ω на плоскость Oxy.

Теорема. Пусть функция $f(x,y,z)$ интегрируема на Ω и пусть для каждой точки $(x,y) \in \Pi$ существует интеграл $\int_k^l f(x,y,z)\,dz = I(x,y)$. Тогда функция $I(x,y)$ интегрируема на Π и

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_\Pi I(x,y)\,dxdy$$

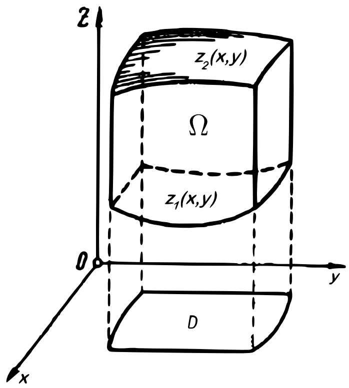
или

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_\Pi dxdy \int_k^l f(x,y,z)\,dz.$$

Замечание. Если при этом функция $I(x,y)$ при каждом $x \in [a,b]$ интегрируема по y на отрезке $[c,d]$, то

$$\iint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_k^l f(x,y,z)\,dz.$$

Случай 2: Ω — цилиндрическая область с образующей, параллельной оси Oz, сечением D, ограниченная снизу поверхностью $z = z_1(x,y)$ и сверху поверхностью $z = z_2(x,y)$.



Теорема. Пусть функция $f(x,y,z)$ интегрируема на Ω и пусть для каждой точки $(x,y) \in D$ существует интеграл $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz = I(x,y)$. Тогда функция $I(x,y)$ интегрируема на D и

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D I(x,y)\,dxdy$$

или

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Замечание. Если при этом область D имеет вид $D = \{(x,y)|\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),\ x \in [a,b]\}$ и для каждого $x \in [a,b]$ существует интеграл $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} I(x,y)\,dy = J(x)$, то

$$\iint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

4 Замена переменных в тройном интеграле

Пусть переменные x, y, z связаны с переменными u, v, w некоторыми соотношениями

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w), \quad (u, v, w) \in \omega, \tag{$*$}$$

относительно которых предполагается:

1) функции системы (*) осуществляют взаимно-однозначное соответствие между ω и Ω;
2) функции φ, ψ, χ непрерывны в ω вместе со своими частными производными первого порядка;
3) якобиан системы (*) не равен нулю в ω:

$$J(u, v, w) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0, \quad (u, v, w) \in \omega.$$

Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x; y; z) dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{\omega} f\Big(\varphi(u, v, w); \psi(u, v, w); \chi(u, v, w)\Big)\, |J|\, du\, dv\, dw.$$

Цилиндрическая СК (r, φ, z):

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \qquad r \geqslant 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Сферическая СК (r, φ, ψ):

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi, \\ y = r\cos\psi\sin\varphi, \\ z = r\sin\psi, \end{cases} \qquad r \geqslant 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$