Несобственные интегралы

Интегралы от произвольных функций

Признак Абеля. Пусть $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, $g(x)$ монотонна и ограничена на $[a,b)$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Признак Дирихле. Пусть интегралы $\int_a^A f(x)\,dx$ ограничены в совокупности при $A\in[a,b)$, $g(x)\to 0$ при $x\to b-0$ и монотонна на $[a,b)$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Абсолютная и условная сходимость интегралов

Если сходится $\int_a^b |f(x)|\,dx$, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*.

Абсолютная сходимость $\Rightarrow$ сходимость.

Сходимость $\not\Rightarrow$ абсолютная сходимость.

Пример.

Если $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, а $\int_a^b |f(x)|\,dx$ расходится, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *условно сходящимся*.

Интегралы, зависящие от параметра

Равномерный предельный переход

Пусть функция $f(x,y)$ определена на $X\times Y$, $b\in Y'$.

Пусть для каждого $x\in X$ существует

$$\lim_{y\to b} f(x,y)=\varphi(x).$$

Тогда $\varphi(x)$ называется *поточечным пределом функции $f(x,y)$ при стремлении $y\to b$*.

Определение. Функция $f(x,y)$ *сходится к функции $\varphi(x)$ равномерно на множестве X при $y\to b$*, если

(Коши) $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall\,y\in Y\ \forall\,x\in X\ \left(0<|y-b|<\delta\quad\Rightarrow\quad|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon\right)$

(Гейне) $\forall\,\{y_n\}\ :\ \begin{cases} y_n\in Y\\ y_n\to b\\ y_n\neq b\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f(x,y_n)\overset{X}{\rightrightarrows}\varphi(x)$ при $n\to\infty$.

При этом функция $\varphi(x)$ называется *равномерным пределом функции $f(x,y)$ на множестве X*.
Обозначения: $f(x,y)\overset{X}{\rightrightarrows}\varphi(x)$ при $y\to b$.

Утверждение. Определение Коши и Гейне равномерного предела функции равносильны.

Теорема (критерий Коши).

$$f(x,y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x) \ \text{ при } y \to b \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall\, y', y'' \in Y \ \forall\, x \in X$$
$$((0 < |y' - b| < \delta) \ \wedge (0 < |y'' - b| < \delta) \ \Rightarrow \ \ |f(x,y') - f(x,y'')| < \varepsilon).$$

Теорема (о непрерывности предельной функции). Если при каждом $y \in Y$ функция $f(x,y)$ непрерывна по x на X и $f(x,y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to b$, то $\varphi(x)$ непрерывна на X.

Теорема (о перестановке пределов). Пусть функция $f(x,y)$ определена на $X \times Y$, $a \in X'$, $b \in Y'$. Пусть при каждом $y \in Y$ функция $f(x,y) \to \psi(y)$ при $x \to a$ и $f(x,y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to b$. Тогда

$$\exists \lim_{x \to a} \varphi(x) = A, \quad \exists \lim_{y \to b} \psi(y) = B \quad \text{и} \ \ A = B.$$

Теорема 1 (достаточных условиях равномерной сходимости). Пусть для любого $x \in [a,b]$ $f(x,y) \to \varphi(x)$ монотонно при монотонном стремлении $y \to b$. Пусть при каждом $y \in Y$ функция $f(x,y)$ и функция $\varphi(x)$ непрерывны на $[a,b]$. Тогда $f(x,y) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to b$.

Теорема 2 (о достаточных условиях равномерной сходимости). Пусть $f(x,y)$ непрерывна как функция двух переменных на $[a,b] \times [c,d]$. Тогда для любого $y_0 \in [c,d]$ $f(x,y) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to y_0$.

Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция $f(x,y)$ определена на $[a,b] \times Y$.

Пусть при каждом $y \in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x на $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x,y)\, dx =: I(y)$$

— *собственный интеграл, зависящий от параметра $y \in Y$*.

Теорема (о предельном переходе под знаком собственного интеграла).

Пусть при каждом $y \in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x на $[a,b]$. Пусть $y_0 \in Y'$ и $f(x,y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to y_0$. Тогда $\varphi(x)$ интегрируема на $[a,b]$, существует $\lim\limits_{y \to y_0} I(y)$ и

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Теорема (о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра).

Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b] \times [c,d]$. Тогда $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

Теорема (о дифференцируемости собственного интеграла, зависящего от параметра).

Пусть при каждом $y \in [c,d]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x на $[a,b]$. Пусть $f'_y(x,y)$ непрерывна на $[a,b] \times [c,d]$. Тогда $I(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и

$$\frac{d}{dy} I(y) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\, dx, \quad y \in [c,d].$$

Пример. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = I(b)$, $b \geqslant a > 0$.

Теорема (об интегрируемости собственного интеграла, зависящего от параметра)**.**
Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$. Тогда для каждого $t \in [c,d]$ функция $I(y)$ интегрируема на $[c,t]$ и

$$\int_c^t dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^t f(x,y)\,dy.$$

Пример. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = I(b)$, $b \geqslant a > 0$.