Квадратичные формы

Семке Даниил
Кн-102, МЕН-190207
01.05.2020

1. 12.1.4 (а) Найти нормальный вид над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$

$x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=(x_1^2+2x_1(2x_2+x_3)+(4x_2^2+4x_2x_3+x_3^2))+$
$+(-3)x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3=(x_1+2x_2+x_3)^2-3(x_2^2+\frac{2}{3}x_2x_3+\frac{1}{9}x_3)+\frac{7}{3}x_3^2=$
$=(x_1+2x_2+x_3)^2-3(x_2+\frac{1}{3}x_3)^2+\frac{7}{3}x_3^2 \circledequal \left[\begin{array}{l} y_1=x_1+2x_2+x_3 \\ y_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(x_2+\frac{1}{3}x_3) \\ y_3=\sqrt{\frac{3}{7}}x_3 \end{array}\right] = y_1^2-y_2^2+y_3^2$ над $\mathbb{R}$

$\circledequal \left[\begin{array}{l} z_1=x_1+2x_2+x_3 \\ z_2=\frac{1}{\sqrt{3}i}(x_2+\frac{1}{3}x_3) \\ z_3=\sqrt{\frac{3}{7}}x_3 \end{array}\right] = z_1^2+z_2^2+z_3^2$ над $\mathbb{C}$

Ответ: $y_1^2-y_2^2+y_3^2$ над $\mathbb{R}$
$z_1^2+z_2^2+z_3^2$ над $\mathbb{C}$

2. №12.1.5(в)

в) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3= \left[\begin{array}{l} x_1=y_1-y_2-y_3 \\ x_2=y_1+y_2-y_3 \\ x_3=y_3 \end{array}\right] = y_1^2+\cancel{y_1y_2}-\cancel{y_1y_3}-\cancel{y_1y_2}-y_2^2+\cancel{y_2y_3}-$
$-\cancel{y_1y_3}-\cancel{y_2y_3}+\cancel{y_3^2}+\cancel{y_1y_3}-\cancel{y_2y_3}-\cancel{y_3^2}+\cancel{y_1y_3}+\cancel{y_2y_3}-y_3^2=y_1^2-y_2^2-y_3^2$

Ответ: $y_1^3-y_2^2-y_3^2$
$\begin{cases} x_1=y_1-y_2-y_3 \\ x_2=y_1+y_2-y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

Проверим, что система не вырождена:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+1\neq 0$

№3 Приведение к главным осям

12.1.7(а)

а) $6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3=$

Составим матрицу A квадратичной формы

$$A=\begin{pmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения матрицы A:

$$\begin{vmatrix}6-\lambda & -2 & 2\\ -2 & 5-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 7-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9)=0$$

$$\left[\begin{aligned}\lambda&=3\\ \lambda&=6\\ \lambda&=9\end{aligned}\right.$$

1) $\lambda_1=3$

$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}+2\\+2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_1=\frac{v_1}{|v_1|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}+2\\+2\\-1\end{pmatrix}$

2) $\lambda_2=6$

$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_2=\frac{v_2}{|v_2|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

3) $\lambda_3=9$

$\vec{v}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_3=\frac{e_3}{|e_3|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$$T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$T^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$D=T^TAT=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}6 & 6 & -3\\ -6 & 12 & 12\\ 18 & -9 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}27 & 0 & 0\\ 0 & 54 & 0\\ 0 & 0 & 81\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

Ответ:
$$\begin{cases}x_1=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3\\ x_2=\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3\\ x_3=-\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3\end{cases};\quad \underline{3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2}$$