§ 3. Размещения, перестановки, сочетания

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Пусть X — непустое конечное множество из n элементов и $k \leqslant n$. *Размещением из n элементов по k элементов* на множестве X называется произвольный упорядоченный набор из k попарно различных элементов множества X. Число размещений из n элементов по k элементов обозначается через A_n^k.

Предложение о числе размещений

$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Доказательство. Первый элемент размещения можно выбрать n способами. После того, как он зафиксирован, второй элемент можно выбрать $n-1$ способом. Таким образом, первые два элемента можно выбрать $n(n-1)$ способом. После того, как они зафиксированы, третий элемент можно выбрать $n-2$ способами, и потому для выбора первых трех элементов есть $n(n-1)(n-2)$ возможности. Продолжая эти рассуждения, получаем, что $A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$. Отсюда и из определения факториала числа вытекает второе равенство из формулировки предложения. $\square$

Определение

Пусть X — непустое конечное множество из n элементов. *Перестановкой* на множестве X называется размещение из n элементов по n элементов на этом множестве. Число перестановок из n элементов обозначается через P_n.

Из определения вытекает, что перестановка на конечном множестве — это произвольный упорядоченный набор из всех элементов этого множества.
Из предложения о числе размещений немедленно вытекает

Следствие о числе перестановок

$P_n = n!$. □

Определение

Говорят, что перестановка $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ получена из перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *транспозицией* символов i_k и i_m, если $j_k = i_m$, $j_m = i_k$ и $j_r = i_r$ для всех $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, отличных от k и m. Транспозиция называется *смежной*, если $k = m + 1$ или $m = k + 1$.

Определение

Говорят, что символы i_k и i_m образуют *инверсию* в перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, если $k < m$, а $i_k > i_m$. Число инверсий перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ обозначается через $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Перестановка называется *четной*, если число $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ четно, и *нечетной*, если это число нечетно.

Например, перестановка $(2, 1, 4, 3, 5)$ четна, так как $I(2, 1, 4, 3, 5) = 2$ (в этой перестановке две инверсии: 2 стоит перед 1, а 4 — перед 3), а перестановка $(2, 3, 5, 4, 1)$ нечетна, так как $I(2, 3, 5, 4, 1) = 5$ (здесь инверсий пять: 2, 3, 4 и 5 стоят перед 1, а 5 — еще и перед 4).

Предложение о транспозиции и четности

Если перестановка $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ получена из перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ транспозицией, то четности этих перестановок различны.

Доказательство. Будем считать, что перестановка $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ получена из перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ транспозицией символов i_k и i_m и $k < m$. Предположим сначала, что наша транспозиция — смежная, т. е. $m - k = 1$. Очевидно, что в этом случае после транспозиции число инверсий увеличится на 1, если $i_k < i_m$, и уменьшится на 1 противном случае. В любом случае четность перестановки изменится. Пусть теперь $m - k > 1$. Тогда нашу транспозицию можно заменить на $2m - 2k - 1$ смежную транспозицию: надо сначала последовательно переставить i_k на $(k + 1)$-е, $(k + 2)$-е, $\dots$, m-е место, сделав $m - k$ смежных транспозиций, а затем, с помощью $m - k - 1$ смежной транспозиции, переставить символ i_m с $(m - 1)$-го места, на котором он окажется в результате предыдущих действий, на $(m - 2)$-е, $(m - 3)$-е, $\dots$, k-е место. Поскольку каждая смежная транспозиция меняет четность перестановки, а мы применим нечетное число смежных транспозиций, в результате четность перестановки изменится. $\square$

Теорема об упорядочении перестановок

Все перестановки на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, *где* $n > 1$, *можно упорядочить так, что каждая следующая перестановка будет получаться из предыдущей транспозицией пары символов. При этом в качестве первой перестановки можно взять любую перестановку на множестве* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 2$ утверждение очевидно, поскольку на двухэлементном множестве имеется всего две перестановки, получающиеся друг из друга транспозицией. Пусть теперь $n > 2$ и $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — произвольная перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. По предположению индукции все перестановки множества $\{1, \ldots, i_1 - 1, i_1 + 1, \ldots, n\} = \{i_2, \ldots, i_n\}$ можно упорядочить так, что первой будет идти перестановка $(i_2, \ldots, i_n)$, а каждая следующая перестановка будет получаться из предыдущей транспозицией пары символов. Приписав к каждой из полученных перестановок на первом месте элемент i_1, мы получим последовательность из всех перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, на первом месте которых стоит i_1. Пусть последняя перестановка в этой последовательности имеет вид $(i_1, j_2, \ldots, j_n)$. Применим к ней транспозицию символов i_1 и j_2, и полученную перестановку $(j_2, i_1, j_3, \ldots, j_n)$ припишем к нашей последовательности (на последнее место).

Теперь применим предположение индукции к множеству $\{1, \ldots, j_2 - 1, j_2 + 1, \ldots, n\} = \{i_1, j_3, \ldots, j_n\}$ и выпишем, начиная с $(j_2, i_1, j_3, \ldots, j_n)$, последовательность всех перестановок, в которых первый символ равен j_2, так, чтобы выполнялось условие из формулировки теоремы. В последней перестановке полученной последовательности поменяем местами j_2 с любым символом, кроме i_1, и вновь применим предположение индукции. Продолжим этот процесс. В конце каждого очередного шага будем «выдвигать» на первое место элемент, который там до этого не был (до тех пор, пока это возможно), и применять предположение индукции к перестановке, состоящей из всех остальных элементов. Через n шагов мы получим упорядоченную нужным образом последовательность всех перестановок на исходном множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. $\square$

Следствие о числе [не]четных перестановок

Если $n \geqslant 2$, то как число четных, так и число нечетных перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ равно $\frac{n!}{2}$.

Доказательство. В силу следствия о числе перестановок, общее число перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ равно $n!$. При $n \geqslant 2$ это число четно. Рассмотрим упорядоченную последовательность всех перестановок, существование которой установливается теоремой об упорядочении перестановок. Как показывает предложение о транспозиции и четности, при переходе от любой перестановке в этой последовательности к следующей четность перестановки меняется. Поскольку общее число перестановок в этой последовательности четно, получаем, что она содержит равное число четных и нечетных перестановок. Еще раз ссылаясь на следствие о числе перестановок, получаем требуемое заключение. $\square$

Определение

Пусть X — непустое конечное множество из n элементов и $k \leqslant n$. *Сочетанием из n элементов по k элементов* на множестве X называется любое подмножество множества X, состоящее из k элементов. Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается через C_n^k. Для удобства вычислений будем считать, что $C_n^0 = 1$.

Предложение о числе сочетаний

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доказательство. При $k = 0$ доказываемое равенство выполняется, поскольку $0! = 1$. Пусть теперь $k > 0$. Каждое размещение получается из некоторого сочетания произвольным упорядочением элементов этого сочетания. При этом как различные упорядочения одного и того же сочетания, так и упорядочения различных сочетаний приводят к различным размещениям. Следовательно, $A_n^k = P_k \cdot C_n^k$. Учитывая предложение о числе размещений и следствие о числе перестановок, получаем требуемое равенство. $\square$

Определение

Числа вида C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*.

Происхождение этого термина станет ясно чуть позже в данном параграфе.

Свойства биномиальных коэффициентов

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$.
2) $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.
3) $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

Доказательство. Равенство 1) непосредственно вытекает из предложения о числе сочетаний. Равенство 3) вытекает из теоремы о булеане конечного множества (см. § 1) и того факта, что C_n^k — это число k-элементных подмножеств n-элементного множества.

Докажем равенство 2):

$$
\begin{aligned}
C_n^{k-1} + C_n^k &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) = \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k+n-k+1}{k(n-k+1)} = \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k-1)!k(n-k)!(n-k+1)} = \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\
&= C_{n+1}^k,
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать. □

Пусть n — произвольное натуральное число. Следующая формула называется *биномиальной формулой Ньютона* или просто *биномом Ньютона*:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k. \qquad (1)$$

Эта формула и объясняет термин «биномиальные коэфициенты»: числа вида C_n^k суть коэффициенты при одночленах в биноме Ньютона.

Доказательство биномиальной формулы Ньютона проведем индукцией по n.

База индукции очевидна, так как $(x+y)^1 = x+y = C_1^0 x^1 y^0 + C_1^1 x^0 y^1$.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. По предположению индукции

$$(x+y)^{n-1} = C_{n-1}^0 x^{n-1} y^0 + C_{n-1}^1 x^{n-2} y^1 + \dots + C_{n-1}^{k-1} x^{n-k} y^{k-1} + \\ + C_{n-1}^k x^{n-k-1} y^k + \dots + C_{n-1}^{n-1} x^0 y^{n-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на $x + y$. Левая часть полученного равенства будет равна $(x+y)^n$, а его правая часть будет суммой одночленов вида $B_k x^{n-k} y^k$ при $k = 0, 1, \dots, n$. При этом:

- одночлен $x^n y^0$ с каким-то коэффициентом возникнет только при умножении x на $C_{n-1}^0 x^{n-1} y^0$; учитывая, что $C_m^0 = 1$ при любом m, получаем, что $B_0 = C_{n-1}^0 = C_n^0$;
- одночлен $x^0 y^n$ с каким-то коэффициентом возникнет только при умножении y на $C_{n-1}^{n-1} x^0 y^{n-1}$; учитывая, $C_m^m = 1$ при любом m, получаем, что $B_n = C_{n-1}^{n-1} = C_n^n$;
- если $0 < k < n$, то одночлен $x^{n-k} y^k$ с каким-то коэффициентом возникнет дважды: при умножении x на $C_{n-1}^k x^{n-k-1} y^k$ и при умножении y на $C_{n-1}^{k-1} x^{n-k} y^{k-1}$; учитывая свойство 2) биномиальных коэффициентов, получаем, что $B_k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$.

Следовательно,

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + \dots + C_n^k x^{n-k} y^k + \dots + C_n^n x^0 y^n,$$

что и требовалось доказать.

Удобным способом для того, чтобы быстро вычислить коэффициенты при одночленах в биноме Ньютона для небольших n служит так называемый *треугольник Паскаля*. Первые несколько его строчек выглядят так:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\end{array}
$$

. . . .

В первой строке треугольника Паскаля в центре записывается 1. В каждой следующей строке слева и справа от крайних элементов предыдущей строки пишутся 1, а посередине между каждыми двумя элементами предыдущей строки — их сумма. Из свойства 2) биномиальных коэффициентов вытекает, что в n-й строке (если начинать нумерацию строк не с единицы, а с нуля) слева направо будут записаны биномиальные коэффициенты вида C_n^k для $k = 0, 1, \ldots, n$: нулевая строка соответствует равенству $(x+y)^0 = 1$, первая — равенству $(x+y)^1 = x + y$, вторая — равенству $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ и т. д. В частности, согласно последней из выписанных нами выше строк треугольника Паскаля,

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$