

Квадрики на плоскости

Вариант-18

Семес 19.05.20

Расселен

Гр-102, Мен-190207

1) Найти ур-ие квадрики:

$M_1(0,0), M_2(-1,0)$

по опр-ию ур-ие соотв. квадрике на плоскости, координаты которой удовлетворяют

$M_3(0,-1), M_4(1,-2), M_5(-2,4)$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \text{ где } a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$$

Составим систему, подставив вместо (x,y) точки:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ -2a_{11} - 2a_1 + a_0 = 0 \end{cases}$$

$$a_{22} - 2a_2 + a_0 = 0,$$

$$16a_{11} - 16a_{12} + 4a_{22} + 8a_1 - 4a_2 + a_0 = 0$$

$$4a_{11} - 16a_{12} + 16a_{22} - 4a_1 + 8a_2 + a_0 = 0$$

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_{11} - 2a_1 = 0, \end{cases}$$

$$a_{22} - 2a_2 = 0,$$

$$16a_{11} - 16a_{12} + 4a_{22} + 8a_1 - 4a_2 = 0,$$

$$4a_{11} - 16a_{12} + 16a_{22} - 4a_1 + 8a_2 = 0$$

$a_{11} \ a_{12} \ a_{22} \ a_1 \ a_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 16 & -16 & 4 & 8 & -4 \\ 4 & -16 & 16 & -4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -16 & 4 & 40 & -4 \\ 0 & -16 & 16 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -16 & 4 & 40 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -36 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -16 & 4 & 40 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -36 & 36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -16 & 4 & 40 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_2 = C \\ a_1 = a_2 = C \\ a_{22} = 2C \\ a_{12} = \frac{11}{4}C \\ a_{11} = 2C \end{cases}$$

пер

	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_1	a_2
1	1	11/8	1	1/2	1/2

$$x^2 + \frac{11}{4}xy + y^2 + x + y = 0$$

ур-ие квадрики

2) привести к каноническому виду и определить тип кривой:

$$x^2 + \frac{11}{4}xy + 2y^2 + 2x + 2y = 0 \quad x^2 + \frac{11}{4}xy + y^2 + x + y = 0$$

Нужно избавиться от xy повернув систему координат на угол α , удовл.

ур-ние: $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{1-1}{2 \cdot \frac{11}{4}} = 0$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad k=0$$

$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$ на такой угол нужно повернуть с.к.

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1) \end{cases} \quad \text{— формулы поворота сист. координат на угол } \alpha$$

Подставим в кв. форму x и y :

$$\frac{1}{2}(x_1 - y_1)^2 + \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{2}(x_1^2 - y_1^2) + \frac{1}{2}(x_1 + y_1)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1) + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1) = 0$$

$$x_1^2 + y_1^2 + \frac{11}{8}(x_1^2 - y_1^2) + \sqrt{2}x_1 = 0 \quad | \cdot 8$$

$$8x_1^2 + 8y_1^2 + 11x_1^2 - 11y_1^2 + 8\sqrt{2}x_1 = 0$$

$$19x_1^2 + 8\sqrt{2}x_1 - 3y_1^2 = 0$$

$$19\left(x_1 + \frac{4}{19}\sqrt{2}\right)^2 - 3y_1^2 = \frac{32}{19}$$

$$\frac{361}{32}\left(x_1 + \frac{4}{19}\sqrt{2}\right)^2 - \frac{57}{32}y_1^2 = 1$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{4}{19}\sqrt{2} \\ y_2 = y_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{361}{32}x_2^2 - \frac{57}{32}y_2^2 = 1} \quad \text{— каноническое уравнение гиперболы}$$

3) Формулы перехода от исходной системы координат к той системе координат, в которой матрица имеет канонический вид.

$$\begin{cases} x = p_1 + t_{11}x_1^0 + t_{12}y_1^0 \\ y = p_2 + t_{21}x_1^0 + t_{22}y_1^0 \end{cases}$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = p_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_1^0 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1^0 \\ y = p_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_1^0 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1^0 \end{cases} \Rightarrow p(p_1, p_2) = p(0, 0)$$

Мы повернули систему на угол $\frac{\pi}{4}$, но не перенесли

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1^0 - y_1^0) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1^0 + y_1^0) \end{cases} \text{ — формулы перехода от исх.-ой с.к. к новой.}$$

4) $\frac{x_2^2}{\left(\sqrt{\frac{32}{361}}\right)^2} - \frac{y_2^2}{\left(\sqrt{\frac{32}{57}}\right)^2} = 1$ $a = \sqrt{\frac{32}{361}}$ — действ. полуось
 $b = \sqrt{\frac{32}{57}}$ — мнимая полуось

$$c = \sqrt{\frac{32 \cdot 57 + 32 \cdot 361}{361 \cdot 57}} = \sqrt{\frac{32 \cdot 418}{361 \cdot 57}}$$

$$\text{Экср-ем: } e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{32 \cdot 418}{361 \cdot 57} \cdot \frac{361}{32}} = \sqrt{\frac{418}{57}} = \sqrt{\frac{22}{3}}$$

$$F_1(c, 0) = \left(\sqrt{\frac{32 \cdot 418}{361 \cdot 57}}, 0 \right) \text{ — правый фокус}$$

$$\sqrt{\frac{13376}{20529}} = \sqrt{\frac{704}{1083}} \Rightarrow F_1(c, 0) = \left(\sqrt{\frac{704}{1083}}, 0 \right)$$

$$F_2(-c, 0) = \left(-\sqrt{\frac{704}{1083}}, 0 \right)$$

$$\begin{aligned} y &= \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{\frac{32 \cdot 361}{57 \cdot 32}}x = \\ &= \pm \sqrt{\frac{361}{57}}x = \pm \sqrt{\frac{19}{3}}x \end{aligned}$$

асимптоты

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \sqrt{\frac{32 \cdot 3}{361 \cdot 22}} = \pm \sqrt{\frac{48}{3971}} \text{ — дис-сы.}$$