Математический Анализ. Конспекты 17-23. КН-102

Вопрос № 17

Определение частной производной, дифференцируемости скалярной функции многих переменных.
Эквивалентность двух определений дифференцируемости.

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

Определение. Функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
определенную в некоторой окрестности точки x,
называют дифференцируемой в точке M_0, если ее полное
приращение в окрестности этой точки можно представить в виде :

Пусть $f(x_1, ..., x_m)$ определена
в некоторой окрестности точки $M_0 = (x_1^0, ..., x_m^0)$

Придадим значению x_i приращение Δx

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)}{\Delta x},$$

то данный предел называется частной производной в точке M_o по x_i

и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_n)$ или $f'_{x_i}(x_1, \cdots, x_n)$

Полное приращение:

$$\Delta f(x_1, ..., x_m) = f(x_1^0 + \Delta x_1, ..., x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, ..., x_m^0)$$

(Определение) Дифференцируемость функции многих переменных:

Определение Функцию }f: R^m → R}, определенную в некоторой окрестности точки Mo, называют дифференцируемой в точкеM_0, если ее полное приращение в окрестности этой точки можно представить в виде:

$$1)\ \Delta f(x) = A_1 \Delta x_1 + \cdots + A_m \Delta x_m + \mathrm{E}_1 \Delta x_1 + \cdots + \mathrm{E}_m \Delta x_m,$$
$$\text{где } A_i \in \mathbb{R} \text{ и } \mathrm{E}_i = \mathrm{E}_i(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) \xrightarrow[\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \vdots \\ \Delta x_m \to 0}]{} 0$$

✓ ✓

$$2)\ \Delta f(x) = A_1 \Delta x_1 + \cdots + A_m \Delta x_m + o(\rho), \text{ где } \rho = \sqrt{\sum_1^m \Delta x_i^2}$$

✓

Равносильность определений: Нет доказательства.

(1) ⇒ (2)

$$\mathrm{E}_1 \Delta x_1 + \cdots + \mathrm{E}_m \Delta x_m = o(\rho)$$

?

(2) ⇒ (1) ?

Вопрос № 18

Дифференцируемость вектор-функции многих переменных.

Пусть векторная функция нескольких переменных f: R^m → R^n определена в некоторой окрестности точки x ∈ R^m и Δx = (Δx1 . . . Δxm) — такой вектор приращений независимых переменных, что точка x + Δx тоже принадлежит этой окрестности. В этом случае
определено полное приращение функции f:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

1) Если найдутся такие константы A1, ..., Am и функции $\mathcal{E}1, ..., \mathcal{E}m$, зависящие от вектора приращения $\Delta\, x$ и являющиеся бесконечно малыми при $\Delta x \to 0$ такие, что $\Delta f(x)$ представимо в след

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{i=1}^{m}(Ai * \Delta x_i) + \sum_{i=1}^{m}(\mathcal{E}i * \Delta x_i)$$

$\Delta x \in \mathbb{R}^m$
$\Delta f \in \mathbb{R}^n$
$\sum \Delta x_i \in \mathbb{R}$

то $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x.

2) Если найдутся такие константы $\mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_m$ и $\Delta f(x)$ представимо в следующем виде :

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{i=1}^{m}(Ai * \Delta x_i) + o(\rho), \text{ где } \rho = |\Delta x|$$

то $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x.

$\sum \Delta x_i \in \mathbb{R}$

Докажем равносильность определений 1) и 2). Для этого нужно доказать, что

это вектор-функция в $\mathbb{R}^n$ со значениями

это выглядит как вектор в $\mathbb{R}^m$!

$a)$ $o(\rho)$ есть $\sum_{i=1}^{m}(\mathcal{E}i * \Delta x_i)$?

$b)$ $\sum_{i=1}^{m}(\mathcal{E}i * \Delta x)$ можно представить в виде $o(\rho)$

Или надо пояснять, что такое $\mathcal{E}_i$.

Начнем с пункта b. Если сумму можно представить в виде бесконечно малой от p, то их отношение стремится к нулю:

$$\sum_{i=1}^{m}(\mathcal{E}i * \Delta x) = \frac{\mathcal{E}1 * \Delta x_1 + ... + \mathcal{E}m * \Delta x_m}{\rho} = \mathcal{E}1 * \frac{\Delta x_1}{\rho} + ... + \mathcal{E}m * \frac{\Delta x_m}{\rho}$$

Так как $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i^2}$, поэтому $\frac{\Delta x_i}{\rho} \le 1$ при $i = \overline{1, m} \Rightarrow$ дробь ограничена.

Так как Δx стремится к 0, то $\mathcal{E}i$ бесконечно малая. Получаем сумму бесконечно малых, умноженных на ограниченные, что в итоге стремится к нулю, ч.т.д.

Докажем пункт а, $\rho \to 0, \Delta x \to 0$. Произведем следующие преобразования

$$o(\rho) = \frac{o(\rho)}{\rho^2} * \rho^2 = \frac{o(\rho)}{\rho} * \frac{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_m^2}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho^2} * \rho^2$$
$$= \frac{o(\rho)}{\rho} * \frac{\Delta x_1}{\rho} * \Delta x_1 + ... + \frac{o(\rho)}{\rho} * \frac{\Delta x_m}{\rho} * \Delta x_m$$

Из доказательства пункта b известно, что $\frac{\Delta x_m}{\rho}$ ограничена. Пусть

$$\mathcal{E}i = \frac{o(\rho)}{\rho} * \frac{\Delta x_i}{\rho}. \text{ Так как } \Delta x \to 0, \text{ то и все } \Delta x_i \to 0.$$

$$\text{Тогда } \mathcal{E}i = \frac{o(\rho)}{\rho} * \frac{\Delta x_i}{\rho} \to 0.$$

$$\text{Следовательно, } o(\rho) = \mathcal{E}i = \frac{o(\rho)}{\rho} * \frac{\Delta x_i}{\rho} \text{ при } \rho \to 0, \text{ ч.т.д}$$

Если функция дифференцируема, то она непрерывна. **Доказательство.**

$$\text{Непрерывность означает, что при } x \to x_0 \;\Rightarrow f(x) - f(x_0) \to 0$$

$$\text{Возьмем два вектора : } x \text{ и } x_0\text{.Тогда} \Delta x = x - x_0 \text{ и приращение функции равно}$$
$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = A_1(x_1 - x_{01}) + ... + A_m(x_m - x_{0m}) + o(\rho) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0,$$
$$\text{ч.т.д}$$

$\mathbb{R}^n$? $\mathbb{R}$

Если функция дифференцируема в точке М, то у неё существуют все частные производные в этой точке.
Доказательство:

Пусть функция дифференцирована в точке $M_0 = (x_1, ..., x_i, ..., x_m)$, $\Delta_i x = (0, ..., \Delta x_i, 0, ..., 0), M = M_0 + \Delta_i x.$

$$f(M) - f(M_0) = \sum_{i=1}^{m}(Ai * \Delta x) + o(\rho) = Ai * \Delta x_i + o(\rho)$$
$$= Ai * \Delta x_i + o(|\Delta x_i|)$$

$$\text{Посчитаем частную производную по } x_i : \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = \lim_{x_i \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta x_i} = \lim_{x_i \to 0} A_i + \frac{o(\rho)}{\Delta x_i} = A_i$$

Совершая аналогичные действия для всех x_i из M_0, получим все частные производные.

Вопрос № 19

Понятие производной скалярной функции по направлению. Вектор градиент, его свойства.

Производная функции по направлению

Частные производные от функции являются производными «в направлениях координатных осей». Естественно поставить вопрос об определении и вычислении производной по любому фиксированному направлению. Определим это понятие, рассмотрев этот вопрос на примере функций трех переменных.

Пусть, как всегда, в пространстве зафиксирована система координат x, y, z, заданы точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\boldsymbol{l}$. Обозначим через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{l}$. Как известно,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

и если $\boldsymbol{l}_0$ — единичный вектор в направлении вектора $\boldsymbol{l}$, то

$$\boldsymbol{l}_0 = \frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Проведем из точки M_0 луч в направлении вектора $\boldsymbol{l}$. Его уравнение в координатной форме имеет вид

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\ \ y = y_0 + t\cos\beta,\ \ z = z_0 + t\cos\gamma,\ \ t \geqslant 0, \quad (37.43)$$

где параметр t равен расстоянию от точки M до точки M_0:

$$|M_0M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} =$$

$$= t\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = t. \quad (37.44)$$

Пусть функция $f(M)$, где $M = (x, y, z)$, определена на некотором отрезке $[M_0, M_1]$ с концами в точках M_0 и M_1 рассматриваемого луча. Ее производная $\frac{\partial f}{dl}$ в точке M_0 в направлении вектора $\boldsymbol{l}$ определяется (рис. 26) равенством

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \boldsymbol{l}} \overset{\text{def}}{=} \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{|M_0M|}.$$

В силу равенств (37.43) и (37.44), это определение можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \boldsymbol{l}} = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}.$$

Таким образом, производная функции f в точке M_0 по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ является производной справа сложной функции $f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$ в точке $t = 0$:

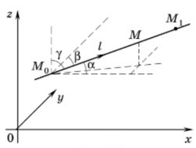


Рис. 26

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \boldsymbol{l}} = \frac{d}{dt} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)\Big|_{t=0}. \quad (37.45)$$

Если функция $f(x, y, z)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и дифференцируема в этой точке, то, заметив, что вдоль луча (37.43) $\frac{dx}{dt} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{dt} = \cos\beta$, $\frac{dz}{dt} = \cos\gamma$, и продифференцировав по t в точке $t = 0$ сложную функцию $f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$, получим

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \boldsymbol{l}} \underset{(37.45)}{=} \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma$$

или, короче, опустив обозначения аргумента,

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \quad (37.46)$$

Эта формула при сделанных предположениях имеет место для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{l}$. С ее помощью производная по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ выражается через частные производные по координатам x, y, z и направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{l}$ с координатными осями.

Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0). Тогда в этой точке функция f имеет производную по любому направлению и эта производная находится по формуле* (37.46).

Градиент функции

Пусть функция $F(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), а кривая Г такова, что функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, с помощью которых она задана в параметрической форме, удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, т. е. с его помощью осуществляется неявное задание кривой Г. Пусть $t_0 \in [a, b]$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, а функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при $t = t_0$.

Дифференцируя при $t = t_0$ тождество $F(x(t), y(t)) = 0$, $a \leqslant t \leqslant b$, получим

$$x'_t \frac{\partial F}{\partial x} + y'_t \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad t = t_0,$$

т. е. векторы $(x'(t_0), y'(t_0))$ и $\left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ ортогональны. Вектор $\boldsymbol{a} = (x'_t, y'_t)$ в случае, когда он не равен нулю, является, как известно, касательным вектором к кривой Г в точке $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. Вектор $\left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ называется *градиентом функции* F в точке (x_0, y_0) и обозначается через $\operatorname{grad} F(x_0, y_0)$. Из сказанного следует, что градиент функции F ортогонален касательной к кривой, неявно задаваемой уравнением $F(x, y) = 0$. Прямая, перпендикулярная касательной к плоской кривой и лежащая в одной плоскости с ней, называется (см. п. 17.3) нормалью к данной кривой.

Таким образом, градиент функции F коллинеарен нормали в соответствующей точке к кривой, задаваемой уравнением $F(x, y) = 0$.

В случае дифференцируемой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ ее градиентом называется вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

Вопрос № 20

Необходимые условия дифференцируемости. Достаточные условия дифференцируемости.

Теорема 1 (необходимое условие дифференцируемости функции нескольких переменных). *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$, причем $f'_x(x_0, y_0) = A$, $f'_y(x_0, y_0) = B$.* где $A, B \in \mathbb{R}$, α, β — . . . .

Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, тогда ее приращение представимо в виде $\Delta z = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$. Положив в формуле $\Delta z = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ $\Delta y = 0$, имеем $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x$. Разделив это равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A = f'_x(x_0, y_0)$.

Следовательно, в точке $P_0(x_0; y_0)$ существует частная производная $f'_x(x, y_0)$. и она $= A$.

Аналогично доказывается существование частной производной $f'_y(x_0, y_0) = B$ в точке $P_0(x_0; y_0)$.

Теорема 2 (достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных). *Если функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$, непрерывные в самой этой точке, то она дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$.*

Представим полное приращение функции в следующем виде:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Выражение $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)$ является приращением функции по переменной x. Тогда по теореме Лагранжа

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(\xi, y_0 + \Delta y)\Delta x,$$

где $x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$.

Аналогично $f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, \eta)\Delta y$, где $y_0 < \eta < y_0 + \Delta y$.

Следовательно, $\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(\xi, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, \eta)\Delta y$.

По условию теоремы частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в точке $P_0(x_0; y_0)$. Тогда

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(\xi, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0), \quad \lim_{\Delta y \to 0} f'_y(x_0, \eta) = f'_y(x_0, y_0).$$

и здесь аналогично

Здесь надо быть осторожным в объяснениях: вы переходите к пределу для функции $f'_x(\xi, y_0+\Delta y)$, а не для $f'_x(\Delta x, y_0+\Delta y)$. Почему $f'_x(\xi, y_0+\Delta y) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{\Delta y \to 0} f'_x(x_0, y_0)$. Здесь ведь не сказано, что $\xi \to x_0$

Из последних равенств, согласно определению предела, следует, что:

$$f'_x(\xi, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha,$$

$f'_y(x_0, \eta) = f'_y(x_0, y_0) + \beta$,

где α , β – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Подставляя выражения для $f'_x(\xi, y_0 + \Delta y)$, $f'_y(x_0, \eta)$ в формулу, имеем:

$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$.

Значит, функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$.

Вопрос № 21

Дифференцируемость сложной функции и её производные.

Теорема. (О дифференцируемости сложной функции)

В целом, всё хорошо.

Пусть задана функция $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – дифференцируема в $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$
Пусть задана функция $x = \phi(t)$, $\phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to D$, т.е.

$$x = \begin{cases} x_1 = \phi_1(t_1, t_2, ..., t_m) \\ x_2 = \phi_2(t_1, t_2, ..., t_m) \\ ... \\ x_n = \phi_n(t_1, t_2, ..., t_m) \end{cases}$$

Будем предполагать, что $\phi(t^0) = x^0$

$$\text{Иначе говоря, } x^0 = \begin{cases} x_1^0 = \phi_1(t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0) \\ x_2^0 = \phi_2(t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0) \\ ... \\ x_n^0 = \phi_n(t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0), \end{cases}$$

Пусть $\forall i \in \overline{1..n}$ $\phi_i(t_1, t_2, ..., t_n)$ – дифференцируема в точке $t^0 = (t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0)$

Тогда:

? ?

$$\boxed{\begin{gathered} F(t) = f(x(t)) - \text{дифференцируема в точке } t^0 \\ F(t^0 + \Delta t) - F(t^0) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(t^0)\Delta t_j + \sum_{i=1}^n o_i(\rho) \end{gathered}}$$ и т.е.

Доказательство.

Надо бы ещё выписать формулу частных производных сложной ф-ции:

при этом $\frac{\partial F}{\partial t_i} =$

Пусть $\Delta t = (\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_m)$

Рассмотрим $F(t^0 + \Delta t) - F(t^0) = f(\phi(t^0 + \Delta t)) - f(\phi(t^0))$,

но мы знаем, что

$$\phi(t^0 + \Delta t) = x = \begin{cases} x_1 = \phi_1(t_1^0 + \Delta t_1, t_2^0 + \Delta t_2, ..., t_m^0 + \Delta t_m) \\ x_2 = \phi_2(t_1^0 + \Delta t_1, t_2^0 + \Delta t_2, ..., t_m^0 + \Delta t_m) \\ ... \\ x_n = \phi_n(t_1^0 + \Delta t_1, t_2^0 + \Delta t_2, ..., t_m^0 + \Delta t_m) \end{cases}$$

Обозначим $x - x^0 = \Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n)$.

Тогда $F(t^0 + \Delta t) - F(t^0) = f(x) - f(x^0)$.

Но функция f- дифференцируема в x^0, потому имеет место следующее равенство:

$$f(x) - f(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) \cdot \Delta x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \cdot \Delta x_n + \varepsilon_1 \cdot \Delta x_1 + \varepsilon_2 \cdot \Delta x_2 + ... + \varepsilon_n \cdot \Delta x_n =$$?

где $\forall i \in \overline{1..n}\ \varepsilon_i \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$

Однако по определению:

$$\forall i \in \overline{1..n}\ \Delta x_i = \phi_i(t_1^0 + \Delta t_1, t_2^0 + \Delta t_2, ..., t_m^0 + \Delta t_m) - \phi_i(t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0) = \phi_i(t^0 + \Delta t) - \phi_i(t^0)$$

Вектор-ф-ция φ или каждая φ_i ?

но функция ϕ - дифференцируема в точке t^0, т.е. ?

$$\forall i \in \overline{1..n}\ \phi_i(t_1^0 + \Delta t_1, t_2^0 + \Delta t_2, ..., t_m^0 + \Delta t_m) - \phi_i(t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0) = \phi_i(t^0 + \Delta t) - \phi_i(t^0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(t^0) \cdot \Delta t_j + \ ...$$

где $\rho = |\Delta t| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} {\Delta t_j}^2}$

В таком случае равенство (1) ? можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(t^0) \cdot \Delta t_j + o_i(\rho) \right) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot \Delta x_i$$

Перегруппируем:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(t^0) \Delta t_j + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot o_i(\rho) + \varepsilon_i \cdot \Delta x_i \right)$$

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot o_i(\rho) = o(\rho)$, т.к.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot o_i(\rho)}{\rho} \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$$

Проверим, что $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot \Delta x_i = o(\rho)$.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot \Delta x_i}{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot \phi_i(t^0)}{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\varepsilon_i \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(t^0) \cdot \Delta t_j + o_i(\rho) \right)}{\rho}$$

$$\forall j \in \overline{1..m}\ |\frac{\Delta t_j}{\rho}| \leq 1 \implies \sum_{j=1}^{m} (\frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(t^0) \cdot \frac{\Delta t_j}{\rho} + \frac{o_i(\rho)}{\rho}) = C_i - \text{огран.}$$

Тогда $\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot \Delta x_i}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot C_i$

$\forall i \in \overline{1..n}\ \rho \to 0 \implies \Delta x_i \to 0$ (в силу непрерывности функции ϕ_i)

Тогда $\rho \to 0 \implies \varepsilon_i \to 0$

Следовательно $\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot \Delta x_i}{\rho} \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$

Получили $F(t^0 + \Delta t) - F(t^0) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(t^0) \Delta t_j + \sum_{i=1}^{n} o_i(\rho)$

Вопрос № 22

Определение?

Дифференциал. Инвариантность формы первого дифференциала.

Пусть $u = f(x,\ y,\ z)$ имеет непрерывные частные производные $u'_x,\ u'_y,\ u'_z$

причем x, y, z являются функциями от переменных t и v:

$$x = \phi(t,\ v),\ y = \psi(t,\ v),\ z = \chi(t,\ v),$$
$$\text{так же имеющими частные производные}:\ x'_t,\ x'_v,\ y'_t,\ y'_v,\ z'_t,\ z'_v.$$

Тогда производные от сложной функции u по t и v не только существуют, но они также непрерывны. Если бы x, y, z были бы независимыми переменными, то полный дифференциал u был бы равен

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz.$$

В данном случае u зависит от t и v. Следовательно по отношению к этим переменным дифференциал будет выглядеть так:

$$du = u'_t dt + u'_v dv,\ \text{но}\ u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t$$

аналогично и производная u по v.

Подставив эти значения в выражение с du и перегруппируя члены получим:

$$du = u'_x \cdot (x'_t dt + x'_v dv) + u'_y \cdot (y'_t dt + y'_v dv) + u'_z \cdot (z'_t dt + z'_v dv).$$

Нетрудно заметить, что выражения в скобках это дифференциалы x, y, z (от t и v), так что мы можем написать

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz.$$

Если x, y, z будут зависеть от от различных переменных, например

$$x = \phi(t),\ y = \psi(t,\ v),\ z = \chi(v,\ w).$$

В таком случае мы всегда можем считать что

$$x = \phi_1(t,\ v,\ w),\ y = \psi_1(t,\ v,\ w),\ z = \chi_1(t,\ v,\ w),$$

и все предыдущие рассуждения будут применимы и к этому случаю.

Вопрос № 23

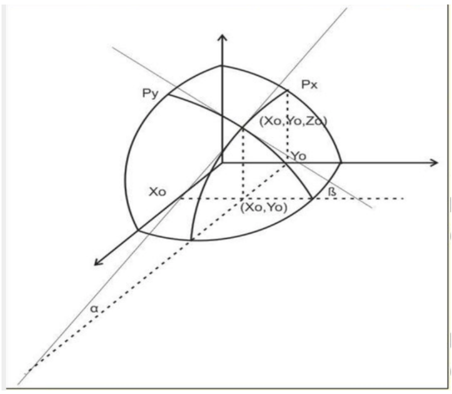
Геометрический смысл частных производных, дифференцируемости, дифференциала. Касательная плоскость.

Геометрический смысл частных производных

Графиком функции z =f(x,y) является поверхность P

P_x - линия пересечения поверхности P с плоскостью $y = y_0$

P_y - линия пересечения поверхности P с плоскостью $x = x_0$



$$f'_x(x_0, y_0) = tg\ \alpha\ ,$$
где α-угол наклона касательной к линии P_x относительно оси OX
$$f'_y(x_0, y_0) = tg\ \beta\ ,$$
где β-угол наклона касательной к линии P_y относительно оси OY

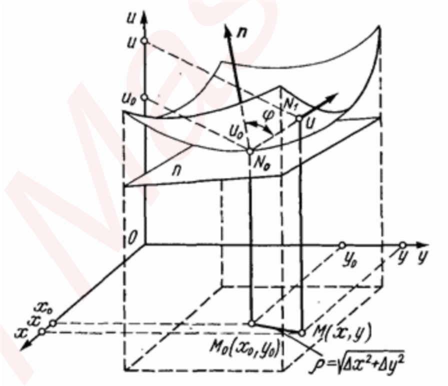
Это место надо поподробнее

Частная производная функция по некоторой переменной показывается скорость изменения функции в направлении соответствующей оси

Геометрический смысл дифференцируемости

Пусть задана функция $u = f(x, y),\ (x, y) \in D,\ M_0(x_0, y_0) \in D$
значение функции в точке $M_0 : u_0 = f(x_0, y_0)$
Рассмотрим множество всех значений функции в области D :

$\sum = \{(x, y, f(x, y))\}$ - поверхность, задаваемая функцией f
$N_0\{(x_0, y_0, f(x_0, y_0))\}$ -точка на поверхности



Понятие касательной плоскости к поверхности в точке

Плоскость π, проходящая через точку N_0 называется касательной плоскостью в этой точке, если угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку N_0 и любую точку N_1 поверхности стремится к нулю, когда точка N_1 стремится к N_0

Условие дифференцируемости:

$u - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha\Delta x + \beta\Delta x = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho)$, где A и B - постоянные, равн
в точке M_0, α и $\beta -$ бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$,
$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Рассмотрим следующее уравнение: $U - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$,
которое определяет некоторую плоскость П, проходящую через точку $N_0(x_0, y_0, u_0)$
и имеющую нормальный вектор $n = \{A, B, -1\}$

Докажем,что плоскость П является касательной плоскостью в точке N_0
поверхности S : угол ϕ между нормалью n этой плоскости и любой секущей
N_0N_1 стремится к $\pi/2$, когда точка N_1 поверхности S стремится к N_0

$$cos(\phi) = \frac{A(x - x_0) + B(y - y_0) - (u - u_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (u - u_0)^2}}$$

Доказательство : из условия дифференцируемости функции

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) - (u - u_0) = o(\rho) \Rightarrow |cos\phi| < \frac{|o(\rho)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

$cos\phi \to 0$, когда $\rho \to 0$, т.е. $lim(\phi) = \frac{\pi}{2}$

Дифференцируемость функции u = f(x,y) в точке $M_0(x_0, y_0)$с геометрической точки зрения означает наличие касательной плоскости к графику функции
$u = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, u_0)$

А что представляет собой дифференциал
с геом. т. зрения?