Функциональные последовательности и ряды

1 Функциональные свойства пределов функциональных последовательностей и сумм рядов

Теорема 2 (о дифференцируемости предела функциональной последовательности).

Пусть функции $f_n(x)$ дифференцируемы на $[a, b]$, и на этом отрезке последовательность $\{f_n'(x)\}$ сходится равномерно, а последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на $[a, b]$, её предел $f(x)$ — дифференцируемая функция и

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Следствие. Пусть функции $u_n(x)$ дифференцируемы на $[a, b]$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на $[a, b]$ равномерно, его сумма дифференцируема и

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x).$$

2 Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad a_n \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Лемма. Пусть ряд (1) сходится в точке $x = x^*$. Тогда для любого $|x| < |x^*|$ ряд сходится абсолютно.

$R := \sup\{|x^*| : \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x^*)^n \text{ — сходится}\}.$

Утверждение.

- при $|x| < R$ ряд (1) сходится (абсолютно);
- при $|x| > R$ ряд (1) расходится;
- при $x = \pm R$ ряд (1) может как сходиться так и расходиться.

Примеры: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

R — *радиус сходимости степенного ряда*

$(-R; R)$ — *интервал сходимости степенного ряда*

Функциональные свойства суммы степенного ряда

Теорема (о равномерной сходимости степенного ряда)**.** Пусть R — радиус сходимости ряда (1). Тогда для любого $r \in (0; R)$ ряд сходится равномерно на отрезке $[-r; r]$.

Теорема. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R; R)$, где R — радиус сходимости. Тогда

1) $f(x)$ непрерывна на $(-R; R)$;

2) для любого $x \in (-R; R)$ $\quad \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$;

3) для любого $x \in (-R; R)$ $\quad \displaystyle f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Теорема (Необходимые и достаточные условия разложимости функции в степенной ряд)**.** Функция $f(x)$ представима степенным рядом на $(-R; R)$ тогда и только тогда, когда

а) $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-R; R)$;

б) остаточный член формулы Тейлора $R_n(x; 0) \overset{[-r;r]}{\rightrightarrows} 0$ на любом отрезке $[-r; r] \subset (-R; R)$.

Следствие. Функция $f(x)$ представима степенным рядом на $(-R; R)$ тогда и только тогда, когда

а) $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-R; R)$;

б) остаточный член формулы Тейлора $R_n(x; 0) \to 0$, $x \in (-R; R)$.

Поведение степенных рядов в граничных точках интервала

Теорема. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится (хотя бы условно) в точке $x = R$ $(x = -R)$, то сумма ряда непрерывна на $[0; R]$.

Следствие. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится (хотя бы условно) в точке $x = R$ $(x = -R)$, то на $[0; R]$ (на $[-R; 0]$) он сходится равномерно.

Пример. $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Теорема. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится в точке $x = R$ $(x = -R)$, то на $[0; R)$ (на $(-R; 0]$) он сходится неравномерно.