Лекция 18: Ортонормированный базис

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Из определения угла между векторами вытекает, в частности, что $(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \frac{\pi}{2}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{xy} = 0$ (точный аналог критерия ортогональности векторов в обычном пространстве, о котором говорилось в курсе аналитической геометрии). Это делает естественным следующее

Определение

Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются *ортогональными*, если $\mathbf{xy} = 0$. Набор векторов называется *ортогональным*, если любые два различных вектора из этого набора ортогональны. Ортогональный набор векторов называется *ортонормированным*, если длины всех векторов из этого набора равны 1.

Отметим, что, в силу равенства (1) из лекции 17, справедливо следующее

Замечание 1

Нулевой вектор ортогонален любому вектору. $\square$

Укажем одно важное свойство ортогональных наборов векторов.

Теорема 1

Любой ортогональный набор ненулевых векторов линейно независим.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — ортогональный набор ненулевых векторов. Рассмотрим линейную комбинацию этих векторов, равную нулевому вектору:

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Умножая скалярно обе части этого равенства на $\mathbf{a}_i$ (где $1 \leqslant i \leqslant k$) и используя тот факт, что $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a}_i = 0$ в силу замечания 1, мы получим, что

$$t_1(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_i) + t_2(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_i) + \cdots + t_i(\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i) + \cdots + t_k(\mathbf{a}_k\mathbf{a}_i) = 0.$$

В левой части последнего равенства все скалярные произведения, кроме $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i$, равны нулю. Следовательно, $t_i(\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i) = 0$. Поскольку $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$, по аксиоме 4) евклидова пространства (см. лекцию 17) имеем $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i \neq 0$. Следовательно, $t_i = 0$. Итак, все коэффициенты в левой части равенства (1) равны 0. Следовательно, набор векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно независим. $\square$

Определение

Ортогональный (ортонормированный) набор векторов, который является базисом, называется *ортогональным* (соответственно *ортонормированным*) *базисом*.

Примером ортонормированного базиса является стандартный базис пространства $\mathbb{R}_n$ (если скалярное произведение в $\mathbb{R}_n$ определить как сумму произведений одноименных компонент).

Теорема 2

Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ *— ортонормированный базис евклидова пространства* V*, а векторы* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *имеют в этом базисе координаты* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *соответственно. Тогда*

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \tag{2}$$

Доказательство теоремы 2 см. на следующем слайде.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n \text{ и } \mathbf{y} = y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + \cdots + y_n\mathbf{b}_n.$$

Следовательно,

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{xy} & = & x_1y_1(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1) + x_1y_2(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2) + \cdots + x_1y_n(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_n) + \\ & + & x_2y_1(\mathbf{b}_2\mathbf{b}_1) + x_2y_2(\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2) + \cdots + x_2y_n(\mathbf{b}_2\mathbf{b}_n) + \\ & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + & x_ny_1(\mathbf{b}_n\mathbf{b}_1) + x_ny_2(\mathbf{b}_n\mathbf{b}_2) + \cdots + x_ny_n(\mathbf{b}_n\mathbf{b}_n). \end{array}$$

Поскольку

$$\mathbf{b}_i\mathbf{b}_j = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases}$$

для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$, получаем равенство (2). $\square$

Таким образом,

- *скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат в ортонормированном базисе.*

Из теоремы 2 и определений длины вектора, угла между векторами и расстояния между векторами немедленно вытекает, что если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из евклидова пространства V имеют в некотором ортонормированном базисе этого пространства координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ соответственно, то

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2};$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}};$$

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Отметим, что и формула (2) и три только что приведенных формулы являются точными аналогами известных из аналитической геометрии формул для вычисления соответствующих величин в обычном пространстве с обычным скалярным произведением (в случае ортонормированного базиса). В частности, ортонормированный базис удобен тем, что в нем просто вычисляется скалярное произведение любых векторов.

Естественно поставить вопрос о том, в любом ли евклидовом пространстве существует ортонормированный базис. Ответ на него содержится в следующем утверждении. В доказательстве этого утверждения указан способ нахождения ортонормированного базиса, который называется *процессом ортогонализации Грама–Шмидта*.

Теорема 3

Любое ненулевое подпространство S евклидова пространства V имеет ортонормированный базис.

Доказательство. Обозначим размерность подпространства S через k. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис этого подпространства. Построим ортогональный базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ подпространства S. Векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ будем находить последовательно — сначала $\mathbf{b}_1$, затем $\mathbf{b}_2$ и т. д.

Положим $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$. Пусть $2 \leqslant i \leqslant k$. Предположим, что мы уже построили ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_{i-1}$, каждый из которых является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_{i-1}$ (и, в частности, принадлежит S). Положим

$$\mathbf{b}_i = -\frac{\mathbf{b}_1\mathbf{a}_i}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1} \cdot \mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{b}_2\mathbf{a}_i}{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2} \cdot \mathbf{b}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{b}_{i-1}\mathbf{a}_i}{\mathbf{b}_{i-1}\mathbf{b}_{i-1}} \cdot \mathbf{b}_{i-1} + \mathbf{a}_i. \qquad (3)$$

Умножая скалярно обе части равенства (3) на $\mathbf{b}_1$ слева и учитывая, что вектор $\mathbf{b}_1$ ортогонален к векторам $\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}$, получаем, что

$$\mathbf{b}_1\mathbf{b}_i = -\frac{\mathbf{b}_1\mathbf{a}_i}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1} \cdot \mathbf{b}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_1\mathbf{a}_i = -\mathbf{b}_1\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_1\mathbf{a}_i = 0.$$

Аналогично проверяется, что $\mathbf{b}_2\mathbf{b}_i = \cdots = \mathbf{b}_{i-1}\mathbf{b}_i = 0$. Следовательно, набор векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_i$ ортогонален. Напомним, что каждый из векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_{i-1}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_{i-1}$. Отсюда и из равенства (3) непосредственно вытекает, что вектор $\mathbf{b}_i$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_i$ (и, в частности, принадлежит S). Далее, из указанного свойства векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_{i-1}$ вытекает, что правую часть равенства (3) можно записать в виде $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{a}_i$, где $t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}$ — некоторые числа. Иными словами, вектор $\mathbf{b}_i$ равен некоторой нетривиальной линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_i$. Поскольку эти векторы входят в базис подпространства S, они линейно независимы. Следовательно, $\mathbf{b}_i \neq \mathbf{0}$. Итак, мы получили ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_i$, каждый из которых является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_i$ (и, в частности, принадлежит S).

Процесс ортогонализации Грама–Шмидта (3)

Повторив указанные выше построения нужное число раз, мы в конце концов получим ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_k$, принадлежащих S. По теореме 1 этот набор векторов линейно независим. Поскольку число векторов в нем совпадает с размерностью S, он является базисом этого подпространства (см. замечание 8 в лекции 8). В силу замечания 1 из лекции 17 для того, чтобы получить ортонормированный базис подпространства S, достаточно разделить каждый из векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_k$ на его длину. $\square$

Проиллюстрируем сказанное выше на следующем примере.

Задача. Найти ортонормированный базис подпространства M, порожденного векторами $\mathbf{a}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{a}_2 = (1,0,1,0)$, $\mathbf{a}_3 = (1,0,0,1)$ и $\mathbf{a}_4 = (3,1,1,1)$.

Решение. Формулы, указанные в доказательстве теоремы 3, применяются к базису пространства M. Поэтому прежде всего найдем этот базис:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, в качестве базиса M можно взять векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2' = (0,-1,1,0)$ и $\mathbf{a}_3 = (0,0,-1,1)$. Применяя формулы (3), находим ортогональный базис пространства M:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = (1,1,0,0),$$

$$\mathbf{b}_2 = -\frac{\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2'}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2' = \frac{1}{2}\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right),$$

$$\mathbf{b}_3 = -\frac{\mathbf{b}_1\mathbf{a}_3'}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{b}_2\mathbf{a}_3'}{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3' = 0 + \frac{2}{3}\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3' = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right).$$

Разделив каждый из векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_3$ на его длину, найдем ортонормированный базис пространства M:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right),$$
$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right),$$
$$\mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{b}_3}{|\mathbf{b}_3|} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ответ: $\mathbf{c}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $\mathbf{c}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$, $\mathbf{c}_3 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Теорема 4

Любую ортогональную систему ненулевых векторов евклидова пространства V можно дополнить до ортогонального базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — ортогональный набор ненулевых векторов пространства V. Обозначим размерность пространства V через n. Нам достаточно найти ортогональный набор из n ненулевых векторов пространства V, содержащий векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. В самом деле, в силу теоремы 1 такой набор векторов будет линейно независимым, и потому, в силу замечания 8 из лекции 8, он будет базисом пространства V.
Если $k = n$, то, в силу сказанного выше, уже сам набор векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ является ортогональным базисом пространства V. Поэтому далее можно считать, что $k < n$. Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — ортонормированный базис пространства V, существующий в силу теоремы 3. Пусть вектор $\mathbf{a}_i$ имеет в этом базисе координаты $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ (для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$).

Дополнение до ортогонального базиса (2)

Рассмотрим следующую однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0. \end{cases}$$

В силу замечания 3 из лекции 4 эта система имеет по крайней мере одно ненулевое решение. Обозначим его через $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ и положим $\mathbf{a}_{k+1} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \dots + c_n\mathbf{b}_n$. В силу теоремы 2

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_{k+1} = c_1a_{11} + c_2a_{12} + \dots + c_na_{1n} = 0$$

и аналогично $\mathbf{a}_2\mathbf{a}_{k+1} = \dots = \mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k+1} = 0$. Следовательно, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}$ — ортогональный набор ненулевых векторов. Если $k+1 = n$, то он является ортогональным базисом пространства V. В противном случае, рассуждая так же, как выше, при построении вектора $\mathbf{a}_{k+1}$, мы дополним набор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k+1}$ еще одним вектором $\mathbf{a}_{k+2}$ так, что набор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k+2}$ будет ортогональным набором ненулевых векторов. Продолжая этот процесс, мы через конечное число шагов построим ортогональный базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ пространства V, являющийся расширением исходного набора векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. $\square$

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 1

Любую ортонормированную систему векторов евклидова пространства можно дополнить до ортонормированного базиса этого пространства.

Доказательство. Все векторы ортонормированной системы — ненулевые (поскольку их длины равны 1). В силу теоремы 4 нашу ортонормированную систему можно дополнить до ортогонального базиса. Разделим каждый из найденных при этом новых векторов на его длину. В силу замечания 1 из лекции 17 мы получим ортонормированный базис. $\square$