Итоговая контрольная работа.
Часть 2.

Семке 29.05.20
Даниил
Кн-102, Мен-190207

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пр-ве R_5 задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

в станд. базисе

Найти:

1) базис образа
2) базис ядра

С помощью алгоритма Чуркина найдем оба пункта:

$$A^T=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A^T|E)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$+\frac{1}{2}\cdot$ $\quad$ $\frac{1}{2}\cdot$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

вектора

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

образуют базис образа

Ядро состоит только из нулевого вектора $\Rightarrow$ базиса нет.

3) все собств. знач.

4) все собств. векторы.

Сост. хар-ое ур-ие:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= +(2+\lambda)^2\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^2\cdot(-2-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^4(-4-\lambda)\cdot(2+\lambda)^3 =$$

$$= (2+\lambda)^3((2+\lambda)(-4-\lambda)+1) = (2+\lambda)^3(-8-2\lambda-4\lambda-\lambda^2+1) =$$

$$= (2+\lambda)^3(-\lambda^2-6\lambda-9) = -(2+\lambda)^3(\lambda^2+6\lambda+9) = -(2+\lambda)^3(\lambda+3)^2$$

Собственные значения: $\begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$

Собственные векторы:

$\lambda_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow x_1 = 0 \\ \Rightarrow x_2 = 0 \\ \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_4 = -x_5 \Rightarrow x_5 = C_1 \\ \\ \end{matrix}$$

ФСР:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f_1	0	0	0	-1	1

f_1 – собств. вектор.

$\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow x_3 = 0 \\ \\ \\ \Rightarrow x_5 = 0 \\ \Rightarrow x_4 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \\ x_2 = C_2 \\ x_3 = x_4 = x_5 = 0 \end{cases}$$

ФСР:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f_2	1	0	0	0	0
f_3	0	1	0	0	0

f_1, f_2, f_3 ...

⑤ ма...

(1, ...

(1, 1 ...

(1, 1 ...

(1, ...

(1, ...

T = ...

f_1, f_2, f_3 - собств. векторы, $\lambda_{1,2,3}$ - собств. значения

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4\ -2 \end{matrix} \Bigg| =$$

⑤ матрицу оператора в базисе

$(1,1,1,1,1)$
$(1,1,1,1,0)$
$(1,1,1,0,0)$
$(1,1,0,0,0)$
$(1,0,0,0,0)$

$$A_f = T^{-1} A T$$

$$-\lambda)(2+\lambda)^3 =$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T|E) = \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right.\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right.\right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\left|\underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{T^{-1}}\right.\right)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

x_2	x_3	x_4	x_5
0	0	0	0
	0	0	0

$$= \begin{pmatrix} -6 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ - матр. оператора в новом ~~базисе~~ базисе.