Лекция 9: Подпространства

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение

Непустое подмножество M векторного пространства V называется *подпространством* пространства V, если выполняются следующие условия:

1) если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$ (*замкнутость подпространства относительно сложения векторов*);
2) если $\mathbf{x} \in M$, а t — произвольное число, то $t\mathbf{x} \in M$ (*замкнутость подпространства относительно умножения вектора на число*).

Приведем ряд примеров подпространств.

Пример 1. Пусть V — произвольное векторное пространство. Очевидно, что все пространство V и множество $M = \{\mathbf{0}\}$ являются подпространствами в V, причем V — наибольшее подпространство в V. Следующее простое наблюдение показывает, что $\{\mathbf{0}\}$ — наименьшее подпространство в V.

Замечание 1

Нулевой вектор содержится в любом подпространстве M пространства V.

Доказательство. Если $\mathbf{x}$ — произвольный вектор из M, то по второму условию из определения подпространства $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x} \in M$.

Пример 2. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}_3$, которое, как отмечалось в лекции 7, можно отождествить с обычным трехмерным пространством. Пусть M — множество векторов, коллинеарных некоторой плоскости π. Ясно, что сумма двух векторов, коллинеарных π, и произведение вектора, коллинеарного π, на любое число коллинеарны π. Следовательно, M — подпространство в $\mathbb{R}_3$. Аналогично доказывается, что множество векторов, коллинеарных некоторой прямой ℓ, также является подпространством в $\mathbb{R}_3$.

Пример 3. В силу теоремы 1 из лекции 3 общее решение произвольной однородной системы линейных уравнений с n неизвестными есть подпространство пространства $\mathbb{R}_n$. Отметим без доказательства, что справедливо и обратное утверждение.

Замечание 2

Всякое подпространство пространства $\mathbb{R}_n$ является пространством решений некоторой однородной системы линейных уравнений с n неизвестными. $\square$

Пример 4. Пусть V — произвольное векторное пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$. Обозначим через M множество всевозможных линейных комбинаций векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, т. е.

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_k\mathbf{a}_k \text{ и } \mathbf{y} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$$

для некоторых чисел $s_1, s_2, \ldots, s_k$ и $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Пусть, далее, t — произвольное число. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_k\mathbf{a}_k) + (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k) = \\ &= (s_1 + t_1)\mathbf{a}_1 + (s_2 + t_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (s_k + t_k)\mathbf{a}_k, \\ t\mathbf{x} &= t(s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_k\mathbf{a}_k) = (ts_1)\mathbf{a}_1 + (ts_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (ts_k)\mathbf{a}_k.\end{aligned}$$

Мы видим, что $\mathbf{x} + \mathbf{y}, t\mathbf{x} \in M$, т. е. M — подпространство пространства V. Оно называется *подпространством, порожденным векторами* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ или *линейной оболочкой* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, и обозначается через $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$. Ясно, что

- *если* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *— система порождающих (в частности, базис) пространства* V, *то* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle = V$.

Из определения подпространства вытекает, что

- $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$ *— наименьшее подпространство пространства* V, *содержащее векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Очевидно, что подпространство векторного пространства само является векторным пространством. Это позволяет говорить о размерности и базисе подпространства.

Предложение 1

Пусть M — подпространство векторного пространства V. Тогда $\dim M \leqslant \dim V$, причем $\dim M = \dim V$ тогда и только тогда, когда $M = V$.

Доказательство. Если M или V — нулевое пространство, то оба утверждения предложения выполняются тривиальным образом. Будем поэтому считать, что M и V — ненулевые пространства. Зафиксируем базис $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ подпространства M и базис $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell)$ пространства V. Если $k > \ell$, то в силу леммы 2 из лекции 8 система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима. Но это противоречит определению базиса. Следовательно, $k \leqslant \ell$, т. е. $\dim M \leqslant \dim V$.

Пусть $\dim M = \dim V$, т. е. $k = \ell$. Тогда система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ является максимальной линейно независимой. В самом деле, в противном случае существует вектор $\mathbf{a}$ такой, что система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}$ линейно независима. Но она содержит $k + 1$ вектор, что противоречит лемме 2 из лекции 8. Таким образом, система векторов $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ является базисом пространства V. Следовательно, любой вектор из V является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Поскольку эти векторы лежат в M, а M — подпространство в V, это означает, что любой вектор из V лежит в M, т. е. $V \subseteq M$. Обратное включение выполнено по условию, и потому $M = V$. Итак, если $\dim M = \dim V$, то $M = V$. Обратное утверждение очевидно. $\square$

Укажем способ нахождения базиса и размерности подпространства, порожденного данным набором векторов.

Алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства пространства $\mathbb{R}_n$, порожденного данным набором векторов

Запишем данные векторы в матрицу по строкам и приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом нашего подпространства, а число этих строк равно его размерности.

Обоснование этого алгоритма будет дано в лекции 12.

Рассмотрим следующую задачу: даны вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n$ и подпространство M пространства $\mathbb{R}_n$, порожденное векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$; требуется выяснить, принадлежит ли вектор $\mathbf{x}$ подпространству M. Ясно, что $\mathbf{x} \in M$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k$ для некоторых $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$. Расписав последнее равенство покомпонентно, мы получим систему n линейных уравнений с неизвестными $t_1, t_2, \dots, t_k$. В основной матрице этой сиситемы по столбцам записаны векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, а в последнем столбце расширенной матрицы стоит вектор $\mathbf{x}$. Вектор $\mathbf{x}$ лежит в M тогда и только тогда, когда эта система совместна. Вспоминая метод Гаусса решения систем линейных уравнений, получаем следующий алгоритм.

Алгоритм выяснения того, принадлежит ли вектор подпространству

Даны вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n$ и подпространство M пространства $\mathbb{R}_n$, порожденное векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Составим матрицу размера $n \times (k+1)$, в первых k столбцах которой запишем векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, а в последнем столбце — вектор $\mathbf{x}$. Начнем приводить ее к ступенчатому виду, не переставляя при этом столбцов. Если в процессе преобразований возникнет строка, в которой все элементы, кроме последнего, равны 0, а последний отличен от 0, то $\mathbf{x} \notin M$. Если же мы доведем матрицу до ступенчатого вида и такой строки не возникнет, то $\mathbf{x} \in M$.

Введем две важные операции над подпространствами.

Определение

Пусть V — векторное пространство, а M_1 и M_2 — его подпространства. *Суммой подпространств* M_1 и M_2 называется множество всех векторов из V, являющихся суммой некоторого вектора из M_1 и некоторого вектора из M_2. *Пересечением подпространств* M_1 и M_2 называется множество всех векторов из V, принадлежащих одновременно как M_1, так и M_2. Сумма подпространств M_1 и M_2 обозначается через $M_1 + M_2$, а их пересечение — через $M_1 \cap M_2$.

Замечание 4

Если M_1 и M_2 — подпространства пространства V, то $M_1 + M_2$ и $M_1 \cap M_2$ также являются подпространствами в V.

Доказательство. В силу замечания 1 каждое из подпространств M_1 и M_2 содержит нулевой вектор. Следовательно, $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in M_1 + M_2$ и $\mathbf{0} \in M_1 \cap M_2$. В частности, множества $M_1 + M_2$ и $M_1 \cap M_2$ — непустые. Далее, пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_1 + M_2$ и t — произвольное число. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ и $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, для некоторых $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \in M_2$.

Учитывая, что M_1 и M_2 — подпространства, получаем, что

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)+(\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2)=(\mathbf{x}_1+\mathbf{y}_1)+(\mathbf{x}_2+\mathbf{y}_2)\in M_1+M_2,$$
$$t\mathbf{x}=t(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=t\mathbf{x}_1+t\mathbf{x}_2\in M_1+M_2.$$

Следовательно, M_1+M_2 — подпространство в V. Далее, пусть $\mathbf{x},\mathbf{y}\in M_1\cap M_2$ и t — произвольное число. Тогда $\mathbf{x},\mathbf{y}\in M_1$ и $\mathbf{x},\mathbf{y}\in M_2$. Поскольку M_1 и M_2 — подпространства, имеем $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in M_1$, $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in M_2$ $t\mathbf{x}\in M_1$ и $t\mathbf{x}\in M_2$. Следовательно, $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in M_1\cap M_2$ и $t\mathbf{x}\in M_1\cap M_2$, и потому $M_1\cap M_2$ — подпространство в V. $\square$

Замечание 5

Если M_1 и M_2 — подпространства пространства V, то подпространство M_1+M_2 содержит M_1 и M_2 и является наименьшим подпространством в V, обладающим указанным свойством.

Доказательство. Если $\mathbf{x}\in M_1$, то $\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{0}$. Поскольку $\mathbf{0}\in M_2$, имеем $\mathbf{x}\in M_1+M_2$. Следовательно, $M_1\subseteq M_1+M_2$. Аналогично проверяется, что $M_2\subseteq M_1+M_2$. Пусть теперь M — подпространство в V, содержащее M_1 и M_2. Предположим, что $\mathbf{x}\in M_1+M_2$. Тогда $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$ для некоторых $\mathbf{x}_1\in M_1$ и $\mathbf{x}_2\in M_2$. Следовательно, $\mathbf{x}_1\in M$ и $\mathbf{x}_2\in M$, откуда $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2\in M$. Таким образом, $M_1+M_2\subseteq M$. $\square$

Из определения пересечения подпространств немедленно вытекает

Замечание 6

Если M_1 и M_2 — подпространства пространства V, то пространство $M_1 \cap M_2$ содержится в M_1 и в M_2 и является наибольшим подпространством в V, обладающим указанным свойством. □

Первым из двух основных результатов данной лекции является

Теорема 1

Пусть V — векторное пространство, а M_1 и M_2 — его подпространства. Тогда размерность суммы подпространств M_1 и M_2 равна сумме размерностей этих подпространств минус размерность их пересечения.

Доказательство. Из предложения 1 вытекает, что $\dim(M_1 \cap M_2) \leqslant \dim M_1$ и $\dim(M_1 \cap M_2) \leqslant \dim M_2$. Положим

$$\dim(M_1 \cap M_2) = k, \ \ \dim M_1 = k + \ell \text{ и } \dim M_2 = k + m.$$

Если $M_1 = \{\mathbf{0}\}$, то, очевидно, $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$, $\dim M_1 = \dim(M_1 \cap M_2) = 0$, $M_1 + M_2 = M_2$ и потому

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_2 = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Аналогично разбирается случай, когда $M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Итак, далее можно считать, что пространства M_1 и M_2 — ненулевые, и, в частности, каждое из них имеет базис. Будем также считать, что $M_1 \cap M_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ (в противном случае следует во всех дальнейших рассуждениях заменить базис пространства $M_1 \cap M_2$ на пустой набор векторов; сами рассуждения при этом только упростятся). Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис пространства $M_1 \cap M_2$. В силу теоремы 3 из лекции 8 этот набор векторов можно дополнить как до базиса M_1, так и до базиса M_2.

Пусть $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_\ell$ — базис M_1, а $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, …, $\mathbf{c}_m$ — базис M_2. Докажем, что набор векторов

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m \tag{1}$$

является базисом пространства $M_1 + M_2$. Этого достаточно для доказательства теоремы, так как число векторов в этом наборе равно

$$k + \ell + m = (k + \ell) + (k + m) - k = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Пусть $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$. Ясно, что вектор $\mathbf{x}_1$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_\ell$, а вектор $\mathbf{x}_2$ — линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, …, $\mathbf{c}_m$. Следовательно, вектор $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ является линейной комбинацией векторов (1). Таким образом, набор векторов (1) является системой образующих пространства $M_1 + M_2$. В силу леммы 1 из лекции 8 остается доказать, что этот набор векторов линейно независим. В самом деле, предположим, что

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k + s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \dots + s_\ell\mathbf{b}_\ell + r_1\mathbf{c}_1 + r_2\mathbf{c}_2 + \dots + r_m\mathbf{c}_m = \mathbf{0} \tag{2}$$

для некоторых чисел $t_1, t_2, \dots, t_k, s_1, s_2, \dots, s_\ell, r_1, r_2, \dots, r_m$. Требуется доказать, что все эти числа равны 0.

Положим $\mathbf{y} = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \dots + s_\ell\mathbf{b}_\ell$. Очевидно, что $\mathbf{y} \in M_1$. С другой стороны, из (2) вытекает, что

$$\mathbf{y} = -t_1\mathbf{a}_1 - t_2\mathbf{a}_2 - \dots - t_k\mathbf{a}_k - r_1\mathbf{c}_1 - r_2\mathbf{c}_2 - \dots - r_m\mathbf{c}_m \in M_2.$$

Следовательно, $\mathbf{y} \in M_1 \cap M_2$. Но тогда вектор $\mathbf{y}$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Таким образом, существуют числа $q_1, q_2, \dots, q_k$ такие, что $\mathbf{y} = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \dots + s_\ell\mathbf{b}_\ell = q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \dots + q_k\mathbf{a}_k$. Следовательно,

$$q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \dots + q_k\mathbf{a}_k - s_1\mathbf{b}_1 - s_2\mathbf{b}_2 - \dots - s_\ell\mathbf{b}_\ell = \mathbf{0}. \qquad (3)$$

Поскольку векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_\ell$ образуют базис пространства M_1, они линейно независимы. Поэтому линейная комбинация, стоящая в левой части равенства (3), тривиальна. В частности, $s_1 = s_2 = \dots = s_\ell = 0$. Следовательно, равенство (2) принимает вид

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k + r_1\mathbf{c}_1 + r_2\mathbf{c}_2 + \dots + r_m\mathbf{c}_m = \mathbf{0}.$$

Учитывая, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_m$ образуют базис пространства M_2 (и, в частности, линейно независимы), мы получаем, что $t_1 = t_2 = \dots = t_k = r_1 = r_2 = \dots = r_m = 0$. Итак, все коэффициенты в левой части равенства (2) равны 0, что и требовалось доказать. $\square$

Рассмотрим вопрос о том, как найти базис и размерность суммы подпространств. Пусть подпространство M_1 имеет базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, а подпространство M_2 — базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell$. Предположим, что $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. Тогда существуют векторы $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$ такие, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. В силу выбора векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ имеем

$$\mathbf{x}_1 = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2 = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell$$

для некоторых чисел $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и $s_1, s_2, \ldots, s_\ell$. Следовательно,

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k + s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell.$$

Это означает, что пространство $M_1 + M_2$ содержится в подпространстве, порожденном набором векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell$. С другой стороны, очевидно, что каждый из этих векторов, а значит и подпространство, ими порожденное, содержится в $M_1 + M_2$. Следовательно,

$$M_1 + M_2 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell \rangle.$$

Учитывая изложенный выше в данной лекции алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства, попрожденного данным набором векторов, получаем

Алгоритм нахождения базиса и размерности суммы подпространства пространства $\mathbb{R}_n$

Пусть даны базисы подпространств M_1 и M_2 пространства $\mathbb{R}_n$. Запишем в матрицу по строкам координаты базисных векторов обоих подпространств и приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом суммы подпространств M_1 и M_2, а число этих строк равно ее размерности.

Отметим, что, найдя размерность суммы подпространств M_1 и M_2, мы сможем найти и размерность их пересечения, так как, в силу теоремы 1,

$$\dim(M_1 \cap M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 + M_2). \tag{4}$$

Базис пересечения ищется несколько сложнее. Способ решения этой задачи будет указан в лекции 13.

Прямая сумма (1)

Определение

Пусть V — векторное пространство, а M_1 и M_2 — его подпространства. Говорят, что сумма подпространств M_1 и M_2 является их *прямой суммой*, если $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Прямая сумма подпространств M_1 и M_2 обозначается через $M_1 \oplus M_2$ или $M_1 \dot{+} M_2$.

Вторым основным результатом данной лекции является

Теорема 2

Пусть V — векторное пространство, а M_1 и M_2 — его подпространства. Следующие условия эквивалентны:

1) *$M_1 + M_2$ является прямой суммой подпространств M_1 и M_2;*
2) $\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$*;*
3) *любой вектор из $M_1 + M_2$ единственным образом представим в виде суммы вектора из M_1 и вектора из M_2;*
4) *нулевой вектор пространства V единственным образом представим в виде суммы вектора из M_1 и вектора из M_2.*

Доказательство теоремы 2 дано на следующем слайде.

Прямая сумма (2)

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) непосредственно вытекает из теоремы 1 и того факта, что размерность нулевого пространства равна 0. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) очевидна. Остается доказать импликации 1) $\Longrightarrow$ 3) и 4) $\Longrightarrow$ 1).

1) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. По определению суммы подпространств $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$. Остается доказать, что такое представление вектора $\mathbf{x}$ единственно. Предположим, что $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, где $\mathbf{y}_1 \in M_1$ и $\mathbf{y}_2 \in M_2$. Учитывая, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, имеем $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2$. Ясно, что $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 \in M_1$, а $\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2 \in M_2$. Следовательно, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2 \in M_1 \cap M_2$. Но $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Поэтому $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2$.

4) $\Longrightarrow$ 1). Предположим, что $M_1 \cap M_2 \neq \{\mathbf{0}\}$, т. е. существует ненулевой вектор $\mathbf{x} \in M_1 \cap M_2$. Тогда вектор $\mathbf{0}$ может быть двумя различными способами представлен в виде суммы вектора из M_1 и вектора из M_2: $\mathbf{0} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x})$ и $\mathbf{0} = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x}$. Мы получили противоречие с условием 4). □

Из доказательства теоремы 2 вытекает

Замечание 7

Если $V = M_1 \oplus M_2$, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$ — базис M_1, а $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$ — базис M_2, то $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$ — базис пространства V. □

При решении задач полезно иметь в виду следующее

Замечание 8

$V = M_1 \oplus M_2$ тогда и только тогда, когда

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 = \dim V.$$

Доказательство. Если $V = M_1 \oplus M_2$, то, в частности, $M_1 + M_2 = V$, и потому $\dim(M_1 + M_2) = \dim V$. А $\dim M_1 + \dim M_2 = \dim(M_1 + M_2)$ в силу теоремы 2. Обратно, если $\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 = \dim V$, то $M_1 + M_2 = V$ в силу предложения 1 и $\dim(M_1 \cap M_2) = 0$ в силу (4). Из последнего равенства вытекает, что $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Объединяя этот факт с равенством $M_1 + M_2 = V$, получаем, что $V = M_1 \oplus M_2$. $\square$

Из замечания 8 вытекает следующий алгоритм.

Алгоритм выяснения того, является ли пространство $\mathbb{R}_n$ прямой суммой своих подпространств M_1 и M_2

Предполагаем, что нам известны векторы, порождающие каждое из подпространств M_1 и M_2. Используя алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства, порожденного данным набором векторов, находим $\dim M_1$ и $\dim M_2$. Если $\dim M_1 + \dim M_2 \neq n$, то $\mathbb{R}_n \neq M_1 \oplus M_2$. Если $\dim M_1 + \dim M_2 = n$, пользуясь алгоритмом нахождения базиса и размерности суммы подпространств, находим $\dim(M_1 + M_2)$. Если $\dim(M_1 + M_2) = n$, то $\mathbb{R}_n = M_1 \oplus M_2$, в противном случае $\mathbb{R}_n \neq M_1 \oplus M_2$.

Определение

Предположим, что $V = M_1 \oplus M_2$ и $\mathbf{x} \in V$. В силу теоремы 2 существуют однозначно определенные векторы $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$ такие, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. Вектор $\mathbf{x}_1$ называется *проекцией* $\mathbf{x}$ *на* M_1 *параллельно* M_2, а вектор $\mathbf{x}_2$ — *проекцией* $\mathbf{x}$ *на* M_2 *параллельно* M_1.

Алгоритм нахождения проекции вектора на подпространство

Пусть $V = M_1 \oplus M_2$ и $\mathbf{x} \in V$. Предположим, что нам известны базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ подпространства M_1 и базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell$ подпространства M_2. В силу замечания 7 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell$ — базис пространства V. Найдем координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе. Пусть они имеют вид $(t_1, t_2, \ldots, t_k, s_1, s_2, \ldots, s_\ell)$. Тогда $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$ — проекция $\mathbf{x}$ на M_1 параллельно M_2, а $s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell$ — проекция $\mathbf{x}$ на M_2 параллельно M_1.

Обоснование этого алгоритма очевидно: если, в указанных обозначениях, $\mathbf{y} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{z} = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell$, то $\mathbf{y} \in M_1$, $\mathbf{z} \in M_2$ и $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$.

В качестве примера применения алгоритмов, указанных на двух предыдущих слайдах, рассмотрим следующую задачу.

Задача. Проверить, что пространство $\mathbb{R}_4$ является прямой суммой подпространства M_1, порожденного векторами $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 0, 3, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, и подпространства M_2, порожденного векторами $\mathbf{b}_1 = (2, 1, 3, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 2, 2, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (2, 0, 4, 3)$, и найти проекцию вектора $\mathbf{x} = (0, 2, 1, 3)$ на M_1 параллельно M_2.

Решение. Найдем размерность и базис подпространства M_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\dim M_1 = 2$, а в качестве базиса пространства M_1 можно взять векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2' = (0, 2, -1, 0)$. Найдем теперь размерность и базис подпространства M_2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\dim M_2 = 2$, а в качестве базиса пространства M_2 можно взять векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2' = (0, 1, -1, -1)$. Мы видим, в частности, что $\dim M_1 + \dim M_2 = 4$.

Найдем теперь размерность пространства $M_1 + M_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $\dim(M_1 + M_2) = 4$. С учетом сказанного ранее, отсюда вытекает, что $\mathbb{R}_4 = M_1 \oplus M_2$. Объединяя найденные ранее базисы подпространств M_1 и M_2, получаем, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2'$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2'$ образуют базис пространства $\mathbb{R}_4$. Разложим вектор $\mathbf{x}$ по этому базису:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Итак, $\mathbf{x} = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2' + \mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2'$. Следовательно, проекцией вектора $\mathbf{x}$ на M_1 параллельно M_2 является вектор $-2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2' = (-2, 4, -5, -2)$.

Ответ: $(-2, 4, -5, -2)$.

В дальнейшем нам пригодится следующее утверждение

Предложение 2

Для произвольного подпространства M векторного пространства V существует такое подпространство M' в V, что $V = M \oplus M'$.

Доказательство. Ясно, что если $M = \{\mathbf{0}\}$, то в качестве M' можно взять V, а если $M = V$, то достаточно положить $M' = \{\mathbf{0}\}$. Пусть теперь $\{\mathbf{0}\} \subset M \subset V$. Положим $\dim V = n$ и $\dim M = k$. В силу сказанного $0 < k < n$. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис M. В силу теоремы 3 из лекции 8 существуют векторы $\mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ такие, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ образуют базис V. Положим $M' = \langle \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$. Проверим, что нулевой вектор единственным образом представим в виде суммы вектора из M и вектора из M'. Существование такого представления очевидно, поскольку $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ (см. замечание 1). Предположим теперь, что $\mathbf{0} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, где $\mathbf{x} \in M$, а $\mathbf{y} \in M'$. Тогда

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k \text{ и } \mathbf{y} = t_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} + \cdots + t_n\mathbf{a}_n.$$

Следовательно, $\mathbf{0} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_n\mathbf{a}_n$. Поскольку $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — базис пространства V, получаем, что $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$. Но тогда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Итак, вектор $\mathbf{0}$ единственным образом представим в виде суммы вектора из M и вектора из M'. В силу теоремы 2 $M + M' = M \oplus M'$.

Осталось доказать, что $M + M' = V$. Пусть $\mathbf{a}$ — произвольный вектор из V. Разложим его по базису $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$: $\mathbf{a} = q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \cdots + q_n\mathbf{a}_n$. Положим $\mathbf{b} = q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \cdots + q_k\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{c} = q_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} + \cdots + q_n\mathbf{a}_n$. Тогда $\mathbf{b} \in M$, $\mathbf{c} \in M'$ и $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Следовательно, $V \subseteq M + M'$. Обратное включение очевидно, и потому $M + M' = V$. $\square$