Лекция 6: Крамеровские системы линейных уравнений

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

В курсе аналитической геометрии упоминалась теорема Крамера для систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными и трех линейных уравнений с тремя неизвестными. В данной лекции эта теорема будет сформулирована и доказана в общем случае — для систем n линейных уравнений с n неизвестными при любом n. Будут также получены некоторые следствия из этой теоремы.

Определение крамеровской системы. Определители, связанные с крамеровской системой (1)

Определение

Система линейных уравнений называется *крамеровской*, если в ней число уравнений равно числу неизвестных.

Крамеровские системы получили название в честь швейцарского математика XVIII века Габриэля Крамера, который изучал их.

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Определитель основной матрицы системы (1) обозначим через Δ и будем называть *определителем системы* (1).

Далее, для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через Δ_i определитель матрицы, полученной заменой i-го столбца основной матрицы системы (1) на столбец свободных членов этой системы. Иными словами,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\,n-1} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2\,n-1} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n\,n-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Теорема Крамера (1)

Основным результатом данной лекции является следующая теорема, известная как *теорема Крамера*.

Теорема 1

Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Доказательство. Пусть $\Delta \neq 0$. Докажем сначала существование решения системы (1). Для этого достаточно убедиться в том, что набор чисел

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right) \tag{2}$$

является решением системы, т. е. обращает все ее уравнения в верные равенства. Подставим этот набор в первое уравнение системы и разложим определитель Δ_1 по первому столбцу, определитель Δ_2 — по второму столбцу, ..., определитель Δ_n — по n-му столбцу.

Получим

$$
\begin{aligned}
& a_{11}\cdot\tfrac{\Delta_1}{\Delta}+a_{12}\cdot\tfrac{\Delta_2}{\Delta}+\cdots+a_{1n}\cdot\tfrac{\Delta_n}{\Delta}= \\
&=\tfrac{1}{\Delta}\cdot\bigl(\,a_{11}\Delta_1+a_{12}\Delta_2+\cdots+a_{1n}\Delta_n\bigr)= \\
&=\tfrac{1}{\Delta}\cdot\bigl[\,a_{11}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1})+ \\
&\qquad +a_{12}(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2})+ \\
&\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\qquad +a_{1n}(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn})\bigr].
\end{aligned}
$$

Раскрыв круглые скобки и сгруппировав слагаемые, содержащие b_1, b_2, $\dots$, b_n, можно переписать полученное выражение в виде

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{\Delta}\cdot\bigl[\,& b_1(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n})+ \\
+\,& b_2(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\cdots+a_{1n}A_{2n})+ \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+\,& b_n(a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\cdots+a_{1n}A_{nn})\bigr].
\end{aligned}
$$

Выражение в первых круглых скобках есть не что иное, как разложение определителя Δ по первой строке, а выражения в остальных круглых скобках равны нулю в силу предложения 8 из лекции 5.

Поэтому окончательно получаем, что

$$a_{11} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta} + \dots + a_{1n} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \cdot b_1 \cdot \Delta = b_1,$$

т. е. набор чисел (2) обращает первое уравнение системы (1) в верное равенство. Аналогично проверяется, что он обращает в верные равенства и все остальные уравнения этой системы.

Докажем теперь единственность решения. Пусть $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ — произвольное решение системы (1). Иными словами, этот набор чисел обращает все уравнения системы в верные равенства:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \dots + a_{1n}x_n^0 = b_1, \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \dots + a_{2n}x_n^0 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1^0 + a_{n2}x_2^0 + \dots + a_{nn}x_n^0 = b_n. \end{cases}$$

Умножим первое из этих равенств на A_{11}, второе — на A_{21}, ..., последнее — на A_{n1} и сложим полученные равенства.

Сгруппировав в левой части суммы слагаемые, содержащие $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, получим

$$\begin{aligned}
&(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1^0 + \\
+ &(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{n2}A_{n1})x_2^0 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ &(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1})x_n^0 = \\
= &\, b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}.
\end{aligned}$$

В левой части этого равенства выражение в первых круглых скобках есть в точности разложение определителя Δ по первому столбцу, а выражения во всех остальных круглых скобках равны нулю в силу предложений 8 и 10 из лекции 5. А в правой части стоит разложение определителя Δ_1 по первому столбцу. Следовательно, последнее равенство можно переписать в виде $\Delta x_1^0 = \Delta_1$. Аналогично доказывается, что $\Delta x_2^0 = \Delta_2, \ldots, \Delta x_n^0 = \Delta_n$. Таким образом, справедливо

Замечание 1

Если $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — решение системы (1), то $\Delta x_1^0 = \Delta_1$, $\Delta x_2^0 = \Delta_2$, $\ldots$, $\Delta x_n^0 = \Delta_n$. □

Поскольку $\Delta \neq 0$, получаем, что

$$x_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n^0 = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Итак, мы взяли произвольное решение и доказали, что оно совпадает с решением (2). Следовательно, решение единственно. Теорема Крамера доказана. $\square$

Укажем ряд следствий из теоремы Крамера. Из замечания 1 непосредственно вытекает

Следствие 1

Если $\Delta = 0$, а по крайней мере один из определителей $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ отличен от 0, то система (1) не имеет решений. $\square$

Следствие 2

Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$, то система (1) либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

Доказательство следствия 2 приведено на следующем слайде.

Доказательство. Предположим, что $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_n = 0$ и система (1) совместна. Достаточно проверить, что в этом случае система (1) имеет бесконечно много решений. Приведем основную матрицу этой системы к ступенчатому виду. Ясно, что полученная матрица будет верхнетреугольной. В силу предложения 11 из лекции 5 по крайней мере один элемент на ее главной диагонали равен 0. Из определения ступенчатой матрицы теперь вытекает, что последняя строка полученной нами ступенчатой матрицы является нулевой. Следовательно, число ненулевых строк в этой матрице меньше числа ее столбцов. Как видно из изложения метода Гаусса (см. случай 3 в лекции 4), это означает, что система имеет бесконечно много решений. □

Из теоремы Крамера и следствий 1 и 2 непосредственно вытекает

Следствие 3

Крамеровская система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$. □

Следствие 4

Крамеровская однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю.

Доказательство. В силу замечания 1 из лекции 3 любая однородная система совместна. Поэтому если $\Delta = 0$, то в силу следствия 3 наша система имеет более одного решения. Ясно, что все эти решения, кроме одного, — ненулевые. Обратно, если крамеровская однородная система имеет ненулевое решение, то она имеет более одного решения (так как нулевое решение у нее есть всегда). Но тогда $\Delta = 0$ в силу теоремы Крамера. $\square$

Теорема Крамера часто используется при решении задач, которые на первый взгляд никак не связаны с системами линейных уравнений. Приведем пример такой задачи.

Задача. Найти многочлен $f(x)$ степени 3 такой, что $f(1)=0$, $f(-1)=-4$, $f(2)=2$ и $f(-2)=6$.

Решение. Пусть $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. Тогда:

$$\begin{array}{ll} f(1)=a_3+a_2+a_1+a_0, & f(-1)=-a_3+a_2-a_1+a_0, \\ f(2)=8a_3+4a_2+2a_1+a_0, & f(-2)=-8a_3+4a_2-2a_1+a_0. \end{array}$$

Получаем крамеровскую систему линейных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} a_3 & + & a_2 & + & a_1 & + & a_0 & = & 0, \\ -a_3 & + & a_2 & - & a_1 & + & a_0 & = & -4, \\ 8a_3 & + & 4a_2 & + & 2a_1 & + & a_0 & = & 2, \\ -8a_3 & + & 4a_2 & - & 2a_1 & + & a_0 & = & 6. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Подсчитаем определитель системы (3) методом приведения матрицы к треугольному виду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ -8 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -6 & -7 \\ 0 & 12 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 72.$$

В частности, $\Delta \neq 0$, и потому мы можем применять теорему Крамера. Найдем определители $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 11 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -18 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -72,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 1 \\ -8 & 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & -7 \\ 0 & 6 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 12 & 24 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 144,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ -8 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -7 \\ 0 & 12 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 30 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = 216,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -4 \\ 8 & 4 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 12 & 6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 30 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = -288.$$

Пример применения теоремы Крамера (4)

В силу теоремы Крамера имеем:

$$a_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-72}{72} = -1,\ a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{144}{72} = 2,$$
$$a_1 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{216}{72} = 3,\quad a_0 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-288}{72} = -4.$$

Ответ. $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x - 4.$