2. Криволинейный интеграл от вектор-функции (интеграл 2 рода)

Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть D — область в плоскости OXY.

Теорема 1. Для того чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

в области D не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в этой области, был равен нулю.

Теорема 2. Пусть функции P и Q непрерывны в области D. Для того чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

по кусочно-гладкой кривой $\smile{AB}$, лежащей в области D, не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы в D существовала такая функция $U(x, y)$, что

$$dU(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

При этом криволинейный интеграл может быть вычислен по формуле:

$$\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy = U(B) - U(A).$$

Определение. Область D называется *односвязной*, если для любой замкнутой кривой, лежащей в D, ограниченная ею конечная часть плоскости принадлежит D.

Теорема 3. Пусть функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в односвязной области D. Для того чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

по кусочно-гладкой кривой $\overset{\smile}{AB}$ не зависел от пути интегрирования в D, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \quad (x,y) \in D.$$

Поверхностные интегралы

1. Способы определения поверхности.

а) явно заданная поверхность

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна на $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Множество точек $\Sigma = \{(x, y, f(x, y))|\ (x, y) \in D\}$ называется *поверхностью* Σ, *явно заданной функцией* $f(x, y)$.

Уравнение $z = f(x, y)$ называется *уравнением поверхности* Σ.

б) параметрически заданная поверхность

$$\Sigma = \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \qquad (u,v) \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Пусть функции системы (1) непрерывны вместе со своими частными производными в Δ и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} \tag{2}$$

равен 2.

Тогда система (1) определяет поверхность Σ, называемую *параметрически заданной поверхностью.*

NB Если ранг матрицы (2) равен 1 в некоторой точке, такая точка называется *особой.*

в) неявно заданная поверхность

Пусть дано уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \tag{3}$$

где функция F непрерывна вместе со своими частными производными и $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2 \neq 0$ в некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Например, $F'_z \neq 0$.
Тогда существует функция $z = f(x, y)$ — непрерывное и непрерывно дифференцируемое решение уравнения (3).

Поверхность $\Sigma = \{(x, y, f(x, y)) |\ F(x, y, f(x, y)) = 0\}$ называется *поверхностью* Σ, *неявно заданной уравнением.*

NB Если $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2 \neq 0$ в некоторой точке, такая точка называется *особой.*

2. Касательная плоскость. Вектор нормали

Определение. Плоскость, проходящая через точку M_0 поверхности Σ, называется *касательной плоскостью к поверхности* Σ в этой точке, если в ней лежат касательные ко всем кривым, проходящим через точку M_0 и лежащим на Σ.

б) параметрически заданная поверхность

$$\Sigma = \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \qquad (u,v) \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

в векторной форме: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v), \quad (u,v) \in \Delta$

касательная плоскость: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

нормаль: $\vec{N} = (A, B, C) = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$

а) явно заданная поверхность

$$\Sigma = \{(x, y, f(x, y)) |\ (x, y) \in D\}$$

Поверхность Σ называется *гладкой*, если f'_x, f'_y непрерывны на D.

касательная плоскость: $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

нормаль: $\vec{N} = (-f'_x, -f'_y, 1)$

в) неявно заданная поверхность

$$F(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

касательная плоскость:
$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

нормаль: $\vec{N} = (F'_x, F'_y, F'_z)$