Задание № 8 по математическому анализу

Семке Даниил

Кн 102, МЕН-190207

№2323

Оценить: $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x} \underset{\text{по 1 теореме о среднем}}{\overset{\text{следствие из}}{=}} \frac{2\pi}{1+\frac{1}{2}\cos c}$

$-1 \le \cos c \le 1 \;\Big|\cdot\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\cos c \le \frac{1}{2} \;\Big| +1$

$\frac{1}{2} \le 1+\frac{1}{2}\cos c \le \frac{3}{2}$

P.S. в дальнейших решениях я не буду говорить „по Т. о среднем". Пусть это будет оговорено заранее

$\frac{2}{3} \le \frac{1}{1+\frac{1}{2}\cos c} \le 2 \;\Big|\cdot 2\pi$

$\frac{4}{3}\pi \le \frac{2\pi}{1+\frac{1}{2}\cos c} \le 4\pi$

Тогда

$$\boxed{\frac{4\pi}{3} \le I \le 4\pi}$$

№2324

$I = \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx = \frac{1}{\sqrt{1+c}}\int_0^1 x^9 dx = \frac{1}{\sqrt{1+c}}\cdot\frac{1}{10}$

$c \in [0,1] \quad \frac{1}{10\sqrt{2}} \le \frac{1}{10\sqrt{1+c}} \le \frac{1}{10}$

$$\boxed{\frac{1}{10\sqrt{2}} \le I \le \frac{1}{10}}$$

№2325.

$I = \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx = -\frac{1}{c+100}\int_0^{100} e^{-x} d(-x) = -\frac{(e^{-100}-1)}{c+100} = \frac{1-e^{-100}}{c+100}$

$c \in [0,100] \Rightarrow \frac{1-e^{-100}}{200} \le \frac{1-e^{-100}}{c+100} \le \frac{1-e^{-100}}{100}$

$$\boxed{\frac{1-e^{-100}}{200} \le I \le \frac{1-e^{-100}}{100}}$$

№2326.(а)

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+c}\int_0^1 x^n dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+c}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{\infty}=0$$

$c\in[0;1]$ ч.т.д.

№2326.1 $a>0, b>0, f(x)\in C[0;1]$

а) $\underbrace{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^1\frac{dx}{\varepsilon x^2+1}}_{I}=\frac{1}{\varepsilon\cdot c^2+1}$ $c\in[0,1]$

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\le\frac{1}{\varepsilon\cdot c^2+1}\le 1$$

$\frac{1}{1+\varepsilon}\le \underline{I}\le 1$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^1 \underline{I}=1$ (по теореме о 3-х миллиционерах) ~~милициона~~

б) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}f(x)\frac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}f(c)\cdot\ln\frac{b\cancel{\varepsilon}}{a\cancel{\varepsilon}}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}f(c)\ln\frac{b}{a}=f(0)\ln\frac{b}{a}$

$c\in[a\varepsilon, b\varepsilon]\Rightarrow\lim\limits_{\varepsilon\to 0}c=0$

+ непрерывность $f(x)$

$f(x)=(2+\cos x)^{-1}$ $\frac{1}{3}$ $\int\frac{1}{2+\cos x}dx=\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt3}\right)+C$

Первообразная?

на $x\in[0;2\pi]$ (из предыдущей работы)

Т.к. $F(x)$ не существует в т $x=2\pi$, возьмем предел $x\to 2\pi$ в силу непрерывности.

Ответ: $F(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt3}\right)=\frac{\pi}{\sqrt3}, & x=2\pi\\ \frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt3}\right), & x\ne 2\pi\end{cases}$