Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция $f(x,y)$ определена на $[a,b]\times Y$.

Пусть при каждом $y\in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x на $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x,y)\,dx =: I(y)$$

— *собственный интеграл, зависящий от параметра* $y\in Y$.

Теорема (о предельном переходе под знаком собственного интеграла)**.**

Пусть при каждом $y\in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x на $[a,b]$. Пусть $y_0\in Y'$ и $f(x,y)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}\varphi(x)$ при $y\to y_0$. Тогда $\varphi(x)$ интегрируема на $[a,b]$, существует $\lim\limits_{y\to y_0} I(y)$ и

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Теорема (о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра)**.**
Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$. Тогда $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

Теорема (о дифференцируемости собственного интеграла, зависящего от параметра)**.**
Пусть при каждом $y\in[c,d]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x на $[a,b]$. Пусть $f'_y(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$. Тогда $I(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и

$$\frac{d}{dy}I(y)=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx,\quad y\in[c,d],$$

или

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx,\quad y\in[c,d].$$

Пример. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx = I(b)$, $b\geqslant a>0$.

Замечания: Пусть функция $f(x,y)$ определена на $[a,b]\times[c,d]$ и при каждом $y\in[c,d]$ интегрируема по x на $[a,b]$. Пусть заданы функции $\alpha(y):[c,d]\to[a,b]$ и $\beta(y):[c,d]\to[a,b]$. Тогда определён интеграл

$$I(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx.$$

- Если $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$, а функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывны на $[c,d]$, то $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

- Если при каждом $y\in[c,d]$ функция $f(x,y)$ непрерывна по x на $[a,b]$, функция $f'_y(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$, а функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывно дифференцируемы на $[c,d]$, то $I(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и

$$I'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)\,dx+f(\beta(y),y)\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y).$$

Теорема (об интегрируемости собственного интеграла, зависящего от параметра)**.**

Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$. Тогда для каждого $t\in[c,d]$ функция $I(y)$ интегрируема на $[c,t]$ и

$$\int_c^t dy\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b dx\int_c^t f(x,y)\,dy.$$

Пример. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx,\ b\geqslant a>0.$

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть $f(x,y)$ определена на $[a,+\infty)\times Y$ и для каждого $y\in Y$ и $A>a$ определен интеграл

$$I(A,y):=\int_a^A f(x,y)\,dx.$$

Если существует (конечный) предел

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x,y)\,dx=:I(y),$$

то функция $I(y)$ называется *несобственным интегралом 1 рода, зависящим от параметра*:

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx,\quad y\in Y.$$

Определение. Интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* Y, если

$$I(A,y)\overset{Y}{\rightrightarrows} I(y)\quad \text{при}\ \ A\to+\infty.$$

Пример. $\displaystyle\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx,\ \ y\geqslant 0.$

Несобственный интеграл 2 рода — аналогично.

Пример. $\displaystyle\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\,dx,\ \ y\in[0,1].$

Необходимые и достаточные условия сходимости интегралов

Теорема (критерий Коши)**.** Интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на Y тогда и только тогда, когда

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)\in(0,b-a)\ \ \forall\,A,B\in(b-\delta,b)\ \ \forall\,y\in Y\qquad \Bigl|\int_A^B f(x,y)\,dx\Bigr|<\varepsilon.$$

Теорема (признак Вейерштрасса)**.** Если найдётся такая функция $\varphi(x)$, что

$$|f(x,y)|\leqslant\varphi(x),\quad x\in[a,b),\quad y\in Y,$$

и интеграл $\displaystyle\int_a^b\varphi(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно и абсолютно на Y.

Теорема (признак Абеля)**.** Пусть интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на Y. Пусть функция $g(x,y)$ при каждом $y \in Y$ монотонна по x и

$$\exists\, C > 0 \ : \ |g(x,y)| \leqslant C, \quad x \in [a,b), \quad y \in Y.$$

Тогда $\int_a^b f(x,y)g(x,y)\,dx$ сходится равномерно на Y.

Теорема (признак Дирихле)**.** Пусть интегралы $\int_a^A f(x,y)\,dx$ равномерно по $A \in [a,b)$ и $y \in Y$ ограничены. Пусть функция $g(x,y)$ при каждом $y \in Y$ монотонна по x и

$$g(x,y) \overset{Y}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \ \ x \to b-0.$$

Тогда $\int_a^b f(x,y)g(x,y)\,dx$ сходится равномерно на Y.

Пример. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{n^2+x^2}\,dx$, $0 < a_0 \leqslant a$.

Пример. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-ax}\,dx$, $a \geqslant 0$.