

Глава III. Векторная алгебра

§ 10. Линейные операции над векторами

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Материал этого параграфа в основном известен из школьного курса математики. Тем не менее, он необходим для систематического изложения нашего курса. К тому же, есть и существенные отличия от изложения этого материала в школе. Основное из них состоит в определении понятия вектора.

Определение

Отрезок AB называется **направленным**, если указано, какая из точек A или B является его началом, а какая — концом. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается через \overrightarrow{AB} . Длина направленного отрезка \overrightarrow{AB} обозначается через $|\overrightarrow{AB}|$. Если $A = B$, то отрезок называется **нулевым** и обозначается через $\vec{0}$. Направленный отрезок \overrightarrow{BA} называется **противоположным** к \overrightarrow{AB} .

- В школьном курсе математики именно направленные отрезки называют векторами, но мы будем различать эти понятия. Определение вектора будет дано чуть позднее.

Сонаправленные, противоположные и коллинеарные направленные отрезки

Определения

Ненулевые направленные отрезки, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Коллинеарные направленные отрезки называются *сонаправленными*, если они направлены в одну и ту же сторону, и *антинаправленными* или *противонаправленными* в противоположном случае. Нулевой направленный отрезок по определению считается коллинеарным, сонаправленным и антинаправленным любому направленному отрезку. Коллинеарность направленных отрезков \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} обозначается через $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, их сонаправленность — через $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$, а антинаправленность — через $\overrightarrow{AB} \downarrow \overrightarrow{CD}$.

Понятие вектора (1)

Введем на множестве всех направленных отрезков бинарное отношение α следующим образом: $\overrightarrow{AB} \alpha \overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. Очевидно, что отношение α рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

Определение

Вектором называется элемент фактор-множества множества всех направленных отрезков по только что определенному отношению эквивалентности α .

- Иными словами вектор — это множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и одинаковое направление.

Определение

Направленный отрезок, принадлежащий вектору, называется *изображением вектора*.

Все изображения данного вектора имеют одну и ту же длину. Это делает корректным следующее

Определение

Длиной (или *модулем*) *вектора* называется длина любого его изображения.

Определение

Два вектора *равны*, если они равны как множества, т. е. состоят из одних и тех же направленных отрезков.

Допуская вольность речи, говорят, что

- *два вектора равны, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление.*

Очевидно, что для любого вектора \vec{a} и для любой точки A пространства существует единственный направленный отрезок, принадлежащий вектору \vec{a} и имеющий начало в точке A . Построение такого направленного отрезка будем называть *откладыванием вектора \vec{a} от точки A* .

Определение

Два вектора называются *коллинеарными* [*сонаправленными*, *антинаправленными*], если их изображения коллинеарны [сонаправленны, антинаправленны]. Антинаправленные векторы называют также *противонаправленными*.

Для обозначения понятий, сформулированных в определении, применяются те же символы, что и для обозначения соответствующих понятий в случае направленных отрезков: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ и $\vec{a} \downarrow \vec{b}$.

Определения

Если отрезок \overrightarrow{AB} является изображением вектора \vec{a} , то вектор, изображением которого является отрезок \overrightarrow{BA} , называется *противоположным* вектору \vec{a} и обозначается $-\vec{a}$. Вектор, изображением которого является нулевой направленный отрезок, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$.

Из данных выше определений вытекает, что

- нулевой вектор коллинеарен, сонаправлен и антинаправлен с любым другим вектором.

Определение

Пусть даны векторы \vec{a} и \vec{b} . Зафиксируем точку O , отложим от нее вектор \vec{a} , обозначим конец полученного направленного отрезка через A . От точки A отложим вектор \vec{b} , обозначим конец полученного направленного отрезка через B . Тогда отрезок \overrightarrow{OB} изображает вектор, который называется *суммой* векторов \vec{a} и \vec{b} . Сумма векторов \vec{a} и \vec{b} обозначается через $\vec{a} + \vec{b}$.

Замечание об определении суммы векторов

Определение суммы векторов корректно, т. е. не зависит от выбора начальной точки O .

Более точно, если мы в качестве O возьмем другую точку P и проделаем то, что записано в определении суммы, то получим направленный отрезок \overrightarrow{PR} , который сонаправлен отрезку \overrightarrow{OB} и имеет с ним одинаковую длину (см. рис. 1 на следующем слайде). Следовательно, \overrightarrow{OB} и \overrightarrow{PR} — изображения одного и того же вектора.



Рис. 1. Корректность определения суммы векторов

Сумму векторов можно определить и по-другому. Отложим векторы \vec{a} и \vec{b} от одной и той же точки O . Концы полученных направленных отрезков обозначим через A и B соответственно, а четвертую вершину параллелограмма со сторонами OA и OB — через M . Тогда вектор, соответствующий направленному отрезку \vec{OM} , будет равен $\vec{a} + \vec{b}$ (см. рис. 2, на котором слева вектор $\vec{a} + \vec{b}$ построен по определению, а справа — описанным только что способом). Заметим, однако, что этот способ построения суммы векторов применим только к неколлинеарным векторам.



Рис. 2. Два способа определения суммы векторов

Следующие свойства суммы векторов известны из школьного курса и легко проверяются исходя из определения операции, поэтому мы их не доказываем.

Свойства суммы векторов

Если \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} — произвольные векторы, то:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (сложение векторов **коммутативно**);
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сложение векторов **ассоциативно**);
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
- 4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Таким образом, множество всех векторов с операцией их сложения является абелевой группой. Нейтральным элементом этой группы является вектор $\vec{0}$, а вектором, обратным к \vec{a} — вектор $-\vec{a}$. □

Как и в любой группе с аддитивной записью операции, в группе векторов по сложению можно определить **разность** векторов \vec{a} и \vec{b} правилом:
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Определение

Произведением вектора \vec{a} на число t называется вектор $t\vec{a}$ такой, что:

- 1) $|t\vec{a}| = |t| \cdot |\vec{a}|$;
- 2) если $t \geq 0$, то $t\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, а если $t < 0$, то $t\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число часто объединяют термином *линейные операции над векторами*.

Из определения операции умножения вектора на число с очевидностью вытекает, что $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$ для любого вектора \vec{a} .

Следующие свойства произведения вектора на число известны из школьного курса и легко проверяются исходя из определения операции, поэтому мы их не доказываем.

Свойства произведения вектора на число

Если \vec{a} и \vec{b} — произвольные векторы, а t и s — произвольные числа, то:

- 1) $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$ (умножение вектора на число *дистрибутивно относительно сложения векторов*);
- 2) $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$ (умножение вектора на число *дистрибутивно относительно сложения чисел*);
- 3) $t(s\vec{a}) = (ts)\vec{a}$;
- 4) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.



Определение

Пусть \vec{a} — ненулевой вектор. *Ортом* вектора \vec{a} называется вектор длины 1, сонаправленный с вектором \vec{a} .

При решении некоторых задач возникает необходимость найти орт данного вектора. В следующем замечании указано, как это можно сделать.

Замечание об орте вектора

Если \vec{a} — ненулевой вектор, то вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ является ортом вектора \vec{a} .

Доказательство. Поскольку $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$, из определения произведения вектора на число вытекает, что векторы \vec{a} и $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ сонаправлены. Вновь используя определение произведения вектора на число, имеем

$$\left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$$

Следовательно, вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ действительно является ортом вектора \vec{a} . □

Определение

Переход от ненулевого вектора к его орту называется *нормированием* вектора.

Критерий коллинеарности векторов (1)

Следующее утверждение будет часто использоваться в дальнейшем.

Критерий коллинеарности векторов

Если \vec{a} и \vec{b} — произвольные векторы, причем $\vec{b} \neq \vec{0}$, то векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} = t\vec{b}$ для некоторого числа t .

Доказательство. *Достаточность* непосредственно вытекает из определения произведения вектора на число.

Необходимость. По условию $|\vec{b}| \neq 0$. Поскольку $\vec{a} \parallel \vec{b}$, получаем, что либо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, либо $\vec{a} \downarrow\downarrow \vec{b}$. Положим

$$t = \begin{cases} \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}, & \text{если } \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, \\ -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}, & \text{если } \vec{a} \downarrow\downarrow \vec{b}. \end{cases}$$

Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $t > 0$, и потому $t\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{b}$, откуда $t\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$. Если же $\vec{a} \downarrow\downarrow \vec{b}$, то $t < 0$, и потому $t\vec{b} \downarrow\downarrow \vec{b}$, откуда вновь $t\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$. Таким образом, в любом случае векторы \vec{a} и $t\vec{b}$ сонаправлены. Кроме того,

$$|t\vec{b}| = |t| \cdot |\vec{b}| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}|.$$

Следовательно, $\vec{a} = t\vec{b}$.

Критерий коллинеарности векторов легко переформулировать так, чтобы в его посылке не было никаких ограничений на векторы \vec{a} и \vec{b} . А именно, справедливо следующее утверждение.

Критерий коллинеарности векторов (альтернативная формулировка)

Векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число t такое, что либо $\vec{a} = t\vec{b}$, либо $\vec{b} = t\vec{a}$.

Доказательство. Если хотя бы один из векторов \vec{a} и \vec{b} отличен от $\vec{0}$, то достаточно сослаться на критерий коллинеарности векторов в его стандартной формулировке. Если же $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$, то для любого t выполнены оба равенства $\vec{a} = t\vec{b}$ и $\vec{b} = t\vec{a}$. □

Альтернативная формулировка критерия коллинеарности векторов оказывается неудобной для применения. Поэтому в дальнейшем мы, не оговаривая этого в явном виде, практически всегда будем ссылаться на ту формулировку этого критерия, которая дана на предыдущем слайде.

Определение

Базисом плоскости называется произвольная упорядоченная пара неколлинеарных векторов, лежащих в этой плоскости. Базис, состоящий из векторов \vec{a} и \vec{b} , будем обозначать через (\vec{a}, \vec{b}) .

Поскольку нулевой вектор по определению коллинеарен любому другому, получаем простое, но принципиально важное

Замечание о нулевом векторе и базисе плоскости

Нулевой вектор не может входить в базис плоскости.



Ключевым результатом, связанным с понятием базиса на плоскости, является следующая

Теорема о разложении вектора по базису на плоскости

Пусть (\vec{a}, \vec{b}) — базис некоторой плоскости, а \vec{x} — вектор, лежащий в этой плоскости. Тогда существуют, и притом единственные, числа t_1 и t_2 такие, что

$$\vec{x} = t_1 \vec{a} + t_2 \vec{b}. \quad (1)$$

Доказательство этой теоремы будет приведено на следующем слайде.

Определение

Равенство (1) называется **разложением вектора \vec{x} по базису (\vec{a}, \vec{b})** .

Коэффициенты t_1, t_2 разложения (1) называются **координатами** вектора \vec{x} в базисе (\vec{a}, \vec{b}) . Тот факт, что вектор \vec{x} имеет в базисе (\vec{a}, \vec{b}) координаты t_1, t_2 , записывается в виде $\vec{x} = (t_1, t_2)$.

Доказательство. Отложим векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{x} от некоторой точки O нашей плоскости и обозначим концы полученных направленных отрезков через A , B и M соответственно (см. рис. 3 на следующем слайде). Спроектируем точку M на прямую OA параллельно прямой OB и на прямую OB параллельно прямой OA . Обозначим полученные точки через A' и B' соответственно и положим $\vec{a}' = \overrightarrow{OA'}$ и $\vec{b}' = \overrightarrow{OB'}$. Ясно, что $\vec{a}' \parallel \vec{a}$ и $\vec{b}' \parallel \vec{b}$. Поскольку $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ (см. замечание о нулевом векторе и базисе плоскости), из критерия коллинеарности векторов вытекает, что $\vec{a}' = t_1 \vec{a}$ и $\vec{b}' = t_2 \vec{b}$ для некоторых чисел t_1 и t_2 . Тогда $\vec{x} = \vec{a}' + \vec{b}' = t_1 \vec{a} + t_2 \vec{b}$.

Существование чисел t_1 и t_2 с требуемыми свойствами доказано. Осталось доказать их единственность. Предположим, что $\vec{x} = s_1 \vec{a} + s_2 \vec{b}$ для некоторых чисел s_1 и s_2 . Вычитая это равенство из уже доказанного равенства (1), имеем $(t_1 - s_1) \vec{a} + (t_2 - s_2) \vec{b} = \vec{0}$. Если $t_1 - s_1 \neq 0$, то $\vec{a} = -\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \cdot \vec{b}$. Но тогда векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны по критерию коллинеарности векторов, что противоречит условию. Следовательно, $t_1 - s_1 = 0$, т. е. $t_1 = s_1$. Аналогично проверяется, что $t_2 = s_2$. □

Доказательство теоремы о разложении вектора по базису на плоскости (рисунок)

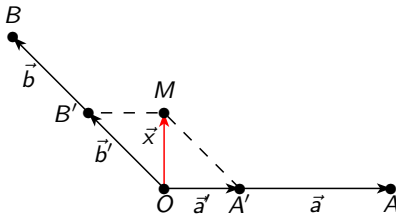


Рис. 3. Разложение вектора по базису на плоскости

Определение

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются *компланарными*, если существуют изображения этих векторов, лежащие в одной плоскости.

- Отношение компланарности является тернарным отношением на множестве всех векторов. Это один из немногих примеров тернарных отношений в нашем курсе.

Определение

Базисом пространства называется произвольная упорядоченная тройка некопланарных векторов. Базис, состоящий из векторов \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} , будем обозначать через $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Ясно, что если один из векторов \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} — нулевой, то эти векторы компланарны. Следовательно, справедливо следующее замечание, аналогичное замечанию о нулевом векторе и базисе плоскости.

Замечание о нулевом векторе и базисе пространства

Нулевой вектор не может входить в базис пространства.



Ключевым результатом, связанным с понятием базиса в пространстве, является следующая теорема, аналогичная теореме о разложении вектора по базису на плоскости.

Теорема о разложении вектора по базису в пространстве

Пусть $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — базис пространства, а \vec{x} — произвольный вектор. Тогда существуют, и притом единственные, числа t_1 , t_2 и t_3 такие, что

$$\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}. \quad (2)$$

Доказательство этой теоремы будет приведено на следующих двух слайдах.

Определение

Равенство (2) называется **разложением вектора \vec{x} по базису $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$** . Коэффициенты t_1, t_2, t_3 разложения (2) называются **координатами** вектора \vec{x} в базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Тот факт, что вектор \vec{x} имеет в базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ координаты t_1, t_2, t_3 , записывается в виде $\vec{x} = (t_1, t_2, t_3)$.

Доказательство теоремы о разложении вектора по базису в пространстве (1)

Доказательство. Отложим векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{x} от некоторой точки O и обозначим концы полученных направленных отрезков через A , B , C и M соответственно (см. рис. 4 на следующем слайде). Поскольку векторы \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны (в противном случае векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} были бы компланарными и не образовывали бы базиса пространства), существует единственная плоскость π , проходящая через точки O , A и B . Спроектируем точку M на плоскость π параллельно прямой OC и на прямую OC параллельно плоскости π . Обозначим полученные точки через M' и C' соответственно и положим $\vec{x}' = \overrightarrow{OM'}$ и $\vec{c}' = \overrightarrow{OC'}$. По теореме о разложении вектора по базису на плоскости $\vec{x}' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$ для некоторых чисел t_1 и t_2 . Далее, ясно, что $\vec{c}' \parallel \vec{c}$. Поскольку $\vec{c} \neq \vec{0}$ (см. замечание о нулевом векторе и базисе пространства), из критерия коллинеарности векторов вытекает, что $\vec{c}' = t_3\vec{c}$ для некоторого числа t_3 . Тогда $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{c}' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}$.

Доказательство теоремы о разложении вектора по базису в пространстве (2)

Существование чисел t_1 , t_2 и t_3 с требуемыми свойствами доказано.

Осталось доказать их единственность. Предположим, что

$\vec{x} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b} + s_3\vec{c}$ для некоторых чисел s_1 , s_2 и s_3 . Вычитая это равенство из уже доказанного равенства (2), имеем

$(t_1 - s_1)\vec{a} + (t_2 - s_2)\vec{b} + (t_3 - s_3)\vec{c} = \vec{0}$. Если $t_1 - s_1 \neq 0$, то

$\vec{a} = -\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \cdot \vec{b} - \frac{t_3 - s_3}{t_1 - s_1} \cdot \vec{c}$. Но тогда векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны, что противоречит условию. Следовательно, $t_1 - s_1 = 0$, т. е. $t_1 = s_1$.

Аналогично проверяется, что $t_2 = s_2$ и $t_3 = s_3$. □

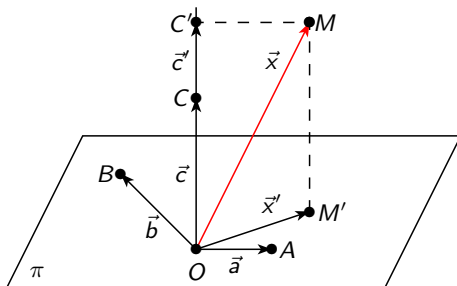


Рис. 4. Разложение вектора по базису в пространстве

Замечание о координатах векторов $\vec{x} + \vec{y}$ и $t\vec{x}$

Если векторы \vec{x} и \vec{y} имеют в одном и том же базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ координаты (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) соответственно, а t — произвольное число, то вектор $\vec{x} + \vec{y}$ имеет в том же базисе координаты $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, а вектор $t\vec{x}$ — координаты (tx_1, tx_2, tx_3) . Аналогичный факт справедлив для векторов на плоскости.

Доказательство. По определению координат вектора в пространстве имеют место равенства $\vec{x} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}$ и $\vec{y} = y_1\vec{a} + y_2\vec{b} + y_3\vec{c}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{y} &= (x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}) + (y_1\vec{a} + y_2\vec{b} + y_3\vec{c}) = \\ &= (x_1 + y_1)\vec{a} + (x_2 + y_2)\vec{b} + (x_3 + y_3)\vec{c}, \\ t\vec{x} &= t(x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}) = (tx_1)\vec{a} + (tx_2)\vec{b} + (tx_3)\vec{c}.\end{aligned}$$

Остается сослаться на определение координат вектора в пространстве. В случае плоскости доказательство абсолютно аналогично. □