Криволинейные интегралы

2 Криволинейный интеграл от вектор-функции (интеграл 2 рода)

Вычисление криволинейного интеграла от вектор-функции

Теорема. Пусть

$$\breve{AB}: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \qquad t \in [\alpha, \beta], \\ z = \chi(t), \end{cases}$$

— гладкая кривая, где $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha))$ и $B(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta))$. Пусть функции P, Q, R непрерывны на $\breve{AB}$. Тогда

$$\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_\alpha^\beta \Big(P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \chi'(t) \Big)\, dt.$$

Замечание. Формула вычисления криволинейного интеграла 2 рода остаётся верной и для кусочно-гладких кривых.

Замечание. В частности, если

$$\breve{AB}: \begin{cases} x = x, \\ y = y(x), \end{cases} \qquad x \in [a, b],$$

— плоская кривая, то

$$\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_a^b \Big(P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x) \Big)\, dx.$$

Свойства криволинейного интеграла 2 рода

1) смена знака интеграла при изменении направления на кривой:

$$\int\limits_{\breve{AB}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = -\int\limits_{\breve{BA}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$$

2) линейность

3) аддитивность

4) оценка модуля: $\Big|\int\limits_{\breve{AB}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r})\Big| \leqslant \int\limits_{\breve{AB}} |\mathbf{F}(N)|\, dl$

Связь между криволинейными интегралами 1 и 2 рода

Пусть $\breve{AB}$ — кусочно-гладкая кривая. Тогда

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \int\limits_{\breve{AB}} \Big(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\Big)dl$$

где $\vec{\tau} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$ — касательный вектор к кривой $\breve{AB}$.

$$\int\limits_{\breve{AB}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\breve{AB}} (\mathbf{F}, \vec{\tau})dl$$

Формула Грина

Замкнутую плоскую область D, допускающую описание как в виде $D = \{y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}$, так и в виде $D = \{x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}$, будем называть *элементарной*.

Теорема. Пусть D — замкнутая плоская область с границей ∂D — кусочно-гладкой кривой. Пусть существует разбиение области D на конечное число элементарных областей D_i с кусочно-гладкими границами ∂D_i. Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в D. Тогда

$$\iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dS = \oint\limits_{\partial D^+} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

Замечание. Формулу Грина можно распространить на любую область, ограниченную кусочно-гладкой кривой.

Следствие. Пусть D — замкнутая плоская область, ограниченная кусочно-гладкой кривой ∂D. Тогда

$$S(D) = \oint_{\partial D} x\, dy = -\oint_{\partial D} y\, dx = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} x\, dy - y\, dx.$$

Геометрический смысл знака якобиана

Пусть D — замкнутая квадрируемая область в декартовой СК Oxy и $L = \partial D$.
Пусть Δ — замкнутая квадрируемая область в декартовой СК $O\xi\eta$ и $\Gamma = \partial\Delta$.
Пусть системы функций

$$(*)\quad \begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta), \end{cases} \quad (\xi, \eta) \in \Delta, \qquad\qquad (**)\quad \begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in D,$$

удовлетворяющие условиям:

(1) функции (*) и (**) осуществляют взаимно-однозначное соответствие между Δ и D;

(2) функции (*) и (**) непрерывны вместе со своими частными производными в Δ и D соответственно;

(3) якобиан системы (*) не равен нулю в Δ:

$$J(\xi, \eta) = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (\xi, \eta) \in \Delta;$$

(4) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta}$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\xi}$ непрерывны в Δ.

Тогда при $J(\xi, \eta) > 0$ ориентация замкнутых кривых при отображениях (*) и (**) сохраняется, т.е. $\gamma^+ \leftrightarrow l^+$, а при $J(\xi, \eta) < 0$ замкнутые кривые меняют ориентацию при отображениях (*) и (**), т.е. $\gamma^+ \leftrightarrow l^-$.

Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть D — плоская область.

Теорема 1. *Для того чтобы криволинейный интеграл*

$$\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

в области D не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в этой области, был равен нулю.

Теорема 2. *Пусть функции P и Q непрерывны в области D. Для того чтобы криволинейный интеграл*

$$\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

по кусочно-гладкой кривой $\breve{AB}$, лежащей в области D, не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы в D существовала такая функция $U(x, y)$, что

$$dU(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

При этом криволинейный интеграл может быть вычислен по формуле:

$$\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy = U(B) - U(A).$$

Определение. Область D называется *односвязной*, если для любой замкнутой кривой, лежащей в D, ограниченная ею конечная часть плоскости принадлежит D.

Теорема 3. *Пусть функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в односвязной области D. Для того чтобы криволинейный интеграл*

$$\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

по кусочно-гладкой кривой $\breve{AB}$ не зависел от пути интегрирования в D, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad (x, y) \in D.$$