Лекция 3: Однородные и неоднородные системы линейных уравнений

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение

Линейным уравнением (или *уравнением первого порядка*) с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b. \tag{1}$$

Величины $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *коэффициентами* при неизвестных, а b — *свободным членом* уравнения (1). Коэффициенты при неизвестных и свободный член предполагаются известными.

Произвольная система линейных уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{2}$$

Определение

Частным решением (или просто *решением*) системы (2) называется упорядоченный набор чисел $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ такой, что при подстановке в любое уравнение системы (2) x_1^0 вместо x_1, x_2^0 вместо x_2, ..., x_n^0 вместо x_n получается верное равенство. Система линейных уравнений (2) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно частное решение, и *несовместной* в противном случае.

Например, упорядоченный набор чисел $(1, 2, -1, 3)$ будет решением системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$$

Следовательно, эта система совместна. С другой стороны, система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$$

несовместна, так как никакой набор чисел не может одновременно удовлетворять и первому, и третьему ее уравнениям.

Однородные системы

Определение

Если все свободные члены системы линейных уравнений равны 0, то система называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*. Если в системе (2) все свободные члены заменить нулями, то мы получим однородную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (3)$$

которую будем называть *однородной системой, соответствующей системе* (2).

Отметим, что любая однородная система имеет решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\dots$, $x_n = 0$, которое называется *нулевым решением*. В частности, справедливо

Замечание 1

Любая однородная система линейных уравнений совместна. □

Любое частное решение однородной системы — это упорядоченный набор чисел. Следующее определение позволяет говорить о сумме двух решений и о произведении решения на число.

Определение

Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — два упорядоченных набора чисел, а t — некоторое число. Тогда упорядоченный набор чисел $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ называется *суммой наборов* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а упорядоченный набор $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$ — *произведением набора* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *на число* t.

Следующее утверждение будет часто использоваться в дальнейшем.

Теорема 1

Сумма любых двух частных решений однородной системы линейных уравнений является решением этой системы. Произведение любого частного решения однородной системы линейных уравнений на любое число является решением этой системы.

Доказательство теоремы приведено на следующем слайде.

Доказательство. Пусть $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ — решения системы (3). Подставив числа $y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n$ в i-тое уравнение этой системы (где $1 \leqslant i \leqslant m$), получим

$$\begin{aligned}&a_{i1}(y_1 + z_1) + a_{i2}(y_2 + z_2) + \dots + a_{in}(y_n + z_n) = \\ = &(a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n) + (a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \dots + a_{in}z_n) = \\ = &0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Подставив в то же уравнение числа $ty_1, ty_2, \dots, ty_n$, получим

$$a_{i1}(ty_1) + a_{i2}(ty_2) + \dots + a_{in}(ty_n) = t(a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n) = t \cdot 0 = 0.$$

Мы видим, что наборы чисел $(y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n)$ и $(ty_1, ty_2, \dots, ty_n)$ являются решениями системы (3). $\square$

Теорема 1 позволяет ответить на вопрос, сколько решений может быть у однородной системы линейных уравнений.

Следствие 1

Произвольная однородная система линейных уравнений либо имеет ровно одно решение, либо имеет бесконечно много решений.

Доказательство. С учетом замечания 1 достаточно доказать, что если однородная система имеет по крайней мере два различных решения, то она имеет бесконечно много решений. Предположим поэтому, что система (3) имеет по крайней мере два различных решения. Как минимум одно из этих решений является ненулевым, т. е. имеет вид $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, где $x_i^0 \neq 0$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$. В силу теоремы 1 для произвольного действительного числа t набор чисел $(tx_1^0, tx_2^0, \ldots, tx_n^0)$ также является решением системы (3). Очевидно, что если $t_1 \neq t_2$, то решения $(t_1x_1^0, t_1x_2^0, \ldots, t_1x_n^0)$ и $(t_2x_1^0, t_2x_2^0, \ldots, t_2x_n^0)$ системы (3) различны (так как $t_1x_i^0 \neq t_2x_i^0$). Поскольку действительных чисел бесконечно много, получаем, что система (3) имеет бесконечно много решений. $\square$

Докажем теперь полезное утверждение о связи решений систем (2) и (3).

Теорема 2

Пусть система линейных уравнений (2) совместна. Выберем произвольным образом и зафиксируем некоторое ее частное решение $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$*.*

1) *Если* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *— частное решение системы (3), то сумма наборов чисел* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *и* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *является частным решением системы (2).*
2) *Обратно, каждое частное решение системы (2) является суммой решения* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *этой системы и некоторого частного решения системы (3).*

Доказательство. 1) Подставим числа $x_1^0 + y_1, x_2^0 + y_2, \ldots, x_n^0 + y_n$ в произвольное i-тое уравнение системы (2) (где $1 \leqslant i \leqslant m$). Получим

$$\begin{aligned} a_{i1}(x_1^0 + y_1) + a_{i2}(x_2^0 + y_2) + \cdots + a_{in}(x_n^0 + y_n) = \\ = (a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \cdots + a_{in}x_n^0) + (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n) = \\ = b_i + 0 = b_i. \end{aligned}$$

Мы видим, что набор чисел $(x_1^0 + y_1, x_2^0 + y_2, \ldots, x_n^0 + y_n)$ является решением системы (2).

2) Пусть $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — частное решение системы (2). Положим $y_1 = z_1 - x_1^0, y_2 = z_2 - x_2^0, \ldots, y_n = z_n - x_n^0$. Подставим числа $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в i-тое уравнение системы (3) (где $1 \leqslant i \leqslant m$). Получим

$$\begin{aligned} &a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n = \\ &= a_{i1}(z_1 - x_1^0) + a_{i2}(z_2 - x_2^0) + \cdots + a_{in}(z_n - x_n^0) = \\ &= (a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \cdots + a_{in}z_n) - (a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \cdots + a_{in}x_n^0) = \\ &= b_i - b_i = 0. \end{aligned}$$

Это означает, что $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — частное решение системы (3). С другой стороны, $z_1 = y_1 + x_1^0$, $z_2 = y_2 + x_2^0$, $\ldots$, $z_n = y_n + x_n^0$. Таким образом, мы представили произвольное решение системы (2) в виде суммы фиксированного решения $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ этой системы и некоторого решения $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ системы (3). $\square$

Теперь мы можем ответить на вопрос, сколько решений может быть у произвольной системы линейных уравнений.

Следствие 2

Произвольная система линейных уравнений либо не имеет решений, либо имеет ровно одно решение, либо имеет бесконечно много решений.

Доказательство. Достаточно доказать, что если система имеет по крайней мере два различных решения, то она имеет бесконечно много решений. Предположим поэтому, что система (2) имеет по крайней мере два различных решения. Из теоремы 2 вытекает, что соответствующая ей однородная система (3) также имеет по крайней мере два различных решения. В силу следствия 1 эта система имеет бесконечно много решений. Но тогда из теоремы 2 вытекает, что и система (2) имеет бесконечно много решений. □

Определение

Множество всех решений системы линейных уравнений называется *общим решением* этой системы.

Заметим, что

- общее решение есть у любой системы. В частности, у несовместной системы общим решением является пустое множество.

Теорема 2 говорит о том, что набор чисел принадлежит общему решению системы тогда и только тогда, когда он представим в виде суммы некоторого ее фиксированного частного решения и набора чисел, принадлежащего общему решению соответствующей однородной системы. В связи с этим теорему 2 часто кратко формулируют следующим образом:

- *общее решение* (*совместной*) *системы линейных уравнений равно сумме ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.*