Двойной интеграл

3 Необходимые и достаточные условия существования двойного интеграла

3.1 Интегрируемость и ограниченность

Замечание. Ограниченность функции на измеримом плоском множестве не является необходимым условием её интегрируемости (в отличие от однократного интеграла).

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на множестве D и неограничена на нём, то найдётся $E \subset D$ такое, что $S(E) = 0$ и f ограничена на $D \setminus E$.*

Следствие. Если функция интегрируема на множестве D, обладающем разбиениями на сколь угодно мелкие части положительной меры, то она ограничена на D.

Теорема 2. *Если функция интегрируема на открытом множестве, то она ограничена на нём.*

Упражнение. Пусть функция f определена на $\overline{D}$, где D — открытое множество, ограничена на D и неограничена на ∂D. Что можно сказать об интегрируемости f на $\overline{D}$?

3.2 Интегрируемость ограниченных функций

Пусть $f(x, y)$ определена и ограничена на квадрируемом множестве D.

Пусть $\tau = \{D_i\}_{i=1}^n$ — разбиение D.

Для каждого D_i определим

$$m_i = \inf_{(x,y)\in D_i} f(x, y), \qquad M_i = \sup_{(x,y)\in D_i} f(x, y)$$

и составим суммы

$$s(\tau) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot S(D_i), \qquad S(\tau) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot S(D_i),$$

называемые *нижней и верхней суммами Дарбу* соответственно.

Свойства сумм Дарбу

Как и для однократного интеграла, имеют место следующие свойства сумм Дарбу.

1. $s(\tau) = \inf\limits_{N_i\in D_i} \sigma(\tau, \{N_i\}), \quad S(\tau) = \sup\limits_{N_i\in D_i} \sigma(\tau, \{N_i\})$
2. Для любого разбиения $\widetilde{\tau}$ — измельчения разбиения τ
$$s(\tau) \leqslant s(\widetilde{\tau}), \qquad S(\widetilde{\tau}) \leqslant S(\tau)$$
3. Для любых разбиений τ' и τ''
$$s(\tau') \leqslant S(\tau'')$$
4. Существуют $\quad I_* = \sup\limits_\tau s(\tau)$ и $I^* = \inf\limits_\tau S(\tau), \quad$ называемые *нижним и верхним интегралами Дарбу* соответственно, и $I_* \leqslant I^*$
5. $I_* = \lim\limits_{d\to 0} s(\tau), \qquad I^* = \lim\limits_{d\to 0} S(\tau).$

Критерий интегрируемости

Теорема 3. *Для того, чтобы ограниченная на квадрируемом множестве D функция f была интегрируема на D необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:*

(a) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \ \ \forall\, \tau \ \ (d < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon)$

(b) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \tau \ :\ S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$

(c) $I_* = I^*$

Замечание. Условия интегрируемости можно переписать в терминах колебательных сумм:

(a') $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \ \ \forall\, \tau \ \ \left(d < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ \sum\limits_{i=1}^n \omega_i \cdot S(D_i) < \varepsilon\right)$

(b') $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \tau \ :\ \sum\limits_{i=1}^n \omega_i \cdot S(D_i) < \varepsilon$

здесь $\omega_i = \sup\limits_{N,M\in D_i} (f(N) - f(M))$ — колебание функции f на участке разбиения D_i.

4 Классы интегрируемых функций

Теорема 4. *Непрерывная на замкнутом квадрируемом множестве функция интегрируема на этом множестве.*

Теорема 5. *Пусть f ограничена на замкнутом квадрируемом множестве D и непрерывна на D за исключением быть может множества площади ноль. Тогда f интегрируема на D.*

Замечание 1. Если изменить значения ограниченной интегрируемой функции на множестве меры ноль так, чтобы функция осталась ограниченной, то это не повлияет ни на факт интегрируемости, ни на значение интеграла.

Замечание 2. Интегрируемость и значение интеграла от ограниченной функции не зависят от её значений на границе множества.

5 Основные свойства двойного интеграла

Свойство 1. $$\iint_D dxdy = S(D)$$

Свойство 2. Линейность

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)\, dxdy + \beta \iint_D g(x,y)\, dxdy$$

Свойство 3. Аддитивность интеграла как функции области

$$\iint_{D\cup G} f(x,y)\, dxdy = \iint_D f(x,y)\, dxdy + \iint_G f(x,y)\, dxdy, \qquad D, G: \ \mathring{D} \cap \mathring{G} = \emptyset$$

Свойство 4. Сохранение неравенства

$$f(x,y) \leqslant g(x,y),\ (x,y) \in D \quad \Rightarrow \quad \iint_D f(x,y)\, dxdy \leqslant \iint_D g(x,y)\, dxdy$$

Свойство 5. Оценка модуля интеграла

Если f ограничена и интегрируема на D, то $|f|$ — интегрируема на D и

$$\left| \iint_D f(x,y)\, dxdy \right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\, dxdy$$

Свойство 6. Монотонность интеграла как функции множества

Если D, E — квадрируемые множества, $E \subset D$ и f неотрицательна, ограничена и интегрируема на D, то

$$\iint_E f(x,y)\, dxdy \leqslant \iint_D f(x,y)\, dxdy$$

Свойство 7.

Пусть f неотрицательна и интегрируема на открытом множестве D. Если существует точке $(x_0, y_0) \in D$, в которой f непрерывна и положительна, то

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy > 0$$

Свойство 8. Теорема о среднем

Если f и g интегрируемы на D, $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$ при $(x,y) \in D$, а g не меняет знака на D, то найдётся $\mu \in [m, M]$ такое, что

$$\iint_D f(x,y) g(x,y)\, dxdy = \mu \iint_D g(x,y)\, dxdy$$

Если при этом D — связное множество, а f непрерывна на D, то найдётся точка $(\xi, \eta) \in D$ такая, что

$$\iint_D f(x,y) g(x,y)\, dxdy = f(\xi, \eta) \iint_D g(x,y)\, dxdy$$