7. Формула замены переменной в двойном интеграле

7a. ***Отображение плоских областей***

Пусть D — замкнутая квадрируемая область в декартовой СК Oxy и $L = \partial D$.
Пусть Δ — замкнутая квадрируемая область в декартовой СК $O\xi\eta$ и $\Gamma = \partial\Delta$.

Рассмотрим системы функций

$$(*) \quad \begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta), \end{cases} \quad (\xi, \eta) \in \Delta, \qquad (**) \quad \begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in D,$$

удовлетворяющие условиям:

(1) функции (*) и (**) осуществляют взаимно-однозначное соответствие между Δ и D;

(2) функции (*) и (**) непрерывны вместе со своими частными производными в Δ и D соответственно;

(3) якобиан системы (*) не равен нулю в Δ:

$$J(\xi, \eta) = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (\xi, \eta) \in \Delta.$$

Заметим, что

a) $J(\xi, \eta)$ непрерывна и не меняет знак в Δ. Следовательно, якобиан системы (**) принимает тот же знак в D;

b) внутренним точкам области D соответствуют внутренние точки области Δ и наоборот, а граница области D взаимно-однозначно отображается на границу области Δ:

$$L \leftrightarrow \Gamma;$$

c)

$$\lambda : \left\{ \begin{array}{l} \xi = \xi(t), \\ \eta = \eta(t), \end{array} \right. \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \leftrightarrow \quad l : \left\{ \begin{array}{l} x = x(\xi(t), \eta(t)), \\ y = y(\xi(t), \eta(t)), \end{array} \right. \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Если при этом λ — гладкая (непрерывно дифференцируемая и без ос.т.), то и l в силу условия (3) является гладкой кривой.

7b. *Криволинейные координаты*

Проведём в Δ прямые, параллельные осям координат: $\xi = \xi_0$ и $\eta = \eta_0$. В области D им соответствуют гладкие кривые

$$\xi = \xi_0 \quad \leftrightarrow \quad l(\xi_0) : \left\{ \begin{array}{l} x = x(\xi_0, \eta), \\ y = y(\xi_0, \eta), \end{array} \right. \qquad \eta = \eta_0 \quad \leftrightarrow \quad l(\eta_0) : \left\{ \begin{array}{l} x = x(\xi, \eta_0), \\ y = y(\xi, \eta_0). \end{array} \right.$$

Через каждую точку области D проходит только одна кривая вида $l(\xi_0)$ и только одна кривая вида $l(\eta_0)$, следовательно эти линии однозначно определяют положение точки в области D и их можно рассматривать как координатные кривые в D. В силу того, что эти кривые однозначно определяются выбором ξ_0 и η_0, величины ξ и η называют *криволинейными координатами* в области D (в отличие от декартовых координат x и y).

7c. *Вычисление площади в криволинейных координатах*

Теорема. Пусть функции системы (*) удовлетворяют условиям (1)–(3). Пусть эти условия остаются верными в некоторых замкнутых областях $\widetilde{D}$ и $\tilde{\Delta}$, содержащих внутри себя D и Δ соответственно. Тогда

$$S(D) = \iint_D dxdy = \iint_\Delta |J(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta. \qquad (I)$$

Доказательство. 1 шаг. Пусть

$$\Delta = \Pi = [\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta], \qquad (*) \quad \begin{cases} x = x_0 + a\xi + b\eta, \\ y = y_0 + c\xi + d\eta, \end{cases} \qquad (\xi,\eta)\in\Pi,$$

причём

$$J(\xi,\eta) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

....

Тогда D — параллелограмм P и

....

$$S(P) = |J(\xi,\eta)|\cdot S(\Pi).$$

2 шаг. Пусть теперь

$$(*) \quad \begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta), \end{cases} \qquad (\xi,\eta) \in \Delta,$$

— произвольные (в том числе, нелинейные) функции, удовлетворяющие условиям теоремы в замкнутой квадрируемой области Δ также произвольного вида.
Выделим в Δ частичный квадрат вида $\Pi_0 = [\xi_0, \xi_0 + h] \times [\eta_0, \eta_0 + h]$.
....
В итоге получим:

$$S(\mathcal{P}_0) = S(P_0) + \gamma_0, \qquad \text{где} \;\; |\gamma_0| \leqslant 32M\varepsilon \cdot S(\Pi_0),$$

при условии, что сторона h квадрата Π_0 удовлетворяет условию $h < \delta_\varepsilon$.

3 шаг. Пусть Ω — многоугольник в Δ со сторонами, параллельными осям координат, и G — его образ в D. Разобьём Ω на частичные квадраты Π_i со сторонами h_i, параллельными осям координат. Обозначим P_i и $\mathcal{P}_i$ образы квадрата Π_i при отображении F и (*) соответственно.

....

и в итоге получим

$$S(G) = \iint_{\Omega} |J(\xi, \eta)| \; d\xi d\eta.$$

4 шаг. Завершение доказательства.
Множество Δ квадрируемо, следовательно,

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \;\; \exists \Omega_1 \subset \Delta \;\; \exists \Omega_2 \supset \Delta : \;\; S(\Omega_2) - S(\Omega_1) < \varepsilon_1,$$

где Ω_1, Ω_2 — многоугольники со сторонами, параллельными осям координат.
Обозначим образы этих многоугольников при отображении (*) G_1, G_2. Тогда $G_1 \subset D \subset G_2$.
Оценим

$$S(G_2) - S(G_1)$$

и

$$\left| S(D) - \iint_{\Delta} |J(\xi, \eta)| \; d\xi d\eta \right|$$

....
и в силу произвольности ε_1,

$$S(D) = \iint_{\Delta} |J(\xi, \eta)| \; d\xi d\eta. \qquad \square$$

7d. *Формула замены переменной в двойном интеграле*

Теорема. Пусть функции системы (*) удовлетворяют условиям (1)–(3). Пусть эти условия остаются верными в некоторых замкнутых областях, содержащих внутри себя D и Δ. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на D за исключением, быть может, множества меры ноль, и ограничена на D.

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_\Delta f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \cdot |J(\xi, \eta)|\, d\xi d\eta. \qquad (II)$$

Замечание. Формула (II) остаётся верной, если условия (1)–(3) выполнены в (открытых) областях D и Δ и нарушаются, быть может, на границах ∂D и $\partial\Delta$, при условии, что якобиан имеет непрерывное продолжение на $\partial\Delta$, а функция $f(x, y)$ ограничена на $\overline{D}$.