Лекция 1: Комплексные числа

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

В школьном курсе математики понятие числа постепенно расширяется. Сначала речь идет только о натуральных числах, затем последовательно появляются целые, рациональные и, наконец, действительные числа. В этой лекции понятие числа будет еще раз расширено: будут введены так называемые комплексные числа, включающие в себя действительные числа как весьма частный случай. В лекции рассматриваются операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме. Более глубокое изучение комплексных чисел выходит за рамки нашего курса.

Одной из причин расширения понятия числа является потребность в решении уравнений. В множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ неразрешимо даже такое простейшее уравнение, как $x + 1 = 0$, в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ — уравнение $2x = 1$, в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ — уравнение $x^2 = 2$. В множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ все эти уравнения имеют решение, но остается неразрешимым такое простое уравнение, как, например, $x^2 + 1 = 0$. Как мы увидим в этой лекции, в множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$ это уравнение разрешимо. Более того, как мы узнаем в следующей лекции, в множестве $\mathbb{C}$ разрешимо любое алгебраическое уравнение с одним неизвестным.

Определение

Комплексным числом называется упорядоченная пара (a, b) действительных чисел a и b. Числа (a, b) и (c, d) называются *равными*, если $a = c$ и $b = d$. Действительное число a называется *действительной частью* числа (a, b), а действительное число b — *мнимой частью* числа (a, b). *Суммой* комплексных чисел (a, b) и (c, d) называется число $(a + c, b + d)$, а их *произведением* — число $(ac - bd, ad + bc)$. Множество всех комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$.

- Тот факт, что некие «новые» числа вводятся как пары «старых», не должен удивлять. Ведь и рациональное число $\frac{m}{n}$ при желании можно определить как упорядоченную пару целых чисел (m, n). На языке пар можно определить и операции над рациональными числами. Правда, действовать с рациональными числами в таком виде неудобно, поэтому лучше перейти к традиционной их записи в виде дроби. С комплексными числами ситуация аналогична: уже совсем скоро мы перейдем от записи комплексных чисел в виде пар к более удобному виду записи (так называемой алгебраической форме комплексных чисел).

Из определения операций сложения и умножения комплексных чисел с очевидностью вытекает, что

$$(a,0)+(c,0)=(a+c,0) \quad \text{и} \quad (a,0)\cdot(c,0)=(ac,0). \tag{1}$$

- Мы будем отождествлять комплексное число $(a,0)$ с действительным числом a.

Из равенств (1) видно, что сумма и произведение чисел a и c не зависят от того, рассматривать ли эти числа как действительные или как комплексные. Это позволяет считать множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ подмножеством множества всех комплексных чисел. А именно:

$$\mathbb{R}=\{(a,0) \mid a\in\mathbb{R}\}.$$

- Аналогичным образом целые числа вкладываются в рациональные: целое число n отождествляется с рациональным числом $(n,1)$, которое обычно записывают в виде $\frac{n}{1}$ (см. замечание на предыдущем слайде).

Из определения произведения комплексных чисел вытекает, что для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$a \cdot (c, d) = (a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad) \text{ и } (a, b) \cdot c = (a, b) \cdot (c, 0) = (ac, bc).$$

Иными словами,

- *при умножении действительного числа на комплексное (с любой стороны) действительная и мнимая части комплексного сомножителя умножаются на действительный сомножитель.*

Определение

Комплексное число $(0, 1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается через i.

По определению умножения комплексных чисел

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Как мы уже договорились, мы не различаем комплексное число $(-1, 0)$ и действительное число -1. Таким образом, $i^2 = -1$. Заметим, что

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Определение

Выражение $a + bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа (a, b).

Заметим, что

$$(a+bi)+(c+di)=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)(c+di)=(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Иными словами,

- *сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме осуществляется как сложение и умножение обычных многочленов с «неизвестным» i; при умножении дополнительно учитывается, что $i^2=-1$.*

Свойства сложения и умножения

1) $\forall x, y \in \mathbb{C}$: $x + y = y + x$ (сложение комплексных чисел *коммутативно*);
2) $\forall x, y, z \in \mathbb{C}$: $(x + y) + z = x + (y + z)$ (сложение комплексных чисел *ассоциативно*);
3) *существует, и притом только одно, комплексное число* 0 *такое, что для любого комплексного числа* u *выполнено равенство* $u + 0 = u$;
4) *для любого комплексного числа* v *существует, и притом только одно, комплексное число* w *такое, что* $v + w = 0$;
5) $\forall x, y \in \mathbb{C}$: $xy = yx$ (умножение комплексных чисел *коммутативно*);
6) $\forall x, y, z \in \mathbb{C}$: $(xy)z = x(yz)$ (умножение комплексных чисел *ассоциативно*);
7) $\forall x, y, z \in \mathbb{C}$: $x(y + z) = xy + xz$ (умножение комплексных чисел *дистрибутивно относительно сложения*);
8) *существует, и притом только одно, комплексное число* e *такое, что для любого комплексного числа* u *выполнено равенство* $ue = u$;
9) *для любого комплексного числа* v*, отличного от* 0*, существует, и притом только одно, комплексное число* w *такое, что* $vw = e$.

Свойства 1), 2) и 5)–7) проверяются с помощью прямых вычислений, основанных на определениях суммы и произведения комплексных чисел.

Докажем свойство 3). Ясно, что в качестве комплексного нуля можно взять число $0 + 0 \cdot i$. Проверим единственность нуля. В самом деле, предположим, что наряду с элементом $0 = 0 + 0 \cdot i$ существует элемент 0_1 такой, что для произвольного комплексного числа u выполнено равенство $u + 0_1 = u$. Взяв в последнем равенстве в качестве u число 0, получаем, что $0 + 0_1 = 0$. С другой стороны, из коммутативности сложения и равенства $u + 0 = u$ следует, что $0 + 0_1 = 0_1 + 0 = 0_1$. Следовательно, $0_1 = 0$. $\square$

Докажем свойство 4). Пусть $v = a + bi$. Положим $w = -a + (-b)i$. Легко проверяется, что $v + w = 0$. Итак, число w с требуемым свойством существует. Докажем его единственность. Предположим, что существует еще одно число w_1 такое, что $v + w_1 = 0$. Тогда

$$(w + v) + w_1 = w + (v + w_1) = w + 0 = w,$$
$$(w + v) + w_1 = (v + w) + w_1 = 0 + w_1 = w_1 + 0 = w_1.$$

Следовательно, $w = w_1$. □

Определение

Число w, существование и единственность которого устанавливается в свойстве 4), называется *противоположным к* v и обозначается через $-v$. Используя противоположное число, можно определить *разность* комплексных чисел x и y, полагая $x - y = x + (-y)$.

Докажем свойство 8). Легко проверяется, что в качестве «комплексной единицы» e можно взять число $1 + 0 \cdot i$. Проверим единственность числа e. Предположим, что наряду с числом $e = 1 + 0 \cdot i$ существует число e_1 такое, что для произвольного комплексного числа u выполнено равенство $ue_1 = u$. Взяв в последнем равенстве в качестве u число e, получаем, что $ee_1 = e$. С другой стороны, из коммутативности умножения и равенства $ue = u$ следует, что $ee_1 = e_1 e = e_1$. Следовательно, $e_1 = e$. □

Докажем, наконец, свойство 9). Пусть $v = a + bi$ и $v \neq 0$. Отметим, что $a^2 + b^2 \neq 0$, поскольку в противном случае $a = b = 0$ и $v = 0$. Положим $w = c + di$, где

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2} \text{ и } d = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Непосредственная проверка показываает, что $vw = e$. Осталось проверить единственность числа w. Предположим, что существует еще одно число w_1 такое, что для любого числа x выполнено равенство $vw_1 = e$. Тогда $w = we = w(vw_1) = (wv)w_1 = (vw)w_1 = ew_1 = w_1 e = w_1$. □

Определение

Число w, существование и единственность которого устанавливается в свойстве 9), называется *обратным к* v и обозначается через v^{-1}.

Определение

Если $x = a + bi$ — комплексное число, то число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным к* x и обозначается через $\overline{x}$.

Свойства операции комплексного сопряжения

Если x и y — произвольные комплексные числа, то:

1) $x = \overline{x}$ *тогда и только тогда, когда x — действительное число*;
2) $x + \overline{x}$ — *действительное число*;
3) $x \cdot \overline{x}$ — *действительное число*; *более того*, $x \cdot \overline{x} \geqslant 0$, *причем* $x \cdot \overline{x} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$;
4) $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$;
5) $\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

Доказательство этих свойств см. на следующем слайде.

Доказательство. Пусть $x = a + bi$ и $y = c + di$.

1) Если $x = \overline{x}$, т. е. $a + bi = a - bi$, то $2bi = 0$, откуда $b = 0$, и значит $x \in \mathbb{R}$. Обратно, если $x \in \mathbb{R}$, то $b = 0$, и потому $x = \overline{x}$.

2) Достаточно учесть, что $x + \overline{x} = 2a$.

3) А здесь достаточно учесть, что $x \cdot \overline{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

4) Ясно, что

$$\begin{aligned}\overline{x + y} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = \\ &= (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{x} + \overline{y}.\end{aligned}$$

5) Ясно, что

$$\begin{aligned}\overline{xy} &= \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{x} \cdot \overline{y}.\end{aligned}$$

Все свойства доказаны. $\square$

Свойство 3) можно использовать для того, чтобы найти алгебраическую форму числа $\frac{a+bi}{c+di}$. В самом деле, умножив числитель и знаменатель этой дроби на $c - di$, имеем

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i.$$

Зафиксируем на плоскости прямоугольную декартову систему координат. Комплексное число $a+bi$ будем изображать точкой плоскости с координатами (a, b). Тогда каждому комплексному числу будет соответствовать точка на плоскости (причем только одна) и, наоборот, каждой точке на плоскости будет соответствовать комплексное число (причем только одно). Точки оси абсцисс и только они будут изображать действительные числа. Начало координат соответствует числу 0.

- Указанная геометрическая интерпретация множества всех комплексных чисел обобщает известную из школьного курса математики геометрическую интерпретацию множества всех действительных чисел как числовой прямой.

Определение

Пусть комплексное число $z = a + bi$ изображается на плоскости точкой M (см. рис. 1 на следующем слайде). Тогда длина отрезка OM называется *модулем* числа z. Если $z \neq 0$, то угол между положительным направлением оси Ox и отрезком OM называется *аргументом* числа z. У числа 0 аргумент не определен. Модуль комплексного числа z обозначается через $|z|$, а его аргумент — через $\arg(z)$.

На следующем рисунке $r = |z|$ и $\varphi = \arg(z)$.

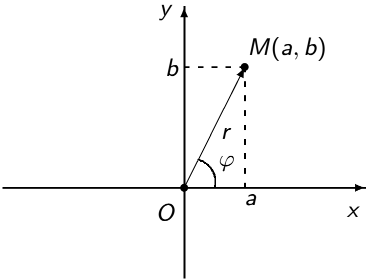

Рис. 1. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Отметим, что

- для действительных чисел, рассматриваемых как комплексные, введенное только что понятие модуля совпадает с понятием модуля (абсолютной величины), известным из школьного курса;
- аргумент ненулевого комплексного числа определен неоднозначно, так как если φ — аргумент числа $a + bi$, то $\varphi + 2\pi k$ — также его аргумент при любом целом k.

Пусть r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $a+bi$. Ясно, что $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Следовательно,

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot i\right)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Определение

Если r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $a+bi$, то выражение $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* этого числа.

- Тригонометрическая форма комплексного числа определена неоднозначно — это вытекает из неоднозначности аргумента комплексного числа.

Пусть, например, $z_1=1+i$. Тогда $r=\sqrt{2}$ и $\cos\varphi=\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Из двух последних равенств вытекает, что $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Следовательно, тригонометрической формой записи числа z_1 является $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $z_2=-1+\sqrt{3}i$. Тогда $r=2$, $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$ и $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Из двух последних равенств вытекает, что $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, $z_2=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$.

Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

С помощью тригонометрической формы легко находятся произведение и частное от деления двух комплексных чисел. В самом деле, пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2\big[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big] = \\
&= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big);\\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).
\end{aligned}
$$

Мы видим, что:

- *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов*;
- *модуль частного от деления z_1 на z_2 равен частному от деления модуля z_1 на модуль z_2, а аргумент частного — разности аргументов z_1 и z_2.*

Из результата о произведении комплексных чисел в тригонометрической форме вытекает, что

$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{2}$$

для любого натурального n. Таким образом,

- *при возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.*

В качестве примера, вычислим z^{2012}, где $z = -1 + \sqrt{3}i$. Как мы видели выше, $z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$. Следовательно,

$$z^{2012} = 2^{2012}\left(\cos\frac{4024\pi}{3} + i\sin\frac{4024\pi}{3}\right) = 2^{2012}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) =$$
$$= 2^{2012}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2^{2011}(1 + \sqrt{3}i).$$

Из формулы (2) при $r = 1$ получается равенство, известное как *формула Муавра*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Эта формула оказывается удобным средством для преобразования тригонометрических выражений. Продемонстрируем это на следующем примере: выразить $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Будем исходить из равенства

$$\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5,$$

которое получено из формулы Муавра при $n = 5$. Правую его часть преобразуем по формуле бинома Ньютона (используя равенства $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$):

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 &= \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - \\ &- 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi = \\ &= (\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi) + \\ &+ (5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi)i.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$

$$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi.$$

Определение

Пусть n — натуральное число. *Корнем степени n из комплексного числа z* называется комплексное число w такое, что $w^n = z$.

Если $z = 0$, то, очевидно, для любого натурального n существует ровно один корень n-й степени из z, равный нулю. Пусть теперь $z \neq 0$ и $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Корень степени n из z будем искать тоже в тригонометрической форме. Пусть $w = q(\cos\psi + i\sin\psi)$ и $w^n = z$. Тогда, в силу формулы (2),

$$q^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Получаем равенства $q^n = r$ и $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где k — некоторое целое число. Поскольку q и r — положительные действительные числа, это означает, что q — арифметический корень степени n из числа r. Для аргумента числа w справедливо равенство $\psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n}$. В частности, мы видим, что корень n-й степени из числа z всегда существует.

Извлечение корней из комплексных чисел (2)

Выясним, сколько значений может иметь корень из комплексного числа. Как мы видели, все корни n-й степени из числа z задаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (3)$$

где k — целое число. Ясно, что $w_k = w_\ell$ тогда и только тогда, когда $\frac{\varphi+2\pi k}{n} = \frac{\varphi+2\pi\ell}{n} + 2\pi m$ при некотором целом m. Последнее равенство равносильно равенству $\frac{k-\ell}{n} = m$. Иными словами, числа w_k и w_ℓ совпадают тогда и только тогда, когда разность $k - \ell$ нацело делится на n. Таким образом, чтобы получить все различные значения корня, достаточно в формуле (3) взять n последовательных значений k, например, последовательно приравнивать k к $0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом,

- *если z — произвольное комплексное число, отличное от 0, а n — произвольное натуральное число, то корень n-ной степени из z имеет ровно n различных значений, которые могут быть вычислены по формуле*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (4)$$

Приведем два примера применения формулы (4).

Задача 1. Найти все значения $\sqrt[4]{z}$, где $z = -1 + \sqrt{3}i$.

Решение. Как мы видели выше, $z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$. Следовательно,

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4}\right), \text{ где } k = 0, 1, 2, 3.$$

Найдем каждое из значений корня:

$$\text{при } k = 0: \quad w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3} + i);$$

$$\text{при } k = 1: \quad w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-1 + \sqrt{3}i);$$

$$\text{при } k = 2: \quad w_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3} + i);$$

$$\text{при } k = 3: \quad w_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1 - \sqrt{3}i).$$

Задача 2. Найти все корни уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Решение. Другими словами, надо найти все значения $\sqrt{-1}$. Одним из значений этого корня, как мы знаем, является число i. В силу формулы (4) должно существовать еще одно значение. Легко понять, что $-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$. Следовательно, $\sqrt{-1} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}$, где $k = 0, 1$. При $k = 0$ получаем $w_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, а при $k = 1$ — $w_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$.

Ответ. i, $-i$.

Извлечение квадратного корня из комплексного числа, записанного в алгебраической форме (на примере)

Часто возникает необходимость найти квадратный корень из комплексного числа, не обращаясь к тригонометрической форме. Покажем на примере числа $z = 3 - 4i$, как это можно сделать. Пусть $\sqrt{3 - 4i} = a + bi$. Тогда $3 - 4i = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3, \\ 2ab = -4. \end{cases} \tag{5}$$

Подчеркнем, что нам необходимо найти действительные решения этой системы. Возведем обе части каждого из этих уравнений в квадрат и рассмотрим сумму полученных равенств:

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 = 25 \quad \text{или} \quad (a^2 + b^2)^2 = 25.$$

Получаем, что $a^2 + b^2 = 5$ (ясно, что случай $a^2 + b^2 = -5$ невозможен, поскольку a и b — действительные числа). Отсюда и из первого уравнения системы (5) имеем $a^2 = 4$, $b^2 = 1$, откуда $a = \pm 2$ и $b = \pm 1$. Из второго уравнения системы (5) видно, что $ab < 0$. Поэтому мы получаем два решения: $a_1 = 2$, $b_1 = -1$ и $a_2 = -2$, $b_2 = 1$. Итак, мы нашли два значения $\sqrt{3 - 4i}$ — это $2 - i$ и $-2 + i$.

- Рассуждая аналогичным образом, можно извлечь квадратный корень из произвольного комплексного числа.