§ 9. Крамеровские системы линейных уравнений

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Система линейных уравнений называется *крамеровской*, если в ней число уравнений равно числу неизвестных.

Крамеровские системы получили название в честь швейцарского математика XVIII века Габриэля Крамера, который изучал их.

Определители, связанные с крамеровской системой

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dotfill \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Определитель основной матрицы системы (1) обозначим через Δ и будем называть *определителем системы* (1). Далее, для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через Δ_i определитель матрицы, полученной заменой i-го столбца основной матрицы системы (1) на столбец свободных членов этой системы. Иными словами,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\,n-1} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2\,n-1} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n\,n-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема Крамера

Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Доказательство. Пусть $\Delta \neq 0$. Докажем сначала *существование* решения системы (1). Для этого достаточно убедиться в том, что набор скаляров

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right) \tag{2}$$

является решением системы, т. е. обращает все ее уравнения в верные равенства. Подставим этот набор в первое уравнение системы и разложим определитель Δ_1 по первому столбцу, определитель Δ_2 — по второму столбцу, ..., определитель Δ_n — по n-му столбцу.

Получим:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\cdot\frac{\Delta_1}{\Delta}+a_{12}\cdot\frac{\Delta_2}{\Delta}+\dots+a_{1n}\cdot\frac{\Delta_n}{\Delta}=\\
&=\frac{1}{\Delta}\cdot\left(a_{11}\Delta_1+a_{12}\Delta_2+\dots+a_{1n}\Delta_n\right)=\\
&=\frac{1}{\Delta}\cdot\Big[a_{11}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\dots+b_nA_{n1})+\\
&\qquad+a_{12}(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\dots+b_nA_{n2})+\\
&\qquad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\qquad+a_{1n}(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\dots+b_nA_{nn})\Big].
\end{aligned}
$$

Раскрыв круглые скобки и сгруппировав слагаемые, содержащие b_1, b_2, $\dots$, b_n, можно переписать полученное выражение в виде

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta}\cdot\Big[\,&b_1(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\dots+a_{1n}A_{1n})+\\
+\,&b_2(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\dots+a_{1n}A_{2n})+\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
+\,&b_n(a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\dots+a_{1n}A_{nn})\Big].
\end{aligned}
$$

Выражение в первых круглых скобках есть не что иное, как разложение определителя Δ по первой строке, а выражения в остальных круглых скобках равны нулю в силу 9-го свойства определителей (см. § 8).

Поэтому окончательно получаем, что

$$a_{11} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta} + \cdots + a_{1n} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \cdot b_1 \cdot \Delta = b_1,$$

т. е. набор скаляров (2) обращает первое уравнение системы (1) в верное равенство. Аналогично проверяется, что он обращает в верные равенства и все остальные уравнения этой системы.

Докажем теперь *единственность* решения. Пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — произвольное решение системы (1). Иными словами, этот набор скаляров обращает все уравнения системы в верные равенства:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \cdots + a_{1n}x_n^0 = b_1, \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \cdots + a_{2n}x_n^0 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^0 + a_{n2}x_2^0 + \cdots + a_{nn}x_n^0 = b_n. \end{cases}$$

Умножим первое из этих равенств на A_{11}, второе — на A_{21}, ..., последнее — на A_{n1} и сложим полученные равенства.

Сгруппировав в левой части суммы слагаемые, содержащие $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, получим:

$$\begin{aligned}
&(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1^0 + \\
&+ (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{n2}A_{n1})x_2^0 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1})x_n^0 = \\
&= b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}.
\end{aligned}$$

В левой части этого равенства выражение в первых круглых скобках есть в точности разложение определителя Δ по первому столбцу, а выражения во всех остальных круглых скобках равны нулю в силу 9-го свойства определителей и принципа равноправия строк и столбцов (см. § 8). А в правой части стоит разложение определителя Δ_1 по первому столбцу. Следовательно, последнее равенство можно переписать в виде $\Delta x_1^0 = \Delta_1$. Аналогично доказывается, что $\Delta x_2^0 = \Delta_2, \ldots, \Delta x_n^0 = \Delta_n$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\text{если } (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \text{ — решение системы (1),} \\
&\text{то } \Delta x_1^0 = \Delta_1, \Delta x_2^0 = \Delta_2, \ldots, \Delta x_n^0 = \Delta_n.
\end{aligned} \tag{3}$$

- Условие $\Delta \neq 0$ в доказательстве утверждения (3) не использовалось. Таким образом, *это утверждение справедливо при любом* Δ.

Поскольку $\Delta \neq 0$, получаем, что

$$x_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n^0 = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Итак, мы взяли произвольное решение и доказали, что оно совпадает с решением (2). Следовательно, решение единственно. Теорема Крамера доказана. $\square$

Укажем два следствия из теоремы Крамера. Из (3) непосредственно вытекает

Признак несовместности крамеровской системы

Если $\Delta = 0$, а по крайней мере один из определителей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ отличен от 0, то система (1) не имеет решений. □

Определение

Квадратная матрица называется *вырожденной*, если ее определитель равен 0, и *невырожденной*, если он не равен 0.

Признак единственности решения крамеровской системы

Крамеровская система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ее основная матрица невырождена.

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы Крамера.

Необходимость. Предположим, что $\Delta = 0$ и система (1) совместна. Надо проверить, что в этом случае система (1) является неопределенной. В силу п. 2) теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений (см. § 6), достаточно проверить, что однородная система, соответствующая системе (1), неопределенна.

Приведем основную матрицу этой системы к ступенчатому виду, не вычеркивая при этом нулевые строки (в случае их появления) и не умножая ни на какой скаляр ту строку, которая в данный момент изменяется . Полученная ступенчатая матрица будет квадратной матрицей порядка n. Обозначим ее через B и положим $B = (b_{ij})$. Ясно, что матрица B верхнетреугольна. Из 2-го, 4-го и 7-го свойств определителей вытекает, что $|B| = \pm\Delta$, а значит $|B| = 0$.

Предположим, что последняя строка матрицы B не является нулевой. Поскольку B верхнетреугольна, $b_{nj} = 0$ для всех $j < n$. Следовательно, $b_{nn} \neq 0$. Поскольку матрица B ступенчата, существует такой индекс $i < n$, что $b_{n-1\,i} \neq 0$. В то же время, $b_{n-1\,j} = 0$ для всякого $j < n-1$, поскольку матрица B верхнетреугольна. Следовательно, $i = n-1$, т.е. $b_{n-1\,n-1} \neq 0$. Аналогично проверяется, что все диагональные элементы матрицы B отличны от 0. В силу предложения об определителе треугольной матрицы (см. § 8), $|B| = b_{11}b_{22}\cdots b_{nn} \neq 0$ вопреки сказанному выше.

Итак, последняя строка матрицы B — нулевая. Следовательно, число ненулевых строк матрицы B меньше n. В силу замечания о существовании ненулевого решения однородной системы (см. § 7), это означает, что система является неопределенной. $\square$

Еще одно следствие из теоремы Крамера относится к крамеровским однородным системам.

Признак существования ненулевого решения крамеровской системы

Крамеровская однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее основная матрица вырожденна.

Доказательство. Любая однородная система совместна (см. замечание о совместности однородной системы в § 6). Поэтому если $\Delta = 0$, то в силу предыдущего следствия наша система имеет более одного решения. Ясно, что все эти решения, кроме одного, — ненулевые. Обратно, если крамеровская однородная система имеет ненулевое решение, то она имеет более одного решения (так как нулевое решение у нее есть всегда). Но тогда $\Delta = 0$ в силу теоремы Крамера. $\square$