Тест по линейным операторам.

Вариант 19

Семке Даниил
КН-102, МЕН-190207

① $\mathbb{R}_3$, $\mathcal{A}(\vec{x}) = (\vec{a}\,\vec{x})\,\vec{a}$

$\vec{a} = (3; +4; -5)$ $\mathcal{A}$ - в станд. базисе?

Станд. базис в $\mathbb{R}_3$:

$e_1 = (1,0,0) \Rightarrow \mathcal{A}(e_1) = 3\,(3,4,-5) = (9,12,-15)$

$e_2 = (0,1,0) \Rightarrow \mathcal{A}(e_2) = 4\,(3,4,-5) = (12,16,-20)$

$e_3 = (0,0,1) \Rightarrow \mathcal{A}(e_3) = -5\,(3,4,-5) = (-15,-20,25)$

Матрица A линейного оператора $\mathcal{A}$:

$$A = (\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \mathcal{A}(e_3)) = \begin{pmatrix} 9 & 12 & -15 \\ 12 & 16 & -20 \\ -15 & -20 & 25 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 9 & +12 & -15 \\ +12 & 16 & -20 \\ -15 & -20 & 25 \end{pmatrix}$

② $\mathbb{R}_2$, $\mathcal{A}(X) = AX$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ +4 & -5 \end{pmatrix}$

$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}(e_{11}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ +4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2e_{11} + 4e_{21}$

$e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}(e_{12}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ +4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2e_{12} + 4e_{22}$

$e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}(e_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = 3\cdot e_{11} - 5e_{21}$

$e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}(e_{22}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = 3\cdot e_{12} - 5e_{22}$

Ответ: $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

№3 $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $n = 5$, $r = 2$ $\Rightarrow c = n - r = 3$ - число своб. переменных $= d(\mathcal{A}) \xrightarrow{\text{Т. о ранге и дефекте}}$

$\Rightarrow r(\mathcal{A}) = \dim \operatorname{Im} = 5 - 3 = 2$ Ответ: 2

④ $\mathcal{D}$-оператор дифф. в $\mathbb{R}_4[x]$, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_5\}$ - базис

$p_1 = -1 \Rightarrow \mathcal{D}(p_1) = 0$

$p_2 = x \Rightarrow \mathcal{D}(p_2) = 1 = -p_1$

$p_3 = x^2 \Rightarrow \mathcal{D}(p_3) = 2x = 2p_2$

$p_4 = x^3 \Rightarrow \mathcal{D}(p_4) = 3x^2 = 3p_3$

$p_5 = -x^4 \Rightarrow \mathcal{D}(p_5) = -4x^3 = -4p_4$

Матр. оператора $\mathcal{D}$ в P:

$$\mathcal{D}_P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собств. векторы и собств. значения $\mathcal{D}_P$:
составим хар-ое ур-ие:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 0 & -\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^5 = 0$$

$\Rightarrow$ $\underline{\lambda = 0}$ - собств. значение.

$$\begin{cases} -x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ 3x_4 = 0 \\ -4x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0 \end{cases}$$

$0 \cdot x_1 = 0$

$\Rightarrow$ собств. векторы, соотв. $\lambda = 0$:
$\{\bar{v} = \beta p_1 \mid \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

Ответ: $\mathcal{D}_P$, $\lambda = 0$, $\{\bar{v} = \beta p_1 \mid \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$