Контрольная работа

Вариант 16

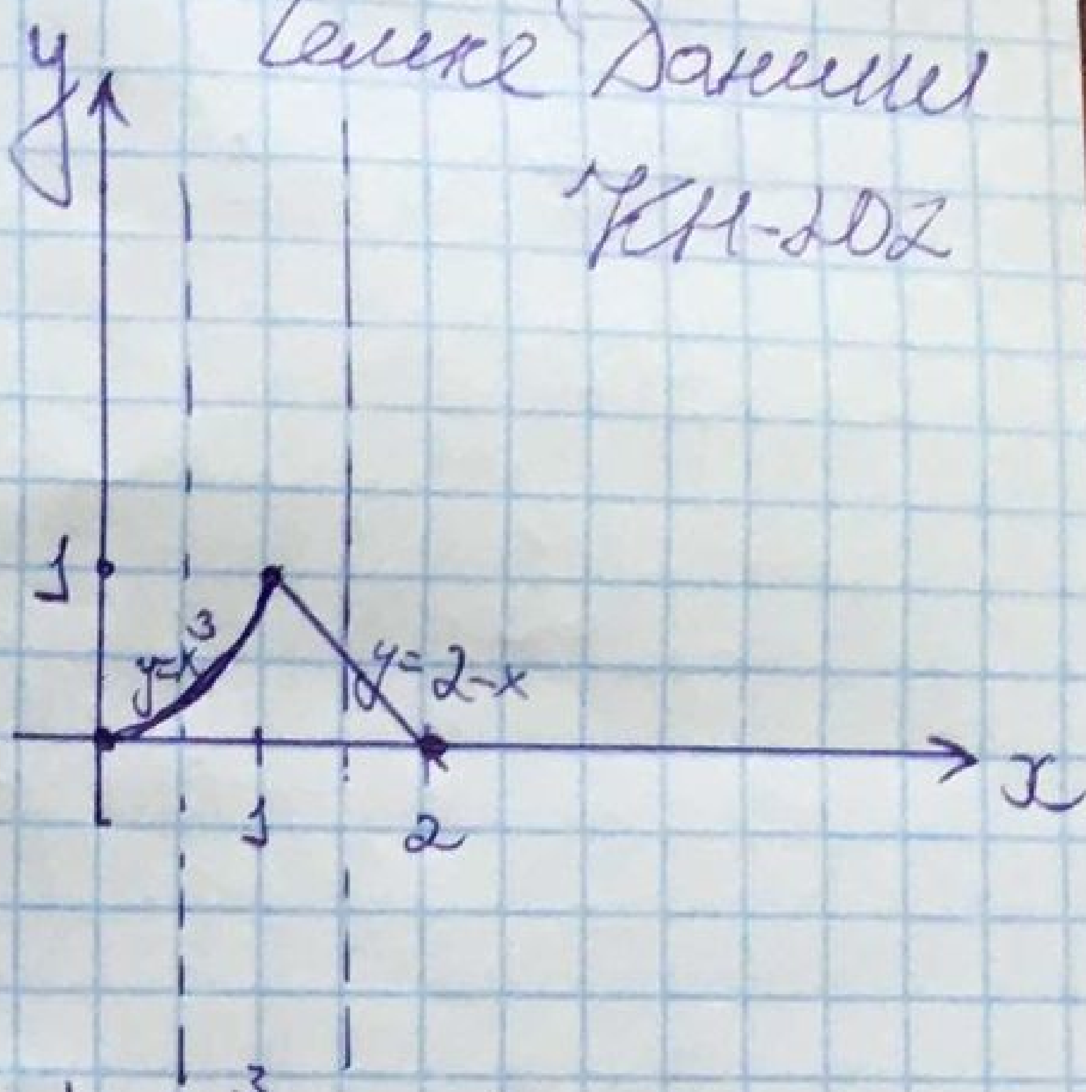
15.10.20

Семке Даниил

КН-202

① $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{2-y} f\,dx =$

$\begin{cases} x = 2-y \Rightarrow \\ x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} y = 2-x \\ y = x^3 \end{cases}$



$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} f\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f\,dy$

Ответ: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} f\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f\,dy$

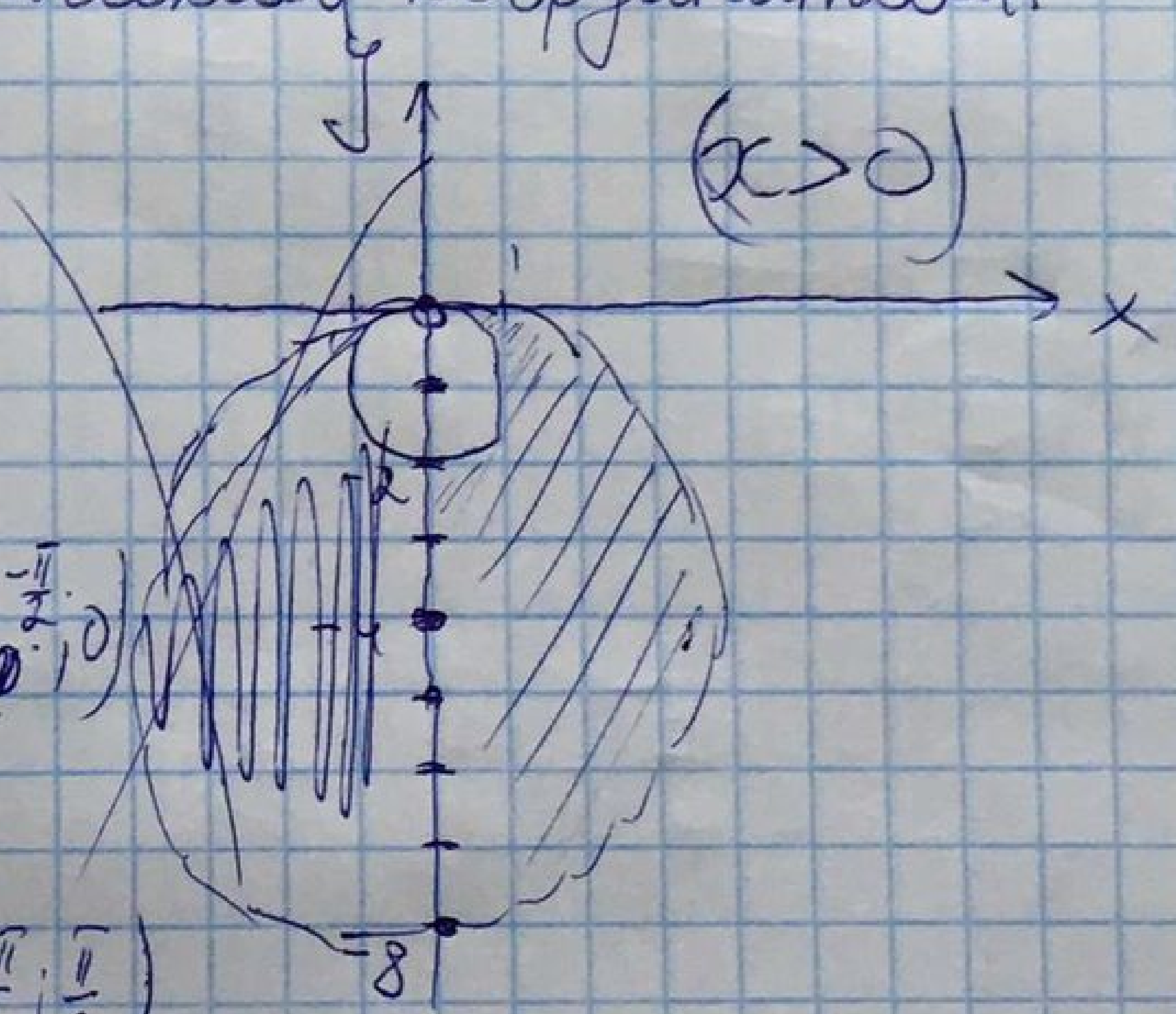
---

② найти объем тела, огр-го заданными поверхностями

$\begin{cases} x^2+y^2=-2y \\ x^2+y^2=-8y \\ z=x,\ x>0 \\ z=8 \end{cases}$

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$



$\begin{cases} r^2 = -2\sin\varphi \cdot r;\ r \geq 0 \Rightarrow \sin\varphi < 0 \Rightarrow \varphi \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \\ r^2 = -8\sin\varphi \cdot r \\ z = r\cos\varphi,\ r\cos\varphi > 0 \overset{r>0}{\Rightarrow} \cos\varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ z = 8 \end{cases}$

$\boxed{r>0}$ $\boxed{\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; 0)}$

$\begin{cases} r = -2\sin\varphi \\ r = -8\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \\ z = 8 \end{cases}$

$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \int\limits_{-2\sin\varphi}^{-8\sin\varphi} r\,dr \int\limits_{r\cos\varphi}^{8} dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \int\limits_{-2\sin\varphi}^{-8\sin\varphi} (8r - r^2\cos\varphi)\,dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(4r^2 - \frac{r^3\cos\varphi}{3}\right)\Bigg|_{-2\sin\varphi}^{-8\sin\varphi} d\varphi =$

$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (240\sin^2\varphi + 168\cos\varphi\sin^3\varphi)\,d\varphi = 120x - 60\sin(2x) + 42\sin^4(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} =$

$= 60\pi - 42$ Ответ: $60\pi - 42$

№4 Найти массу тела, огр-го заданными пов-тями, μ-плотность

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+\cancel{y}+z^2=9y^2 \\ x=z=0 \\ x,y,z\geq 0 \\ \mu=15y \end{cases} \quad \begin{cases} x=r\cos\varphi \\ z=r\sin\varphi \\ y=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{4-r^2} \\ y=\frac{r}{3} \\ \mu=15y \end{cases}$$

1) $\frac{r^2}{9}=4-r^2 \Rightarrow r^2=\frac{36}{10} \Rightarrow r=3\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{6}{\sqrt{10}}} dr \int_{r/3}^{\sqrt{4-r^2}} r\cdot 15y\,dy = \frac{15\pi}{4}\int_0^{6/\sqrt{10}} r\left(4-r^2-\frac{r^2}{9}\right)dr =$$

$$= \frac{15\pi}{36}\int_0^{6/\sqrt{10}} (36r-10r^3)\,dr = \frac{27}{2}\pi$$

Ответ: $27/2\,\pi$

III

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2\leq 16 \\ x^2+y^2+z^2\geq 4z \\ z\geq\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=r\cos\varphi\cos\psi \\ y=r\sin\varphi\cos\psi \\ z=r\sin\psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2\leq 16 \\ r\geq 4\sin\psi \\ 0\leq r\leq 4 \\ r\cos\psi\leq\sqrt{99}\sin\psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r\in[0;4] \\ r\in[4\sin\psi;4] \\ 0\leq r\leq 4 \\ \operatorname{tg}\psi\geq\frac{1}{3\sqrt{11}} \end{cases} \quad \begin{cases} r\in[4\sin\psi;4] \\ \psi\in\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{3\sqrt{11}};\frac{\pi}{2}\right] \\ \varphi\in[0;2\pi] \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3\sqrt{11}}\right)}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{4\sin\psi}^{4} r^2\cos\psi\,dr = 2\pi\cdot\frac{26001}{40000} = \frac{17334}{625}\pi$$

Ответ: $\frac{17334}{625}\pi$