Двойной интеграл

5 Основные свойства двойного интеграла

Свойство 1. $\displaystyle\iint_D dxdy = S(D)$

Свойство 2. Линейность

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)\,dxdy + \beta \iint_D g(x,y)\,dxdy$$

Свойство 3. Интегрируемость на подмножестве

Если функция f ограничена и интегрируема на множестве D, то она интегрируема на любом измеримом подмножестве $E \subset D$

Свойство 4. Аддитивность интеграла как функции области

Если функция f ограничена и интегрируема на $D \cup G$, где $\mathring{D} \cap \mathring{G} = \emptyset$, то

$$\iint_{D\cup G} f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_G f(x,y)\,dxdy,$$

Свойство 5. Сохранение неравенства

Если f и g интегрируемы на D и $f(x,y) \leqslant g(x,y),\ (x,y) \in D$, то

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \leqslant \iint_D g(x,y)\,dxdy$$

Свойство 6. Оценка модуля интеграла

Если f ограничена и интегрируема на D, то $|f|$ — интегрируема на D и

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\,dxdy$$

Свойство 7. Монотонность интеграла как функции множества

Если D, E — квадрируемые множества, $E \subset D$, а f — неотрицательна, ограничена и интегрируема на D, то

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy \leqslant \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

Свойство 8.

Пусть f неотрицательна, ограничена и интегрируема на открытом множестве D. Если существует точка $(x_0, y_0) \in D$, в которой f непрерывна и положительна, то

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy > 0$$

Свойство 9. Теорема о среднем

Если f и g интегрируемы на D, $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$ при $(x,y) \in D$, а g не меняет знака на D, то найдётся $\mu \in [m, M]$ такое, что

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\,dxdy = \mu \iint_D g(x,y)\,dxdy$$

Если при этом D — связное множество, а f непрерывна на D, то найдётся точка $(\xi, \eta) \in D$ такая, что

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta) \iint_D g(x,y)\,dxdy$$

6 Вычисление двойного интеграла

Случай 1: прямоугольная область $\Pi = [a,b] \times [c,d]$.

Теорема 1. *Пусть $f(x,y)$ ограничена и интегрируема на Π и пусть для каждого $x \in [a,b]$ существует интеграл $\displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy = I(x)$. Тогда функция $I(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и*

$$\int_a^b I(x)\,dx = \iint_\Pi f(x,y)\,dxdy$$

или

$$\iint_\Pi f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

В этом случае говорят, что *двойной интеграл равен повторному.*

Замечание. При соответствующих аналогичных условиях имеет место формула

$$\iint_\Pi f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Случай 2: область вида $D = \{(x,y)|\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),\ x \in [a,b]\}$

Теорема 2. *Пусть $f(x,y)$ ограничена и интегрируема на D и пусть для каждого $x \in [a,b]$ существует интеграл $\displaystyle\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = I(x)$. Тогда функция $I(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и*

$$\int_a^b I(x)\,dx = \iint_\Pi f(x,y)\,dxdy$$

или

$$\iint_\Pi f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Замечание. Если $D = \{(x,y)|\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y),\ y \in [c,d]\}$, то при выполнении соответствующих условий (***сформулируйте их!***) справедлива формула

$$\iint_\Pi f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Пример. Вычислим интеграл $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$, где D — множество, ограниченное прямыми $y = x,\ y = x + a,\ y = a,\ y = 2a$.

7 Формула замены переменной в двойном интеграле

Задания:
1) записать определение 2 (интегрируемой функции и интеграла) в кванторах