Лекция 13: Пространство решений однородной системы линейных уравнений

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Вступительные замечания

В данной лекции будет доказана теорема, говорящая о том, как по основной матрице однородной системы линейных уравнений можно легко вычислить размерность пространства решений этой системы. Как мы увидим, из доказательства этой теоремы извлекается алгоритм нахождения базиса указанного пространства. В конце лекции мы укажем новый способ записи общего решения произвольной системы линейных уравнений, называемый *векторной записью общего решения системы*, а также приведем алгоритм нахождения базиса пересечения подпространств (эта задача упоминалась в лекции 9, но не была там решена).

Размерность пространства решений однородной системы (1)

Пусть дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Множество всех решений этой системы образует, как мы знаем, подпространство пространства $\mathbb{R}_n$, называемое пространством решений системы (1) (см. лекцию 9). Основной целью данной лекции является доказательство теоремы о размерности этого пространства. В ходе доказательства будет указан способ построения базиса пространства решений.

Теорема 1

Размерность пространства решений системы (1) равна $n - r$, где n — число неизвестных в системе, а r — ранг основной матрицы системы.

Доказательство. Обозначим через A основную матрицу системы (1), а через d — ненулевой минор порядка r матрицы A. Для удобства обозначений будем считать, что d есть определитель матрицы, расположенной в первых r строках и первых r столбцах матрицы A.

Размерность пространства решений однородной системы (2)

Матрицу, расположенную в первых r строках и первых r столбцах матрицы A, обозначим через B. Как обычно, положим $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$.

Докажем, что первые r векторов-строк матрицы A линейно независимы. В самом деле, предположим, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ линейно зависимы. В силу леммы 7 из лекции 7 один из них, скажем последний, является линейной комбинацией остальных, т. е. $\mathbf{a}_r = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_{r-1}\mathbf{a}_{r-1}$ для некоторых чисел $t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}$. Строки матрицы B представляют собой укороченные строки матрицы A. Следовательно, последнее равенство выполнено и для строк матрицы B. Умножим первую строку этой матрицы на $-t_1$, вторую на $-t_2$, ..., $(r-1)$-вую на $-t_{r-1}$ и полученные произведения прибавим к r-й строке. В силу предложения 6 из лекции 5 определитель полученной матрицы равен d. С другой стороны, эта матрица будет содержать нулевую строку, и, в силу предложения 2 из лекции 5 ее определитель равен 0. Мы получили противоречие с тем, что $d \neq 0$. Следовательно, векторы-строки $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы.

Размерность пространства решений однородной системы (3)

Так как r — размерность пространства V_A, порожденного векторами-строками матрицы A, а первые r векторов-строк этой матрицы линейно независимы, они образуют базис пространства V_A. Это означает, что все векторы-строки, начиная с $(r+1)$-й, являются линейными комбинациями первых r векторов-строк. Следовательно, все уравнения системы (1), начиная с $(r+1)$-го, являются следствиями первых r уравнений. Вычеркнув все уравнения, начиная с $(r+1)$-го, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Ясно, что $r \leqslant n$. Предположим сначала, что $r = n$. Тогда (2) — крамеровская однородная система, определитель которой равен d и потому отличен от 0. По теореме Крамера (см. лекцию 6) она имеет единственное решение. Поскольку эта система однородна, ее единственным решением является нулевое решение. Следовательно, пространство решений системы (2) является нулевым. Поскольку системы (1) и (2) имеют одно и то же общее решение, пространство решений системы (1) также является нулевым. Размерность нулевого пространства равна 0, а поскольку $r = n$, то и $n - r = 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае заключение теоремы верно.

Пусть теперь $r < n$. Перенеся неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в правую часть, получим систему

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1r}x_r & = & -a_{1\,r+1}x_{r+1} & - & \cdots & - & a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2r}x_r & = & -a_{2\,r+1}x_{r+1} & - & \cdots & - & a_{2n}x_n, \\ \multicolumn{13}{c}{\dotfill} \\ a_{r1}x_1 & + & a_{r2}x_2 & + & \cdots & + & a_{rr}x_r & = & -a_{r\,r+1}x_{r+1} & - & \cdots & - & a_{rn}x_n. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Подчеркнем, что множества решений систем (1) и (3) совпадают.

Придадим неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ произвольные значения: $x_{r+1} = x^0_{r+1}$, $\ldots$, $x_n = x^0_n$. Тогда система (3) примет вид

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1r}x_r & = & -a_{1\,r+1}x^0_{r+1} & - & \cdots & - & a_{1n}x^0_n, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2r}x_r & = & -a_{2\,r+1}x^0_{r+1} & - & \cdots & - & a_{2n}x^0_n, \\ \multicolumn{13}{c}{\dotfill} \\ a_{r1}x_1 & + & a_{r2}x_2 & + & \cdots & + & a_{rr}x_r & = & -a_{r\,r+1}x^0_{r+1} & - & \cdots & - & a_{rn}x^0_n. \end{array}\right. \qquad (4)$$

Последняя система является крамеровской, а ее определитель равен $d \neq 0$. По теореме Крамера система (4) имеет единственное решение: $x_1 = x^0_1$, $x_2 = x^0_2$, $\ldots$, $x_r = x^0_r$. Ясно, что $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$ — решение системы (4), а значит и системы (1). Итак, неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ могут принимать любые значения, а значения остальных неизвестных однозначно вычисляются исходя из значений этих $n - r$ неизвестных. Это означает, что неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ и только они являются свободными.

Присвоим свободным неизвестным следующие значения: $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 0$. Получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1\,r+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2\,r+1}, \\ \dotfill \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r\,r+1}. \end{cases} \qquad (5)$$

Система (5) является крамеровской системой, и ее определитель отличен от нуля (так как он равен d). По теореме Крамера она имеет единственное решение. Обозначим его через $(f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1r})$. Тогда набор чисел $\mathbf{f}_1 = (f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1r}, 1, 0, \ldots, 0)$ является решением системы (3).

Присвоим теперь свободным неизвестным другие значения: $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 1$, $x_{r+3} = 0, \ldots, x_n = 0$. Получим крамеровскую систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1\,r+2}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2\,r+2}, \\ \dotfill \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r\,r+2}, \end{cases}$$

определитель которой вновь равен d и, в частности, отличен от 0. Как и система (5), последняя система по теореме Крамера имеет единственное решение $(f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{r2})$. Набор чисел $\mathbf{f}_2 = (f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2r}, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ будет решением системы (3).

Размерность пространства решений однородной системы (6)

Продолжим присваивать значения свободным неизвестным указанным способом (каждый раз одно из свободных неизвестных будем приравнивать к 1, а все остальные к 0). Поскольку число свободных переменных равно $n-r$, описанные выше действия надо проделать $n-r$ раз. В итоге получим следующий набор векторов, каждый из которых является решением системы (3):

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{f}_1 & = & (f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1r}, 1, 0, \ldots, 0), \\ \mathbf{f}_2 & = & (f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2r}, 0, 1, \ldots, 0), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \mathbf{f}_{n-r} & = & (f_{n-r\,1}, f_{n-r\,2}, \ldots, f_{n-r\,r}, 0, 0, \ldots, 1). \end{array}$$

Докажем, что решения $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$ образуют базис пространства решений системы (3), а следовательно и пространства решений системы (1). Поскольку число этих решений равно $n-r$, тем самым доказательство теоремы будет завершено.

Размерность пространства решений однородной системы (7)

Сначала проверим, что система векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$ линейно независима. Записав эти векторы в матрицу по строкам, получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1r} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2r} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ f_{n-r\,1} & f_{n-r\,2} & \ldots & f_{n-r\,r} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Определитель матрицы, расположенной в последних $n-r$ столбцах и во всех $n-r$ строках матрицы B, является ненулевым минором $(n-r)$-го порядка матрицы B. Поскольку миноров большего порядка эта матрица не имеет, ранг B по минорам равен $n-r$. В силу теоремы о ранге матрицы ранг B по строкам также равен $n-r$. Поскольку эта матрица содержит $n-r$ строк, это означает, что все ее векторы-строки, т. е. векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$, линейно независимы.

Осталось показать, что при добавлении к системе векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$ любого вектора из пространства решений системы (3) получается линейно зависимая система векторов. С учетом леммы 7 из лекции 7 достаточно проверить, что всякое решение системы (1) есть линейная комбинация векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$. Пусть $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ — произвольное решение системы (3). Рассмотрим вектор

$$\mathbf{g} = h_{r+1}\mathbf{f}_1 + h_{r+2}\mathbf{f}_2 + \cdots + h_n\mathbf{f}_{n-r} - \mathbf{h}.$$

Непосредственно проверяется, что все компоненты вектора $\mathbf{g}$, начиная с $(r+1)$-й, равны нулю. В силу теоремы 1 из лекции 3 вектор $\mathbf{g}$ является решением системы (1). Поскольку последние $n-r$ компонент вектора $\mathbf{g}$ равны нулю, первые r компонент этого вектора должны удовлетворять следующей системе линейных уравнений, которая получается из системы (2), если положить $x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_n = 0$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1r}x_r & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2r}x_r & = & 0, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{r1}x_1 & + & a_{r2}x_2 & + & \cdots & + & a_{rr}x_r & = & 0. \end{array}\right. \qquad (7)$$

Эта система является крамеровской, а ее определитель равен d и потому отличен от 0. По теореме Крамера система (7) имеет единственное решение. Поскольку эта система однородна, ее единственным решением является нулевое решение. Таким образом, первые r компонент вектора $\mathbf{g}$, как и последние $n-r$ его компонент, равны 0. Следовательно, $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ и потому $\mathbf{h} = h_{r+1}\mathbf{f}_1 + h_{r+2}\mathbf{f}_2 + \cdots + h_n\mathbf{f}_{n-r}$. Итак, произвольное решение системы (3) является линейной комбинацией векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$. Мы доказали, что векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$ образуют базис пространства решений системы (3). Как отмечалось выше, этого достаточно для завершения доказательства теоремы. $\square$

Определение

Базис пространства решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений* этой системы.

Если однородная система имеет единственное решение, то это решение является нулевым, а значит, пространство решений этой системы является нулевым пространством. Как отмечалось в лекции 8, нулевое векторное пространство не имеет базиса. Таким образом, справедливо следующее

Замечание 1

Если однородная система линейных уравнений имеет единственное решение, то фундаментального набора решений этой системы не существует.

Если же однородная система имеет бесконечного много решений, то, найдя ее фундаментальную систему решений, мы, фактически, найдем все ее решения, поскольку, по теореме о разложении вектора по базису, любое решение системы является линейной комбинацией решений, входящих в фундаментальную систему решений.

Число векторов в фундаментальной системе решений и число свободных неизвестных

Согласно замечанию 2 из лекции 4, если система линейных уравнений имеет бесконечно много решений, то число ее свободных переменных равно $n - r$, где n — число неизвестных в системе, а r — число ненулевых строк в матрице, полученной из расширенной матрицы системы приведением к ступенчатому виду. Сопоставляя этот факт с приведенным в лекции 12 алгоритмом нахождения ранга матрицы и с теоремой 1, мы получаем следующий факт, полезный при решении конкретных систем линейных уравнений.

Замечание 2

Если однородная система линейных уравнений имеет бесконечно много решений, то число векторов в фундаментальной системе решений этой системы равно числу ее свободных переменных. $\square$

Предположим, что мы решаем систему линейных уравнений с n неизвестными, k из которых, скажем, $x_{n-k+1}, \dots, x_n$, являются свободными. В силу замечания 2 фундаментальная система решений нашей системы состоит из k векторов. Обозначим векторы, входящие в фундаментальную систему решений, через $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$. Чтобы найти эти векторы, мы должны заполнить следующую таблицу, в которой зеленым цветом выделены свободные переменные:

	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-k}	x_{n-k+1}	$\dots$	x_n
$\mathbf{f}_1$			$\dots$		$*$	$\dots$	$*$
$\mathbf{f}_2$			$\dots$		$*$	$\dots$	$*$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\mathbf{f}_k$			$\dots$		$*$	$\dots$	$*$

Табл. 1

Клетки, помеченные в табл. 1 звездочками, образуют квадратную матрицу. Алгоритм нахождения фундаментальной системы решений, изложенный в доказательстве теоремы 1, сводится, фактически, к следующему: *вписываем на место этой квадратной матрицы единичную матрицу и вычисляем первые $n-k$ компонент каждого из векторов* $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ (см. матрицу (6)).

Иногда при решении конкретных систем буквальное следование этому алгоритму может привести к достаточно громоздким вычислениям. Поэтому полезно иметь в виду следующее замечание.

- *На место квадратной матрицы, заполненной в табл.* 1 *звездочками, можно вписывать не только единичную матрицу, но и произвольную невырожденную квадратную матрицу порядка* k.

В самом деле, это гарантирует наличие во всей матрице размеров $k \times n$, указанной в табл. 1, ненулевого минора порядка k. Следовательно, ранг этой матрицы по минорам будет равен k. В силу теоремы о ранге, ее ранг по строкам тоже будет равен k. Это будет означать, что все векторы-строки нашей матрицы, т. е. векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ будут линейно независимы. А этого, как показано в доказательстве теоремы, достаточно для того, чтобы они образовывали фундаментальную систему решений.

Знание фундаментальной системы решений однородной системы позволяет записать ее общее решение в векторном виде, т. е. как множество векторов из $\mathbb{R}_n$, где n — число неизвестных в системе. А именно, если $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ — фундаментальная система решений (т. е. базис пространства решений) однородной системы, то общее решение системы совпадает с множеством всех векторов вида $c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2 + \cdots + c_k\mathbf{f}_k$, где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — произвольные константы. Более того, сказанное выше позволяет находить общее решение и неоднородной системы линейных уравнений. В самом деле, предположим, что нам дана произвольная система линейных уравнений, имеющая бесконечно много решений. Предположим, что $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы. Предположим также, что мы нашли (например, с помощью метода Гаусса) одно частное решение $\mathbf{f}_0$ заданной неоднородной системы. В силу теоремы 2 из лекции 3 общее решение этой системы совпадает с множеством всех векторов вида

$$\mathbf{f}_0 + c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2 + \cdots + c_k\mathbf{f}_k.$$

Это выражение называется *векторной записью общего решения системы линейных уравнений*.

Векторная запись общего решения системы линейных уравнений: пример (1)

В качестве примера найдем векторную запись общего решения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Эта система уже рассматривалась в лекции 4, см. там пример 3. В частности, расширенная матрица нашей системы была приведена в лекции 4 к ступенчатому виду. Если вычеркнуть из полученной там матрицы нулевую строку, получится матрица

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right). \tag{8}$$

Теперь ясно, что наша система имеет $5 - 3 = 2$ свободных переменных, а именно, переменные x_4 и x_5. Следовательно, фундаментальная система решений соответствующей однородной системы состоит из двух векторов.

Векторная запись общего решения системы линейных уравнений: пример (2)

Запишем систему линейных уравнений, соответствующую матрице (8):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 1, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1, \\ & & & - & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & -1, \end{array}\right. \tag{9}$$

и однородную систему, соответствующую системе (9):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 0, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ & & & - & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 0. \end{array}\right. \tag{10}$$

Найдем теперь фундаментальную систему решений системы (10). Как уже отмечалось, в нем должно быть два вектора. Полагая $x_4 = 1$ и $x_5 = 0$, последовательно находим: из третьего уравнения системы (10) — что $-x_3 + 1 = 0$, откуда $x_3 = 1$; из второго ее уравнения — что $2x_2 - 1 - 1 = 0$, откуда $x_2 = 1$; из первого ее уравнения — что $x_1 + 1 - 1 + 1 = 0$, откуда $x_1 = -1$. Таким образом, $\mathbf{f}_1 = (-1, 1, 1, 1, 0)$. Далее, полагая $x_4 = 0$ и $x_5 = 1$, последовательно находим: из третьего уравнения системы (10) — что $-x_3 - 1 = 0$, откуда $x_3 = -1$; из второго ее уравнения — что $2x_2 + 1 + 1 = 0$, откуда $x_2 = -1$; из первого ее уравнения — что $x_1 - 1 + 1 - 1 = 0$, откуда $x_1 = 1$. Таким образом, $\mathbf{f}_2 = (1, -1, -1, 0, 1)$.

Векторная запись общего решения системы линейных уравнений: пример (3)

Осталось найти одно частное решение системы (9). Для этого надо *произвольным* образом зафиксировать значения свободных пересенных. Полагая $x_4 = x_5 = 0$, последовательно находим: из третьего уравнения системы (9) — что $-x_3 = -1$, откуда $x_3 = 1$; из второго ее уравнения — что $2x_2 - 1 = 1$, откуда $x_2 = 1$; из первого ее уравнения — что $x_1 + 1 - 1 = 1$, откуда $x_1 = 1$. Таким образом, $\mathbf{f}_0 = (1, 1, 1, 0, 0)$.

Окончательно получаем, что векторная запись общего решения рассматриваемой системы имеет вид

$$(1, 1, 1, 0, 0) + (-1, 1, 1, 1, 0)c_1 + (1, -1, -1, 0, 1)c_2.$$

Теперь мы в состоянии указать способ решения задачи, которая упоминалась в лекции 9, но не была там решена. Речь идет о задаче нахождения базиса пересечения подпространств.

Пусть M_1 и M_2 — подпространства пространства $\mathbb{R}_n$, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ образуют базис подпространства M_1, а векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ — базис подпространства M_2. Предположим, что $\mathbf{x} \in M_1 \cap M_2$, т. е. $\mathbf{x} \in M_1$ и $\mathbf{x} \in M_2$. Тогда найдутся числа $t_1, t_2, \dots, t_k$ и $s_1, s_2, \dots, s_m$ такие, что

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k \quad \text{и} \quad \mathbf{x} = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \dots + s_m\mathbf{b}_m.$$

Следовательно,

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \dots + s_m\mathbf{b}_m,$$

и потому выполнено равенство

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k - s_1\mathbf{b}_1 - s_2\mathbf{b}_2 - \dots - s_m\mathbf{b}_m = \mathbf{0}. \tag{11}$$

Если расписать это векторное равенство покомпонентно, мы получим однородную систему n линейных уравнений с $k + m$ неизвестными $t_1, t_2, \dots, t_k, s_1, s_2, \dots, s_m$. Основная матрица этой системы будет иметь размер $n \times (k + m)$ и будет выглядеть следующим образом: в ее первых k столбцах записаны векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, а в последних m столбцах — векторы $-\mathbf{b}_1, -\mathbf{b}_2, \dots, -\mathbf{b}_m$.

Если $(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0, s_1^0, s_2^0, \ldots, s_m^0)$ — частное решение системы (11), то выполнено равенство

$$t_1^0\mathbf{a}_1 + t_2^0\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k^0\mathbf{a}_k = s_1^0\mathbf{b}_1 + s_2^0\mathbf{b}_2 + \cdots + s_m^0\mathbf{b}_m \qquad (12)$$

и вектор, стоящий в каждой из частей этого равенства, лежит в $M_1 \cap M_2$. При этом, как легко проверить, векторам из фундаментального набора решений системы (11) соответствуют векторы из базиса $M_1 \cap M_2$. Таким образом, алгоритм нахождения базиса $M_1 \cap M_2$ имеет следующий вид.

Алгоритм нахождения базиса пересечения подпространств

Если система (11) имеет единственное решение, то $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$ и базиса $M_1 \cap M_2$ не существует. В противном случае найдем фундаментальную систему решений системы (11). Для каждого вектора из этого набора вычислим вектор, стоящий в левой (или, что даст тот же самый результат, в правой) части равенства (12). Полученные векторы и образуют базис пространства $M_1 \cap M_2$.

Приведем пример. Пусть M_1 и M_2 — подпространства в $\mathbb{R}_4$, порожденные векторами $\mathbf{a}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,1,0)$, $\mathbf{a}_3 = (0,0,1,1)$ и $\mathbf{b}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{b}_2 = (1,0,1,-1)$, $\mathbf{b}_3 = (1,0,2,0)$ соответственно. Используя алгоритм, указанный в лекции 7, легко проверить, что наборы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ линейно независимы. В силу леммы 1 из лекции 8 они являются базисами подпространств M_1 и M_2 соответственно. Система (11) в данном случае имеет вид $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + t_3\mathbf{a}_3 - s_1\mathbf{b}_1 - s_2\mathbf{b}_2 - s_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$. Выпишем основную матрицу этой системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выпишем систему, соответствующую полученной ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} t_1 \quad - s_1 - s_2 - s_3 = 0, \\ t_2 \quad + s_2 + s_3 = 0, \\ t_3 - s_1 - 2s_2 - 3s_3 = 0, \\ 3s_2 + 3s_3 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Найдем фундаментальный набор решений этой системы. Ясно, что она имеет две свободные неизвестные — s_1 и s_3. Положим сначала $s_1 = 1$ и $s_3 = 0$. Из четвертого уравнения имеем $s_2 = 0$, из третьего — $t_3 = 1$, из второго — $t_2 = 0$, из первого — $t_1 = 1$. Положим теперь $s_1 = 0$ и $s_3 = 1$. Тогда из уравнений нашей системы последовательно вытекает, что $s_2 = -1$, $t_3 = 1$, $t_2 = 0$, $t_1 = 0$. Итак, фундаментальная система решений системы (13) состоит из векторов (1,0,1,1,0,0) и $(0, 0, 1, 0, -1, 1)$. Каждому из этих векторов соответствует вектор из $M_1 \cap M_2$. Вектору $(1, 0, 1, 1, 0, 0)$ соответствует вектор $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$, а вектору $(0, 0, 1, 0, -1, 1)$ — вектор $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = (0, 0, 1, 1)$. Следовательно, в качестве базиса пространства $M_1 \cap M_2$ можно взять набор векторов $(1, 1, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$.