UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
Instituto de Matemática e Computação

SMAC03 – Grafos

2. Conceitos de Teoria dos Grafos

Isomorfismo e Planaridade

Rafael Frinhani
frinhani@unifei.edu.br

1º Semestre de 2025

OBJETIVOS

Apresentar os conceitos e definições de isomorfismo de grafos e sua relação com grafos planares. Apresentar os conceitos e aplicações de grafos planares, bem como o uso de teoremas para um teste básico de planaridade de grafos.

AGENDA

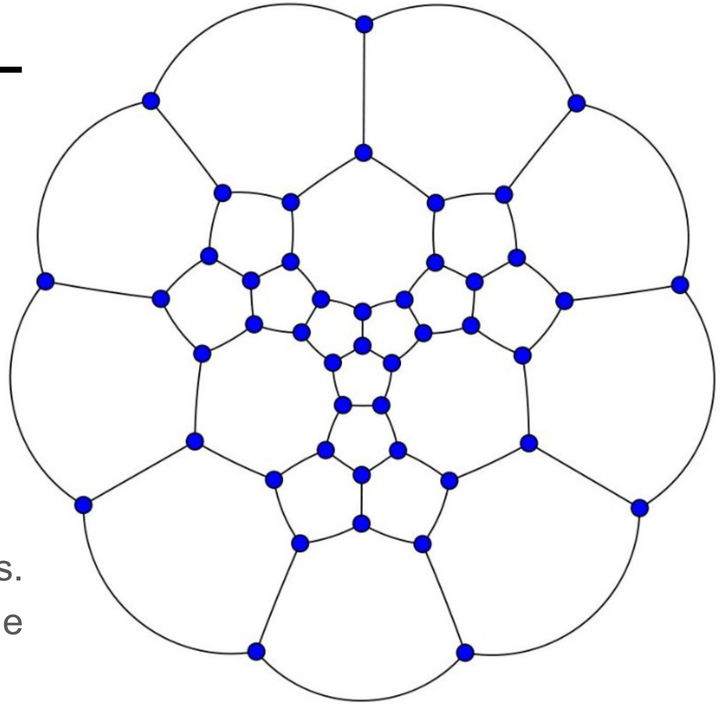
2. Teoria dos Grafos

2.3. Isomorfismo

Conceitos e definições, Relações de Equivalência, Teste de Isomorfismo entre grafos, Invariantes, Isomorfismo em grafo simples.

2.4. Planaridade

Conceitos de grafo plano e grafo planar, aplicações. Teorema de Euler e variantes. Algoritmos para teste de planaridade.

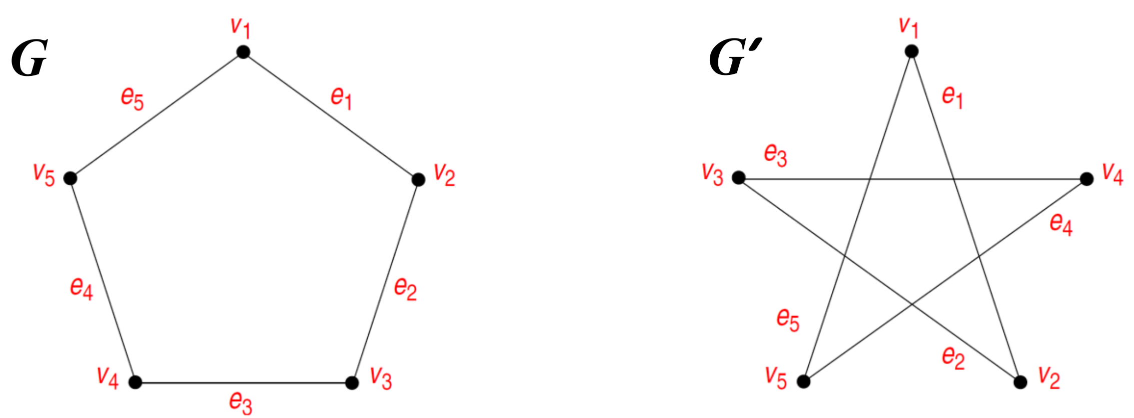


Grafos Isomorfos

Dois grafos podem ser diferentes em sua representação visual mas ainda serem iguais na sua definição formal. Estruturas que são iguais são ditas isomorfas.

Isomorfo, do grego *isos* (igual) + *morphé* (forma, composição).

Exemplo: Os grafos G e G' embora visualmente diferentes são isomorfos.

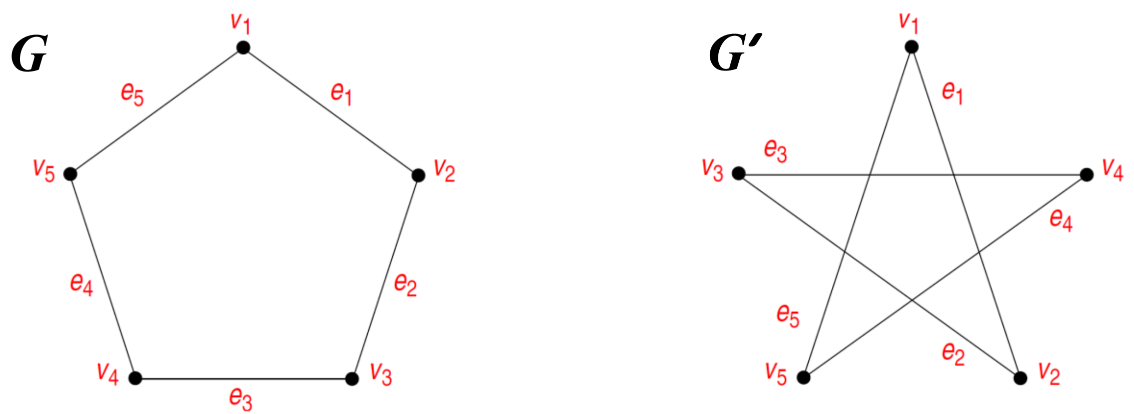


Grafos Isomorfos

Dois grafos podem ser diferentes em sua representação visual mas ainda serem iguais na sua definição formal. Estruturas que são iguais são ditas isomorfas.

Isomorfo, do grego *isos* (igual) + *morphé* (forma, composição).

Exemplo: Os grafos G e G' embora visualmente diferentes são isomorfos.



Para mostrar que duas estruturas são isomorfas é necessário obter a bijeção entre seus elementos. No grafo, isso quer dizer que deve existir uma correspondência entre os vértices e as arestas, mesmo que estejam rotulados com nomes diferentes.

Grafos Isomorfos

Formalmente: Sejam os grafos G e G' com conjuntos de vértices $V(G)$ e $V(G')$ e com conjuntos de arestas $E(G)$ e $E(G')$, respectivamente. O grafo G é isomorfo ao grafo G' se, e somente se, existem correspondências um-para-um

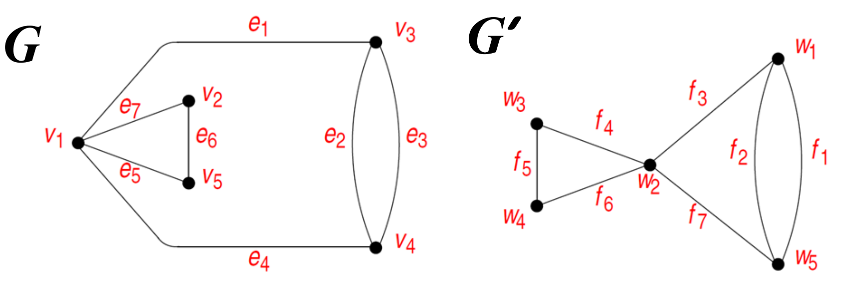
$$g : V(G) \to V(G')$$

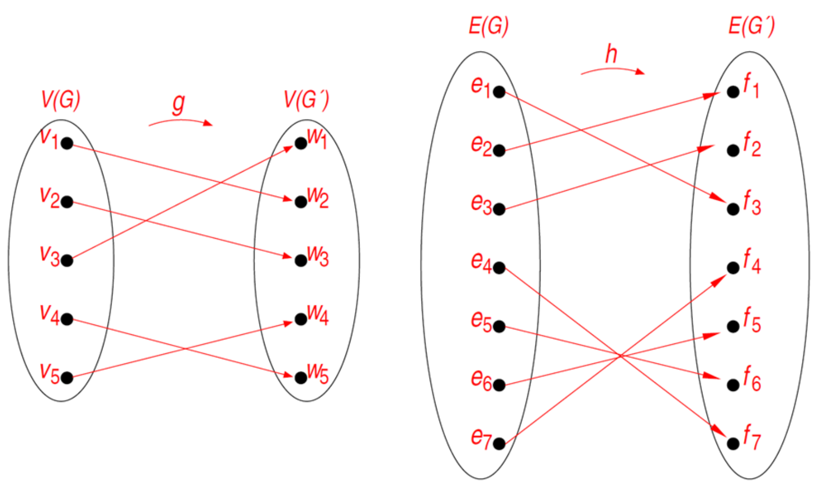
$$h : E(G) \to E(G')$$

Que preservam as funções aresta-vértice de G e G' no sentido que

$$\forall \; v \in V(G) \wedge e \in E(G)$$

v é um vértice terminal de $e \Leftrightarrow g(v)$ é um vértice terminal de $h(e)$





Grafos Isomorfos

Formalmente: Sejam os grafos G e G' com conjuntos de vértices $V(G)$ e $V(G')$ e com conjuntos de arestas $E(G)$ e $E(G')$, respectivamente. O grafo G é isomorfo ao grafo G' se, e somente se, existem correspondências um-para-um

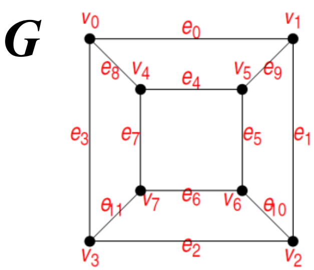
$$g : V(G) \to V(G')$$

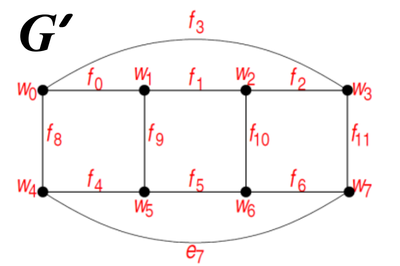
$$h : E(G) \to E(G')$$

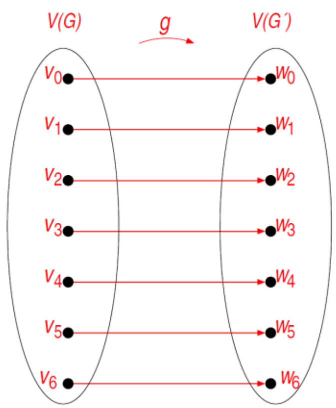
Que preservam as funções aresta-vértice de G e G' no sentido que

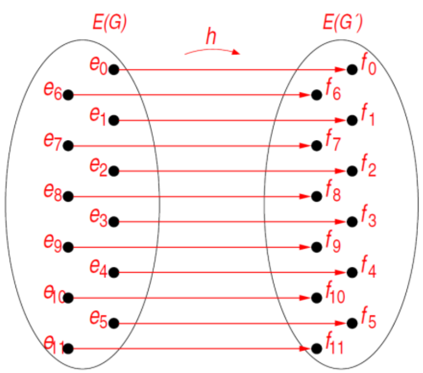
$$\forall \ v \in V(G) \wedge e \in E(G)$$

v é um vértice terminal de $e \Leftrightarrow g(v)$ é um vértice terminal de $h(e)$





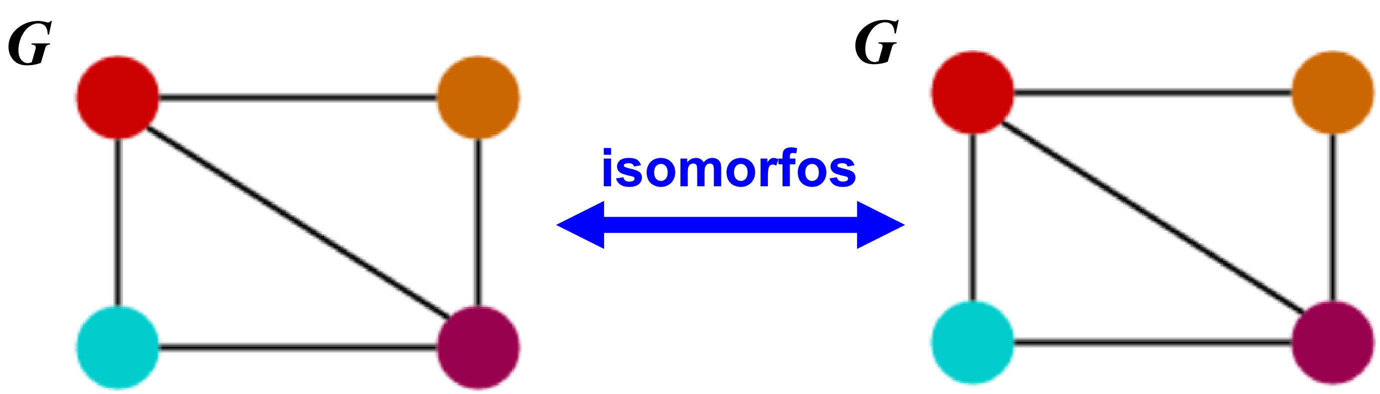




Relações de Equivalência

Uma relação binária em um conjunto S que seja reflexiva, simétrica e transitiva é chamada de uma relação de equivalência em S. Isomorfismo de grafos é uma relação de equivalência no conjunto de grafos:

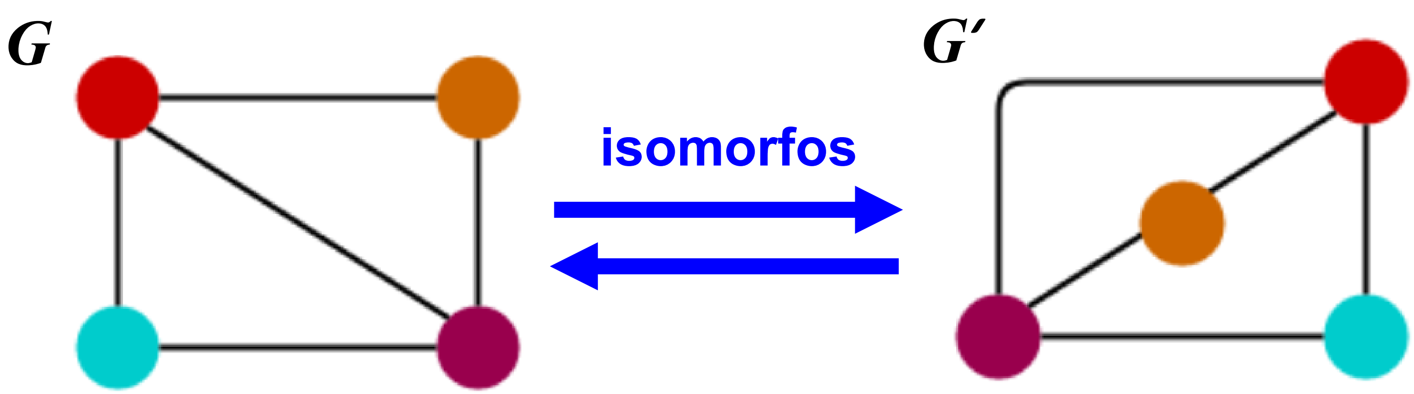
- **Reflexiva**: Um grafo é isomorfo a si próprio.



Relações de Equivalência

Uma relação binária em um conjunto S que seja reflexiva, simétrica e transitiva é chamada de uma relação de equivalência em S. Isomorfismo de grafos é uma relação de equivalência no conjunto de grafos:

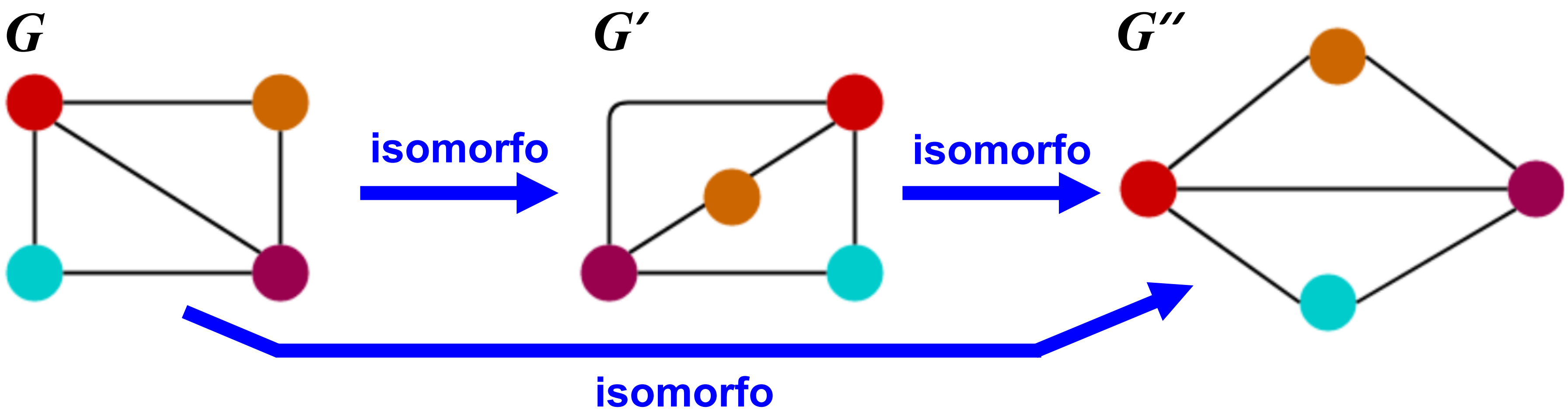
- **Reflexiva**: Um grafo é isomorfo a si próprio.
- **Simétrica**: Se um grafo G é isomorfo a um grafo G' então G' é isomorfo a G.



Relações de Equivalência

Uma relação binária em um conjunto S que seja reflexiva, simétrica e transitiva é chamada de uma relação de equivalência em S. Isomorfismo de grafos é uma relação de equivalência no conjunto de grafos:

- **Reflexiva**: Um grafo é isomorfo a si próprio.
- **Simétrica**: Se um grafo G é isomorfo a um grafo G' então G' é isomorfo a G.
- **Transitiva**: Se um grafo G é isomorfo a G' e G' é isomorfo a G'' então G é isomorfo a G''.



Teste de Isomorfismo entre grafos

Um algoritmo básico para verificar se os grafos G e G' são isomorfos gera todas as funções g e h e determina se elas preservam as funções aresta vértice de G e G''.

Problema: Obter todas as funções é uma estratégia exaustiva. Se G e G' têm cada um $|V|$ vértices e $|E|$ arestas, a quantidade de funções g é $V!$ e a de funções h é $E!$, ocasionando em um total de $V! \times E!$ funções.

Teste de Isomorfismo entre grafos

Um algoritmo básico para verificar se os grafos G e G' são isomorfos gera todas as funções g e h e determina se elas preservam as funções aresta vértice de G e G''.

Problema: Obter todas as funções é uma estratégia exaustiva. Se G e G' têm cada um $|V|$ vértices e $|E|$ arestas, a quantidade de funções g é $V!$ e a de funções h é $E!$, ocasionando em um total de $V! \times E!$ funções.

Ex. Um grafo com $|V| = |E| = 20$.

- São $20! \times 20! \approx 5{,}9 \times 10^{36}$ pares de vértices e arestas para verificar.
- Assumindo $1\mu s$ para encontrar e calcular cada par seria necessário cerca de $1{,}9 \times 10^{23}$ anos para obter o resultado através de um computador pessoal.

Invariantes para o Isomorfismo

Cada uma das propriedades a seguir é uma invariante para a existência do isomorfismo de dois grafos G e G', sendo n a quantidade de vértices, m a de arestas e k o grau:

1. Tem n vértices
2. Tem m arestas
3. Tem um vértice de grau k
4. Tem m vértices de grau k
5. Tem um circuito de tamanho k
6. Tem um circuito simples de tamanho k
7. Tem m circuitos simples de tamanho k
8. É conexo
9. Tem um circuito Euleriano
10. Tem um circuito Hamiltoniano

Dois grafos isomorfos possuem as mesmas propriedades.

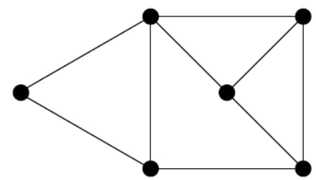
Invariantes para o Isomorfismo

Cada uma das propriedades a seguir é uma invariante para a existência do isomorfismo de dois grafos G e G', sendo n a quantidade de vértices, m a de arestas e k o grau:

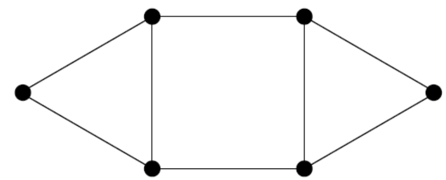
1. Tem n vértices
2. Tem m arestas
3. Tem um vértice de grau k
4. Tem m vértices de grau k
5. Tem um circuito de tamanho k
6. Tem um circuito simples de tamanho k
7. Tem m circuitos simples de tamanho k
8. É conexo
9. Tem um circuito Euleriano
10. Tem um circuito Hamiltoniano

Dois grafos isomorfos possuem as mesmas propriedades.

Exemplo: grafos não isomorfos

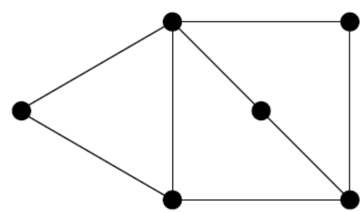


G

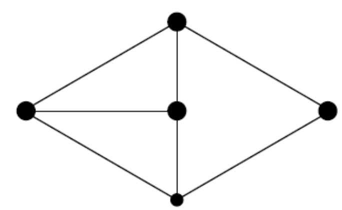


G´

Não isomorfos. *G* tem 9 arestas e *G′* tem 8.



H



H´

Não isomorfos. Além de *H* ter mais vértices que *H*’, possui um vértice de grau 4 que *H*’ não tem.

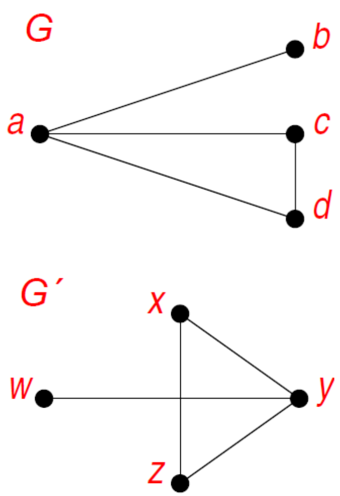
Isomorfismo em Grafo Simples

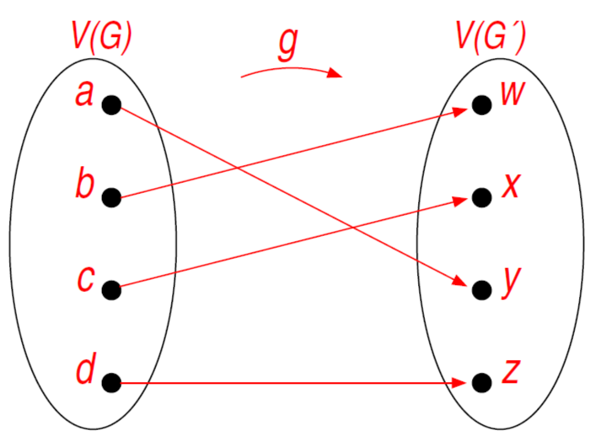
Dois grafos simples $G(V, E)$ e $G'(V', E')$ são considerados isomorfos se existe uma bijeção $f : G \to G'$, tal que, quaisquer que sejam os vértices v_i e v_j de G, eles são adjacentes se, e somente se, $f(v_i)$ e $f(v_j)$ são adjacentes. A função f é chamada um isomorfismo do grafo G no grafo G'.

Isomorfismo em Grafo Simples

Dois grafos simples $G(V, E)$ e $G'(V', E')$ são considerados isomorfos se existe uma bijeção $f : G \to G'$, tal que, quaisquer que sejam os vértices v_i e v_j de G, eles são adjacentes se, e somente se, $f(v_i)$ e $f(v_j)$ são adjacentes. A função f é chamada um isomorfismo do grafo G no grafo G'.

Para provar que dois grafos simples são isomorfos é necessário encontrar uma bijeção e mostrar que a propriedade da adjacência é preservada.



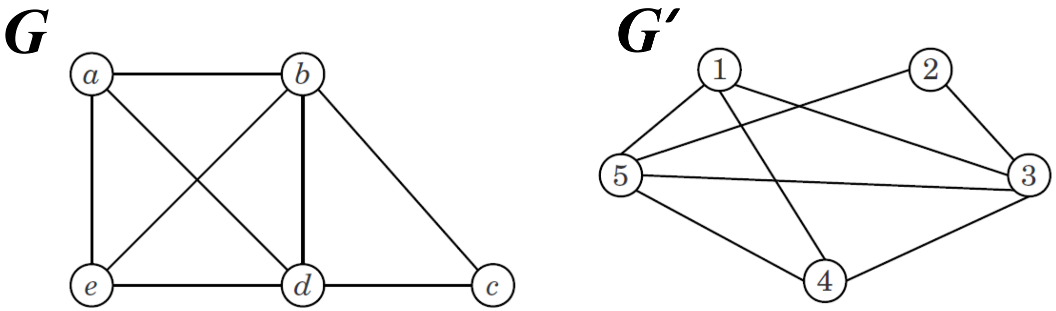


A função g preserva a função aresta-vértice de G e de G':

Arestas de G	Arestas de G'
ab	$yw = \{g(a), g(b)\}$
ac	$yx = \{g(a), g(c)\}$
ad	$yz = \{g(a), g(d)\}$
cd	$xz = \{g(c), g(d)\}$

Isomorfismo em Grafo Simples

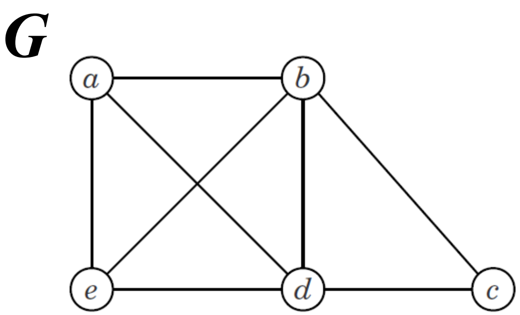
Exemplo de Estratégia: Verificar as propriedades do número de vértices, arestas, componentes e vértices do mesmo grau.

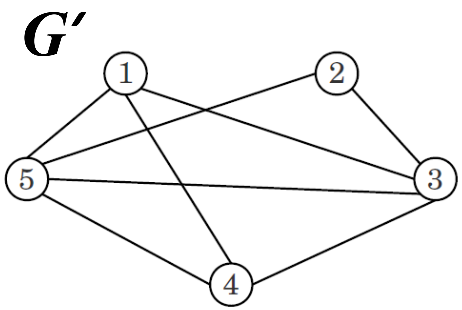


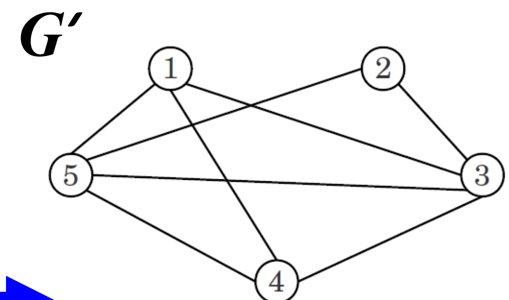
Isomorfismo em Grafo Simples

Exemplo de Estratégia: Verificar as propriedades do número de vértices, arestas, componentes e vértices do mesmo grau.

Em seguida efetuar as combinações das matrizes de adjacência dos grafos, verificando se são semelhantes:







	a	*b*	*c*	*d*	*e*
a	0	1	0	1	1
b	1	0	1	1	1
c	0	1	0	1	0
d	1	1	1	0	1
e	1	1	0	1	0

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	1
2	0	0	1	0	1
3	1	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	1	1	1	1	0

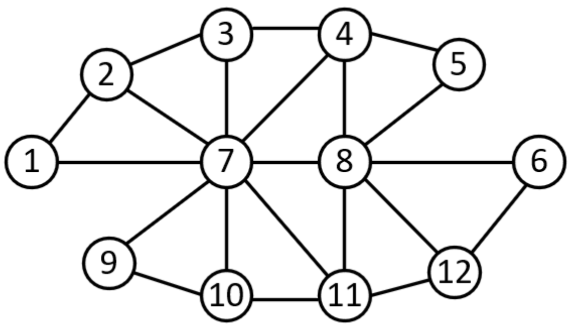
	1	5	2	3	4
1	0	1	0	1	1
5	1	0	1	1	1
2	0	1	0	1	0
3	1	1	1	0	1
4	1	1	0	1	0

Com a permutação da coluna 5 de G' as matrizes de adjacência dos grafos G e G' ficam idênticas mesmo que os rótulos dos vértices sejam diferentes.

2.4. Planaridade de Grafos

Conceitos – Grafo Plano e Grafo Planar

Um grafo plano é um grafo ou pseudografo, direcionados ou não, desenhado em uma superfície plana de tal modo que suas arestas não se cruzam (não há interseção entre elas).



grafo plano

O desenho do grafo no plano é chamado imersão plana ou um mapa de G.

Conceitos – Grafo Plano e Grafo Planar

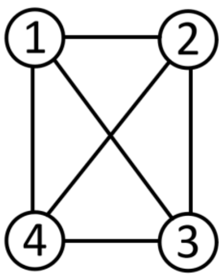
Um grafo plano é um grafo ou pseudografo, direcionados ou não, desenhado em uma superfície plana de tal modo que suas arestas não se cruzam (não há interseção entre elas).

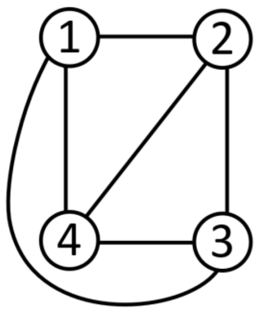
grafo plano

O desenho do grafo no plano é chamado imersão plana ou um mapa de G. Um grafo planar é imersível no plano.

Grafo planar é um grafo ou pseudografo isomorfo a um grafo plano, podendo ser desenhado como um grafo plano (do contrário é um grafo não-planar).

Um grafo que possui cruzamento de arestas é considerado um grafo planar se for possível desenhá-lo de modo que as arestas não se cruzem.





Grafo K_4 é planar

grafo plano

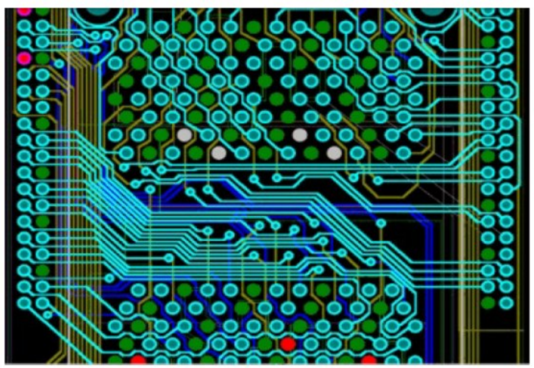
Grafo Planar – Aplicações

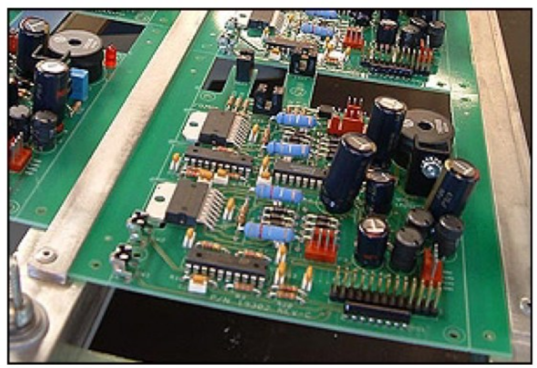
O interesse nos grafos sem cruzamento de arestas deve-se a utilidade prática, como por exemplo desenho de circuitos VLSI (*Very Large Scale Integration*), plantas de circuitos impressos, segmentação de programas, análise de redes em engenharia elétrica, interfaces gráficas, isomorfismo de estruturas químicas, etc.

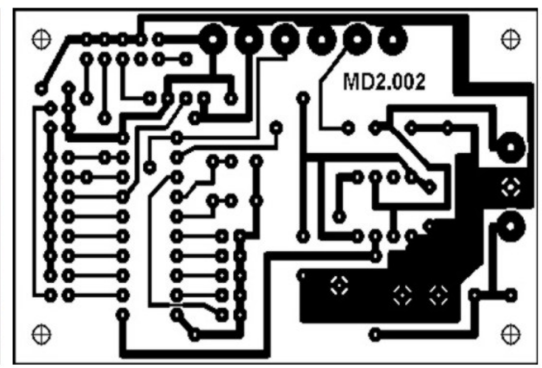
Grafo Planar – Aplicações

O interesse nos grafos sem cruzamento de arestas deve-se a utilidade prática, como por exemplo desenho de circuitos VLSI (*Very Large Scale Integration*), plantas de circuitos impressos, segmentação de programas, análise de redes em engenharia elétrica, interfaces gráficas, isomorfismo de estruturas químicas, etc.

Exemplo: VLSI e placas de circuitos impressos





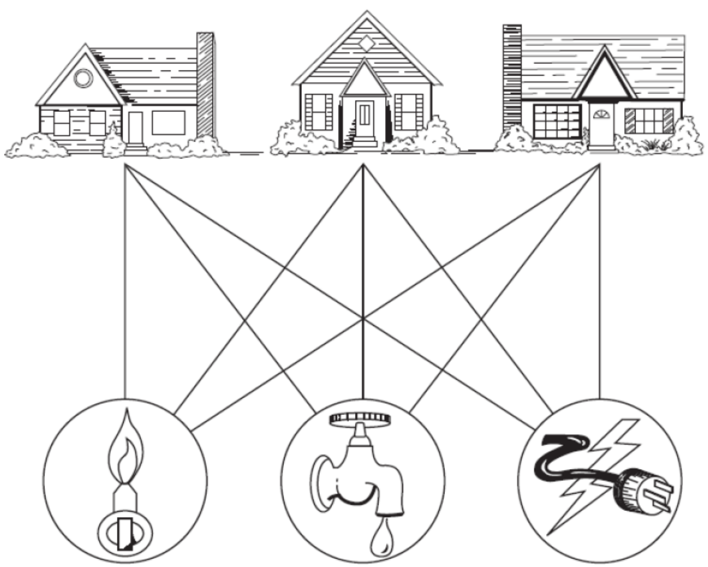


- **Vértices** correspondem as portas lógicas e outros componentes eletrônicos (ex. capacitores, resistores).
- **Arestas** representam filamentos que conectam portas lógicas e componentes.
- O objetivo é encontrar um <u>projeto do circuito sem que ocorra o cruzamento dos filamentos</u>.

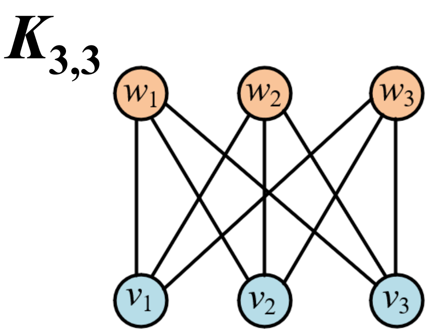
Grafo Planar – Aplicações

O interesse nos grafos sem cruzamento de arestas deve-se a utilidade prática, como por exemplo desenho de circuitos VLSI (*Very Large Scale Integration*), plantas de circuitos impressos, segmentação de programas, análise de redes em engenharia elétrica, interfaces gráficas, isomorfismo de estruturas químicas, etc.

Exemplo: Infraestrutura de Serviços



Considere o problema de conectar três casas a cada uma de três infraestruturas (gás, água, energia). É possível fazer essas ligações sem que elas se cruzem?



grafo bipartido $K_{3,3}$ (completo e regular)

O problema pode ser modelado por um grafo bipartido $K_{3,3}$.

O grafo $K_{3,3}$ é um grafo planar ou não-planar?

Teorema 1: Relação de Euler (REV)

Euler constatou que a representação planar do grafo divide o plano no mesmo número de regiões. Ele encontrou uma relação entre o número de regiões (R), número de vértices (V) e número de arestas (E) de um grafo planar.

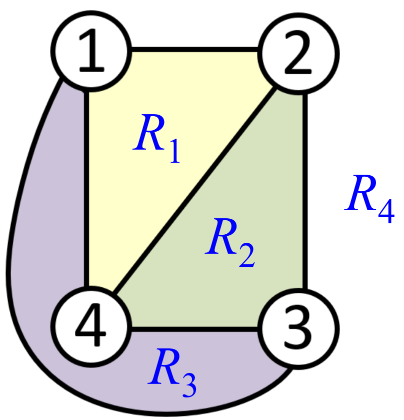
A representação gráfica de um grafo simples, conexo e planar divide o plano em regiões totalmente fechadas e uma região infinita exterior.

Teorema 1: Relação de Euler (REV)

Euler constatou que a representação planar do grafo divide o plano no mesmo número de regiões. Ele encontrou uma relação entre o número de regiões (R), número de vértices (V) e número de arestas (E) de um grafo planar.

A representação gráfica de um grafo simples, conexo e planar divide o plano em regiões totalmente fechadas e uma região infinita exterior.

Exemplo: grafo K_4



Representação plana do grafo K_4

Relação de Euler para um grafo Planar

$$\boxed{R = E - V + 2}$$

$$R = 6 - 4 + 2$$

$$R = 2 + 2$$

$$R = 4 \text{ regiões}$$

Pode existir diversos modos desenhar o grafo no plano, mas o número de regiões permanecerá o mesmo.

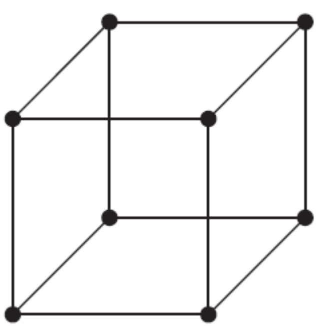
R corresponde a quantidade de regiões (faces) considerando a representação planar do grafo.

Teorema 1: Relação de Euler (REV)

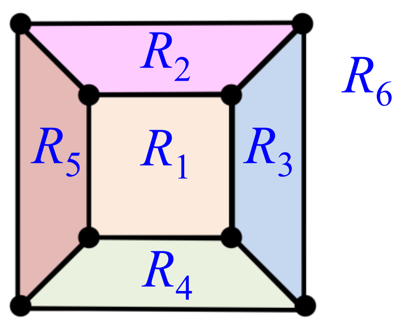
Euler constatou que a representação planar do grafo divide o plano no mesmo número de regiões. Ele encontrou uma relação entre o número de regiões (R), número de vértices (V) e número de arestas (E) de um grafo planar.

A representação gráfica de um grafo simples, conexo e planar divide o plano em regiões totalmente fechadas e uma região infinita exterior.

Exemplo: verificação do grafo cubo



grafo cubo



Representação planar do grafo cubo

Relação de Euler para um grafo Planar

$$\boxed{R = E - V + 2}$$

$$R = 12 - 8 + 2$$

$$R = 4 + 2$$

$$R = 6 \text{ regiões}$$

Teorema 1: Relação de Euler (REV)

Demonstração por Indução da validade da relação:

$$R = E - V + 2$$

1ª. Em um grafo com um **único vértice** (isolado).

$$1 = 0 - 1 + 2$$

$$\boxed{1 = 1} \quad \textbf{OK}$$

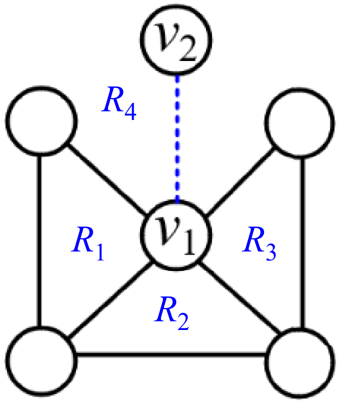
Teorema 1: Relação de Euler (REV)

Demonstração por Indução da validade da relação:

1ª. Em um grafo com um **único vértice** (isolado).

$$R = E - V + 2$$
$$1 = 0 - 1 + 2$$
$$\boxed{1 = 1}$$ **OK**

2ª. Adicionar um **novo vértice** v_2 e conectá-lo a um vértice existente v_1 por uma aresta que não corte nenhuma aresta existente.



$$R = E - V + 2$$
$$4 = 8 - 6 + 2$$
$$4 = 2 + 2$$
$$\boxed{4 = 4}$$ **OK**

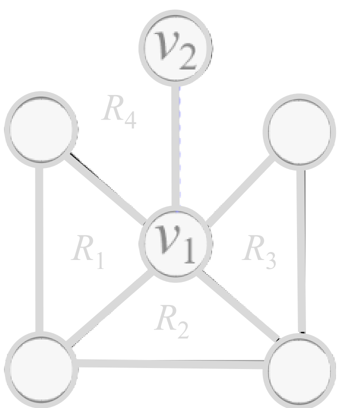
Teorema 1: Relação de Euler (REV)

Demonstração por Indução da validade da relação:

1ª. Em um grafo com um **único vértice** (isolado).

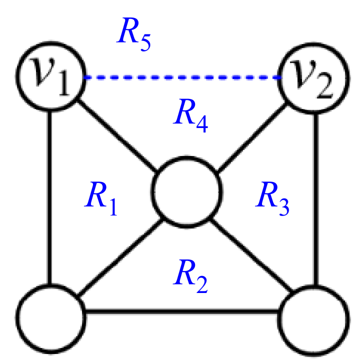
$$R = E - V + 2$$
$$1 = 0 - 1 + 2$$
$$\boxed{1 = 1} \quad \textbf{OK}$$

2ª. Adicionar um **novo vértice** v_2 e conectá-lo a um vértice existente v_1 por uma aresta que não corte nenhuma aresta existente.



$$R = E - V + 2$$
$$4 = 8 - 6 + 2$$
$$4 = 2 + 2$$
$$\boxed{4 = 4} \quad \textbf{OK}$$

3ª. Adicionar uma **nova aresta** ligando dois vértices pré-existentes v_1 e v_2 sem que ela corte nenhuma aresta existente.



$$R = E - V + 2$$
$$5 = 8 - 5 + 2$$
$$5 = 3 + 2$$
$$\boxed{5 = 5} \quad \textbf{OK}$$

Teorema 2: Pelo número de arestas e vértices

Útil para provar que certos grafos não são planares. Se um grafo G é planar então é válida a relação:

$$\boxed{E \leq 3 \times V - 6}$$

Quando ocorre uma relação de igualdade, ou seja $E = 3 \times V - 6$, o grafo é denominado Maximal Planar, que é um grafo planar que não suporta mais nenhuma aresta pois se adicionada ele torna-se não-planar.

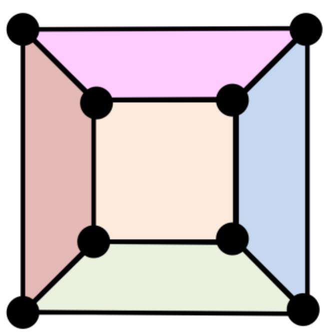
Teorema 2: Pelo número de arestas e vértices

Útil para provar que certos grafos não são planares. Se um grafo G é planar então é válida a relação:

$$\boxed{E \leq 3 \times V - 6}$$

Quando ocorre uma relação de igualdade, ou seja $E = 3 \times V - 6$, o grafo é denominado Maximal Planar, que é um grafo planar que não suporta mais nenhuma aresta pois se adicionada ele se torna não-planar.

Exemplo: verificação se o grafo cubo é planar



Representação planar do grafo cubo

$$E \leq 3 \times V - 6$$

$$12 \leq 3 \times 8 - 6$$

$$12 \leq 24 - 6$$

$$\boxed{12 \leq 18}$$ **OK**

Prova que o grafo cubo é um grafo planar

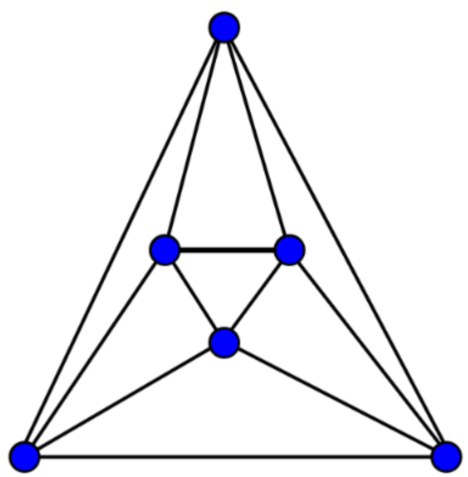
Teorema 2: Pelo número de arestas e vértices

Útil para provar que certos grafos não são planares. Se um grafo G é planar então é válida a relação:

$$\boxed{E \leq 3 \times V - 6}$$

Quando ocorre uma relação de igualdade, ou seja $E = 3 \times V - 6$, o grafo é denominado Maximal Planar, que é um grafo planar que não suporta mais nenhuma aresta pois se adicionada ele se torna não-planar.

Exemplo: verificação se o grafo abaixo é planar



$$E \leq 3 \times V - 6$$

$$12 \leq 3 \times 6 - 6$$

$$12 \leq 18 - 6$$

$$\boxed{12 = 12}$$ OK

É uma relação de igualdade, portanto o Grafo é Maximal Planar

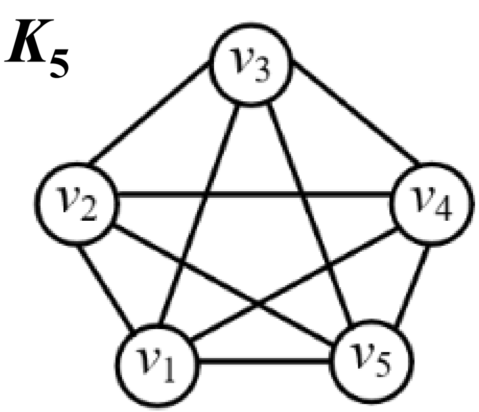
Teorema 2: Pelo número de arestas e vértices

Útil para provar que certos grafos não são planares. Se um grafo G é planar então é válida a relação:

$$\boxed{E \leq 3 \times V - 6}$$

Quando ocorre uma relação de igualdade, ou seja $E = 3 \times V - 6$, o grafo é denominado Maximal Planar, que é um grafo planar que não suporta mais nenhuma aresta pois se adicionada ele se torna não-planar.

Exemplo: verificação se o grafo K_5 é não-planar.



$$E > 3 \times V - 6$$

$$12 > 3 \times 5 - 6$$

$$12 > 15 - 6$$

$$\boxed{12 > 9}$$ **OK**

Por contraposição se $E > 3 \times V - 6$ então o grafo é **não-planar**.

K_5 é um grafo não-planar, assim como todos os demais grafos completos de grau maior que 5.

Teorema 3: Grafo Planar Bipartido

Útil para provar que certos **grafos bipartidos** são não-planares. Se um grafo bipartido G é planar então é válida a relação:

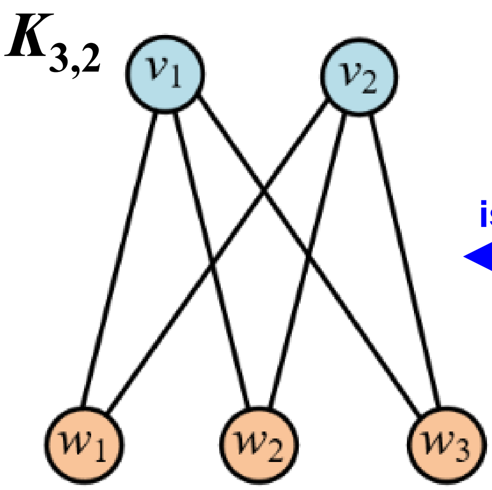
$$\boxed{E \leq 2 \times V - 4}$$

Teorema 3: Grafo Planar Bipartido

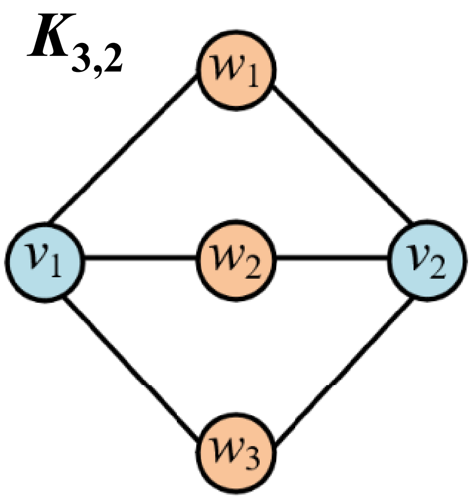
Útil para provar que certos **grafos bipartidos** são não-planares. Se um grafo bipartido G é planar então é válida a relação:

$$\boxed{E \leq 2 \times V - 4}$$

Exemplo: verificação se o grafo $K_{3,2}$ é planar.



isomorfos



$$E \leq 2 \times V - 4$$

$$6 \leq 2 \times 5 - 4$$

$$6 \leq 10 - 4$$

$$\boxed{6 = 6}$$ OK

$K_{3,2}$ é um grafo planar.

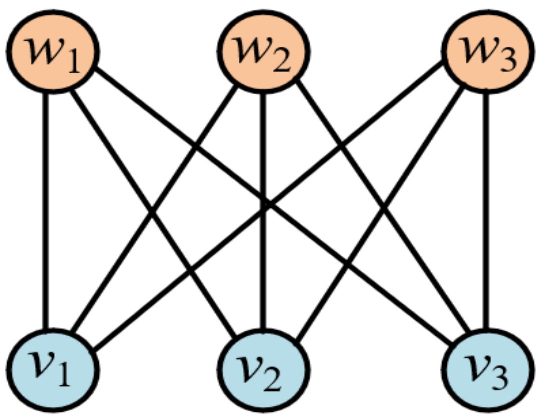
Teorema 3: Grafo Planar Bipartido

Útil para provar que certos **grafos bipartidos** são não-planares. Se um grafo bipartido G é planar então é válida a relação:

$$\boxed{E \leq 2 \times V - 4}$$

Exemplo: verificação se o grafo $K_{3,3}$ é não-planar.

$\boldsymbol{K_{3,3}}$



$$E > 2 \times V - 4$$

$$9 > 2 \times 6 - 4$$

$$9 > 12 - 4$$

$$\boxed{9 > 8}$$

OK

Por contraposição se $\boldsymbol{E > 2 \times V - 4}$ então o **grafo bipartido** é **não-planar**.

Como a contraposição é verdadeira o grafo $K_{3,3}$ é um grafo não-planar.

Outros algoritmos para teste de planaridade

ALGORITMO	ANO	IMPLEMENTAÇÃO	COMPLEXIDADE
Auslander, Parter & Goldstein (APG)	1961, 1963	original [1, 4]	cúbica
	1974	Hopcroft & Tarjan [5]	linear
Lempel, Even & Cederbaum (LEC)	1967	original [6]	quadrática
	1976	Booth & Lueker [2]	linear
	1999	Boyer & Myrvold [3]	linear
	1999	Shih & Hsu [7]	linear

Fonte: https://www.ime.usp.br/~coelho/sh/introp.html. Acessado em 10/09/2022

Os algoritmos de complexidade linear para teste de planaridade mais discutidos na literatura são APG e o de LEC.

Existem algoritmos para teste de planaridade (verifica se o grafo é ou não planar) e os de representação planar, ou embutidora, que visam posicionar os vértices do grafo no plano de forma a traçar suas arestas sem que se interceptem.

Referência: Baldas, Maria T. M. L. Reconhecimento e Traçado de Grafos Planares. Dissertação de Mestrado. Engenharia de Sistema e Computação, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro. 1995.

Outros algoritmos para teste de planaridade

ALGORITMO	ANO	IMPLEMENTAÇÃO	COMPLEXIDADE
Auslander, Parter & Goldstein (APG)	1961, 1963	original [1, 4]	cúbica
	1974	Hopcroft & Tarjan [5]	linear
Lempel, Even & Cederbaum (LEC)	1967	original [6]	quadrática
	1976	Booth & Lueker [2]	linear
	1999	Boyer & Myrvold [3]	linear
	1999	Shih & Hsu [7]	linear

Fonte: https://www.ime.usp.br/~coelho/sh/introp.html. Acessado em 10/09/2022

[1] Auslander, L., Parter, *On imbeddings graphs in the plane*, J. Math. and Mech. 10 (1961), n. 3, 517-523.

[2] Booth, K.S. & Lueker, G.S. *Testing the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms*, Journal of Computer and System Science 13 (1976), pp. 335-379.

[3] Boyer, J. & Myrvold, W. *Stop minding your P's and Q's: A simplified planar embedding algorithm*, Procedding of the Tenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (Baltimore, Maryland), ACM Special Interest Group on Algorithms and Computation Theory and SIAM Activity Group on Discrete Mathematics, ACM Press, January 1999, pp. 140-146.

[4] Goldstein, A.J., *An efficient and constructive algorithm for testing whether a graph can be embedded in a plane*, Graph and Combinatorics Conference, Dept. Math., Princeton University, (1963), pp. 16-18.

Outros algoritmos para teste de planaridade

ALGORITMO	ANO	IMPLEMENTAÇÃO	COMPLEXIDADE
Auslander, Parter & Goldstein (APG)	1961, 1963	original [1, 4]	cúbica
	1974	Hopcroft & Tarjan [5]	linear
Lempel, Even & Cederbaum (LEC)	1967	original [6]	quadrática
	1976	Booth & Lueker [2]	linear
	1999	Boyer & Myrvold [3]	linear
	1999	Shih & Hsu [7]	linear

Fonte: https://www.ime.usp.br/~coelho/sh/introp.html. Acessado em 10/09/2022

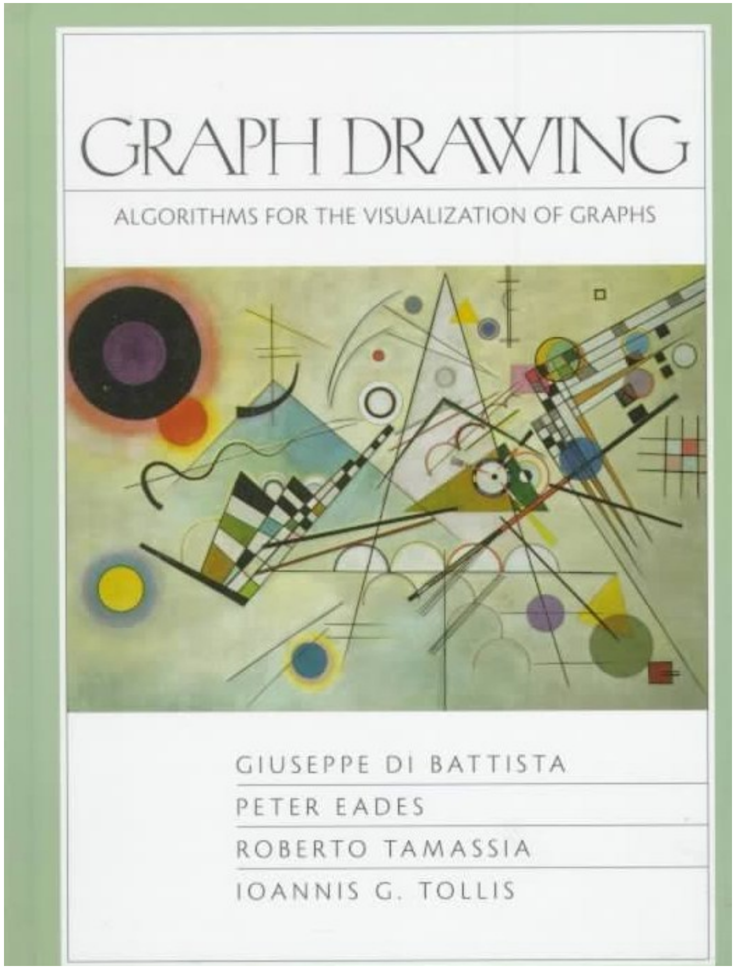
[5] Hopcroft, J. & Tarjan, R. *Efficient planarity testing*, Journal of the Association for Computing Machinery 21 (1974), n. 4, pp. 549-568.

[6] Lempel, A.; Even, S. & Cederbaum, I., *An algorithm for planarity testing of graphs*, Proceddings International Symposium on Theory of Graphs (New York) (P. Rosenstiehl, ed.), Gordon and Breach, July (1967), pp. 215-232.

[7] Shih, W.-K. & Hsu, W.-L.. *A new planarity test*, Theoretical Computer Science 223 (1999), pp. 179-191.

[8] Canfield, E.R. & Williamson, S.G. *The two basic linear time planarity algorithms: Are they the same?*, Linear and Multilinear Algebra 26 (1990), pp. 243-265.

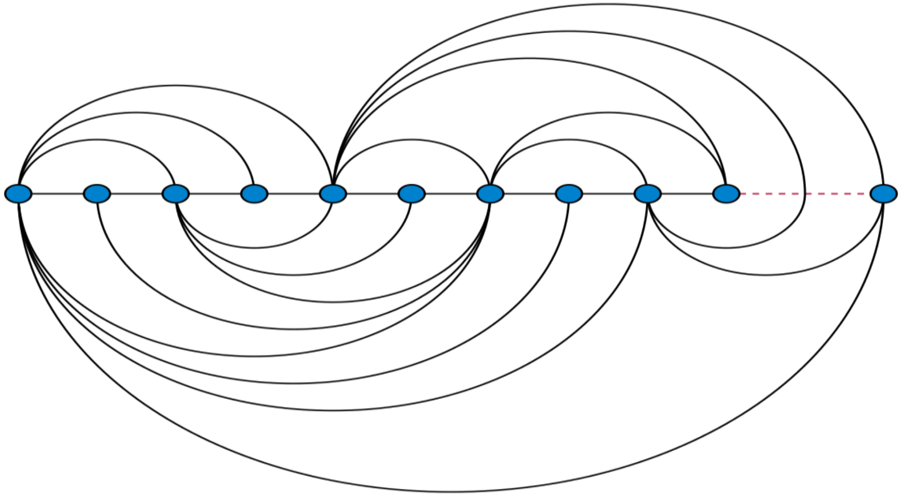
Visualização de Grafos



Graph Drawing:
Algorithms for the Visualization of Graphs

Giuseppe Di Battista, Peter Eades, Roberto Tamassia, & Ioannis G. Tollis. Prentice Hall Engineering, Science & Math, 432 pp., ISBN 0-13-301615-3.

Livro que descreve técnicas algorítmicas para a construção de desenhos de grafos.



DÚVIDAS?

Perguntas? Sugestões?