UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
Instituto de Matemática e Computação

SMAC03 – Grafos

2. Conceitos de Teoria dos Grafos
Caminho e Conectividade

Rafael Frinhani
frinhani@unifei.edu.br

1º Semestre de 2025

OBJETIVOS

Apresentar as definições e tipos de caminhamento em grafos não-direcionados e direcionados, circuito Euleriano e ciclo Hamiltoniano. Conceitos e definições de conectividade em grafos.

AGENDA

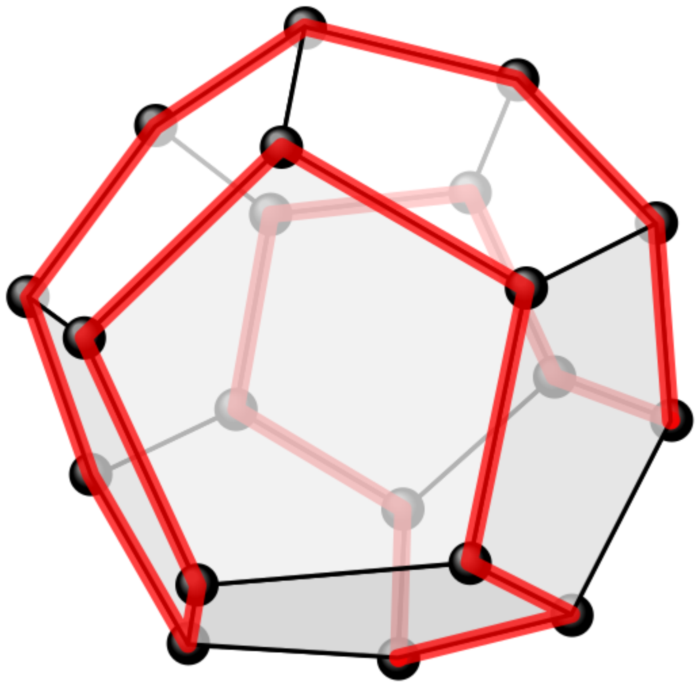
2. Teoria dos Grafos

2.5. Caminho

Contextualização, Definições (Passeio, Trajeto, Circuito, Caminho, Ciclo), Igualdade de Ciclos, Grafo Acíclico Direcionado, Identificação do Caminhamento, Fecho Transitivo (Direto e Indireto), Alcançabilidade. Circuito Euleriano, Ciclo Hamiltoniano, aplicações.

2.6. Conectividade

Definição de Conectividade (grafo conexo e desconexo) em grafos não-direcionados e em grafos direcionados (s-conexo, sf-conexo, f-conexo). Conectividade em Vértices, k-conectividade. Articulação (Vértice, Arestas). Cliques.



Contextualização

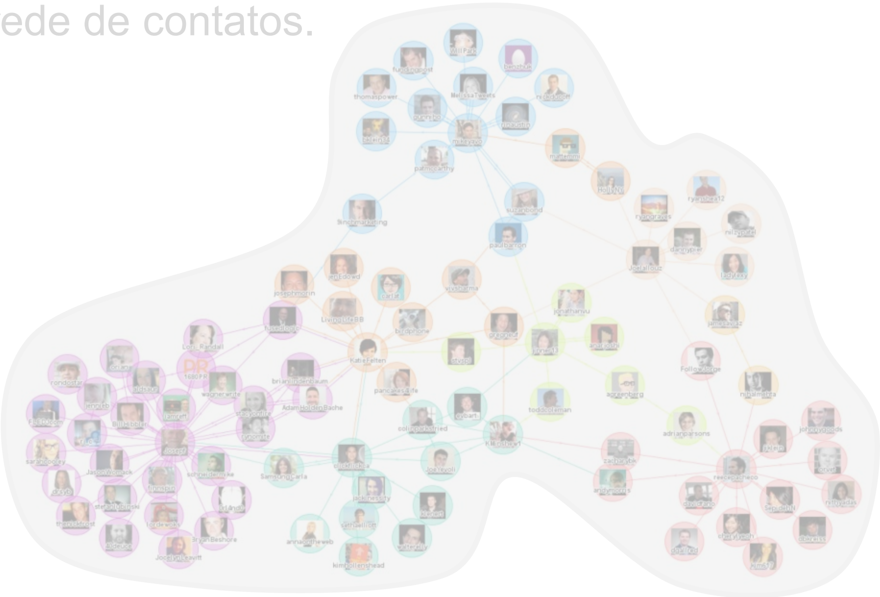
Identificar um percurso em um grafo é fundamental na determinação das possibilidades de interações entre componentes de um sistema nos mais variados contextos.

Caminhos são úteis na verificação de conexões entre indivíduos (ex. redes sociais, acadêmicas, criminais). **Ex.** ligação entre indivíduos desconhecidos considerando sua rede de contatos.

Contextualização

Identificar um percurso em um grafo é fundamental na determinação das possibilidades de interações entre componentes de um sistema nos mais variados contextos.

Caminhos são úteis na verificação de conexões entre indivíduos (ex. redes sociais, acadêmicas, criminais). **Ex.** ligação entre indivíduos desconhecidos considerando sua rede de contatos.



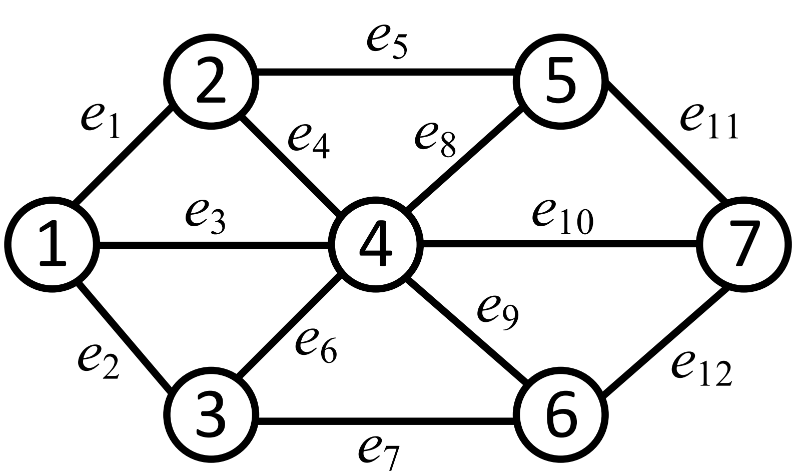
Um caminho permite verificar se um local destino pode ser alcançado a partir de uma origem. **Ex.** Planejamento de rotas de serviços de entrega, coleta de lixo, etc.

Passeio

Um passeio (*walk*) em um grafo G = (V, E) é uma sequência $W = v_0e_1v_1 \dots v_{k-1}e_kv_k$ cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G, distintos ou não, tais que v_{i-1} e v_i são vértices terminais de e_i, $1 \leq i \leq k$.

Se $v_0 = x$ e $v_k = y$ é dito que W conecta x a y sendo W referido como um passeio xy.

No passeio é permitido repetir vértices e arestas.



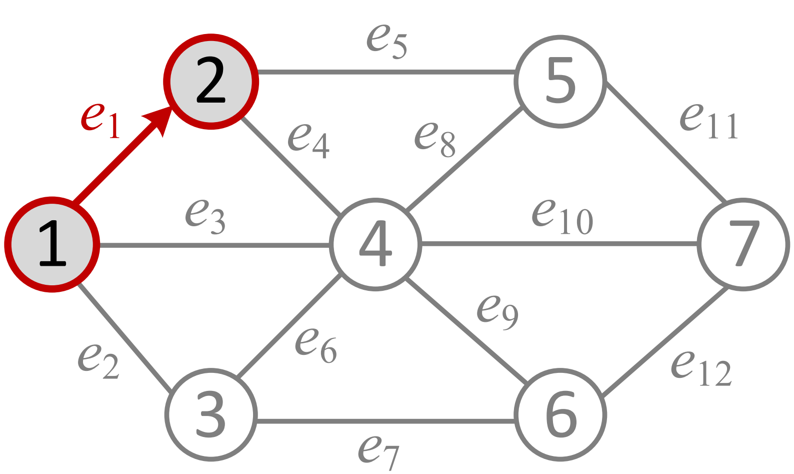
Comprimento do passeio é sua quantidade de arestas. Um passeio com n vértices possui $n - 1$ arestas.

Passeio

Um passeio (*walk*) em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $W = v_0e_1v_1 \ldots v_{k\text{-}1}e_kv_k$ cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G, distintos ou não, tais que $v_{i\text{-}1}$ e v_i são vértices terminais de e_i, $1 \leq i \leq k$.

Se $v_0 = x$ e $v_k = y$ é dito que W conecta x a y sendo W referido como um passeio xy.

No passeio é permitido repetir vértices e arestas.



Comprimento do passeio é sua quantidade de arestas. Um passeio com n vértices possui $n - 1$ arestas.

Exemplo:

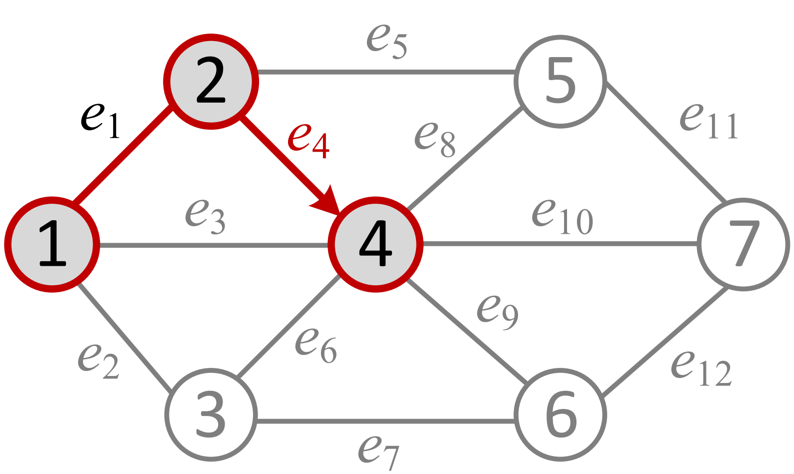
$$W = 1e_12$$

Passeio

Um passeio (*walk*) em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $W = v_0 e_1 v_1 \ldots v_{k-1} e_k v_k$ cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G, distintos ou não, tais que v_{i-1} e v_i são vértices terminais de e_i, $1 \leq i \leq k$.

Se $v_0 = x$ e $v_k = y$ é dito que W conecta x a y sendo W referido como um passeio xy.

No passeio é permitido repetir vértices e arestas.



Comprimento do passeio é sua quantidade de arestas. Um passeio com n vértices possui $n - 1$ arestas.

Exemplo:

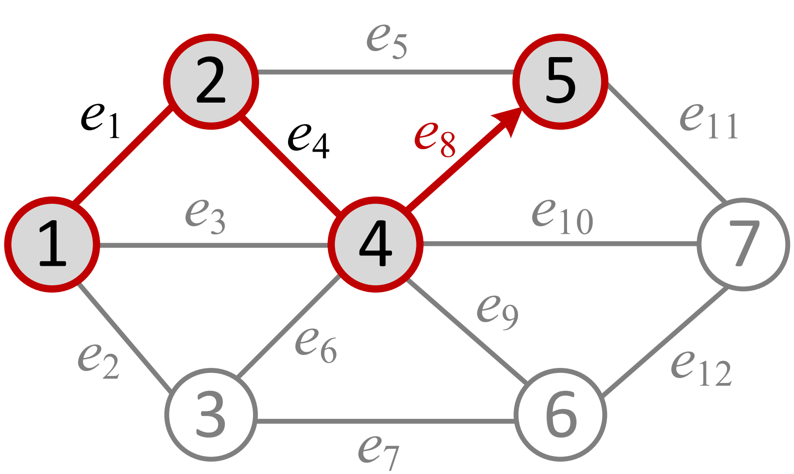
$$W = 1 e_1 2 e_4 4$$

Passeio

Um passeio (*walk*) em um grafo G = (V, E) é uma sequência $W = v_0e_1v_1 \ldots v_{k-1}e_kv_k$ cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G, distintos ou não, tais que v_{i-1} e v_i são vértices terminais de e_i, $1 \leq i \leq k$.

Se $v_0 = x$ e $v_k = y$ é dito que W conecta x a y sendo W referido como um passeio xy.

No passeio é permitido repetir vértices e arestas.



Comprimento do passeio é sua quantidade de arestas. Um passeio com n vértices possui n − 1 arestas.

Exemplo:

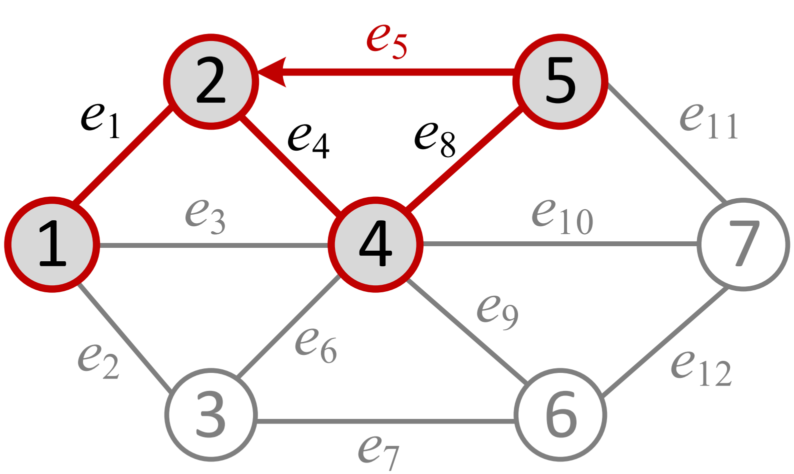
$$W = 1e_12e_44e_85$$

Passeio

Um passeio (*walk*) em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $W = v_0e_1v_1 \ldots v_{k\text{-}1}e_kv_k$ cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G, distintos ou não, tais que $v_{i\text{-}1}$ e v_i são vértices terminais de e_i, $1 \leq i \leq k$.

Se $v_0 = x$ e $v_k = y$ é dito que W conecta x a y sendo W referido como um passeio xy.

No passeio é permitido repetir vértices e arestas.



Comprimento do passeio é sua quantidade de arestas. Um passeio com n vértices possui $n - 1$ arestas.

Exemplo:

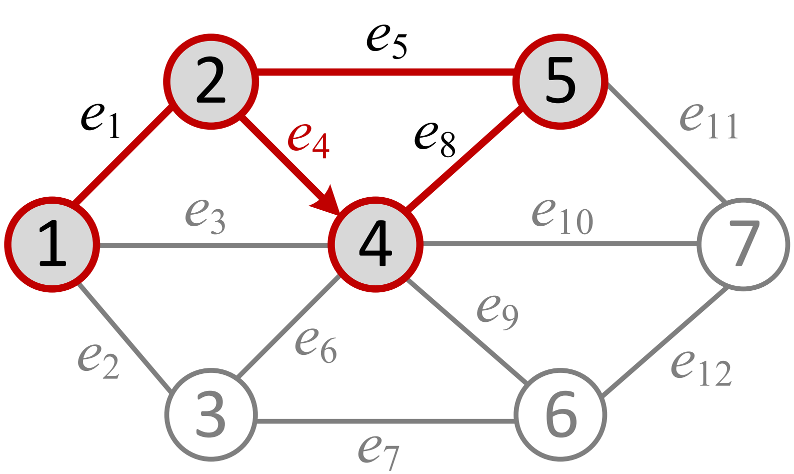
$$W = 1e_12e_44e_85e_52$$

Passeio

Um passeio (*walk*) em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $W = v_0 e_1 v_1 \ldots v_{k-1} e_k v_k$ cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G, distintos ou não, tais que v_{i-1} e v_i são vértices terminais de e_i, $1 \leq i \leq k$.

Se $v_0 = x$ e $v_k = y$ é dito que W conecta x a y sendo W referido como um passeio xy.

No passeio é permitido repetir vértices e arestas.



Comprimento do passeio é sua quantidade de arestas. Um passeio com n vértices possui $n - 1$ arestas.

Exemplo:

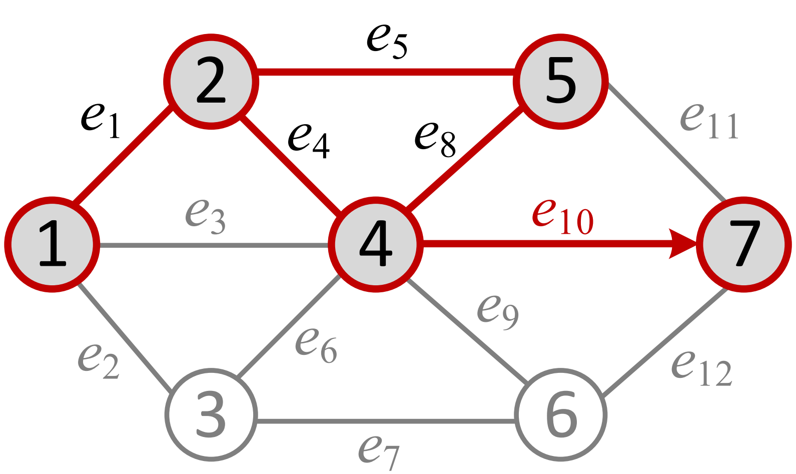
$$W = 1e_1 2e_4 4e_8 5e_5 2e_4 4$$

Passeio

Um passeio (*walk*) em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $W = v_0e_1v_1 \dots v_{k-1}e_kv_k$ cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G, distintos ou não, tais que v_{i-1} e v_i são vértices terminais de e_i, $1 \leq i \leq k$.

Se $v_0 = x$ e $v_k = y$ é dito que W conecta x a y sendo W referido como um passeio xy.

No passeio é permitido repetir vértices e arestas.



Comprimento do passeio é sua quantidade de arestas. Um passeio com n vértices possui $n - 1$ arestas.

Exemplo:

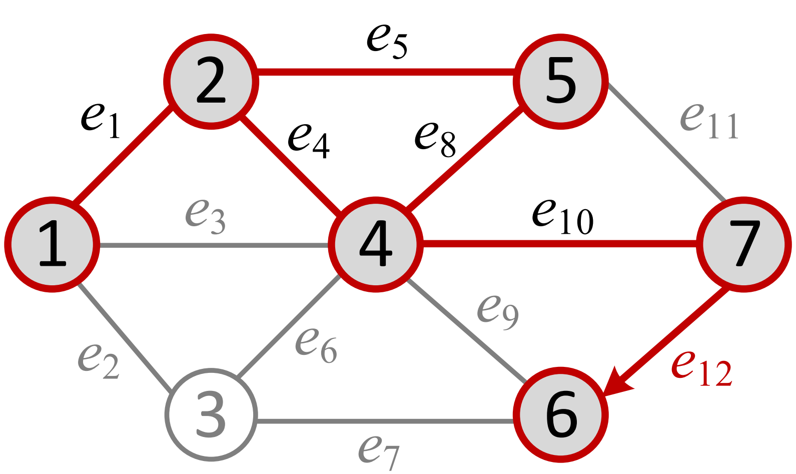
$$W = 1e_12e_44e_85e_52e_44e_{10}7$$

Passeio

Um passeio (*walk*) em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $W = v_0e_1v_1 \ldots v_{k-1}e_kv_k$ cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G, distintos ou não, tais que v_{i-1} e v_i são vértices terminais de e_i, $1 \leq i \leq k$.

Se $v_0 = x$ e $v_k = y$ é dito que W conecta x a y sendo W referido como um passeio xy.

No passeio é permitido repetir vértices e arestas.



Comprimento do passeio é sua quantidade de arestas. Um passeio com n vértices possui $n - 1$ arestas.

Exemplo:

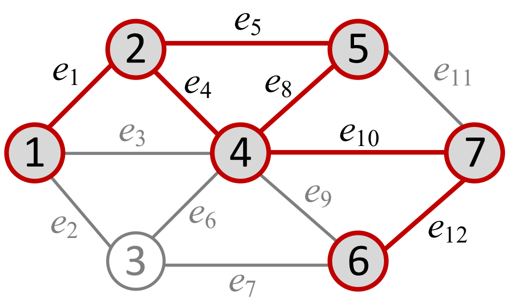
$$W = 1e_12e_44e_85e_52e_44e_{10}7e_{12}6$$

comprimento = 7

Passeio

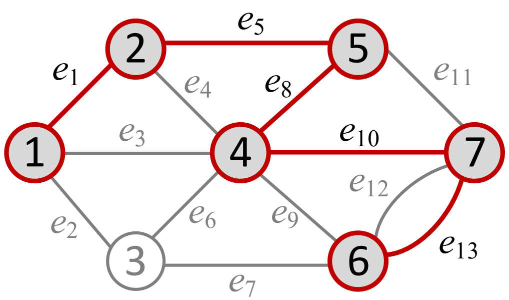
- Grafo simples: o passeio pode ser representado apenas pelos vértices.

$$W = 1\ 2\ 4\ 5\ 2\ 4\ 7\ 6$$



- Multigrafos e Pseudografos: deve-se indicar qual aresta é usada:

$$W = 1e_1 2e_5 5e_8 4e_{10} 7e_{13} 6$$



Passeio

- Grafo simples: o passeio pode ser representado apenas pelos vértices.

$W = 1\ 2\ 4\ 5\ 2\ 4\ 7\ 6$

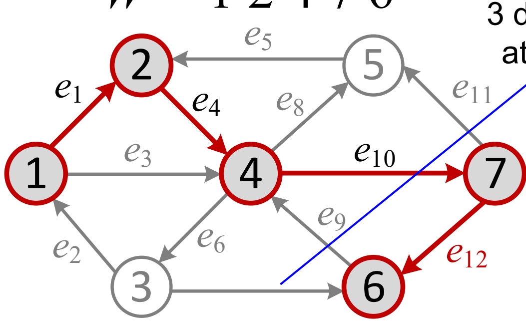
- Multigrafos e Pseudografos: deve-se indicar qual aresta é usada:

$W = 1e_1 2e_5 5e_8 4e_{10} 7e_{13} 6$

- Digrafo: deve-se respeitar o sentido dos arcos.

$W = 1\ 2\ 4\ 7\ 6$

Não é possível ir de 6 para 3 diretamente, apenas através do vértice 4.



- O caminho trivial de v para v consiste apenas do vértice v.

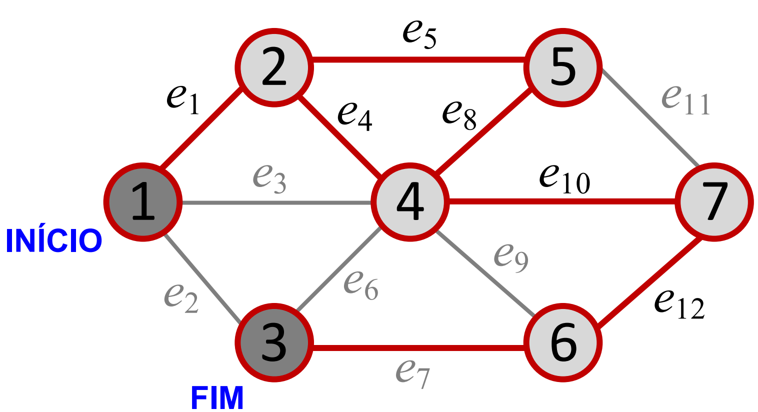
- Se existir um passeio W de x para y então é dito que y é alcançável a partir de x via W.

Passeio

Os vértices x (inicial) e y (terminal) são chamados extremidades do passeio, e os vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ denominados vértices internos.

Passeio Aberto: Quando os vértices inicial e final são diferentes.

$$W = \mathbf{1}e_1 2e_4 4e_8 5e_5 2e_4 4e_{10} 7e_{12} 6e_7 \mathbf{3}$$

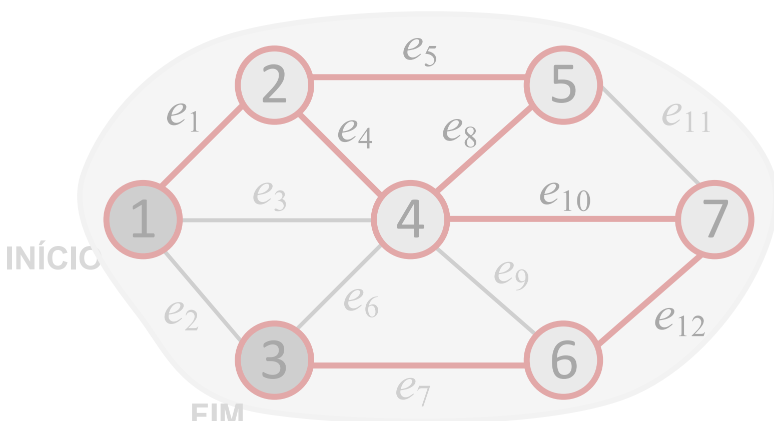


Passeio

Os vértices x (inicial) e y (terminal) são chamados extremidades do passeio, e os vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ denominados vértices internos.

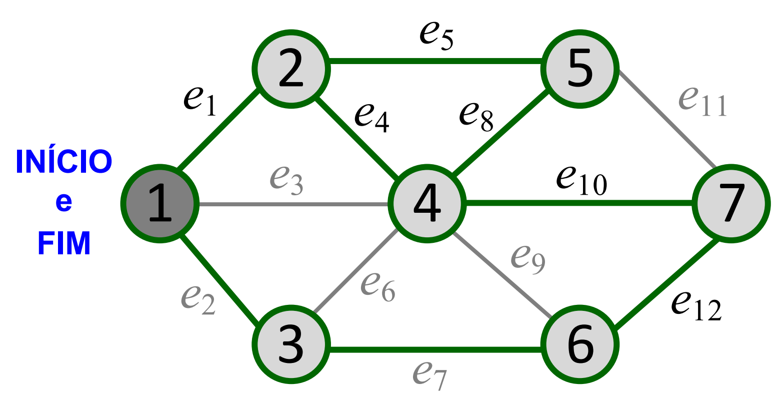
Passeio Aberto: Quando os vértices inicial e final são diferentes.

$W = \mathbf{1}e_1 2e_4 4e_8 5e_5 2e_4 4e_{10} 7e_{12} 6e_7 \mathbf{3}$



Passeio Fechado: Quando os vértices inicial e final são iguais.

$W = \mathbf{1}e_1 2e_4 4e_8 5e_5 2e_4 4e_{10} 7e_{12} 6e_7 3e_2 \mathbf{1}$

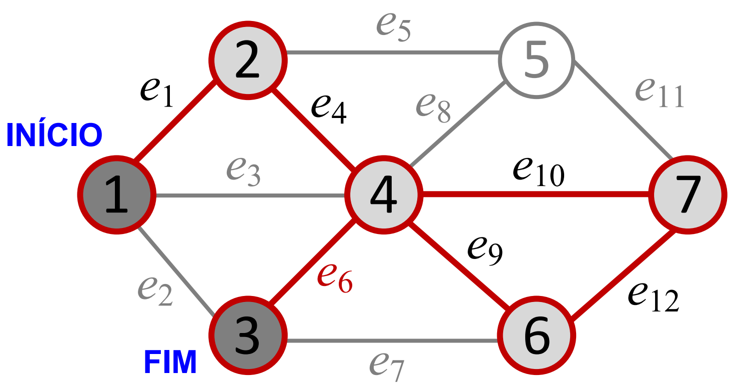


Trajeto

Um trajeto (trilha, *trail*) em um grafo G = (V, E) é uma sequência T = $v_0 e_1 v_1 \ldots v_{k-1} e_k v_k$ cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G, sendo que todas as arestas são distintas, tais que $v_{i\text{-}1}$ e v_i são vértices terminais de e_i, $1 \leq i \leq k$.

É permitido repetir vértices mas não é permitido repetir arestas.

Trajeto Aberto: Quando tem inicio e término em vértices diferentes.



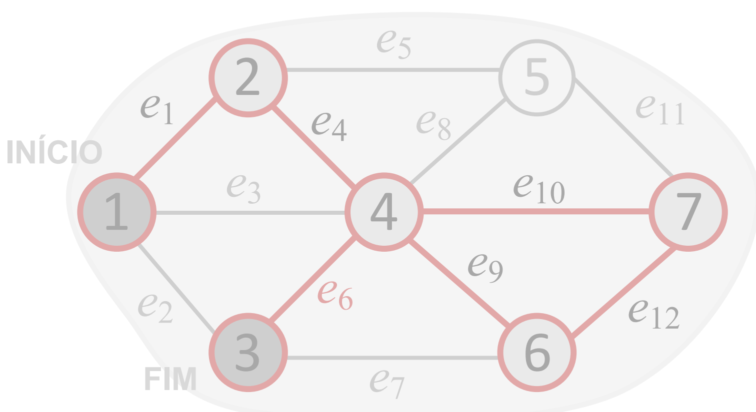
W = $\mathbf{1} e_1 2 e_4 4 e_{10} 7 e_{12} 6 e_9 4 e_6 \mathbf{3}$

Trajeto

Um trajeto (trilha, *trail*) em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $T = v_0 e_1 v_1 \ldots v_{k-1} e_k v_k$ cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G, sendo que todas as arestas são distintas, tais que v_{i-1} e v_i são vértices terminais de e_i, $1 \leq i \leq k$.

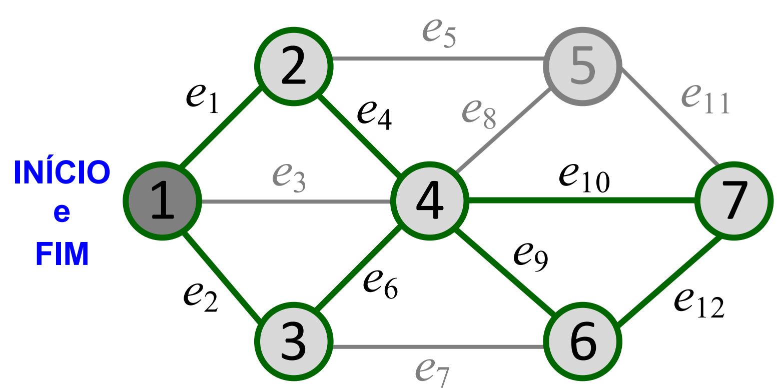
É permitido repetir vértices mas não é permitido repetir arestas.

Trajeto Aberto: Quando tem inicio e término em vértices diferentes.



$W = \mathbf{1} e_1 2 e_4 4 e_{10} 7 e_{12} 6 e_9 4 e_6 \mathbf{3}$

Trajeto Fechado (Circuito): Quando tem início e término no mesmo vértice.



$W = \mathbf{1} e_1 2 e_4 4 e_{10} 7 e_{12} 6 e_9 4 e_6 3 e_2 \mathbf{1}$

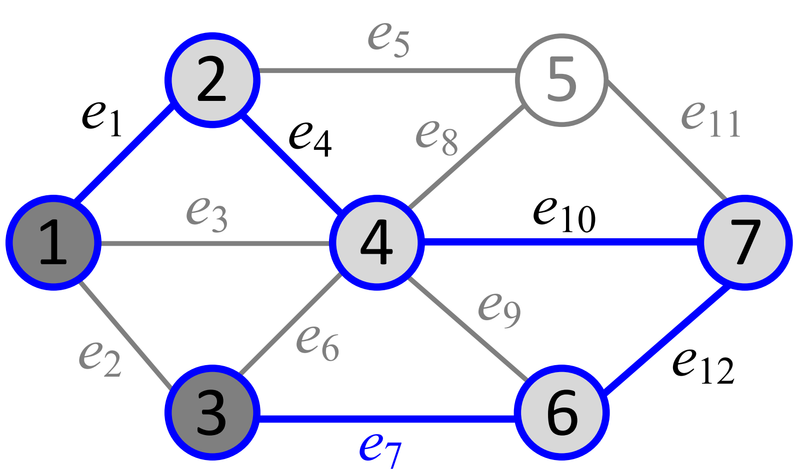
Caminho

Um caminho (*path*) em um grafo G = (V, E) é uma sequência P = $v_0e_1v_1$ ... $v_{k\text{-}1}e_kv_k$ cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G, sendo que todos os vértices e todas as arestas são distintas, tais que $v_{i\text{-}1}$ e v_i são vértices terminais de e_i, $1 \leq i \leq k$.

Não é permitido repetir vértices e arestas. O caminho é aberto ($v_{i\text{-}1} \neq v_i$).

Exemplo:

W = $\mathbf{1}e_12e_44e_{10}7e_{12}6e_7\mathbf{3}$



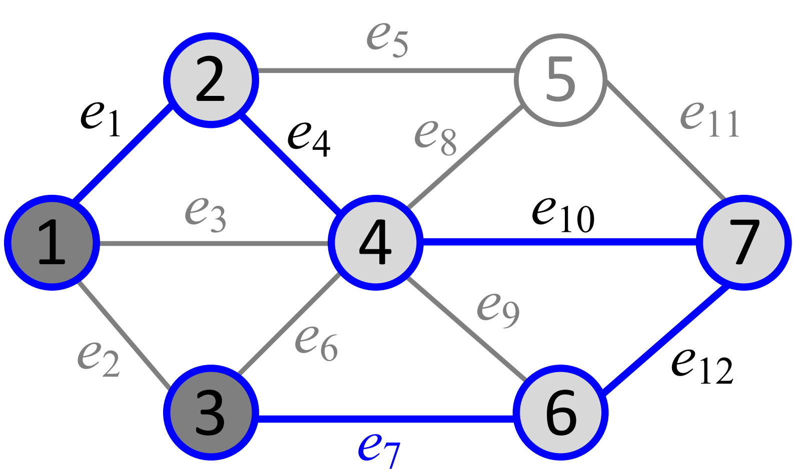
Caminho

Um caminho (*path*) em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $P = v_0 e_1 v_1 \ldots v_{k-1} e_k v_k$ cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G, sendo que todos os vértices e todas as arestas são distintas, tais que v_{i-1} e v_i são vértices terminais de e_i, $1 \leq i \leq k$.

Não é permitido repetir vértices e arestas. O caminho é aberto ($v_{i-1} \neq v_i$).

Exemplo:

$W = 1e_1 2e_4 4e_{10} 7e_{12} 6e_7 3$

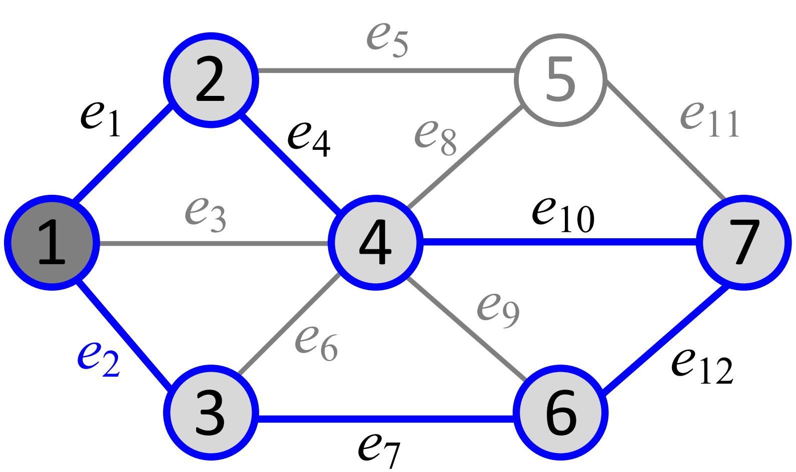


Algoritmos para obter caminhos são baseados nos algoritmos de busca em grafos (ex. DFS, BFS etc).

A estratégia básica é explorar rotas entre vértices percorrendo os relacionamentos até que se alcance o destino.

Ciclo

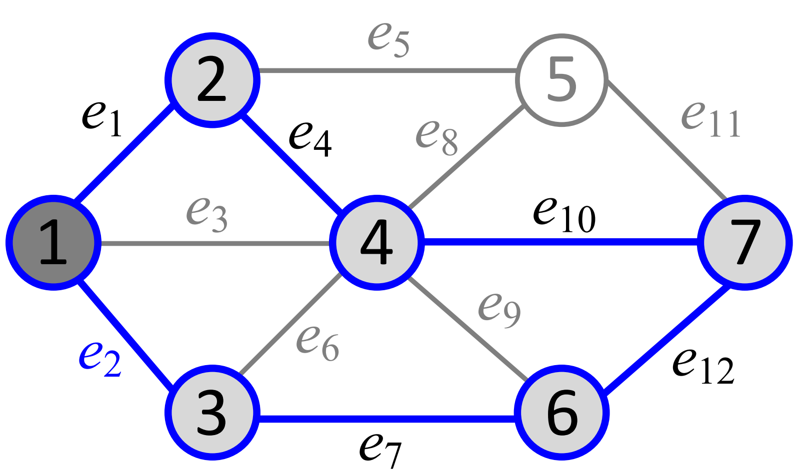
Um ciclo (caminho fechado, *cycle*) em um grafo G = (V, E) é uma sequência C = $v_0 e_1 v_1$ ... $v_{k\text{-}1} e_k v_0$ cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G, sendo que todos os vértices e todas as arestas são distintas, tais que $v_{i\text{-}1}$ e v_i são vértices terminais de e_i, 1 $\leq i \leq k$. Apenas vértices inicial e final são idênticos $(v_0 = v_k)$.



Ciclo

Um ciclo (caminho fechado, *cycle*) em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $C = v_0e_1v_1 \ldots v_{k\text{-}1}e_kv_0$ cujos termos são alternadamente vértices e arestas de G, sendo que todos os vértices e todas as arestas são distintas, tais que $v_{i\text{-}1}$ e v_i são vértices terminais de e_i, $1 \leq i \leq k$. Os vértices inicial e final são idênticos ($v_0 = v_k$).

Um ciclo em três ou mais vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser organizados em uma sequência cíclica de modo que dois vértices sejam adjacentes se forem consecutivos na sequência e não-adjacentes caso contrário.

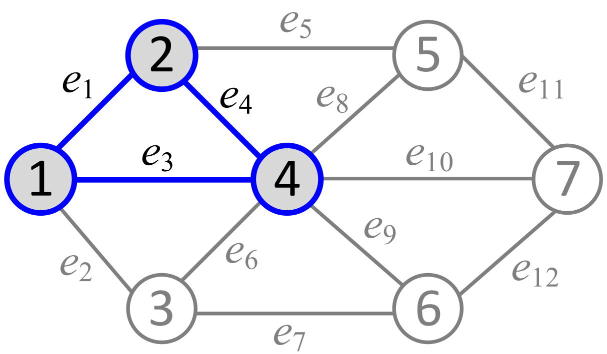


Um ciclo em um vértice consiste em um único vértice com um laço.

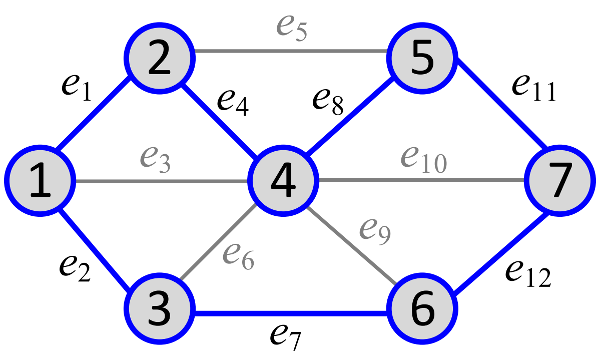
Um ciclo em dois vértices consiste em dois vértices unidos por um par de arestas paralelas.

Ciclo

A **cintura** de um grafo corresponde ao comprimento do menor ciclo nele existente.

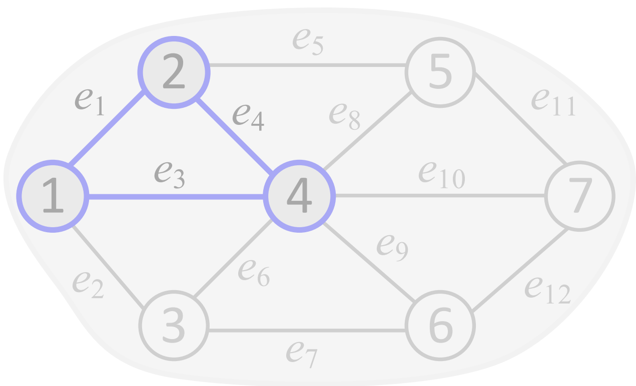


A **circunferência** de um grafo corresponde ao comprimento do maior ciclo nele existente.

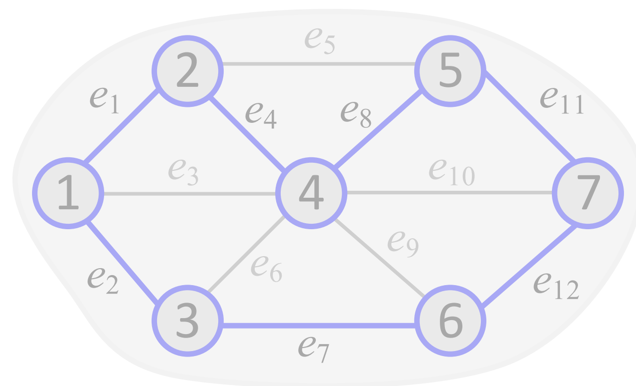


Ciclo

A **cintura** de um grafo corresponde ao comprimento do menor ciclo nele existente.

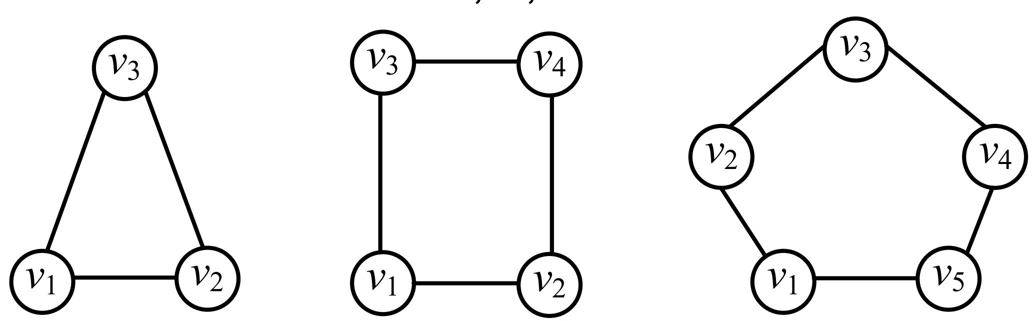


A **circunferência** de um grafo corresponde ao comprimento do maior ciclo nele existente.



Um grafo ciclo de n vértices, denominado C_n, com $n \geq 3$, é um grafo simples que possui apenas um único ciclo formado pelos vértices $v_1, v_2, ..., v_n$, e arestas v_1v_2, v_2v_3, ... , $v_{n-1}v_n$, v_nv_1.

Ex: Grafos ciclos de 3, 4, e 5 vértices.

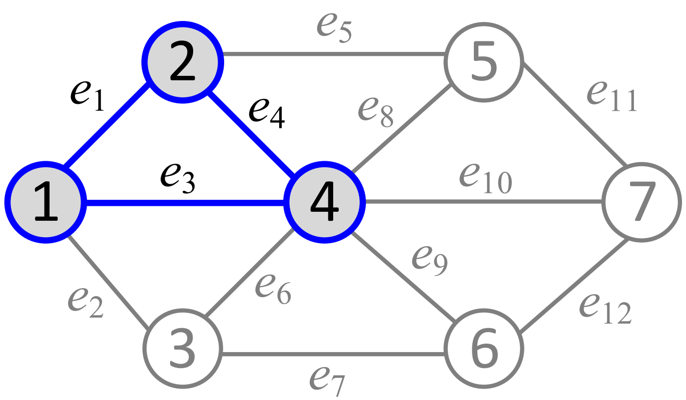


C_3 C_4 C_5

Igualdade de Ciclos

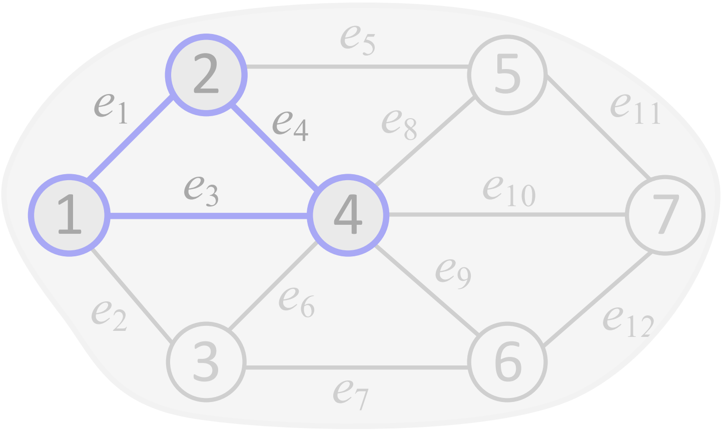
Dois ciclos são considerados iguais se possuem o mesmo conjunto de arestas, mesmo que possuam vértices iniciais diferentes.

Exemplo. O ciclo obtido pela sequência de vértices $v_1v_2v_4v_1$ é o mesmo da sequência $v_2v_4v_1v_2$ e $v_4v_1v_2v_4$.



Igualdade de Ciclos

Dois ciclos são considerados iguais se possuem o mesmo conjunto de arestas, mesmo que possuam vértices iniciais diferentes.



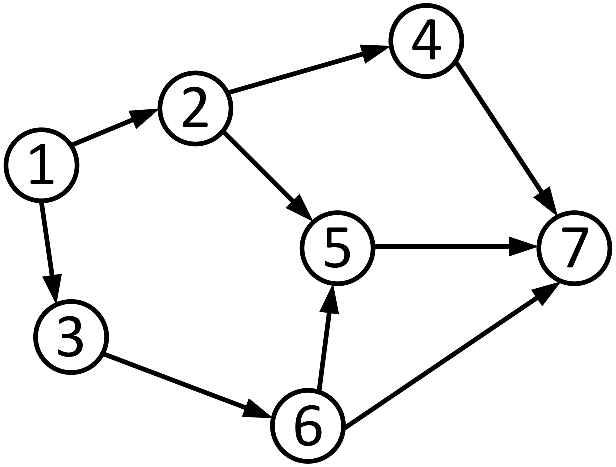
Exemplo. O ciclo obtido pela sequência de vértices $v_1v_2v_4v_1$ é o mesmo da sequência $v_2v_4v_1v_2$ e $v_4v_1v_2v_4$.

DAG (*Directed Acyclic Graph*)

É um grafo direcionado sem ciclos. A direção dos arcos não possibilita que se forme um ciclo.

Toda árvore direcionada é um DAG.

Todo DAG possui ao menos um vértice com grau de entrada zero



Terminologia de Caminhamentos

Resumo dos nomes e características dos tipos de subgrafos que constituem caminhamentos em grafos.

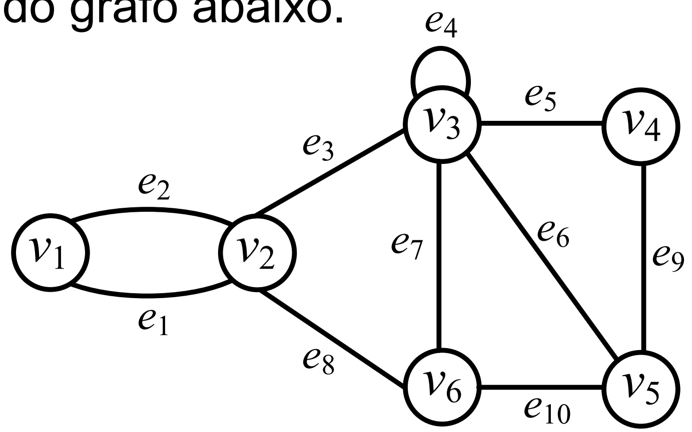
Tipo	Repete Arestas?	Repete Vértices?	Término
Passeio (***walk***)	SIM	SIM	Aberto / Fechado
Trajeto (**trilha, *trail***)	NÃO	SIM	Aberto
Circuito (***closed trail***)	NÃO	SIM	Fechado
Caminho (***path***)	NÃO	NÃO	Aberto
Ciclo (***closed path***)	NÃO	NÃO*	Fechado

* Com exceção dos vértices inicial e final que são idênticos.

Identificando o Caminhamento

É possível identificar o tipo de um caminhamento com base nas suas características.

Exemplo: Identificar o tipo de caminhamento dado pela sequências de vértices e arestas do grafo abaixo.

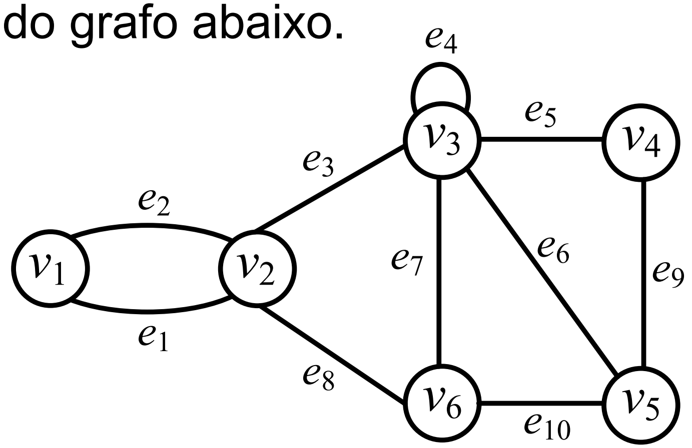


$$v_1 e_1 v_2 e_3 v_3 e_4 v_3 e_5 v_4$$

Identificando o Caminhamento

É possível identificar o tipo de um caminhamento com base nas suas características.

Exemplo: Identificar o tipo de caminhamento dado pela sequências de vértices e arestas do grafo abaixo.



Tipo	Repete Arestas?	Repete Vértices?	Término
Passeio (***walk***)	SIM	SIM	Aberto / Fechado
Trajeto (**trilha, *trail***)	NÃO	SIM	Aberto
Circuito (***closed trail***)	NÃO	SIM	Fechado
Caminho (***path***)	NÃO	NÃO	Aberto
Ciclo (***closed path***)	NÃO	NÃO*	Fechado

* Com exceção dos vértices inicial e final que são idênticos.

$v_1 e_1 v_2 e_3 v_3 e_4 v_3 e_5 v_4$

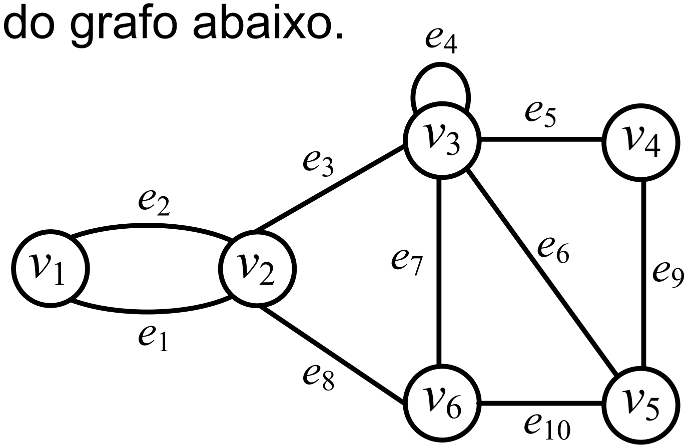
- Aresta repetida? Não
- Vértice repetido? Sim, v_3
- Fechado? Não

Tipo: Trajeto

Identificando o Caminhamento

É possível identificar o tipo de um caminhamento com base nas suas características.

Exemplo: Identificar o tipo de caminhamento dado pela sequências de vértices e arestas do grafo abaixo.



Tipo	Repete Arestas?	Repete Vértices?	Término
Passeio (*walk*)	SIM	SIM	Aberto / Fechado
Trajeto (trilha, *trail*)	NÃO	SIM	Aberto
Circuito (*closed trail*)	NÃO	SIM	Fechado
Caminho (*path*)	NÃO	NÃO	Aberto
Ciclo (*closed path*)	NÃO	NÃO*	Fechado

* Com exceção dos vértices inicial e final que são idênticos.

$v_1 e_1 v_2 e_3 v_3 e_4 v_3 e_5 v_4$

- Aresta repetida? Não
- Vértice repetido? Sim, v_3
- Fechado? Não

Tipo: Trajeto

$e_1 e_3 e_5 e_5 e_6$

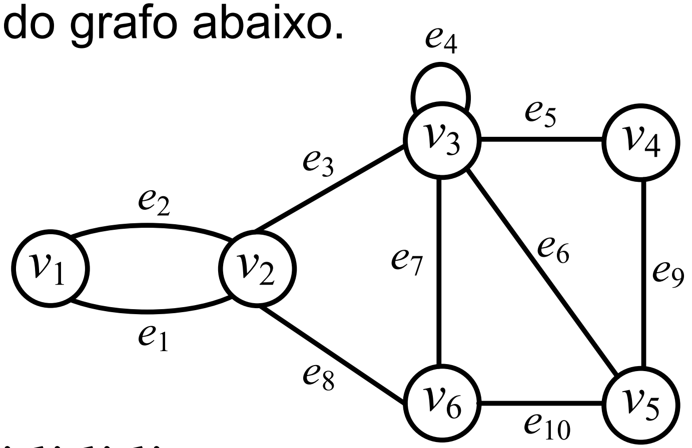
- Aresta repetida? Sim, e_5
- Vértice repetido? Sim, v_3
- Fechado? Não

Tipo: Passeio Aberto

Identificando o Caminhamento

É possível identificar o tipo de um caminhamento com base nas suas características.

Exemplo: Identificar o tipo de caminhamento dado pela sequências de vértices e arestas do grafo abaixo.



Tipo	Repete Arestas?	Repete Vértices?	Término
Passeio (***walk***)	SIM	SIM	Aberto / Fechado
Trajeto (**trilha, *trail***)	NÃO	SIM	Aberto
Circuito (***closed trail***)	NÃO	SIM	Fechado
Caminho (***path***)	NÃO	NÃO	Aberto
Ciclo (***closed path***)	NÃO	NÃO*	Fechado

* Com exceção dos vértices inicial e final que são idênticos.

$v_2 v_3 v_4 v_5 v_3 v_6 v_2$

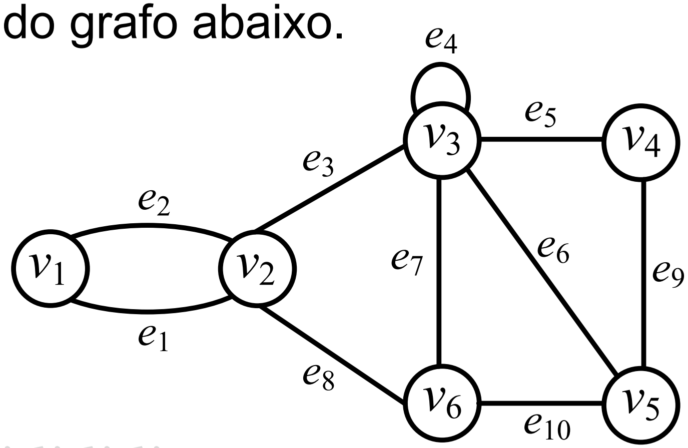
- Aresta repetida? Não
- Vértice repetido? Sim, v_2 e v_3
- Fechado? Sim, v_2

Tipo: Circuito

Identificando o Caminhamento

É possível identificar o tipo de um caminhamento com base nas suas características.

Exemplo: Identificar o tipo de caminhamento dado pela sequências de vértices e arestas do grafo abaixo.



Tipo	Repete Arestas?	Repete Vértices?	Término
Passeio (*walk*)	SIM	SIM	Aberto / Fechado
Trajeto (trilha, *trail*)	NÃO	SIM	Aberto
Circuito (*closed trail*)	NÃO	SIM	Fechado
Caminho (*path*)	NÃO	NÃO	Aberto
Ciclo (*closed path*)	NÃO	NÃO*	Fechado

* Com exceção dos vértices inicial e final que são idênticos.

$v_2 v_3 v_4 v_5 v_3 v_6 v_2$

- Aresta repetida? Não
- Vértice repetido? Sim, v_2 e v_3
- Fechado? Sim, v_2

Tipo: Circuito

$v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_2$

- Aresta repetida? Não
- Vértice repetido? Sim, v_2
- Fechado? Sim, v_2

Tipo: Ciclo

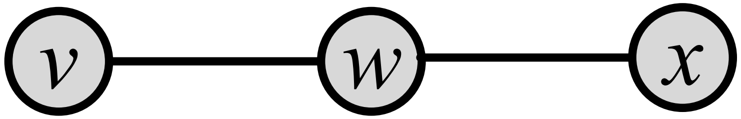
Alcançabilidade – Fecho Transitivo

Na teoria dos grafos o conceito de fecho transitivo pode ser visto como a identificação dos vértices que atendem a alcançabilidade.

Alcançabilidade auxilia na verificação se é possível chegar à um vértice destino a partir de um vértice origem. É a capacidade de alcançar um dado local destino x a partir de um local origem v.

A relação de alcançabilidade é transitiva:

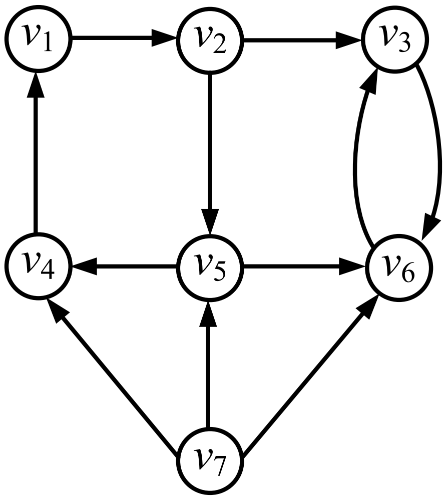
- Se w é alcançável a partir de v
- E se x é alcançável de w
- Então x é alcançável a partir de v



Alcançabilidade – Fecho Transitivo

Fecho Transitivo Direto (FTD)

FTD de um vértice v, denotado $\hat{\Gamma}^{+}(v)$, é o conjunto de todos os vértices de um grafo que podem ser alcançados por algum caminho iniciado em v. Os vértices em $\hat{\Gamma}^{+}(v)$ são chamados de descendentes ou sucessores de v.



Exemplo. Conjuntos FTD

FTD do vértice v_5 é $\hat{\Gamma}^{+}(v_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

Obs. O próprio vértice analisado é incluído no conjunto FTD, já que ele é alcançável a partir de si mesmo.

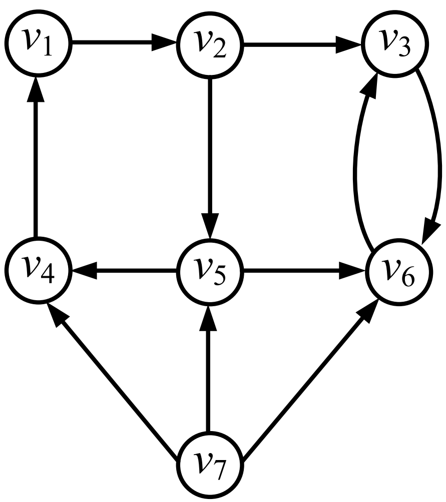
Alcançabilidade – Fecho Transitivo

Fecho Transitivo Direto (FTD)

FTD de um vértice v, denotado $\hat{\Gamma}^{+}(v)$, é o conjunto de todos os vértices de um grafo que podem ser alcançados por algum caminho iniciado em v. Os vértices em $\hat{\Gamma}^{+}(v)$ são chamados de descendentes ou sucessores de v.

Fecho Transitivo Indireto (FTI)

FTI de um vértice v, denotado $\hat{\Gamma}^{-}(v)$, é o conjunto de todos os vértices de um grafo a partir dos quais v é alcançado. Os vértices em $\hat{\Gamma}^{-}(v)$ são chamados de ascendentes ou antecessores de v.



Exemplo. Conjuntos FTD e FTI

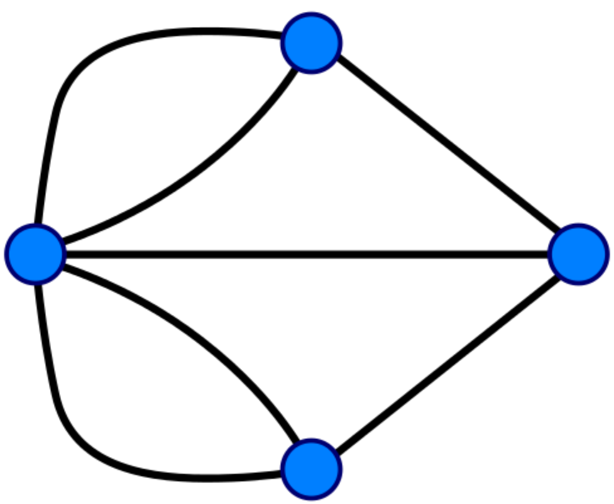
FTD do vértice v_5 é $\hat{\Gamma}^{+}(v_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

FTI do vértice v_5 é $\hat{\Gamma}^{-}(v_5) = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7\}$

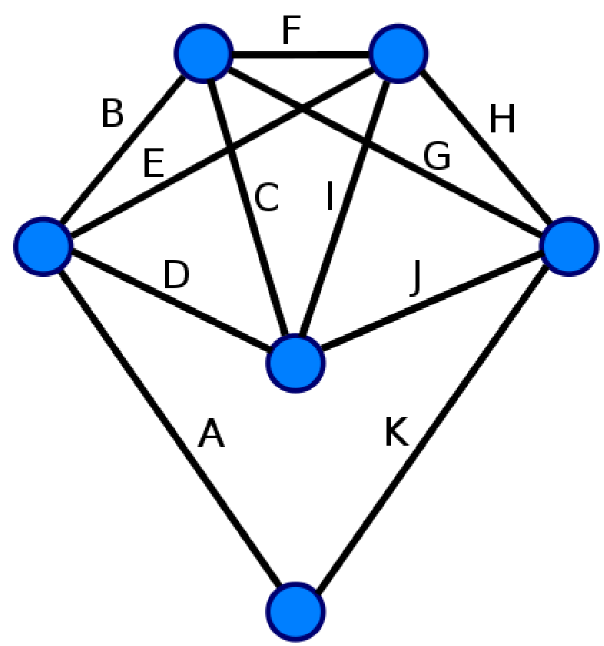
Obs. O próprio vértice analisado é incluído nos conjuntos FTD e FTI, já que ele é alcançável a partir de si mesmo.

Circuito Euleriano

Caminho Euleriano é um caminho em um grafo que visita toda aresta exatamente uma vez. **Circuito Euleriano** em um grafo G é dado pela sequência de vértices e arestas adjacentes que inicia e termina no mesmo vértice, passando pelo menos uma vez por cada vértice e exatamente uma única vez por cada aresta de G.



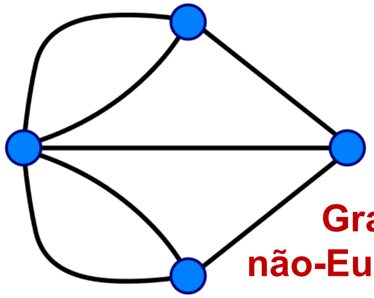
Grafo não-Euleriano
(pontes de Konigsberg)



Grafo Euleriano

Circuito Euleriano

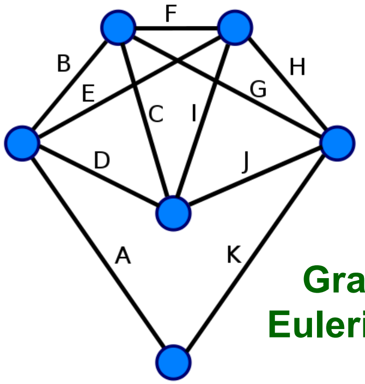
Caminho Euleriano é um caminho em um grafo que visita toda aresta exatamente uma vez. **Circuito Euleriano** em um grafo G é dado pela sequência de vértices e arestas adjacentes que inicia e termina no mesmo vértice, passando pelo menos uma vez por cada vértice e exatamente uma única vez por cada aresta de G.



Grafo não-Euleriano

Critérios para que um grafo G seja Euleriano:

- G é um grafo conexo;
- Teorema de Euler: G é euleriano sse todos os seus vértices possuírem grau par;
- G é não-euleriano sse existem um, três ou mais vértices de grau ímpar;
- G é semi-euleriano sse existem exatamente dois vértices de grau ímpar.



Grafo Euleriano

Circuito Euleriano

Caminho Euleriano é um caminho em um grafo que visita toda aresta exatamente uma vez. **Circuito Euleriano** em um grafo G é dado pela sequência de vértices e arestas adjacentes que inicia e termina no mesmo vértice, passando pelo menos uma vez por cada vértice e exatamente uma única vez por cada aresta de G.

Critérios para que um grafo G seja Euleriano:

- G é um grafo conexo;
- Teorema de Euler: G é euleriano sse todos os seus vértices possuírem grau par;
- G é não-euleriano sse existem um, três ou mais vértices de grau ímpar;
- G é semi-euleriano sse existem exatamente dois vértices de grau ímpar.

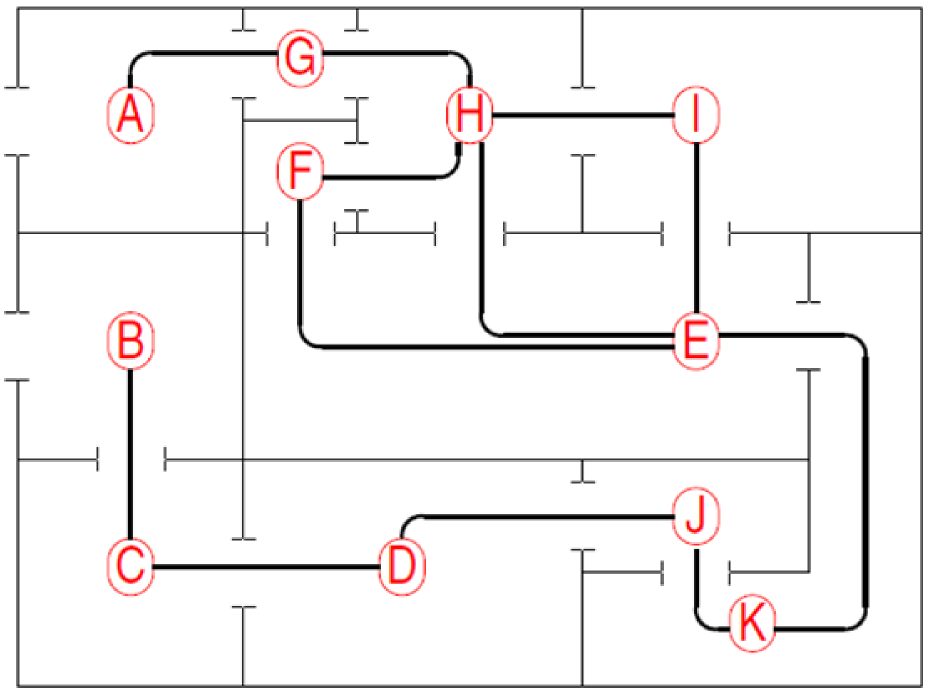
Algoritmo para verificar se o grafo possui um caminho Euleriano

```
caminhoEuleriano(G)

n = quantidade de vertices;
total = 0;
while (total ≤ 2) ∧ (i ≤ n) do
    obtém grau do vértice i;
    if grau é impar then
        total = total + 1;
        i = i + 1;
    end
end
if total > 2 then
    False;
end
else
    True;
end
```

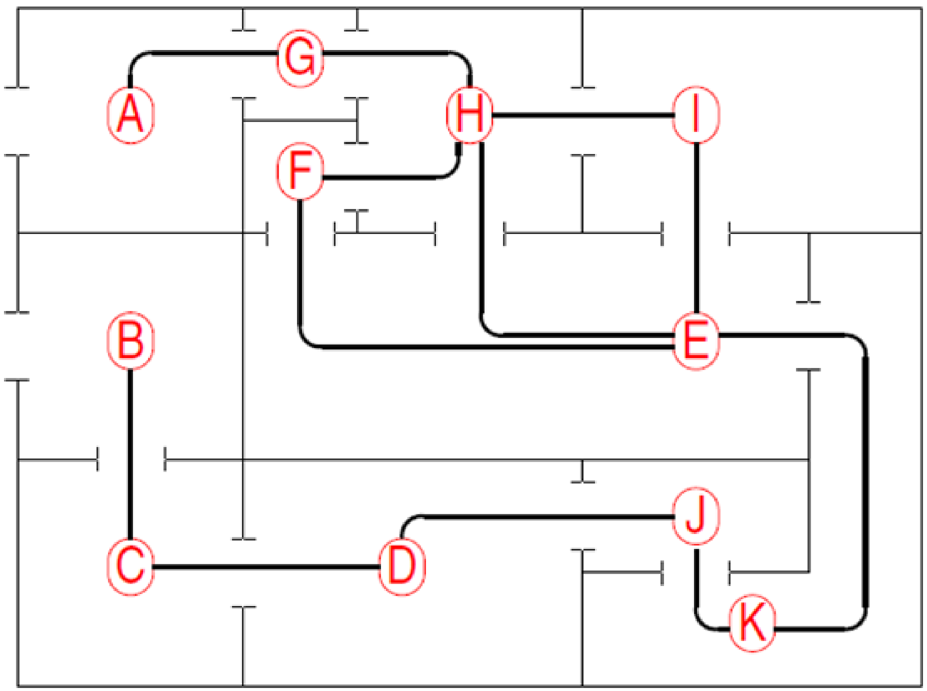
Circuito Euleriano

Exemplo: Uma casa possui uma divisão representada pela planta abaixo. É possível um robô de limpeza sair do cômodo A, terminar no cômodo B e passar por todas as portas da casa exatamente uma única vez?



Circuito Euleriano

Exemplo: Uma casa possui uma divisão representada pela planta abaixo. É possível um robô de limpeza sair do cômodo A, terminar no cômodo B e passar por todas as portas da casa exatamente uma única vez?



Cada vértice do grafo tem um grau par (OK), exceto os vértices A e B que têm grau 1 (OK, dois vértices apenas).

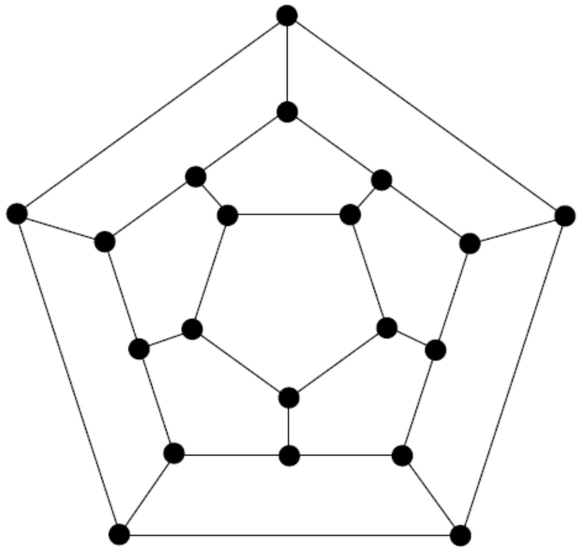
Existe um caminho Euleriano de A para B dado pela sequência:

A G H F E I H E K J D C B

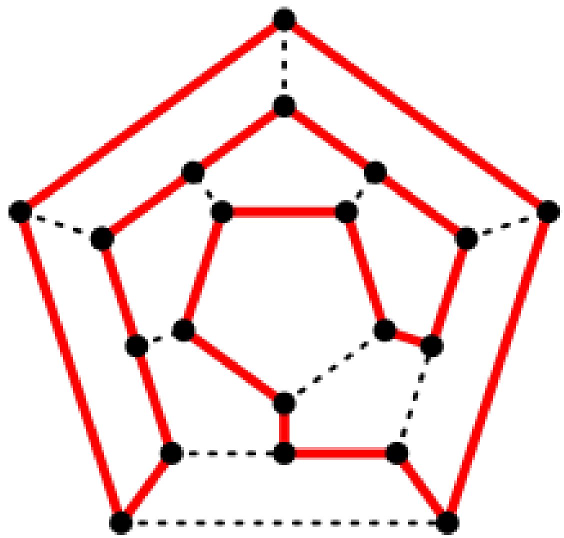
Ciclo Hamiltoniano

Caminho Hamiltoniano é um caminho que passa exatamente uma vez por cada vértice de um grafo. **Ciclo Hamiltoniano** é um caminho hamiltoniano que retorna ao vértice inicial.

Um **grafo hamiltoniano** é aquele que possui um ciclo hamiltoniano. Um grafo **Semi-Hamiltoniano** é aquele que possui um caminho hamiltoniano.



Grafo Hamiltoniano

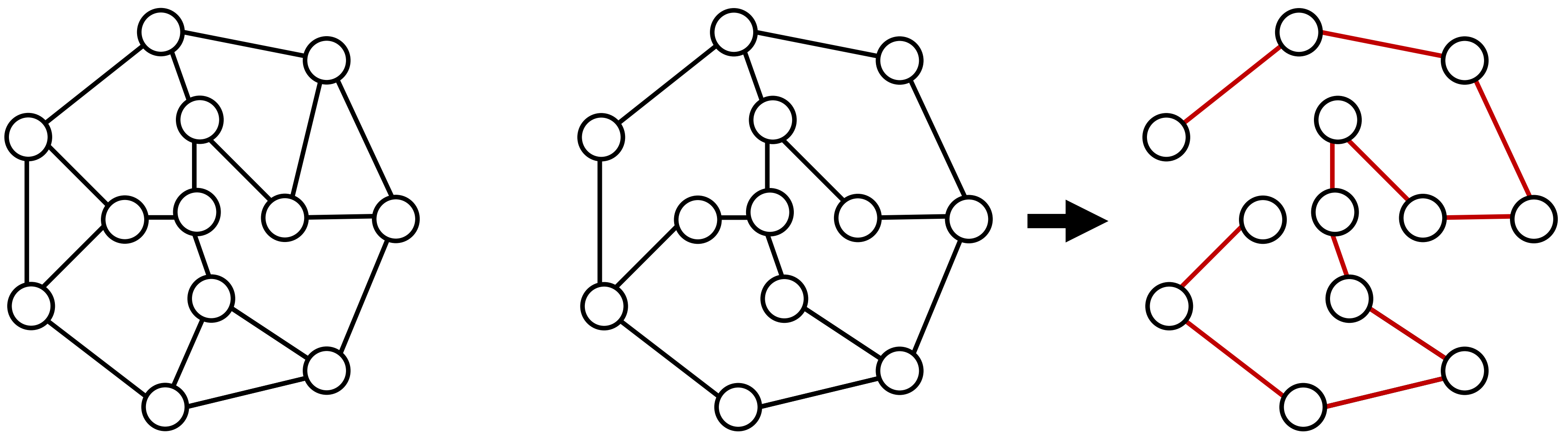


Ciclo Hamiltoniano

Ciclo Hamiltoniano

Caminho Hamiltoniano é um caminho que passa exatamente uma vez por cada vértice de um grafo. **Ciclo Hamiltoniano** é um caminho hamiltoniano que retorna ao vértice inicial.

Um **grafo hamiltoniano** é aquele que possui um ciclo hamiltoniano. Um grafo **Semi-Hamiltoniano** é aquele que possui um caminho hamiltoniano.



grafo Hamiltoniano | **grafo semi-Hamiltoniano** | **caminho Hamiltoniano**

Ciclo Hamiltoniano

Não existe um teorema trivial que indique se um grafo é Hamiltoniano, nem se conhece um algoritmo eficiente (polinomial) para achar um ciclo Hamiltoniano.

Alguns teoremas foram sugeridos:

Teorema de Dirac (1952): Um grafo $G = (V, A)$ com $|V| \geq 3$ e $d(v) \geq |V| / 2$ para todo $v \in V$ é hamiltoniano, onde $d(v)$ corresponde ao grau do vértice.

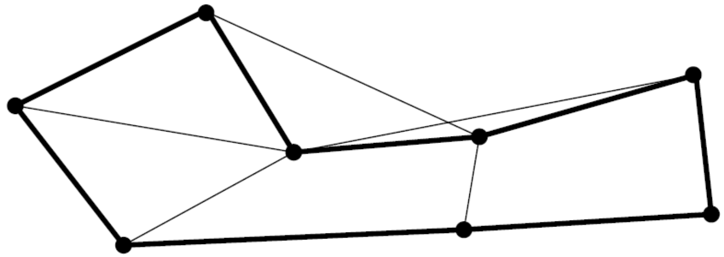
Teorema de Ore (1960): Em um grafo hamiltoniano a soma dos graus de cada par de vértices não adjacentes é no mínimo $|V|$, ou seja, $d(u) + d(v) \geq |V|$ para todo $u, v \in V$ não adjacente.

Teorema de Bondy & Chvátal (1976): Um grafo G é Hamiltoniano se seu Fecho Hamiltoniano, denominado $c(G)$, for um grafo completo. Para obter $c(G)$, arestas são sucessivamente adicionadas entre pares de vértice u e v não adjacentes cuja soma dos graus seja pelo menos $|V|$, até que os pares não-adjacentes não mais existam.

Ciclo Hamiltoniano

Determinando se um grafo não possui um ciclo Hamiltoniano: Se um grafo G tem um ciclo Hamiltoniano então G tem um subgrafo H com as propriedades:

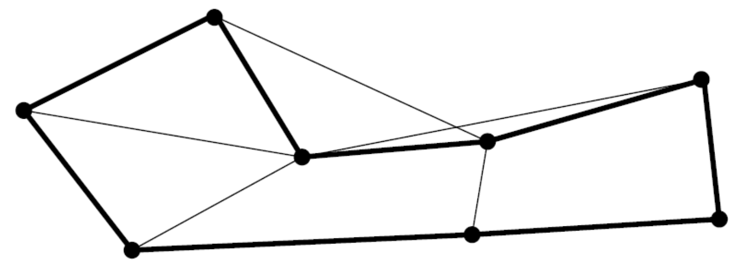
1. H contém cada vértice de G
2. H é conexo
3. H tem o mesmo número de arestas e de vértices
4. Cada vértice de H tem grau 2.



Ciclo Hamiltoniano

Determinando se um grafo não possui um ciclo Hamiltoniano: Se um grafo G tem um ciclo Hamiltoniano então G tem um subgrafo H com as propriedades:

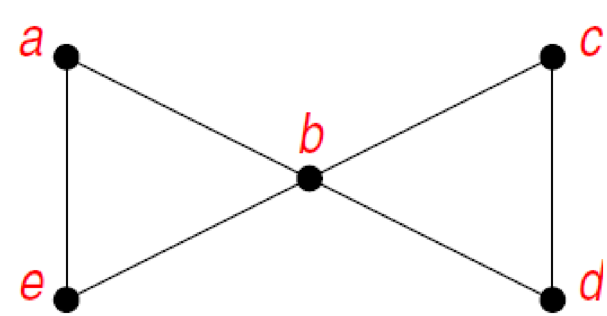
1. H contém cada vértice de G
2. H é conexo
3. H tem o mesmo número de arestas e de vértices
4. Cada vértice de H tem grau 2.



Por contraposição se um grafo G não tem um subgrafo H com as propriedades (1) a (4) então G não possui um circuito Hamiltoniano.

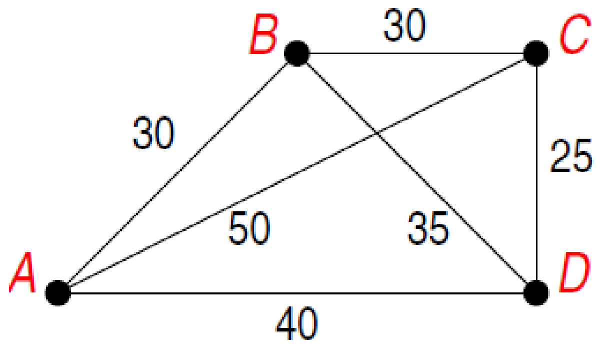
Exemplo:

- $d(b)$ = 4 e cada vértice de H tem grau 2
- Remover duas arestas de b para criar H
- Os outros vértices terão grau menor que 2 se qualquer aresta for removida de b.



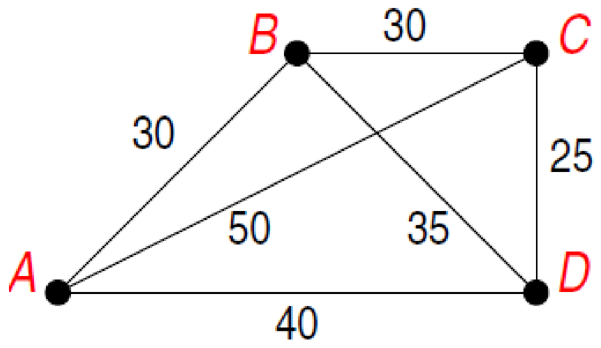
Ciclo Hamiltoniano

Exemplo: Um caixeiro viajante precisa visitar cada cidade exatamente uma única vez e voltar a cidade inicial. Que rota deve ser escolhida para minimizar o total da distância percorrida?



Ciclo Hamiltoniano

Exemplo: Um caixeiro viajante precisa visitar cada cidade exatamente uma única vez e voltar a cidade inicial. Que rota deve ser escolhida para minimizar o total da distância percorrida?



Possível solução:

- Enumerar todos os possíveis ciclos Hamiltonianos com início e término em A;
- Calcular a distância de cada ciclo e selecionar o menor – rotas ABCDA ou ADCBA têm a menor distância total.

Rota	Distância (km)
$ABCDA$	$30 + 30 + 25 + 40 = 125$
$ABDCA$	$30 + 35 + 25 + 50 = 140$
$ACBDA$	$50 + 30 + 35 + 40 = 155$
$ACDBA$	$50 + 25 + 35 + 30 = 140$
$ADBCA$	$40 + 35 + 30 + 50 = 155$
$ADCBA$	$40 + 25 + 30 + 30 = 125$

Contudo, esta solução não é escalável. Para o grafo K_{30} existem 29! = 8,84 x 10^{30} ciclos Hamiltonianos diferentes.

2.6. Conectividade

Definição

Conectividade está relacionada a um número mínimo de elementos (vértices ou arestas) que precisam ser removidos para desconectar os vértices restantes uns dos outros. A conectividade de um grafo é uma medida da robustez de uma rede.

Formalmente: Dois vértices v_i e v_j de um grafo G estão **conectados** sse existe um caminho de v_i para v_j. Um grafo G é conexo sse dado um par qualquer de vértice v_i e v_j em G, existe um caminho de v_i para v_j.

G é conexo $\Leftrightarrow \forall$ vértices v_i, $v_j \in V(G)$, $\exists$ um caminho de v_i para v_j.

Definição

Conectividade está relacionada a um número mínimo de elementos (vértices ou arestas) que precisam ser removidos para desconectar os vértices restantes uns dos outros. A conectividade de um grafo é uma <u>medida da robustez</u> de uma rede.

Formalmente: Dois vértices v_i e v_j de um grafo G estão **conectados** sse existe um caminho de v_i para v_j. Um grafo G é conexo sse dado um par qualquer de vértice v_i e v_j em G, existe um caminho de v_i para v_j.

G é conexo $\Leftrightarrow \forall$ vértices v_i, $v_j \in V(G)$, $\exists$ um caminho de v_i para v_j.

Lemas da Conectividade. Seja um grafo G:

a) Se G é conexo, então quaisquer dois vértices distintos de G podem ser conectados por um caminho (*path*).

b) Se vértices v_i e v_j são parte de um circuito de G e uma aresta é removida do circuito, ainda assim existe um caminho v_i para v_j em G.

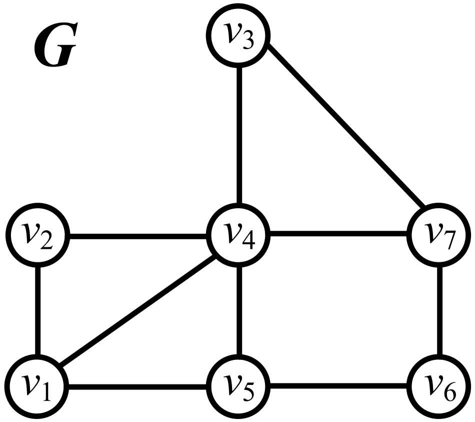
c) Se G é conexo e contém um circuito, então uma aresta do circuito pode ser removida sem desconectar G.

Definição

Grafo Não Direcionado (GND)

Em um GND conexo, todos os vértices são alcançáveis a partir de qualquer outro (vale para grafos simples, multigrafos, pseudografos).

Sempre é possível fazer um passeio fechado que inclua todos os vértices.



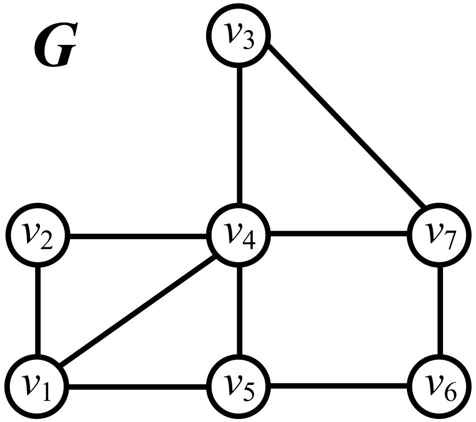
grafo conexo

Definição

Grafo Não Direcionado (GND)

Em um GND conexo, todos os vértices são alcançáveis a partir de qualquer outro (vale para grafos simples, multigrafos, pseudografos).

Sempre é possível fazer um passeio fechado que inclua todos os vértices.

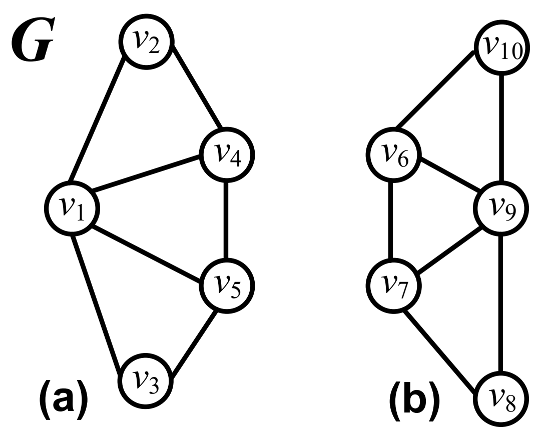


grafo conexo

Grafo Desconexo

É aquele no qual <u>não existe um caminho</u> em pelo menos um par de seus vértices.

O grafo possui duas componentes não existindo uma ligação entre elas. Um vértice da componente (a) não alcança um vértice da componente (b).

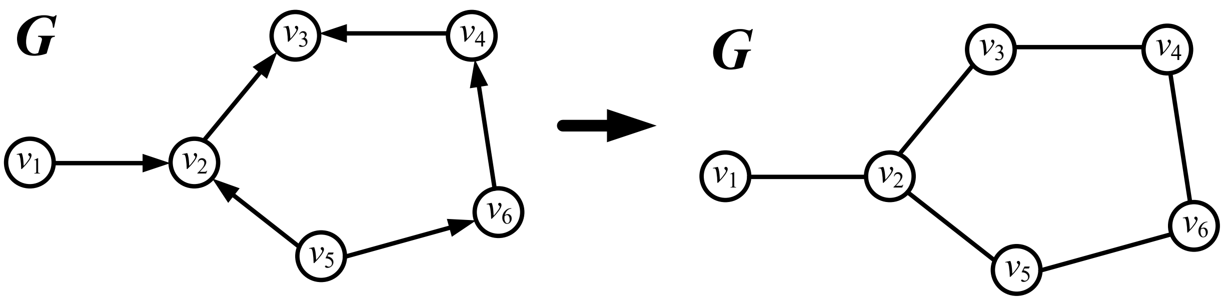


grafo desconexo

Conectividade em Grafos Direcionados

Grafo simplesmente conexo (s-conexo)

Se G é um grafo direcionado então ele é considerado conexo quando o seu grafo não-direcionado subjacente é conexo. O grafo subjacente é o resultante quando a orientação dos arcos de G é ignorada.

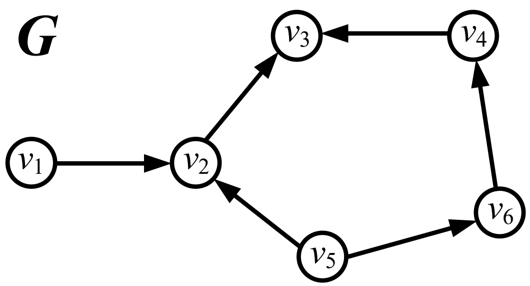


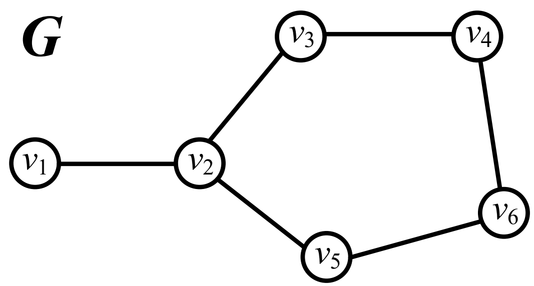
grafo não-orientado subjacente (indica se o grafo é conexo desconsiderando as direções)

Conectividade em Grafos Direcionados

Grafo simplesmente conexo (s-conexo)

Se G é um grafo direcionado então ele é considerado conexo quando o seu grafo não-direcionado subjacente é conexo. O grafo subjacente é o resultante quando a orientação dos arcos de G é ignorada.

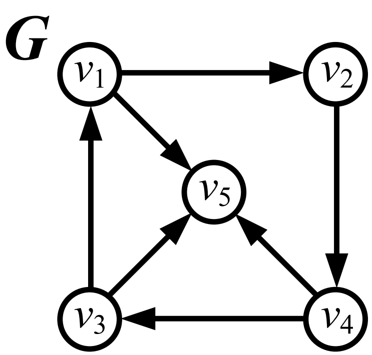




grafo não-orientado subjacente (indica se o grafo é conexo desconsiderando as direções)

Grafo Semi-Fortemente Conexo (sf-conexo)

Se G é um grafo direcionado então ele é considerado sf-conexo se para cada par de vértices (v_i, v_j), existe um caminho de v_i para v_j **ou** de v_j para v_i (assimétrico).

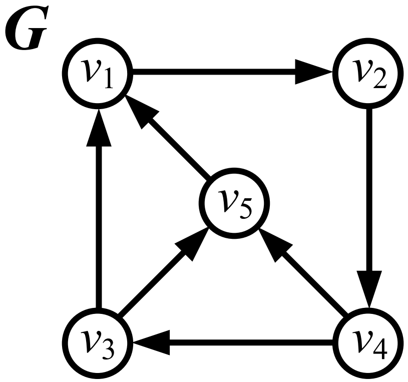


grafo sf-conexo

Conectividade em Grafos Direcionados

Grafo Fortemente Conexo (f-conexo)

Se G é um grafo direcionado então ele é considerado f-conexo se para cada par de vértices (v_i, v_j), existe um caminho de v_i para v_j **e** de v_j para v_i (simétrico).

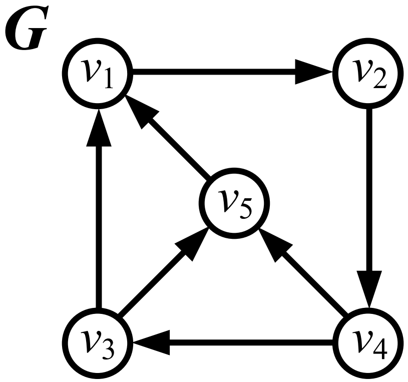


grafo f-conexo

Conectividade em Grafos Direcionados

Grafo Fortemente Conexo (f-conexo)

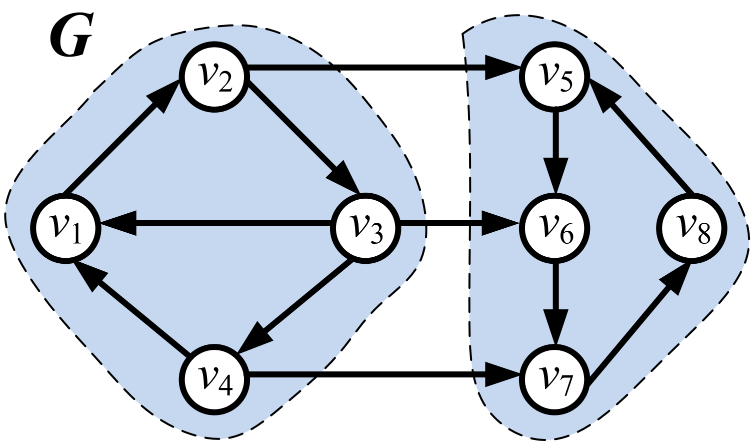
Se G é um grafo direcionado então ele é considerado f-conexo se para cada par de vértices (v_i, v_j), existe um caminho de v_i para v_j <u>e</u> de v_j para v_i (simétrico).



grafo f-conexo

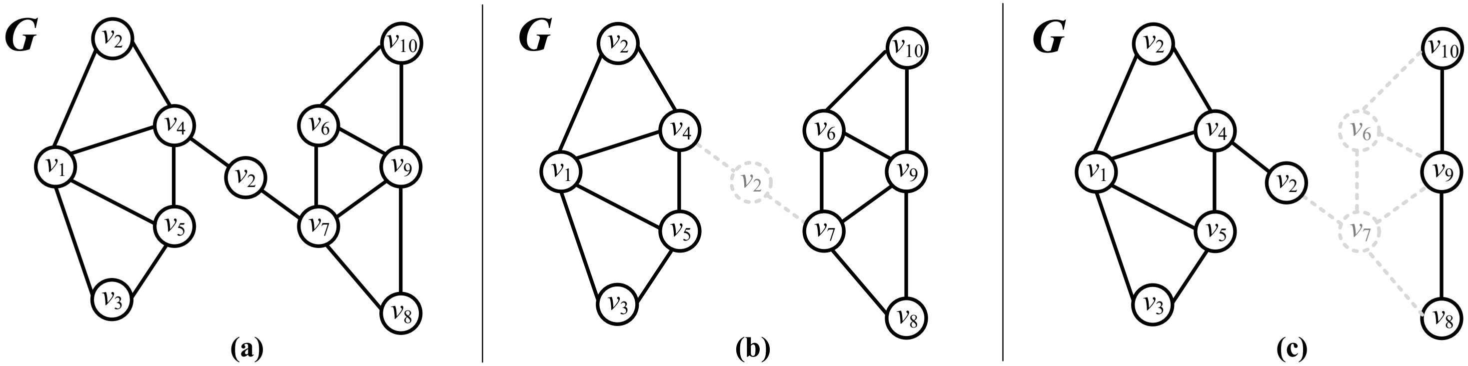
Componentes Fortemente Conexos

Se G é um grafo direcionado, componentes fortemente conexos são subgrafos maximais f-conexos (todos os vértices de um mesmo componente são alcançáveis entre si).



Conectividade em Vértices

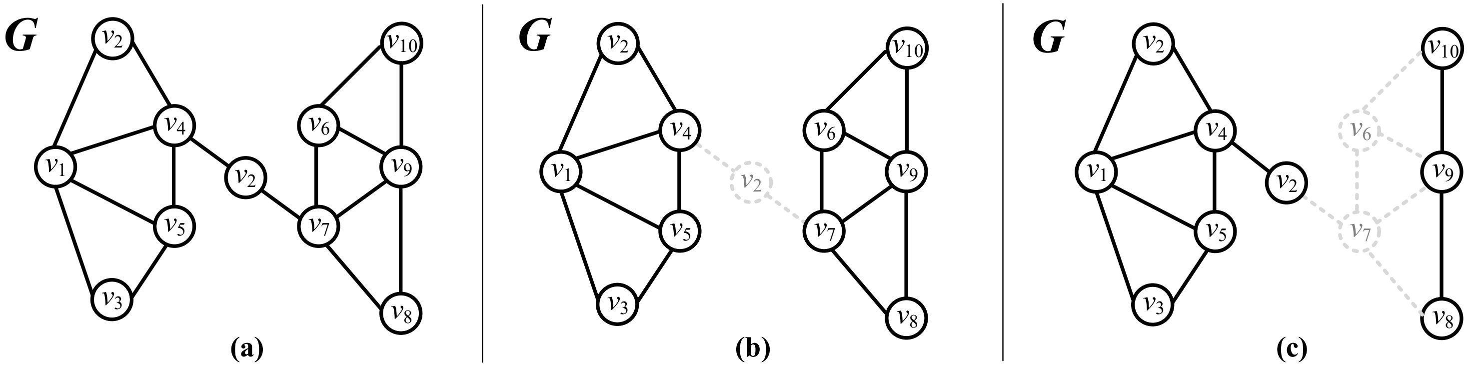
Aplicado a grafos não-direcionados. A conectividade em vértices $\kappa(G)$ de um grafo G corresponde a menor quantidade de vértices cuja remoção torna G desconexo.



Um grafo G (a), em (b) G após a remoção de um vértice (vértice de corte) e em (c) com a remoção de dois vértices (conjunto separador). Neste caso, a conectividade de G é $\kappa(G) = 1$.

Conectividade em Vértices

Aplicado a grafos não-direcionados. A conectividade em vértices $\kappa(G)$ de um grafo G corresponde a menor quantidade de vértices cuja remoção torna G desconexo.



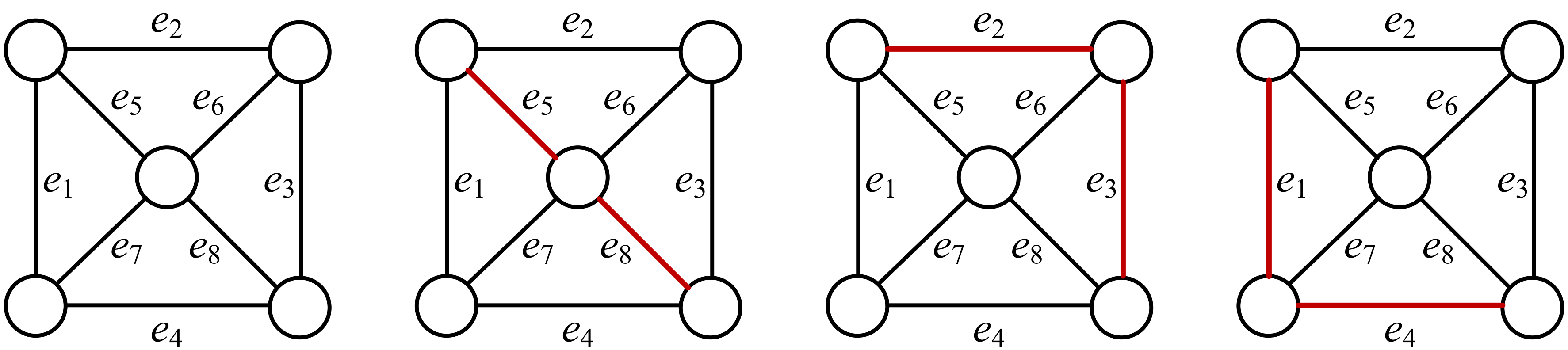
Um grafo G (a), em (b) G após a remoção de um vértice (vértice de corte) e em (c) com a remoção de dois vértices (conjunto separador). Neste caso, a conectividade de G é $\kappa(G) = 1$.

- Nos grafos completos com $|V|$ vértices, $\kappa(G) = |V| - 1$
- Nos grafos não-completos existirá pelo menos um par (v_i, v_j) de vértices não-adjacentes, ocasionando em uma $\kappa(G) = |V| - 2 \; \forall \; G \neq K_n$
- O limite superior para $\kappa(G)$ em qualquer grafo é $\kappa(G) \leq \delta(G)$, onde δ (delta) corresponde ao menor grau em um GND (grafo não direcionado).

k-Conectividade

Um grafo G = (V, E) é k-conexo se e somente se para todo para v_i, $v_j \in V$, $v_i \neq v_j$ existirem ao menos k caminhos disjuntos.

Dois caminhos entre os vértices v_i e v_j de um grafo são disjuntos se não possuírem arestas em comum.

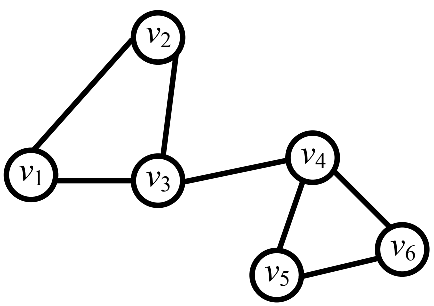


Três caminhos disjuntos do grafo G constituídos respectivamente pelas arestas {e_5, e_8}, {e_2, e_3} e {e_1, e_4}

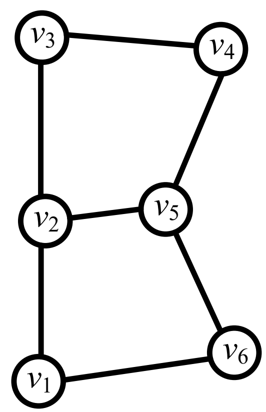
k-Conectividade

Um grafo G = (V, E) é k-conexo se e somente se para todo para v_i, $v_j \in V$, $v_i \neq v_j$ existirem ao menos k caminhos disjuntos.

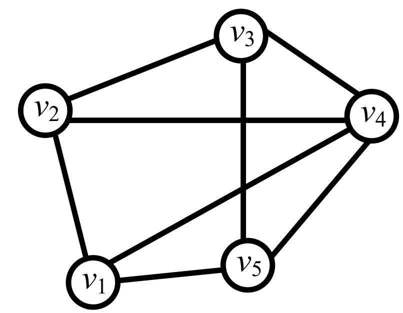
Dois caminhos entre os vértices v_i e v_j de um grafo são disjuntos se não possuírem arestas em comum.



1-conexo



2-conexo



3-conexo

Para todo grafo *k*-conexo ocorre as seguintes propriedades:

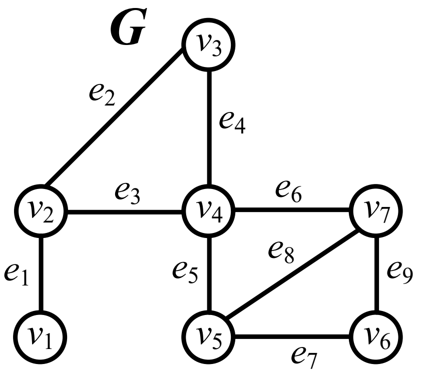
$\kappa(G) \leq \delta(G)$: conectividade de G é menor ou igual ao menor grau de um vértice de G.

$\kappa(G) \leq k$: conectividade de G é menor ou igual a quantidade k de caminhos disjuntos em G.

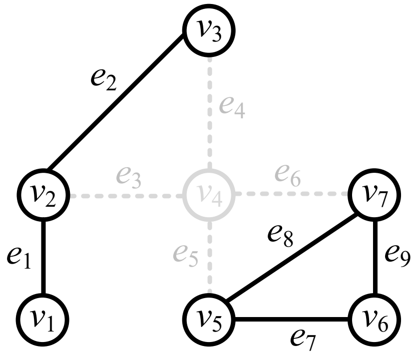
Articulação

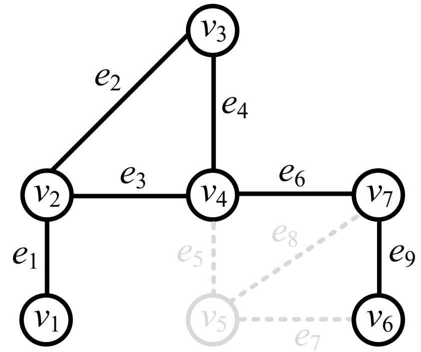
Vértice de Articulação

Um vértice de articulação de um grafo G é aquele cuja remoção resulta na desconexão de G.



O vértice v_4 é de articulação, já o vértice v_5 não é pois não divide G em componentes.





Articulação

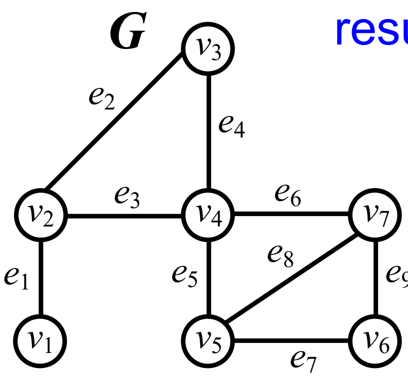
Vértice de Articulação

Um vértice de articulação de um grafo G é aquele cuja remoção resulta na desconexão de G.

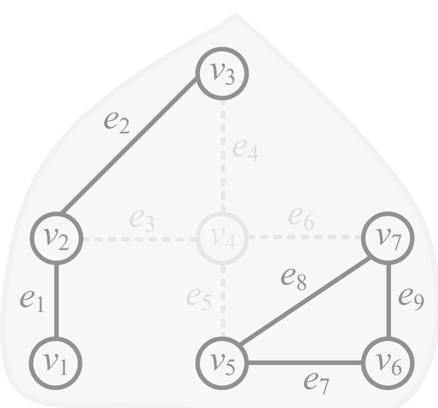
O vértice v_4 é de articulação, já o vértice v_5 não é pois não divide G em componentes.

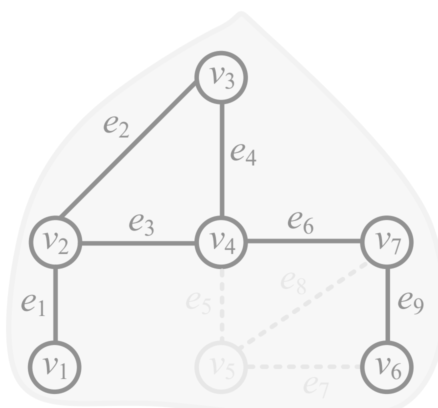
Aresta de Articulação

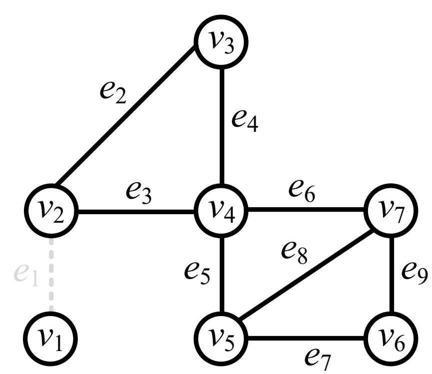
Uma aresta de articulação de um grafo G é aquela cuja remoção resulta na desconexão de G.

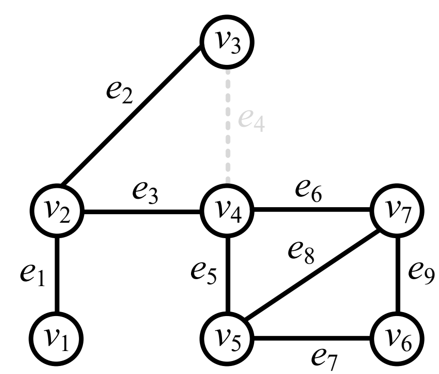


A aresta e_1 é de articulação, já a aresta e_4 não é.



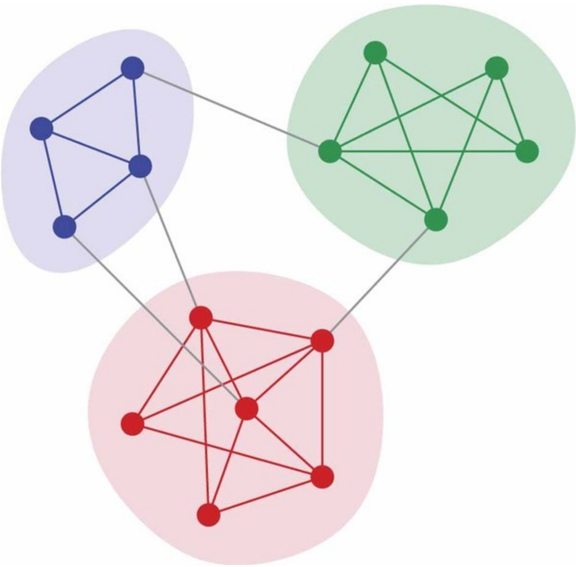




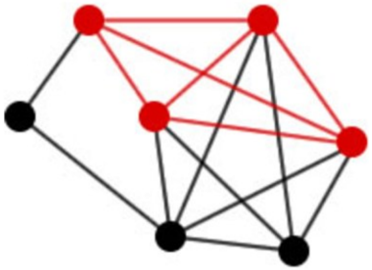


Cliques

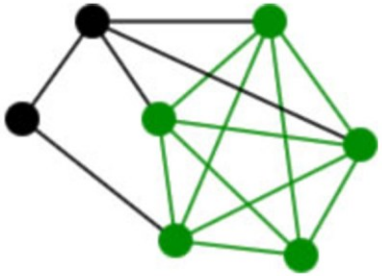
Em um grafo não-direcionado $G = (V, E)$ é um subconjunto de vértices $C \subseteq V$, tal que para todo par de vértices (v_i, v_j) e $v_i \neq v_j$, existe uma aresta incidente conectando v_i e v_j. Isso equivale a dizer que um subgrafo induzido de C é completo.



Clique maximal: cliques que não são subconjunto de outros subgrafos completos de G.



Clique máxima: é o maior clique possível de G. O número do clique $\omega(G)$ é o número de vértices de um clique máximo de G.



Perguntas? Sugestões?