UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
Instituto de Matemática e Computação

SMAC03 – Grafos

2. Conceitos de Teoria dos Grafos
Tipos e Representação

Rafael Frinhani
frinhani@unifei.edu.br

1º Semestre de 2025

OBJETIVOS

Apresentar a teoria dos grafos, seus conceitos e principais terminologias, tipos de grafos, características e estruturas de dados para sua representação computacional.

AGENDA

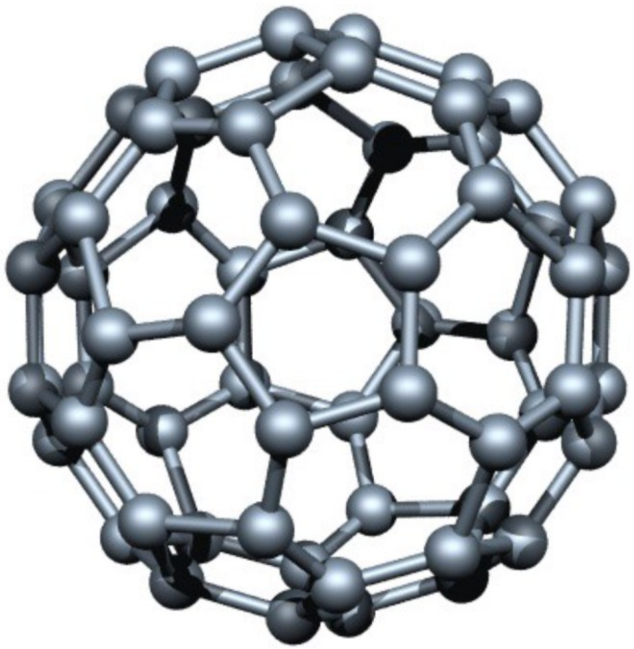
2. Teoria dos Grafos

2.1. Conceitos e Tipos

Definição formal de grafo, terminologia. Tipos de grafos (Simples, Dirigido, Multigrafo, Pseudografo, Valorado, Completo, Subgrafo). Grau de um vértice, grafo Regular, densidade. Grafo Conexo, Complemento e Bipartido.

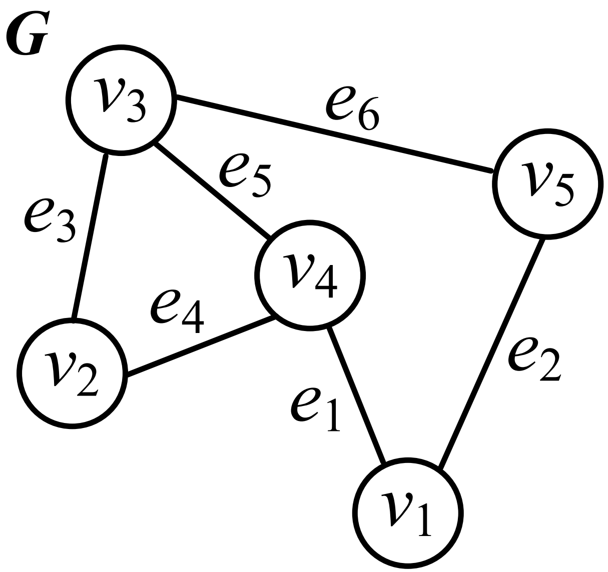
2.2. Representação Computacional

Matriz de Adjacências, Matriz de Incidências, Lista de Adjacências. Comparação das estruturas quanto a complexidade de tempo e espaço.



Grafo – Definição Formal

Um grafo G é definido pelos conjuntos de vértices V e de arestas E, além de uma função aresta-vértice f, constituindo a tripla ordenada:



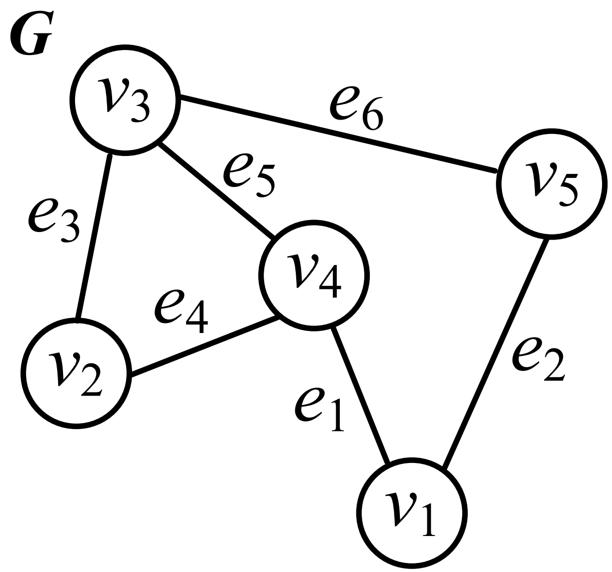
$$G = (V, E, f)$$

Obs. Para fins de simplificação geralmente é adotada a dupla ordenada (V, E) ficando a função aresta-vértice implícita na descrição dos elementos desses conjuntos.

Grafo – Definição Formal

Um grafo G é definido pelos conjuntos de vértices V e de arestas E, além de uma função aresta-vértice f, constituindo a tripla ordenada:

$$G = (V, E, f)$$



Ex. O grafo G possui 5 vértices e 6 arestas, sendo representado por:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$
$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

Função Aresta–Vértice (f)

Associa a aresta ao respectivo par de vértices.

Aresta	*Vértice*
e_1	$\{v_1, v_4\}$
e_2	$\{v_1, v_5\}$
e_3	$\{v_2, v_3\}$
e_4	$\{v_2, v_4\}$
e_5	$\{v_3, v_4\}$
e_6	$\{v_3, v_5\}$

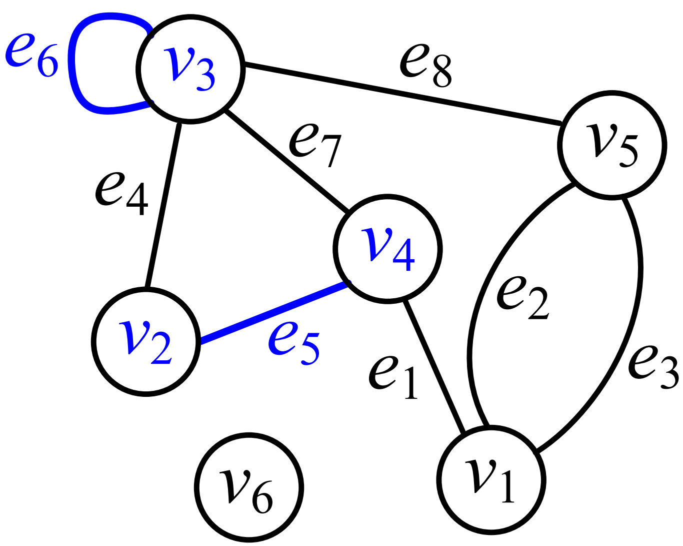
Obs. Para fins de simplificação geralmente é adotada a dupla ordenada (V, E) ficando a função aresta-vértice implícita na descrição dos elementos desses conjuntos.

Terminologia

Cada aresta está associada a um conjunto de um ou dois vértices, chamados vértice terminal ou nó terminal. Uma aresta é dita conectar seus vértices terminais.

Ex. aresta e_5 conecta os vértices $\{v_2, v_4\}$. Aresta e_6 conecta apenas $\{v_3\}$.

Um laço (*loop*) é uma aresta com somente um vértice terminal. Ex. aresta e_6.

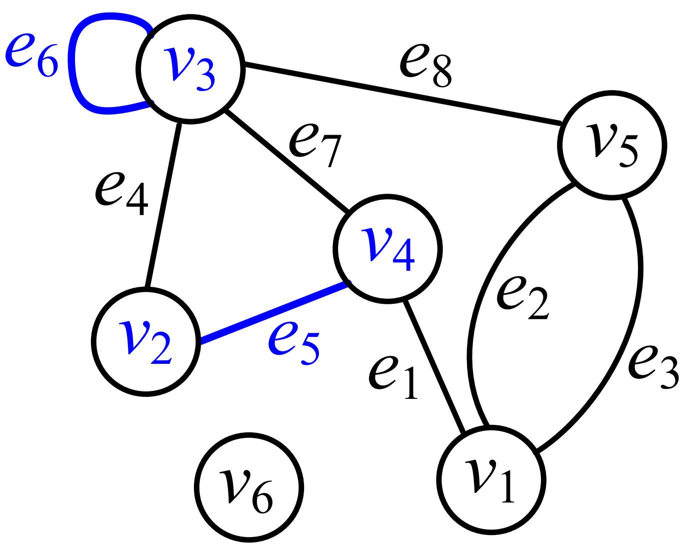


Terminologia

Cada aresta está associada a um conjunto de um ou dois vértices, chamados vértice terminal ou nó terminal. Uma aresta é dita conectar seus vértices terminais.

Ex. aresta e_5 conecta os vértices $\{v_2, v_4\}$. Aresta e_6 conecta apenas $\{v_3\}$.

Um laço (*loop*) é uma aresta com somente um vértice terminal. Ex. aresta e_6.



A extremidade de uma aresta é o seu vértice terminal. **Ex.** vértices v_4 e v_1 são extremidades da aresta e_1.

Uma aresta é dita incidente a cada um de seus vértices terminais. **Ex.** aresta e_5 é incidente nos vértices v_4 e v_2.

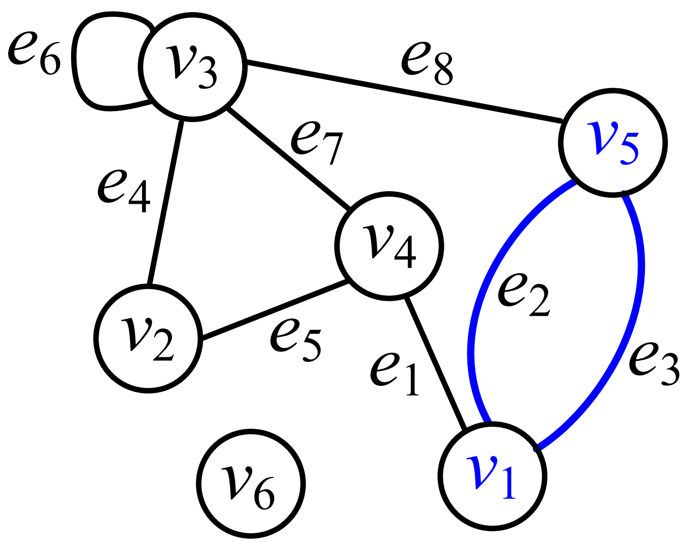
Terminologia

Arestas paralelas são aquelas associadas ao mesmo conjunto de vértices.

Ex. as arestas e_2 e e_3 possuem o mesmo conjunto de vértices $\{v_1, v_5\}$.

Vértices adjacentes (vizinhos) são os que estão conectados por uma mesma aresta.

Ex. os vértices v_2 e v_4 são adjacentes, mas v_2 e v_5 <u>não</u> são.



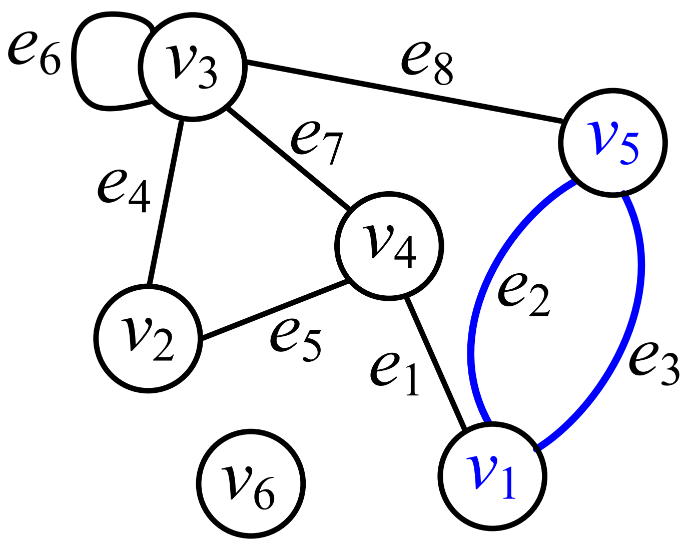
Terminologia

Arestas paralelas são aquelas associadas ao mesmo conjunto de vértices.

Ex. as arestas e_2 e e_3 possuem o mesmo conjunto de vértices $\{v_1, v_5\}$.

Vértices adjacentes (vizinhos) são os que estão conectados por uma mesma aresta.

Ex. os vértices v_2 e v_4 são adjacentes, mas v_2 e v_5 não são.



Um vértice que é terminal de um laço é dito ser adjacente a si próprio. **Ex.** vértice v_3.

Arestas adjacentes são as incidentes no mesmo vértice. **Ex.** arestas e_4 e e_5 são adjacentes (ambas incidem em v_2).

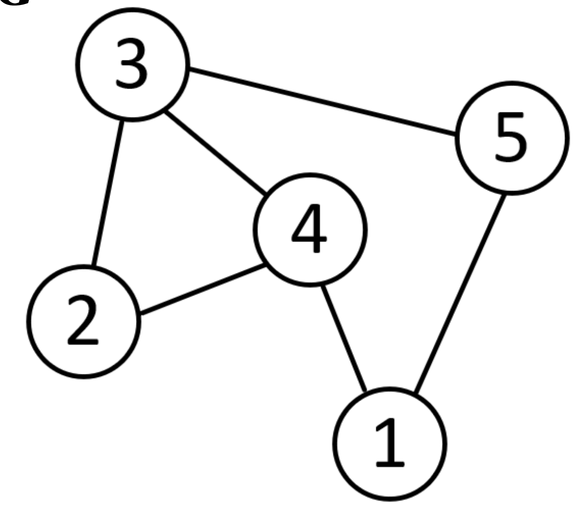
Um vértice isolado é aquele que não possui nenhuma aresta incidente. **Ex.** vértice v_6.

Tipos – Grafo Simples

Definição: Um grafo simples não possui laços e nem arestas paralelas ou direcionadas.

As arestas são bidirecionais. A relação existente entre os vértices é simétrica, correspondendo a um par não-ordenado. **Ex.** aresta {1, 4} = {4, 1}.

G

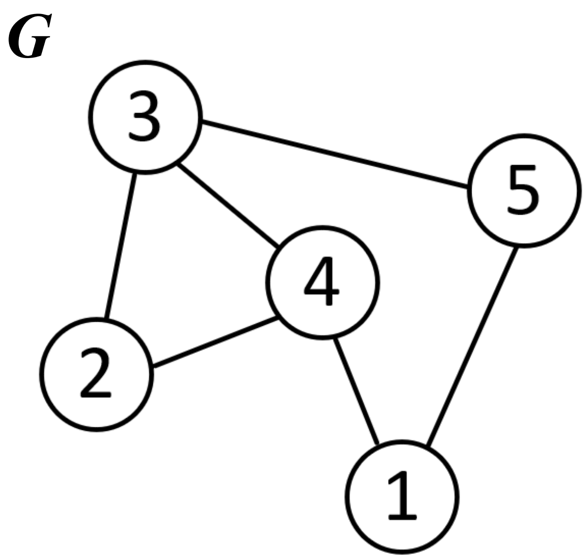


Grafo Simples

Tipos – Grafo Simples

Definição: Um grafo simples não possui laços e nem arestas paralelas ou direcionadas.

As arestas são bidirecionais. A relação existente entre os vértices é simétrica, correspondendo a um par não-ordenado. **Ex.** aresta {1, 4} = {4, 1}.



Grafo Simples

O grafo G pode ser representado como:

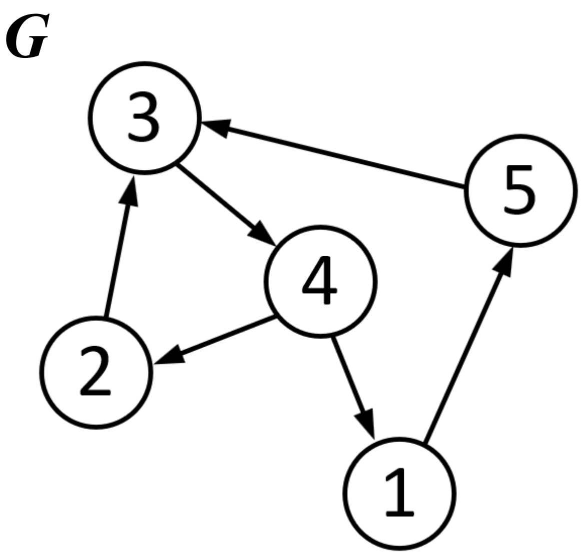
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$E = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$$

- $|V|$ corresponde quantidade de vértices do grafo (ordem do grafo). Ex. G possui grau 5.
- $|E|$ corresponde a quantidade de arestas (tamanho do grafo). Ex. G possui tamanho 6.

Grafo Dirigido (digrafo)

Definição: Um grafo dirigido consiste em arestas, chamadas arcos, cuja terminação mostra a direção do relacionamento existente entre os vértices envolvidos.

A relação existente entre os vértices de um digrafo é assimétrica. Cada aresta está associada a um par ordenado de vértices. **Ex.** arco (1, 4) ≠ (4, 1).

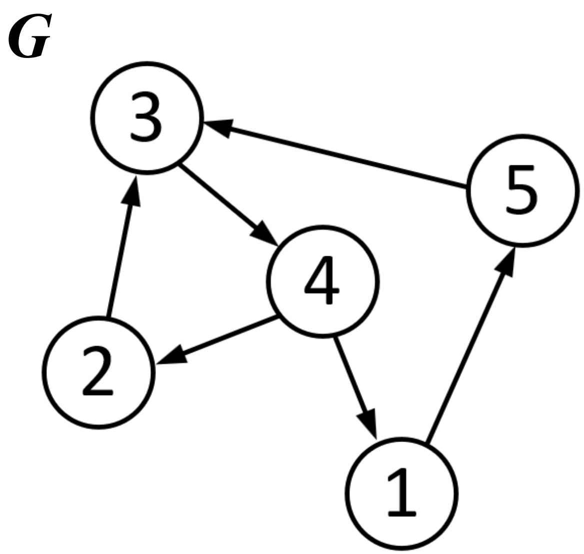


Digrafo

Grafo Dirigido (digrafo)

Definição: Um grafo dirigido consiste em arestas, chamadas arcos, cuja terminação mostra a direção do relacionamento existente entre os vértices envolvidos.

A relação existente entre os vértices de um digrafo é assimétrica. Cada aresta está associada a um par ordenado de vértices. **Ex.** arco (1, 4) ≠ (4, 1).



Digrafo

Para representar o arco o vértice à esquerda é tido como origem e da direita como destino. Em um arco associado ao par de vértices (u, v), diz-se que a aresta é dirigida de u (origem) para v (destino).

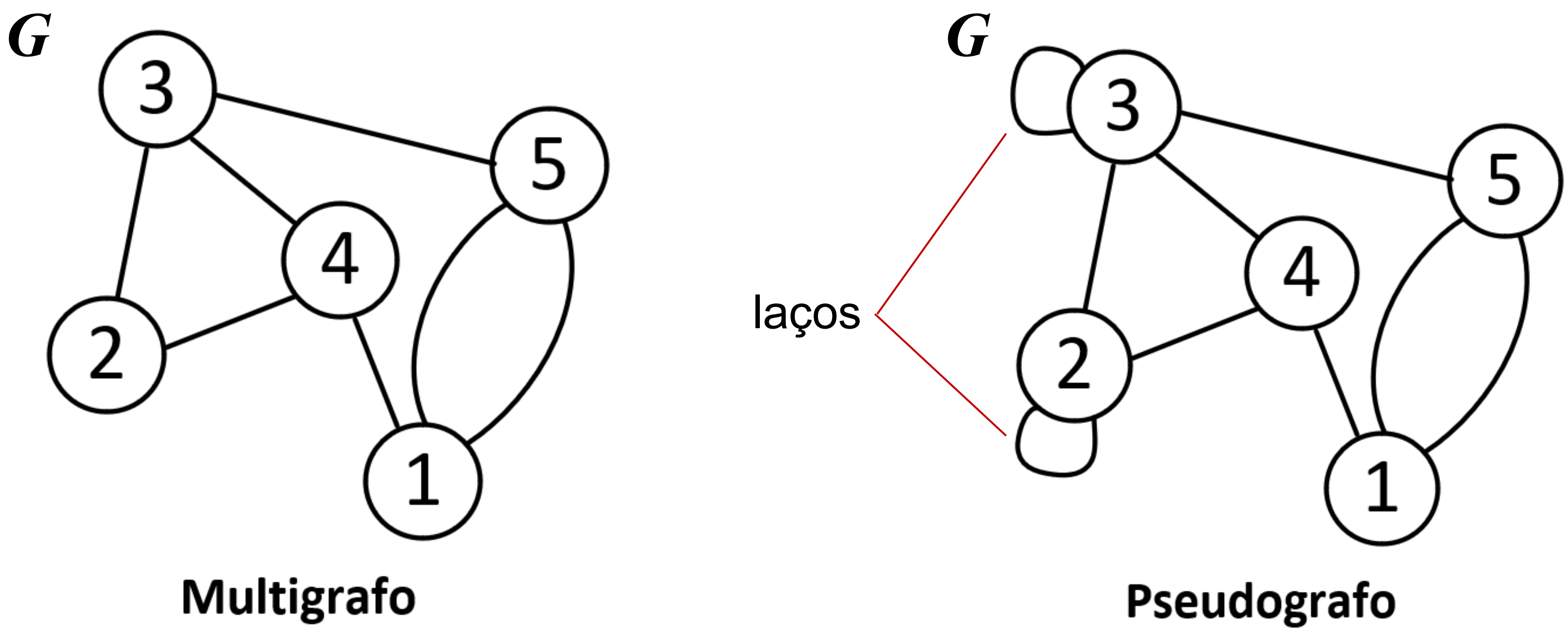
Representação do digrafo G:

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{(1, 5), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (5, 3)\}$

A aresta $(1, 5)$ é incidente de 1 e é incidente a 5.
Vértice 3 é adjacente a 2, mas o contrário não.

Multigrafo e Pseudografo

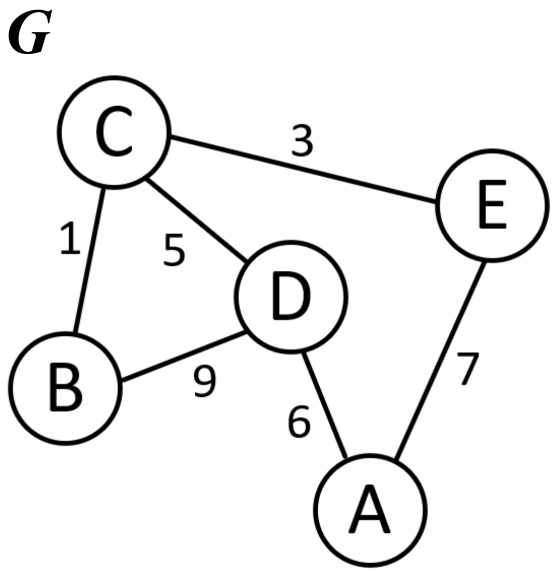
Definição: **Multigrafo** é um grafo que possui arestas paralelas mas não possui laços. Formalmente, um multigrafo $G = (V, E)$ consiste dos conjuntos V e E, além de uma função f de E para $\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Duas arestas e_i e e_j são chamadas múltiplas ou paralelas se $f(e_i) = f(e_j)$. Um **Pseudografo** possui laços e arestas paralelas.



Grafo Valorado

Definição: Um grafo (ou digrafo) valorado, também chamado ponderado, é aquele em que cada aresta (ou arco) tem um valor (peso) associado.

Um grafo valorado $G = (V, E)$ consiste em um conjunto de vértices V, um conjunto E de arestas, e uma função f de E para P, onde P representa o conjunto de valores associados as arestas.



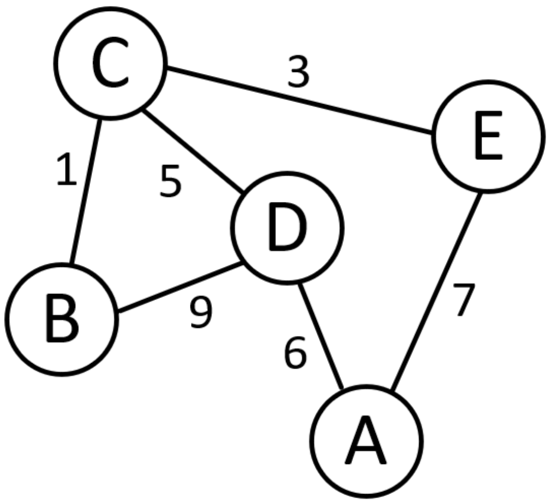
Grafo Valorado

Grafo Valorado

Definição: Um grafo (ou digrafo) valorado, também chamado ponderado, é aquele em que cada aresta (ou arco) tem um valor (peso) associado.

Um grafo valorado $G = (V, E)$ consiste de um conjunto de vértices V, um conjunto E de arestas, e uma função f de E para P, onde P representa o conjunto de valores associados as arestas.

G



Grafo Valorado

Representação de um grafo valorado:

$V = \{A, B, C, D, E\}$

$E = \{\{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}, \{C, E\}\}$

$P = \{6, 7, 1, 9, 5, 3\}$

Um grafo é dito rotulado se estão associados dados de algum tipo às suas arestas ou vértices.

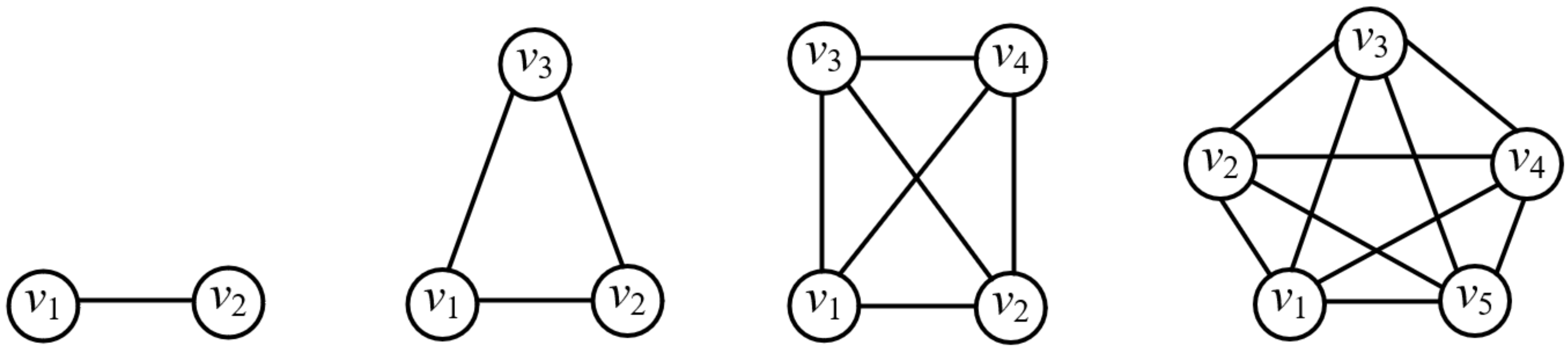
Resumo das Características dos Tipos de Grafos

Tipo	Aresta	Arestas Múltiplas	Laços
Grafo Simples	Não Dirigida	Não	Não
Multigrafo	Não Dirigida	Sim	Não
Pseudografo	Não Dirigida	Sim	Sim
Grafo Dirigido	Dirigida	Não	Não
Multigrafo Dirigido	Dirigida	Sim	Não
Pseudografo Dirigido	Dirigida	Sim	Sim

Grafo Completo

Definição: Um grafo completo de n vértices denominado K_n é um grafo simples com $n = |V|$ vértices cujo conjunto de arestas E contém exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.

Ex. Grafos completos com 2 a 5 vértices:



K_2 1 aresta | K_3 3 arestas | K_4 6 arestas | K_5 10 arestas

Total de arestas de um grafo completo é dada por $K_n = \dfrac{(|V|^2 - |V|)}{2}$

Subgrafo

Definição: Um grafo $H = (V', E')$ é um subgrafo de um grafo $G = (V, E)$ se e somente se (sse) cada:

- vértice de H é também um vértice de G, i.e., $V' \subseteq V$
- aresta de H é também uma aresta de G, i.e., $E' \subseteq E$
- aresta de H tem os mesmos terminais em G, i.e., $\{u, v\} \in E'$ então $\{u, v\} \in E$.

Subgrafo

Definição: Um grafo $H = (V', E')$ é um subgrafo de um grafo $G = (V, E)$ se e somente se (sse) cada:

- vértice de H é também um vértice de G, i.e., $V' \subseteq V$
- aresta de H é também uma aresta de G, i.e., $E' \subseteq E$
- aresta de H tem os mesmos terminais em G, i.e., $\{u, v\} \in E'$ então $\{u, v\} \in E$.

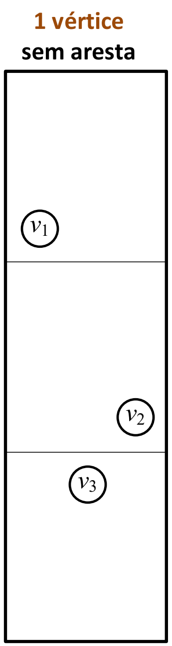
Total de subconjuntos distintos de um grafo simples e completo com n vértices (K_n):

- Uso de análise combinatória (contagem de elementos de uma coleção).
- Calcular a quantidade de subgrafos com 1 vértice, além dos subgrafos obtidos pelas combinações de vértices (2, 3, ..., |V|) até obter o grafo (K_n).
- Além dos subgrafos sem arestas, considerar os casos obtidos pelas combinações de ligações de pares de vértices com 1 aresta, 2 arestas e assim sucessivamente até obter K_n.

Subgrafo

Ex. Quantidade de subgrafos com ao menos um vértice que K_3 que possui:

- **1 vértice:** existem 3 subgrafos sem nenhuma aresta.



Subgrafo

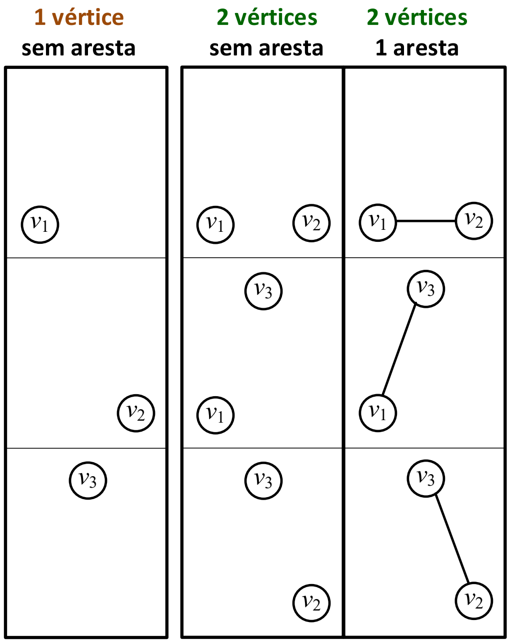
Ex. Quantidade de subgrafos com ao menos um vértice que K_3 que possui:

- **2 vértices:** existem **C(3,2) = 3** possibilidades de subgrafos de 2 vértices a partir de um conjunto de três vértices. Cada possibilidade pode ser <u>sem aresta</u> ou <u>com aresta</u> (i.e., 3 x 2 = 6 subgrafos).

$$C(n, p) = \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C(3, 2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{3!}{2!(3-2)!}$$

$$C(3, 2) = \frac{6}{2 \cdot 1} = \mathbf{3}$$



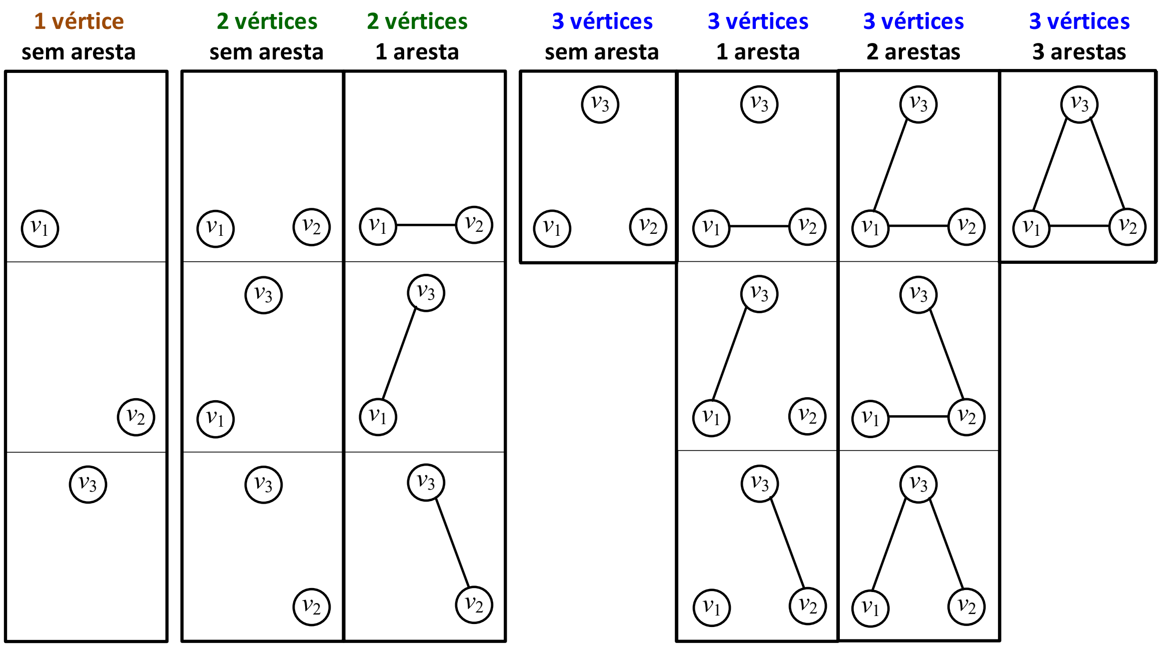
Subgrafo

Ex. Quantidade de subgrafos com ao menos um vértice que K_3 que possui:

- **3 vértices:** o conjunto potência de E fornece todos os subconjuntos de arestas que podem ser escolhidas considerando a combinação obtida por ligações de 1 aresta, de 2 arestas e assim sucessivamente. O número de subconjuntos de arestas distintos pode ser obtido pelo conjunto potência de E, dado por $P(E) = 2^{|E|}$.

$P(E) = 2^3 =$ 8 subgrafos

$$P(E) = \left\{ \begin{array}{c} \varnothing \\ \{v_1, v_2\}, \\ \{v_1, v_3\}, \\ \{v_2, v_3\}, \\ \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \\ \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\} \\ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\} \\ \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\} \end{array} \right\}$$

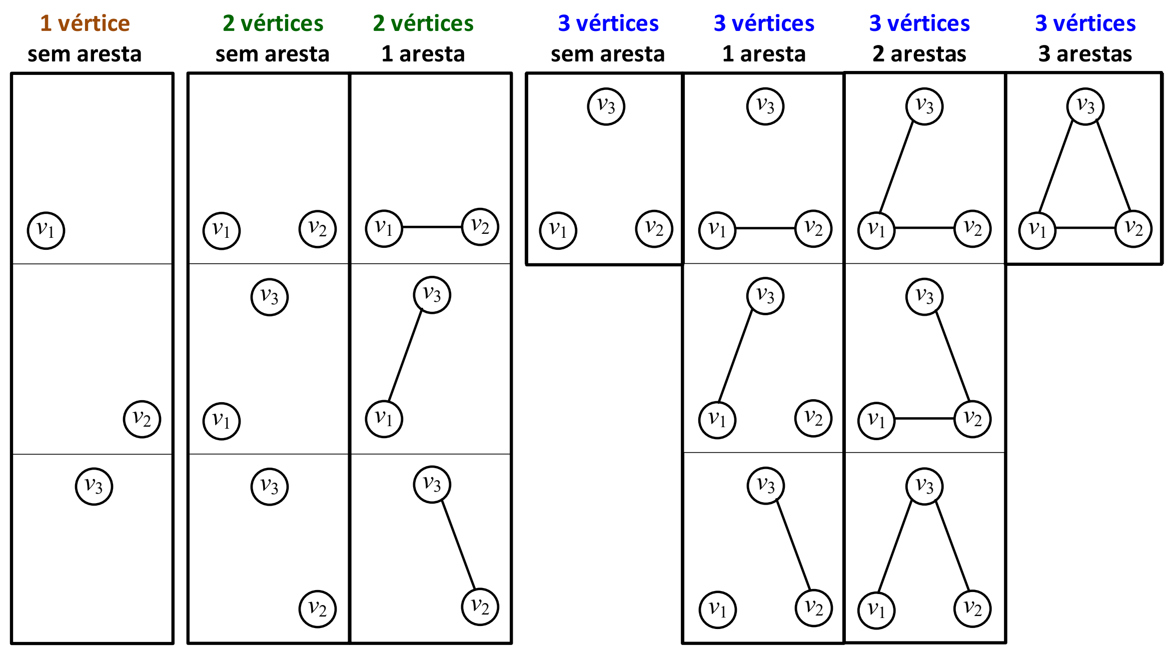


Subgrafo

Ex. Quantidade de subgrafos com ao menos um vértice que K_3 que possui:

- **3 vértices:** o conjunto potência de E fornece todos os subconjuntos de arestas que podem ser escolhidas considerando a combinação obtida por ligações de 1 aresta, de 2 arestas e assim sucessivamente. O número de subconjuntos de arestas distintos pode ser obtido pelo conjunto potência de E, dado por $P(E) = 2^{|E|}$.

A quantidade total de subgrafos de K_3 com ao menos um vértice é a soma de = 3 + 6 + 8 = 17



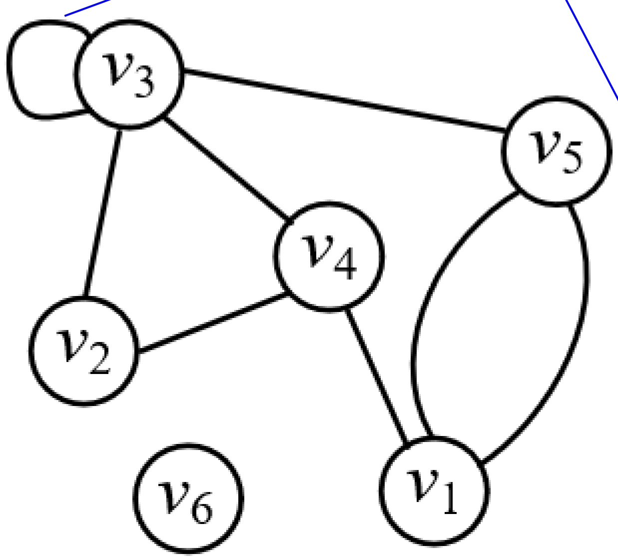
Grau de um Vértice

Definição: Seja G um grafo e um vértice v de G. O grau (*degree*) de v, denominado $grau(v)$ ou $deg(v)$, é igual ao número de arestas que são incidentes a v (vértices adjacentes a v).

Grau em um pseudografo G NÃO DIRIGIDO:

G

laços contam 2x



grau de cada vértice

$deg(v_1) = 3$

$deg(v_2) = 2$

$deg(v_3) = 5$

$deg(v_4) = 3$

$deg(v_5) = 3$

$deg(v_6) = 0$

O **grau total** de G é a soma dos graus de todos os vértices de G.

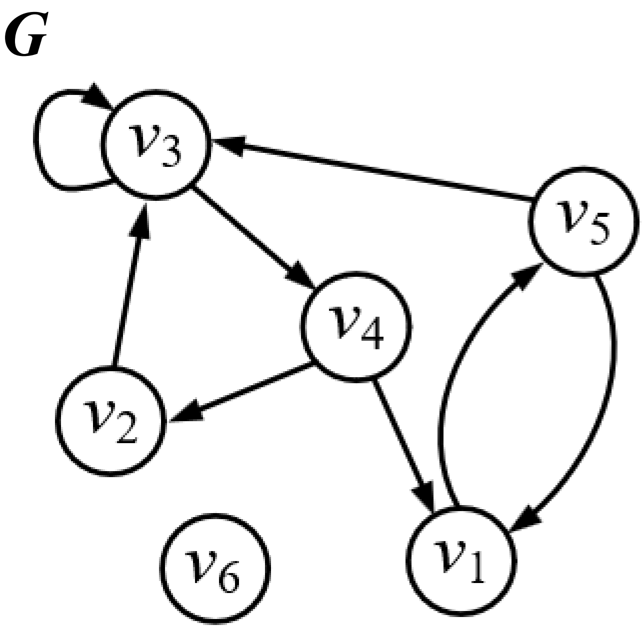
$$\sum_{v \in V} deg(v) = 16$$

Grau de um Vértice

Grau de Entrada (*indegree*) ou $deg^{-}(v)$ é o número de <u>arestas que entram em</u> v.

Grau de Saída (*outdegree*) ou $deg^{+}(v)$ é o número de <u>arestas que saem de</u> v.

Grau em um pseudografo G <u>DIRIGIDO</u>:



grau de ENTRADA	grau de SAÍDA
$deg^{-}(v_1) = 2$	$deg^{+}(v_1) = 1$
$deg^{-}(v_2) = 1$	$deg^{+}(v_2) = 1$
$deg^{-}(v_3) = 3$	$deg^{+}(v_3) = 2$
$deg^{-}(v_4) = 1$	$deg^{+}(v_4) = 2$
$deg^{-}(v_5) = 1$	$deg^{+}(v_5) = 2$
$deg^{-}(v_6) = 0$	$deg^{+}(v_6) = 0$

DENOMINAÇÃO DO VÉRTICE

Fonte (*source*)
$deg^{-}(v) = 0$

Sorvedouro (*sink*)
$deg^{+}(v) = 0$

Grau de um Vértice

Teorema do Aperto de Mãos (*Handshaking*)

A soma dos graus de todos os vértices de um grafo não-direcionado (simples) é duas vezes o seu número de arestas.

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \times |E|$$

Corolários

- O número de vértices de grau ímpar em um grafo não direcionado é par.
- O grau total de um grafo é par.

Grafo Regular

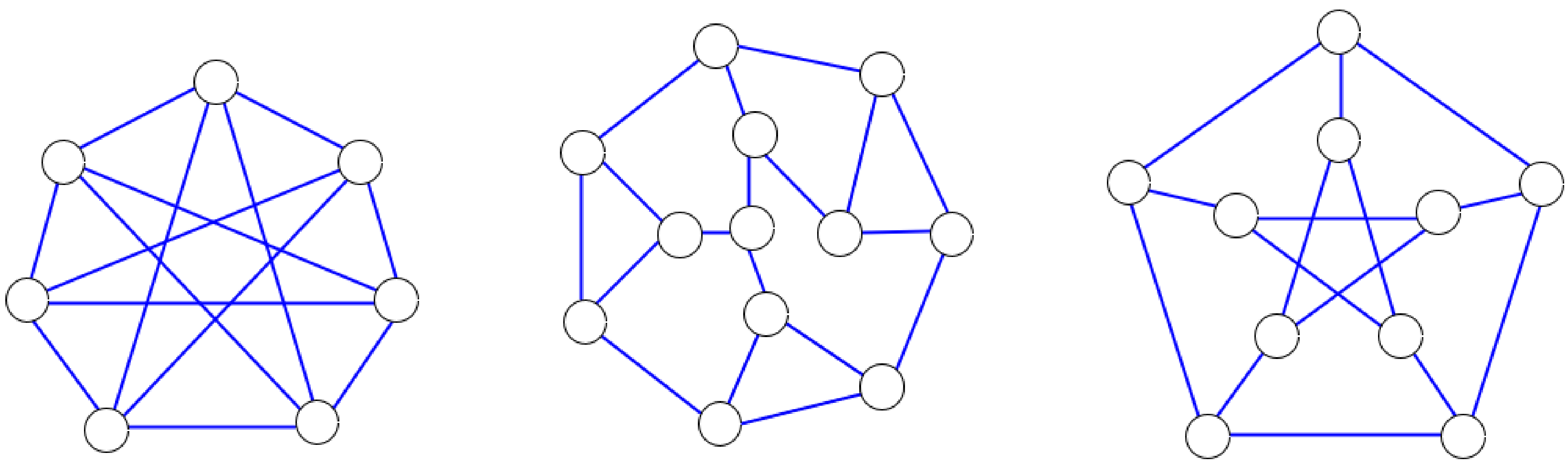
Definição: Um grafo é dito ser regular quando todos os seus vértices têm o mesmo grau. Qualquer grafo completo é regular.

Um grafo regular recebe a denominação r-regular, sendo r o grau.

Exemplos:

Petersen e Frucht são 3-regular
Caley / Quartic é 4-regular

A quantidade de arestas em um grafo r-regular é $|E| = \dfrac{|V| \times r}{2}$



Caley / Quartic — Frucht — Petersen

Densidade de um grafo

Função entre a quantidade de vértices e a de arestas. Um grafo é **denso** quando sua densidade é próxima a 1, sendo **esparso** quando próxima a 0.

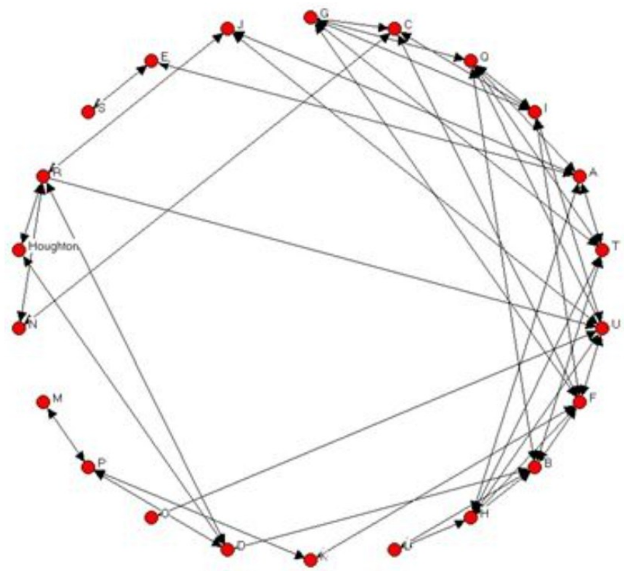
Cálculo da Densidade (*D*)

Grafo Simples

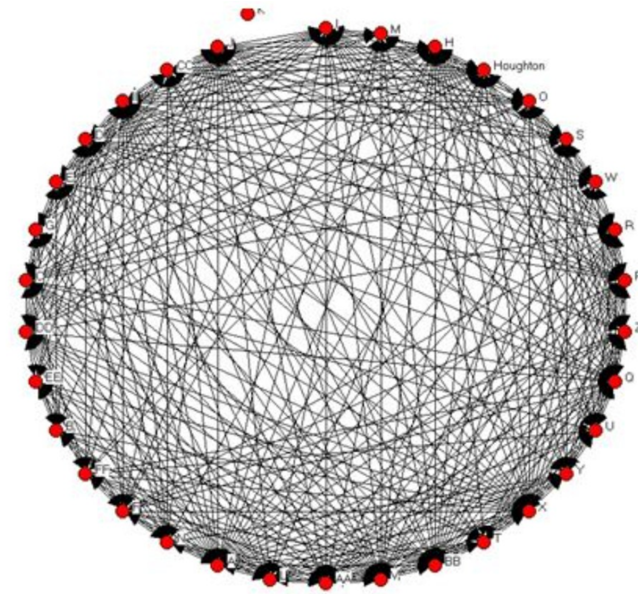
$$\mathbf{D} = \frac{2E}{V\,(V-1)}$$

Digrafo

$$\mathbf{D} = \frac{E}{V\,(V-1)}$$



Esparso



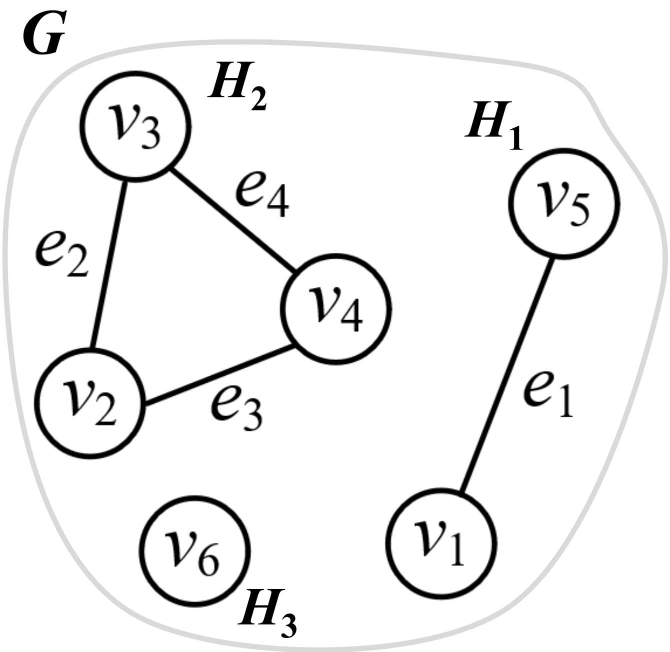
Denso

- A densidade é 0 para um grafo sem arestas e 1 para um grafo completo.
- A densidade de multigrafos e pseudografos pode ser maior que 1. Cada aresta deve ser contabilizada (inclusive *loops*), considerar a fórmula adequada (grafos simples ou digrafos).

Componente Conexo

Definição: Um grafo H é um componente conexo de um grafo G sse:

- H é um subgrafo de G;
- H é conexo;
- Nenhum outro subgrafo de G tem H como subgrafo.



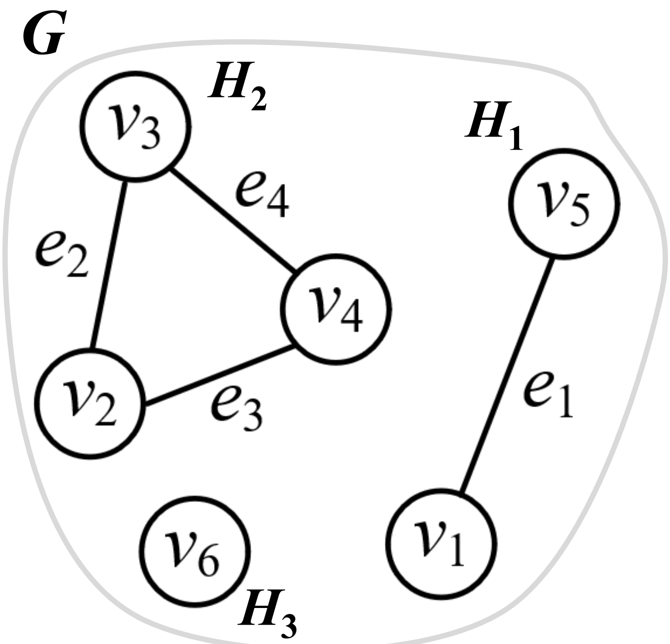
grafo **desconexo**

Um grafo é constituído pela união de seus componentes conexos. Em um grafo conexo G é possível alcançar qualquer vértice v_j a partir de qualquer vértice v_i.

Componente Conexo

Definição: Um grafo H é um componente conexo de um grafo G sse:

- H é um subgrafo de G;
- H é conexo;
- Nenhum outro subgrafo de G tem H como subgrafo.



grafo **desconexo**

Um grafo é constituído pela união de seus componentes conexos. Em um grafo conexo G é possível alcançar qualquer vértice v_j a partir de qualquer vértice v_i.

O grafo G possui três componentes conexos:

$$H_1 : V_1 = \{v_1, v_5\} \, ; \, E_1 = \{e_1\}$$

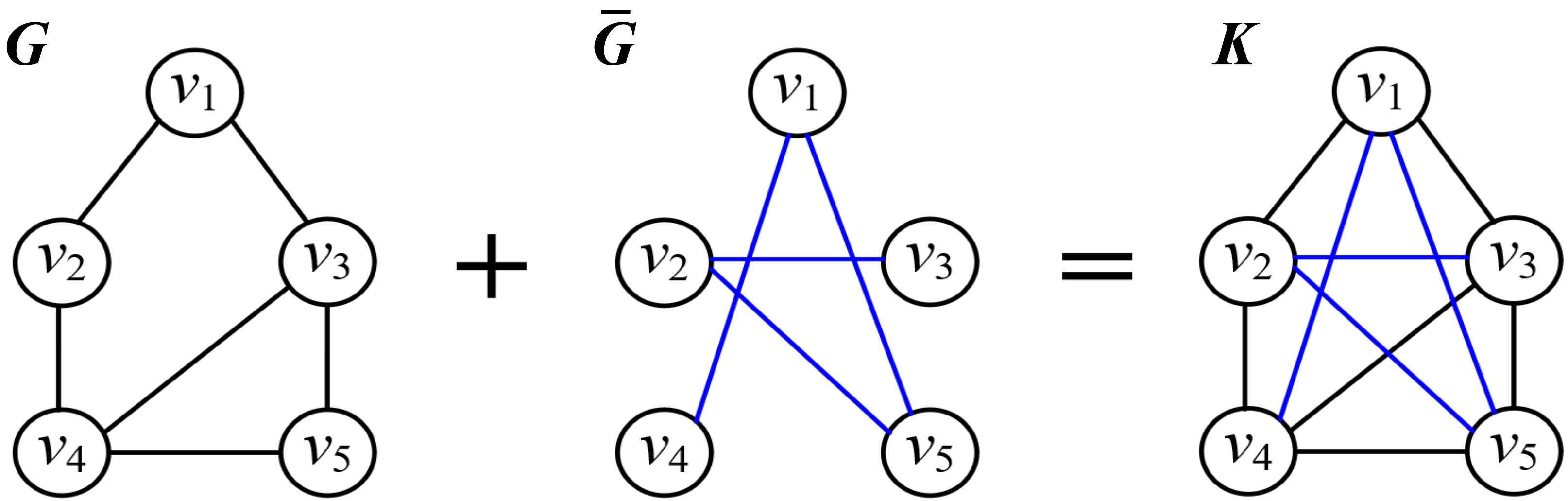
$$H_2 : V_2 = \{v_2, v_3, v_4\} \, ; \, E_2 = \{e_2, e_3, e_4\}$$

$$H_3 : V_3 = \{v_6\} \, ; \, E_3 = \varnothing$$

Grafo Complemento

Definição: Seja $G = (V, E)$ um grafo simples, o complemento de G, denominado $\overline{G}$ ou $C(G)$, é um grafo que no qual:

- Todos os vértices de G também são vértices de $\overline{G}$;
- As arestas de $\overline{G}$ são aquelas que faltam em G para formar um grafo completo K.

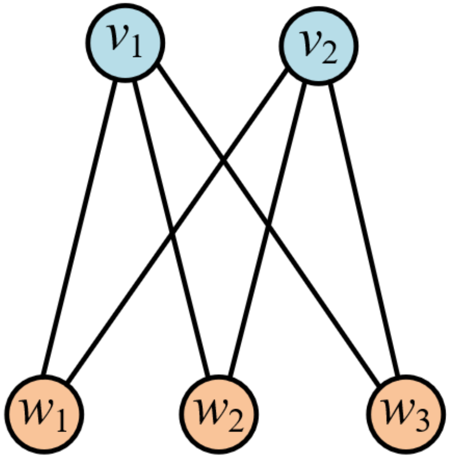


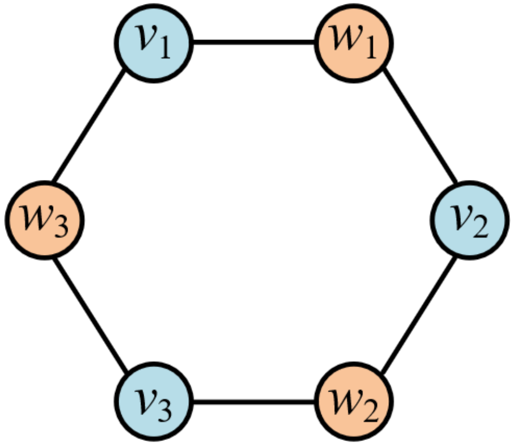
Grafo Bipartido

Definição: Um grafo bipartido é um grafo com vértices v_i e w_j que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\forall\, i, k = 1, 2, ..., m \wedge$$
$$\forall\, j, l = 1, 2, ..., n$$

- $\forall$ as arestas do grafo, cada uma conecta algum vértice v_i a algum vértice w_j
- $\neg\exists$ uma aresta entre cada par de vértices v_i e v_k
- $\neg\exists$ uma aresta entre cada par de vértices w_j e w_l

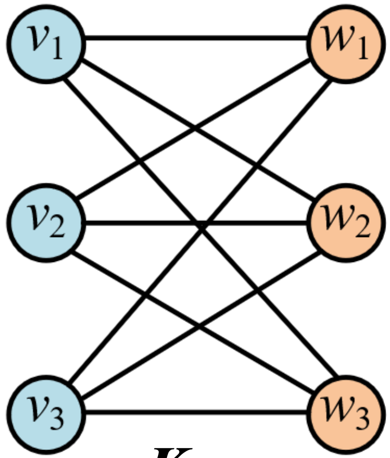




grafo bipartido completo

$K_{m,n}$ $\quad |V| = m + n$

$|E| = m \times n$



$K_{3,3}$

2.2. Representação Computacional

Para o armazenamento e manipulação computacional de um grafo é necessário representar os elementos que o define (vértices e arestas) através de estruturas de dados.

O tamanho da entrada de dados é medido em termos da quantidade de vértices $|V|$ e de arestas $|E|$.

2.2. Representação Computacional

Para o armazenamento e manipulação computacional de um grafo é necessário representar os elementos que o define (vértices e arestas) através de estruturas de dados.

O tamanho da entrada de dados é medido em termos da quantidade de vértices $|V|$ e de arestas $|E|$.

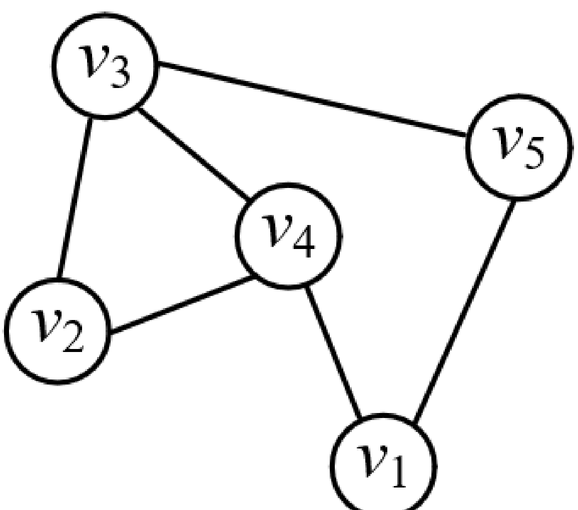
Dado um grafo G = (V, E) o conjunto de arestas pode ser representado por um subconjunto de V x V (adjacência). Uma alternativa é um subconjunto de V x E (incidência) no qual cada vértice é associado as respectivas arestas.

As estruturas de dados comumente adotadas são baseadas em matrizes e listas. A escolha da estrutura mais adequada depende das características do grafo (ex. tamanho, densidade etc) e do algoritmo que será utilizado.

Matriz de Adjacências

Grafo Simples: Uma Matriz de Adjacências $A_{n \times n}$ de ordem $n = |V|$ de um grafo G, é uma matriz quadrada e binária na qual o valor em cada célula a_{ij} indica a existência de aresta entre um vértice v_i e um vértice v_j.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe aresta } \{v_i, v_j\}, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



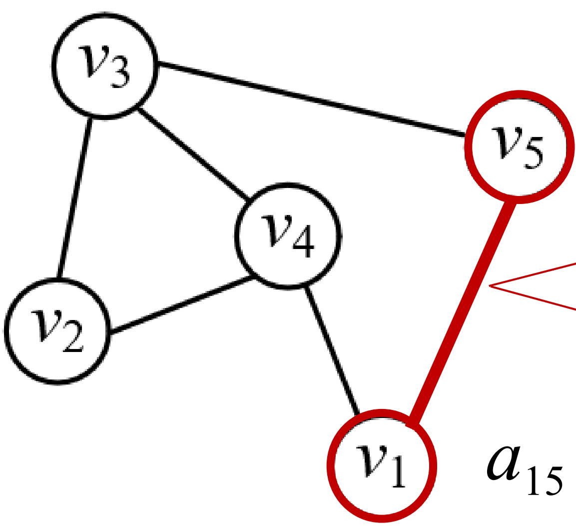
$$\begin{array}{c|ccccc} A & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Matriz de Adjacências

Grafo Simples: Uma Matriz de Adjacências $A_{n \times n}$ de ordem $n = |V|$ de um grafo G, é uma matriz quadrada e binária na qual o valor em cada célula a_{ij} indica a existência de aresta entre um vértice v_i e um vértice v_j.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe aresta } \{v_i, v_j\}, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Simétrica para grafos não-direcionados (triângulos inferior e superior idênticos).



$a_{15} = a_{51} = 1$

A	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	0	1	1
v_2	0	0	1	1	0
v_3	0	1	0	1	1
v_4	1	1	1	0	0
v_5	1	0	1	0	0

Ocupa $O(V^2)$ de espaço mesmo em grafos esparsos.

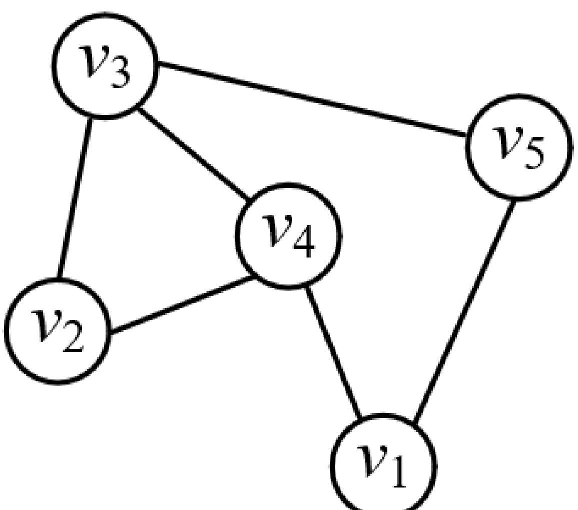
2.2. Representação Computacional

Matriz de Adjacências

Grafo Simples: Uma Matriz de Adjacências $A_{n \times n}$ de ordem $n = |V|$ de um grafo G, é uma matriz quadrada e binária na qual o valor em cada célula a_{ij} indica a existência de aresta entre um vértice v_i e um vértice v_j.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe aresta } \{v_i, v_j\}, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Diagonal representa laços, sendo 0 no grafo simples.



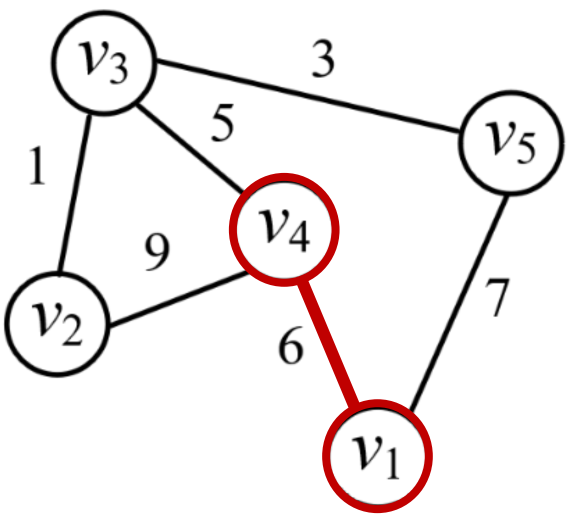
A	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	0	1	1
v_2	0	0	1	1	0
v_3	0	1	0	1	1
v_4	1	1	1	0	0
v_5	1	0	1	0	0

Matriz de Adjacências

Grafo Valorado: Uma Matriz de Adjacências $A_{n \times n}$ de ordem $n = |V|$ de um grafo G, é uma matriz quadrada na qual o valor em cada célula a_{ij} contém o peso da aresta existente entre um vértice v_i e um vértice v_j.

$$a_{ij} = \begin{cases} w \neq 0 & \text{se existe aresta } \{v_i, v_j\}, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Célula da matriz contém o valor (peso) da aresta.



A	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	0	6	7
v_2	0	0	1	9	0
v_3	0	1	0	5	-3
v_4	6	9	5	0	0
v_5	7	0	-3	0	0

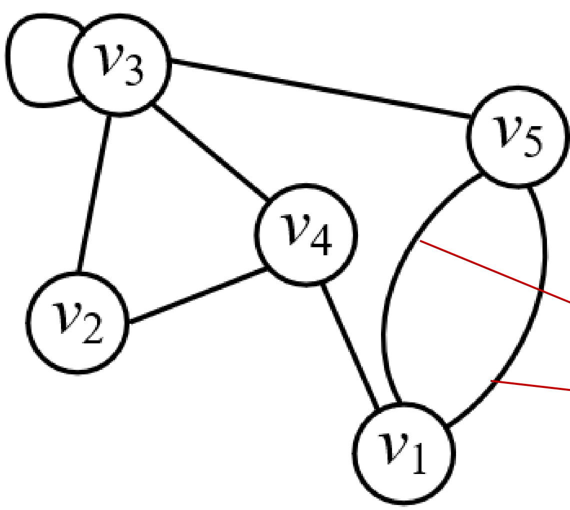
Simétrica para grafos não direcionados

Pesos podem ser negativos.

Matriz de Adjacências

Multigrafo **e** **Pseudografo:** Uma Matriz de Adjacências $A_{n \times n}$ de ordem $n = |V|$ de um grafo G é uma matriz quadrada na qual cada elemento a_{ij} contém a quantidade de arestas paralelas ou laços existentes entre um vértice v_i e um vértice v_j.

$$a_{ij} = \begin{cases} x \geq 1 & \text{se existe aresta } \{v_i, v_j\}, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



$$\begin{array}{c|ccccc} A & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

No pseudografo a diagonal representa a quantidade de laços.

Simétrica para grafos não direcionados

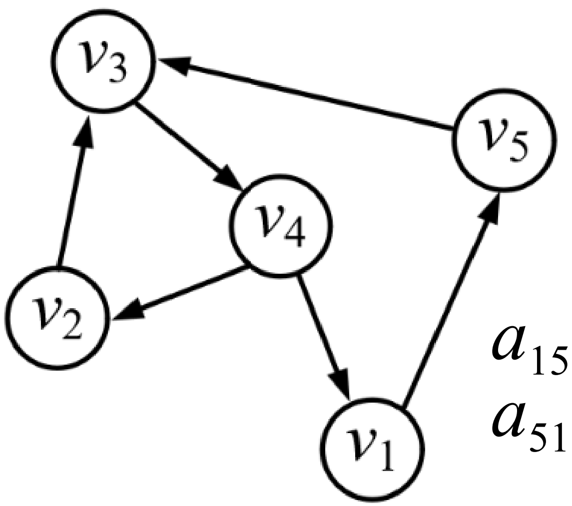
Matriz de Adjacências

Digrafo: Uma Matriz de Adjacências $A_{n \times n}$ de ordem $n = |V|$ de um digrafo G é uma matriz quadrada na qual cada elemento a_{ij} indica a existência de arcos entre um vértice v_i e um vértice v_j, sendo $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$.

$$a_{ij} = \begin{cases} x \geq 1 & \text{se existe arco } \{v_i, v_j\}, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(v_i, v_j)

origem destino



$a_{15} = 1$
$a_{51} = 0$

DESTINO (j)

ORIGEM (i)

$$\begin{array}{c|ccccc} A & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

<u>Assimétrica</u> para grafos direcionados

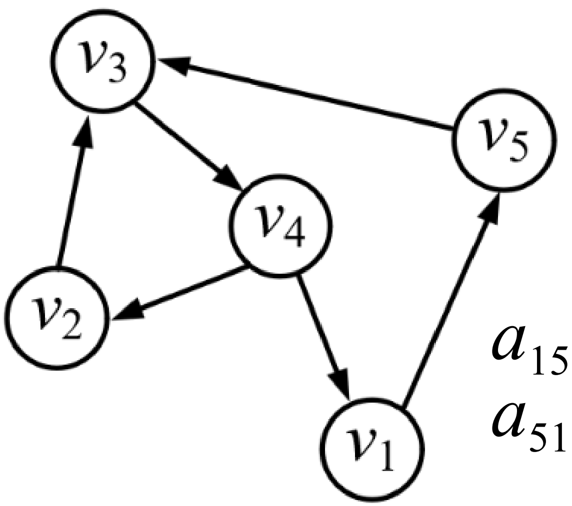
Matriz de Adjacências

Digrafo: Uma Matriz de Adjacências $A_{n \times n}$ de ordem $n = |V|$ de um digrafo G é uma matriz quadrada na qual cada elemento a_{ij} indica a existência de arcos entre um vértice v_i e um vértice v_j, sendo $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$.

$$a_{ij} = \begin{cases} x \geq 1 & \text{se existe arco } \{v_i, v_j\}, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$a_{ij} > 1$ indica arcos paralelos

$a_{ij} > 0$ em células da diagonal são laços



$a_{15} = 1$

$a_{51} = 0$

DESTINO (j)

ORIGEM (i)

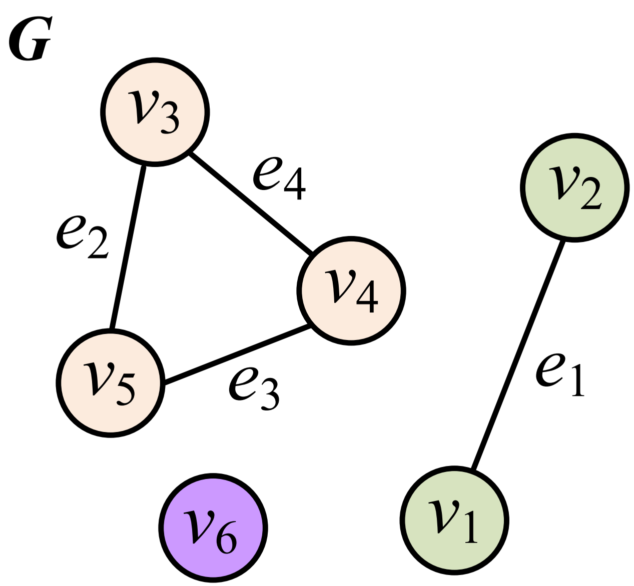
A	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	0	0	1
v_2	0	0	1	0	0
v_3	0	0	0	1	0
v_4	1	1	0	0	0
v_5	0	0	1	0	0

Alguns autores consideram -1 para indicar a inexistência de aresta em um digrafo ponderado.

Assimétrica para grafos direcionados

Matriz de Adjacências

Componentes Conexos: Uma Matriz de Adjacências $A_{n \times n}$ de ordem $n = |V|$ de um grafo G que possui componentes conexos, é constituída por blocos disjuntos ao longo da diagonal principal, sendo um bloco para cada componente.



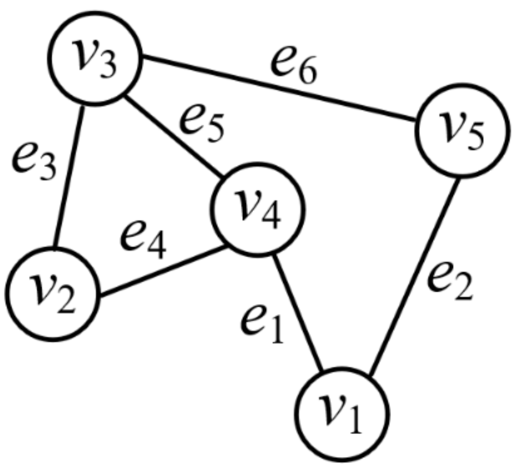
Blocos disjuntos, um para cada componente conexo do grafo G.

A	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	1	0	0	0	0
v_2	1	0	0	0	0	0
v_3	0	0	0	1	1	0
v_4	0	0	1	0	1	0
v_5	0	0	1	1	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0

Matriz de Incidências

Uma Matriz de Incidências $M_{n \times p}$ de ordem n = $|V|$ e p = $|E|$ de um grafo G é uma matriz na qual cada célula m_{ij} indica a incidência de uma aresta e_j em um vértice v_i. No grafo valorado, $m_{ij} > 1$ indica o peso da aresta.

$$m_{ij} = \begin{cases} x \geq 1 & \text{se a aresta } e_j \text{ incide em } v_i, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



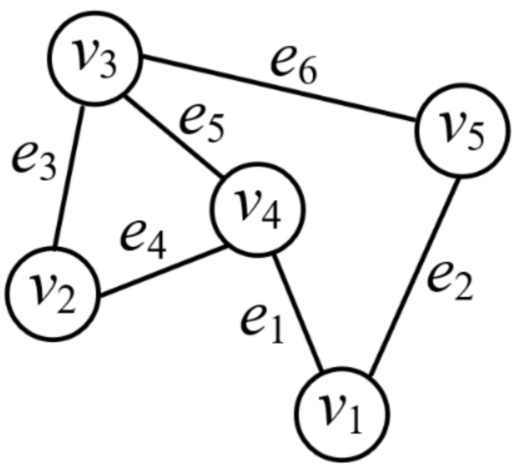
M	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	0	0	1	1	0	0
v_3	0	0	1	0	1	1
v_4	1	0	0	1	1	0
v_5	0	1	0	0	0	1

Matriz de Incidências

Uma Matriz de Incidências $M_{n \times p}$ de ordem $n = |V|$ e $p = |E|$ de um grafo G é uma matriz na qual cada célula m_{ij} indica a incidência de uma aresta e_j em um vértice v_i. No grafo valorado, $m_{ij} > 1$ indica o peso da aresta.

$$m_{ij} = \begin{cases} x \geq 1 & \text{se a aresta } e_j \text{ incide em } v_i, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Cada aresta e laço deve possuir um identificador único (coluna na matriz).



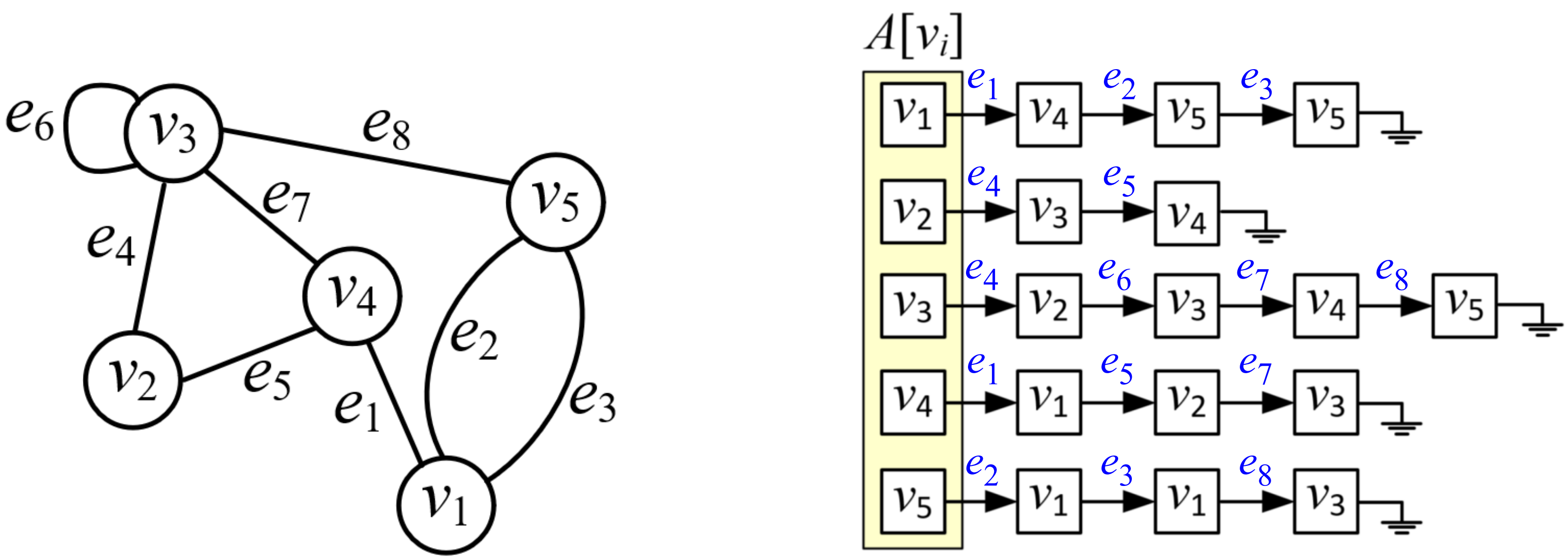
$m = |E|$

M	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	0	0	1	1	0	0
v_3	0	0	1	0	1	1
v_4	1	0	0	1	1	0
v_5	0	1	0	0	0	1

$n = |V|$

Lista de Adjacências

Uma Lista de Adjacência de um grafo G consiste de um vetor Adj de $|V|$ listas, sendo uma para cada vértice $v_i \in G$. Para cada vértice v_i, a lista $Adj[v_i]$ contém todos os vértices $v_j \in G$ que são adjacentes a v_i.

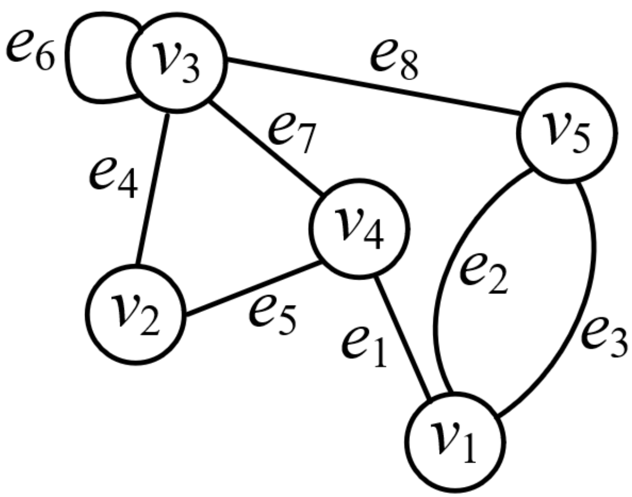


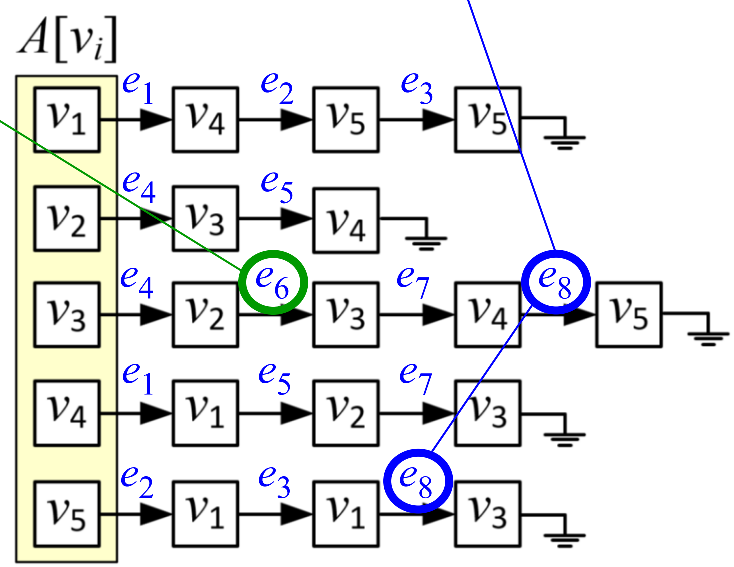
Lista de Adjacências

Uma Lista de Adjacência de um grafo G consiste de um vetor Adj de $|V|$ listas, sendo uma para cada vértice $v_i \in G$. Para cada vértice v_i, a lista $Adj[v_i]$ contém todos os vértices $v_j \in G$ que são adjacentes a v_i.

O comprimento da lista de adjacência:

- **Grafo não-dirigido:** $2|E| - qtd\_laços$, cada aresta aparece duas vezes na lista, já os laços parecem apenas uma vez cada um.



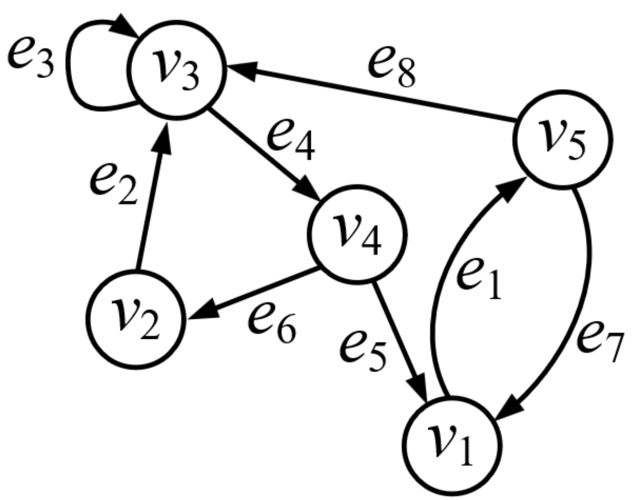


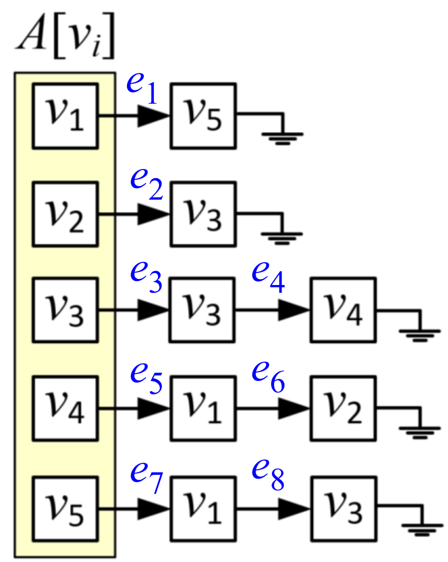
Lista de Adjacências

Uma Lista de Adjacência de um grafo G consiste de um vetor Adj de $|V|$ listas, sendo uma para cada vértice $v_i \in G$. Para cada vértice v_i, a lista $Adj[v_i]$ contém todos os vértices $v_j \in G$ que são adjacentes a v_i.

O comprimento da lista de adjacência:

- **Grafo dirigido:** $|E|$, cada aresta aparece uma única vez na lista.





Comparação entre Matriz e Lista

Matriz de Adjacência
- Simétrica para grafos não-direcionados, O(V^2) de espaço independente da densidade.
- Consultar a existência de adjacência entre vértices custa O(1).

Lista de Adjacência
- Aloca apenas a memória necessária, ocupa O(E) de espaço.
- Consultar a existência de adjacência entre vértices custa O(V).

	Estrutura de Dados			
Operação	**Matriz de Adjacência**	**Matriz de Incidência**	**Lista de Adjacência**	**Lista de Incidência**
Armazenar	O(V^2)	O($V \cdot E$)	O($V+E$)	O($V+E$)
Adicionar Vértice	O(V^2)	O($V \cdot E$)	O(1)	O(1)
Adicionar Aresta	O(1)	O($V \cdot E$)	O(1)	O(1)
Remover Vértice	O(V^2)	O($V \cdot E$)	O(E)	O(E)
Remover Aresta	O(1)	O($V \cdot E$)	O(E)	O(E)
Consultar Adjacência	O(1)	O(E)	O(V)	O(E)

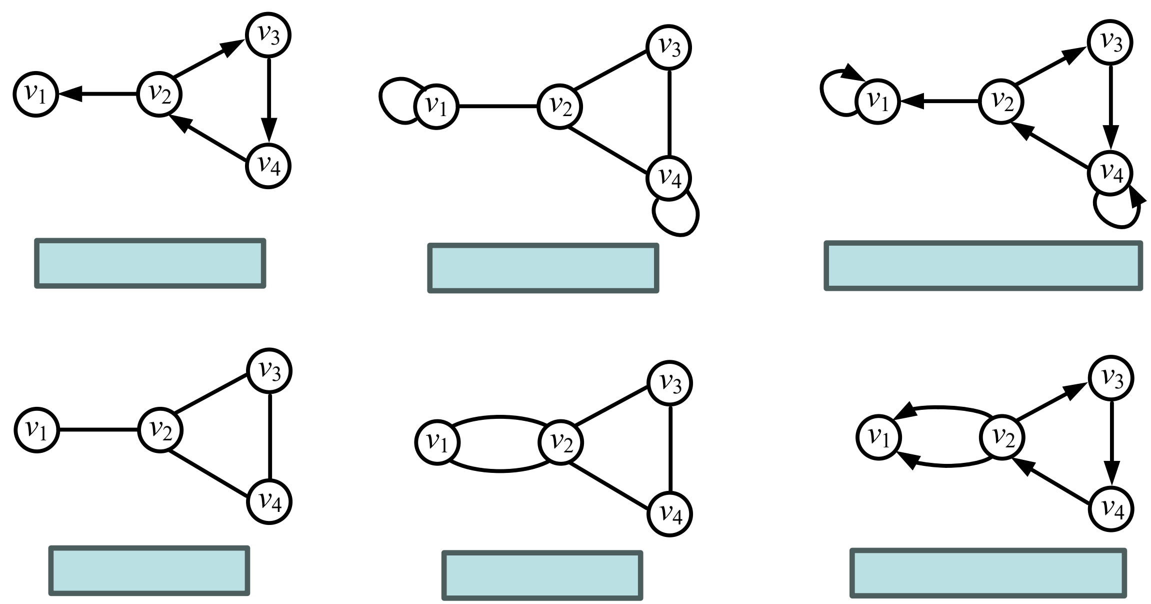
DÚVIDAS?

Perguntas? Sugestões?

EXERCÍCIOS

Responda

a) Qual é o tipo de G?
b) Defina formalmente G.
c) Obtenha a matriz de adjacências dos grafos ilustrados e vice-versa.
d) Obtenha o grau (deg) de cada vértice de G.
e) Qual é o grau total de G?
f) Indique os vértices fonte e sorvedouro de G caso existam.
g) Qual é a densidade de G?
h) Descreva a lista de adjacências de G e seu comprimento.



Responda

a) Qual é o tipo de G?

b) Defina formalmente G.

c) Obtenha a matriz de adjacências dos grafos ilustrados e vice-versa.

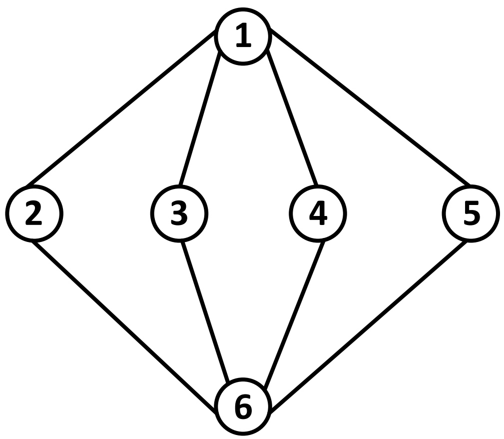
d) Obtenha o grau (deg) de cada vértice de G.

e) Qual é o grau total de G?

f) Indique os vértices fonte e sorvedouro de G caso existam.

g) Qual é a densidade de G?

h) Descreva a lista de adjacências de G e seu comprimento.

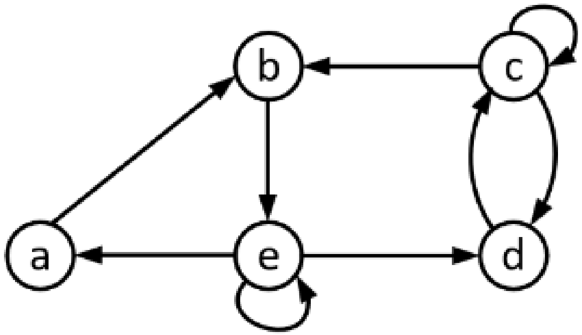


(c)

Quantas arestas paralelas?

EXERCÍCIOS

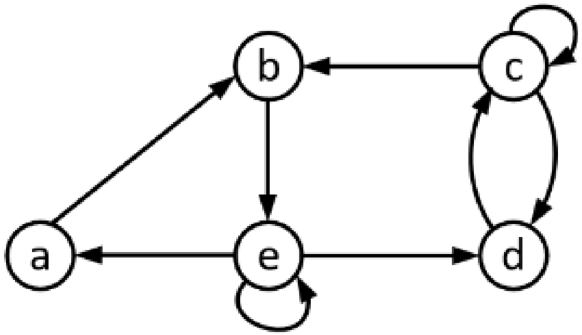
Responda: No grafo (a), quais são os **vértices** adjacentes ao vértice b?



(a)

EXERCÍCIOS

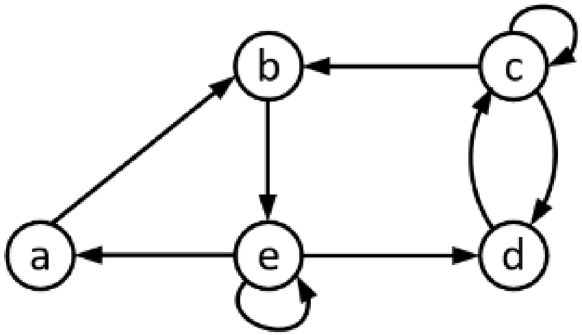
Responda: No grafo (a), quais são os **arcos** adjacentes ao arco (a, b)?



(a)

EXERCÍCIOS

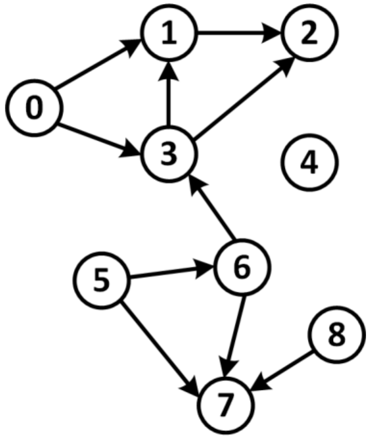
Responda: Construa a **matriz** e a **lista** de **adjacências** do grafo (a).



(a)

EXERCÍCIOS

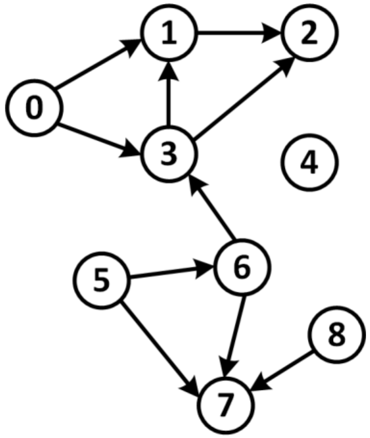
Responda: No grafo (c), quais são os vértices adjacentes ao vértice 1?



(c)

EXERCÍCIOS

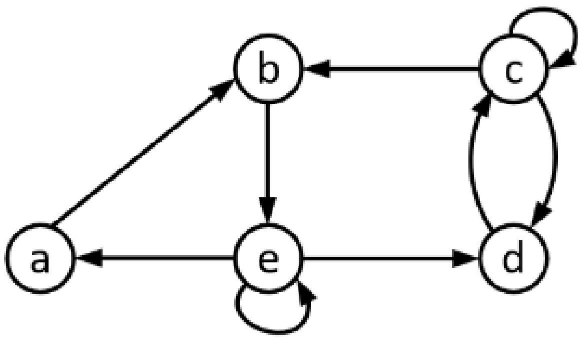
Responda: No grafo (c), cite todos os arcos adjacentes.



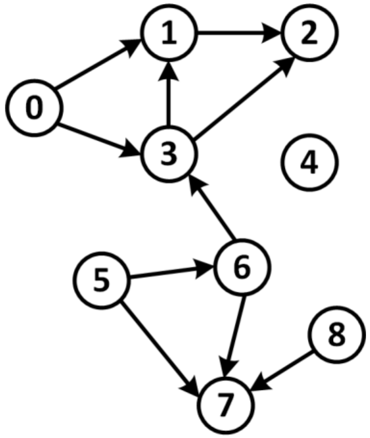
(c)

EXERCÍCIOS

Responda: Nos grafos (a) e (c), existem nós fonte ou sorvedouro?



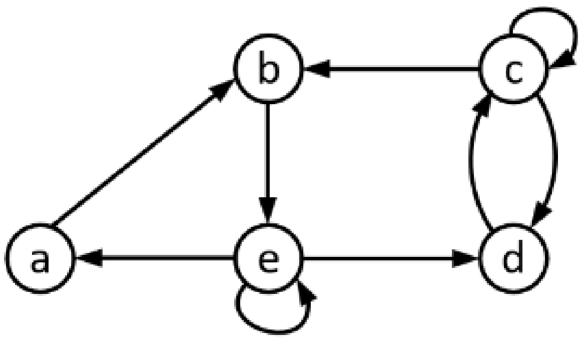
(a)



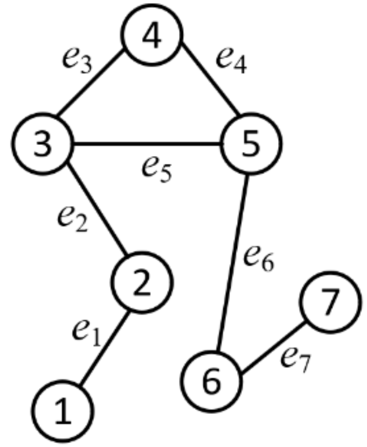
(c)

EXERCÍCIOS

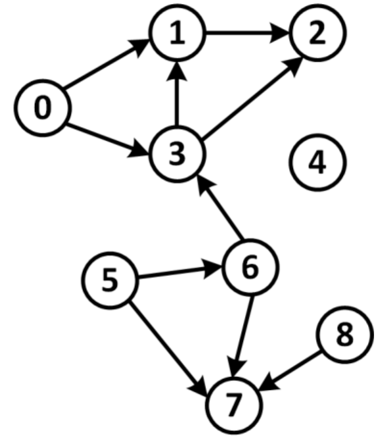
Responda: Qual dos grafos é regular?



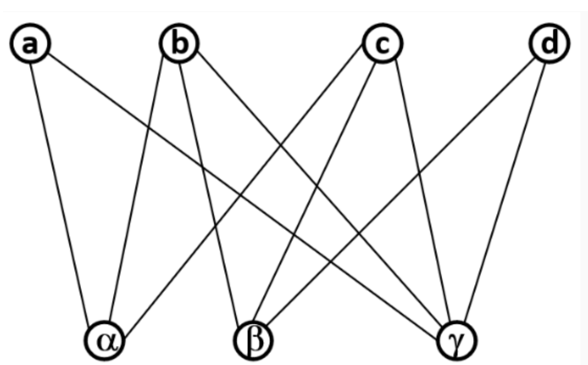
(a)



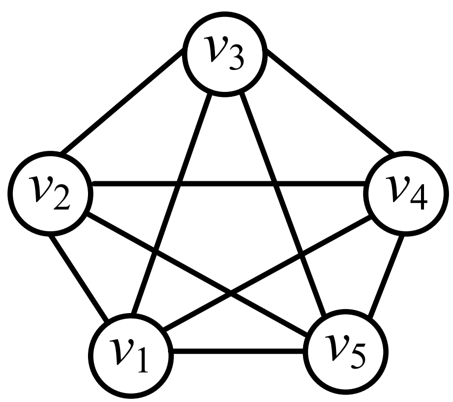
(b)



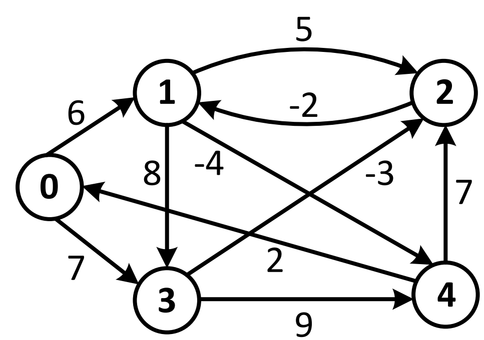
(c)



(d)



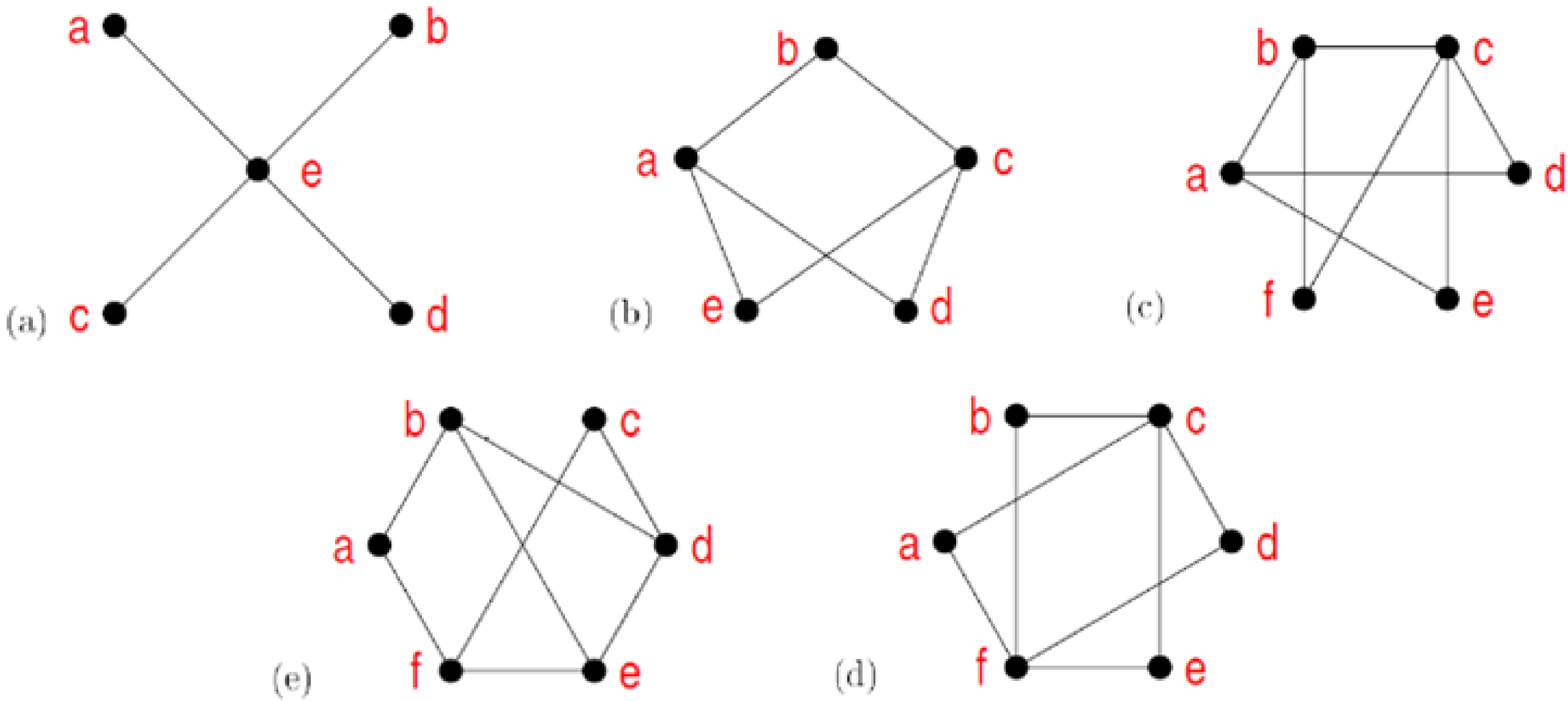
(e)



(f)

EXERCÍCIOS

Responda: Quais grafos são bipartidos?



EXERCÍCIOS

Responda: Qual das matrizes corresponde ao grafo dirigido? E grafo desconexo?

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	5	0	0	0
1	1	0	2	5	2	0
2	5	2	0	0	2	0
3	0	5	0	0	1	2
4	0	2	2	1	0	4
5	0	0	0	2	4	0

(a)

A	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	1	0	0	0	0
v_2	1	0	0	0	0	0
v_3	0	0	0	1	1	0
v_4	0	0	1	0	1	0
v_5	0	0	1	1	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0

(b)

$$G = \begin{array}{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(c)

M	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	0	0	1	1	0	0
v_3	0	0	1	0	1	1
v_4	1	0	0	1	1	0
v_5	0	1	0	0	0	1

(d)

EXERCÍCIOS

Responda: Obtenha os grafos das matrizes.

$$\begin{array}{c|cccccc|} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ \mathbf{2} & 5 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{4} & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ \mathbf{5} & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} A & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline v_5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

(b)

$$G = \begin{array}{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} M & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline v_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline v_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

(d)