Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт (Национальный
исследовательский университет)»
Физтех-школа аэрокосмических технологий
**Кафедра вычислительной физики**

**Направление подготовки:** 03.03.01 Прикладные математика и физика (бакалавриат)
**Направленность(профиль) подготовки:** Вычислительные технологии
математического моделирования

# Аппроксимация высокого порядка на нерегулярной расчётной сетке без использования вспомогательных узлов на рёбрах и гранях

(бакалаврская работа)

**Студент:**
Смирнов Иван

---

**Научный руководитель:**
Васюков Алексей Викторович

---

Москва 2022

# 1 Аннотация

smth

# Содержание

# 2 Введение

## 2.1 Цель работы

Главной задачей данной работы является создание подхода для решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных расчётных двумерных сетках с повышенным порядком аппроксимации.

## 2.2 Объект исследования

В данной работе рассматривается численное решение двумерного уравнения переноса на двумерных нерегулярных расчётных сетках. Решаемое уравнение для функции $u(x, y, t)$ в квадрате $[-1, 1] \times [-1, 1]$ с периодическими граничными условиями имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_t + \lambda_x u_x + \lambda_y u_y = 0 \\ u(x, y, t)\Big|_{t=0} = F(x, y) \\ u(a \cdot T_x + x, b \cdot T_y + y, t) = u(x, y, t) \\ T_x = T_y = 2;\ a, b \in Z \\ x \in [-1, 1],\ y \in [-1, 1] \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $F(x, y)$ - функция начальных условий; $T_x,\ T_y$ - период функции $u(x, y, t)$; $\lambda_x,\ \lambda_y$ - скорости по соответствующим направлениям.

## 2.3 Сетка в расчётной области

Для решения данной задачи обычно используется сетка из треугольников в области.

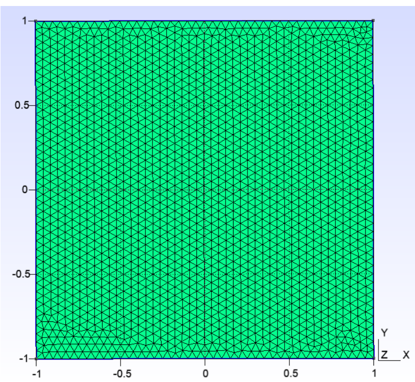


Рис. 1: Пример сгенерированной сетки, scale = 0.05

# 3 Теоретические сведения

## 3.1 Дискретизация

Для дискритизации уравнения по времени используется равномерная сетка по времени с шагом $\tau$, такая что $T = N \cdot \tau$. Где число $N$ - количество слоёв по времени.
На каждом слое по времени используется неравномерная сетка из треугольников, генерируемая при помощи таких алгоритмов как *Delaunay, MeshAdapt, Frontal-Delanay*.

## 3.2 Расщепление по пространству

Сначала задача расщепляется по пространственным переменным на два независимых уравнения, решаемых последовательно на каждой временной итерации.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Для решения каждого из получившихся одномерных уравнений переноса с постоянными коэффициентами, используется классический подход - *сеточно-характеристический метод*.

## 3.3 Сеточно - характеристический метод

Рассмотрим данных метод на примере уравнения для $x$ координаты относительно $w(x, y, t)$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda_x \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Он заключается в сведении дифференциального уравнения первого порядка в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль характеристики:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_x$$

Тогда:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda_x \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \to \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \to \frac{dw}{dt} = 0$$

То есть вдоль характеристики $dx/dt = \lambda_x$ решение не зависит от времени:

$$w(x, y, t)\Big|_{dx/dt = \lambda_x} = w(x, y)$$

Для нахождения значения функции в момент времени $t^{n+1}$, опускается характеристика(прямая, задаваемая уравнением $x = \lambda_x \cdot t$) на предыдущий слой по времени $t^n$. В точке пересечения $(x_0,\ y_0,\ t^n)$ этой прямой с плоскостью $t = t^n = \tau \cdot n = const$ аппроксимируется значение функции, с использованием известных значений в точках на данном слое по времени. Далее это значение переносится в точку $(x_0 + \lambda_x \cdot \tau,\ y_0,\ t^{n+1})$.

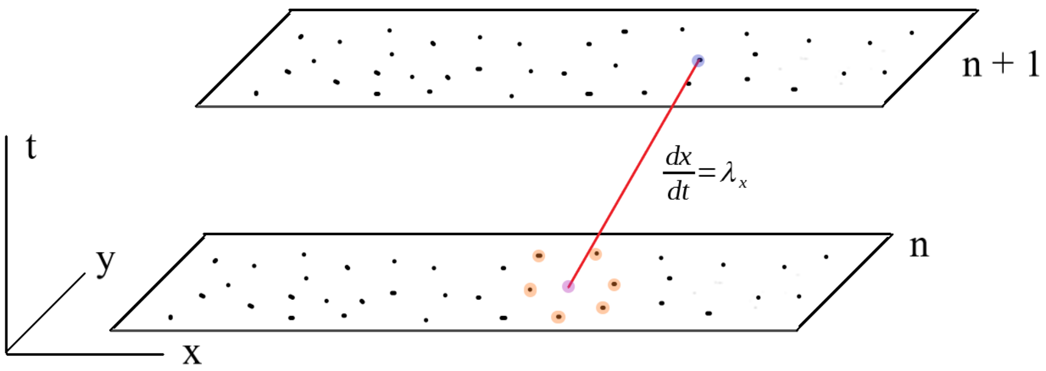


Рис. 2: Пример действия сеточно-характеристического метода

## 3.4 Аппроксимация значений функции

Для аппроксимации значения функции на предыдущем слое по времени в точке, полученной при помощи сеточно-характеристического метода можно использовать несколько подходов.

### 3.4.1 Использование производных в вершинах

- Определяется треугольник, в который попадает характеристика, опущенная на предыдущий слой по времени.

- Необходимо определить коэффициенты интерполяционного полинома
  $P(x, y) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot y^2 + \gamma \cdot xy + \delta \cdot x + \epsilon \cdot y + \zeta$
  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta \in \mathbb{R}$
  Известны значения функции $u$ в точках $u_1 = u(x_1, y_1), u_2 = u(x_2, y_2), u_3 = u(x_3, y_3)$

- Составляется система уравнений:

$$\begin{cases} P(x_1, y_1) = u_1 \\ P(x_2, y_2) = u_2 \\ P(x_3, y_3) = u_3 \\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x_1,y_1)} = (u_1)'_x \\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x_2,y_2)} = (u_2)'_x \\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x_3,y_3)} = (u_3)'_x \\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x_1,y_1)} = (u_1)'_y \\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x_2,y_2)} = (u_2)'_y \\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x_3,y_3)} = (u_3)'_y \end{cases}$$

- Видно, что получается переопределённая система (9 уравнений, 6 неизвестных).

### 3.4.2 Обратно взвешенные расстояния(IDW)

- Выбирается какая-то область вокруг точки, в которой(точке) необходимо определить значение функции.

  Область - окружность определённого радиуса, либо иная геометрия по характеру задачи.

- Точки с данными внутри области участвуют в расчётах. Значение функции в точке вычисляется по следующей формуле:

$$f = \sum_i u_i \cdot \omega_i,\ \omega_i = d^{-p}$$

  Где $\omega_i$ - весовой коэффициент для каждой используемой точки с данными, $d$ - расстояние от точки с неизвестым значением до данной, $p > 1$ - степень - подбирается экспериментально.

### 3.4.3 Безье-поверхности

- Параметризуем область $(x, y) \longrightarrow (u, v)$ так, чтобы $(u, v) = [0, 1] \times [0, 1]$.

- Определим поверхность Безье порядка $(n, m)$ (задаётся $(n+1) \cdot (m+1)$ контрольными точками $P_{i,j}$):

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_i^n(u) \cdot B_j^m(v) \cdot P_{i,j}$$

- $B$ - многочлены Берштейна:

$$B_i^n(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot u^i \cdot (1-u)^{n-1}$$

- Есть готовые реализации данного подхода, например алгоритм Клафа-Точера

  `scipy.interpolate.CloughTocher2DInterpolator`

### 3.4.4 Построение интерполяционного полиному по k ближайшим точкам

- Необходимо определить коэффициенты интерполяционного полинома
  $P(x, y) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot y^2 + \gamma \cdot xy + \delta \cdot x + \epsilon \cdot y + \zeta$
  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta \in \mathbb{R}$
  Видно, что полином 2 порядкаа требует 6 коэфициентов, для лучшей точности можно использовать полином 3 порядка, для которого понадобиться 10 коэффициентов.

- Находятся ближайшие 6 точек к данной и по значением в них строится следующая система:

$$\begin{cases} P(x_1, y_1) = u_1 \\ P(x_2, y_2) = u_2 \\ P(x_3, y_3) = u_3 \\ P(x_4, y_4) = u_4 \\ P(x_5, y_5) = u_5 \\ P(x_6, y_6) = u_6 \end{cases}$$

- Решая эту СЛАУ, находятся необходимые коэффициенты, и определяется значение функции в требуемой точке.

## 3.5 Расчёт порядка аппроксимации

### 3.5.1 Аналитическое решение

Для рассматриеваемой задачи (1) существует аналитическое решение:

$$u_{analitic}(x, y, t) = F(x - \lambda_x \cdot t, y - \lambda_y \cdot t)$$

### 3.5.2 Невязка

Численное решение связано с точным аналитическим решение следующим образом:

$$u_{numeric} = u_{analytic} + R(h)$$

Где $R(h)$ - невязка - функция от мелкости пространственной сетки $h$.
В качестве $h$ используется:

- Обратный масштаб сетки $1/\text{scale}$ - (scale - наибольший линейный размер ячеек).
- Обратный корень количества точек сетки $1/\sqrt{\text{dots num}}$.

Предполагается, что:

$$R(h) = h^p + o(h^p)$$

Таким образом, порядок аппроксимации $p$ может быть определён следующим образом:

$$\Delta = |u_{numeric} - u_{analytic}| = h^p + o(h^p) \to \ln \Delta / \ln h \simeq p$$

### 3.5.3 Нормы ошибки

Для определения $\Delta$ используются несколько норм векторов(предполагается что значения в точках на каждом слое по времени можно занумеровать):

- Максимум модуля ошибки:
  $\Delta_1 = \Delta_\infty = \max(|u_{numeric}[i] - u_{analytic}[i]|)$.
- Среднее арифмитическое модулей ошибок:
  $\Delta_2 = \sum_{i=0}^{N} |u_{numeric}[i] - u_{analytic}[i]|/N$
- Евклидова норма:
  $\Delta_3 = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} (u_{numeric}[i] - u_{analytic}[i])^2/N}$

*вписать конкретный алгоритм(чтобы всем было понятно)*

# 4 Результаты численного эксперимента

smth

# 5 Анализ результатов и вывод

smth

# 6 Список литературы

smth