Содержание

1 8 сентября

Насколько я понимаю, задача сводится к интерполяции в трёхмерном пространстве 2D + значение функции (решил попробовать найти значения без производных в вершинах одного треугольника, но с привлечением сторонних вершин).

1.1 Метод обратных взвешенных расстояний(IDW).

Выбирается какая-то область вокруг точки, в которой(точке) необходимо определить значение функции. Область - окружность определённого радиуса, либо иная геометрия по характеру задачи. Точки с данными внутри области участвуют в расчётах. Значение функции в точке вычисляется по следующей формуле:

$$f = \sum_i u_i \cdot \omega_i, \; \omega_i = d^{-p} \tag{1}$$

Где ω_i - весовой коэффициент для каждой используемой точки с данными, d - расстояние от точки с неизвестым значением до данной, $p > 1$ - степень - подбирается экспериментально.Источник. ?Насколько хорошо аппроксимирует?

1.2 Лоскут Кунса. Трансфинитная интерполяция.

Рассматриваю двумерное пространство (x, y), координата z - значение функции.

2 13 сентября

2.1 Безье-поверхности.

Параметризуем область (u, v).
Поверхностье Безье порядка (n, m) задаётся $(n + 1) \cdot (m + 1)$ контрольными точками $P_{i,j}$.

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_i^n(u) \cdot B_j^m(v) \cdot P_{i,j} \tag{2}$$

где $u, v \in (0, 1)$, B - многочлены Берштейна:

$$B_i^n(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot u^i \cdot (1-u)^{n-1} \tag{3}$$

3 14 сентября

3.1 Бикубическая интерполяция по двум измерениям последовательно.

Например построение естественного сплайна.

3.2 Варианты многомерной интерполяции

Здесь.

4 18 сентября

4.1 Хранение данных

Для хранения и быстрого поиска ближайшего подходит структура KD-tree[реализация в python]. Получается, что используем Эйлеров подход - следим за значением параметра задачи в выбранной точке пространства. Не нашёл как можно обновлять значения в структуре, поэтому целесообразно создать структуру из точек (координат - 'имён') с быстрым поиском. И отдельно на каждом шаге по времени хранить список всех точек с значением параметра задачи в них. Раз уже есть список всех точек, можно хранить флаги граничных точек.
Единственный вопрос - не очень понимаю как искать значение в точке, чья характеристика попадает на место в пространстве вне расчётной области. Также не совсем понятно как будет происходить эволюция формы расчётной области.

4.2 Интерполяционный полином по 6 точкам

Конечно это уже дело следующее каким методом интерполировать. Также странно что не подумал об этом сразу же:

$$\xi(x, y) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot xy + \gamma \cdot y^2 + \delta \cdot x + \epsilon \cdot y + \zeta \tag{4}$$

Просто взять 6 точек вокруг данной[где требуется найти значение параметра задачи] и однозначно определить коэффициенты интерполяционного полинома.

4.3 Расщепление пространства

Замораживаю сначала одну и здвух координатных осей и считаю одномерное уравнение, потом меняю оси. Можно шаг по времени сделать $\tau/2$ при замораживании.

5 4 октября

При аппроксимации 2 порядком(да и 1 тоже) получаются матрицы, с детерминантом близким к нулю(берутся близкие точки или в случае аппроксимации 1 порядка - точки на одной прямой). Думал это решить следующим образом: взять больше чем требуется для данной аппроксимации точек с данными, перебирать их комбинации, пока не получится 'хорошая' матрица для системы коэффициентов интерполирующего многочлега. В случае аппроксимации первого порядка(по 3 точкам) это даёт результат, но картинка со временем размывается(оно и понятно, 1 порядок). Со вторым порядком как правило из 30 точек не находится комбинации 6, чтобы определитель был больше 0.1. Поэтому результаты в некоторых точках быстро расходятся.

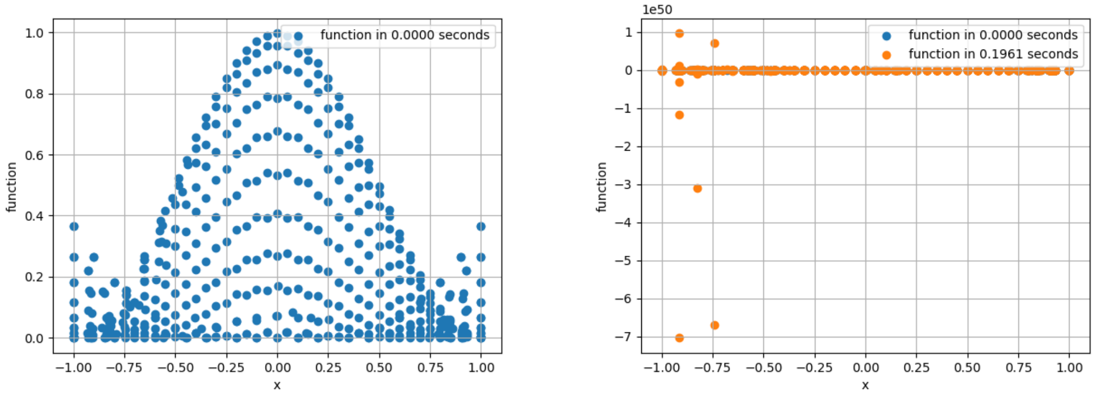


Рис. 1: Интерполяция 2 порядка

5.1 Начальные данные только по оси OX

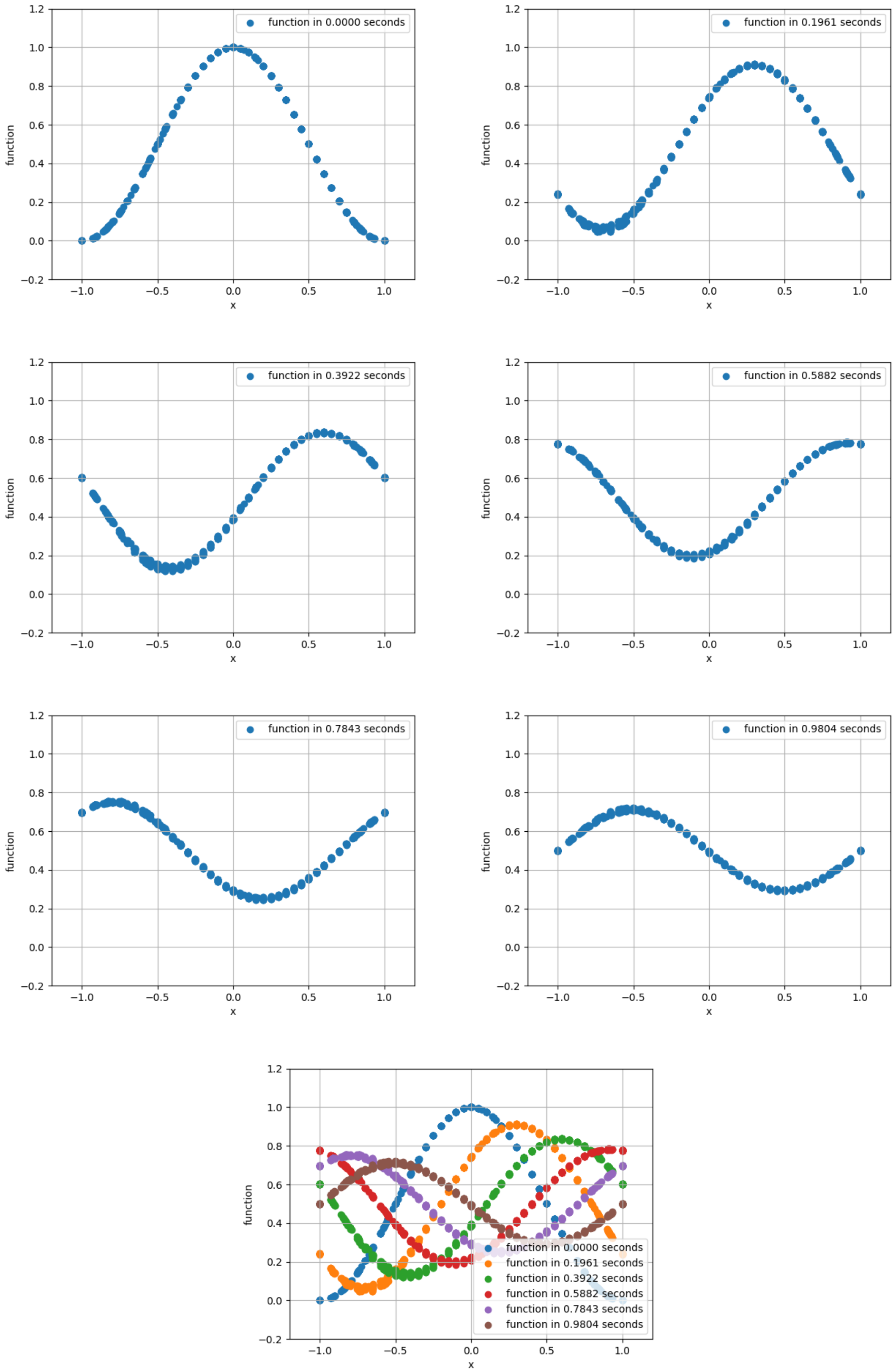


Рис. 2: Интерполяция 1 порядка, количество узлов по времени $N = 51$.

5.2 Начальные данные только по оси OY

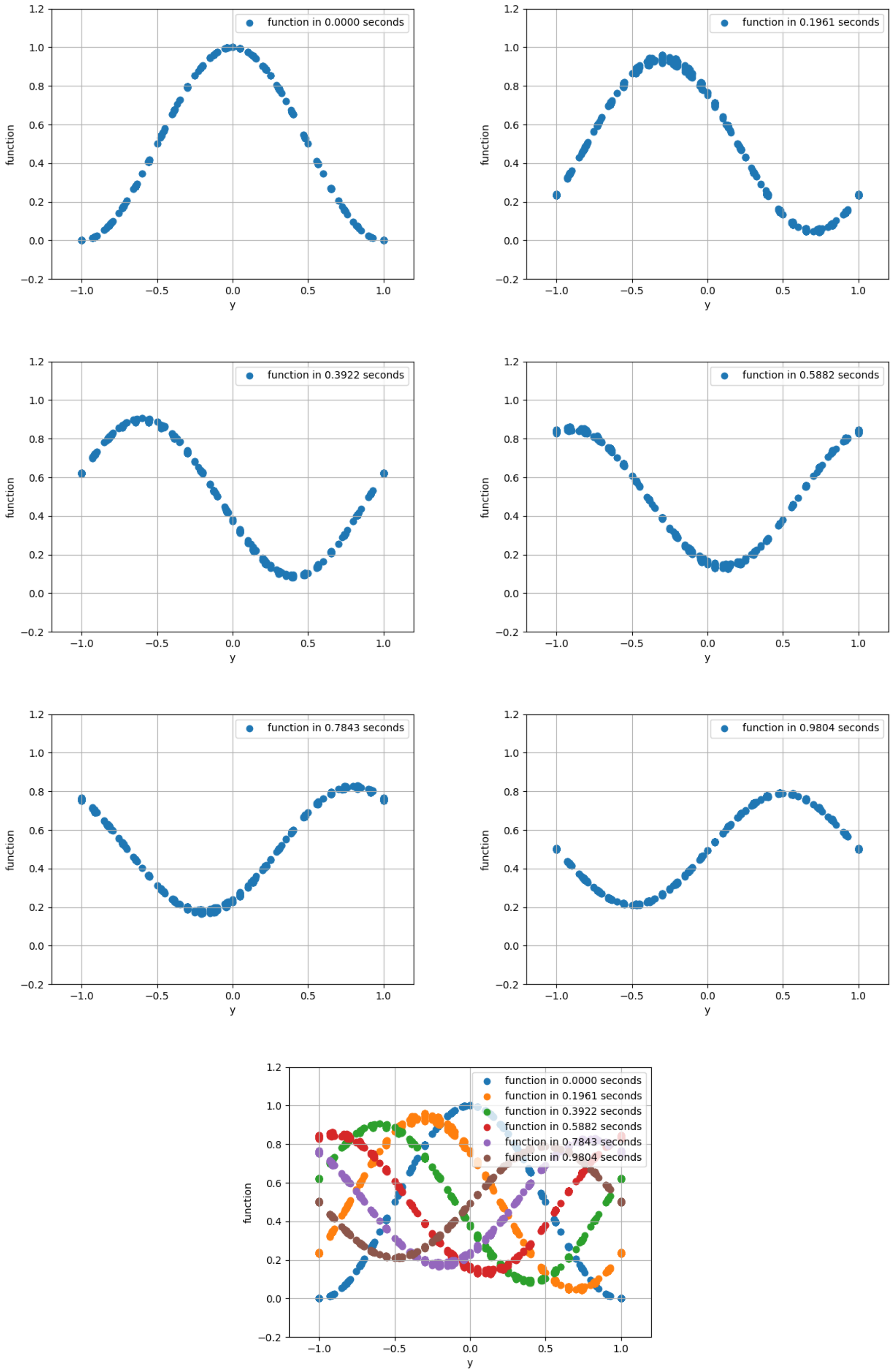
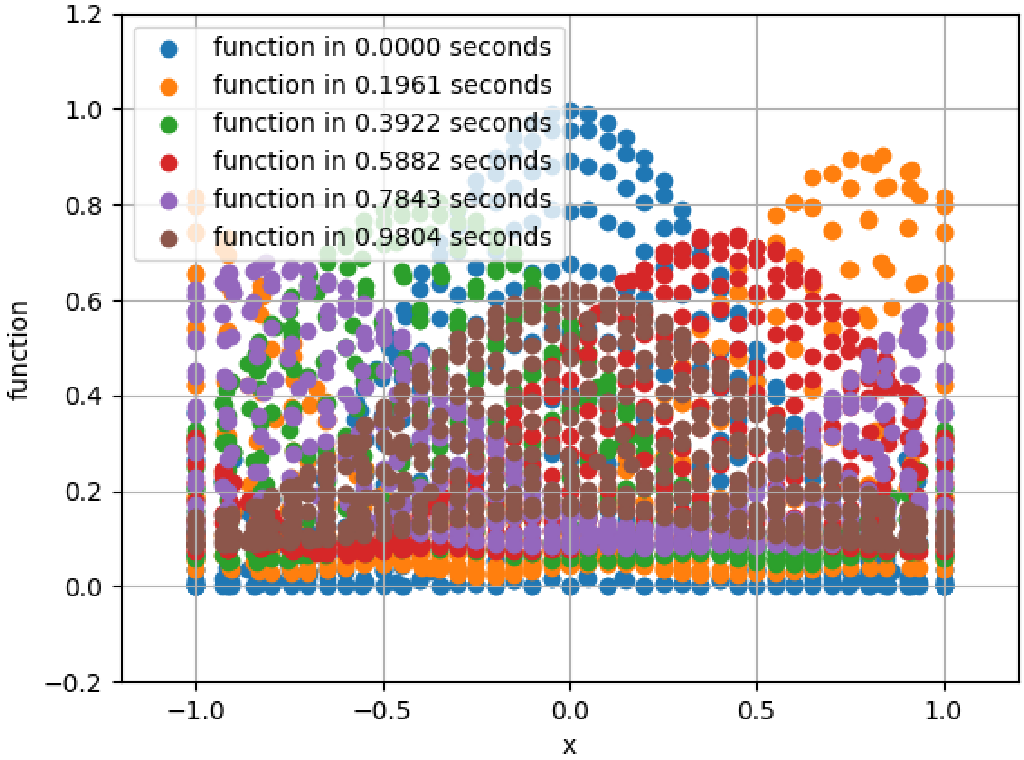


Рис. 3: Интерполяция 1 порядка, количество узлов по времени $N = 51$.

5.3 Начальные данные по обоим осям



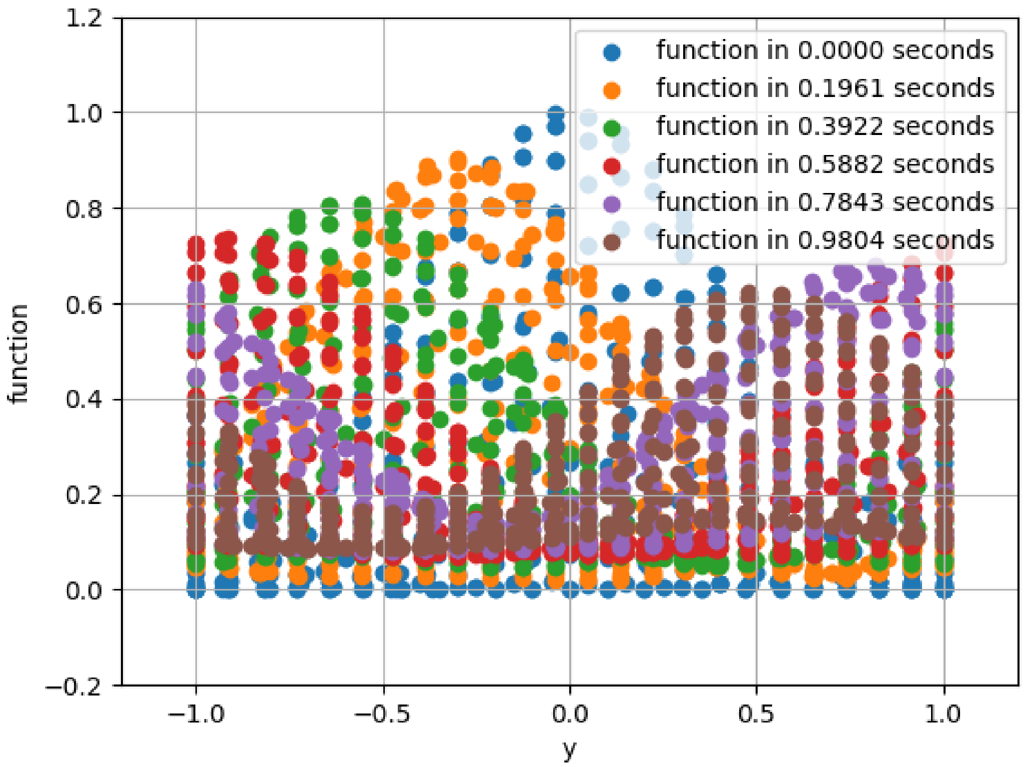


Рис. 4: Интерполяция 1 порядка, количество узлов по времени $N = 51$.

6 22 октября

6.1 Одномерные гладкие начальные условия

Удалось добиться аппроксимации второго порядка на гладком начальном условии вдоль одной из осей. Это стало возможным благодаря использованию лимитера - ограничения результата интерполяции по максимуму/минимуму от входных данных(используемых при интерполяции).

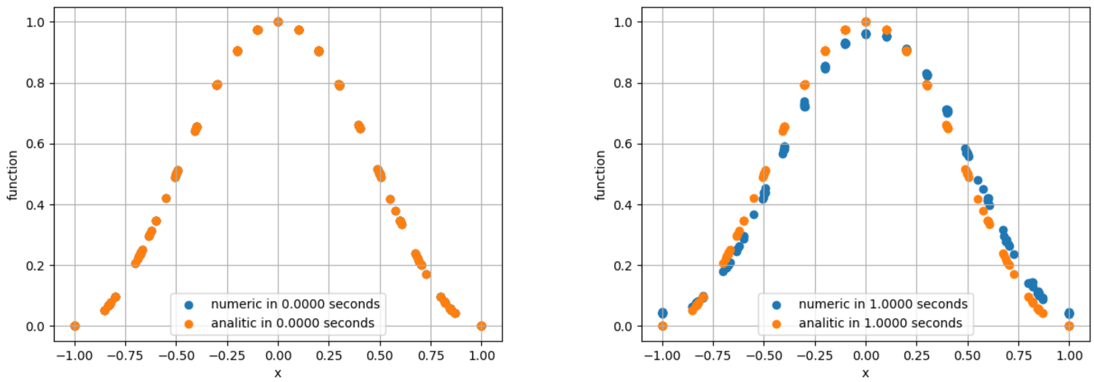


Рис. 5: Интерполяция 2 порядка, параметр сетки $scale = 0.2$.

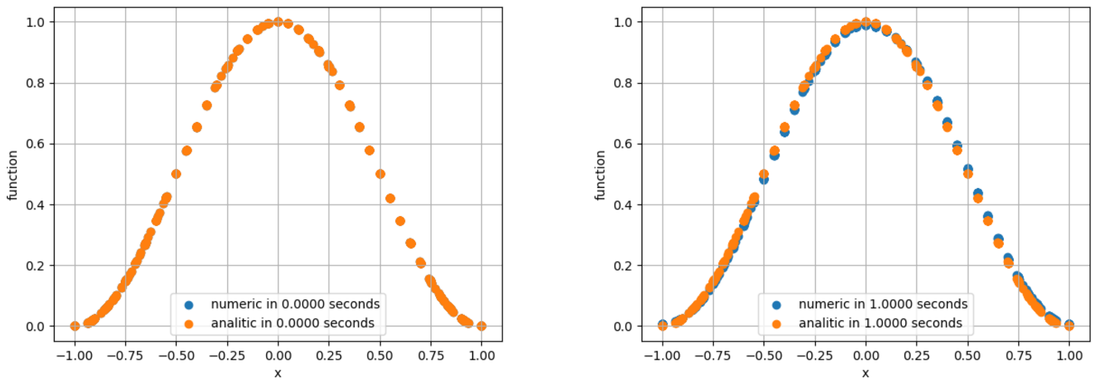


Рис. 6: Интерполяция 2 порядка, параметр сетки $scale = 0.1$.

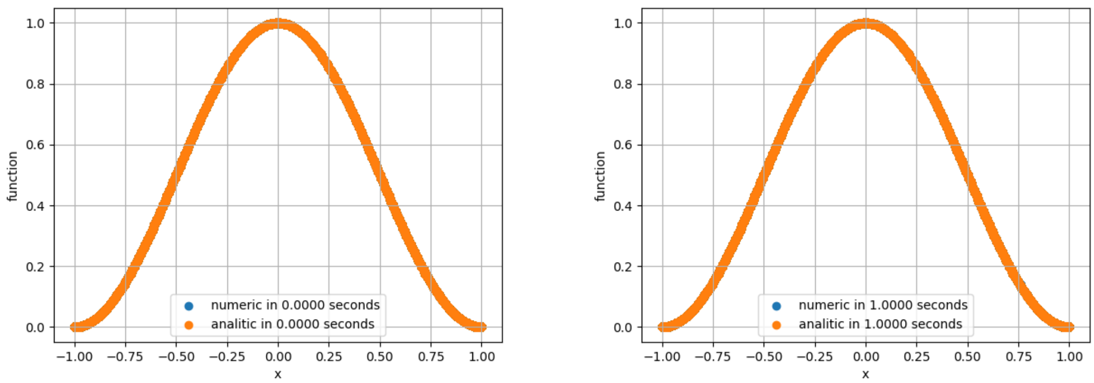


Рис. 7: Интерполяция 2 порядка, параметр сетки $scale = 0.0125$.

6.2 Сходимость численного решения с аналитическим

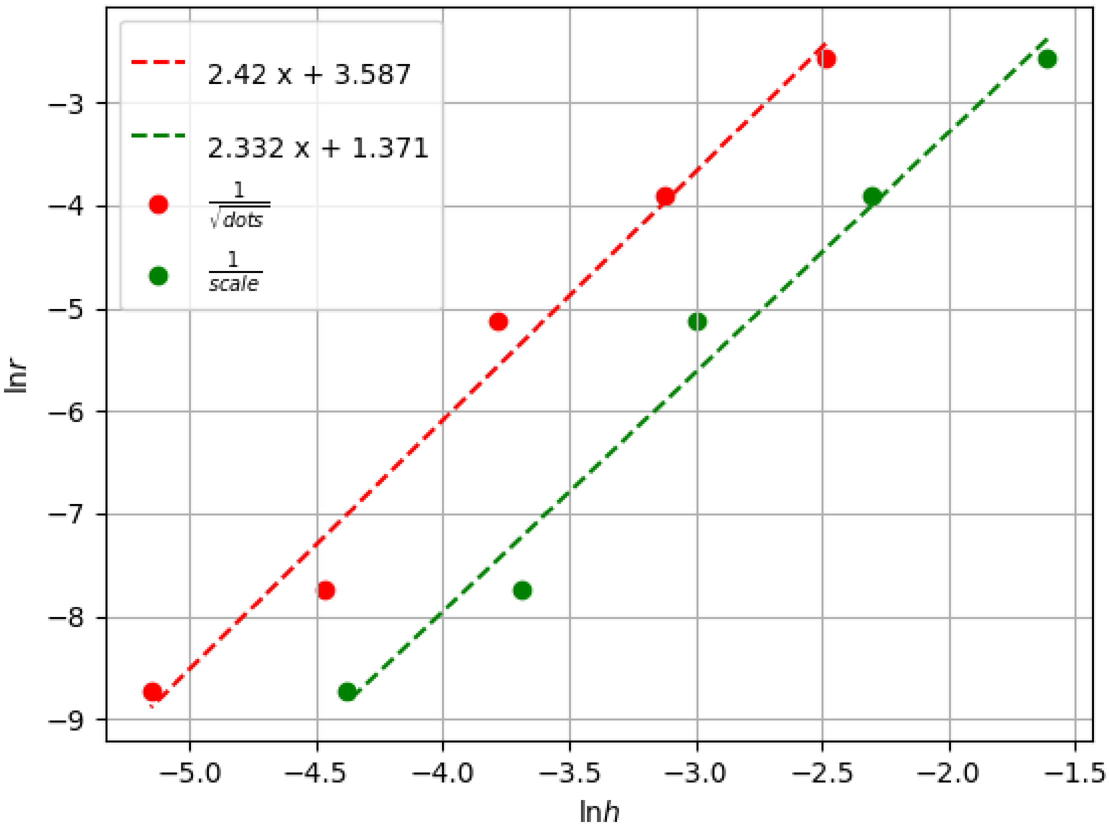


Рис. 8: График зависимоти логарифма невязки численного и аналитического решений по Чебышёвой норме от логарифма 'шага' сетки.

7 26 октября

Теперь проведём численные эксперименты для двумерных начальных условий. Будем использовать периодические граничные условия. Аналитическое решение тоже буду формировать по принципу характеристик, с той только разницей, что значение на предыдущем слое по времени будет не интерполироваться, а вычисляться непосредственно.

7.1 Косинус

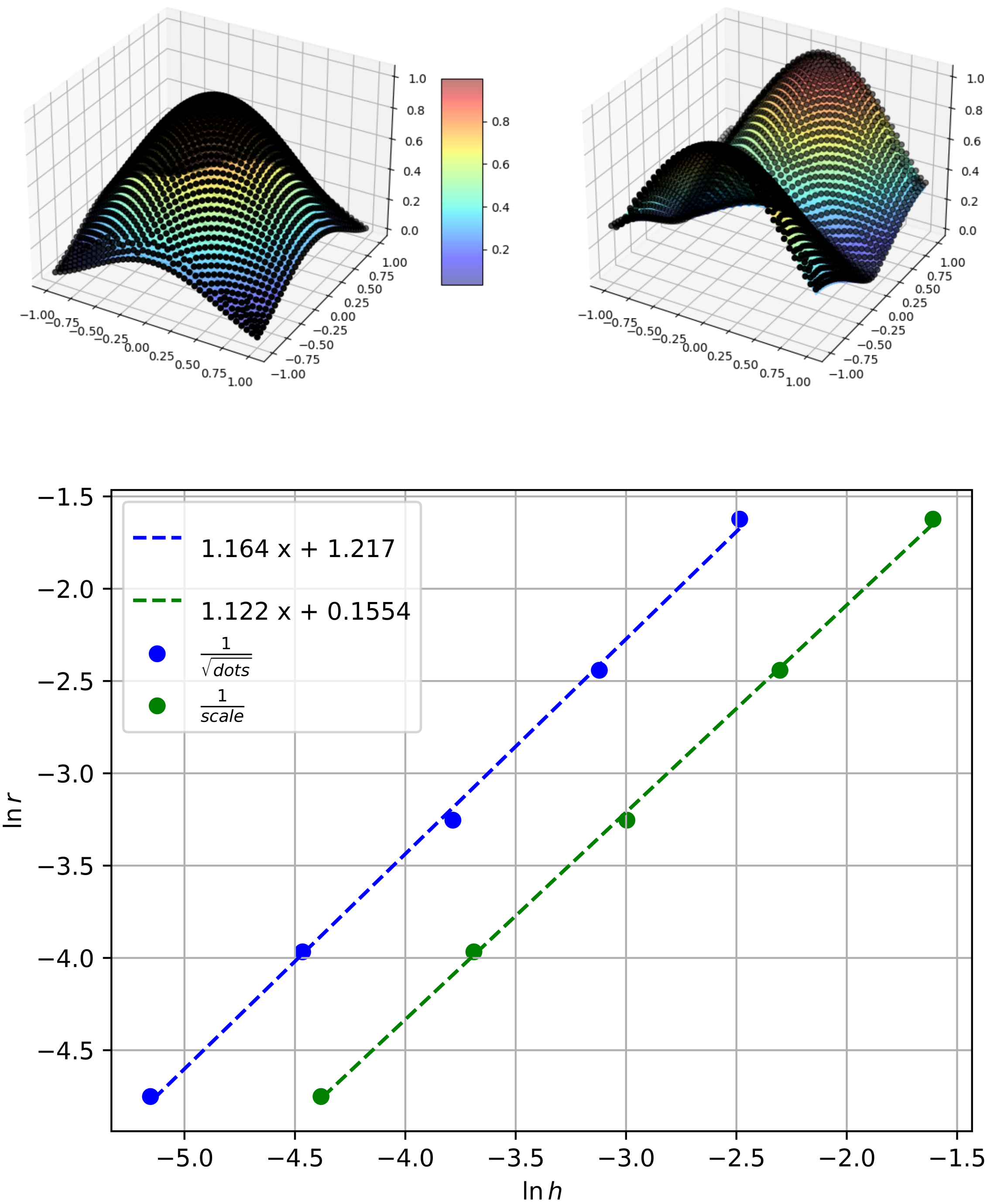
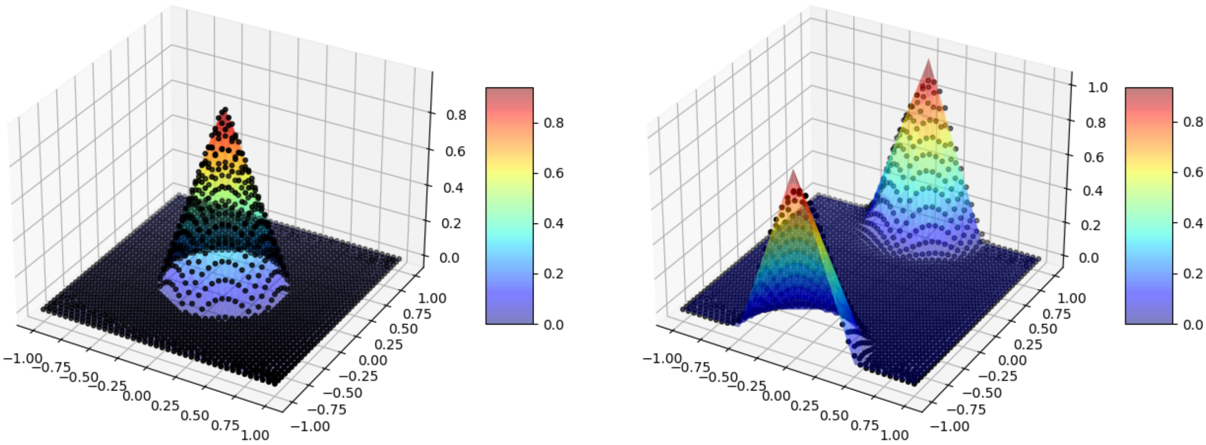


Рис. 9: Начальные условия: $\cos^2(\sqrt{x^2+y^2})$, сетка: $scale = 0.05$.

7.2 Конус



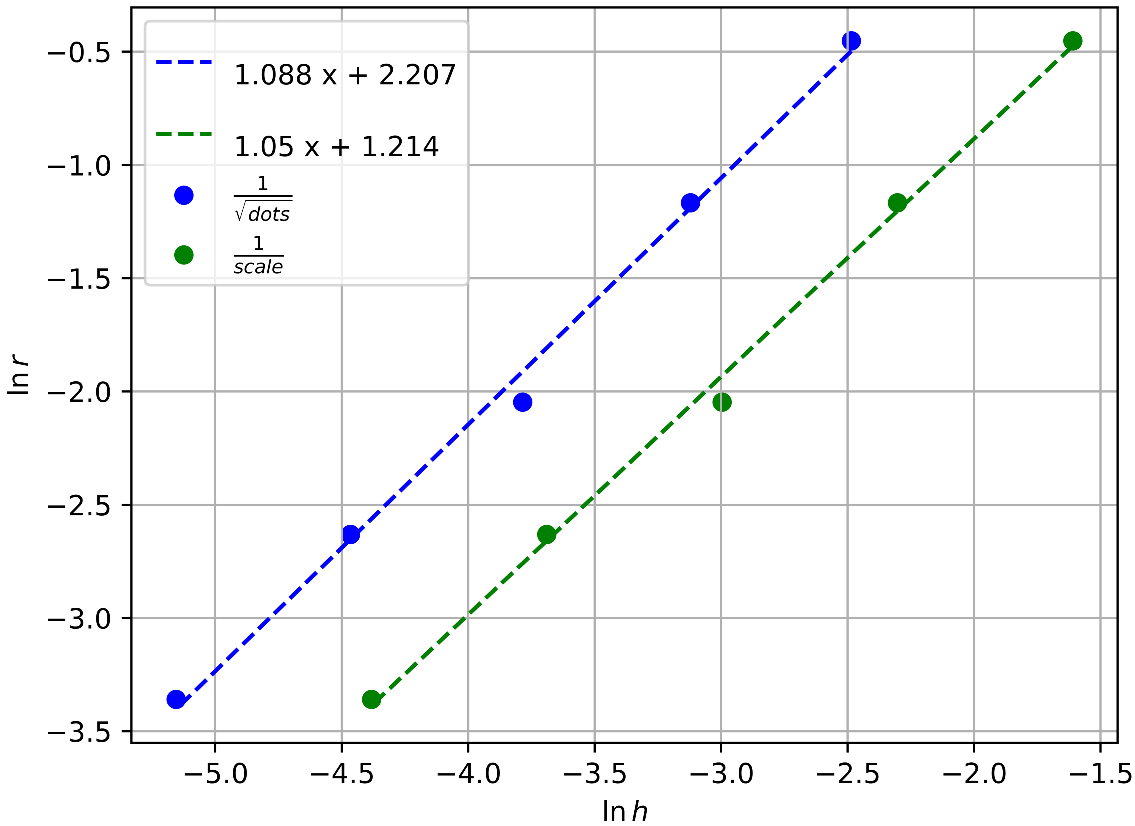
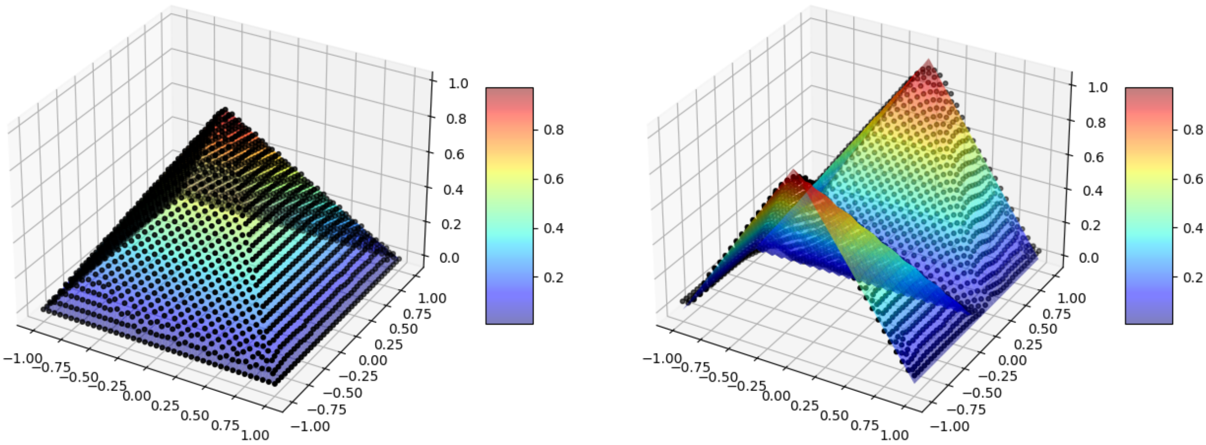


Рис. 10: Начальные условия: $1 - 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\ if\ \sqrt{x^2 + y^2} < 0.5\ else\ 0$, сетка: $scale = 0.05$.

7.3 Пирамида



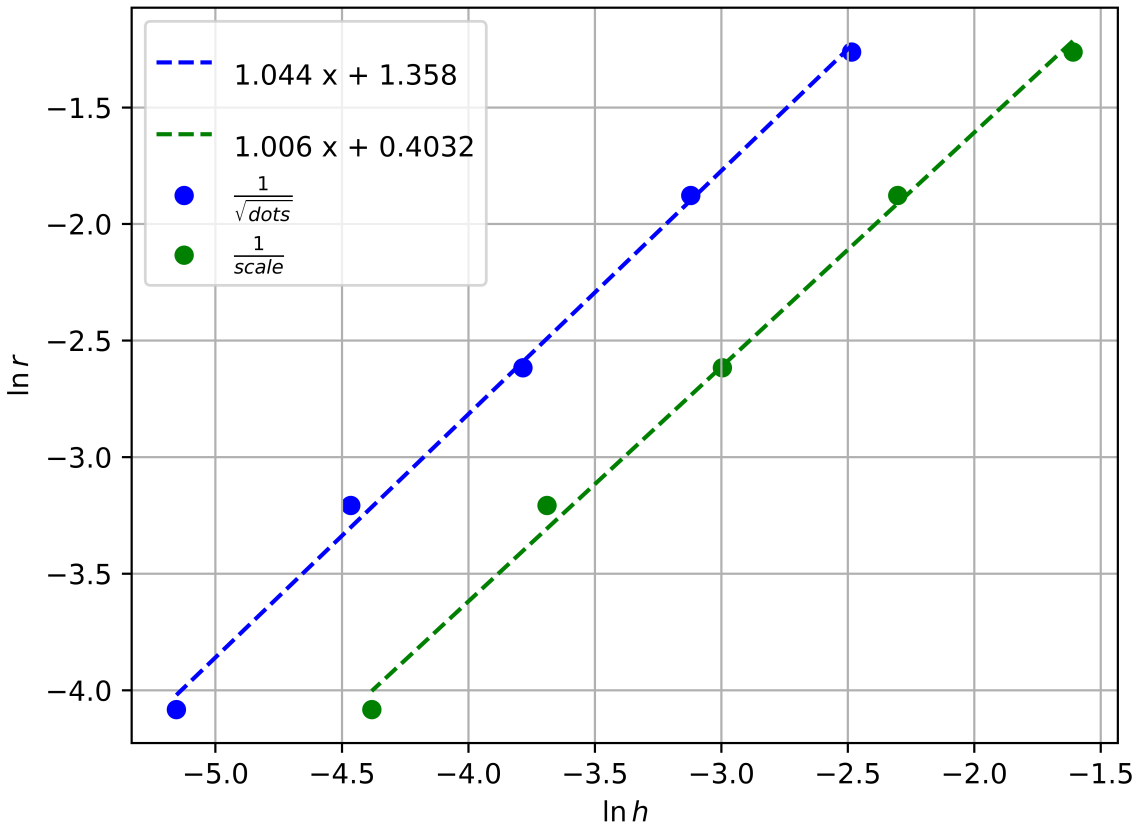


Рис. 11: Начальные условия: $1 - max(abs(x), abs(y))$, сетка: $scale = 0.05$.

7.4 Куб

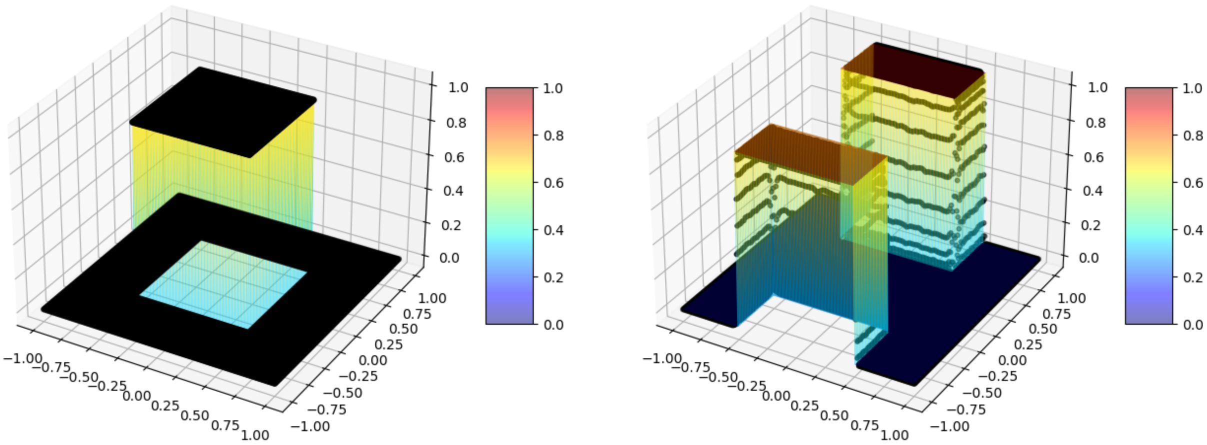
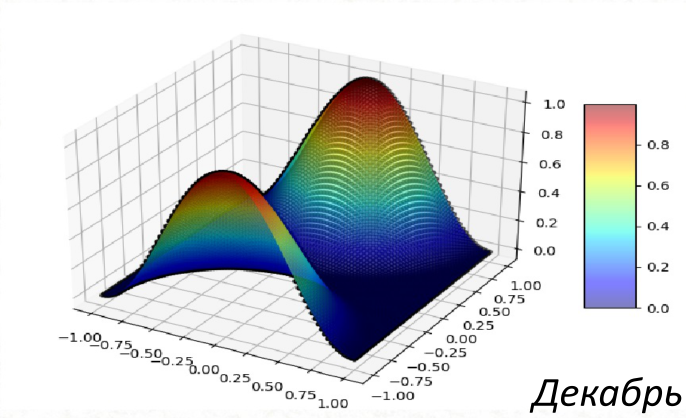


Рис. 12: Начальные условия: $1 - max(abs(x), abs(y))$, сетка: $scale = 0.0125$.

8 ноябрь

В начале декабря промежуточные результаты были показаны на конференции: **64-я Всероссийская научная конференция МФТИ**
Презентация ниже.

Аппроксимация высокого порядка на нерегулярной расчётной сетке без использования вспомогательных узлов на рёбрах и гранях



Смирнов Иван

Декабрь 2021

Московский физико-технический институт

Рассматривается задача численного решения двумерного однородного уравнения переноса на двумерных нерегулярных сетках. Решаемое уравнение для функции $u(x, y, t)$ в квадрате $[-1, 1] \times [-1, 1]$ с периодическими граничными условиями имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_t + \lambda_x u_x + \lambda_y u_y = 0 \\ u(x, y, t)\Big|_{t=0} = \cos^2(\frac{\pi r}{2}) \text{ if r < 1 else 0} \\ u(a \cdot T_x + x, b \cdot T_y + y, t) = u(x, y, t) \\ T_x = T_y = 2; a, b \in Z \\ x \in [-1, 1],\ y \in [-1, 1], \end{cases}$$

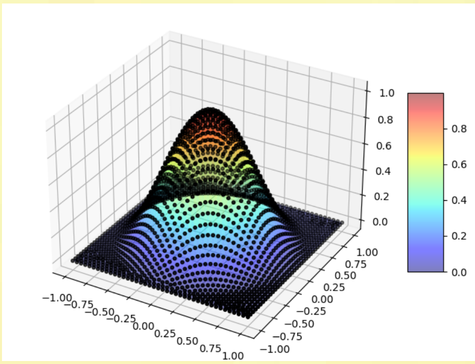


Figure: Начальные условия

Для решения данной задачи обычно используется сетка из треугольников в области. Значения функции на новом слое по времени вычисляются при помощи сеточно-характеристического метода. При этом рассматриваются вершины треугольника, в который попадает характеристика.

Для улучшения порядка аппроксимации можно использовать следующие подходы.

- Продолженные схемы
- Вспомогательные точки на ребрах

В данной работе рассматривается совсем иной подход. Ребра сетки вообще не используются.

В области генерируется сетка из треугольников, но в расчётах используется только точки сгенерированной триангуляции(без рёбер треугольников). Точки хранятся в KD-Tree.

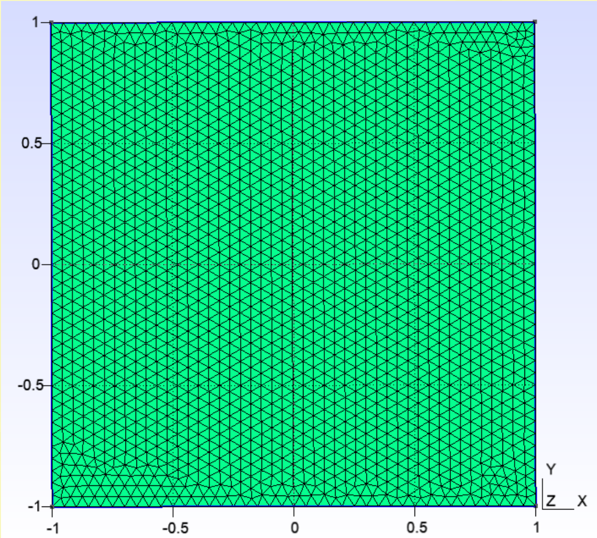
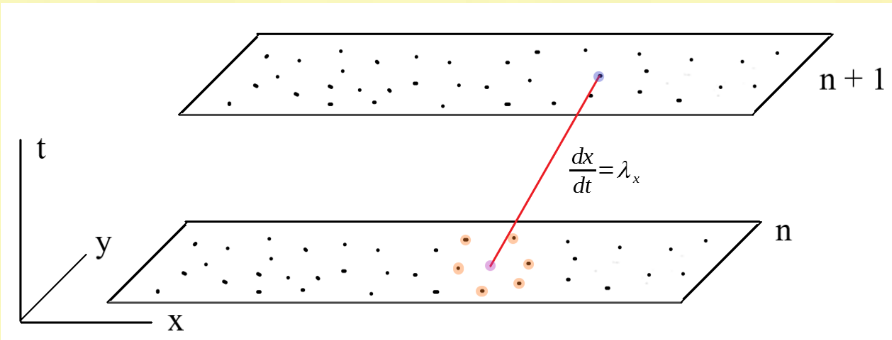


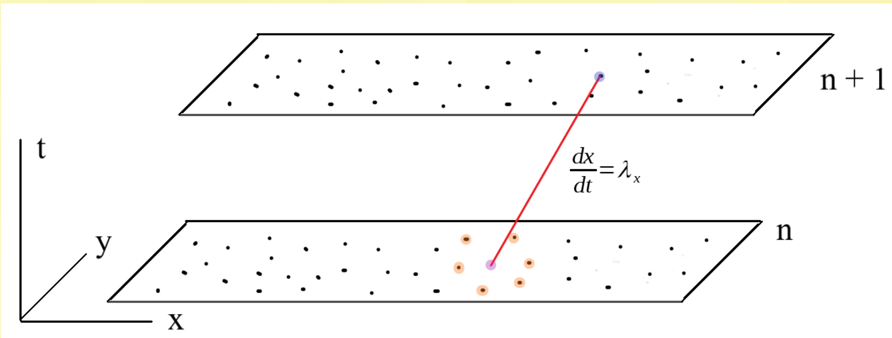
Figure: Пример сгенерированной сетки, scale = 0.05

Сначала задача расщепляется по пространственным переменным на два независимых уравнения, решаемых последовательно на каждой временной итерации. Затем используется сеточно-характеристический подход(далее пример для x координаты). Он заключается в сведении дифференциального уравнения первого порядка в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль характеристики $dx/dt = \lambda_x$. Тогда: $\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \to \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \to \frac{du}{dt} = 0.$



Из уравнения характеристики для точки с известными координатами (x_0, y_0, t^{n+1}) ставится в соответствие точка с предыдущего слоя по времени (x, y, t^n) по следующему правилу. $x = x_0 - \lambda_x \cdot \tau$, где $\tau = t^{n+1} - t^n$. Значение в этой точке интерполируется с помощью составления интерполяционного полинома второй степени по шести ближайшим точкам. Для улучшения результатов интерполяции применяются следующие действия:

- Переход к локальной системе координат вблизи точки (x, y, t^n).
- Использование limiter'a, т.е. фиксации интерполируемого значения по $[min, max]$ от исходных данных.



Порядок аппроксимации считался по сходимости с аналитическим решением. Использовалась первая норма $max(|(u_{numeric})_i - (u_{analitic})_i|)$ на последнем слое по времени. В результате для гладких двумерных начальных условиях, указанные на первом слайде был получен **порядок аппроксимации 2.1**.

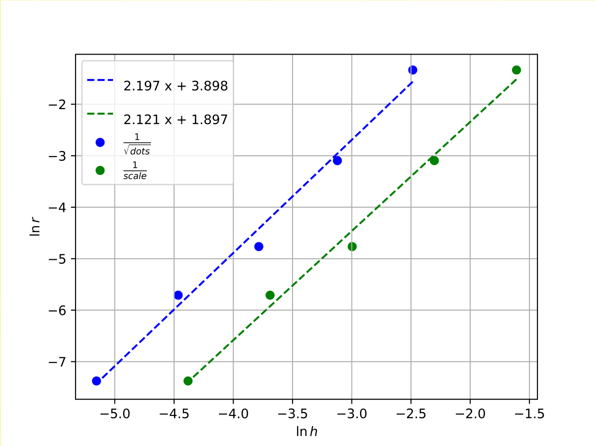


Figure: r - норма невязки, h : синим - обратный корень от количества точек, зелёным - обратный масштаб сетки относительно расчётной области.

9 декабрь

Необходимо добиться сходимости на разрывных начальных условиях. Будет применяться следующий подход:

- определить разрыв функции или её производной по первой, вторым производным, вычисленными численно в точке формальным дифференцированием интерполяционного полинома
- на первых шагах по времени в определённых местах разрыва осуществить аппроксимацию первым порядком