

# Использование продолженной системы уравнений для многомерного уравнения переноса на нерегулярной расчётной сетке

Смирнов Иван

1 марта 2022 г.

## Содержание

<b>1 8 сентября</b>	<b>2</b>
1.1 Метод обратных взвешенных расстояний(IDW) . . . . .	2
1.2 Лоскут Кунса. Трансфинитная интерполяция. . . . .	2
<b>2 13 сентября</b>	<b>2</b>
2.1 Безье-поверхности. . . . .	2
<b>3 14 сентября</b>	<b>2</b>
3.1 Бикубическая интерполяция по двум измерениям последовательно. . . . .	2
3.2 Варианты многомерной интерполяции . . . . .	2
<b>4 18 сентября</b>	<b>3</b>
4.1 Хранение данных . . . . .	3
4.2 Интерполяционный полином по 6 точкам . . . . .	3
4.3 Расщепление пространства . . . . .	3
<b>5 4 октября</b>	<b>3</b>
5.1 Начальные данные только по оси ОХ . . . . .	4
5.2 Начальные данные только по оси ОY . . . . .	5
5.3 Начальные данные по обоим осям . . . . .	6
<b>6 22 октября</b>	<b>7</b>
6.1 Одномерные гладкие начальные условия . . . . .	7
6.2 Сходимость численного решения с аналитическим . . . . .	8
<b>7 26 октября</b>	<b>9</b>
7.1 Косинус . . . . .	9
7.2 Конус . . . . .	10
7.3 Пирамида . . . . .	11
7.4 Куб . . . . .	12
<b>8 ноябрь</b>	<b>12</b>

## 1 8 сентября

Насколько я понимаю, задача сводится к интерполяции в трёхмерном пространстве 2D + значение функции (решил попробовать найти значения без производных в вершинах одного треугольника, но с привлечением сторонних вершин).

### 1.1 Метод обратных взвешенных расстояний(IDW).

Выбирается какая-то область вокруг точки, в которой(точке) необходимо определить значение функции. Область - окружность определённого радиуса, либо иная геометрия по характеру задачи. Точки с данными внутри области участвуют в расчётах. Значение функции в точке вычисляется по следующей формуле:

$$f = \sum_i u_i \cdot \omega_i, \omega_i = d^{-p} \quad (1)$$

Где  $\omega_i$  - весовой коэффициент для каждой используемой точки с данными,  $d$  - расстояние от точки с неизвестным значением до данной,  $p > 1$  - степень - подбирается экспериментально. [Источник](#). Насколько хорошо аппроксимирует?

### 1.2 Лоскут Кунса. Трансфинитная интерполяция.

Рассматриваю двумерное пространство  $(x, y)$ , координата  $z$  - значение функции.

## 2 13 сентября

### 2.1 Безье-поверхности.

Параметризую область  $(u, v)$ .

Поверхность Безье порядка  $(n, m)$  задаётся  $(n+1) \cdot (m+1)$  контрольными точками  $P_{i,j}$ .

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) \cdot B_j^m(v) \cdot P_{i,j} \quad (2)$$

где  $u, v \in (0, 1)$ ,  $B$  - многочлены Берштейна:

$$B_i^n(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot u^i \cdot (1-u)^{n-1} \quad (3)$$

## 3 14 сентября

### 3.1 Бикубическая интерполяция по двум измерениям последовательно.

Например построение естественного сплайна.

### 3.2 Варианты многомерной интерполяции

[Здесь](#).

## 4 18 сентября

### 4.1 Хранение данных

Для хранения и быстрого поиска ближайшего подходит структура [KD-tree](#)[реализация в python]. Получается, что используем Эйлеров подход - следим за значением параметра задачи в выбранной точке пространства. Не нашёл как можно обновлять значения в структуре, поэтому целесообразно создать структуру из точек (координат - 'имён') с быстрым поиском. И отдельно на каждом шаге по времени хранить список всех точек с значением параметра задачи в них. Раз уже есть список всех точек, можно хранить флаги граничных точек.

**Единственный вопрос - не очень понимаю как искать значение в точке, чья характеристика попадает на место в пространстве вне расчётной области.** Также не совсем понятно как будет происходить эволюция формы расчётной области.

### 4.2 Интерполяционный полином по 6 точкам

Конечно это уже дело следующее каким методом интерполировать. Также странно что не подумал об этом сразу же:

$$\xi(x, y) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot xy + \gamma \cdot y^2 + \delta \cdot x + \epsilon \cdot y + \zeta \quad (4)$$

Просто взять 6 точек вокруг данной[где требуется найти значение параметра задачи] и однозначно определить коэффициенты интерполяционного полинома.

### 4.3 Расщепление пространства

Замораживаю сначала одну и здвуих координатных осей и считаю одномерное уравнение, потом меняю оси. Можно шаг по времени сделать  $\tau/2$  при замораживании.

## 5 4 октября

При аппроксимации 2 порядком(да и 1 тоже) получаются матрицы, с детерминантом близким к нулю(берутся близкие точки или в случае аппроксимации 1 порядка - точки на одной прямой). Думал это решить следующим образом: взять больше чем требуется для данной аппроксимации точек с данными, перебирать их комбинации, пока не получится 'хорошая' матрица для системы коэффициентов интерполирующего многочлена. В случае аппроксимации первого порядка(по 3 точкам) это даёт результат, но картинка со временем размывается(оно и понятно, 1 порядок). Со вторым порядком как правило из 30 точек не находится комбинации 6, чтобы определитель был больше 0.1. Поэтому результаты в некоторых точках быстро расходятся.

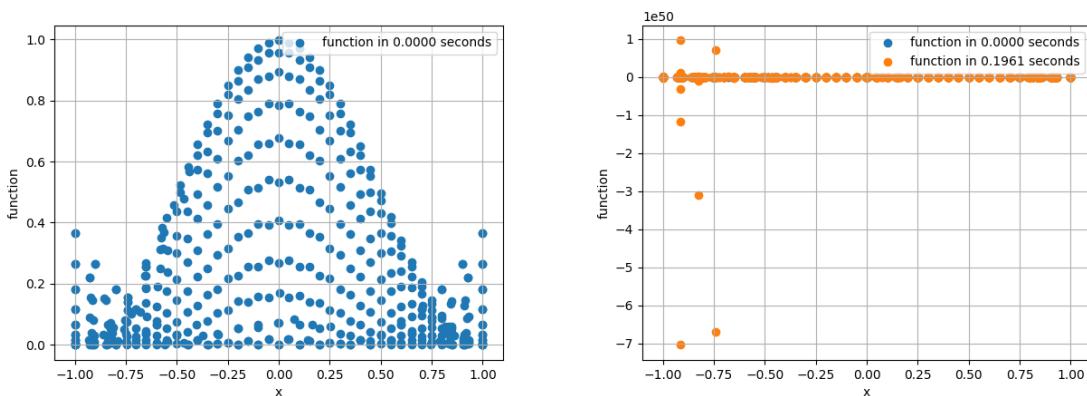


Рис. 1: Интерполяция 2 порядка

## 5.1 Начальные данные только по оси ОХ

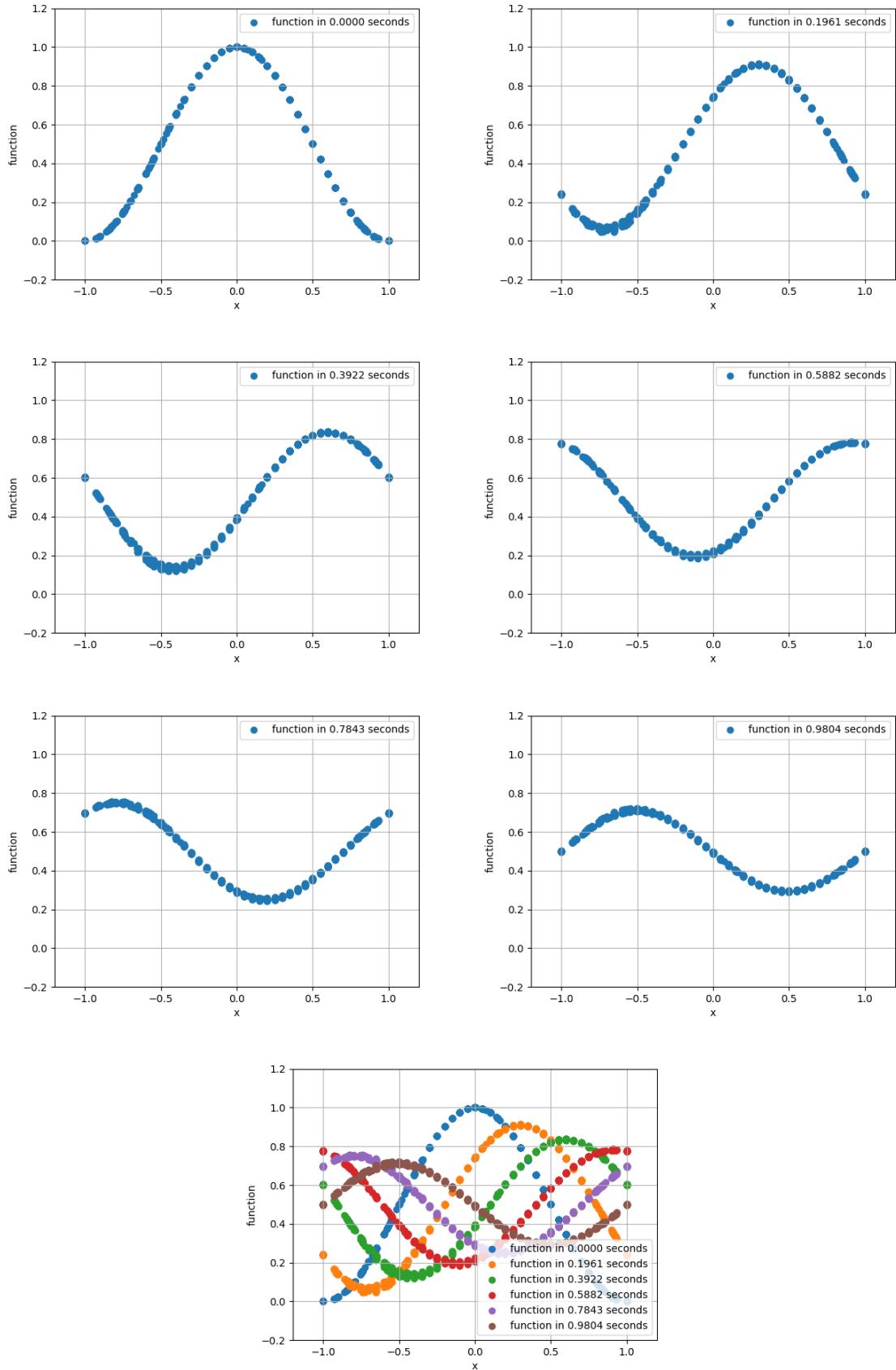


Рис. 2: Интерполяция 1 порядка, количество узлов по времени  $N = 51$ .

## 5.2 Начальные данные только по оси OY

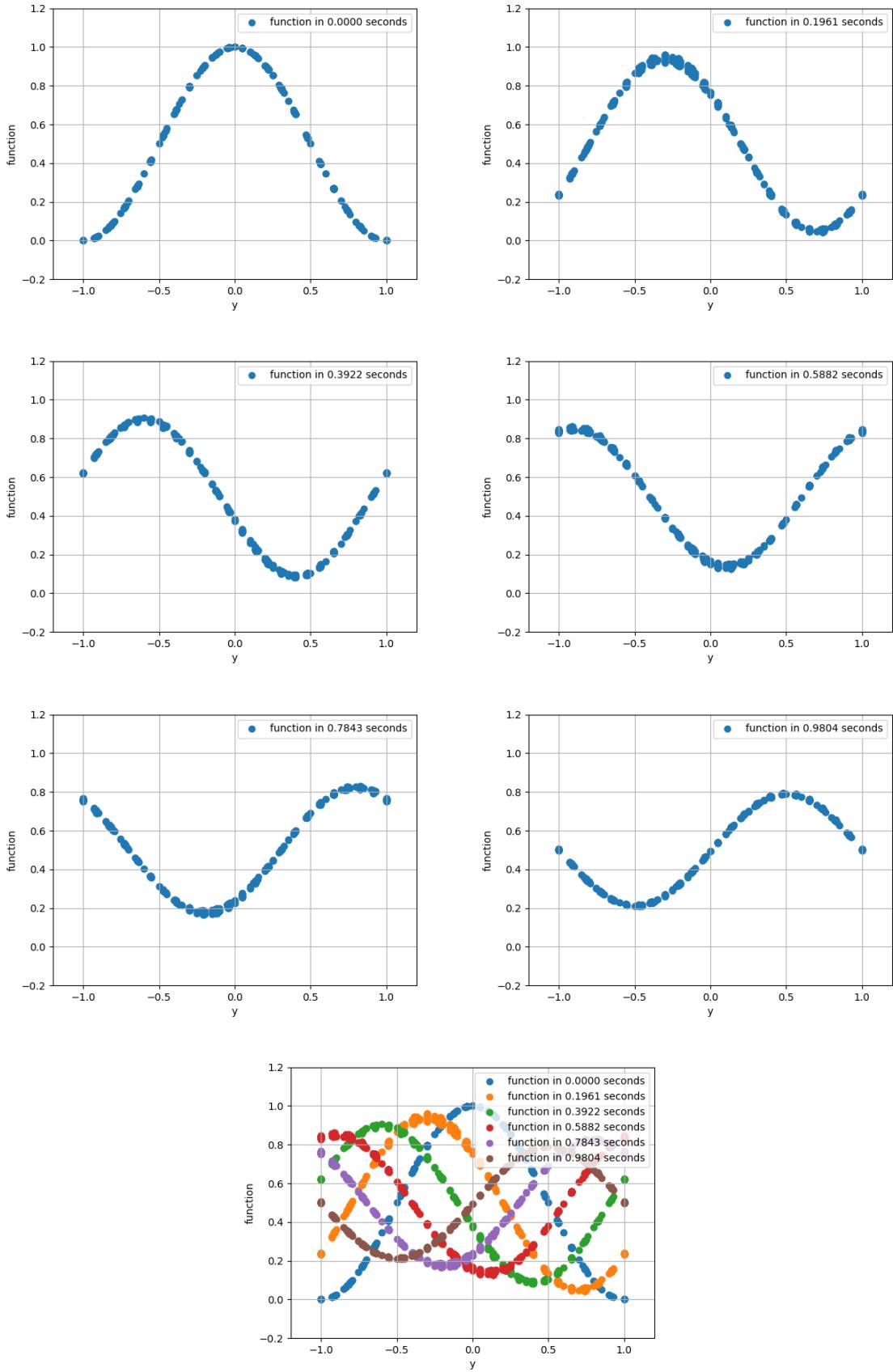


Рис. 3: Интерполяция 1 порядка, количество узлов по времени  $N = 51$ .

### 5.3 Начальные данные по обоим осям

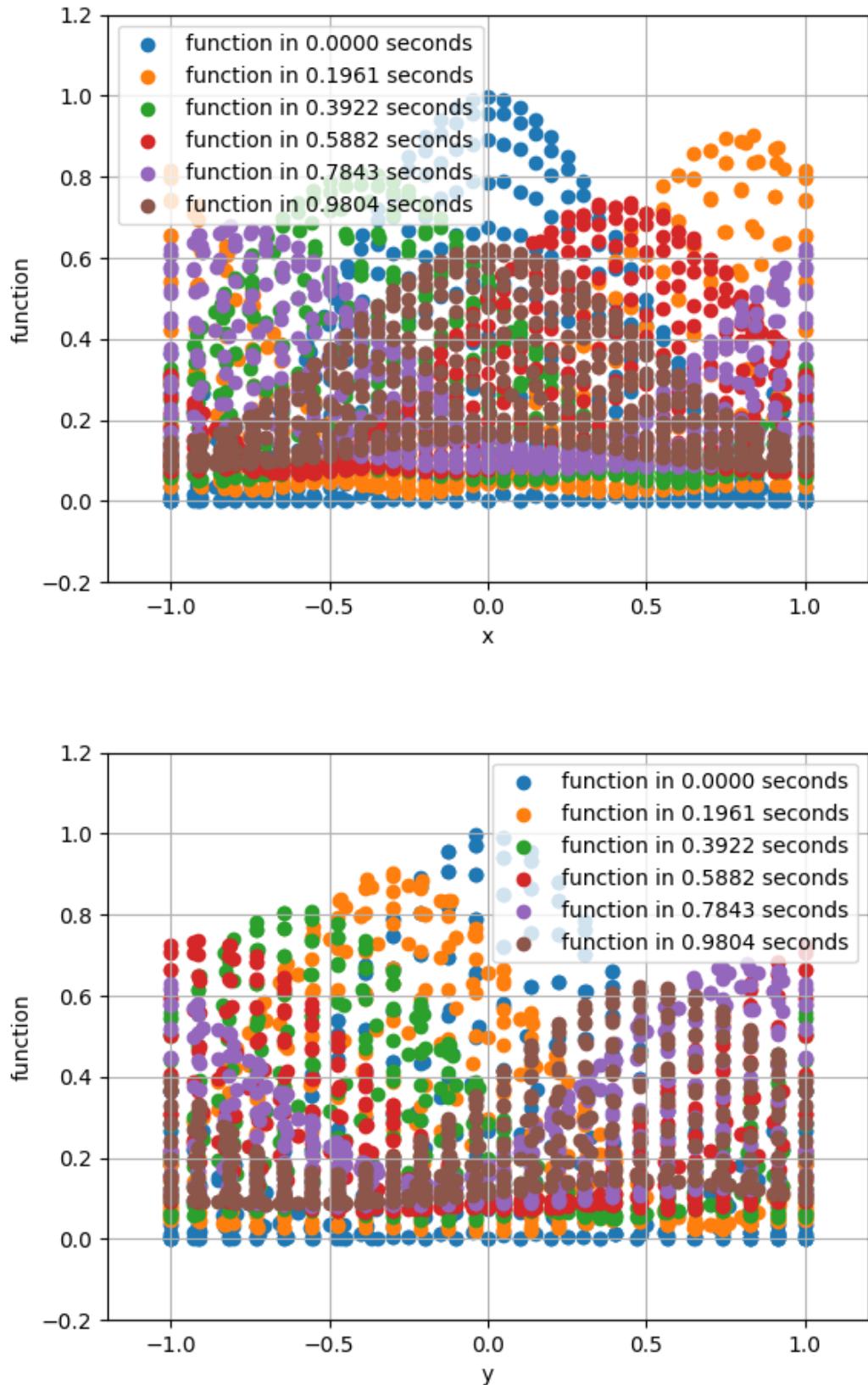


Рис. 4: Интерполяция 1 порядка, количество узлов по времени  $N = 51$ .

## 6 22 октября

### 6.1 Одномерные гладкие начальные условия

Удалось добиться аппроксимации второго порядка на гладком начальном условии вдоль одной из осей. Это стало возможным благодаря использованию лимитера - ограничения результата интерполяции по максимуму/минимуму от входных данных (используемых при интерполяции).

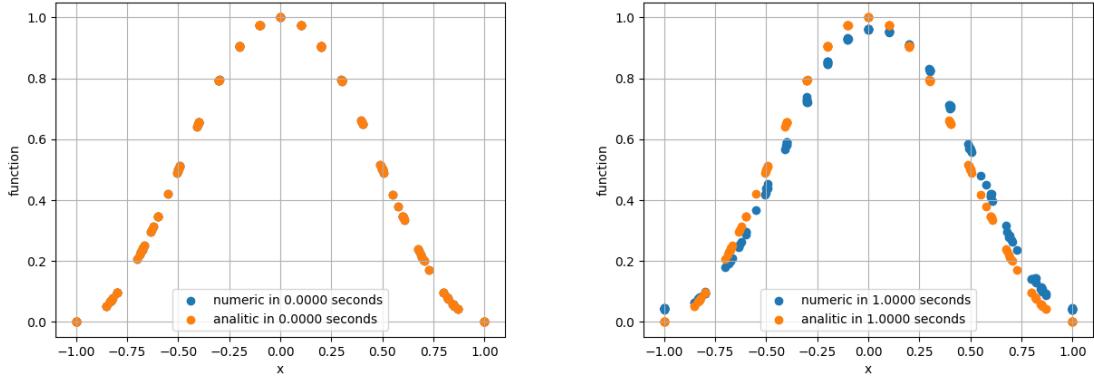


Рис. 5: Интерполяция 2 порядка, параметр сетки  $scale = 0.2$ .

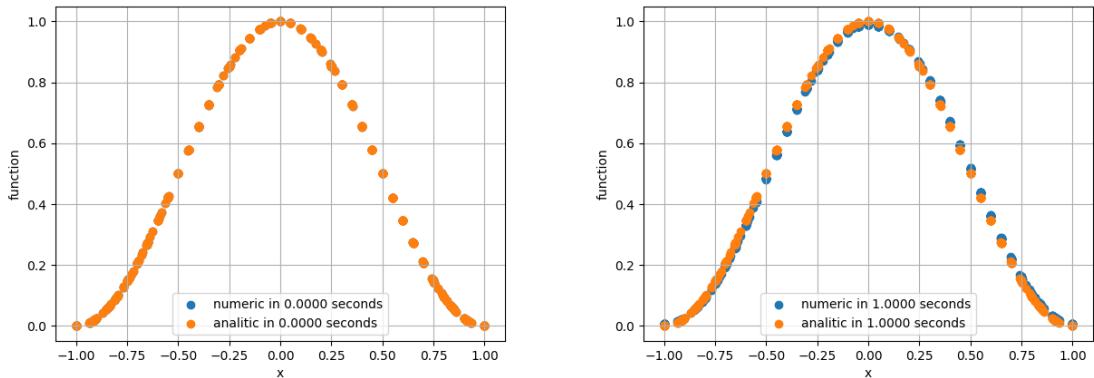


Рис. 6: Интерполяция 2 порядка, параметр сетки  $scale = 0.1$ .

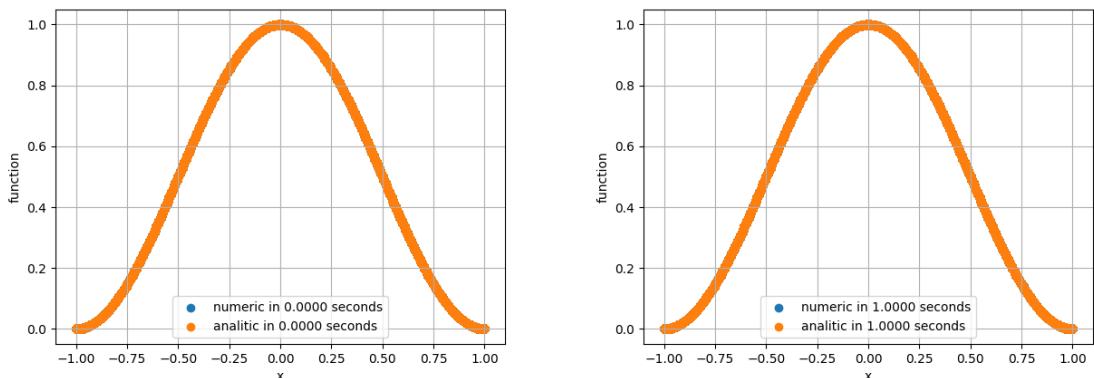


Рис. 7: Интерполяция 2 порядка, параметр сетки  $scale = 0.0125$ .

## 6.2 Сходимость численного решения с аналитическим

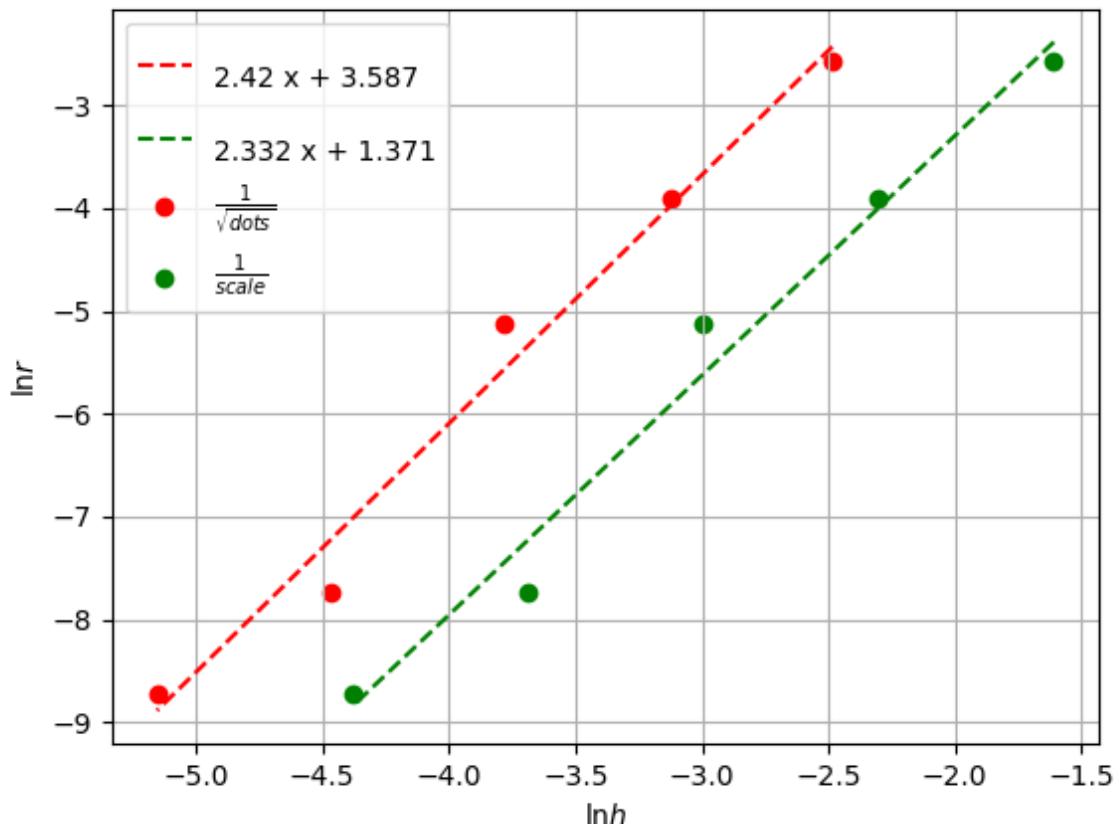


Рис. 8: График зависимости логарифма невязки численного и аналитического решений по Чебышёвой норме от логарифма 'шага' сетки.

## 7 26 октября

Теперь проведём численные эксперименты для двумерных начальных условий. Будем использовать периодические граничные условия. Аналитическое решение тоже буду формировать по принципу характеристик, с той только разницей, что значение на предыдущем слое по времени будет не интерполироваться, а вычисляться непосредственно.

### 7.1 Косинус

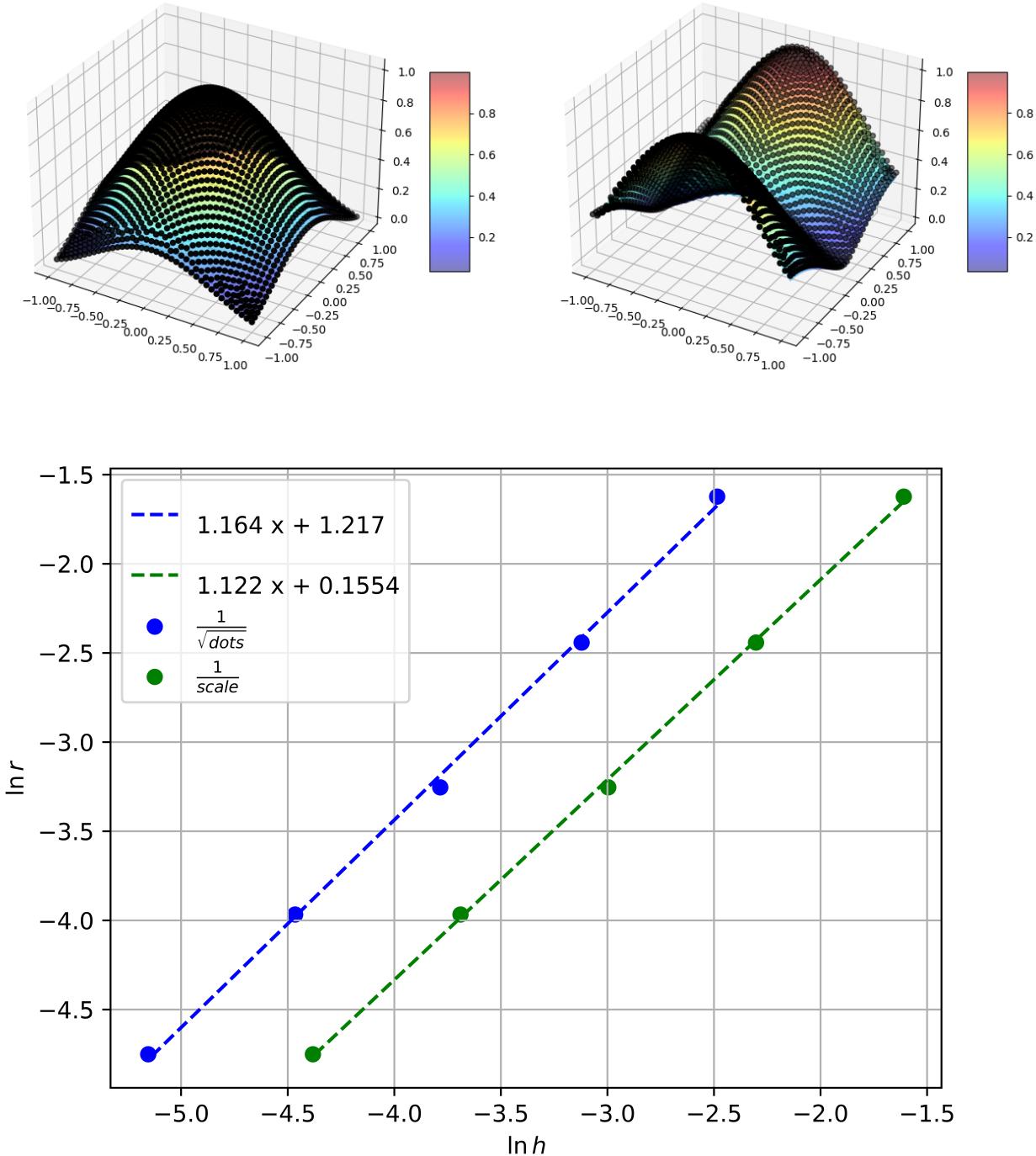


Рис. 9: Начальные условия:  $\cos^2(\sqrt{x^2 + y^2})$ , сетка:  $scale = 0.05$ .

## 7.2 Конус

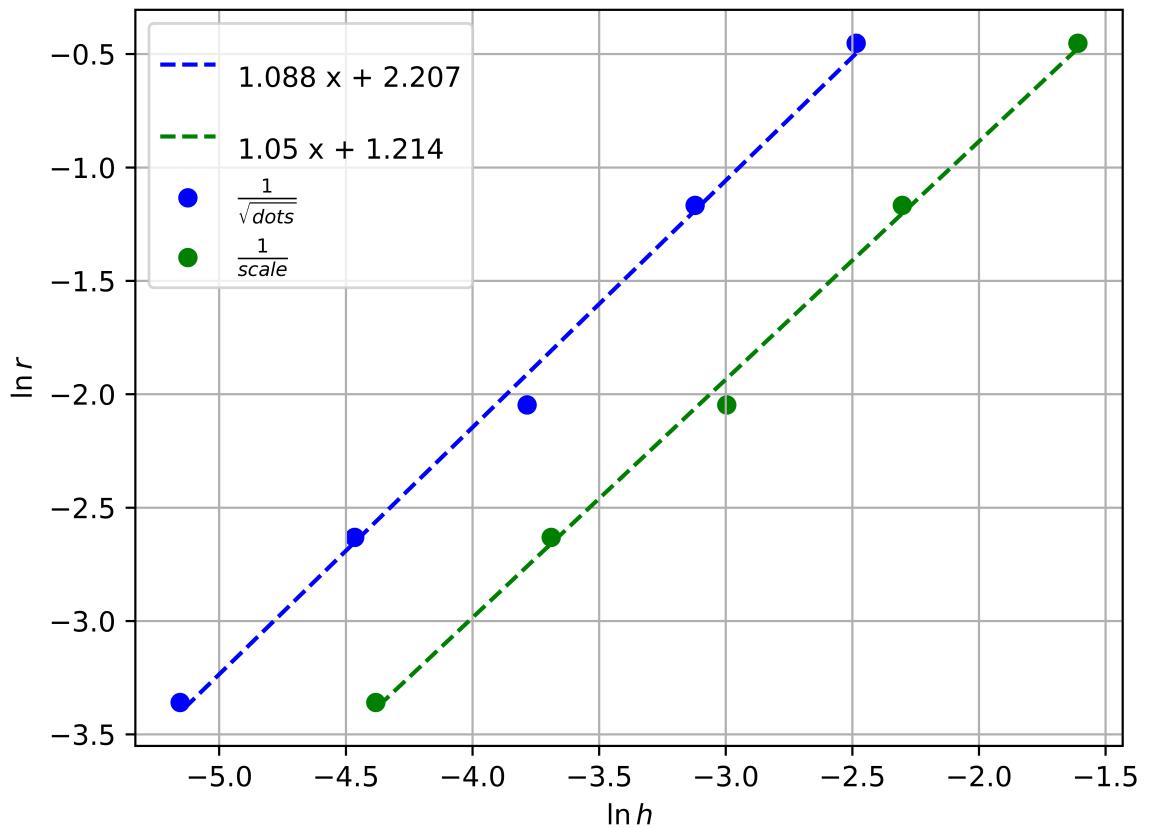
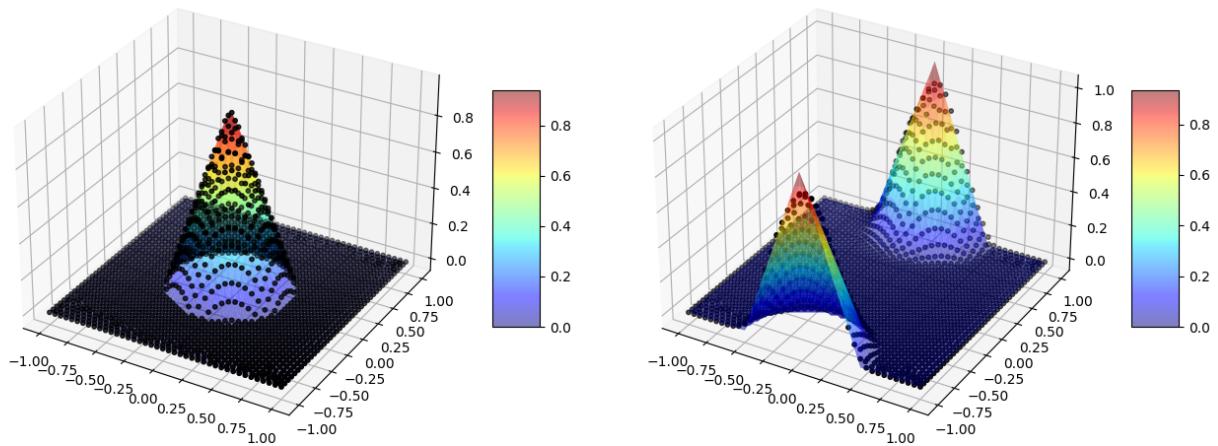


Рис. 10: Начальные условия:  $1 - 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$  if  $\sqrt{x^2 + y^2} < 0.5$  else 0, сетка:  $scale = 0.05$ .

### 7.3 Пирамида

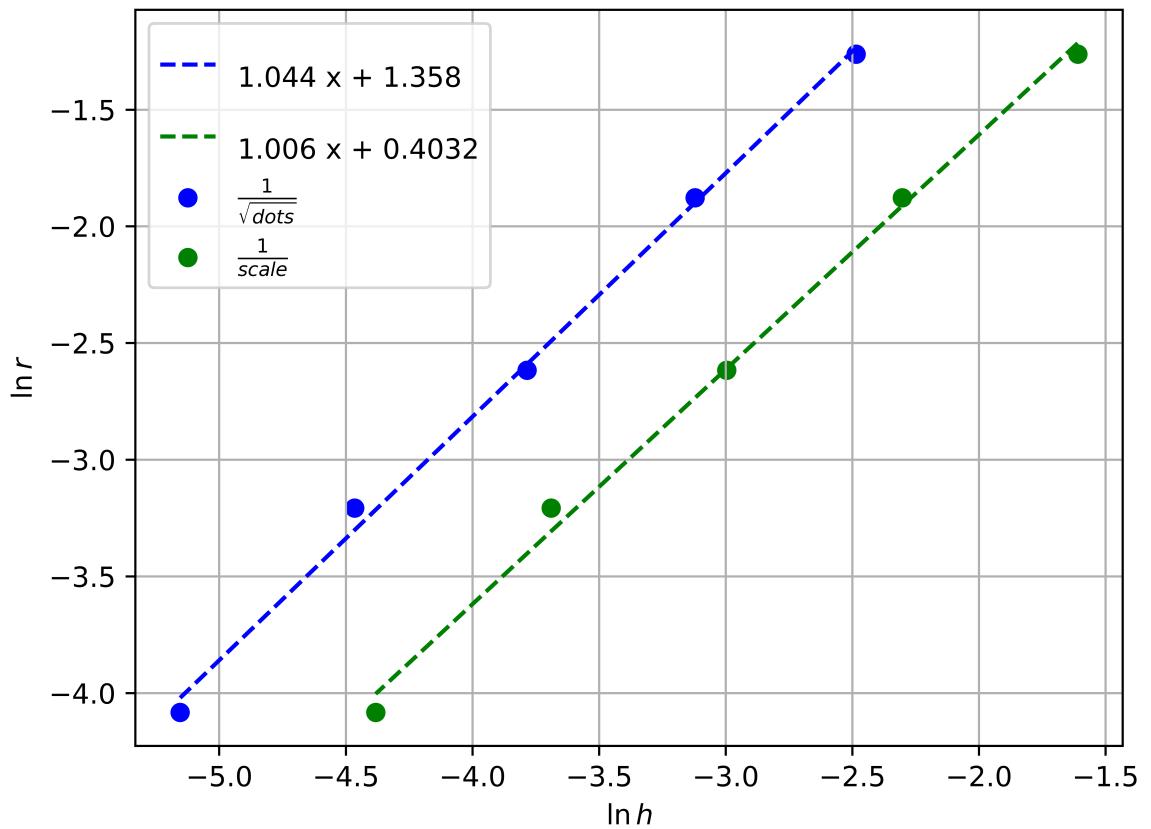
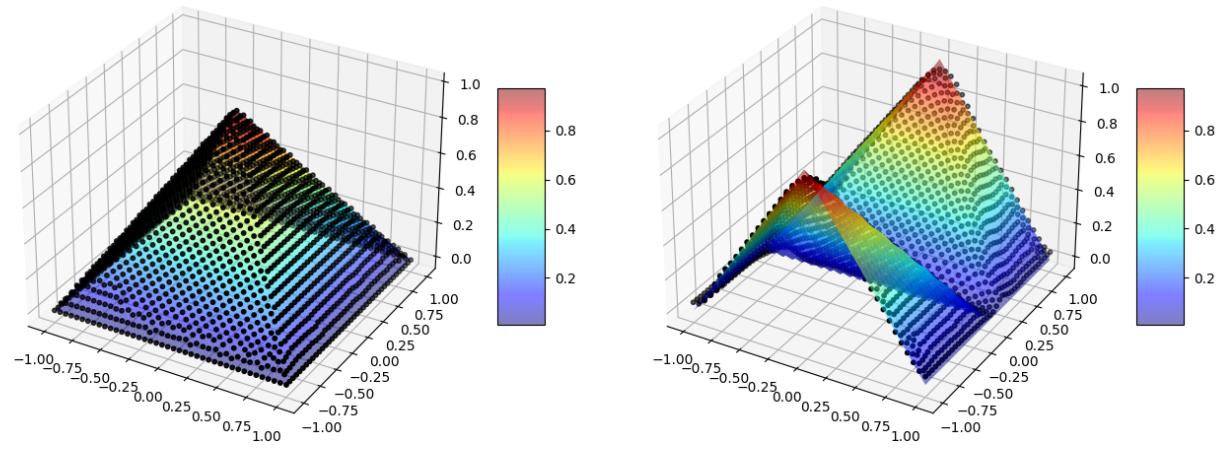


Рис. 11: Начальные условия: 1 –  $\max(\text{abs}(x), \text{abs}(y))$ , сетка:  $scale = 0.05$ .

## 7.4 Куб

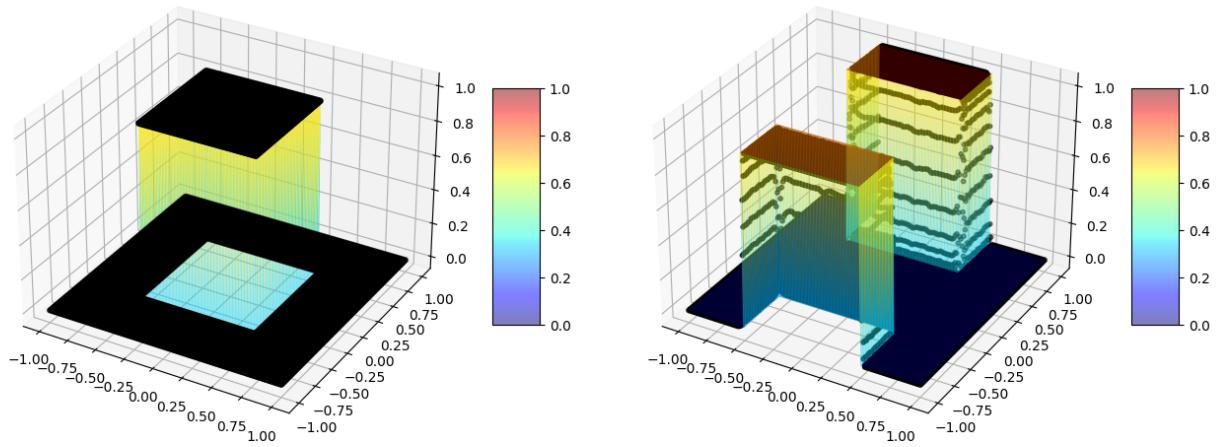


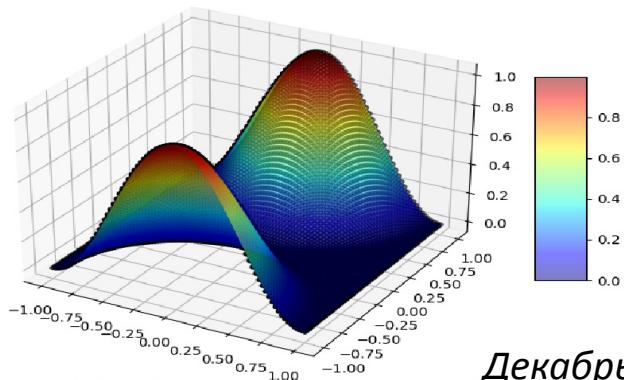
Рис. 12: Начальные условия:  $1 - \max(|x|, |y|)$ , сетка:  $scale = 0.0125$ .

## 8 ноябрь

В начале декабря промежуточные результаты были показаны на конференции: **64-я Всероссийская научная конференция МФТИ**

Презентация ниже.

# Апроксимация высокого порядка на нерегулярной расчётной сетке без использования вспомогательных узлов на рёбрах и гранях



Смирнов Иван

Декабрь 2021  
Московский физико-технический институт

Рассматривается задача численного решения двумерного однородного уравнения переноса на двумерных нерегулярных сетках. Решаемое уравнение для функции  $u(x, y, t)$  в квадрате  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  с периодическими граничными условиями имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_t + \lambda_x u_x + \lambda_y u_y = 0 \\ u(x, y, t) \Big|_{t=0} = \cos^2\left(\frac{\pi r}{2}\right) \text{ if } r < 1 \text{ else } 0 \\ u(a \cdot T_x + x, b \cdot T_y + y, t) = u(x, y, t) \\ T_x = T_y = 2; a, b \in Z \\ x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], \end{cases}$$

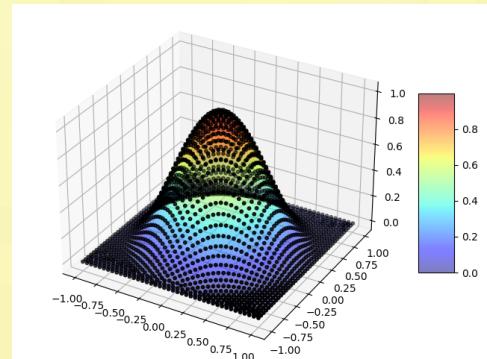


Figure: Начальные условия

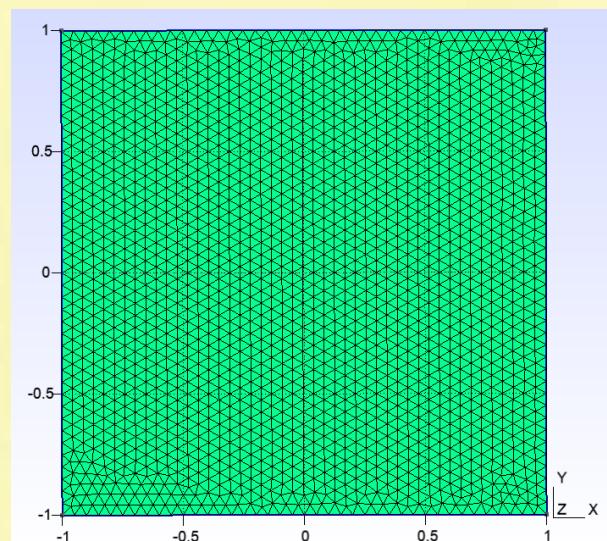
Для решения данной задачи обычно используется сетка из треугольников в области. Значения функции на новом слое по времени вычисляются при помощи сеточно-характеристического метода. При этом рассматриваются вершины треугольника, в который попадает характеристика.

Для улучшения порядка аппроксимации можно использовать следующие подходы.

- Продолженные схемы
- Вспомогательные точки на ребрах

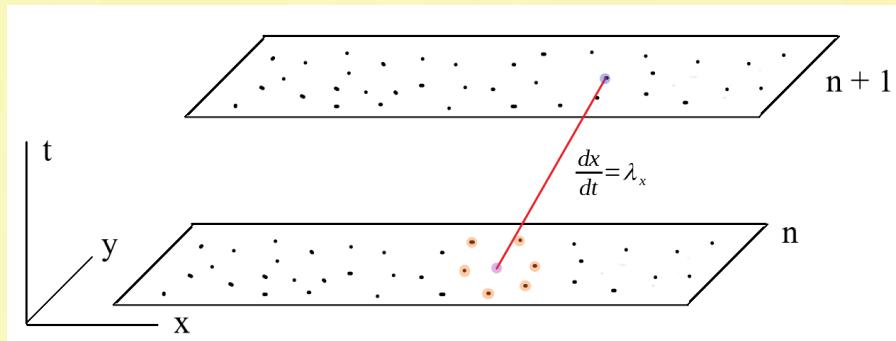
В данной работе рассматривается совсем иной подход. Ребра сетки вообще не используются.

В области генерируется сетка из треугольников, но в расчётах используется только точки сгенерированной триангуляции(без рёбер треугольников). Точки хранятся в KD-Tree.



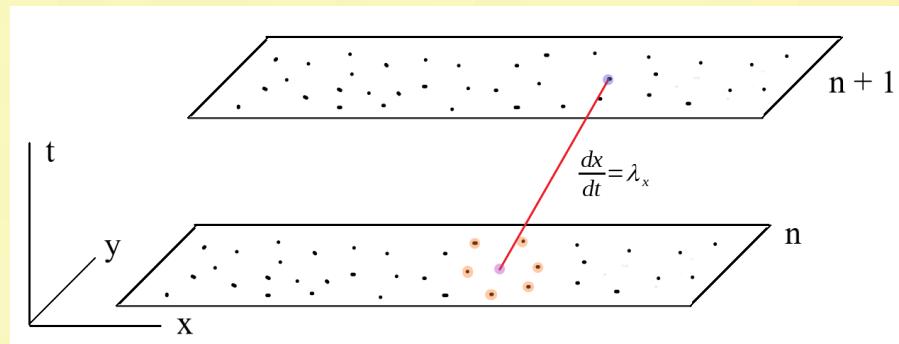
**Figure:** Пример сгенерированной сетки, scale = 0.05

Сначала задача расщепляется по пространственным переменным на два независимых уравнения, решаемых последовательно на каждой временной итерации. Затем используется сеточно-характеристический подход(далее пример для  $x$  координаты). Он заключается в сведении дифференциального уравнения первого порядка в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль характеристики  $dx/dt = \lambda_x$ . Тогда:  $\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{du}{dt} = 0$ .



Из уравнения характеристики для точки с известными координатами  $(x_0, y_0, t^{n+1})$  ставится в соответствие точка с предыдущего слоя по времени  $(x, y, t^n)$  по следующему правилу.  $x = x_0 - \lambda_x \cdot \tau$ , где  $\tau = t^{n+1} - t^n$ . Значение в этой точке интерполируется с помощью составления интерполяционного полинома второй степени по шести ближайшим точкам. Для улучшения результатов интерполяции применяются следующие действия:

- Переход к локальной системе координат вблизи точки  $(x, y, t^n)$ .
- Использование limiter'a, т.е. фиксации интерполируемого значения по  $[min, max]$  от исходных данных.



Порядок аппроксимации считался по сходимости с аналитическим решением. Использовалась первая норма  $\max(|(u_{numeric})_i - (u_{analytic})_i|)$  на последнем слое по времени. В результате для гладких двумерных начальных условиях, указанные на первом слайде был получен **порядок аппроксимации 2.1**.

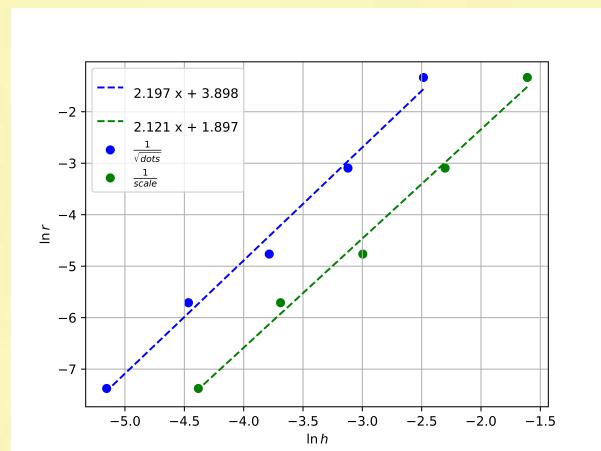


Figure:  $r$  - норма невязки,  $h$  : синим - обратный корень от количества точек, зелёным - обратный масштаб сетки относительно расчётной области.

## 9   декабрь

Необходимо добиться сходимости на разрывных начальных условиях. Будет применяться следующий подход:

- определить разрыв функции или её производной по первой, вторым производным, вычисленными численно в точке формальным дифференцированием интерполяционного полинома
- на первых шагах по времени в определённых местах разрыва осуществить аппроксимацию первым порядком