Задание 1. Найти интервалы возрастания и убывания функций:

1) $f(x) = x + e^{-x}$

Для нахождения интервалов возрастания и убывания нужно найти первую производную и исследовать знак производной:

$$f'(x) = 1 - e^{-x}$$

Теперь решим $f'(x) = 0$:

$$1 - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

Исследуем знак производной:

- При $x < 0$, $f'(x) > 0$, функция возрастает.
- При $x > 0$, $f'(x) < 0$, функция убывает.

Ответ: функция возрастает на интервале $(-\infty; 0)$ и убывает на $(0; +\infty)$.

2) $f(x) = x \ln x$

Первая производная:

$$f'(x) = \ln x + 1$$

Решаем $f'(x) = 0$:

$$\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Исследуем знак производной:

- При $x > \frac{1}{e}$, $f'(x) > 0$, функция возрастает.
- При $0 < x < \frac{1}{e}$, $f'(x) < 0$, функция убывает.

Ответ: функция возрастает на $(\frac{1}{e}; +\infty)$ и убывает на $(0; \frac{1}{e})$.

3) $y = \frac{1}{1-x^2}$

Найдем первую производную:

$$y'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Решаем $y'(x) = 0$:

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Исследуем знак производной:

- При $x > 0$, $y'(x) > 0$, функция возрастает.
- При $x < 0$, $y'(x) < 0$, функция убывает.

Ответ: функция возрастает на $(0; 1)$ и убывает на $(-1; 0)$.

Задание 2. Найти экстремумы функций:

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Первая производная:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Решаем $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Вторая производная:

$$f''(x) = 6x$$

- При $x = -1$, $f''(-1) = -6$, точка максимума.
- При $x = 1$, $f''(1) = 6$, точка минимума.

Ответ: максимум при $x = -1$, минимум при $x = 1$.

2) $y = e^{x^2 - 4x + 5}$

Найдем первую производную:

$$y'(x) = e^{x^2 - 4x + 5} \cdot (2x - 4)$$

Решим $y'(x) = 0$:

$$(2x - 4) = 0 \Rightarrow x = 2$$

Точка экстремума $x = 2$. Так как $e^{x^2 - 4x + 5} > 0$, второй множитель определяет знак производной.

3) $y = x - \arctan x$

Первая производная:

$$y'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2}$$

Решаем $y'(x) = 0$:

$$1 - \frac{1}{1 + x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{1 + x^2} = 1 \Rightarrow x = 0$$

Задание 3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

1) $f(x) = e^{-x^2}$

Найдем первую и вторую производные:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad f''(x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}$$

Решаем $f''(x) = 0$:

$$-2 + 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- При $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и $x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$, $f''(x) < 0$, функция выпукла вниз.
- При $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $f''(x) > 0$, функция выпукла вверх.

Ответ: точки перегиба $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, выпуклость вниз на $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$, выпуклость вверх на $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

2) $y = \cos x$

Первая и вторая производные:

$$y'(x) = -\sin x, \quad y''(x) = -\cos x$$

Решаем $y''(x) = 0$:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

- При $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $y''(x) < 0$, функция выпукла вниз.
- При $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $y''(x) > 0$, функция выпукла вверх.

Ответ: точки перегиба $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, выпуклость меняется по интервалам между этими точками.

3) $y = x^5 - 10x^2 + 7x$

Первая и вторая производные:

$$y'(x) = 5x^4 - 20x + 7, \quad y''(x) = 20x^3 - 20$$

Решаем $y''(x) = 0$:

$$20(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

Исследуем выпуклость на интервалах $x \in (-\infty, 1)$ и $x \in (1, \infty)$.

Ответ: точка перегиба $x = 1$.

Задание 4. Найти асимптоты графиков функций:

1) $y = \frac{3x}{x+2}$

Найдём вертикальные и горизонтальные асимптоты.

- Вертикальная асимптота при $x = -2$.
- Горизонтальная асимптота при $\lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x+2} = 3$.

Ответ: вертикальная асимптота $x = -2$, горизонтальная $y = 3$.

2) $y = e^{-\frac{1}{x}}$

- При $x \to 0^-$, $y \to e^{-\infty} = 0$.
- При $x \to 0^+$, $y \to e^{\infty} = \infty$.

Ответ: вертикальная асимптота при $x = 0$, горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \to -\infty$.

Задание 5. Провести полное исследование и построить графики функций:

1) $y = \ln(1 - x^2)$

- Область определения: $x \in (-1, 1)$.
- Первая производная: $y'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$.
- Вторая производная: $y''(x) = \frac{-2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$.
- Асимптоты: вертикальные при $x = \pm 1$.

Исследование: функция убывает, имеет вертикальные асимптоты при $x = \pm 1$.

2) $y = \frac{x^2}{1-x^2}$

- Вертикальные асимптоты при $x = \pm 1$.
- Первая производная: $y'(x) = \frac{2x(1-x^2)+2x^3}{(1-x^2)^2}$.
- Асимптоты: вертикальные при $x = \pm 1$, горизонтальные при $y = 1$.

3) $y = x^2 e^{-x}$

- Первая производная: $y'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$.
- Асимптоты: горизонтальная при $y = 0$.

4) $y = x - \ln x$

- Первая производная: $y'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, критическая точка при $x = 1$.
- Асимптоты: вертикальная при $x = 0$.