Problema 2

Vázquez Hernández Carlos Iván

(a) Observando que para m, n enteros positivos

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx = \begin{cases} L/2 & \text{si } m=n \\ 0 & \text{si } m\neq n \end{cases}$$

La ecuación de Schrödinger implica que $\hat{H}\psi = E\psi$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\hat{H}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}LE\psi_m$$

y definiendo $\mathbb{H}$ la matriz con elementos

$$H_{mn} = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\hat{H}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m x}{2}\right)\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx$$

La ecuación de schrödinger se puede escribir de forma matricial como

$\mathbb{H}\psi = E\psi$ con $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots)$

Demos

La ecuación de schrödinger es $\hat{H}\psi = E\psi$ con $\psi = \sum C_n\psi_n$ recordando que C_n no es mas que la proyección, podemos hacer $C_n = \langle\psi_m|\psi_n\rangle$ la proyección de ψ_n en ψ_m

Como $\hat{H}$ es un operador lineal, lo podemos sacar de la integral, por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\hat{H}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \hat{H}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \int_0^1 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$ pero si $m=n \Rightarrow$

$$\hat{H}\psi_n = \hat{H}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \frac{L}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\hat{H}\frac{L}{2}\psi_n = \sum E \frac{L}{2}\psi_m$$

recordando que

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n \Rightarrow \text{ si } \frac{L}{2}\psi_n \text{ es un vector.}$$

$$\hat{H}\psi_n = \frac{L}{2}E\psi_m$$

Si corremos un $\hat{H}_{mn}$ sobre cada par ψ_n, ψ_m, vamos a tener sumas corriendo sobre los indices m y n.

$$H_{mn}\psi_n = E_m\psi_m \quad \text{Por lo que}$$

Podemos expresar este producto con matrices

$$H_{mn}\psi_n = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{21} & H_{31} & \cdots \\ H_{21} & \cdot & & \\ H_{31} & & \cdot & \\ \vdots & & & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \\ \end{pmatrix}$$

Por lo que podemos construir una matriz $\mathbb{H}$ con elementos H_{mn}

(b) si $V(x) = \frac{ax}{L} \Rightarrow$

$$H_{mm} = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{ax}{L}\right]\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{2}{L}\left[\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\left(+\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\right)dx + \frac{a}{L}\int_0^L x\sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\right]$$

$$= \frac{\cancel{2}}{L}\frac{\hbar^2}{\cancel{2}M}\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx + \frac{2a}{L^2}\int_0^L x\sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx$$

Con las condiciones de integrales

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx = \begin{cases} L/2 & \text{si } m=n \\ 0 & \text{si } m\neq n \end{cases}$$

$$\int_0^L x \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m\neq n \text{ ambos pares o impares} \\ -\left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \frac{mn}{(m^2-n^2)^2} & \text{si } m\neq n \text{ uno par y otro impar} \\ L^2/4 & \text{si } m=n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad H_{mn} = \begin{cases} \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ML^2} + \frac{a}{2} & \text{si } m=n \\ 0 & \text{si } m\neq n \text{ ambos pares o impares} \\ \underbrace{-\frac{2a}{L^2}\left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \frac{mn}{(m^2-n^2)^2}}_{-\frac{8amn}{\pi^2(m^2-n^2)^2}} & \text{si } m\neq n \text{ uno par y otro impar} \end{cases}$$

Para que no haya errores de calculo en python al meter números tan grandes, vamos a definir

$$\frac{\hbar^2\pi^2}{2ML^2} = \frac{\frac{h^2}{4\pi^2}\cdot \pi^2}{2ML^2} = \frac{h^2}{8ML^2} = \frac{h^2c^2}{8c^2ML^2} =$$

$$= \frac{(1.239\,84193\,eV\cdot\mu m)^2}{8(3\times10^8\, m/s)^2(5\times10^{-4}\,\mu m)^2(9.1094\times10^{-31}\,kg)} = 9.3773\times10^{18} \frac{eV^2}{\frac{m^2\cdot kg}{s^2}}$$

$$= 9.3773\times10^{18}\frac{eV^2}{J} \quad y \quad 1J = 6.242e^{18}\, eV \therefore$$

$$= \boxed{1.5023\, eV}$$

Problema 4

(a) Demostra que la solución a las ecuaciones $-x+ay+x^2y=0$ [1] y $b-ay-x^2y=0$ [2] es

$x=b$ [3] y $y=\frac{b}{a+b^2}$ [4] respectivamente.

de [2] podemos ver que

$x^2y=b-ay$ y de [1] vemos que $x^2y=x-ay$ $\therefore$

$b-ay=x-ay \Rightarrow x=b$ y de [1] vemos que

$$-b+ay+b^2y=0 \Rightarrow -b+y(a+b^2)=0 \Rightarrow y=\frac{b}{a+b^2}$$

(b) Demuestra que las ecuaciones se pueden reorganizar como

$$X=y(a+x^2), \quad y=\frac{b}{a+x^2}.$$

Si $y=\frac{b}{a+b^2}$ y $x=b \Rightarrow y=\frac{b}{a+x^2}$ y $x=y(a+x^2)$

Problema 5

(a) Demuestra diferenciando que la longitud de onda λ a la que la radiación emitida alcanza su mayor intensidad es la solución de

$$5e^{-hc/\lambda k_B T} + \frac{hc}{\lambda k_B T} - 5 = 0$$

Sustituye $x = hc/\lambda k_B T$ y demuestra que la longitud de onda de la radiación máxima obedece al desplazamiento de Wien ley $\lambda = \frac{b}{T}$ donde

la constante de desplazamiento de Wien es: $b = hc/k_B x$ y x es la solución de

$$5e^{-x} + x - 5 = 0$$

Demos:

Si $I(\lambda) = \dfrac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$ y queremos la longitud de onda máxima

$\lambda^{-1} \quad -1\,\lambda^{-2}$

$\Rightarrow \dfrac{d}{d\lambda} I(\lambda) = 0$. sea $2\pi hc^2 = \alpha$ y $\dfrac{hc}{k_B T} = \beta \Rightarrow$

$$\frac{d}{d\lambda} I(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\alpha \lambda^{-5}}{e^{\frac{\beta}{\lambda}} - 1}\right) = \alpha \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\lambda^{-5}}{e^{\beta/\lambda} - 1}\right) =$$

$$\alpha \left[\frac{-5\lambda^{-6} \cdot (e^{\beta/\lambda} - 1) - \left(-\frac{\beta}{\lambda^2} e^{\beta/\lambda} \lambda^{-5}\right)}{(e^{\beta/\lambda} - 1)^2}\right] = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{-5\lambda^{-6}(e^{\beta/\lambda} - 1) + \beta e^{\beta/\lambda} \lambda^{-7}}{(e^{\beta/\lambda} - 1)^2} = 0$$

factorizando tenemos

$$\frac{\lambda^{-6}}{\left(e^{\beta/\lambda}-1\right)^2}\left[-5\left(e^{\beta/\lambda}-1\right)+\frac{\beta e^{\beta/\lambda}}{\lambda}\right]=0.$$

$\therefore$

$$-5e^{\beta/\lambda}+5+\frac{\beta}{\lambda}e^{\beta/\lambda}=0 \quad y \quad e^{\beta/\lambda}\left[-5+\frac{\beta}{\lambda}\right]+5=0$$

y tenemos la ecuación

$$-5+\frac{\beta}{\lambda}=-5e^{-\beta/\lambda} \Rightarrow 5e^{hc/K_\beta T\lambda}+\frac{hc}{\lambda K_\beta T}-5=0$$

si hacemos $x=\frac{hc}{K_\beta T\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{hc}{K_\beta T x}$ sea $b=\frac{hc}{K_\beta x} \Rightarrow$

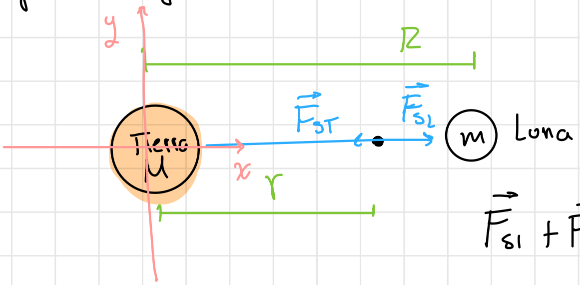
la longitud de onda de la radiación máxima es:

$$\lambda=\frac{b}{T}$$

Problema 6

(a)

Si en el punto L_1, hay un movimiento con r constante, entonces la Segunda ley de Newton es:



$$\vec{F}_{SL} = F_{SL}\,\hat{r}$$

$$\vec{F}_{ST} = -F_{ST}\,\hat{r} \quad y$$

$$\vec{F}_{SL} + \vec{F}_{ST} = m_s\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}\right]$$

Pero como $r = cte \Rightarrow$ $(F_{SL} - F_{ST})\,\hat{r} = -m_s r\dot{\theta}^2\hat{r} + m_s r\ddot{\theta}\,\hat{\theta}$ y las ecuaciones de movimiento son

$$F_{SL} - F_{ST} = -m_s r\dot{\theta}^2 \quad y \quad m_s r\ddot{\theta} = 0.$$

Si resolvemos la radial.

$$\frac{GM\cancel{m_s}}{(R-r)^2} - \frac{GM\cancel{m_s}}{r^2} = -\cancel{m_s}\, r\dot{\theta}^2 \qquad \text{si } \dot{\theta} = \omega \Rightarrow$$

$$\frac{GM}{r^2} - \frac{Gm}{(R-r)^2} = r\omega^2$$