Modelación Numérica II
Examen Final

Iván Vega Gutiérrez

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Unidad Aguascalientes
E-mail: ivan.vega@cimat.mx

Ejercicio 1 Considerar el modelo de de trafico vehicular

$$u_t + c(u)u_x = 0 \quad u(x,0) = f(x) \tag{1}$$

donde

$$c(u) = \beta - 2u \quad \beta = 1.5 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \beta x^2(3-2x) & 0 \leq x \leq 1 \\ \beta & x \geq 1 \end{cases}$$

Graficar las lineas características cuando $\beta = 1.5$ en el intervalo (- 1, 2) $\times$ (0, 1), ¿estas líneas definen una función?

Solución de 1

Primero hallemos la ecuación que describe las líneas características de (1). Dado que se tiene un modelo de tráfico vehicular, se tiene que $c(u) = F'(u)$, donde F denota el flujo vehicular. Ahora, definimos las curvas características para una solución dada $u(x,t)$ como soluciones de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = c(u(x,t)) \tag{2}$$

Notemos que la familia de curvas solución depende de u, sin embargo, buscamos que u sea constante a lo largo de las curvas características. Ahora supongamos que $x(t)$ es solución de (2), observemos que

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_x\frac{dx}{dt} + u_t = c(u)u_x + u_t = 0$$

es decir u es constante. Ahora bien, sea $x(t, x_0)$ la curva característica que inició en el punto $(x_0, 0)$, luego

$$u(x(t,x_0),t) = u(x(0,x_0),0),$$

entonces

$$\frac{dx}{dt} = c(u(x,t)) = c(u(x(t,x_0),t)) = c(u(x(0,x_0),0)) = c(u(x_0,0))$$

integrando se obtiene que

$$x(t,x_0) = x_0 + c(u(x_0,0))t.$$

Así, la familia de líneas características dependen únicamente del valor de la solución u cuando $t = 0$, es decir de la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$. Por lo tanto, las líneas características cuando pasan por el punto $(x_0, 0)$ siguen la ecuación

$$x(t) = x_0 + c(f(x_0)t \tag{3}$$

A partir de (3) podemos graficar las líneas características cuando $\beta = 1.5$ para los distintos valores que toma $f(x)$. En la figura (1) se muestran las líneas características cuando $\beta = 1.5$, las líneas azules es cuando $x \leq 0$, las rojas cuando $x \geq 1$ y las líneas verdes cuando $0 \leq x \leq 1$. De la figura (1) se puede observar claramente que estás líneas no definen una función ya que las líneas se intersectan en varios puntos.

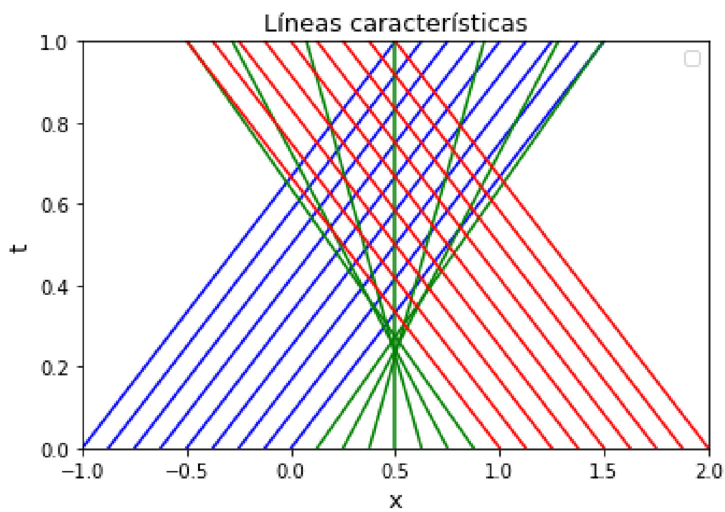

Figura 1: Líneas características cuando $\beta = 1.5$

Ejercicio 2 Escriba un programa que implemente explicitamente el esquema de diferencias finitas.

$$u_{j,n+1} = (1 - 2s)u_{j,n} + s(u_{j+1,n} + u_{j-1,n}) \tag{4}$$

Sea $k = 1$ y las condiciones de frontera $u = 0$ en $x = 0$ y $x = 10$. Correr el código con $f(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{10}$

Fijando $\Delta x = 0.5$, experimentar con varios valores de Δt para ver cuando el esquema se estabiliza.

Comparar los resultados con la solución exacta

$$u(x,t) = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{10} \exp{(-\frac{\pi}{10})^2 t}$$

en varios tiempos, con $\Delta t = .125$. Encontrar el máximo error en cada tiempo. Ahora, reduciendo el tamaño de paso $\Delta X = 0.25$ y haciendo $\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{2}$ comparar contra la solución exacta ¿El error es más pequeño? ¿Qué tanto?

Solución de 2

Las condiciones que se tienen es para el problema de la ecuación de calor

$$u_t - ku_{xx} = 0, \qquad u(x, 0) = f(x)$$

En el esquema explícito (4) $s = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$. En el código (2) se implementa el esquema y se hace la comparación de la solución obtenida numéricamente con la solución exacta. En primera instancia se fijó el tamaño de paso $\Delta x = 0.5$ y se tomaron 100 distintos valores para Δt en el intervalo $(0, 1)$, y se pudo observar que para valores aproximadamente mayores que 0.145 la solución se vuelve inestable. En la figura (2) se puede observar este comportamiento.

Asimismo, en la figura (3) se observa la solución exacta, por tanto, podemos afirmar que los resultados obtenidos concuerdan con las afirmaciones de la sección 3.6, ya que se asegura estabilidad de la solución numérica cuando $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2}$. Por lo tanto, se garantiza la estabilidad de la solución numérica para nuestro problema cuando $\Delta t \leq 0.125$

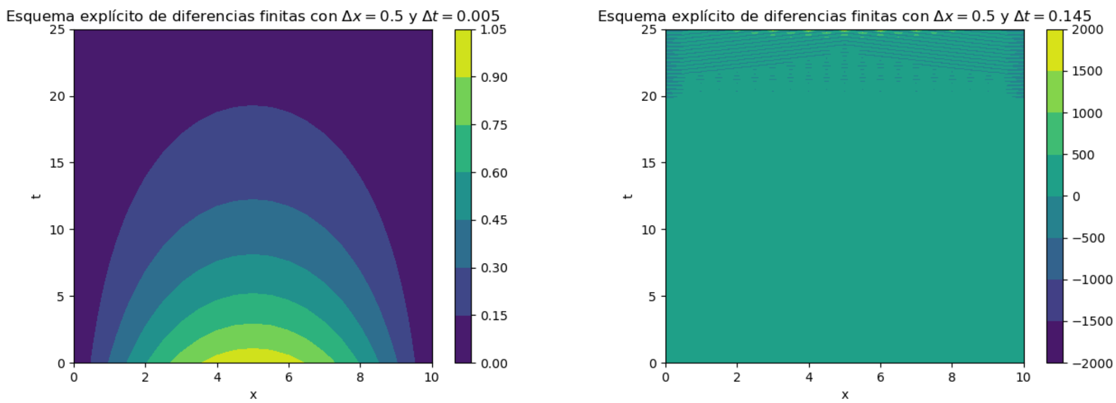

Figura 2: Comparación de solución estable vs inestable

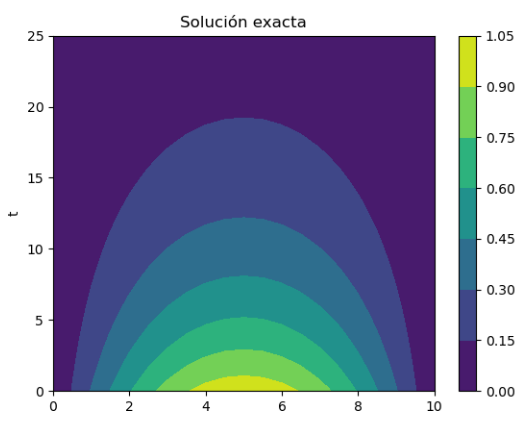

Figura 3: Solución exacta

Por otro lado, se hace una comparación de los errores máximos al fijar $\Delta x = 0.5$ y $\Delta t = 0.125$ contra $\Delta x = 0.25$ y $\Delta t = \frac{0.25^2}{2}$. Notemos que al fijar $\Delta x = 0.25$ no solo se está reduciendo el tamaño de paso en el eje x, sino que también se está asegurando que que se cumpla la condición de estabilidad $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2}$.

En la figura (4) se observa la comparación de los errores obtenidos. Se ve claramente que al reducir el tamaño de paso en x y definir Δt tal que se asegure la estabilidad de la solución, el error se reduce significativamente, se puede apreciar que el error es casi cuatro veces menor, pasando de un error máximo de aproximadamente 0.0015 a 0.002 (ambos errores máximos alcanzados al rededor del tiempo $t = 10$)

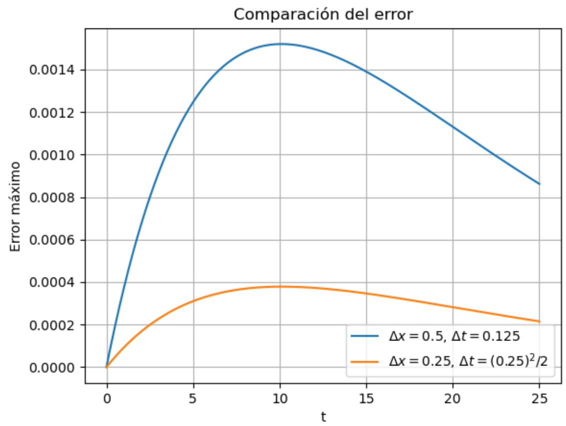

Figura 4: Comparación de los errrores obtenidos

Ejercicio 3 . Consideremos el problema de valor inicial (PVI),

$$u_t + (\frac{1}{x})u_x = 0 \qquad x > 0 \qquad u(x,0) = f(x)$$

a. Encontrar una expresión para la solución de la ecuación diferencial ordinaria para encontrar las características,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x} \qquad x(0) = x_0 > 0 \tag{5}$$

b. Del la expresión encontrada en el inciso a, resolver para x_0 en términos de x y t: $x_0 = p(x,t)$. La función $p(x,t)$ no esta bien definida para todo (x,t), ¿Qué restricciones se deben poner a x, t para que esto no suceda?. Encontrar la solución al PVI $u(x,t) = f(p(x,t))$

c. Escribir la expresión encontrada en el inciso a. de la forma $t = h(x, x_0)$. Graficar las curvas características que inician en el punto $(x_0, 0)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 10$ para varios valores de x_0. Restringir las curvas para que caigan en el rectángulo $[0,10] \times [0,5]$ y describir el comportamiento de ellas.

d. Considerar $f(x) = \exp\left[-2(x-2)^2\right]$. Graficar la solución al PVI en [0, 10] para distintos valores de t utilizando la expresión del inciso b. Explicar la grafica.

Solución de 3

a. A partir de (5), tenemos que

$$x^2(t) = 2t + 2k,$$

donde k es una constante, luego por la condición inicial

$$x(0) = \sqrt{2k} = x_0,$$

por lo tanto la expresión buscada es

$$x(t) = \sqrt{2t + x_0^2}$$

b. Sea $x_0 = p(x,t)$, luego del inciso anterior se tiene que

$$x_0 = p(x,t) = \sqrt{x^2(t) - 2t}$$

Notemos que $p(x,t)$ no está definida cuando $x^2(t) - 2t < 0$, por lo tanto si ponemos la restricción $t \geq \frac{x^2}{2}$, la función $p(x,t)$ queda bien definida en los reales. Por lo tanto la solución está definida por

$$u(x,t) = f(\sqrt{x^2(t) - 2t}) \qquad \text{para} \qquad t \geq \frac{x^2}{2}$$

c. A partir del inciso a, se tiene que

$$h(x, x_0) = t = \frac{x^2 - x_0^2}{2}$$

En la figura (5) se observa el comportamiento de las curvas características para distintos valores de x_0. A medida que x_0 incrementa el comportamiento de las curvas características tienen la apariencia de líneas rectas.

Figura 5: Curvas características

d. Considerando $f(x) = \exp\left[-2(x-2)^2\right]$ y el inciso b, se tiene que

$$u(x,t) = \exp\left[-2(\sqrt{x^2 - 2t} - 2)^2\right]$$

La figura (6) es una representación de la solución $u(x,t)$ en dos dimensiones, se puede observar que a medida que la variable t incrementa la superficie tiende a desplazarse a la derecha del eje x, esto se debe a la condición del inciso b, donde $t \geq \frac{x^2}{2}$, también se observa que el valor máximo que alcanza la solución es 1.

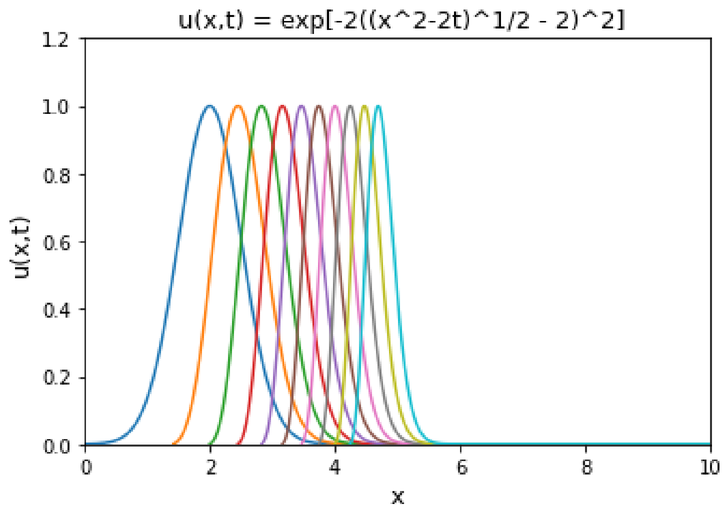

Figura 6: Gráfica de la solución u(x,t)

I. Códigos

Código 1: Ejercicio 1

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math
beta = 1.5
t = np.linspace(0,1,11)
x0 = np.arange(-1,2,.125)
for i in x0:
  if  i <= 0 :
    plt.plot(i + beta*t, t, 'b')
    plt.axis((-1,2,0,1))
    plt.title("Líneas características",fontsize=13)
    plt.xlabel("x",fontsize=13)
    plt.ylabel("t",fontsize=13)
  elif i >=1 :
    plt.plot(i - beta*t, t, 'r')
  else:
    plt.plot(i + (beta - 2*((beta*i**2)*(3-2*i)))*t, t, 'g')
```

Código 2: Ejercicio 2

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def esquema(dx,dt):
    '''
    Funcion que grafica la solucion numerica y exacta
    Parametros:
    dx : tamano de paso en la variable x
    dt : tamano de paso en la variable t
    '''
    xi=0
```

```
    xf=10
    ti=0
    tf=25
    espx = int(xf//dx)+1
    espt = int(tf//dt)+1
    x=np.linspace(xi,xf,espx)
    t=np.linspace(ti,tf,espt)
    s=dt/(dx**2)
    #Solucion diferencias finitas
    un=np.zeros((espt,espx))
    #Condiciones de frontera
    un[0,:-1]=np.sin((np.pi*x[:-1])/10)
    # Esquema explicito
    for j in range(0,espt-1):
        for i in range(1,espx-1):
            un[j+1,i]=s*un[j,i-1]+(1-2*s)*un[j,i]+s*un[j,i+1]
    fig,ax=plt.subplots()
    g=ax.contourf(x,t,un)
    fig.colorbar(g)
    ax.set_title(r"Esquema explícito de diferencias finitas con
    $\Delta x = {}$ y $\Delta t = {}$".format(dx,dt))
    ax.set_xlabel("x")
    ax.set_ylabel("t")
    plt.show()
    #Solución exacta
    solution=np.zeros((espt,espx))
    for j in range(0,espt):
        for i in range(0,espx):
            solution[j,i]=
    np.sin((np.pi*x[i])/10)*(np.exp(-((np.pi/10)**2)*t[j]))
    fig,ax=plt.subplots()
    g=ax.contourf(x,t,solution)
    fig.colorbar(g)
    ax.set_title("Solución exacta")
    ax.set_xlabel("x")
    ax.set_ylabel("t")
    plt.show()
    error = []
    for i in range(espt):
        error.append(max(np.abs(un[i]-solution[i])))
    return error

# Probar inestabilidad variando deltat
'''
T = np.linspace(0, 1, 100)
print(T)
for i in range(len(T) -1):
    esquema(0.5, T[i+1])
'''
sol_est = esquema(0.5, 0.005)
sol_inest = esquema(0.5, 0.145)
# Comparar errores maximos
sol1 = esquema(0.5, 0.125)
tam1 =  int(25//0.125)+1
```

```
t1=np.linspace(0,25,tam1)
delta_t2 = ((0.25)**2)/2
sol2 = esquema(0.25,delta_t2)
tam2 =  int(25//delta_t2)+1
t2=np.linspace(0,25,tam2)
# Grafica de errores
plt.plot(t1,sol1, label=r"$\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.125$")
plt.plot(t2,sol2,label=r"$\Delta x = 0.25$, $\Delta t = (0.25)^2 /2$")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("Error máximo")
plt.title("Comparación del error")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Código 3: Ejercicio 3

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Inciso c
x0 = np.arange(20)
x = np.linspace(0,10,10000)
for i in x0:
  plt.plot(x, (x**2 - x0[i]**2)/2)
  plt.axis((0,10,0,5))
  plt.title(" t = (x^2- x0^2)/2",fontsize=13)
  plt.xlabel("x",fontsize=13)
  plt.ylabel("t",fontsize=13)

#Inciso d
t = np.arange(10)
x = np.linspace(0,10,1000)
for i in t:
  plt.plot(x, np.exp(-2*(np.sqrt(x**2 - 2*t[i])-2)**2))
  plt.axis((0,10,0,1.2))
  plt.title(" t = (x^2- x0^2)/2",fontsize=13)
  plt.xlabel("x",fontsize=13)
  plt.ylabel("t",fontsize=13)
```