Modelación Numérica II
Tarea IV

Iván Vega Gutiérrez

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Unidad Aguascalientes
E-mail: ivan.vega@cimat.mx

I. Ejercicio 1

Verificar que cualquier solución $g(t)$ de

$$\frac{d^2g}{dt^2} + 2\alpha\frac{dg}{dt} + w_0^2 g = 0 \tag{1}$$

es del tipo

$$g(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta)$$

cuando $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$ y $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$

I.1. Solución

En efecto, a partir de (1), la ecuación característica es

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$$

Luego,

$$r = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4(\alpha^2 - \omega_0^2)}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Por hipótesis $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$, así

$$r = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega$$

Por lo tanto, la solución general de (1) es

$$g(t) = e^{-\alpha t}(c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t) \tag{2}$$

Por otro lado, por un lema sabemos que cualquier solución de la forma

$$y(t) = a\cos\omega_0 t + b\operatorname{sen}\omega_0 t$$

se puede ver como

$$y(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$$

donde $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\delta = \tan^{-1} b/a$. En consecuencia, de (2) se obtiene que

$$g(t) = \sqrt{(e^{-\alpha t}c_1)^2 + (e^{-\alpha t}c_2)^2}\cos(\omega t - \delta) = e^{-\alpha t}\sqrt{c_1^2 + c_2^2}\cos(\omega t - \delta)$$

donde $\delta = \tan^{-1} \frac{c_2}{c_1}$. Si ponemos $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, entonces cualquier solución de (1) es de la forma

$$g(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta)$$

II. Ejercicio 2

Un paciente que llegó al hospital después de uan noche de ayuno presenta una concentración de glucosa en la sangre de 70 mg/100 ml (miligramos de glucosa por 100 mililitros de sangre). Sus concentraciones glucósicas en la sangre 1, 2 y 3 horas después de haber ingerido una cantidad grande de glucosa son 96, 65 y 75 mg/100 ml, respectivamente. Demuestre que el paciente es una persona sana. **Sugerencia :** En el caso subamortiguado, el intervalo de tiempo entre dos ceros sucesivos de $G - G_0$ es mayor que un medio del periodo natural.

II.1. Caso subamortiguado

A partir de las condiciones iniciales tenemos que $G_0 = 70$. Además, sabemos que en general la concentración de glucosa en el tiempo t se determina por

$$G(t) - G_0 = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta)$$

Por lo tanto, para los tiempos de 1, 2 y 3 horas, respectivamente se tiene que

$$26 = Ae^{-t}\cos(\omega - \delta) \tag{3}$$

$$-5 = Ae^{-2t}\cos(2\omega - \delta) \tag{4}$$

$$5 = Ae^{-3t}\cos(3\omega - \delta) \tag{5}$$

Debido a las condiciones en las que se realiza la prueba de tolerancia a la glucosa, sabemos que la concentración de glucosa incrementará y posteriormente se estabilizará, además, dado que $G(t)$ es continua, tenemos que entre la primer hora y la segunda, la concentración de glucosa llegó a cero por primera vez. Sea T el tiempo tal que $G(T) = 70$, por (3) y (4) se tiene que $1 < T < 2$.

Por otro lado, dado que se supone que el caso es subamortiguado, el intervalo de tiempo entre dos ceros es mayor que un medio del periodo natural, es decir

$$T > \frac{\pi}{\omega_0},$$

luego, sea $\epsilon > 0$

$$T = \frac{\pi}{\omega_0} + \epsilon.$$

En consecuencia, se tiene que

$$1 < \frac{\pi}{\omega_0} + \epsilon < 2.$$

De aquí que

$$\frac{1}{\pi} - \frac{\epsilon}{\pi} < \frac{1}{\omega_0} < \frac{2}{\pi} - \frac{\epsilon}{\pi}.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\omega_0} < \frac{2}{\pi}. \tag{6}$$

De (6) concluimos que el paciente es una persona sana.