Modelación Estadística I

Iván Vega Gutiérrez

26 de Agosto de 2021

Ejercicios 1.3.1 Operaciones con conjuntos

1. Use las propiedades básicas de las operaciones entre conjuntos para demostrar rigurosa- mente las siguientes igualdades. En cada caso dibuje un diagrama de Venn para ilustrar cada identidad.

   a) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$
   b) $A^c - B^c = B - A$
   c) $A \cap B^c = A - (A \cap B)$
   d) $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$
   e) $(A - B) - C = A - (B - C)$
   f) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

2. Diferencia simétrica. La diferencia simétrica entre los conjuntos A y B se puede también definir como sigue

$$A \triangle B := (A - B) \cup (B - A)$$

   Demuestre o proporcione un contraejemplo para las siguientes identidades:

   a) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$
   b) $A \triangle B = B \triangle a$
   c) $A \triangle \emptyset = A$
   d) $A \triangle \Omega = A^c$
   e) $A \triangle A = \emptyset$

3. Función indicadora. La función indicadora de un evento cualquiera A se denota por $1_A : \Omega \to \mathbb{R}$ y toma el valor uno dentro del evento A y cero fuera de él. Demuestre que:

   a) $1_\Omega(\omega) = 1$
   b) $1_\emptyset(\omega) = 0$
   c) $1_{A \cup B}(\omega) = 1_A(\omega) + 1_B(\omega) - 1_{A \cap B}(\omega)$
   d) $1_{\cap_{i=1}^n A_i}(\omega) = \prod_{i=1}^n 1_{A_i}(\omega)$
   e) Si $A_1, \ldots, A_n$ son eventos ajenos dos a dos, entonces

$$1_{\cup_{i=1}^n A_i}(\omega) = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}(\omega).$$

4. Suponga que un experimento aleatorio consiste en escoger una persona al azar dentro de una población dada. Defina los eventos:

$$H = \text{“la persona escogida es hombre”}$$

$$E = \text{“La persona escogida cuenta con un empleo”}$$

$$C = \text{“La persona escogida es casada”}$$

   Exprese en palabras el tipo de personas, según las características anteriores, determinadas por los siguientes eventos:

a) $H \cap E$
b) $H^c \cap E^c$
c) $H \cup E$
d) $H - E$

5. Un número entero es seleccionado al azar. Defina los eventos:

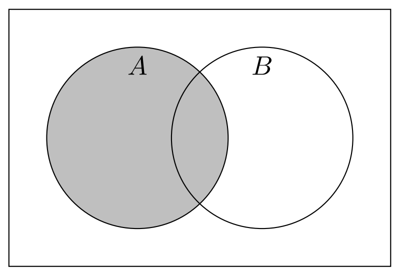
$$A = \text{“el número escogido es par”}$$
$$B = \text{“el número escogido termina en 5”}$$
$$C = \text{“el número escogido termina en 0”}$$

Describa con palabras los siguientes eventos:

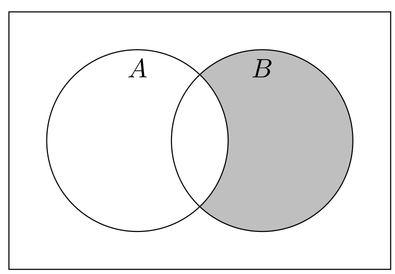
(a) $A \cap C$
(b) $B \cup C$
(c) $A \cap B$
(d) $A - B$

Solución:

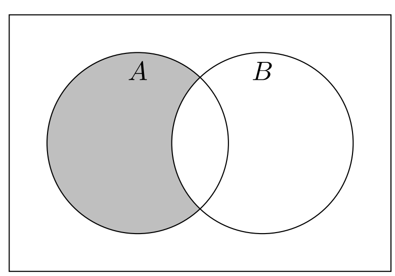
1. (a)
$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega \\ &= A \cap (B \cup B^c) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \end{aligned}$$



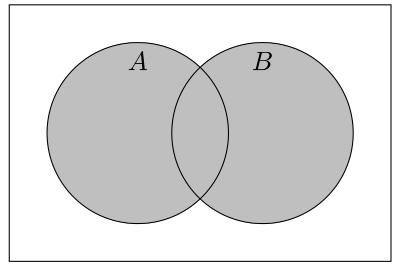
(b)
$$\begin{aligned} A^c - B^c &= A^c \cap (B^c)^c \\ &= A^c \cap B \\ &= B \cap A^c \\ &= B - A \end{aligned}$$



(c)
$$\begin{aligned} A - (A \cap B) &= A \cap (A \cap B)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B^c) \\ &= A \cap B^c \end{aligned}$$



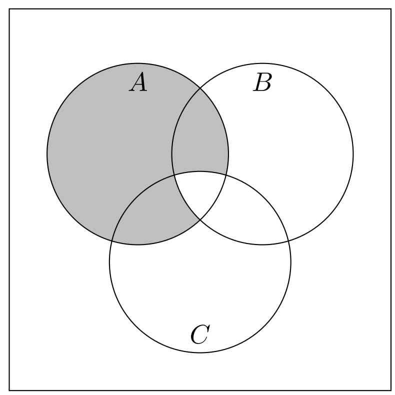
(d) $$\begin{aligned} A \cup (B \cap A^c) &= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) \\ &= (A \cup B) \cap \Omega \\ &= A \cup B \end{aligned}$$



(e) Notemos que en general, la propiedad no se cumple, para ello consideremos los conjuntos: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ y $C = \{3, 5\}$. Observemos que,
$A - B = \{1, 3\}$ y $B - C = \{2, 4\}$. Por lo tanto se tiene que,

$$(A - B) - C = \{1\} \quad \text{mientras que} \quad A - (B - C) = \{1, 3\}.$$

(f) $$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= A \cap (B \cap C)^c \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \\ &= (A - B) \cup (A - C) \end{aligned}$$



2. (a)

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ &= ((A \cap B^c) \cup B) \cap ((A \cap B^c) \cup A^c) \\ &= [(A \cup B) \cap (B^c \cup B)] \cap [(A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)] \\ &= [(A \cup B) \cap \Omega] \cap [\Omega \cap (B^c \cup A^c)] \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c) \\ &= (A \cup B) \cap (B \cap A)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (B - A) \cup (A - B) \\ &= B \triangle A \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} A\triangle\emptyset &= (A-\emptyset)\cup(\emptyset - A) \\ &= A\cup(\emptyset\cap A^c) \\ &= A\cup\emptyset \\ &= A \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} A\triangle\Omega &= (A-\Omega)\cup(\Omega - A) \\ &= (A\cap\Omega^c)\cup(\Omega\cap A^c) \\ &= (A\cap\emptyset)\cup A^c \\ &= \emptyset\cup A^c \\ &= A^c \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} A\triangle A &= (A-A)\cup(A-A) \\ &= \emptyset\cup\emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

3. (a) Para cualquier evento ω se tiene que $\omega\in\Omega$, por lo tanto $1_\Omega(\omega)=1$.
   (b) Notemos que no existe ω tal que $\omega\in\emptyset$, por lo tanto, $1_\emptyset(\omega)=0$.
   (c) Para la demostración consideremos los siguients casos:

   Caso I: $A\cap B=\emptyset$

   Por (b) se tiene que

   $$1_{A\cap B}(\omega)=0$$

   Supongamos que $1_{A\cup B}(\omega)=1$. Por la definición de función indicadora se tiene que $\omega\in A\cup B$ y dado que $A\cap B=\emptyset$, se tiene que ω está en A o está en B pero no en ambos conjuntos. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\omega\in A$, así $\omega\notin B$, en consecuencia $1_A(\omega)=1$ y $1_B(\omega)=0$. Por lo tanto $1_{A\cup B}(\omega)=1_A(\omega)+1_B(\omega)-1_{A\cap B}(\omega)$

   Ahora supongamos que $1_{A\cup B}(\omega)=0$, es decir, $\omega\notin A\cup B$ o bien $\omega\notin A$ y $\omega\notin B$, así, $1_A(\omega)=0$ y $1_B(\omega)=0$. Por lo tanto $1_{A\cup B}(\omega)=1_A(\omega)+1_B(\omega)-1_{A\cap B}(\omega)$

   Caso II: $A\cap B\neq\emptyset$

   Supongamos que $1_{A\cup B}(\omega)=1$, luego $\omega\in A\cup B$. Observemos que

   $$A\cup B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\cup(A\cap B).$$

   Por tanto consideremos los siguientes casos.

i. $\omega \in A \cap B^c$
Si $\omega \in A \cap B^c$ entonces $\omega \in A$, $\omega \notin B$ y $\omega \notin A \cap B$. Luego $1_A(\omega) = 1, 1_B(\omega) = 0$ y $1_{A\cap B}(\omega) = 0$. Por lo tanto $1_{A\cup B}(\omega) = 1_A(\omega) + 1_B(\omega) - 1_{A\cap B}(\omega)$

ii. $\omega \in A^c \cap B$
De manera análoga al caso anterior se obtiene que $1_B(\omega) = 1, 1_A(\omega) = 0$ y $1_{A\cap B}(\omega) = 0$. Por lo tanto $1_{A\cup B}(\omega) = 1_A(\omega) + 1_B(\omega) - 1_{A\cap B}(\omega)$.

iii. $\omega \in A \cap B$
Así $\omega \in A$ y $\omega \in B$, luego $1_A(\omega) = 1, 1_B(\omega) = 1$ y $1_{A\cap B}(\omega) = 1$. Por lo tanto $1_{A\cup B}(\omega) = 1_A(\omega) + 1_B(\omega) - 1_{A\cap B}(\omega)$.

Por otro lado supongamos que $1_{A\cup B}(\omega) = 0$, así $\omega \notin A$ y $\omega \notin B$, luego $1_A(\omega) = 1_B(\omega) = 1_{A\cap B}(\omega) = 0$. Por lo tanto $1_{A\cup B}(\omega) = 1_A(\omega) + 1_B(\omega) - 1_{A\cap B}(\omega)$.

Con todo lo anterior se concluye que

$$1_{A\cup B}(\omega) = 1_A(\omega) + 1_B(\omega) - 1_{A\cap B}(\omega).$$

(d) Veamos que la proposición se cumple, para ello hagamos la demostración por inducción.

i) Veamos que se cumple para $n = 2$.

A. Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, entonces $w \notin A_1 \cap A_2$, luego $1_{A_1}(\omega) = 1_{A_2}(\omega) = 1_{A_1\cap A_2} = 0$. Por lo tanto $1_{A_1\cap A_2}(\omega) = 1_{A_1}(\omega)1_{A_2}(\omega)$.

B. $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$
Si $1_{A_1\cap A_2}(\omega) = 1$ entonces $\omega \in A_1 \cap A_2$, luego $1_{A_1}(\omega) = 1_{A_2}(\omega) = 1$, por tanto $1_{A_1\cap A_2}(\omega) = 1_{A_1}(\omega)1_{A_2}(\omega)$.
Por otro lado si $1_{A_1\cap A_2}(\omega) = 0$ entonces $\omega \notin A_1 \cap A_2$, luego $1_{A_1}(\omega) = 1_{A_2}(\omega) = 0$. Por lo tanto $1_{A_1\cap A_2}(\omega) = 1_{A_1}(\omega)1_{A_2}(\omega)$.

Con lo anterior se cumple para el caso base $n = 2$.

ii) Ahora supongamos que la propiedad se cumple para n y veamos que se cumple para $n + 1$

$$\begin{aligned}
1_{\cap_{i=1}^{n+1} A_i}(\omega) &= 1_{\cap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}}(\omega) \\
&= 1_{\cap_{i=1}^{n} A_i}(\omega) 1_{A_{n+1}}(\omega) \\
&= \prod_{i=1}^{n} 1_{A_i}(\omega) 1_{A_{n+1}}(\omega) \\
&= \prod_{i=1}^{n+1} 1_{A_i}(\omega)
\end{aligned}$$

Por i) y ii) la propiedad queda demostrada.

(e) Hagamos la demostración por inducción.

i) Veamos que se cumple para $n = 2$.
Por el inciso (c) se tiene que en general

$$1_{A_1 \cup A_2}(\omega) = 1_{A_1}(\omega) + 1_{A_2}(\omega) - 1_{A_1 \cap A_2}(\omega)$$

Dado que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, se concluye que

$$1_{A_1 \cup A_2}(\omega) = 1_{A_1}(\omega) + 1_{A_2}(\omega)$$

ii) Ahora supongamos que la propiedad se cumple para n y veamos que se cumple para $n+1$. Primero notemos que

$$A_{n+1} \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i) = (A_{n+1} \cap A_1) \cup (A_{n+1} \cap A_2) \cup \cdots \cup (A_{n+1} \cap A_n) = \emptyset.$$

Luego

$$\begin{aligned} 1_{\cup_{i=1}^{n+1} A_i}(\omega) &= 1_{\cup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}}(\omega) \\ &= 1_{\cup_{i=1}^{n} A_i}(\omega) + 1_{A_{n+1}}(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(\omega) + 1_{A_{n+1}}(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} 1_{A_i}(\omega) \end{aligned}$$

Por i) y ii) la propiedad queda demostrada.

4. (a) "La persona escogida es hombre y cuenta con un empleo"
   (b) "La persona escogida no es hombre y no cuenta con un empleo"
   (c) "La persona escogida es hombre ó la persona escogida cuenta con un empleo"
   (d) "La persona escogida es hombre y no cuenta con un empleo"

5. (a) "El número escogido es par y termina en 0"
   (b) "El número escogido termina en 5 ó termina en 0"
   (c) "El número escogido es par y termina en 5"
   (d) "El número escogido es par y no termina en 5"

Ejercicios 1.4.1 Probabilidad Clásica

1. Sean A y B dos eventos cualesquiera de un experimento aleatorio con espacio muestral finito y equiprobable. Demuestre que la definición de probabilidad clásica satisface las siguientes propiedades:

   (a) $P(\emptyset) = 0$

(b) $P(\Omega) = 1$

(c) $P(A) \geq 0$ para cualquier evento A

(d) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(e) Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$

(f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ cuando A y B son ajenos

(g) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2. Una moneda equilibrada y marcada con cara y cruz se lanza 4 veces consecutivas. Calcule la probabilidad que:

   (a) A = "las dos caras caigan el mismo número de veces".

   (b) B = "el número de veces que cae cara sea estrictamente mayor al número de veces que cae cruz".

3. Un experimento aleatorio consiste en lanzar una moneda equilibrada tres veces consecutivas. Escriba explícitamente a todos los elementos de un espacio muestral para este experimento y encuentre las probabilidades de cada uno de estos resultados.

Solución:

1. (a) $P(\emptyset) = \frac{\#\emptyset}{\#\Omega} = \frac{0}{\#\Omega} = 0$

   (b) $P(\Omega) = \frac{\#\Omega}{\#\Omega} = 1$

   (c) Sea A un evento cualquiera. Si $A = \emptyset$ o $A = \Omega$, por los incisos anteriores se tiene que $P(A) \geq 0$. Por otro lado si $\emptyset \subset A \subset \Omega$ se sigue que $0 < \#A$, luego $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \geq 0$. Por lo tanto $P(A) \geq 0$.

   (d) Notemos que $\Omega = A \cup A^c$, dado que A y A^c son ajenos, se observa que $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$, así $P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$. Por lo tanto $P(A^c) = 1 - P(A)$.

   (e) Si $A \subseteq B$, entonces $\#A \leq \#B$, en consecuencia

   $$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \leq \frac{\#B}{\#\Omega} = P(B)$$

   (f) Si A y B son eventos ajenos, entonces no comparten ningún elemento en común, por tanto $\#(A \cup B) = \#A + \#B$, luego

   $$P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} = \frac{\#A + \#B}{\#\Omega} = \frac{\#A}{\#\Omega} + \frac{\#B}{\#\Omega} = P(A) + P(B)$$

   (g) Obseremos que $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.
   Notemos que si $A \cap B = \emptyset$ por el inciso anterior y el inciso a), se tiene que

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Por otro lado si $A \cap B \neq \emptyset$, se tiene que

$$P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} = \frac{\#A + \#B - \#(A \cap B)}{\#\Omega}$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2. Para el experimento dado se tiene que $\#\Omega = 16$

   (a) Observemos que $\#A = 6$, así $P(A) = \frac{6}{16}$

   (b) Notemos que $\#B = 5$, luego $P(B) = \frac{5}{16}$

3. $\Omega = \{(c,c,c),(c,c,x),(c,x,c),(x,c,c),(c,x,x),(x,c,x),(x,x,c),(x,x,x)\}$. Dado que la moneda con la que se realiza el experimento es equilibrada, se tiene que para cada $\omega \in \Omega$

$$P(\omega) = \frac{1}{8}$$

Ejercicios 1.4.2 Probabilidad Geométrica

$$P(A) = \frac{\text{Área de A}}{\text{Área de } \Omega}$$

1. Suponga que se tiene un experimento aleatorio con espacio muestral $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ cuya área está bien definida y es finita. Sean A y B dos eventos de este experimento cuya área está bien definida. Demuestre que la definición de probabilidad geométrica satisface las siguientes propiedades:

   (a) $P(\emptyset) = 0$

   (b) $P(\Omega) = 1$

   (c) $P(A) \geq 0$ para cualquier evento A

   (d) $P(A^c) = 1 - P(A)$

   (e) Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$

   (f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ cuando A y B son ajenos

   (g) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2. Se escogen dos números x y y al azar dentro del intervalo unitario $[0,1]$. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de estos números sea mayor a uno y que al mismo tiempo la suma de sus cuadrados sea menor a 1?

3. Se escogen dos número al azar dentro del intervalo unitario $[0,1]$. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de estos números sea menor a $\frac{1}{2}$?

4. Se escoge un número al azar dentro del intervalo $(-1,1)$. ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación cuadrática $ax^2 + x + 1 = 0$ tenga dos raíces reales?

5. Se escogen dos números b y c al azar dentro del intervalo unitario $[0,1]$ ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación cuadrática $x^2+bx+c=0$ tenga raíces complejas?

Solución:

1. (a) $P(\emptyset)=\frac{\text{Área de }\emptyset}{\text{Área de }\Omega}=\frac{0}{\text{Área de }\Omega}=0$

   (b) $P(\Omega)=\frac{\text{Área de }\Omega}{\text{Área de }\Omega}=1$

   (c) Si $A=\emptyset$ ó $A=\Omega$, por los inicisos anteriores $P(A)\geq 0$. Por otro lado si $\emptyset\subset A\subset\Omega$, se tiene que el Área de A es mayor a cero, por tanto se sigue que

   $$P(A)=\frac{\text{Área de }A}{\text{Área de }\Omega}\geq 0$$

   (d) Observemos que

   $$\text{Área de }\Omega=\text{Área de }A+\text{Área de }A^c$$

   de aquí que

   $$P(A)=1-P(A^c)$$

   (e) Si $A\subset B$, entonces Área de $A\leq$ Área de B, así $P(A)\leq P(B)$

   (f) Observemos que si A y B son ajenos, entonces

   $$\text{Área de }A\cup B=\text{Área de }A+\text{Área de }B.$$

   Por lo tanto

   $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

   (g) Notemos que en general

   $$\text{Área de }A\cup B=\text{Área de }A+\text{Área de }B-\text{Área de }A\cap B.$$

   Por lo tanto

   $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

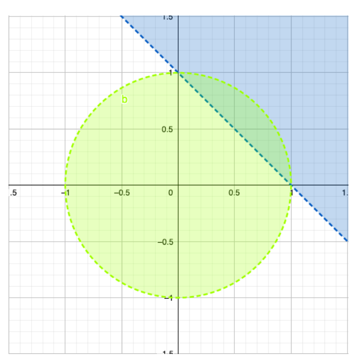
2. Sea

   $$\Omega=\{(x,y):\ x,y\in[0,1]\}.$$

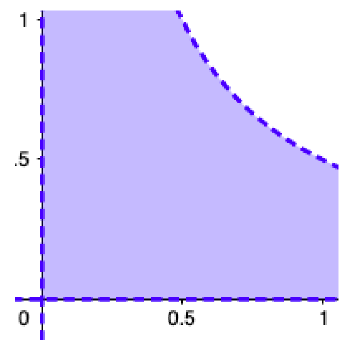
   Denotemos con A al evento dado, luego

   $$\text{Área de }A=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi-2}{4}$$

   $$P(A)=\frac{\text{Área de }A}{\text{Área de }\Omega}=\frac{\frac{\pi-2}{4}}{1}=\frac{\pi-2}{4}$$



3. Sea $\Omega = \{(x,y) : x, y \in [0,1]\}$ y B el evento dado, denotemos con $A(B)$ al área del evento B, luego



$$
\begin{aligned}
A(B) &= \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2x} dx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big(\ln 1 - \ln \frac{1}{2}\Big) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0 - \ln \frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \ln \frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

Como el área de $\Omega = 1$, se tiene que $P(B) = \frac{1}{2}(1 - \ln \frac{1}{2})$

4. $\Omega = (-1, 1)$, $\text{long}(\Omega) = 2$. Sea

$$A = \{a \in \Omega : ax^2 + x + 1 = 0 \text{ tiene 2 raíces reales}\}$$

A ocurre ssi el discriminante es mayor o igual a cero, i.e. $1 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 1/4$. Por lo tanto $P(A) = \frac{\text{long }(A)}{\text{long}(\Omega)} = \frac{1\frac{1}{4}}{2} = 5/8$.

5. Sea

$$A = \{b, c \in (0,1) \times (0,1) : x^2 + bx + c = 0 \text{ tiene 2 raíces complejas}\}$$

A ocurre ssi el discriminante es menor a cero, i.e. $b^2 - 4c < 0 \Leftrightarrow \frac{b^2}{4} < c$ Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\text{Área de } A &= 1 - \int_0^1 \frac{x^2}{4} dx \\
&= 1 - \frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{12} \\
&= \frac{11}{12}
\end{aligned}
$$

Como el área de $\Omega = 1$, $P(A) = \frac{11}{12}$

Ejercicios 1.4.3 Probabilidad Axiomática

1. Otras propiedades de la medida de probabilidad. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   (a) $P(A \cap B \cap C) \leq P(A \cap B) \leq P(A)$

   (b) $P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A \cup B \cup C)$

(c) $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$

(d) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

2. Demuestre o proporcione un contraejemplo:

   (a) Si $P(A) = 0$ entonces $A = \emptyset$

   (b) Si $P(A) = 1$ entonces $A = \Omega$

   (c) Si $P(A) = 0$ entonces $P(A \cap B) = 0$

   (d) Si $P(A) = P(B)$ entonces $A = B$

3. Sean A y B eventos tales que $P(A \cap B^c) = 0.2$ y $P(B^c) = 0.5$. Encuentre $P(A \cup B)$

4. Sean A y B eventos ajenos tales que $P(A) = 0.3$ y $P(B) = 0.4$. Encuentre:

   (a) $P(A \cup B)$

   (b) $P(A \cap B)$

   (c) $P(A^c \cup B^c)$

   (d) $P(A^c \cap B^c)$

5. Sean A y B eventos tales que $P(A) = p$, $P(B) = q$ y $P(A \cap B) = r$. Encuentre:

   (a) $P(A \cap B^c)$

   (b) $P(A^c \cap B)$

   (c) $P(A^c \cap B^c)$

   (d) $P(A \triangle B)$

Solución:

1. (a) Antes de iniciar con la demostración observemos que la siguiente proposición es verdadera.

   Proposición: Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.

   En efecto, notemos que $B = A \cup (B - A)$. Como A y $B - A$ son ajenos se tiene que

   $$P(B) = P(A) + P(B - A) \geq P(A).$$

   Ahora bien, observemos que $A \cap B \cap C \subseteq A \cap B \subseteq A$. Se sigue de la proposición anterior que

   $$P(A \cap B \cap C) \leq P(A \cap B) \leq P(A).$$

(b) Observemos que $A \subseteq A \cup B \subseteq A \cup B \cup C$. Se sigue de la proposición que
$$P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A \cup B \cup C).$$

(c) Primero, demostremos la siguiente propiedad.

Proposición: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Observemos que $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$, además son ajenos dos a dos. Por otro lado, notemos que $(A \cap B^c) = (A^c \cup (A \cap B))^c$. Ahora probemos que
$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B).$$
$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= 1 - P(A^c \cup (A \cap B)) \\ &= 1 - [P(A^c) + P(A \cap B)] \\ &= 1 - [1 - P(A) + P(A \cap B)] \\ &= P(A) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene que
$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B).$$

Luego
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B)) \\ &= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

De la proposición se sigue que
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B).$$

(d) Para ver que la propiedad se cumple hagamos la demostración por inducción.

i) Notemos que por el inciso (c) se cumple para el caso cuando $n = 2$.

ii) Ahora supongamos que se cumple para n y veamos que se cumple para $n+1$.

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) &= P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}) \\ &\leq P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P(A_{n+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) \end{aligned}$$

Por i) y ii) se concluye que $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} A_i$.

2. (a) Consideremos el experimento de elegir un número al azar en el conjunto de los reales. Ahora consideremos el evento A que consiste en que el número elegido sea 0. Haciendo un abuso de notación tenemos que
$$P(A) = \frac{1}{\infty} = 0.$$
Con esto se tiene que $P(A) = 0$, sin embargo, $A \neq \emptyset$. Por lo tanto $P(A) = 0$ no implica que A sea forzosamente el conjunto vacío.

   (b) Consideremos el experimento definido en el inciso anterior y definamos el evento B que consiste en que el número elegido sea distinto de cero. Notemos que $B = A^c$, luego
$$P(B) = P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0 = 1.$$
Con lo anterior se tiene que $P(B) = 1$, pero $B \neq \Omega$. Por lo tanto $P(A) = 1$ no implica que $A = \Omega$

   (c) Supongamos que $P(A) = 0$. Observemos que $A \cap B \subseteq A$, luego
$$0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0.$$
Por lo tanto $P(A \cap B) = 0$.

   (d) En general si $P(A) = P(B)$ no implica que $A = B$. Consideremos el experimento de lanzar una moneda equilibrada y sean los eventos $A = \{\text{El resultado es cara}\}$ y $B = \{\text{El resultado obtenido es cruz}\}$. Es claro que $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, pero $B \neq A$.

3. Notemos que $(A \cup B) = B \cup (A \cap B^c)$, y $B \cap (A \cap B^c) = \emptyset$, luego
$$P(A \cup B) = P(B \cup (A \cap B^c)) = P(B) + P(A \cap B^c) = 0.5 + 0.2 = 0.7$$

4. (a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.4 = 0.7$

(b) $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$

(c) $P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c = 1 - P(A \cap B) = 1$

(d) $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) = 0.3$

5. Notemos que $P(A \cup B) = p + q - r$

   (a) Observemos que $A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$, luego

$$P(A \cap B^c) = P(A \cup B) - P(B) = p + q - r - q = p - r$$

   (b)

$$\begin{aligned}
P(A^c \cap B) &= P(A \cup B^c)^c \\
&= 1 - P(A \cup B^c) \\
&= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B^c)] \\
&= 1 - [p + (1 - q) - (p - r)] \\
&= 1 - (1 - q + r) \\
&= q - r
\end{aligned}$$

   (c) $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) = 1 - (p + q - r)$

   (d) $P(A \triangle B) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = (p - r) + (q - r) = p + q - 2r.$