Optimización bi-nivel con bi-objetivo

Fernanda Flores[1] Diego García Tinajero[1] Adrián Martínez[1] Aldo Rangel [1]
Jannet Tamayo[1] Iván Vega[1]

[1]Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Avenidad de la plenitud 103, Fracc. José Vasconcelos
CP 20200, Aguascalientes, Ags.

Resumen

En este trabajo se aborda un problema de optimización bi-nivel y bi-objetivo desde dos escenarios distintos. En ambos casos se plantea el problema bi-objetivo únicamente en uno de los niveles, el primero es bi-objetivo en el nivel superior; y el segundo, bi-objetivo en el nivel inferior. Se obtiene frontera de Pareto para cada escenario y se analizan los resultados obtenidos.

Palabras clave: *Bi-nivel, Bi-objetivo, Frontera de Pareto.*

I. Introducción

El problema de optimización bi-nivel y bi-objetivo que se plantea en este trabajo se describe a continuación:

Se cuenta con 7 sitios posibles de apertura de plantas, de las cuáles deben seleccionarse únicamente 3. También, hay un total de 10 clientes por asignar a las 3 plantas aperturadas y se conoce la preferencia que tienen cada uno de los clientes por cada uno de los posibles sitios de apertura. Asimismo, se cuenta con el costo asociado con que determinado cliente sea asignado a determinada planta; y la distancia que hay entre plantas.

La matriz de preferencias está dada por,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 6 & 5 & 2 & 3 & 5 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 3 & 7 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 & 2 & 4 & 3 & 4 & 7 & 1 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 7 & 6 & 7 & 1 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 2 & 7 & 2 & 5 & 2 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

donde el valor de 1 corresponde al sitio más preferido y el 7 al sitio menos preferido. Las filas corresponden a los posibles sitios de apertura y las columnas a los clientes.

La matriz de costos está dada por,

$$\begin{bmatrix} 26 & 24 & 381 & 942 & 14 & 294 & 1820 & 702 & 17 & 10 \\ 33 & 11 & 287 & 754 & 13 & 215 & 1514 & 561 & 16 & 9 \\ 67 & 32 & 49 & 324 & 17 & 64 & 820 & 334 & 20 & 15 \\ 89 & 45 & 172 & 115 & 19 & 160 & 451 & 202 & 22 & 17 \\ 68 & 40 & 446 & 941 & 6 & 352 & 1793 & 690 & 8 & 10 \\ 60 & 28 & 70 & 351 & 16 & 35 & 869 & 320 & 19 & 13 \\ 104 & 55 & 264 & 300 & 22 & 237 & 285 & 265 & 25 & 20 \end{bmatrix}$$

donde las filas corresponden a los posibles sitios de apertura y las columnas a los clientes.

Las distancias entre los posibles sitios de apertura de plantas son las siguientes:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	87.7	31.6	67.4	34.7	53.9	36.7
2		0	78.3	39.1	62.2	43.0	74.3
3			0	73.2	49.6	36.1	59.0
4				0	33.6	50.2	41.1
5					0	45.2	14.1
6						0	59.2
7							0

I.1. Bi-objetivo Nivel Superior

Para este escenario, como objetivos del nivel superior, se busca minimizar el costo asociado a la asignación de los clientes a las plantas y maximizar la distancia mínima que hay entre las plantas aperturadas.

Para el nivel inferior, se desea optimizar el nivel de satisfacción de los clientes, lo cual se alcanza minimizando la suma de los valores correspondientes dados en la matriz de preferencias.

I.2. Bi-objetivo Nivel Inferior

En este caso, en el nivel superior se desea minimizar el costo total asociado a la asignación de clientes a pplantas aperturadas.

Mientras que para el nivel inferior, los dos objetivos a optimizar son el nivel de satisfacción de los clientes y el balanceo de las asignaciones; es decir, se quiere minimizar la diferencia que hay entre la mayor y la menor cantidad de clientes asignados a una planta, dicho de otro modo, que estén equilibradas las asignaciones.

II. Marco teórico

II.1. Optimización Bi-objetivo

Se denomina así al tipo de problemas de optimización en los cuales se busca satisfacer con el mejor balance dos funciones objetivo, hablando ya sea de minimizar una y maximizar otra o cualquier combinación de objetivos que se tenga, sin embargo este tipo de problemas suelen presentar el conflicto de que los objetivos pueden interferir entre si, por ejemplo si se desea maximizar un objetivo y minimizar otro cuando ambos tienen relación positiva se tiene entonces el problema de balancear el peso de cada objetivo.

Existen numerosos métodos para la solución de estos problemas, tales como la suma ponderada, la programación por metas y el que se utilizará en este problema, el método de la restricción epsilon en el cual se toma la función objetivo que se considere más importante y la otra se utilizará como restricción acotada por ciertos niveles permitidos ϵ. De tal modo que el nivel ϵ se altera continuamente para obtener soluciones en otro espacio de búsqueda.

II.2. Optimización Bi-nivel

La programación bi-nivel se considera parte de la programación multi-nivel, sin embargo para este caso particular se tienen dos problemas jerarquizados donde se forman dos niveles, superior e inferior, esta misma jerarquía permite simplificar el problema general ya que ahora el nivel inferior requerirá una solución del nivel superior para en este caso obtener la suya, es decir, se resuelven los dos problemas por separado, se puede ver este enfoque como un lider y un seguidor, ya que dada la solución o en este caso la "orden" del lider, el seguidor en base a ello soluciona su parte, ya sea maximización o minimización, no obstante la programación bi-nivel también puede ser bi-objetivo tanto en nivel superior, inferior o ambos, que es el caso que se va presentar.

III. Metodología

III.1. Bi-objetivo Nivel Superior

La metodología que se utilizó para abordar el problema bi-objetivo en el nivel superior fue realizar un algoritmo exhaustivo que hallara todas las soluciones posibles y a partir del conjunto de soluciones se construyó la frontera de Pareto.

El planteamiento al problema bi-objetivo en el nivel superior es el siguiente.

Se tiene un problema de localización de plantas. El primer objetivo busca minimizar la suma de los costos de las asignaciones. Por otro lado, un segundo objetivo es buscar que la distancia mínima entre dos plantas abiertas sea máxima. Y las asignaciones de las plantas que se van a abrir están ligadas a las preferencias que tengan los clientes sobre las plantas. El modelo matemático es el siguiente.

$$\text{min} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{max min } d_{ij}y_iy_j \tag{2}$$

Sujeto a :

$$\sum_{i\in I} y_i = p \tag{3}$$

$$x \in \text{Argmin} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} g_{ij}x_{ij} \tag{4}$$

Sujeto a:

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1 \ \forall j \in J \tag{5}$$

$$x_{ij} \leq y_i \forall i \in I, j \in J \tag{6}$$

Donde:
p : Número de plantas a establecer
c_{ij} : Costo de asignar el clicente $j \in J$ a la instalación $i \in I$
d_{ij} : Distancia entre la planta i y la planta j.
g_{ij} : Preferencia del cliente j a la planta i.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \text{la planta } i \text{ es abierta} \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \text{la cliente } j \text{ es asignado a la planta } i \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

En el modelo (1) y (2) representan nuestras dos funciones objetivo. Notemos que (2) no es lineal, sin embargo se puede linealizar, se decidió no hacerlo para tener una visualización más clara sobre el problema bi-objetivo. Además, en (4) podemos observar que se trata de un problema binivel, ya que la variable x_{ij} está ligada a las preferencias de los clientes, y por último (5) y (6) representan que al menos una planta i surte al cliente j y que no se le pueden asignar clientes a plantas cerradas, respectivamente.

Para el problema que se abordó, se consideraron 7 plantas, 10 clientes y 3 asignaciones. Por lo tanto, al tratarse de un algoritmo exhaustivo, se realizaron 35 evaluaciones, es decir, todas las posibles combinaciones de abrir 3 plantas de 7. Asimismo, en las preferencias de los clientes se tomaron calificaciones del 1 al 7, donde 1 representaba la mayor preferencia, mientras que 7 la peor preferencia.

III.2. Bi-objetivo Nivel Inferior

III.2.1. Método de la restricción ϵ

Para construir la frontera de Pareto del nivel inferior (bi-objetivo) con cada una de las 35 posibles soluciones del nivel superior, se optimizó el nivel inferior para la función objetivo del nivel de satisfacción de los clientes (7), incorporando el objetivo del balance como parte de las restricciones del modelo a optimizar (10), con $e \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Con (8) se obtiene el valor más grande de clientes asignados a una planta, mientras que con (9), el valor más pequeño. La cardinalidad del conjunto J, es decir, la cantidad de clientes por asignar, se denota por m.

El modelo utilizado para la optimización se muestra a continuación:

$$min\ z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij} g_{ij} \tag{7}$$

sujeto a (5), (6),

$$u \geq \sum_{j \in J} x_{ij} \quad \forall\, i \in I \tag{8}$$

$$l \leq \sum_{j \in J} x_{ij} + m(1 - y_i) \quad \forall\, i \in I \tag{9}$$

$$u - l = e \tag{10}$$

IV. Experimentación y discusión de resultados

IV.1. Bi-objetivo Nivel Superior

El algoritmo que se construyó se hizo de manera aleatoria para poder ver la robustez del algoritmo. El funcionamiento es el siguiente. Primero se selecciona de manera determinista una posible asignación y de plantas y a partir de esa solución con base en las preferencias de los clientes se hallan las soluciones x para el líder y se procede a evaluar en las funciones objetivo $F1(x, y)$ y $F2(x, y)$, donde $F1$ busca minimizar los costos de las asignaciones y $F2$ busca maximizar la mínima distancia entre dos plantas abiertas.

A continuación, se muestran los resultados que se obtuvieron para los datos del problema dado. De las 35 posibles soluciones, solo 4 de ellas pertenecen al frente de Pareto. En la figura (1) los puntos rojos representan las soluciones del frente de Pareto, mientras que los puntos azules son soluciones dominadas, es decir, los puntos azules dan peores soluciones tanto para $F1$ como $F2$.

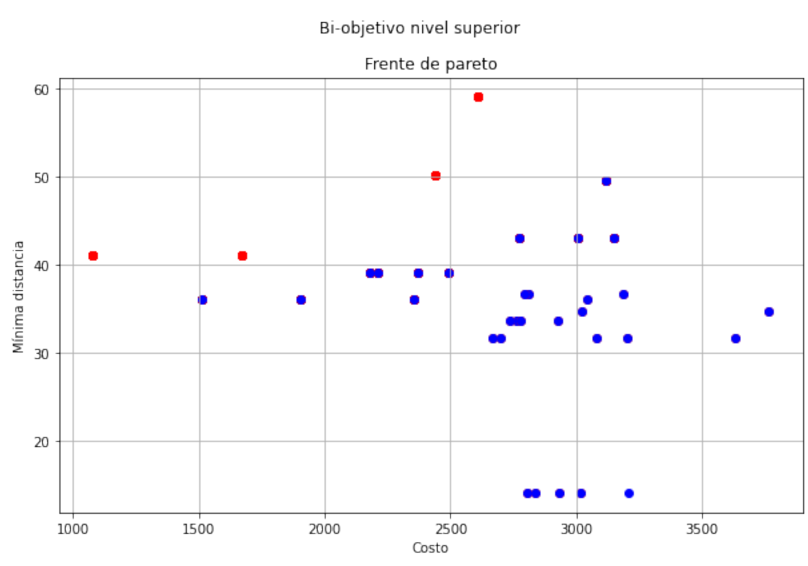


Figura 1. Frente de pareto del problema Bi-objetivo superior

En la tabla (1) se muestran los valores de las funciones objetivo para los elementos del frente de Pareto.

Por otro lado, para el problema bi-objetivo en el nivel inferior se consideraron dos funciones más, las cuales fueron $f1(x, y)$ y $f2(x, y)$ donde $f1$ representa la satisfacción de los clientes (la suma de

Solución	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4	Planta 5	Planta 6	Planta 7	Costo	Mínima distancia
1	✓	✗	✗	✓	✗	✓	✗	2440	50.2
2	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✓	2608	59
3	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✓	1671	41.1
4	✗	✗	✗	✓	✗	✓	✓	1079	41.1

Tabla 1. Valor de las funciones objetivos del nivel superior sujetas a las preferencias de las soluciones seleccionadas

las preferencias de los clientes) y $f2$ el balance entre las asignaciones (la diferencia entre la planta con más asignaciones y la planta con menos asignaciones). En la tabla (2) se muestran los valores de las evaluaciones.

Solución	Costo	Mínima distancia	Satisfacción	Balance
1	2440	50.2	23	1
2	2068	59	17	3
3	1671	41.1	19	1
4	1079	41.1	20.	1

Tabla 2. Valor de las funciones objetivos del nivel superior e inferior sujetas a las preferencias de las soluciones seleccionadas

Como se puede observar en la tabla (2), algunas soluciones mejoran a algunas de las funciones objetivo, por ejemplo, la solución 1 y 3 comparte el mismo valor tanto para la mínima distancia como para el balance, sin embargo, la solución 4 optimiza mejor el costo, pero la solución 3 obtiene una mayor satisfacción en los clientes. Por lo tanto, este conjunto de soluciones que se obtuvieron son las mejores, depende del tomador de decisiones cual elegir, si se le da mayor peso a la reducción de costo, la solución 4 es la mejor, por otro lado si lo que se desea es que la distancia entre las plantas sea máxima, la mejor opción es la solución 3, pese a que hay un peor balanceo.

Por último, cabe decir que al tratarse de un algoritmo exhaustivo, al aumentar el número de plantas y asignaciones, el costo computacional incrementa enormemente. Por lo tanto, este algoritmo solo sería útil para instancias no tan grandes, esto se debe principalmente al costo computacional que requiere hallar todas las combinaciones posibles y proceder a construir el frente de Pareto.

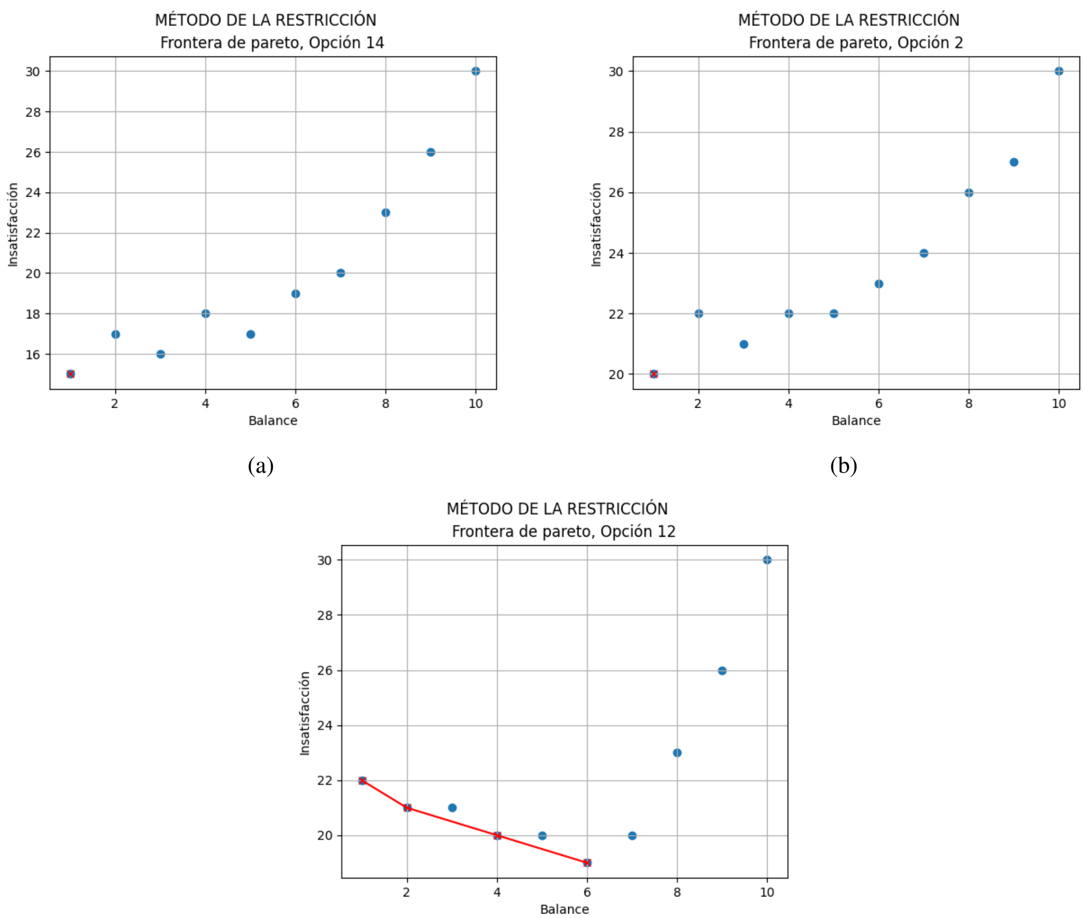
IV.2. Bi-objetivo Nivel Inferior

IV.2.1. Método de la restricción ϵ

Dada la matriz g, donde se encuentran los valores de preferencias de cada uno de los clientes para con las plantas, se aplicó el modelo de optimización con cada una de las opciones de apertura de plantas (ver Tabla 4 en Anexo). Como resultado de la optimización se obtuvo un conjunto de soluciones, en su mayoría (más del 90 %) no dominadas, para todas las opciones de apertura analizadas.

Posteriormente, se implementó un algoritmo que permitiera evitar repeticiones y extraer únicamente las soluciones no dominadas. Debido a las dimensiones del problema planteado, fue posible visualizar los valores de nivel de satisfacción y balance para todas las posibles combinaciones de asignación de clientes a plantas en cada opción de apertura de plantas; y de esta manera, se comprobó que las soluciones seleccionadas por el algoritmo implementado correspondían efectivamente a soluciones no dominadas.

En la Figura 2 se muestran las soluciones obtenidas para algunas de las opciones de aperrtura de plantas, donde los puntos azules representan el nivel mínimo de insatisfacción para cada uno de los posibles valores de balance para alguna opción; y las cruces de color rojo representan las soluciones encontradas por el algoritmo. De esta manera se puede apreciar claramente que el método implementado devuelve la frontera de Pareto para cada opción.



(a) (b) (c)

Figura 2. (a) Opción donde se presenta una solución no dominada para todas las soluciones posibles. (b) Opción donde se presenta la solución con el menor costo en la función de costo del lider. (c) Opción donde se presentan 4 soluciones no dominadas

Solución	Opción	Asignación	Satisfacción	Balance	Costo	Mínima Distancia
1	14	1	15	1	2490	39.1
2	2	1	20	1	1079	41.1
3	12	1	22	1	3585	14.1
4	12	2	21	2	3306	14.1
5	12	3	20	4	3191	14.1
6	12	4	19	6	3207	14.1

Tabla 3. Valor de las funciones objetivos del nivel inferior y superior de las soluciones seleccionadas.

Usando el método descrito en esta sección se obtuvieron un total de 72 soluciones de las 35 opciones posibles de plantas. Cada opción en partícular tiene de 1 a 4 soluciones en la frontera de pareto. Considerando todas las soluciones posibles de todas las opciones se tiene una solución óptima en la opción 14. La solución con un menor valor en la función de costo del lider se encuentra en la opción 2 y la opción 12 presenta 4 soluciones en la frontera las cuales nos son de utilidad para discutir como se comportan éstas en el nivel superior. Las soluciones de las opciones 2, 12 y 14 así como su valor en las funciones objetivo del lider se pueden observar en la figura 2 y la tabla 3.

En este problema en partícular en el nivel inferior, si se consideran todas las soluciones posibles, se tiene una solución óptima con balance 1 e insatisfacción 15 y no existe ninguna otra solución no dominada por ésta. Por el motivo anterior se analizó el problema con cada opción por separado. De esta manera se obtuvieron opciones con más de una solución no dominada, y una solución en la opción 2 que minimizaba la función de costo del líder. Por otro lado la opción 12 ofrece cuatro soluciones las cuales podemos comparar directamente. Observando la tabla 3 podemos concluir que la solución de la opción 14 es mejor en el nivel inferior que la solución de la opción 2, pero para el nivel superior pasa todo lo contrario. Esto nos indica que, en una perspectiva general, ninguna de las dos soluciones es mejor que la otra y es tarea del tomador de decisiones elegir la solución que mejor se adapte dentro del contexto en el que se encuentre actualmente.
Ahora si observamos las soluciones de la opción 12, éstas son peores en todos los sentidos a las soluciones de la opción 2 y 14, pero fue la única opción que presentaba cuatro soluciones no dominadas en el nivel inferior y las cuales conformaban una frontera de pareto (ver Figura 2). Así pues, tomemos hipotéticamente que esta es la única opción disponible. Como es de esperarse, se tiene el mismo valor en la función mínima distancia en todas las soluciones, pero tenemos valores distintos en la función de costo, De esta manera se pueden identificar las soluciones pesimista (asignación 1) y optimista (asignación 3). Como en el caso anteriormente discutido, todo depende del tomador de decisiones, cuál solución se adapta mejor a sus necesidades.

V. Conclusiones

Mediante el uso y la combinación de técnicas de optimización bi-nivel y bi-objetivo en ambos niveles, se logró comprender la complejidad de este tipo de problemas y como interpretar y ponderar las soluciones en base al contexto real del problema, sin embargo es de gran utilidad como herramienta de toma de decisiones el frente de Pareto, en el cual se muestran todas las soluciones obtenidas y en base a ello se puede discernir sobre cual solución es la más conveniente, sobre todo por que en la programación bi-objetivo pueden darse conflictos entre los objetivos, por lo cual se recomienda considerar a fondo la situación actual del problema y las implicaciones de cada posible solución.

Al abordar este tipo de problemas con algoritmos exhaustivos el costo computacional incrementa rápidamente al aumentar el número de plantas y asignaciones, por lo tanto, un trabajo a futuro sería buscar un nuevo enfoque que permita llegar a soluciones óptimas al utilizar instancias grandes.

VI. Anexos

VII. Referencias

Referencias

[1] Casas, M., Camacho, J. (2017). Solving the p-median bilevel problem with order through a hybrid heuristic. *Applied Soft Computing* 60(1), 73-86.

Opción	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4	Planta 5	Planta 6	Planta 7
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	0	1	1
3	0	0	0	1	1	0	1
4	0	0	0	1	1	1	0
5	0	0	1	0	0	1	1
6	0	0	1	0	1	0	1
7	0	0	1	0	1	1	0
8	0	0	1	1	0	0	1
9	0	0	1	1	0	1	0
10	0	0	1	1	1	0	0
11	0	1	0	0	0	1	1
12	0	1	0	0	1	0	1
13	0	1	0	0	1	1	0
14	0	1	0	1	0	0	1
15	0	1	0	1	0	1	0
16	0	1	0	1	1	0	0
17	0	1	1	0	0	0	1
18	0	1	1	0	0	1	0
19	0	1	1	0	1	0	0
20	0	1	1	1	0	0	0
21	1	0	0	0	0	1	1
22	1	0	0	0	1	0	1
23	1	0	0	0	1	1	0
24	1	0	0	1	0	0	1
25	1	0	0	1	0	1	0
26	1	0	0	1	1	0	0
27	1	0	1	0	0	0	1
28	1	0	1	0	0	1	0
29	1	0	1	0	1	0	0
30	1	0	1	1	0	0	0
31	1	1	0	0	0	0	1
32	1	1	0	0	0	1	0
33	1	1	0	0	1	0	0
34	1	1	0	1	0	0	0
35	1	1	1	0	0	0	0

Tabla 4. Opciones de apertura de plantas, 0 indica que no abre, 1 indica que sí abre.