Función Gamma

Iván Vega Gutiérrez

27 de septiembre de 2021

Nuestro objetivo es hallar el valor de $\Gamma(\frac{1}{2})$. Para ello debemos tener en cuenta un resultado previo:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Por definición de la función Gamma tenemos que

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$$

Sea $u = \sqrt{t}$, entonces $t = u^2$ y $dt = 2udu$. Además si $t \to 0$ y $t \to \infty$, entonces $u \to 0$ y $u \to \infty$. Luego,

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u}2udu \\ &= 2\int_0^\infty e^{-u^2}du \\ &= 2\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big) \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$