Modelos Mixtos

Iván Vega Gutiérrez

[1]Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Unidad Aguascalientes
E-mail: `ivan.vega@cimat.mx`

I. Planning Production and Inventories

Considere la producción de un solo producto en un horizonte de planificación en T períodos. Si la producción durante un período determinado $t(t = 1, \cdots, T)$ es decidida, se incurre un costo fijo cf_t. Cualquier exceso de productos fabricados durante los primeros períodos se puede almacenar para satisfacer la demanda de períodos posteriores. Además, se debe satisfacer toda la demanda durante cada período. No se consideran las limitaciones de la capacidad de producción.

como $t = 1, \cdots, T$:

- d_t es la demanda para este producto durante cada periodo.
- cp_t son los beneficios de costo de producción durante cada periodo, y
- ca_t son los beneficios de costo de almacenamiento durante cada periodo.

1. Formule un modelo de programación lineal entera el cual minimice el costo total de producción, almacenamiento y costos fijos.
2. Suponga que se permite un retraso en la entrega de la demanda al costo crd_t por unidad de demanda no entregada a tiempo durante cada período. Sin embargo, toda la demanda debe ser satisfecha durante el último período T, es decir, un retraso en la demanda durante el período T debe ser nulo. Modificar el modelo del apartado anterior para contemplar esta opción.
3. Suponga que la producción puede tomar lugar a un máximo de cinco periodos, aunque estos periodos no pueden ocurrir consecutivamente. Modificar el modelo el apartado anterior para contemplar esta opción.

1. **Variables de decisión**

$$Y_t = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad \text{el producto es manufacturado durante el periodo t} \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

$X_t =$ unidades del producto durante el periodo t a producir.
$I_t =$ unidades del producto durante el periodo te a almacenar.

Función objetivo

$$\min z = \sum_{t=1}^{T} cp_t X_t + ca_t I_t + cf_t Y_t$$

Restricciones

$$I_{t-1} + X_t - I_t = d_t$$
$$X_t \geq d_t Y_t$$
$$X_t, I_t \geq 0$$

2. **Variables de decisión**

   Al problema anterior se le agrega la nueva variable de decisión. Z_t = unidades de producto retrasadas durante el periodo t. **Función objetivo**

$$\min z = \sum_{t=1}^{T} cp_t X_t + ca_t I_t + cf_t Y_t + crd_t Z_t$$

Restricciones

$$I_{t-1} + X_t - I_t - Z_{t-1} + Z_t = d_t$$
$$Z_T = 0$$

3. **Restricciones**

$$\sum_t Y_t = 5$$
$$Y_t - Y_{t-1} \leq 1$$

II. Production Planning of Automobile Seats

Una empresa que produce asientos para automóviles fabrica tres tipos de asientos en dos líneas de producción diferentes. Se pueden utilizar hasta 30 trabajadores al mismo tiempo en cada línea para producir cualquier tipo de asiento. Cada trabajador recibe $ 400 por semana en la línea de producción 1 y $ 600 por semana en la línea de producción 2. Una semana de producción en la línea de producción 1 cuesta $ 1,000 para organizarla y cuesta $ 2,000 en la línea de producción 2. La tabla 1 proporciona las unidades de asiento que cada uno El trabajador produce de cada tipo de asiento en una semana en cada línea de producción.

La demanda semanal de asientos es de al menos 120000 unidades de asiento 1, 150000 unidades de asiento 2 y 200000 unidades de asiento 3.

Considere un modelo de programación lineal entero que minimice el costo total del plan de producción para satisfacer las demandas de producción semanales.

Table 1 Weekly production of seats per worker

	Seats (thousands of units)		
Production line	1	2	3
1	20	30	40
2	50	35	45

Variables de decisión

$$Y_t = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \qquad \text{la línea i trabaja} \\ \\ 0 \qquad\quad \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

x_1 = trabajadores en la línea 1
x_2 = trabajadores en la línea 2

Función objetivo

$$\min z = 400x_1 + 600x_2 + 1000y_1 + 2000y_2$$

Restricciones

$$20x_1 + 50x_2 \geq 120$$

$$30x_1 + 35x_2 \geq 150$$

$$40x_1 + 45x_2 \geq 200$$

$$x_1 \leq 30y_1$$

$$x_2 \leq 30y_2$$

III. Production Planning in the Shoe Industry

Una empresa auxiliar del sector del calzado produce diferentes tipos de materiales para fabricar zapatos: cuero, lona y caucho. Cada uno de estos materiales requiere los siguientes tiempos de producción para producir 100 pies cuadrados en tres secciones diferentes de la fábrica (A, B y C), como se establece en la Tabla 1.

Los tiempos de producción de 4000, 5000 y 6000 h están disponibles en cada sección de la fábrica (A, B y C), respectivamente. La ganancia de vender un pie cuadrado de cuero, un pie cuadrado de lona y un pie cuadrado de caucho es de $ 15, 7 y 3, respectivamente.

1. Formule un modelo de programación lineal entero que maximice el margen de beneficio bruto.

2. Suponga que se puede usar un segundo turno de trabajo con un costo adicional de 500 dólares/turno en cada sección de la fábrica (A, B y C) que agregaría 3500, 2500 y 3000 h de tiempo de producción, respectivamente. Modificar el modelo anterior para contemplar si un segundo turno en cada sección de fábrica es una opción interesante o no.

3. Además, además de un segundo turno, suponga que se puede usar un tercer turno adicional que cuesta 700 dólares/turno en cada sección de la fábrica (A, B y C) que agregaría 1500, 2000 y 1000 h en tiempo de producción, respectivamente. Modifique el modelo anterior para considerar si un tercer turno en cada sección de la fábrica es una opción interesante o no.

4. Con base en el modelo anterior, ¿cómo se formularía si no se pudiera usar un tercer turno, a menos que se usara el segundo turno, en cada sección de la fábrica?

5. Con base en el modelo anterior, ¿cómo se formularía si solo pudiera usarse un turno adicional, ya sea un segundo o un tercero, en cada sección de la fábrica?

Table 1 Production times in each section

Material	A	B	C
Leather	7 h	8 h	6 h
Canvas	3 h	2 h	5 h
Rubber	5 h	5 h	3 h

1. **Variables de decisión** P_{ij} = Pies cuadrados producidos del material i en la sección j, con $i = 1, 2, 3$ y $j = A, B, C$
   Función objetivo
$$\max z = 15(P_{1A} + P_{1B} + P_{1C}) + 7(P_{2A} + P_{2B} + P_{2C}) + 3(P_{3A} + P_{3B} + P_{3C})$$
   Restricciones
$$4000 \geq 0{,}07P_{1A} + 0{,}03P_{2A} + 0{,}05P_{3A}$$
$$5000 \geq 0{,}08P_{1B} + 0{,}02P_{2B} + 0{,}05P_{3B}$$
$$4000 \geq 0{,}06P_{1C} + 0{,}05P_{2C} + 0{,}03P_{3C}$$
$$P_{ij} \geq 0$$

2. **Variables de decisión** Se agregan la siguientes variables binarias $Y_A = 1$ si el se utiliza un segundo turno en A, 0 en caso contrario. $Y_B = 1$ si el se utiliza un segundo turno en B, 0 en caso contrario. $Y_C = 1$ si el se utiliza un segundo turno en C, 0 en caso contrario.
   Función objetivo
$$\max z = 15(P_{1A}+P_{1B}+P_{1C})+7(P_{2A}+P_{2B}+P_{2C})+3(P_{3A}+P_{3B}+P_{3C})-500(Y_A+Y_B+Y_C)$$
   Restricciones
$$4000 + 3500Y_A \geq 0{,}07P_{1A} + 0{,}03P_{2A} + 0{,}05P_{3A}$$
$$5000 + 2500Y_B \geq 0{,}08P_{1B} + 0{,}02P_{2B} + 0{,}05P_{3B}$$
$$4000 + 3000Y_C \geq 0{,}06P_{1C} + 0{,}05P_{2C} + 0{,}03P_{3C}$$
$$P_{ij} \geq 0$$

3. **Variables de decisión** Se mantienen las primeras variables de decisión que en el primer modelo, pero a diferencia del segundo modelo se agregan las siguientes variables de decisión
$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad \text{Se usa el cambio j en la sección i} \\ 0 \quad \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$
   con $i = \{A, B, C\}, j = \{2, 3\}$
   Función objetivo
$$\max z = 15(P_{1A} + P_{1B} + P_{1C}) + 7(P_{2A} + P_{2B} + P_{2C}) + 3(P_{3A} + P$$
$$-500(Y_A + Y_B + Y_C) - 700(Y_{A3} + Y_{B3} + Y_{C3})$$
   Restricciones
$$4000 + 3500Y_{A2} + 1500Y_{A3} \geq 0{,}07P_{1A} + 0{,}03P_{2A} + 0{,}05P_{3A}$$
$$5000 + 2500Y_{B2} + 2000Y_{B3} \geq 0{,}08P_{1B} + 0{,}02P_{2B} + 0{,}05P_{3B}$$
$$4000 + 3000Y_{C2} + 1000Y_{C3} \geq 0{,}06P_{1C} + 0{,}05P_{2C} + 0{,}03P_{3C}$$
$$P_{ij} \geq 0$$

4. Para este inciso las variables de decisión y la función objetivo son las mismas que en el inciso anterior.
   Restricciones Se agregan las siguientes restricciones
   $$Y_{A3} \leq Y_{A2}$$
   $$Y_{B3} \leq Y_{B2}$$
   $$Y_{C3} \leq Y_{C2}$$
5. Las variables de decisión y la función objetivo son las mismas que para el inciso 3.
   Restricciones Se agregan las siguientes restricciones
   $$Y_{A3} + Y_{A2} \leq 1$$
   $$Y_{B3} + Y_{B2} \leq 1$$
   $$Y_{C3} + Y_{C2} \leq 1$$

IV. Opening LED TV Production Plants

SAMSUNG, un fabricante de televisores LED, está considerando abrir una nueva planta de ensamblaje para producir tres modelos de televisores: modelos de gama alta, media y baja. Hay dos ubicaciones posibles: 1 y 2. La inversión requerida para construir la fábrica en la ubicación 1 es $ 2,000,000 y $ 1,750,000 en la ubicación 2. Las ganancias unitarias de producción son $ 15, 13 y 10, respectivamente, gama alta, media y baja en la ubicación 1 y $ 16, 12 y 9, respectivamente, en la ubicación 2.

Anualmente se producirán al menos 75,000 unidades de los modelos de gama alta, 100,000 unidades de los modelos de gama media y 200,000 de los de gama baja.

1. Si solo se va a construir una planta de ensamblaje, modele el problema con miras a minimizar los costos.
2. Si existe la posibilidad de construir dos plantas (ubicaciones 1 y 2), modele el problema con miras a minimizar los costos considerando también las siguientes restricciones:
   - En caso de producirse televisión de gama baja en la ubicación 1, se otorgará un subsidio de $ 1,000,000.
   - El modelo de gama alta se producirá solo en una de las dos ubicaciones.

Variables de decisión

$X_{1,1}$ = Producción gama alta de la planta 1.
$X_{2,1}$ = Producción gama media de la planta 1.
$X_{3,1}$ = Producción gama baja de la planta 1.
$X_{1,2}$ = Producción gama alta de la planta 1.
$X_{2,2}$ = Producción gama media de la planta 1.
$X_{3,2}$ = Producción gama baja de la planta 1.
$X_1 = 1$ si la fábrica 1 se abre y 0 en caso contrario.
$X_2 = 1$ si la fábrica 2 se abre y 0 en caso contrario.

Restricciones

$$X_1 + X_2 = 1$$

$$X_{1,1}(X_1) + X_{1,2}(X_2) \geq 75000$$

$$X_{2,1}(X_1) + X_{2,2}(X_2) \geq 100000$$

$$X_{3,1}(X_1) + X_{3,2}(X_1) \geq 200000$$

Función Objetivo

$$\min \; = (200000 - 15X_{1,1} + 13X_{2,1} + 10X_{3,1})(X_1) + (1750000 - 16X_{1,2} + 12X_{2,2} + 9X_{3,2})(X_2)$$

V. Production Planning in a Toys Firms

Una empresa de juguetes está planificando la producción de dos juguetes nuevos. El costo fijo de configurar la planta de producción y la ganancia unitaria por tipo de juguete se proporcionan en la Tabla 1.

La firma cuenta con dos fábricas que son capaces de producir estos juguetes. Las tasas de producción por tipo de juguete se proporcionan en la Tabla 2.

Las fábricas 1 y 2 pueden proporcionar 480 y 720 h, respectivamente, para producir estos juguetes. La empresa desea saber qué, dónde y cuántos juguetes se deben producir para maximizar sus ganancias.

Introduzca las variables de decisión 0–1 y formule el problema anterior como un problema de programación lineal entero. Para evitar la duplicación de costos, el modelo debe decidir qué fábricas deben configurarse para cada tipo de juguete y deben aplicarse los correspondientes costos fijos de configuración.

Table 1 Cost of the configuration and unit profit per toy type

Toy	Cost of configuration ($)	Unit profit ($/toy)
1	45,000	12
2	76,000	16

Table 2 Production rates per toy type and factory

	Toy 1	Toy 2
Factory 1	52 units/hour	38 units/hour
Factory 2	42 units/hour	23 units/hour

Variables de decisión

x_{11} = Número e juguetes 1 producidos en la fábrica 1.
x_{12} = Número e juguetes 1 producidos en la fábrica 2.
x_{21} = Número e juguetes 2 producidos en la fábrica 1.
x_{22} = Número e juguetes 2 producidos en la fábrica 2.

Función objetivo

$$\max z = 12(x_{11} + x_{12}) + 16(x_{21} + x_{22}) - 45000(y_{11} + y_{12}) - 76000(y_{21} + y_{22})$$

donde

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 \quad \text{si} & x_{ij} \geq 0 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Restricciones

$$\frac{x_{11}}{52} + \frac{x_{21}}{38} \leq 480$$
$$\frac{x_{12}}{42} + \frac{x_{22}}{23} \leq 480$$
$$x_{11} \leq (480)(52)y_{11}$$
$$x_{12} \leq (720)(42)y_{12}$$
$$x_{21} \leq (480)(38)y_{21}$$
$$x_{22} \leq (720)(23)y_{22}$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \geq 0$$

VI. Production Planning

Un ingeniero de organización está trabajando en la producción mensual de una empresa durante los próximos 6 meses. La empresa puede trabajar todos los meses con un turno normal o un turno prolongado. Un turno normal cuesta \$ 100,000 al mes y puede producir hasta 5,000 unidades por mes. Un turno extendido cuesta hasta \$ 180,000 por mes y puede producir hasta 7,500 unidades por mes. Es necesario recordar que el costo incurrido para cada tipo de turno es fijo y, por lo tanto, independiente de la cantidad producida. Si la empresa decide no producir en un mes determinado, los costos incurridos son cero.

Se estima que cambiar de un turno normal en 1 mes a un turno prolongado en el mes siguiente tiene un costo adicional de \$ 15,000. No se incurre en costos adicionales cuando se cambia de un turno extendido en 1 mes a un turno normal en el mes siguiente.

El costo de almacenamiento de existencias se estima en \$ 2 por unidad y mes (basado en lo almacenado al final de cada mes) y lo almacenado inicialmente son de 3000 unidades (producidas a partir de un turno normal). La cantidad de stock al final del mes 6 debe ser de al menos 2000 unidades.

La demanda del producto de la empresa en todos los próximos 6 meses se indica en la tabla 1.

Las restricciones de producción son tales que si la empresa produce algo en un mes en particular, debe producir al menos 2000 unidades.

La empresa necesita un plan de producción para los próximos 6 meses para evitar desabastecimientos.

Formular un modelo matemático que ayude al Ingeniero de Organización a diseñar un plan de producción para los próximos 6 meses que evite desabastecimientos.

Table 1 The firm's demand in the next 6 months

Month	1	2	3	4	5	6
Demand (in units)	6,000	6,500	7,500	7,000	6,000	6,000

Variables de decisión

$$x_{1,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \text{El turno fue normal en el mes j} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$x_{2,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \text{El turno fue prolongado en el mes j} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$x_{3,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \text{Si la empresa cambió del turno normal al extendido} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$y_j = \text{ Producción en el mes j}$$

$$s_j = \text{ Stock en el mes j}$$

$$d_1 = 6000$$

$$d_2 = 6500$$

$$d_3 = 7500$$

$$d_4 = 7000$$

$$d_5 = 6000$$

$$d_6 = 6000$$

Restricciones:

$$x_{1,j} + x_{2,j} \leq 1$$

$$y_j \leq 5000x_{1,j} + 7500x_{2,j}$$

$$x_{3,j} \geq x_{1,j-1} + x_{2,j} - 1$$

$$s_0 = 3000$$

$$s_j = s_{j-1} + y_j - d_j$$

$$2000 \leq s_6$$

$$2000(x_{1,j} + x_{2,j}) \leq y_j$$

Función Objetivo:

$$\min z = (100000)\sum_{j=1}^{6} x_{1,j} + (180000)\sum_{j=1}^{6} x_{2,j} + (15000)\sum_{j=1}^{6} x_{3,j} + \sum_{j=1}^{6} 2s_j$$

VII. Planning Sales

Una empresa produce dos productos, A y B, utilizando dos componentes importados, C y D, que también vende a sus clientes. Los precios de venta de estos cuatro productos son \$ 69, \$ 57, \$ 4.5 y \$ 3.2, respectivamente. El ensamblaje del producto A requiere 4 unidades del producto C y 3 unidades del producto D, mientras que el producto B requiere 6 unidades del producto C y 9 unidades del producto D. El precio de compra de 1 unidad del componente C es \$ 4, mientras que el componente D cuesta \$ 3. El producto A y el producto B requieren 3 y 2 h de tiempo de montaje, respectivamente. El costo de las horas de montaje asignadas a cada unidad de producto es de \$ 1/hora.

Se estima que se encuentran disponibles 10,000 y 14,000 unidades de productos C y D, con un total de 7,000 horas de montaje para los próximos 6 meses.

1. Formula un modelo programación lineal que maximice el margen de beneficio bruto de esta empresa durante los próximos 6 meses.

2. Suponga que existe una restricción comercial por la cual uno, y solo uno, de los productos A y B y el componente C o D pueden venderse. Modifique el modelo original del inciso anterior para tener en cuenta esta consideración.

3. Suponga que se espera vender solo 3 de los 4 productos disponibles. Agregue las restricciones apropiadas al modelo original para contemplar esta nueva restricción comercial.

4. Modifique el problema original para considerar un costo fijo de \$ 6 000 para el producto A y de \$ 4 000 para el producto B en el que se incurre al vender una unidad de producto. No se incurre en estos costos si se toma la decisión de no vender estos productos.

1. **Variables de decisión**

   $x_1 =$ Producción del producto A
   $x_2 =$ Producción del producto B
   $x_3 =$ Producción del producto C
   $x_4 =$ Producción del producto D

   Restricciones

$$x_3 \leq 10000$$

$$x_4 \leq 14000$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 7000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

   Función objetivo

$$\max z = (69 - 4(4) - 3(3) - 3(1))x_1 + (57 - 6(4) - 9(3) - 2(1))x_2 + (4{,}5)x_3 + (3{,}2)x_4$$

2. **Variables de decisión**
   $y_1 = 1$ si el producto A es vendido y 0 si el producto es vendido.

Restricciones
Se agregan las siguientes restricciones

$$x_1 \leq (\frac{7000}{3})y_1$$

$$x_2 \leq (\frac{7000}{2})(1 - y_1)$$

3. **Variables de decisión**
Se agregan las nuevas variables de decisión
$z_1 = 1$ si el producto A es vendido, 0 en otro caso.
$z_2 =$1 si el producto B es vendido, 0 en otro caso.
$z_3 = 1$ si el producto C es vendido, 0 en otro caso.
$z_4 = 1$ si el producto D es vendido, 0 en otro caso.

4. **Restricciones**
Se agregan las siguientes restricciones

$$x_1 \leq (\frac{7000}{3})z_1$$

$$x_2 \leq (\frac{7000}{2})z_2$$

$$x_3 \leq 10000z_3$$

$$x_4 \leq 14000z_4$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 3$$