

Tarea 2

Iván Vega Gutiérrez

27 de Agosto 2021

Ejercicio 1. Sea A la matriz definida como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y demostrarlo por inducción.

Proposición.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

En efecto, hagamos la demostración por inducción.

I) Primero veamos que se cumple para el caso base $n = 2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

II) Ahora supongamos que la proposición se cumple para n y probemos que se cumple para $n + 1$. Notemos que

$$A^{n+1} = A^n A$$

Por hipótesis de inducción se tiene que

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

Por I) y II) se concluye que la proposición es verdadera.

Ejercicio 2. Resolver por medio de matrices.

En los últimos tres años, cuatro niños exploradores, Pedro, Carolina, Dulce y Benjamín, han tenido como misión recolectar fondos para apoyar un asilo. Con este objetivo en mente, cada año compraron chocolates. Los adquirieron de tres tipos: blanco, amargo y semiamargo. Cada caja contiene 20 chocolates. Los venden por pieza y los dos últimos años vendieron todos.

A continuación se resume la información para el primer año: En esta tabla se muestra el número de cajas que cada uno compró.

	Cajas de chocolate		
	Blanco	Amargo	Semiamargo
José	6	15	9
Dulce	13	10	7
Carolina	10	10	10
Benjamín	5	12	13

Tabla 1: Número de cajas compradas

Tipo de chocolate	Precio por caja (pesos)	Precio de venta por pieza (pesos)
Blanco	50	4
Amargo	30	3
Semiamargo	40	3

Tabla 2: Precios de compra y venta

- i) ¿Quién obtuvo la mayor ganancia el primer año?
- ii) El segundo y tercer año compraron las mismas cantidades de cajas e chocolate, pero el precio por caja para el segundo año fue 10 % mayor que el del primer año; mientras que para el tercer año fue de 40 %, 45 % y 40 % mayor para el chocolate blanco, amargo y semiamargo, respectivamente. Además, ellos conservaron los precios de venta del primer año. Responda las dos preguntas anteriores para el segundo y tercer años.

Solución

- i) Definamos la siguiente matriz para representar las cajas de chocolate que compró cada niño, donde cada fila representa a un niño, la primera fila representa a José, la segunda a Dulce, la tercera a Carolina y la cuarta a Benjamín. La primera columna representa al chocolate blanco, la segunda columna al amargo y la tercera al semiamargo, prácticamente es la Tabla 1 representada como matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 9 \\ 13 & 10 & 7 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

Ahora obtengamos el costo de compra que hizo cada niño, esto se puede obtener multiplicando la matriz A por el precio por caja de cada tipo de

chocolate, es decir

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 9 \\ 13 & 10 & 7 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 12 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1110 \\ 1230 \\ 1200 \\ 1130 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, obtengamos el costo de venta que hizo cada niño, para ello tomemos en cuenta que los niños venden los chocolates por pieza y cada caja contiene 20 piezas, denotemos con V a la matriz que representa las ventas que hizo cada niño

$$V = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 9 \\ 13 & 10 & 7 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 12 & 13 \end{pmatrix} (20) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1920 \\ 2060 \\ 2000 \\ 1900 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto las ganancias de cada niño se puede obtener al restar el costo de compra de las ventas que hicieron

$$G = V - C = \begin{pmatrix} 1920 \\ 2060 \\ 2000 \\ 1900 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1110 \\ 1230 \\ 1200 \\ 1130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 810 \\ 830 \\ 800 \\ 770 \end{pmatrix}$$

Con lo anterior se deduce que Dulce fue quien más ganancias obtuvo, su ganancia fue de \$830.

- ii) Para el segundo año, los precios de compra aumentaro 10 %, por tanto los valores de compra fueron

$$C_2 = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 9 \\ 13 & 10 & 7 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 12 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 55 \\ 33 \\ 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1221 \\ 1353 \\ 1320 \\ 1243 \end{pmatrix}$$

Como los precios de venta no se modificaron, las ganancias para el segundo año son

$$G_2 = V - C_2 = \begin{pmatrix} 1920 \\ 2060 \\ 2000 \\ 1900 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1221 \\ 1353 \\ 1320 \\ 1243 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 699 \\ 707 \\ 680 \\ 657 \end{pmatrix}$$

De aquí que, en el segundo año quien más ganancias tuvo fue otra vez Dulce con \$707.

Para el tercer año, los precios de compra son los siguientes

$$C_3 = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 9 \\ 13 & 10 & 7 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 12 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 43,5 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1576,5 \\ 1737 \\ 1695 \\ 1600 \end{pmatrix}$$

Así, las ganancias obtenidas en el tercer año son

$$G_3 = V - C_3 = \begin{pmatrix} 1920 \\ 2060 \\ 2000 \\ 1900 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1576,5 \\ 1737 \\ 1695 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 343,5 \\ 323 \\ 305 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Por tanto quien tuvo más ganancias en el tercer año fue José con \$343,5.