Calculando el número de Euler

Iván Vega Gutiérrez

23 de septiembre de 2021

La constante e es una de las constantes más famosas en matemáticas. El número e es un número irracional y también es un número trascendente, se conoce como número de Euler o constante de Napier, esto debido a que el matemático escocés John Napier fue quien lo utilizó por primer vez. Sin embargo, quien denotó a esta constante con la letra e fue el matemático Leonhard Euler quien en 1727 comenzó a utilizar la letra e para reperesentar esta constante, y en la actualidad es la notación más usual que se tiene.
La constante de Euler, se puede representar de varias formas, una dee ellas fue publicada por el mismo Euler en el año 1748 en su obra *Introductio in analysin infinitorum*, demostró que

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

A continuación vamos a probar que

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \tag{1}$$

Para probar (1) utilizaremos la serie de Taylor, la cual tiene la siguiente forma

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

o bien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Sea $a = 0$ y $f(x) = e^x$. Además sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f^{(n)}(x) = e^x$. Luego,

$$e^x = e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 + \cdots + \frac{e^0}{n!}x^n + \cdots \tag{2}$$

Por lo tanto,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$