Modelos Enteros

Iván Vega Gutiérrez

[1]Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Unidad Aguascalientes
E-mail: `ivan.vega@cimat.mx`

I. Postmen/Women's Shifts

Una oficina de correos necesita un número diferente de trabajadores hombres y mujeres de tiempo completo para diferentes días de la semana. El número de hombres/mujeres de tiempo completo necesarios por día, se calcula de acuerdo con el número de artículos a entregar, se proporciona en la Tabla 1.

Table 1 Number of postmen/women required

	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday	Sunday
Number of fulltime postmen/women required	17	13	15	19	14	16	11

De acuerdo con las reglas sindicales, cada empleado de tiempo completo debe trabajar 5 días seguidos y luego debe descansar durante 2 días. Por ejemplo, un empleado que trabaja de lunes a viernes debe descansar el sábado y el domingo. La oficina de correos desea cumplir con sus requisitos diarios y utilizar solo empleados a tiempo completo.

1. Formule un modelo matemático para que la oficina de correos pueda obtener el número mínimo de trabajadores (hombres/mujeres) a tiempo completo con los que debe trabajar.

Variables de decisión

$x_1 =$ Número de trabajadores de tiempo completo que comienzan en lunes
$x_2 =$ Número de trabajadores de tiempo completo que comienzan en martes
$x_3 =$ Número de trabajadores de tiempo completo que comienzan en miércoles
$x_4 =$ Número de trabajadores de tiempo completo que comienzan en jueves
$x_5 =$ Número de trabajadores de tiempo completo que comienzan en viernes
$x_6 =$ Número de trabajadores de tiempo completo que comienzan en sábado
$x_7 =$ Número de trabajadores de tiempo completo que comienzan en domingo

Función objetivo

$$\text{min } z = \sum_{i=1}^{7} x_i$$

Restricciones

Restricciones de personal

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$$

$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \geq 17$$

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_1 + x_2 \geq 13$$

$$x_6 + x_7 + x_1 + x_2 + x_3 \geq 15$$

$$x_7 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 19$$

Restricciones de no negatividad
$x_i \geq 0$ con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

II. Distribution of Air-Conditioning Units

Una empresa norteamericana de aire acondicionado tiene plantas de producción en Portland y Flint. Ésta tiene que abastecer un cierto número de unidades en sus centros de distribución ubicados en Los Ángeles y Atlanta. Los costos de envío se resumen en la Tabla 1.

Los datos de oferta y demanda se proporcionan en la Tabla 2 como número de unidades:

1. Considere un modelo de programación lineal entero que determine cómo se deben realizar las entregas desde Portland y Flint para minimizar los costos de entrega.

Table 1 Delivery costs between distribution centres

Production plants	Distribution centres	Delivery costs
Portland	Los Angeles	\$30
	Atlanta	\$40
Flint	Los Angeles	\$60
	Atlanta	\$50

Table 2 Supply and demand data

Supply	Available units	Demand	Required units
Portland	200	Los Angeles	300
Flint	600	Atlanta	400

Variables de decisión

$x_1 =$ Unidades entregadas desde Portland a Los Angeles.
$x_2 =$ Unidades entregadas desde Portland a Atlanta.
$x_3 =$ Unidades entregadas desde Flint a Los Angeles.
$x_4 =$ Unidades entregadas desde Flint a Atlanta.

Función objetivo

$$\max z = 30x_1 + 40x_2 + 60x_3 + 50x_4$$

Restricciones
Restricciones de oferta

$$x_1 + x_2 \leq 200$$

$$x_3 + x_4 \leq 600$$

Restricciones de demanda

$$x_1 + x_3 \geq 300$$

$$x_2 + x_4 \geq 400$$

Restricciones de no netatividad $x_i \geq 0$

III. Contracting carpenters

Gracias a la adecuada estrategia de marketing y a la calidad de su mejor producto Librero Pombal, el negocio de la carpintería ha recibido más pedidos de los que realmente puede producir. Durante las próximas 4 semanas, se deben producir 52, 65, 70 y 85 libreros, respectivamente. Actualmente hay 6 carpinteros artesanos.

La dirección general de la carpintería decidió contratar nuevo personal para cumplir con sus compromisos comerciales. Como los artesanos son escasos, se debe contratar personal sin experiencia. Un novato puede recibir capacitación durante una semana. El novato trabaja una segunda semana como aprendiz para ganar experiencia. Al inicio de la tercera semana (después de 2 semanas de trabajo) el aprendiz se convierte en artesano.

La producción estimada y salarios de los empleados se proporcionan en la Tabla 1.

Cada artesano puede entrenar hasta dos novatos por semana (entrenar a un aprendiz solo toma 1 semana). Cualquier excedente de producción semanal se puede resguardar para cumplir con los siguientes compromisos comerciales.

Los analistas de la firma estiman que resulta bastante difícil superar la demanda semanal de 90 libreros. Por lo tanto, se tomó la decisión de terminar el periodo sin principiantes ni aprendices, pero con al menos nueve artesanos. Las normas sindicales de la empresa prohíben los despidos por despidos.

Formule un modelo de programación lineal que defina los contratos a emitir con el fin de cumplir con los compromisos comerciales a un costo mínimo.

Table 1 Estimated production and employees' weekly salaries

	Production Bookcases/week	Salaries $/week
Artisan working on production only	10	300
Artisan working on production and training	5	400
Apprentice	5	150
Novice	1	50

Variables de decisión

$x_{1,j}$ = Número de artesanos que solo producen en la semana j.
$x_{2,j}$ = Número de artesanos que producen y enseñan en la semana j.
$x_{3,j}$ = Número de aprendices en la semana j.
$x_{4,j}$ = Número de novatos en la semana j.
z_j = Producción excedente de la semana j
Donde $j = \{1, 2, 3, 4\}$.

Restricciones

Para la primer semana, sabemos que se necesitan 6 artesanos y que cada artesano puede tener a su cargo hasta 2 novatos. Además, como es la primer semana no hay aprendices.

$$x_{1,1} + x_{2,1} = 6$$

$$x_{3,1} = 0$$

$$2x_{4,1} \leq x_{2,1}$$

$$10x_{1,1} + 5x_{2,1} + x_{4,1} \geq 52$$

$$z_1 = 10x_{1,1} + 5x_{2,1} + x_{4,1} - 52$$

Para la segunda semana ya vamos a tener aprendices (que serán los novatos de la semana uno), sin embargo todavía no tendremos nuevos artesanos, sin embargo, la producción excedente de la semana 1 servirá para satisfacer la demanda actual.

$$x_{1,2} + x_{2,2} = 6$$

$$x_{3,2} = x_{4,1}$$

$$2x_{4,2} \leq x_{2,2}$$

$$10x_{1,2} + 5x_{2,2} + 5x_{3,2} + x_{4,2} + z_1 \geq 65$$

$$z_2 = 10x_{1,2} + 5x_{2,2} + 5x_{3,2} + x_{4,2} + z_1 - 65$$

Para la tercera semana, si hay nuevos artesanos (los aprendices de la semana 2). Como una de las condiciones es que al finalizar el periodo no deben de haber ni aprendices ni novatos, desde la tercera semana se deja de contratar personal.

$$x_{1,3} + x_{2,3} = 6 + x_{2,3}$$

$$x_{3,3} = x_{4,2}$$

$$x_{4,3} = 0$$

$$10x_{1,3} + 5x_{2,3} + 5x_{3,3} + z_2 \geq 70$$

$$z_3 = 10x_{1,3} + 5x_{2,3} + 5x_{3,3} + z_2 - 70$$

Para la última semana como ya no hay novatos ni aprendices los artesanos se dedican únicamente a producir.

$$x_{1,4} = x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3}$$

$$x_{2,4} = 0$$

$$x_{3,4} = 0$$

$$x_{4,4} = 0$$

$$x_{1,4} \geq 9$$

$$10x_{1,4} + z_3 \geq 85$$

Para cada semana tenemos las restricciones de no negatividad

$$x_{i,j}, z_j \geq 0$$

Donde $i, j = \{1, 2, 3, 4\}$ y cada $x_{i,j}$ y z_j deben ser números enteros.

Función objetivo

$$\min z = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} c_i x_{i,j}$$

Donde c_i representa el costo del trabajador $x_{i,j}$.

IV. Planning Surveys

La firma Orgasa Estudios de Mercado, S.A.(OEM) se especializa en evaluar las reacciones de los clientes ante nuevos productos, servicios y campañas publicitarias. Una empresa ha solicitado los servicios de OEM para determinar las reacciones de los clientes a un producto de uso doméstico recientemente anunciado. Se ha acordado que durante el transcurso de las encuestas se utiizarán las encuestas puerta a puerta para obtener información de los hogares con y sin niños, y que las encuestas se realizarán en la maññaa y en la tarde. Específicamente, el cliente contrató a OEM para realizar 1,000 ecuesta de acuerdo con las siguientes pautas:

- Se encuestarán al menos 400 hogares con niños.
- Se encuestaran al menos 400 hogares sin niños.
- El número de hogares encuestados por la tarde será mayor al número de hogares encuestados por la mañana.
- Al menos el 40 % de las encuestas realizadas en hogares con niños se realizarán por la mañana.
- Al menos el 60 % de las encuestas realizadas en hogares con niños se realizarán por la tarde.

Dado que las encuestas realizadas en hogares con niños requieren tiempo adicional del entrevistador, y dado que los entrevistadores que trabajan por la tarde cobran más que los que trabajan por las mañanas, el costo de una encuesta varía según el tipo de hogar, como se muestra en Table 1.

Formule un modelo que optimice del proceso de encuestas.

Table 1 Cost of each survey type

Type of home	Cost of a survey in the morning ($)	Cost of a survey in the afternoon ($)
With children	20	25
Without children	18	20

Variables de decisión

$x_{1,1}$ = Número de hogares encuestados con niños por la mañana.
$x_{1,2}$ = Número de hogares encuestados con niños por la tarde.
$x_{2,1}$ = Número de hogares encuestados sin niños por la mañana.
$x_{2,2}$ = Número de hogares encuestados sin niños por la tarde.

Restricciones

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{2,1} + x_{2,2} = 1000$$

$$x_{1,1} + x_{1,2} \geq 400$$

$$x_{2,1} + x_{2,2} \geq 400$$

$$x_{1,1} + x_{2,1} \leq x_{1,2} + x_{2,2}$$

$$x_{1,1} \geq 0{,}4(x_{1,1} + x_{1,2})$$

$$x_{1,2} \geq 0{,}6(x_{1,1} + x_{1,2})$$

$$x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2} \geq 0$$

Función objetivo

$$\text{min } z = 20x_{1,1} + 25x_{1,2} + 18x_{2,1} + 20x_{2,2}$$

V. Transport Planning

Una empresa debe transportar máquinas desde las plantas de producción A, B y C a los almacenes X, Y y Z. Se requieren cinco máquinas en X, 4 en Y y 3 en Z, mientras que 8 máquinas están disponibles en A, 5 en B y 3 en C. Los costos de transporte (en dólares) entre sitios se proporcionan en la Tabla 1.

1. Formule un modelo de programación lineal entero que minimice los costos de transporte.
2. Suponga que el costo de transportar una máquina desde la planta B aumenta en $10 para todas las máquinas a partir de la tercera; es decir, el 4, el 5, etc. Reformule el modelo de la Sección (a) considerando este supuesto.

Table 1 Transport costs

Plant/Warehouse	X	Y	Z
A	50	60	30
B	60	40	20
C	40	70	30

1. **Variables de decisión**

   $x_{i,j}$ = unidades a transportar desde la planta A hasta el almacen j donde $i = A, B, C$ y $j = X, Y, Z$.

   Función objetivo

   $$\min z = 50x_{A,X}+60x_{A,Y}+30x_{A,Z}+60x_{B,X}+40x_{B,Y}+20x_{B,Z}+40x_{C,X}+70x_{C,Y}+30x_{C,Z}$$

   Restricciones

   Restricciones de disponibilidad

   $$x_{A,X} + x_{A,Y} + x_{A,Z} \leq 8$$
   $$x_{B,X} + x_{B,Y} + x_{B,Z} \leq 5$$
   $$x_{C,X} + x_{C,Y} + x_{C,Z} \leq 3$$

   Restricciones de requisitos

   $$x_{A,X} + x_{B,X} + x_{C,X} \geq 5$$
   $$x_{A,Y} + x_{B,Y} + x_{C,Y} \geq 4$$
   $$x_{A,Z} + x_{B,Z} + x_{C,Z} \geq 3$$

   Restricciones de no negatividad

   $$x_{i,j} \geq 0 \text{ con } i = A, B, C \text{ y } j = X, Y, Z$$

2. Para este inciso a las variables de decisión y restricciones anteriores se les agregan nuevas variables de decisión y restricciones.

   Variables de decisión

   $x_{B,X2}$ = unidades de transporte de la planta B al almacén X si hay más de tres.
   $x_{B,Y2}$ = unidades de transporte de la planta B al almacén X si hay más de tres.

$x_{B,Z2}$ = unidades de transporte de la planta B al almacén X si hay más de tres.

Función objetivo

$$\begin{aligned}\min z = 50X_{A,X} + 60x_{A,Y} + 30x_{A,Z} + 60x_{B,X} + 40X_{B,Y} + 20x_{B,Z} + 40x_{C,X}\\ + 70x_{C,Y} + 30x_{C,Z} + 70x_{BX2} + 50x_{BY2} + 30x_{BZ2}\end{aligned}$$

Restricciones

$$x_{B,X} + x_{B,Y} + x_{B,Z} \leq 3$$

$$x_{B,X} + x_{B,Y} + x_{B,Z} + x_{B,X2} + x_{B,Y2} + X_{B,Z2} \leq 5$$

$$x_{A,X} + x_{B,X} + x_{B,X2} + x_{C,X} \geq 5$$

$$x_{A,Y} + x_{B,Y} + x_{B,Y2} + x_{C,Y} \geq 4$$

$$x_{A,Z} + x_{B,Z} + x_{B,Z2} + x_{C,Z} \geq 3$$

$$x_{B,X2}, x_{B,Y2}, x_{B,Z2} \geq 0$$

VI. Tarmacking Shifts

La firma MMM ha obtenido un contrato para asfaltar las calles del centro de Exeter. El Departamento de Ingeniería y Planificación de Tránsito estimó que se requiere al menos el número de empleados indicado en la Tabla 1 para cada intervalo de 4 horas durante un período estándar de 24 horas.

Todos los miembros del personal de MMM trabajan turnos continuos de 8 horas. Hay seis turnos factibles que comenzaron a la hora en que comienza cada período de 4 h que se muestra en la tabla. Todos los miembros del personal tienen el mismo salario por hora, excepto los que trabajan en los turnos de 20:00 h y 00:00 h, que reciben un 50 % de aumento. Además, el salario por hora es un 100 % superior entre las 00:00 h y las 06:00 h.

1. Considere un modelo de programación lineal que pueda determinar cuántos empleados se requieren en los seis turnos para minimizar el costo de los salarios de MMM para cumplir con los requisitos de personal.

2. La firma de trabajo temporal ETS ofrece a los miembros del personal un horario de trabajo más flexible, con turnos de 4 h que comienzan en la hora al inicio de todos los períodos de 4 h en la tabla. El costo de utilizar al personal de ETS es el mismo en todos los momentos considerados, pero es un 80 % más alto que el costo diario de los miembros del personal de MMM para cada turno. MMM desea saber si se obtendría algún beneficio si se utilizara ETS. Modificar el modelo anterior para determinar la combinación óptima de utilizar el personal de MMM y ETS a fin de minimizar los costos incurridos para MMM a través de los salarios y cumplir con los requisitos de personal.

Table 1 Personnel requirements

Time period	Personnel
06–10	70
10–14	20
14–18	80
18–22	30
22–02	10
02–06	10

1. **Variables de decisión**

   $x_1 =$ número de trabajadores que comienzan a las 6:00 h.
   $x_2 =$ número de trabajadores que comienzan a las 10:00 h.
   $x_3 =$ número de trabajadores que comienzan a las 14:00 h.
   $x_4 =$ número de trabajadores que comienzan a las 18:00 h.
   $x_5 =$ número de trabajadores que comienzan a las 22:00 h.
   $x_6 =$ número de trabajadores que comienzan a las 02:000 h.

   Función objetivo

   $$\begin{aligned}\min z = {}& 8x_1 + 8x_2 + 6x_3 + (2)(1{,}5)x_3 + 2x_4 + (4)(1{,}5)x_4 + (2)(2)x_4 \\ &+ (2)(1{,}5)x_5 + (6)(2)x_5 + (4)(2)x_6 + 4x_6\end{aligned}$$

   Restricciones

   $$\begin{aligned} x_6 + x_1 &\geq 70 \\ x_1 + x_2 &\geq 20 \\ x_2 + x_3 &\geq 80 \\ x_3 + x_4 &\geq 30 \\ x_4 + x_5 &\geq 10 \\ x_5 + x_6 &\geq 10 \\ x_i \geq 0 \text{ para } i &= 1,2,3,4,5,6 \end{aligned}$$

2. Se agregan nuevas variables de decisión $x_7 =$ número de trabajadores de ETS que comienzan a

   las 6:00 h.
   $x_8 =$ número de trabajadores de ETS que comienzan a las 10:00 h.
   $x_9 =$ número de trabajadores de ETS que comienzan a las 14:00 h.
   $x_{10} =$ número de trabajadores de ETS que comienzan a las 18:00 h.
   $x_{11} =$ número de trabajadores de ETS que comienzan a las 22:00 h.
   $x_{12} =$ número de trabajadores de ETS que comienzan a las 02:000 h.

   Función objetivo

   $$\begin{aligned}\min z = {}& 8x_1 + 8x_2 + 6x_3 + (2)(1{,}5)x_3 + 2x_4 + (4)(1{,}5)x_4 + (2)(2)x_4 + (2)(1{,}5)x_5 \\ &+ (6)(2)x_5 + (4)(2)x_6 + 4x_6 + (4)(1{,}8)x_7 + (4)(1{,}8)x_8 + (4)(1{,}8)x_9 + (2)(1{,}8)x_{10} \\ &+ (2)(1{,}5)(1{,}8)x_{11} + (2)(2)(1{,}8)x_{11} + (4)(2)(1{,}8)x_{12}\end{aligned}$$

   Restricciones

   $$\begin{aligned} x_6 + x_1 + x_7 &\geq 70 \\ x_1 + x_2 + x_8 &\geq 20 \\ x_2 + x_3 + x_9 &\geq 80 \\ x_3 + x_4 + x_{10} &\geq 30 \\ x_4 + x_5 + x_{11} &\geq 10 \\ x_5 + x_6 + x_{12} &\geq 10 \\ x_i \geq 0 \text{ para } i &= 1,2,3,\cdots,x_{11},x_{12} \end{aligned}$$