CIMAT

Ejercicio Guiado 1.
Intervalos de confianza para la media μ.

Una muestra aleatoria de tamaño n = 100 se extrae de una población con σ = 5.1. Dado que la media muestral $\bar{x}$ = 21.6, construye un intervalo de confianza del 95% para la media de la población μ.

Solución: Sustituyendo los valores dados de n = 100, $\bar{x}$ = 21.6, σ = 5.1 y $Z_{0.025}$ = 1.96, en la formula del intervalo de confianza para la media μ, obtenemos.

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$(21.6) - (1.96) \cdot \frac{(5.1)}{\sqrt{(100)}} < \mu < (21.6) + (1.96) \cdot \frac{(5.1)}{\sqrt{(100)}}$$

Así,

$$(21.6) - (1.96) \cdot (0.51) < \mu < (21.6) + (1.96) \cdot (0.51)$$

Por lo tanto,

$$(20.6) < \mu < (22.6)$$

Conclusión:

Se puede asegurar que la media poblacional se encuentra entre 20.6 y 22.6 en 95% de los casos.

CIMAT

Ejercicio Guiado 2.
Intervalos de confianza para la media μ. (Muestras pequeñas).

La perdida promedio en el peso de n=16 aspas después de cierto intervalo de tiempo en un molino de aspas es 3.42 gramos, con una desviación estándar de 0.68 gramos. Construye un intervalo con un nivel de confianza del 99% para la perdida promedio real del peso de las aspas en las condiciones establecidas.

Solución: Sustituyendo $n=$ 16, $\bar{x}=$ 3.42, $s=$ 0.68 y $t_{0.005}=$ 2.947, para 15 grados de libertad en la formula del intervalo de confianza para la media μ en muestras pequeñas, obtenemos.

$$\bar{x}-t_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+t_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$(3.42)-(2.947)\cdot\frac{(0.68)}{\sqrt{(16)}}<\mu<(3.42)+(2.947)\cdot\frac{(0.68)}{\sqrt{(16)}}$$

Luego,

$$(3.42)-(2.947)\cdot(0.17)<\mu<(3.42)+(2.947)\cdot(0.17)$$

Así,

$$(2.919)<\mu<(3.921)$$

Conclusión:
Por lo tanto, podemos afirmar con un grado de confianza del 99% que el intervalo de 2.919 gramos a 3.921 gramos contiene la pérdida promedio de peso verdadera del desgaste de las aspas del molino.

Ejercicio Guiado 3.
Intervalos de confianza para la diferencia de dos medias $\mu_1 - \mu_2$.
(Varianzas diferentes conocidas o desconocidas)

Una comparación del desgaste de neumáticos para automóvil, se hizo rodando $n_1 = n_2 = 100$ neumáticos de cada tipo. El número de kilómetros – vida de cada neumático se registró, en donde Km-vida fue definido como el kilometraje andado antes de que el neumático quedase en un cierto estado desgaste. Los resultados de la prueba fueron los siguientes:

Neumático I	Neumático II
$\bar{y}_1 = 26{,}400 km.$	$\bar{y}_2 = 25{,}100 km.$
$s_1^2 = 1{,}440{,}000$	$s_2^2 = 1{,}960{,}000$

Estime $\mu_1 - \mu_2$ y establezca un intervalo de confianza del 99% para la diferencia de los km-vida promedio.

Solución:

$$(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) \pm Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

Sustituyendo los valores dados de $n_1 =$ 100 y $n_2 =$ 100 $\bar{y}_1 =$ 26400, $\bar{y}_2 =$ 25100, $S_1^2 =$ 1,440,000, $S_2^2 =$ 1,960,000 y $Z_{0.005} =$ 2.575, en la formula del intervalo de confianza para la diferencia en las medias obtenemos.

Sean y1 = y1 barra, y2 = y2 bara

$$([\text{y1}] - [\text{y2}]) - [2.575] \cdot \sqrt{\frac{(\text{s1^2})}{(100)} + \frac{(\text{s2^2})}{(100)}} < \mu_1 - \mu_2 < ([\text{y1}] - [\text{y2}]) + [2.575] \cdot \sqrt{\frac{(\text{s1^2})}{(100)} + \frac{(\text{s2^2})}{(100)}}$$

$$(1300) - [2.575] \cdot \sqrt{(34000)} < \mu_1 - \mu_2 < (1300) + [2.575] \cdot \sqrt{(34000)}$$

Así,

$$(825.193) < \mu_1 - \mu_2 < (1774.807)$$

Conclusión:

La diferencia promedio de los kilómetros vida de los dos tipos de neumáticos se encuentra en el intervalo (825.193, 1774.807), con una nivel de confianza del 99%, por lo tanto la desgaste de cada neumático es diferente, ya que el 0 no se encuentra en el intervalo de confianza.

CIMAT

Ejercicio Guiado 4.
Intervalos de confianza para la diferencia de dos medias $\mu_1 - \mu_2$.
(Varianzas iguales, desconocidas)

Al tomar 10 muestras de cemento estándar, se encontró que el peso promedio de calcio es $\bar{x}_1 = 90.0$, con una desviación estándar muestral de $S_1 = 5.0$; los resultados obtenidos con 15 muestras con plomo fueron $\bar{x}_2 = 87.0$ y $S_2 = 4.0$. Supóngase que el porcentaje de peso de calcio está distribuido de manera normal. Encuéntrese un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre medias µ1 - µ2 de los dos tipos de cemento. Por otra parte, supóngase que las dos poblaciones normales tienen la misma desviación estándar.

SOLUCION:
El estimador combinado de la desviación estándar común se obtiene con la ecuación 7-21 de la siguiente manera:

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$s_p^2 = \frac{(9)\cdot(5)^2 + (14)(4)^2}{(10)+(15)-2} = (19.5217)$$

Por lo tanto, la estimación combinada de la desviación estándar $\boldsymbol{s_p}$ es la raíz cuadrada de 19.5217 igual a 4.4183 el intervalo de confianza del 95% es:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$(90) - (87) - (2.069)\cdot(4.4183)\sqrt{\frac{(1)}{(10)} + \frac{(1)}{(15)}} < \mu_1 - \mu_2 <$$

.

$$< \mu_1 - \mu_2 < (90) - (87) + (2.069)\cdot(4.4183)\sqrt{\frac{(1)}{(10)} + \frac{(1)}{(15)}}$$

$$(-0.732) < \mu_1 - \mu_2 < (6.732)$$

Conclusión:

Observemos que a diferencia del caso anterior, el 0 si se encuentra en el intervalo de confianza, por lo tanto existe la posibilidad que la diferencial real de las medias sea cero y así el peso promedio de calcio y plomo sean iguales al menos con un nivel de confianza del 95%.

Ejercicio Guiado 5.
Intervalos de confianza para una proporción p.

En una muestra aleatoria de 85 soportes para el cigüeñal de un motor de automóvil, 10 tienen un terminado que es más rugoso de lo que las especificaciones permiten. Por consiguiente, una estimación puntual de la proporción de soportes en la población que exceden la especificación de rugosidad es $\hat{p} = x/n$ = 10/85 = 0.12. Calcula un intervalo de confianza del 95% para p.

Solución: Sustituyendo los valores dados de n = 85, x= 10, $p = x/n$= 0.12 y $Z_{0.025}$ = 1.96.

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < P < \hat{p} + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$(0.12) - (1.96) \cdot \sqrt{\frac{(0.12)(0.88)}{(85)}} < P < (0.12) + (1.96) \cdot \sqrt{\frac{(0.12)(0.88)}{(85)}}$$

$$(0.12) - (1.96) \cdot (0.0352) < p < (0.12) + (1.96) \cdot (0.0352)$$

$$\boxed{(0.0509) < p < (0.1891)}$$

Conclusión:

La proporcion promedio de soportes que exceden la especificación de rigurosidad se encuentran entre el 5% y 18%, con un nivel de confianza del 95%.

CIMAT

Ejercicio Guiado 6.
Intervalos de confianza para la diferencia de proporciones.

Considérese el proceso de fabricación de soportes para cigüeñales del ejercicio 5. Supóngase que se hace una modificación al proceso de acabado de la superficie y que, de manera subsecuente, se toma una segunda muestra aleatoria de 85 ejes. El número de ejes defectuosos en esta segunda muestra es 8. Construya un intervalo de confianza aproximado para la diferencia en la proporción de los soportes defectuosos producidos por ambos procesos.

Solución: Sustituyendo $n_1 =$ 85, $n_2 =$ 85, $p_1 =$ 0.12, $p_2 =$ 0.09, $Z_{0.025}=$ 1.96, obtenemos:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \le p_1 - p_2 \le \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

Sustituyendo valores,

$$(0.12) - (0.09) - (1.96)\cdot\sqrt{\frac{(0.12)(0.88)}{(85)}+\frac{(0.09)(0.91)}{(85)}} \le p_1 - p_2 \le$$

$$\le p_1 - p_2 \le (0.12) - (0.09) + (1.96)\cdot\sqrt{\frac{(0.12)(0.88)}{(85)}+\frac{(0.09)(0.91)}{(85)}}$$

$$(0.03) - (1.96)\cdot\sqrt{(0.002)} \le p_1 - p_2 \le (0.03) + (1.96)\cdot\sqrt{(0.002)}$$

Por lo tanto,

-0.06<= p1 - p2 <= 0.12

Conclusión:
La diferencia de proporciones de los dos proceos se encuentra en el intervalo (-0.06,0.12) con un nivel de confianza del 95%. Por lo tanto, existe la posibilidad que la proporción de productos defectuosos sea la misma en ambos procesos.

CIMAT

Ejercicio Guiado 7.
Intervalos de confianza para la desviación estándar

Un fabricante de detergente liquido está interesado en la uniformidad de la maquina utilizada para llenar las botellas. De manera especifica, es deseable que la desviación estándar σ del proceso de llenado sea menor que 0.5 onzas de liquido; de otro modo, existe un porcentaje mayor del deseable de botellas con un contenido menor de detergente que el requerido. Supóngase que la distribución de llenado es aproximadamente normal. Al tomar una muestra aleatoria de 20 botellas, se obtiene una varianza muestral $s^2 = 0.0153$ (onzas de fluido)^2. Calcule un intervalo de confianza del 95% para el valor de la desviación estándar σ de llenado.

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}$$

Tenemos alpha = 0.05 y n = 20, luego

$$\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} = (\ 8.91\ ) \qquad \chi^2_{\alpha/2,n-1} = (\ 32.9\ )$$

$$\frac{(19)(s)^2}{(32.9)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(19)(s)^2}{(8.91)}$$

Sabemos que s^2 = 0.0153, en consecuencia

$$(0.0088) \leq \sigma^2 \leq (0.0326)$$

$$(0.0938) \leq \sigma \leq (0.1805)$$

Conclusión:

Se tiene el 95% de confianza de que la desviación estándar del procesos de llenadao es menor a 0.5 onzas de líquido, que es lo que se requería.

CIMAT

Ejercicio Guiado 8.
Intervalos de confianza para la desviación estándar

Una compañía fabrica propulsores para uso en motores de turbina. Una de las operaciones consiste en esmerilar el terminado de una superficie particular con una aleación de titanio. Pueden emplearse dos procesos de esmerilado, y ambos pueden producir partes que tienen la misma rugosidad superficial promedio. Al ingeniero de manufactura le gustaría seleccionar el proceso que tenga la menor variabilidad en la rugosidad de la superficie. Para ello toma una muestra de $n_1 = 12$ partes del primer proceso, la cual tiene una desviación estándar muestral de $s_1 = 5.1$ micro pulgadas, una muestra aleatoria $n_2 = 15$ partes del segundo proceso, la cual tiene una desviación estándar muestral de $s_2 = 4.7$ micro pulgadas. Se desea encontrar un intervalo de confianza del 90% para el cociente de las dos varianzas σ_1^2 / σ_2^2. Si se supone que los dos procesos son independientes y que la rugosidad de la superficie está distribuida de manera normal. Encuentre el intervalo de confianza deseado.

Tenemos que n2=15, n1=12, s1=5.1, s2=4.7 y alpha = 0.10

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} f_{1-\alpha/2, n_2-1, n_1-1} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\alpha/2, n_2-1, n_1-1}$$

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} f_{0.95,14,11} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{0.05,14,11}$$

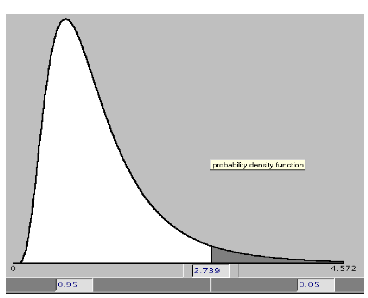
Notemos que f_{0.95,14,11} = 1/f_{0.05,11,14}, así

$$\frac{(5.1)^2}{(4.7)^2}(0.39) \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{(5.1)^2}{(4.7)^2}(2.74)$$

Por lo tanto,

$$(0.46) \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le (3.23)$$

$f_{\alpha, n1, n2}$ tomada de tabla F de Fisher



el área hacia la derecha.

Conclusión:

De lo anterior, se puede concluir que la proporción de variabilidad entre los procesos se encuentra entre 0.46 micropulgadas y 3.23 micropulgadas, por lo tanto existe la posibilidad de que la razón sea 1, teniendo ambos procesos la misma varianza, al menos con un grado de onfianza de 90%.