Tarea 1

Iván Vega Gutiérrez

25 de agosto de 2021

Ejercicio 1. Sea el conjunto $V = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$ y las operaciones de adición y multiplicación por escalar definidas de la siguiente forma,
Para $v = (x, y), v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in V$

$$\begin{aligned} + :& V \times V \longrightarrow V \\ &(v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2 = (x_1 + y_2, x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot :& \mathbb{K} \times V \longrightarrow V \\ &(a, v) \longmapsto a \cdot v = (\frac{a}{2}x, \frac{a}{2}y) \end{aligned}$$

Determinar si V tiene estructura de espacio vectorial

Solución.
Veamos que el conjunto V con las operaciones definidas previamente no es un espacio vectorial. Sean $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in V$, luego por definición de suma se tiene que

$$v + w = (v_1 + w_2, v_2). \tag{1}$$

Por otro lado observemos que

$$w + v = (w_1 + v_2, w_2). \tag{2}$$

De (1) y (2) se observa que la conmutatividad en general no se cumple, por lo tanto V no es un espacio vectorial.

Ejercicio 2. Analiza cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales.

1. Sea $A = \{(x, y, z)|xy = 1\}$
2. Sea $A = \{(x, y, z)|x + y + z = 0 \text{ y } x - y - z = 0\}$

Solución:

1. Mostremos que A no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, para ello supongamos lo contrario, es decir que A es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Sean $v = (x, y, z) \in A$ y $k \in \mathbb{R}$, tomemos en particular $k = 0$. Luego $kv \in A$, es decir
$$kxy = 1 \tag{3}$$
Ademas $v \in A$,
$$xy = 1 \tag{4}$$
De (3) y (4) se tiene que $k = 1$, pero $k = 0$, lo cual es una contradicción, esto por suponer que A es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto A no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

2. Veamos que A es un subespacio vecotiral de $\mathbb{R}^3$. Notemos que si $v = (x, y, z) \in A$ se tiene que
$$x + y + z = 0 \tag{5}$$
y
$$x - y - z = 0 \tag{6}$$
Sumando (5) y (6) se tiene que $x = 0$, en consecuencia $z = -y$, por tanto podemos escribir al conjunto A como
$$A = \{(0, y, -y)|y \in \mathbb{R}\}.$$
Ahora bien, sean $v = (0, x, -x), w = (0, y, -y) \in A$ y $k \in \mathbb{R}$, luego
$$\begin{aligned} v + w &= (0, x, -x) + (0, y, -y) \\ &= (0, x + y, -(x + y)) \in A \end{aligned}$$
Por otro lado se tiene que
$$\begin{aligned} kv &= k(0, x, -x) \\ &= (0, kx, -(kx)) \in A \end{aligned}$$
Por lo tanto, se concluye que A es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.