Modelación Numérica II
Tarea II

Iván Vega Gutiérrez

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Unidad Aguascalientes
E-mail: ivan.vega@cimat.mx

I. Método de valores y vectores característicos para obtener soluciones

Ejercicio 6 Encuentre todas las soluciones de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 30 \\ 7 & 14 & 21 & 42 \end{pmatrix} x \tag{1}$$

Solución
Para poder hallar todas las soluciones de (1) es necesario encontrar cuatro vectores característicos linealmente independientes con sus respectivos valores propios. Dada la forma de la matriz asociada al sistema, podemos observar que las filas son múltiplos de la primer fila;

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 30 \\ 7 & 14 & 21 & 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 \\ 3(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4) \\ 5(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4) \\ 7(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4) \end{pmatrix}$$

De aquí, se obtiene que cualquier vector tal que $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0$ es un vector característico asociado al valor característico cero. En particular,

$$v^1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

son tres vectores característicos linealmente independientes con valor propio cero. Más aún, notemos que

$$v^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor característico 64. En efecto

$$Av^4 = \begin{pmatrix} 1(1)+2(3)+3(5)+6(7) \\ 3(1(1)+2(3)+3(5)+6(7)) \\ 5(1(1)+2(3)+3(5)+6(7)) \\ 7(1(1)+2(3)+3(5)+6(7)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 3(64) \\ 5(64) \\ 7(64) \end{pmatrix} = 64 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Con todo lo anterior podemos concluir que los vectores v^1, v^2, v^3 y v^4 son cuatro vectores linealmente independientes. Por lo tanto, toda solución $x(t)$ es de la forma

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9 Resuelva el problema de valor inicial

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)[(3-\lambda)(-1-\lambda)+3] - 1[(-1-\lambda)+3] - 1[3-3(3-\lambda)] \\ &= (3-\lambda)^2(-1-\lambda) + 3(3-\lambda) + \lambda - 2 + 6 - 3\lambda \\ &= (9 - 6\lambda + \lambda^2)(-1-\lambda) + 9 - 3\lambda - 2\lambda + 4 \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \end{aligned}$$

Notemos que

$$-p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

De modo que los valores característicos son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad dos.

(i) Para $\lambda_1 = 1$ se busca un vector v no nulo tal que

$$(A - I)v = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$2v_1 + v_2 - v_3 = 0, \qquad v_1 + 2v_2 - v_3 = 0, \qquad 3v_1 + 3v_2 - 2v_3 = 0.$$

Restando la segunda y primera ecuación se tiene que $v_1 = v_2$, y sustituyendo esta igualdad en la tercera ecuación se obtiene que $3v_1 = v_3$. Por lo tanto, cualquier vector de la forma

$$v = c\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},$$

donde $c \in \mathbb{R}$, es un vector característico con valor propio igual a 1. En consecuencia,

$$x^1(t) = e^t\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$$

es una solución de la ecuación diferencial.

(ii) Para $\lambda_2 = 2$ se busca un vector v no nulo tal que

$$(A-2I)v = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 1 & -1\\3 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

De aquí que, $v_3 = v_1 + v_2$, por lo tanto,

$$v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = v_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, los vectores

$$v^2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad v^3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

son dos vectores característicos linealmente independientes con valor característico 2. En consecuencia

$$x^2 = e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad x^3 = e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

son dos soluciones de la ecuación diferencial. Las condiciones iniciales se determinan a partir de

$$x(0) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1 + c_2\\c_1 + c_3\\3c_1 + c_2 + c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

De lo anterior, se tiene que $c_1 = 0, c_2 = 1$ y $c_3 = -2$. Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial es,

$$x(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 2e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 11 Resuelva el problema de valor inicial

$$\dot{x} = \begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\0 & -1 & 0\\0 & -1 & -2\end{pmatrix}x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$$

Solución El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-1-\lambda)(-2-\lambda) \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores propios son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$.

(i) Para $\lambda_1 = 1$, buscamos un vector v no nulo tal que

$$(A - I)v = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica que $v_2, v_3 = 0$ y v_1 es libre, en consecuencia, cualquier vector de la forma

$$v = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un vector característico del valor característico 1. Por tanto,

$$x^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una solución de la ecuación diferencial.

(ii) Para $\lambda_2 = -1$ buscamos un vector v no nulo tal que

$$(A + I)v = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica que $v_2 = -v_3$ y $v_1 = -\frac{5}{2}v_3$. En consecuencia, cualquier vector de la forma

$$v = c \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es un vector característico del valor característico -1. Por tanto,

$$x^2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es una solución de la ecuación diferencial.

(iii) Para $\lambda_3 = -2$ buscamos un vector v no nulo tal que

$$(A+2I)v = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica que $v_2 = 0$ y $v_1 = -\frac{2}{3}v_3$. En consecuencia, cualquier vector de la forma

$$v = c \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

es un vector característico del valor característico -2. Por tanto,

$$x^3(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

es una solución de la ecuación diferencial. Por lo tanto, se tiene que

$$x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c2 \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 5c_2 - 2c_3 \\ -2c_2 \\ 2c_2 + 3c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Luego, $c_1 = c_2 = 0$ y $c_3 = 1$. Por lo tanto, la solución al problema de valor inicial es

$$x(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} e^t + e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} e^t + e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \quad y \quad x^3(t) = \begin{pmatrix} e^t - e^{3t} \\ -e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix}$$

son tres soluciones de la ecuación $\dot{x} = Ax$. Obtenga los valores característicos y los vectores característicos de A.

Solución Dado que $x^1(t), x^2(t)$ y $x^3(t)$ son soluciones, entonces cualquier combinación lineal de estas tres soluciones también es solucion, en particular

$$x^4(t) = x^2(t) + x^3(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

es solución, más aún, en general $x(t) = e^{\lambda t}v$ es solución si y solo si $Av = \lambda v$. En consecuencia de (2) se concluye que

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor propio $\lambda_1 = 1$.
Por otro lado,

$$x^5(t) = x^1(t) - e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

también es solución y se obtiene que

$$v^2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor propio $\lambda_2 = 2$.
Por último, observemos que

$$x^6(t) = x^2(t) - e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es solución. Por lo tanto

$$v^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A con valor propio $\lambda_3 = 3$.

II. Raíces complejas

Ejercicio 2 Encuentre la solución general del sistema dado

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Solución El polinomio característico del la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(A - \lambda I) \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-3-\lambda)(1-\lambda) + 5(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores propios de A son

$$\lambda = 1 \quad y \quad \lambda = -1 \pm i$$

(i) Para $\lambda = 1$ buscamos un vector v no nulo tal que

$$(A - I)v = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $v_1 = v_2 = 0$ y v_3 es libre, entonces

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor propio igual a 1. Por tanto,

$$x^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales.

(ii) Para $\lambda = -1 + i$ se busca un vector v no nulo tal que

$$[A - (-1 + i)I]v = \begin{pmatrix} 2 - i & -5 & 0 \\ 1 & -2 - i & 0 \\ 0 & 0 & 2 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo que implica que $v_3 = 0$ y $v_1 = (2 + i)v_2$, luego

$$v = c \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor característico $-1 + i$. Así,

$$x(t) = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una solución con valores complejos del sistema dado. Ahora bien,

$$\begin{aligned} e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= e^{-t}[\cos t + i \operatorname{sen} t] \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{-t} \left[\cos t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} 2\cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + i e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \operatorname{sen} t + \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De aquí que,

$$x^2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2\cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad x^3(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \operatorname{sen} t + \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

son soluciones con valores reales del sistema dado. Más aún, observemos que $x^1(t), x^2(t)$ y $x^3(t)$ son soluciones linealmente independientes ya que

$$x^1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^3(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

son vectores linealmente independientes. Por lo tanto la solución general es

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2\cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 2\operatorname{sen} t + \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 Encuentre la solución general del sistema dado

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

Solución El polinomio característico del la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(A - \lambda I) \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) + 2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores propios de A son

$$\lambda = 1 \quad y \quad \lambda = \pm i$$

(i) Para $\lambda = 1$ buscamos un vector v no nulo tal que

$$(A - I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $v_1 = v_3 = 0$ y $v_2 = 0$ es libre, entonces

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor propio igual a 1. Por tanto,

$$x^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales.

(ii) Para $\lambda = i$ se busca un vector v no nulo tal que

$$[A - iI]v = \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 1 \\ 0 & 1-i & -1 \\ -2 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo que implica que $v_1 = -v_2$ y $v_1 = \frac{(-1-i)}{2} v_3$, luego

$$v = c \begin{pmatrix} -1-i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor característico i. Así,

$$x(t) = e^{it} \begin{pmatrix} -1-i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

es una solución con valores complejos del sistema dado. Ahora bien,

$$\begin{aligned} e^{it} \begin{pmatrix} -1-i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix} &= [\cos t + i \operatorname{sen} t] \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \cos t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i \cos t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t - \cos t \\ \operatorname{sen} t + \cos t \\ 2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De aquí que,

$$x^2(t) = \begin{pmatrix} -\cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x^3(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t - \cos t \\ \operatorname{sen} t + \cos t \\ 2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

son soluciones con valores reales del sistema dado. Más aún, observemos que $x^1(t), x^2(t)$ y $x^3(t)$ son soluciones linealmente independientes ya que

$$x^1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x^3(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

son vectores linealmente independientes. Por lo tanto la solución general es

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t - \cos t \\ \operatorname{sen} t + \cos t \\ 2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7 Resuelva el problema de valor inicial dado

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solución El polinomio característico del la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(A - \lambda I) \\ &= (-3-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-3-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda) + 2(-1+2(-1-\lambda)) \\ &= (\lambda^2 + 4\lambda + 3)(-\lambda) - 4\lambda - 6 \\ &= -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda - 6 \\ &= (\lambda + 2)(-\lambda^2 - 2\lambda - 3) \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores propios de A son

$$\lambda = -2 \quad y \quad \lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$$

(i) Para $\lambda = -2$ buscamos un vector v no nulo tal que

$$(A + 2I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $v_2 = -v_1$ y $v_3 = \frac{v_1}{2}$, entonces

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor propio igual a 1. Por tanto,

$$x^1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales.

(ii) Para $\lambda = -1 + i\sqrt{2}$ se busca un vector v no nulo tal que

$$[A - (-1 + i\sqrt{2})I]v = \begin{pmatrix} -2 - i\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 1 & -i\sqrt{2} & 0 \\ -2 & -1 & 1 - i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo que implica que $v_3 = \frac{(2+i\sqrt{2})v_1}{2}$ y $v_2 = \frac{v_1}{i\sqrt{2}}$, si $v_1 = i\sqrt{2}$, entonces

$$v = c\begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ i\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor característico $-1+i\sqrt{2}$. Así,

$$x(t) = e^{(-1+i\sqrt{2})t}\begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ i\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

es una solución con valores complejos del sistema dado. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
e^{(-1+i\sqrt{2})t}\begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ i\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} &= e^{-t}[\cos\sqrt{2}t + i\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t]\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right] \\
&= e^{-t}\left[\cos\sqrt{2}t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \mathrm{sen}\,\sqrt{2}t\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right. \\
&\left. + i\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i\cos\sqrt{2}t\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right. \\
&= e^{-t}\left[\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t \\ \cos\sqrt{2}t \\ -\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \\ \mathrm{sen}\,\sqrt{2}t \\ -\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

De aquí que,

$$x^2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t \\ \cos\sqrt{2}t \\ -\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x^3(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \\ \mathrm{sen}\,\sqrt{2}t \\ -\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}$$

son soluciones con valores reales del sistema dado. Por lo tanto la solución general es

$$x(t) = c_1e^{-2t}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t \\ \cos\sqrt{2}t \\ -\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t \end{pmatrix} + c_3e^{-t}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \\ \mathrm{sen}\,\sqrt{2}t \\ -\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales tenemos que

$$x(0) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + \sqrt{2}c_3 \\ -2c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 + \sqrt{2}c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, $c_1 = c_2 = 1$ y $c_3 = -\sqrt{2}$. Por lo tanto la solución al problema con valor inicial es

$$x(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t \\ \cos\sqrt{2}t \\ -\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t \end{pmatrix} + -\sqrt{2}e^{-t}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \\ \mathrm{sen}\,\sqrt{2}t \\ -\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9 Determine todos los vectores x^0 tales que la solución del problema de valor inicial

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = x^0$$

es una función periódica del tiempo.

Solución

Primero resolvamos el sistema y posterior hallemos las condiciones de x^0 tal que la solución del problema de valor inicial sea una función periódica en el tiempo.

El polinomio característico del la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(A - \lambda I) \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) - 2(\lambda - 1) \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) + 2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores propios de A son

$$\lambda = 1 \quad y \quad \lambda = \pm i$$

(i) Para $\lambda = 1$ buscamos un vector v no nulo tal que

$$(A - I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $v_1 = v_2$ y $v_3 = 0$, así

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor propio igual a 1. Por tanto,

$$x^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales.

(ii) Para $\lambda = i$ se busca un vector v no nulo tal que

$$[A - iI]v = \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 2 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 1 & -1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo que implica que $v_2 = 0$ y $v_1 = (1+i)v_3$, si $v_3 = 1$ entonces

$$v = c\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de A con valor característico i. Así,

$$x(t) = e^{it}\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es una solución con valores complejos del sistema dado. Ahora bien,

$$\begin{aligned} e^{it}\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= [\cos t + i \operatorname{sen} t]\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= \cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i\operatorname{sen} t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ 0 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De aquí que,

$$x^2(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x^3(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ 0 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

son soluciones con valores reales del sistema dado. Más aún, observemos que $x^1(t), x^2(t)$ y $x^3(t)$ son soluciones linealmente independientes ya que

$$x^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x^3(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

son vectores linealmente independientes. Por lo tanto la solución general es

$$x(t) = c_1 e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ 0 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Notemos que la solución está en función de senos y cosenos, excepto por la primer termino que está en términos de la exponencial, por lo tanto, para garantizar que la solución del problema valor inicial sea una función periódica del tiempo nos interesaría que $c_1 = 0$. En consecuencia, se debe cumplir que

$$x(0) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

III. Raíces iguales

Ejercicio 3 Encuentre la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x$$

Solución El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)^2(-2-\lambda) \end{aligned}$$

Notemos que

$$-p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

De modo que los valores característicos son $\lambda = -2$ y $\lambda = -1$ con multiplicidad dos.
(i) Para $\lambda = -2$ se busca un vector v no nulo tal que

$$(A + 2I)v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta forma, $v_1 = v_2 = 0$ y v_3 es libre. Por lo tanto,

$$x^1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema $\dot{x} = Ax$.

(ii) Para $\lambda = -1$ se buscan todos los vectores v, diferentes de cero, tales que

$$(A + I)v = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica que $v_2 = v_3 = 0$ y v_1 es libre. Por lo tanto,

$$x^2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema $\dot{x} = Ax$, nos faltaría halalr una solución adicional para poder tener la solución general del sistema. Dado que A únicamente tiene un vector característico con valor característico -1, se buscan todas las soluciones

$$(A+I)^2 v = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Claramente $v_3 = 0$ y v_1, v_2 son libres. Por lo tanto proponemos

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$(A+I)v = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^3(t) = e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= e^{-t} e^{(A+I)t} v \\ &= e^{-t}[v + t(A+I)v] \\ &= e^{-t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es una tercera solución. Con todo lo anterior, la solución general está determinada por

$$x(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5 Resuelva el problema de valor inicial

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A-\lambda I) \\
&= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)-1] - 1[\lambda-3+2] + 2[-1+2(1-\lambda)] \\
&= (-1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+2) - \lambda + 1 + 2(1-2\lambda) \\
&= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 \\
&= -(\lambda-1)^3
\end{aligned}
$$

De modo que el único valor característico es $\lambda = 1$ con multiplicidad tres. Así, los vectores característicos deben satisfacer que

$$
(A-I)v = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

De esta forma, $v_1 = v_3$ y $v_2 = 0$. Por lo tanto,

$$
x^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

es una solución del sistema $\dot{x} = Ax$. Dado que A únicamente un vector característico, se buscan todas las soluciones de la ecuación

$$
(A-I)^2 v = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Así, $v_1 = v_3$ y v_2 es libre. Por lo tanto proponemos

$$
v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Notemos que

$$
(A-I)v = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
x^2(t) = e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= e^t e^{(A-I)t} v \\
&= e^t [v + t(A-I)v] \\
&= e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\
&= e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

es una segunda solución. Dado que la ecuación $(A-I)^2v=0$ tiene solamente dos soluciones linealmente independientes, se busca otra solución, tal que

$$(A-I)^3v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, cualquier vector v cumple con lo anterior. Luego, se debe satisfacer que

$$(A-I)^2v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1+v_3 \\ 0 \\ -v_1+v_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí que $v_1 \neq v_3$, entonces se propone

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^3(t) &= e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t e^{(A-I)t}v \\ &= e^t[v + t(A-I)v + \frac{t^2}{2}(A-I)^2v] \\ &= e^t\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \\ &= e^t\begin{pmatrix} 1-2t-\frac{t^2}{2} \\ -t \\ -2t-\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es una tercera solución. Tomando en cuenta las condiciones iniciales tenemos que

$$x(0) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1+c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $c_2 = c_3 = 0$ y $c_1 = 1$. Por lo tanto, la solución es

$$x(t) = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6 Resuelva el problema de valor inicial

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 10 & 9 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 10 & 9 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= (-4-\lambda) \begin{vmatrix} 9-\lambda & 1 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-4-\lambda)[(9-\lambda)(1-\lambda)+3] + 4[10(1-\lambda)+4] \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \\ &= -(\lambda - 2)^3 \end{aligned}$$

De modo que el único valor característico es $\lambda = 2$ con multiplicidad tres. Así, los vectores característicos deben satisfacer que

$$(A - 2I)v = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 0 \\ 10 & 7 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia , $v_1 = -\frac{2}{3}v_2$ y $v_3 = -\frac{v_2}{3}$, si $v_2 = 3$ entonces

$$x^1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema $\dot{x} = Ax$. Dado que A únicamente un vector característico, se buscan todas las soluciones de la ecuación

$$(A - 2I)^2 v = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 0 \\ 10 & 7 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -4 & 0 \\ 10 & 7 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, $v_1 + v_2 + v_3 = 0$, si $v_1 = 0$, entonces $v_2 = -v_3$. Por lo tanto proponemos

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$(A - 2I)v = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 0 \\ 10 & 7 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
x^2(t) = e^{At}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} &= e^{2t}e^{(A-2I)t}v\\
&= e^{2t}[v + t(A-2I)v]\\
&= e^{2t}\left[\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}\right]\\
&= e^{2t}\begin{pmatrix}4t\\-1-6t\\1+2t\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

es una segunda solución. Dado que la ecuación $(A-2I)^2v = 0$ tiene solamente dos soluciones linealmente independientes, se busca otra solución, tal que

$$
(A-2I)^3v = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}
$$

Por tanto, cualquier vector v cumple con lo anterior. Luego, se debe satisfacer que

$$
(A-I)^2v = \begin{pmatrix}-4&-4&-4\\6&6&6\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4(v_1+v_2+v_3)\\6(v_1+v_2+v_3)\\-2(v_1+v_2+v_3)\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}
$$

De aquí que $v_1 + v_2 + v_3 \neq 0$, entonces se propone

$$
v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
x^3(t) = e^{At}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} &= e^{2t}e^{(A-2I)t}v\\
&= e^{2t}[v + t(A-2I)v + \frac{t^2}{2}(A-2I)^2v]\\
&= e^{2t}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-6\\10\\-4\end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-4\\6\\-2\end{pmatrix}\right]\\
&= e^{2t}\begin{pmatrix}1+6t-2t^2\\10t+3t^2\\-4t-t^2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

es una tercera solución. Tomando en cuenta las condiciones iniciales tenemos que

$$
x(0) = c_1\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2c_1+c_3\\3c_1-c_2\\-c_1+c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}
$$

Entonces $c_1 = 0, c_2 = -1$ y $c_3 = 2$. Por lo tanto, la solución es

$$x(t) = e^{2t}\left[\begin{pmatrix}-4t\\1+6t\\-1-2t\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1+6t-2t^2\\10t+3t^2\\-4t-t^2\end{pmatrix}\right] = e^{2t}\begin{pmatrix}2+8t-4t^2\\1+26t+6t^2\\-1-10t-2t^2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 12 b) Calcule e^{At} si

$$A = \begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

Solución Sea

$$P = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Luego,

$$A = 2I + P.$$

Notemos que $P^4 = 0$ y que $2IP = 2PI = P2I$. Así,

$$e^{At} = e^{(2I+P)t} = e^{2It}e^{Pt}.$$

Por definición, se tiene que

$$\begin{aligned} e^{2It} &= I + 2It + \frac{(2I)^2t^2}{2!} + \frac{(2I)^3t^3}{3!} + \frac{(2I)^4t^4}{4!} + \cdots \\ &= I(1 + 2t + \frac{2^2t^2}{2!} + \frac{2^3t^3}{3!} + \cdots) \\ &= I(e^{2t}) \end{aligned} \tag{3}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} e^{Pt} &= I + Pt + \frac{P^2t^2}{2!} + \frac{P^3t^3}{3!} + \frac{P^4t^4}{4!} + \frac{P^5t^5}{5!} + \cdots \\ &= I + Pt + \frac{P^2t^2}{2!} + \frac{P^3t^3}{3!} \\ &= I + t\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1&t&\frac{t^2}{2}&\frac{t^3}{6}\\0&1&t&\frac{t^2}{2}\\0&0&1&t\\0&0&0&1\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

Por (3) y (4) se obtiene que

$$e^{At} = e^{2It}e^{Pt} = Ie^{2t} = e^{2t}\begin{pmatrix}1&t&\frac{t^2}{2}&\frac{t^3}{6}\\0&1&t&\frac{t^2}{2}\\0&0&1&t\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 17 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Demuestre que $A^2 = -I$.
2. Pruebe que

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

Solución de 1 En efecto, notemos que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

Solución 2 Del ejercicio anterior, observemos que

$$\begin{aligned} A^0 &= I, \\ A^1 &= A, \\ A^2 &= -I, \\ A^3 &= -A, \\ A^4 &= I, \\ A^5 &= A, \\ A^6 &= -I, \\ A^7 &= -A, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \frac{A^4t^4}{4!} + \frac{A^5t^5}{5!} + \frac{A^6t^6}{6!} + \frac{A^7t^7}{7!} \cdots \\ &= I + At - \frac{It^2}{2!} - \frac{At^3}{3!} + \frac{It^4}{4!} + \frac{At^5}{5!} - \frac{It^6}{6!} - \frac{At^7}{7!} \cdots \\ &= I(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots) + A(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots) \\ &= I \cos t + A \operatorname{sen} t \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$