Distribuciones: Gumbel, Lognormal y Cauchy

Iván Vega Gutiérrez

4 de octubre de 2021

1. Distribución Gumbel

La distribución de Gumbel (llamada así en honor de Emil Julius Gumbel, 1891-1966) es utilizada para modelar la distribución del máximo (o el mínimo), por lo que se usa para calcular valores extremos. Por ejemplo, sería muy útil para representar la distribución del máximo nivel de un río a partir de los datos de niveles máximos durante 10 años. Es por esto que resulta muy útil para predecir terremotos, inundaciones o cualquier otro desastre natural que pueda ocurrir.

A continuación se muestran información sobre la distribución Gumbel:

Dominio:

$$x \in (-\infty, \infty)$$

Parámetros:

$$\mu \in \mathbb{R}$$

y

$$\beta > 0$$

Función de densidad:

$$f(x; \mu, \beta) = \frac{1}{\beta} e^{\frac{x-\mu}{\beta}} e^{-e^{\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

Cuando $\mu = 0$ y $\beta = 1$, se obtiene la distribución estándar de Gumbel, cuya función de densidad es

$$f(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}}$$

Función generadora de momentos:

$$\Gamma(1 - \beta t) e^{\mu t}$$

2. Distribución Lognormal

La distribución normal logarítmica es una distribución de probabilidad continua de una variable aleatoria cuyo logaritmo está normalmente distribuido. Es decir, si X es una variable aleatoria con una distribución normal, entonces e^X tiene una distribución log-normal, es decir

$$e^X \sim \text{Lognormal}(\mu_x, \sigma_x^2)$$

Log-normal también se escribe log normal o lognormal o distribución de Tinaut.

Una variable puede ser modelada como log-normal si puede ser considerada como un producto multiplicativo de muchos pequeños factores independientes. Un ejemplo típico es un retorno a largo plazo de una inversión: puede considerarse como un producto de muchos retornos diarios.

Dominio:

$$x \in (0, \infty)$$

Parámetros

$$\mu \in \mathbb{R}$$

y

$$\sigma > 0$$

Función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\Big(- \frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \Big)$$

Esperanza:

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

Varianza:

$$Var(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$$

3. Distribución Cauchy

La distribución Cauchy-Lorentz, llamada en honor a Augustin Cauchy y Hendrik Lorentz, es una distribución de probabilidad continua. Es conocida como la distribución de Cauchy y en el ámbito de la física se conoce como la distribución de Lorentz, la función Lorentziana o la distribución de Breit-Wigner. Su importancia en la física es dada por ser la solución de la ecuación diferencial que describe la resonancia forzada. En espectroscopia describe la forma de las líneas espectrales que son ampliadas por diversos mecanismos, en particular, el mecanismo de ensanchamiento por colisión. La función de densidad es:

$$f(x; x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi\gamma\left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}$$

dode $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{R}^+$ La distribución de Cauchy es un caso particular de la distribución de Cauchy-Lorentz, cuando $x_0 = 0$ y $\gamma = 1$, así función de densidad de la distribución de Cauchy es

$$f(x; 0, 1) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

Algo interesante es que la distribución de Cauchy no tiene esperanza ni varianza.