Modelos Lineales

Iván Vega Gutiérrez

[1]Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Unidad Aguascalientes
E-mail: ivan.vega@cimat.mx

I. Production planning in a Textile Firm

Una empresa textil produce cinco tipos de telas. Cada tela se puede tejer en uno o más de los 38 telares de la fábrica. El Departamento Comercial tiene prevista la demanda para el próximo mes. Los detalles de la demanda aparecen en la Tabla 1 junto con los datos de precio de venta, costo variable y precio de compra, que son por metro y para un ancho de 140 cm. La fábrica funciona las 24 horas del día y está programada para 30 días durante el mes siguiente.

La fábrica posee dos tipos de telares: jacquard y ratier. Los telares Jacquard son más versátiles y se pueden utilizar para producir las cinco telas. Los telares Ratier producen solo tres de los cinco tipos de telas. En total, hay 38 telares: 8 jacquard y 30 ratier. La Tabla 2 indica la producción en telas de ambos tipos de telar. El tiempo necesario para cambiar de tela no es significativo y no merece la pena considerarlo.

La firma al menos debe satisfacer toda la demanda requerida, ya sea con sus propias telas o con las adquiridos de otra fábrica. Es decir, las telas que no se puedan tejer en la propia fábrica, dadas las limitaciones de capacidad del telar, se adquirirán en otra fábrica. El precio de compra de cada tela también aparece en la Tabla 1.

Construya un modelo que pueda usarse para programar la producción y que también pueda determinar cuántos metros de cada tela deben adquirirse de otra fábrica

Table 1 Monthly demand, sale price, variable cost and purchase price of fabrics

Fabric	Demand (metres)	Sale price ($/m)	Variable cost ($/m)	Purchase price ($/m)
1	16,500	3.99	2.66	2.86
2	22,000	3.86	2.55	2.70
3	62,000	4.10	2.49	2.60
4	7,500	4.24	2.51	2.70
5	62,000	3.70	2.50	2.70

Table 2 Loom speed (m/h)

Fabric	Jacquard	Ratier
1	4.63	–
2	4.63	–
3	5.23	5.23
4	5.23	5.23
5	4.17	4.17

Variables de decisión

$x_{1,j}$ = cantidad de tela en metros del tipo 1 producida por jacquard
$x_{2,j}$ = cantidad de tela en metros del tipo 2 producida por jacquard
$x_{3,j}$ = cantidad de tela en metros del tipo 3 producida por jacquard
$x_{4,j}$ = cantidad de tela en metros del tipo 4 producida por jacquard
$x_{5,j}$ = cantidad de tela en metros del tipo 5 producida por jacquard
$x_{3,r}$ = cantidad de tela en metros del tipo 3 producida por ratier
$x_{4,r}$ = cantidad de tela en metros del tipo 4 producida por ratier
$x_{5,r}$ = cantidad de tela en metros del tipo 5 producida por ratier
$x_{1,c}$ = cantidad de tela en metros comprada del tipo 1
$x_{2,c}$ = cantidad de tela en metros comprada del tipo 2
$x_{3,c}$ = cantidad de tela en metros comprada del tipo 3
$x_{4,c}$ = cantidad de tela en metros comprada del tipo 4
$x_{5,c}$ = cantidad de tela en metros comprada del tipo 5

Restricciones de demanda

$$x_{1,j} + x_{1,c} = 16,500$$

$$x_{2,j} + x_{2,c} = 22,000$$

$$x_{3,j} + x_{3,r} + x_{3,c} = 62,000$$

$$x_{4,j} + x_{4,r} + x_{4,c} = 7,500$$

$$x_{5,j} + x_{5,r} + x_{5,c} = 62,000$$

Notemos que a pesar que el enunciado dice que la firma al menos debe satisfacer toda la demanda requerida, en las restricciones aparece el signo “$=$.$^{\text{en}}$ lugar de “$\geq$ ", esto se debe a que si se usara el signo “$\geq$ "las restriciones para las variables de compra $x_{i,c}$, con $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ no estarían acotadas, lo que provocaría infactibilidad en el problema.

Restricciones de capacidad

$$\frac{x_{1,j}}{4{,}63} + \frac{x_{2,j}}{4{,}63} + \frac{x_{3,j}}{5{,}23} + \frac{x_{4,j}}{5{,}23} + \frac{x_{5,j}}{4{,}17} \leq (24)(30)(8)$$

$$\frac{x_{3,r}}{5{,}23} + \frac{x_{4,r}}{5{,}23} + \frac{x_{5,r}}{4{,}17} \leq (24)(30)(30)$$

Restricciones de no negatividad

$$x_{i,j}, x_{i,c}, x_{k,r} \geq 0$$

donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y $k = 3, 4, 5$.

Función objetivo

$$\begin{aligned} \text{Max } z = {} & (3{,}99 - 2{,}66)x_{1,j} + (3{,}86 - 2{,}55)x_{2,j} + (4{,}10 - 2{,}49)(x_{3,j} + x_{3,r}) \\ & + (4{,}24 - 2{,}51)(x_{4,j} + x_{4,r}) + (3{,}70 - 2{,}50)(x_{5,j} + x_{5,r}) \\ & + (3{,}99 - 2{,}86)x_{1,c} + (3{,}86 - 2{,}70)x_{2,c} + (4{,}10 - 2{,}60)x_{3,c} \\ & + (4{,}24 - 2{,}70)x_{4,c} + (3{,}70 - 2{,}70)x_{5,c} \end{aligned}$$

II. Portfolio of Investment

Saúl Cortés, ingeniero en Organización Industrial, desea conformar su propio portafolio de inversiones con el propósito de emplear la mínima inversión inicial posible para posteriormente generar montos específicos de capital durante los próximos seis años (el considera del año 1 al año 6). El propósito del análisis de inversiones de Saúl es planificar los gastos de su hija (Susana) cuando comience la universidad dentro de 2 años (año 3). Los requisitos financieros de Saúl se definen en la Tabla 1.

Las características de las posibles inversiones que puede elegir Saúl se detallan en la Tabla 2.

Los productos C y D involucran riesgos, por lo que Saúl no quiere invertir más del 20 % del total de la inversión en ellos.

Construya un modelo de programación lineal que ayude a Saúl a resolver de manera óptima su problema de inversiones.

Table 1 Saúl Cortés' financial requirements

Year	$
3	20,000
4	22,000
5	24,000
6	26,000

Table 2 Characteristics of the investments

Choice	Profitability (%)	Maturity (years)
A	5	1
B	13	2
C	28	3
D	40	4

Variables de decisión

Dada la madurez (en años) de cada acción, las variables de decisión, serían las siguientes:

$x_{A,1}$ = Inversión en la acción A en el año 1
$x_{A,2}$ = Inversión en la acción A en el año 2
$x_{A,3}$ = Inversión en la acción A en el año 3
$x_{A,4}$ = Inversión en la acción A en el año 4
$x_{A,5}$ = Inversión en la acción A en el año 5
$x_{B,1}$ = Inversión en la acción B en el año 1
$x_{B,2}$ = Inversión en la acción B en el año 2
$x_{B,3}$ = Inversión en la acción B en el año 3
$x_{B,4}$ = Inversión en la acción B en el año 4
$x_{C,1}$ = Inversión en la acción C en el año 1
$x_{C,2}$ = Inversión en la acción C en el año 2
$x_{C,3}$ = Inversión en la acción C en el año 3
$x_{D,1}$ = Inversión en la acción D en el año 1
$x_{D,2}$ = Inversión en la acción D en el año 2

Restricciones de capital

Para el primer año no tenemos ninguna restricción. La inversión del año 1 es la cantidad $x_{A,1} + x_{B,1} +$

$x_{C,1} + x_{D,1}$.

Para el segundo año, la única acción que ha madurado es la del tipo A, por lo tanto, la inversión en el segundo año es igual a lo que hemos generado de la acción A en el año 1.

$$x_{A,2} + x_{B,2} + x_{C,2} + x_{D,2} = 1{,}5x_{A_1}$$

Para el tercer año, tanto la acción A del año 2 ha madurado como la acción B del año 1. Además para este año Saúl requiere \$20000, en consecuencia.

$$x_{A,3} + x_{B,3} + x_{C,3} = 1{,}5x_{A,2} + 1{,}13x_{B,1} - 20000$$

Para el cuarto año, las acciones A del año 3, B del año 2 y C del año 1 ya han madurado, y para este año se necesitan \$ 22000, por consiguiente

$$x_{A,4} + x_{B,4} = 1{,}5x_{A,3} + 1{,}13x_{B,2} + 1{,}28x_{C,1} - 22000$$

Para el quinto año, las acciones A del año 4, B del año 3, C del año 2 y D del año 1 han madurado, y se requieren \$ 24000.

$$x_{A,5} = 1{,}15x_{A,4} + 1{,}13x_{B,3} + 1{,}28x_{C,2} + 1{,}40x_{D,1} - 24000$$

Por último para el año 6, las acciones A del año 5, B del año 4, C del año 3 y D del año 2 han madurado y se requiere la cantidad de \$ 26000. Por lo tanto

$$1{,}15x_{A,5} + 1{,}13x_{B,4} + 1{,}28x_{C,3} + 1{,}40x_{D,2} = 26000$$

Restricciones de riesgo

Para las restricciones de riesgo lo que se requiere es no invertir más del 20 % del total de inversión en ellos. Así para cada año veremos que esto se cumpla.

Para el año 1, tenemos que

$$x_{C_1} + x_{D,1} \leq 0{,}20(x_{A,1} + x_{B,1} + x_{C_1} + x_{D,1})$$

Para el año 2, la acción A del año 1 ya maduró, por lo que no se toma en cuenta, mientras que las acciones B, C y D del año 1 aún no han madurado, por lo tanto sí se toman en cuenta como parte de la inversión para el año 2.

$$x_{C,1} + x_{D,1} + x_{C,2} + x_{D,2} \leq 0{,}20(x_{C,1} + x_{D,1} + x_{C,2} + x_{D,2} + x_{B,1} + x_{A,2} + x_{B,2})$$

Para el año 3, la acción A del año 2 y B del año 1 ya maduraron, por lo que no se toman en cuenta, mientras que las acciones B del año 2 y C y D de los años 1 y 2 aún no han madurado, por lo tanto se toman como parte de la inversión para el año 3.

$$x_{C,1} + x_{D,1} + x_{C,2} + x_{D,2} + x_{C,3} \leq 0{,}20(x_{C,1} + x_{D,1} + x_{C,2} + x_{D,2} + x_{C,3} + x_{B,2} + x_{A,3} + x_{B,3})$$

Para el año 4, las acciones A del año 3, B del año 2 y C del año 1 ya maduraron y no se toman en cuenta para la inversión, por otro lado, tanto las acciones C del año 2 y D de los años 1 y 2 aún no maduran, por lo tanto éstas últimas si se toman en cuenta como parte de la inversión.

$$x_{D,1} + x_{C,2} + x_{D,2} + x_{C,3} \leq 0{,}20(x_{D,1} + x_{C,2} + x_{D,2} + x_{C,3} + x_{B,3} + x_{A,4} + x_{B,4})$$

Para el año 5, las acciones A del año 4, B del año 3, D del año 1 y C del año 2 ya maduraron, así que no se toman en cuenta como parte de la inversión.

$$x_{D,2} + x_{C,3} \leq 0{,}20(x_{D,2} + x_{C,3} + x_{B,4} + x_{A,5})$$

Función objetivo

$$\text{Min } z = x_{A,1} + x_{B,1} + x_{C,1} + x_{D,1}$$

III. Production Planning in a Metallurgical Company

Un fabricante de una empresa metalúrgica de Frankfurt produce cuatro tipos de productos en secuencia en dos máquinas. La Tabla 1 proporciona los detalles técnicos de la producción de este fabricante.

Construya un modelo de programación lineal que optimice la producción diaria de este fabricante.

Table 1 The production details of the metallurgical manufacturer

Production time per unit (in min)						
Machine	Cost per minute ($)	Product 1	Product 2	Product 3	Product 4	Daily production capacity (in min)
1	10	2	3	4	2	500
2	5	3	2	1	2	380
Sale price per unit ($)		65	70	55	45	

Variables de decisión
$x_{1,1}$ = cantidad del producto 1 por la maquina 1
$x_{1,2}$ = cantidad del producto 1 por la maquina 2
$x_{2,1}$ = cantidad del producto 2 por la maquina 1
$x_{2,2}$ = cantidad del producto 2 por la maquina 2
$x_{3,1}$ = cantidad del producto 3 por la maquina 1
$x_{3,2}$ = cantidad del producto 3 por la maquina 2
$x_{4,1}$ = cantidad del producto 4 por la maquina 1
$x_{4,2}$ = cantidad del producto 4 por la maquina 2
Restricciones de capacidad

$$2x_{1,1} + 3x_{2,1} + 4x_{3,1} + 2x_{4,1} \leq 500$$

$$3x_{1,2} + 2x_{2,2} + x_{3,2} + 2x_{4,2} \leq 380$$

Restricciones de no negatividad

$$x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{4,1}, x_{4,2} \geq 0$$

Función objetivo

$$\begin{aligned} \text{max } &= 65(x_{1,1} + x_{1,2}) + 70(x_{2,1} + x_{2,2}) + 55(x_{3,1} + x_{3,2}) + 45(x_{4,1} + x_{4,2}) \\ &\quad - 10(2x_{1,1} + 3x_{2,1} + 4x_{3,1} + 2x_{4,1}) - 5(3x_{1,2} + 2x_{2,2} + x_{3,2} + 2x_{4,2}) \end{aligned}$$

IV. Production Planning in a Cosmetics Firm

Una firma de Milán vende productos químicos para cosmética profesional. Esta firma está planificando la producción de tres productos, GCA, GCB y GCC, durante un período de tiempo dado, mezclando dos componentes diferentes: C1 y C2. Todos los productos finales deben contener al menos uno de los dos componentes, y no necesariamente ambos.

Para el próximo período de planificación, están disponibles 10,000 litros de C1 y 15,000 litros de C2. La producción de GCA, GCB y GCC debe programarse para cubrir al menos el nivel mínimo de demanda de 6,000, 7,000 y 9,000 litros, respectivamente. Se supone que cuando se mezclan componentes químicos, no hay pérdida ni ganancia de volumen.

Cada componente químico, C1 y C2, tiene un elemento crítico proporcional, 0.4 y 0.2, respectivamente. Es decir, cada litro de C1 contiene 0.4 litros del elemento crítico. Para obtener GCA, la mezcla debe contener proporcionalmente al menos una fracción de 0.3 del elemento crítico. Otro requisito es que la cantidad del elemento crítico en GCB debe ser una fracción de 0.3 como máximo. Además, la relación mínima de C1 con C2 en el producto GCC debe ser 0.3.

El beneficio esperado por la venta de cada litro de GCA, GCB y GCC es \$125, \$135 y \$155, respectivamente.

Construya un modelo de programación lineal que optimice la planificación de la producción de esta firma en Milán.

Variables de decisión

$x_{1,1}$ = cantidad del componente C1 en el producto GCA.
$x_{1,2}$ = cantidad del componente C1 en el producto GCB.
$x_{1,3}$ = cantidad del componente C1 en el producto GCC.
$x_{2,1}$ = cantidad del componente C2 en el producto GCA.
$x_{2,2}$ = cantidad del componente C2 en el producto GCB.
$x_{2,3}$ = cantidad del componente C2 en el producto GCC.

Restricciones de disponibilidad

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} \leq 10,000.$$

$$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} \leq 15,000.$$

Restricciones de demanda

$$x_{1,1} + x_{2,1} \geq 6,000$$

$$x_{1,2} + x_{2,2} \geq 7,000$$

$$x_{1,3} + x_{2,3} \geq 9,000$$

Restricciones del elemento crítico

$$0{,}4x_{1,1} + 0{,}2x_{2,1} \geq 0{,}3(x_{1,1} + x_{2,1})$$

$$0{,}4x_{1,2} + 0{,}2x_{2,2} \leq 0{,}3(x_{1,2} + x_{2,2})$$

$$x_{1,3} \geq 0{,}3x_{2,3}$$

Restricciones de no negatividad

$$x_{i,j} \geq 0$$

con $i = \{1, 2\}$ y $j = \{1, 2, 3\}$.

Función Objetivo

$$\text{Max } z = 125(x_{1,1} + x_{2,1}) + 135(x_{1,2} + x_{2,2}) + 155(x_{1,3} + x_{2,3})$$

V. Production Planning in the Automobile Industry

Una planta de ensamblaje de automóviles ensambla dos tipos de vehículos: un sedán de cuatro puertas y una minivan. Ambos tipos de vehículos deben pasar por una planta de pintura y una planta de ensamblaje. Si la planta de pintura solo pinta sedán de cuatro puertas, puede pintar unos 2,000 vehículos cada día, mientras que si pinta solo minivan, puede pintar unos 1,500 vehículos cada día. Además, si la planta de ensamblaje solo ensambla sedan de cuatro puertas o minivan, puede ensamblar unos 2,200 vehículos cada día. Cada minivan implica una ganancia promedio de $ 3,000, mientras que un sedán de cuatro puertas implica una ganancia promedio de $2,100.

Utilice programación lineal para indicar el plan de producción diaria que maximice el beneficio diario de la planta de ensamblaje.

Variables de decisión

x_1 = Cantidad de vehículos producidos diariamente del tipo sedán de cuatro puertas
x_2 = Cantidad de vehículos producidos diariamente del tipo minivan

Restricciones de pintura

$$\frac{x_1}{2000} + \frac{x_2}{1500} \leq 1$$

Restricciones de ensamblaje

$$x_1 + x_2 \leq 2,200$$

Restricciones de no negatividad

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Función objetivo

$$\text{Max } z = 2,100x_1 + 3,000x_2$$

VI. Portfolio of Investments

ORGASA cuenta con un portafolio de inversiones en acciones, bonos y otras alternativas de inversión. Ahora tiene fondos disponibles que ascienden a $200,000 que deben ser considerados para nuevas inversiones. Las cuatro alternativas de inversión que contempla ORGASA se muestran en la Tabla 1.

La medida de riesgo indica la incertidumbre asociada a la acción en términos de su capacidad para alcanzar la rentabilidad anual prevista; cuanto mayor sea el valor, mayor será el riesgo.

ORGASA ha estipulado las siguientes condiciones para su inversión:

- Regla 1:La tasa de rendimiento anual de este portafolio debe ser al menos del 9 %.
- Regla 2: Ningún valor puede representar más del 50 % de la inversión total en dólares.

1. Utilice un modelo de programación lineal para elaborar un portafolio de inversiones que minimice el riesgo.

2. Si la empresa ignora el riesgo involucrado y utiliza una estrategia de rendimiento máximo de su inversión, ¿cómo se modificará el modelo anterior?

Tabla 1	Información de las inversiones			
Detalles financieros	Telefónita	Sankander	Ferrofial	Gamefa
Precio por acción ($)	100	50	80	40
Tasa de rendimiento anual	0.12	0.08	0.06	0.10
Medida de riesgo por $ invertido	0.10	0.07	0.05	0.08

VI.1. Solución

1. **Variables de decisión**
x_1 = número de acciones en Telefónita.
x_2 = número de acciones en Sankander.
x_3 = número de acciones en Ferrofial.
x_4 = número de acciones en Gamefa.
Restricciones
Para la regla 1, se tiene que la tasa de retorno anual del portafolio debe ser de al menos el $9\,\%(\$18,000)$ de la inversión total. Para cada acción tenemos que la tasa de retorno anual está determinada por $t_i c_i x_i$ donde t_i y c_i representan la tasa de retorno anual y el costo de la acción asociada a x_i, respectivamente, para $i = 1, 2, 3, 4$. En consecuencia, se tiene que

$$12x_1 + 4x_2 + 4{,}8x_3 + 4x_4 \geq 18,000$$

Para la regla 2, tenemos que el valor de cada acción no puede exceder el $50\,\%$ de la inversión total, es decir

$$c_i x_i \leq 100,00$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.
Asimismo, la inversión total es de $\$200,000$, por tanto se debe de cumplir

$$100x_1 + 50x_2 + 80x_3 + 40x_4 \leq 200,000$$

Por último, se deben de cumplir las funciones de no negatividad

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Función objetivo

$$\text{Min } z = 10x_1 + 3{,}5x_2 + 4x_3 + 3{,}2x_4$$

2. Para este caso, se pretende ignorar el riesgo y maximizar el retorno de inversión anual. Las variables de decisión son las mismas que para el iniciso anterior, lo mismo pasa con las restricciones, ya que las reglas 1 y 2 no involucran la medida de riesgo. La única diferencia con el inciso anterior es la función objetivo.
Función objetivo

$$\text{Max } z = 12x_1 + 4x_2 + 4{,}8x_3 + 4x_4$$

VII. Investment Funds

Un pequeño inversor tiene \$12,000 para invertir y tres fondos diferentes para elegir. Los fondos de inversión garantizados ofrecen una tasa de retorno esperada de 7 %, los fondos mixtos (parte es capital garantizado) tienen una tasa de retorno esperada de 8 %, mientras que una inversión en la Bolsa de Valores implica una tasa de retorno esperada de 12 %, pero sin capital de inversión garantizado. Para minimizar el riesgo, el inversionista ha decidido no invertir más de \$2,000 en la Bolsa de Valores. Además, por motivos fiscales, el inversor debe invertir al menos tres veces más en fondos de inversión garantizados que en fondos mixtos. Supongamos que al final del año los rendimientos son los esperados ¿Cuáles son los montos óptimos de inversión?

1. Considere este problema como si fuera modelo de programación lineal con dos variables de decisión.

2. Resuelva el problemea mediante el método gráfico e indique la solución óptima.

VII.1. Solución

1. **Variables de decisión**
   x_1 = Inversión en fondos con Garantía.
   x_2 = Inversión en fondos Mixtos.
   x_3 = Inversión en fondos en Stock Exchange.

   Como se desea tener un modelo de un programa lineal con solo dos variables de decisión, y las restricciones están ligadas a bonos mixtos y bonos garantizados, podemos relacionar los fondos en Stock Exchange como el capital que nos queda después de invertir en fondos garantizados y mixtos, es decir

   $$x_3 = 12,000 - x_1 - x_2$$

   Restricciones

   $$x_3 \leq 2,000$$

   o bien

   $$10,000 \leq x_1 + x_2$$

   $$3x_2 \leq x_1$$

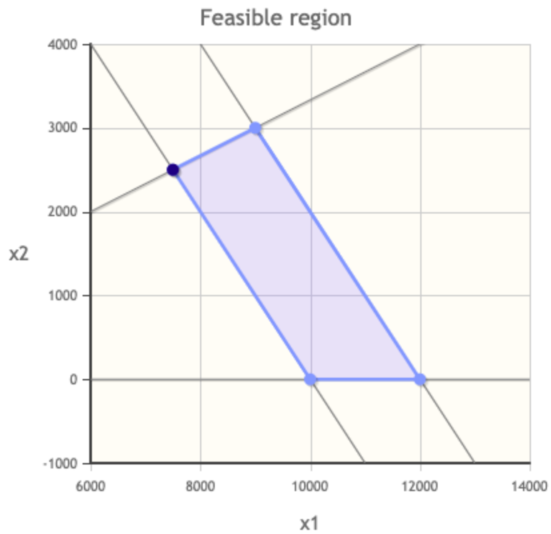
   $$x_1 + x_2 \leq 12,000$$

   $$x_1, x_2 \geq 0$$

   Función objetivo

   $$\max z = 0{,}07x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}12(12,000 - x_1 - x_2)$$

2. A continuación se muestra la solución del problema usando el método gráfico.



Observamos que la solución óptima se encuentra cuando $x_1 = 7500$ y $x_2 = 2500$ y así la inversión alcanza un valor de retorno de $965.

VIII. Renting Warehouses

Una empresa se ha dado cuenta que no tendrá suficiente espacio de almacenamiento durante los próximos tres meses. Los detalles de los requisitos de almacenamiento adicionales para los próximos 3 meses se proporcionan en la Tabla 1.

Para cubrir sus necesidades, la firma planea alquilar espacio adicional a corto plazo. Al comienzo de cada mes, la empresa puede alquilar cualquier cantidad de espacio durante cualquier cantidad de meses. Puede pagar alquileres separados de diferentes cantidades de espacio y/o durante diferentes períodos de tiempo. Por ejemplo, durante el primer mes podría alquilar 20,000 m^2 durante 2 meses y alquilar 5,000 m^2 por separado durante 1 mes. También podría adquirir nuevos espacios alquilados antes de que expiren los anteriores. Los costos por 1,000 m^2 de espacio alquilado de acuerdo con la duración se proporcionan en la Tabla 2.

Construya un modelo de programación lineal cuya solución proporcione una política de alquiler que cubra los requisitos de espacio a un costo mínimo.

Table 1 Additional storage space requirements

Month	January	February	March
Space required (1,000 m^2)	25	10	20

Table 2 Rent costs

Rent duration	1 month	2 months	3 months
Cost ($ per 1,000 m^2)	280	450	600

Variables de decisión

$x_{e,1}$ = cantidad de espacio rentando en el mes de enero por 1 mes
$x_{e,2}$ = cantidad de espacio rentando en el mes de enero por 2 meses
$x_{e,3}$ = cantidad de espacio rentando en el mes de enero por 3 meses
$x_{f,1}$ = cantidad de espacio rentando en el mes de febrero por 1 mes
$x_{f,2}$ = cantidad de espacio rentando en el mes de febrero por 2 meses
$x_{m,1}$ = cantidad de espacio rentando en el mes de marzo por 1 mes

Restricciones

$$x_{e,1} + x_{e,2} + x_{e,3} \geq 25$$

$$x_{e,2} + x_{e,3} + x_{f,1} + x_{f,2} \geq 10$$

$$x_{e,3} + x_{f,2} + x_{m,1} \geq 20$$

$$x_{e,1}, x_{e,2}, x_{e,3}, x_{f,1}, x_{f,2}, x_{m,1} \geq 0$$

Función objetivo

$$\text{Min } z = 280(x_{e,1} + x_{f,1} + x_{m,1}) + 450(x_{e,2} + x_{f,2}) + 600x_{e,3}$$

IX. Production Planning of a Wires Manufacturer

Una empresa de Valencia fabrica alambres de aluminio y cobre. Cada kg de alambre de aluminio requiere 5 kWh de electricidad y 0.25 h de mano de obra. Cada kg de alambre de cobre requiere 2 kWh de electricidad y 0.5 h de mano de obra. La producción de alambre de cobre estaría restringida por el hecho de que la cantidad de materias primas disponibles permite una producción máxima de 60 kg/día. La electricidad está limitada a 500 kWh/día y la mano de obra a 40 h/día. La utilidad del alambre de aluminio es de $0.25/ kg, mientras que la utilidad del alambre de cobre es de $0.4/kg. ¿Qué cantidad de cada cable debería producirse para maximizar la ganancia y cuál sería la ganancia?

Variables de decisión

$x_1 =$ Cantidad en kg de producción de alambre de aluminio.
$x_2 =$ Cantidad en kg de producción de alambre de cobre.
Restricciones

$$x_2 \leq 60$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 500$$

$$0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Función objetivo

$$\text{max } = 0{,}25x_1 + 0{,}4x_2$$

X. Mixed Investments

La firma Inversiones Internacionales, S.A.U. tiene hasta 5 millones $ disponibles para invertir en seis posibles inversiones. La Tabla 1 muestra las características de cada inversión.

Por su experiencia en este tipo de inversiones, la firma sabe que no se recomienda invertir más del 25 % de la inversión total en ninguna de estas opciones de inversión. Además, es necesario invertir al menos un 30 % en metales preciosos y al menos un 45 % entre créditos comerciales y bonos corporativos. Finalmente, se requiere un límite de riesgo general de no más de 2.0.

Table 1 Profitability and risk of each investment option

Investments	Profitability (%)	Risk
Trade credits	7	1.7
Corporate bonds	10	1.2
Stocks of gold	19	3.7
Stocks of platinum	12	2.4
Mortgage bonds	8	2.0
Building loans	14	2.9

Variables de decisión
$x_1 =$ Cantidad de dólares invertidos en Trade credits
$x_2 =$ Cantidad de dólares invertidos en Corporate bonds.
$x_3 =$ Cantidad de dólares invertidos en Stocks of gold.
$x_4 =$ Cantidad de dólares invertidos en Stocks of platinum.
$x_5 =$ Cantidad de dólares invertidos en Mortgage bonds.
$x_6 =$ Cantidad de dólares invertidos en Building loans.
Restricciones

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 5,000,000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \leq 0{,}25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$
$$x_3 + x_4 \geq 0{,}3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$
$$x_1 + x_3 \geq 0{,}45(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$
$$1{,}7x_1 + 1{,}2x_2 + 3{,}7x_3 + 2{,}4x_4 + 2x_5 + 2{,}9x_6 \leq 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Función objetivo

$$\max z = 0{,}07x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}19x_3 + 0{,}12x_4 + 0{,}08x_5 + 0{,}14x_6$$

XI. Transport Planning in a Olive Production Firm

Una firma de Jaén cuenta con tres plantas productivas ubicadas en Jaén, Sevilla y Almería. Las capacidades de producción en kg estimadas para los próximos tres meses se proporcionan en la Tabla 1.

La firma distribuye aceitunas a través de cuatro centros regionales de distribución ubicados en Valencia, Madrid, Barcelona y La Coruña. La demanda prevista de estos centros de distribución para los próximos tres meses se muestra en la Tabla 2.

La gerencia de la empresa desea determinar qué cantidad de su producción debe enviarse desde cada planta a cada centro de distribución. El costo unitario en dólares por kg enviado por cada ruta se muestra en la Tabla 3.

- Construya un modelo de programación lineal que ayuda a la firma en la toma de decisiones.
- Por razones estratégicas, la firma ha adoptado las siguientes políticas para su planificación de transporte:
  - Al menos 60 % de la producción total de Jaén debe ser enviada a Valencia.
  - Los envíos de Sevilla a Valencia deberán tener un costo fijo de $ 200.

- Solo Sevilla o Almería pueden hacer envíos a La Coruña, pero no ambos.

Table 1 The forecasted production capacities in each plant

Plant	Production capacity (kg)
Jaén	5,000
Seville	6,000
Almería	2,500

Table 2 Forecasted demand in each distribution centre

Distribution centre	Demand (kg)
Valencia	6,000
Madrid	4,000
Barcelona	2,000
La Coruña	1,500

Table 3 Transport costs between plants and distribution centres ($)

Origin/Destination	Valencia	Madrid	Barcelona	La Coruña
Jaén	30	20	70	60
Seville	70	50	20	30
Almería	20	50	40	50

Variables de decisión

$x_{i,j} =$ Cantidad de aceitunas en kg producidas por i y enviadas a j.
Donde
i={ Jaén(J), Seville(S), Almería(A)}
j={Valencia(V), Madrid(M), Barcelona(B), La Coruña(C) }

Restricciones

Restricciones en la producción:

$$x_J = \sum_j x_{J,j} \leq 5,000$$

$$x_S = \sum_j x_{S,j} \leq 6,000$$

$$x_A = \sum_j x_{A,j} \leq 2,500$$

Restricciones en la demanda:

$$x_V = \sum_i x_{i,V} \geq 6,000$$

$$x_M = \sum_i x_{i,M} \geq 4,000$$

$$x_B = \sum_i x_{i,B} \geq 2,000$$

$$x_C = \sum_i x_{i,C} \geq 1,500$$

Restricciones de no negatividad:

$$x_{i,j} \geq 0$$

para todo i, j.
Función objetivo

$$\begin{aligned}\text{min } z = &\ 30x_{J,V} + 20x_{J,M} + 70x_{J,B} + 60x_{J,C}\\ &+ 70x_{S,V} + 50x_{S,M} + 20x_{S,B} + 30x_{S,C}\\ &+ 20x_{A,V} + 50x_{A,M} + 40x_{A,B} + 50x_{A,C}\end{aligned}$$

Cuando la empresa decide adoptar otras políticas, el programa lineal es el siguiente.
Variables de decisión
Las variables de decisión son las mismas.
Restricciones
Primera clausula:

$$0{,}6x_J \leq x_{J,V}$$

Para la segunda clausula, el cambio se vería reflejado en la función objetivo, ya que el costo de transporte de Sevilla a Valencia cambiaría a $200.
Para la última clausula, se define la variable binaria d y se tendría la siguiente condición

$$x_{S,C} + x_{A,C} \leq 1$$

XII. Programming Weekly Production in a Metallurigcal Company

La firma de productos industriales PRODA, S.A. tiene que enfrentar pel problema de programar la producción semanal de sus tres productos (P1, P2 y P3). Estos productos se venden a grandes empresas industriales y PRODA, S.A. desea suministrar sus productos en cantidades que le resulten más rentables.

Cada producto conlleva tres operaciones: fundición; mecanización; montaje y embalaje. Las operaciones de fundición para los productos P1 y P2 podrían subcontratarse, pero la operación de fundición para el producto P3 requiere equipo especial, evitando así el uso de subcontratos. Los costos directos de las tres operaciones y los precios de venta de los respectivos productos se muestran en la Tabla 1.

Cada unidad de producto P1 requiere 6 minutos de tiempo de fundición (si se realiza en PRODA, S.A.), 6 minutos de mecanización y 3 minutos de montaje y envasado, respectivamente. Para el producto P2, los tiempos son 10, 3 y 2 minutos, respectivamente. Una unidad de producto P3 necesita 8 minutos de tiempo de fundición, 8 minutos de mecanización y 2 minutos de montaje y embalaje.

PRODA, S.A. tiene capacidades semanales de 8,000 minutos de tiempo de fundición, 12,000 minutos de mecanización y 10,000 minutos de montaje y embalaje.

Construya un modelo de programación lineal el cual maximice los beneficios semanales de PRODA, S.A.

Table 1 Cost of operations and sale prices in dollars

Direct costs and sale prices ($)	P1	P2	P3
Cost of smelting at PRODA, S.A.	0.30	0.50	0.40
Cost of subcontracted smelting	0.50	0.60	–
Cost of mechanisation	0.20	0.10	0.27
Cost of assembly and packaging	0.30	0.20	0.20
Sale price	1.50	1.80	1.97

Variables de decisión

x_1 = unidades del producto P1 con fundición realizada en PRODA, S.A. x_2 = unidades del producto P1 con fundición subcontratada. x_3 = unidades del producto P2 con fundición realizada en PRODA, S.A. x_4 = unidades del producto P1 con fundición subcontratada. x_5 = unidades de producto P3.

Función objetivo

$$\max z = 0{,}7x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 + 0{,}9x_4 + 1{,}1x_5$$

Restricciones Capacidad de fundición

$$6x_1 + 10x_3 + 8x_5 \leq 8000$$

Capacidad de mecanización

$$6x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 \leq 12000$$

Capacidad de montaje y embalaje

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 10000$$

No negatividad

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

XIII. Crop Planning

Una empresa de cítricos de Valencia posee 120 acres (1 acre = 4.074 m^2) y planea sembrar al menos tres cultivos. Las semillas para los cultivos A, B y C cuestan \$40, \$20 y \$30 por acre, respectivamente. La empresa tiene la intención de invertir un máximo de \$3,400 en semillas. Las semillas A, B y C requieren 1, 2 y 1 días laborables por acre, respectivamente, y se consideran 170 días laborables disponibles. Si el propietario puede obtener una ganancia de \$100 por acre con la semilla A, \$300 por acre con la semilla B y \$200 por acre con la semilla C, ¿Cuántos acres debería sembrar el propietario de cada semilla para maximizar la ganancia?

Modele el problema como un modelo de programación lineal.

Variables de decisión

x_A = Acres con la semilla A
x_B = Acres con la semilla B
x_C = Acres con la semilla C

Función objetivo

$$\max \ = 100x_A + 300x_B + 200x_C$$

Restricciones

$$x_A + 2x_B + x_C \leq 170$$

$$x_A + x_B + x_C \leq 120$$

$$40x_A + 20x_B 30x_C \leq 3400$$

$$x_A, x_B, x_C \geq 0$$