Sigma álgebra de Borel y el coeficiente multinomial

Iván Vega Gutiérrez

25 de agosto de 2021

1. Sigma álgebra de Borel

La sigma álgebra de Borel o σ-álgebra de Borel, es una sigma álgebra muy famosa, el nombre se debe al mátematico Émile Borel, quien en 1898 expuso por primera vez el álgebra boreliana de los números reales. La sigma álgebra de Borel se puede construir de diferentes maneras. A continuación se da una definición simple pero útil para representar de una forma clara este interesante concepto.

Definición 1 *Consideremos la clase $\mathscr{O}$ que reúne todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$(con la topología usual). La **σ-álgebra de Borel en** $\mathbb{R}$ se define como la σ-álgebra generada por $\mathscr{O}$, y se denota por $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Esto es $\sigma(\mathscr{O}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Los subconjuntos que pertenecen a $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ son llamados conjuntos de Borel o simplemente borelianos.*

Para entender mejor la definición se citan algunos conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$.

1. Es claro que $(a, b) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ con $a, b \in \mathbb{R}$, justamente porque cualquier intervalo abierto pertenece a la clase $\mathscr{O}$.
2. De igual forma al ser $(-\infty, a)$ y (b, ∞) subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, también pertenecerán a la sigma álgebra de Borel.
3. Notemos que si $(-\infty, a)$ y (b, ∞) pertenecen a la sigma álgebra de Borel, por definición deben de pertenecer sus complementos, por lo tanto $[a, \infty), (-\infty, b] \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$
4. Observemos que para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se tiene que $[a, b] = ((-\infty, a) \cup (b, \infty))^c$, por lo tanto $[a, b] \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
5. Los intervalos de la forma $[a, b)$ y $(a, b]$ también pertenecen a la sigma álgebra de Borel.

$$[a, b) = [a, \infty) \cap (-\infty, b) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

$$(a, b] = (-\infty, b] \cap (a, \infty) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

6. Si $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ también está en la sigma álgebra de Borel. En efecto

$$\{x\} = [x, \infty) \cap (-\infty, x].$$

Por lo tanto $\{x\} \in \mathbb{R}$.

7. Algo interesantes es que el conjunto de los números racionales es un elemento de la sigma álgebra de Borel, justamente se sigue del hecho de que $\{x\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$$

Más aún, todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ es un boreliano, en particular $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ también son borelianos.

8. Por último observemos que $\mathbb{I}$ también es boreliano, esto por el hecho que $\mathbb{I} = \mathbb{Q}^c$.

Al mostrar algunos borelianos, nos queda más claro el porque la sigma álgebra de Borel es tan interesante, y la definición se puede abordar desde distintos enfoques, algo que también se debe de aclarar es que siguiendo la misma lógica de los borelianos expuestos es razonable pensar que cualquier subcojunto de los reales es un boreliano, sin embargo eso no es cierto, ya que existen tantos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no pertenecen a $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ como elementos de la recta real.

2. Coeficiente mutinomial

Se consideran n objetos no necesariamente distintos unos de otros, es decir, los n objetos están distribuidos en distintas clases, supongamos que tenemos k_1 objetos de un primer tipo, k_2 objetos de un segundo tipo y así sucesivamente, hasta k_m objetos del tipo m, en consecuencia $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. Estos n objetos pueden todos ordenarse uno detrás de otro de tantas formas distintas como indica el llamado coeficiente multinomial

$$\binom{n}{k_1 k_2 \cdots k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$$

Para verificar que es cierto, empecemos por analizar el experimento. Al inicio tenemo n objetos, de esos n objetos extraemos k_1 objetos, por tanto nos quedan $n - k_1$ objetos y de esos $n - k_1$ objetos extraemos k_2 objetos, posteriormente extraemos k_3 objetos de los $n - k_1 - k_2$ objetos restantes, siguiendo esta lógica, al final nos quedaría extraer k_m objetos de los $n - k_1 - k_2 \cdots - k_{m-1}$ objetos restantes, es decir

$$\binom{n}{k_1 k_2 \cdots k_m} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-k_2-\cdots-k_{m-1}}{k_m}$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
&\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-k_2-\cdots-k_{m-1}}{k_m}\\
&=\left(\frac{n!}{(n-k_1)!k_1!}\right)\left(\frac{(n-k_1)!}{(n-k_1-k_2)!k_2!}\right)\left(\frac{(n-k_1-k_2)!}{(n-k_1-k_2-k_3)!k_3!}\right)\cdots\\
&\cdots\left(\frac{(n-k_1-\cdots-k_{m-2})!}{(n-\cdots-k_{m-2}-k_{m-1})!k_{m-1}!}\right)\left(\frac{(n-\cdots-k_{m-2}-k_{m-1})!}{(n-k_1-\cdots-k_{m-1}-k_m)!k_m!}\right)\\
&=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}
\end{aligned}
$$