Función de probabilidad (Caso discreto)

Iván Vega Gutiérrez

13 de septiembre de 2021

Ejercicio. Compruebe que la siguiente función es de probabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2^x} & \text{si} \quad x = 1, 2, \cdots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Veamos que $f(x)$ es una función de probabilidad.

1. $f(x) \geq 0$; para toda x.
   Sea x un elemento del recorrido de la funcón f. Notemos que $x - 1 \geq 0$ y $2^x > 0$, para todo x, luego $\frac{x-1}{2^x} \geq 0$. Por lo tanto, $f(x) \geq 0$.

2. $\sum_{j=1}^{\infty} f(x_j) = 1$.

   Primero, enunciemos la siguiente proposición sobre una serie geométrica.

   Proposición 1. Si $a, r \in \mathbb{R}$ y $|r| < 1$, entonces

   $$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}.$$

   Ahora, observemos que

   $$\sum_{j=1}^{\infty} f(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x-1}{2^x} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x}{2^x} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^x}$$

   Denotemos con $S_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x}{2^x}$ y $S_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^x}$. Notemos que por la proposición 1, tenemos que

   $$S_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1 \tag{1}$$

   Por otro lado, notemos que

   $$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}S_1 = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}} + \cdots \tag{3}$$

Restando (2) y (3), se tiene que

$$\frac{1}{2}S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Luego, por la proposición 1

$$S_1 = 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = 2(2-1) = 2$$

Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(x_j) = S_1 - S_2 = 2 - 1 = 1$$

Con todo lo anterior, concluimos que $f(x)$ es una función de probabilidad.