Modelación Numérica II
Tarea III

Iván Vega Gutiérrez

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Unidad Aguascalientes
E-mail: ivan.vega@cimat.mx

I. Plano fase

Determine el tipo y estabilidad o punto crítico de los siguientes sistemas. Para todos los ejercicios, el único punto de equilibrio de cada sistema es el origen.

Ejercicio 1

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} x \tag{1}$$

Solución El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= (2-\lambda)(-10-\lambda) + 35 \\ &= \lambda^2 + 8\lambda + 15 \\ &= (\lambda+3)(\lambda+5) \end{aligned}$$

Por tanto, los valores característicos de A son $\lambda = -3$ y $\lambda = -5$. Ahora, hallemos los vectores característicos.

i) Para $\lambda = -3$, buscamos un vector v^1 no nulo tal que

$$(A+3I)v^1 = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí que, $5v_1 = -7v_2$, si $v_2 = 5$, entonces un vector característico con valor característico igual a -3 es

$$v^1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ii) Para $\lambda = -5$, buscamos un vector v^2 no nulo tal que

$$(A+5I)v^1 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí que, $v_1 = -v_2$, entonces un vector característico con valor característico igual a -5 es

$$v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así, la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Observemos que $x(t) \to (0,0)$ cuando $t \to \infty$, es decir, la solución tiende al punto crítico $(0,0)$ conforme incrementa el tiempo. Más aún, los vectores v^1 y v^2 indican la dirección de las soluciones. Notemos que $|e^{-5t}v^2| < |e^{-3t}v^1|$ cuando t es grande, por tanto, la solución se acercará con mayor intensidad al vector v^1 que al vector v^2. En la figura (1) se observa el plano fase del sistema (1) y se reafirman las ideas planteadas. Por lo tanto, el punto de equilibrio es un nodo asintóticamente estable.

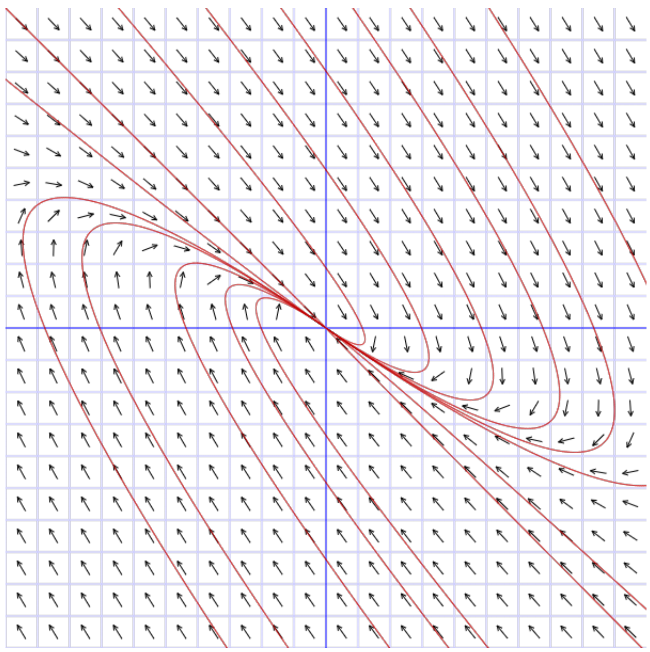

Figura 1: Plano fase del Ejercicio 1 Nodo asintóticamente estable

Ejercicio 2

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} x \tag{2}$$

Solución El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= (-3-\lambda)(3-\lambda) + 18 \\ &= -(3+\lambda)(3-\lambda) + 18 \\ &= \lambda^2 - 9 + 18 \\ &= \lambda^2 + 9 \end{aligned}$$

Por tanto, los valores característicos de A son $\lambda = \pm 3i$. Tomando $\lambda = 3i$, buscamos un vector v no nulo tal que

$$(A-(3i)I)v = \begin{pmatrix} -3-3i & 6 \\ -3 & 3-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí que, $-3v_1 + (3-3i)v_2 = 0$, luego $v_1 = (1-i)v_2$, si $v_2 = 1$ entonces un vector característico con valor característico igual a 3i es

$$v = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned} e^{3it}\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} &= [\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t]\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 3t \\ 0 \end{pmatrix} + i\left[\begin{pmatrix} \operatorname{sen} 3t \\ \operatorname{sen} 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 3t \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \cos 3t + \operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \operatorname{sen} 3t - \cos 3t \\ \operatorname{sen} 3t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general es

$$x(t) = c_1\begin{pmatrix} \cos 3t + \operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \operatorname{sen} 3t - \cos 3t \\ \operatorname{sen} 3t \end{pmatrix}$$

Notemos que la solución está en términos de las funciones seno y coseno, por lo tanto, las soluciones son funciones periódicas, con periodo $\frac{2\pi}{3}$. En consecuencia, la órbita de cualquier solución $x(t)$ de (2) es un curva cerrada con centro en el origen (nuestro único punto de equilibrio). Por otro lado para saber la dirección en la que se mueven estas curvas, hacemos lo siguiente:
De (2) suponemos que $x_2 = 0$, por lo tanto tenemos que

$$-3x_1 = x_1' \quad \text{y} \quad -3x_1 = x_2'$$

De aquí, notemos que si $x_1 > 0$ entonces $x_2' < 0$, la interpretación es que nos movemos hacia la derecha y luego hacia abajo, es decir, el sentido de las curvas cerradas es en sentido de las manecillas del reloj, tal como se observa en la figura(2), en este caso el punto de equilibrio se denomina centro.

Ejercicio 3

$$x' = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} x \tag{3}$$

Solución El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 8-\lambda & -4 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (8-\lambda)(4-\lambda) + 4 \\ &= 32 - 8\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 4 \\ &= \lambda^2 - 12\lambda + 36 \\ &= (\lambda - 6)^2 \end{aligned}$$

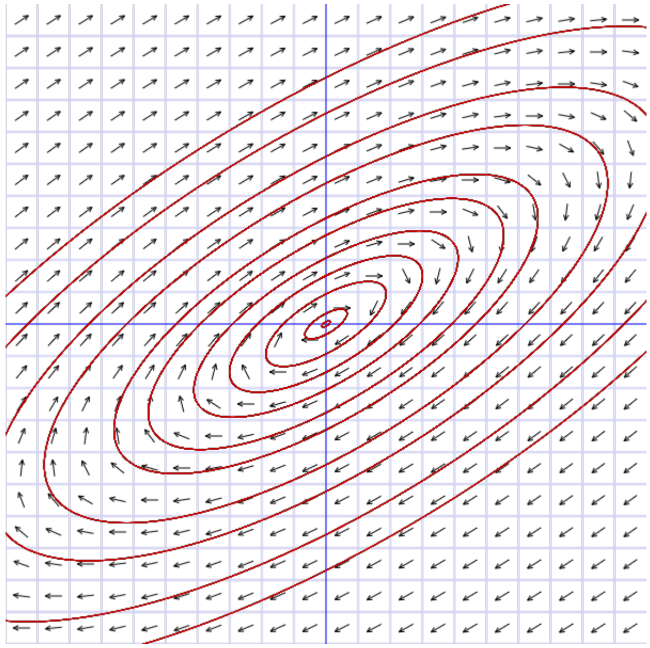

Figura 2: Plano fase del Ejercicio 2 Centro

Por tanto, el único característico de A es $\lambda = 6$ con multiplicidad dos.

Buscamos un vector v no nulo tal que

$$(A - 6I)v = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica que $v_1 = 2v_2$. Luego,

$$v^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$x^1(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es una solución de (3), nos faltaría hallar una solución adicional para poder tener la solución general del sistema. Dado que A únicamente tiene un vector característico con valor característico 6, se buscan todas las soluciones

$$(A - 6I)^2 v = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Claramente cualquier vector v cumple con la igualdad anterior, en particular proponemos

$$v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que,

$$(A - 6I)v^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$x^2(t) = e^{At}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = e^{6t}[v^2 + t(A-6I)v^2] = e^{6t}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right] = e^{6t}\begin{pmatrix}1+2t\\t\end{pmatrix}$$

Así, la solución general es

$$x(t) = c_1e^{6t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + c_2e^{6t}\begin{pmatrix}1+2t\\t\end{pmatrix} = e^{6t}\left[c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + tc_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]$$

Luego,

$$x(t) = e^{6t}\left[c_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (c_1+tc_2)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]$$

Por tanto, a partir de la solución general se tiene que $x(t)\to\infty$ cuando $t\to\infty$, es decir, conforme el tiempo incremente la solución se alejará del origen. Además, notemos que $c_1v^1+c_2v^2 < tc_2v^1$ cuando t es grande, en consecuencia, para las trayectorias que no están sobre el vector $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ el comportamiento de sus tangentes tienden a al vector $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, tal como se muestra en la figura (3). El punto de equilibrio es un nodo impropio inestable.

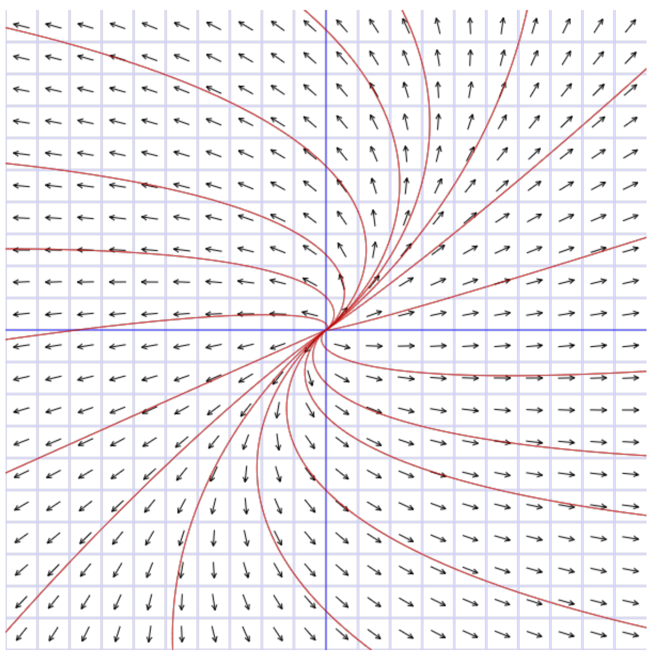

Figura 3: Plano fase del Ejercicio 3 Nodo impropio inestable

Ejercicio 4

$$x' = \begin{pmatrix}6 & 8\\2 & 6\end{pmatrix}x \tag{4}$$

Solución El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix}6 & 8\\2 & 6\end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 8 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (6-\lambda)^2 - 16 \\ &= \lambda^2 - 12\lambda + 36 - 16 \\ &= (\lambda - 10)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Por tanto, los valores característicos de A son $\lambda = 10$ y $\lambda = 2$.

i) Para $\lambda = 10$, buscamos un vector v^1 no nulo tal que

$$(A - 10I)v^1 = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí que, $v_1 = 2v_2$, si $v_2 = 1$, entonces un vector característico con valor característico igual a 10 es

$$v^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) Para $\lambda = 2$, buscamos un vector v^2 no nulo tal que

$$(A - 2I)v^1 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí que, $v_1 = -2v_2$, entonces un vector característico con valor característico igual a 2 es

$$v^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{10t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que $x(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$ si $c_1, c_2 > 0$, por otro lado, $x(t) \to (0,0)$ si $t \to -\infty$, es decir, la solución tiende a alejarse del punto crítico $(0,0)$ conforme incrementa el tiempo. Más aún, los vectores v^1 y v^2 indican la dirección de las soluciones. Notemos que $|e^{2t}v^2| < |e^{10t}v^1|$ cuando t es grande, por tanto, la solución se acercará con mayor intensidad al vector v^2 que al vector v^1. En la figura (4) se observa el plano fase del sistema (4) y se reafirman las ideas planteadas. Por lo tanto, el punto de equilibrio es un nodo inestable.

Ejercicio 5

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

Solución El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)^2 + 1 \end{aligned}$$

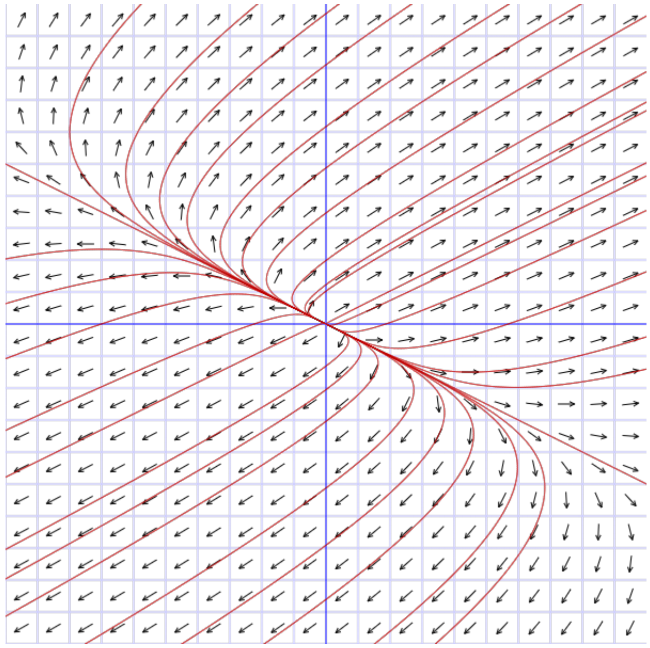

Figura 4: Plano fase del Ejercicio 4 Nodo inestable

Luego, cuando $p(\lambda) = 0$, se tiene que $-1 - \lambda = \pm i$, en consecuencia los valores propios de A son $\lambda = -1 \pm i$. Tomando $\lambda = -1 + i$, buscamos un vector v no nulo tal que

$$(A - (-1+i)I)v = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica que $v_2 = -iv_1$, en consecuencia

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned} e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} =& e^{-t}[\cos t + i \operatorname{sen} t] \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{-t} \left[\begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + i \left[\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos t \end{pmatrix} \right] \right] \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + ie^{-t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

Observemos, que la solución está en términos de senos y cosenos, y de la función exponencial, si la solución estuviera únicamente en términos de senos y cosenos tendríamos una función periódica y en consecuencia las trayectorias serían curvas cerradas, sin embargo, en este caso, tenemos involucrado el factor e^{-t}, por lo tanto las curvas tenderán a acercarse al punto de equilibrio $(0, 0)$, la idea intuitiva

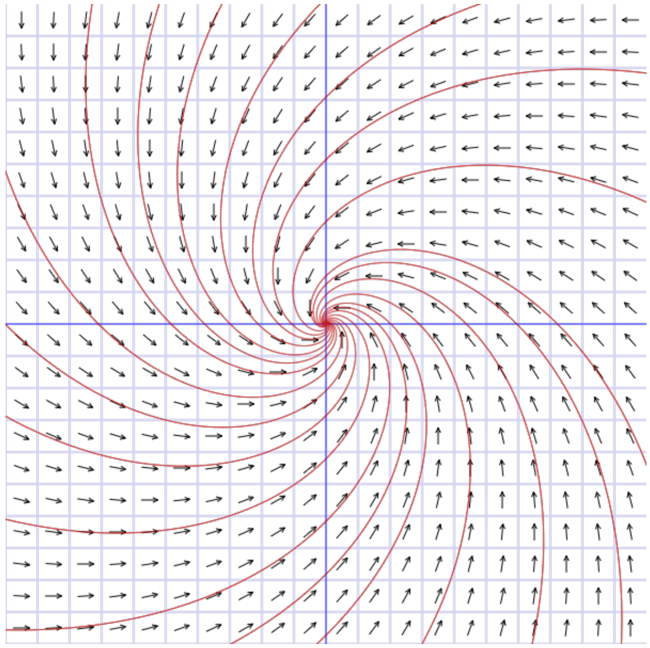

Figura 5: Plano fase del Ejercicio 5 Foco estable

para el plano fase es que a medida en que el tiempo incremente la trayectoria va a tender al punto de equilibrio, es decir, en forma de espiral, tal como se muestra en la figura (5), en este caso, el punto de equilibrio es un foco estable o punto espiral asintoticamente estable.

Ejercicio 6

$$x' = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} x$$

Solución El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 \\ 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-4-\lambda)^2 \end{aligned}$$

Por tanto, el único valor propio de A es $\lambda = -4$ con multiplicidad dos. Buscamos un vector v no nulo tal que

$$(A+4I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Claramente cualquier vector v cumple la igualdad anterior. Por lo tanto, se tiene que

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De aquí que, podemos tener una infnidad de pares de vectores linealmente independientes para el valor propio -4, en particular los vectores característicos de A del valor característico -4 son

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, la solución general del sistema es

$$x(t) = c_1 e^{-4t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2 e^{-4t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Observemos que la solución tiende al origen conforme incrementa el tiempo. De esta manera, en cualquier dirección que nos situemos la solución tenderá al punto crítico $(0,0)$. Más aún, si de la solución general despejamos e^{-4t}, obtenemos que el conjunto de vectores $\{c_1v^1+c_2v^2\}$ para cualquier elección de c_1 y c_2 cubren cualquier dirección en el plano, ya que v^1 y v^2 son linealmente independientes, por lo tanto las trayectorias de las soluciones son lineas rectas que tienden al punto de equilibrio $(0,0)$, tal como se muestra en la figura (6), así, el punto de equilibrio es un nodo propio asintoticamente estable, también se suele denomina un punto estrella.

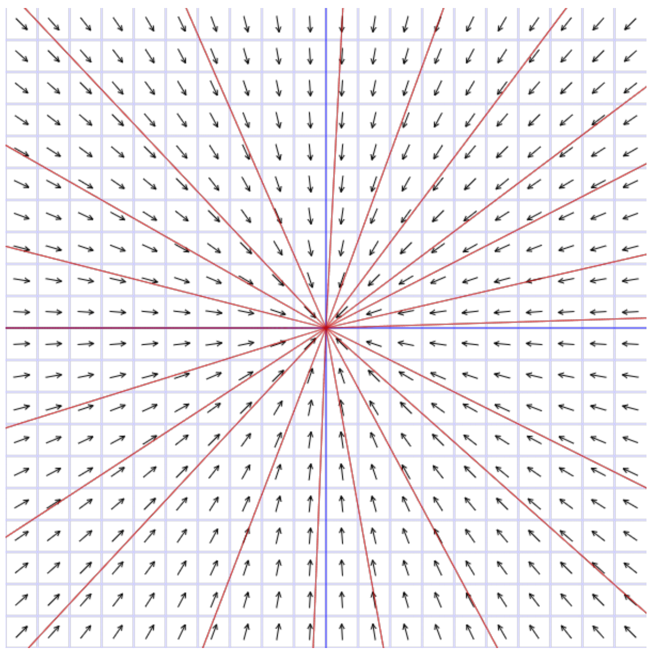

Figura 6: Plano fase del Ejercicio 6 Nodo propio asintoticamente estable

Ejercicio 7

$$x' = \begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{pmatrix}x$$

Solución El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\2 & 3-\lambda\end{vmatrix}\\
&= (1-\lambda)(3-\lambda)-8\\
&= \lambda^2-4\lambda+3-8\\
&= \lambda^2-4\lambda-5\\
&= (\lambda-5)(\lambda+1)
\end{aligned}$$

Por tanto, los valores característicos de A son $\lambda = 5$ y $\lambda = -1$.

i) Para $\lambda = 5$, buscamos un vector v^1 no nulo tal que

$$(A - 5I)v^1 = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí que, $v_1 = v_2$, entonces un vector característico con valor característico igual a 5 es

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) Para $\lambda = -1$, buscamos un vector v^2 no nulo tal que

$$(A + I)v^1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí que, $v_1 = -2v_2$, entonces un vector característico con valor característico igual a -1 es

$$v^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que para este caso los valores propios tienen signos diferentes, por un lado, las trayectorias se acercarán al punto crítico en dirección del vector v^2 y por el contrario, se alejarán del punto crítico en dirección del vector v^1.Por lo tanto el punto de equilibrio, es un punto silla inestable.

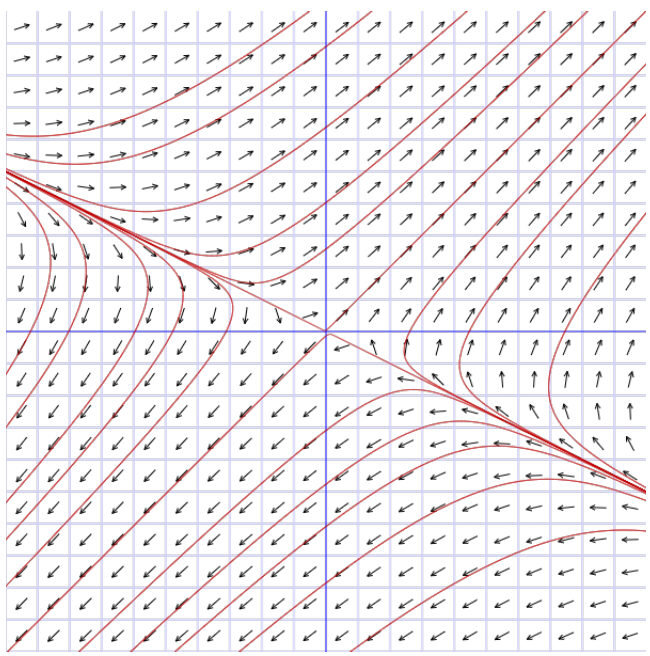

Figura 7: Plano fase del Ejercicio 7 Punto silla inestable

Ejercicio 8

$$x' = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} x \tag{5}$$

Solución El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 \\ 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (6-\lambda)^2 \end{aligned}$$

Por tanto, el único valor propio de A es $\lambda = 6$ con multiplicidad dos. Buscamos un vector no nulo v tal que

$$(A-6I)v = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $v_2 = 0$ y v_1 es libre. Así

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$x^1(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una solución de (5), nos faltaría hallar una solución adicional para poder tener la solución general del sistema. Dado que A únicamente tiene un vector característico con valor característico 6, se buscan todas las soluciones

$$(A-6I)^2 w = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Claramente cualquier vector w cumple con la igualdad anterior, en particular proponemos

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que,

$$(A-6I)w = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$x^2(t) = e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{6t}[w + t(A-6I)w] = e^{6t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = e^{6t} \begin{pmatrix} -5t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t} \begin{pmatrix} -5t \\ 1 \end{pmatrix} = e^{6t} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + tc_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Luego,

$$x(t) = e^{6t} \left[c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (c_1 - 5tc_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Por tanto, a partir de la solución general se tiene que $x(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, es decir, conforme el tiempo incremente la solución se alejará del origen. Además, notemos que $|c_1 v + c_2 w| < |-5tc_2 v|$ cuando t es grande, en consecuencia, la tangente de la orbita de $x(t)$ tiende a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tal como se muestra en la figura (8).El punto de equilibrio es un nodo impropio inestable.

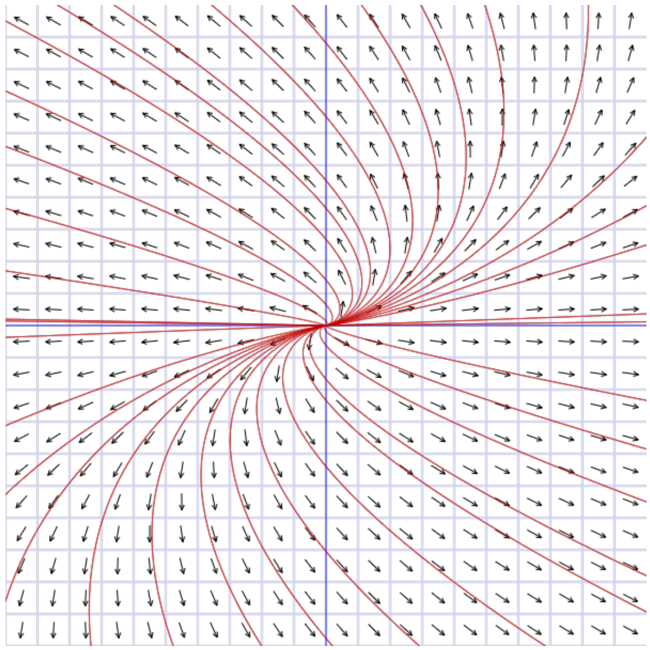

Figura 8: Plano fase del Ejercicio 8 Nodo impropio inestable