Modelos Binarios

Iván Vega Gutiérrez

[1]Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Unidad Aguascalientes
E-mail: `ivan.vega@cimat.mx`

I. Allocating Orders to Machines

La firma Orgasa ha recibido cinco pedidos (P1, P2, P3, P4, P5), que deben ser ejecutados. Para cumplirlos, hay cinco máquinas disponibles (M1, M2, M3, M4, M5). Cada máquina puede realizar todas las tareas al costo que se muestra en la Tabla 1. El problema consiste en determinar la asignación óptima que minimice el costo total de ejecución de pedidos asumiendo que cada máquina puede hacer un solo pedido y que todos los pedidos deben ser ejecutados.

1. Formule un modelo de programación lineal entero que determine la asignación óptima.
2. Suponga que procesar cada pedido en cada máquina requiere un costo de preparación promedio de 10 unidades. ¿Cómo se modifica el modelo en el sector anterior?

Table 1 Cost of carrying out tasks on each machine

Order/Machine	M1	M2	M3	M4	M5
P1	16	4	9	5	6
P2	2	14	7	5	13
P3	8	10	3	12	11
P4	3	7	6	10	5
P5	3	6	8	11	7

Variables de decisión

Las variables decisión serán variables vinarias que serán de la forma

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \text{El producto i fue fabricado por la maquina j} \\ \\ 0 & \text{si} \quad \text{El producto i no fue fabricado por la maquina j} \end{cases}$$

Donde i, j = { 1, 2, 3, 4, 5 }.

Restricciones

$$\sum_{j=1}^{5} x_{1,j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{2,j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{3,j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{4,j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{5,j} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{i,1} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{i,2} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{i,3} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{i,4} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{i,5} = 1$$

Función Objetivo

$$\begin{aligned}\text{min } z = {} & 16x_{1,1} + 4x_{1,2} + 9x_{1,3} + 5x_{1,4} + 6x_{1,5} \\ & + 2x_{2,1} + 14x_{2,2} + 7x_{2,3} + 5x_{2,4} + 13x_{2,5} \\ & + 8x_{3,1} + 10x_{3,2} + 7x_{3,3} + 12x_{3,4} + 11x_{3,5} \\ & + 3x_{4,1} + 7x_{4,2} + 6x_{4,3} + 10x_{4,4} + 5x_{4,5} \\ & + 3x_{5,1} + 6x_{5,2} + 8x_{5,3} + 11x_{5,4} + 7x_{5,5}\end{aligned}$$

II. Allocation in a Lawyear's Office

Una oficina de abogados ha asumido cinco casos nuevos, y cualquiera de los cinco socios más recientes puede manejar adecuadamente cada uno de ellos. Dada la diferencia en experiencia y práctica, los abogados dedicarán diferentes tiempos a sus casos. Uno de los socios más experimentados ha estimado los requisitos en términos de tiempo (en horas; consulte la Tabla 1).

Table 1 Estimation of the time required per case and lawyer

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
Lawyer 1	45	22	30	65	15
Lawyer 2	180	163	85	148	68
Lawyer 3	21	17	193	59	65
Lawyer 4	18	83	16	70	115
Lawyer 5	97	75	20	70	71

Para determinar la forma óptima de asignar los casos a los abogados para que cada uno asuma un caso diferente y que el tiempo total de horas dedicadas sea el mínimo, formule este problema como un modelo de programación lineal entero.

Variables de decisión

Las variables decisión serán variables vinarias que serán de la forma

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad \text{El abogado i se encarga del caso j} \\ \\ 0 \quad \text{si} \quad \text{El abogado i no se encarga del caso j} \end{cases}$$

Donde i, j = { 1, 2, 3, 4, 5 }.

Restricciones

$$\sum_{j=1}^{5} x_{1,j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{2,j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{3,j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{4,j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{5,j} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{i,1} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{i,2} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{i,3} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{i,4} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{i,5} = 1$$

Función Objetivo

$$\text{min } z = \sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{5} c_{i,j}x_{i,j}$$

Donde $c_{i,j}$ representa el tiempo que le toma al abogado i resolver el caso j.

III. Planning University Schedules

La Coordinadora de Estudios de la carrera de Ingeniería en Organización Industrial de la EPSA está intentando solucionar el "problema del horario académico". El objetivo es asociar las aulas y tiempos de las materias con un programa académico dividido en dos cursos.

Se considera que se dispone de tres aulas y 5 h, respectivamente, para impartir ocho materias. Estas materias se agrupan en dos docentes y dos cursos académicos.

El conjunto de todas las materias es: A = { a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8 } El profesor 1 enseña tres materias. El conjunto de materias del profesor 1 es: AP1 = {a1, a2, a8}

El profesor 2 enseña cinco materias. El conjunto de materias del profesor 2 es:AP2 = {a3, a4, a5, a6, a7}

El conjunto de materias del curso académico 1 es: AC1 = {a1, a2, a3, a4}

El conjunto de materias del curso académico 2 es: AC2 = {a5, a6, a7, a8}

Debemos tener en cuenta que:

- Cada profesor enseña todas sus materias.
- Cada profesor enseña una materia cada hora como máximo.
- Cada materia se enseña solo una vez.
- Solo se imparte una materia en cada aula y cada hora como máximo.
- Una materia de cada curso académico se imparte cada hora como máximo.

Crear un modelo de programación lineal entero que asocie tres aulas y 5 h a las ocho materias del programa académico divididas en dos cursos mediante el cumplimiento de un horario compacto.

Variables de decisión

$$x_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \text{Si la materia } a_i \text{ se imparte en la aula j en la hora k} \\ 0 & \text{si} \quad \text{En otro caso} \end{cases}$$

donde $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, $j = 1, 2, 3$ y $k = 1, 2, 3, 4, 5$

Función Objetivo

$$\max\, z = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{5} x_{i,j,k}$$

Restricciones

Restricciones sobre los profesores

$$\sum_{j=1}^{3}(x_{1,j,k} + x_{2,j,k} + x_{8,j,k} \leq 1)) \text{ para cada } k = 1,2,3,4,5$$

$$\sum_{i=3}^{7}\sum_{j=1}^{3} x_{i,j,k} \leq 1 \text{ para cada } k = 1,2,3,4,5$$

Restricciones sobre los cursos

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{i,j,k} \leq 1 \text{ para cada } k = 1,2,3,4,5$$

$$\sum_{i=4}^{8}\sum_{j=1}^{3} x_{i,j,k} \leq 1 \text{ para cada } k = 1,2,3,4,5$$

Restricciones sobre las aulas

$$\sum_{i=1}^{8} x_{i,j,k} \leq 1 \text{ para cada } j = 1,2,3 \text{ y } k = 1,2,3,4,5$$

Restricciones sobre las materias

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{5} x_{i,j,k} = 1 \text{ para cada } i = 1,2,3,4,5,6,7,8$$

IV. The Shortest Path

Defina las variables de decisión, la función objetivo y las restricciones a considerar para encontrar un grafo con N nodos (A, B, ..., N) y el camino más corto de A a N mediante un modelo de programación lineal entero.

Variables de decisión

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \text{Si se puede ir del nodo i al nodo j} \\ \\ 0 & \text{si} \quad \text{En otro caso} \end{cases}$$

$d_{i,j}$ = Distancia entre el nodo i.y el nodo j

Función objetivo

$$\min\, z = \sum_{i=A}^{N}\sum_{j=A}^{N} d_{i,j} x_{ij}$$

Restricciones

Restricciones para el nodo de salida

$$\sum_{j=B}^{M} x_{A,j} = 1$$

$$\sum_{i=B}^{M} x_{i,A} = 0$$

Restricciones para el nodo final

$$\sum_{j=B}^{M} x_{N,j} = 0$$

$$\sum_{i=B}^{M} x_{i,N} = 1$$

Restricciones de conservación

$$\sum_{i=B}^{M} x_{i,j} = 1 \text{ para } j = B, C, \cdots, M$$

$$\sum_{j=B}^{M} x_{i,j} = 1 \text{ para } j = B, C, \cdots, M$$