Ingeniería de la calidad
Tarea I

Iván Vega Gutiérrez

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Unidad Aguascalientes
E-mail: ivan.vega@cimat.mx

I. Cartas de control para variables

A continuación se muestra como se obtienen las constantes que se utilizan en los límites de control para las cartas de control para variables. En la última sección se implementa un código en python para obtener los valores de estas variables.

Primero, supongamos que cierta característica de calidad tienen una distribución normal con parámetros conocidos. Sea $x_1, x_2, \cdots, x_n$ una muestra de tamaño n, entonces el promedio de la muestra es

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + +x_n}{n}$$

En consecuencia, $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Por lo tanto $1-\alpha$ es la probabilidad de que cualquier media muestral caiga en el intervalo

$$(\mu - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \tag{1}$$

De esta manera podemos establecer los límites de control para la carta para medias muestrales con (1). Normalmente se establece $Z_{\alpha/2} = 3$.

I.1. Cartas de control para $\bar{x}$ y R

Los límites de control para la carta $\bar{x}$ son los siguientes

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R} \\ \text{LC} &= \bar{\bar{x}} \\ \text{LIC} &= \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Mientras que los límites de control para la carta R son

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= D_4\bar{R} \\ \text{LC} &= \bar{R} \\ \text{LIC} &= D_3\bar{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Primero, veamos de donde surge la constante A_2, para ello establezcamos el rango relativo

$$W = R/\sigma \tag{4}$$

la cual es una variable aleatoria que ha sido estudiada ampliamente y se sabe que la media de W es una constante d_2, la cual depende del tamaño de la muestra. Además un estimador insesgado para la desviación estándar de una distribución normal es $\hat{\sigma} = R/d_2$.

Si utilizamos el estimador $\bar{\bar{x}}$ para estimar μ y R/d_2 para estimar σ, de (1) obtenemos que

$$\text{LSC} = \bar{\bar{x}} + 3\frac{R}{d_2}\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{y} \qquad \text{LIC} = \bar{\bar{x}} - 3\frac{R}{d_2}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Por notación se establece que

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$$

Por lo tanto, el cálculo de la constante d_2 se reduce a hallar la media de W, de esta manera se podrían generar n v.a's normalmente distribuidas con la misma media y varianza, luego se hallaría el rango de las n v.a's, el cual se define como $R = max(x_i) - min(x_i) = x_{max} - x_{min}$ y se procedería a hallar la media de W, en el código se generan 100,000 v.a's para tener una aproximación más exacta de la constante.

Por otro lado, para establecer los límites de control de la carta R, donde $\bar{R}$ es la línea central, se necesita estimar σ_R para ello ocuparemos nuevamente el rango relativo, de (4) se tiene que $\sigma = R/W$. Además se sabe que la desviación estándar de W es la constante d_3, de esta manera se tiene que,

$$\sigma_R = d_3\sigma$$

Luego,

$$\hat{\sigma_R} = d_3\frac{\bar{R}}{d_2}.$$

Por lo tanto

$$\text{LSC} = \bar{R} + 3\frac{d_3}{d_2}\bar{R} \qquad \text{y} \qquad \text{LIC} = \bar{R} - 3\frac{d_3}{d_2}\bar{R}$$

Por notación

$$D_3 = 1 - 3\frac{d_3}{d_2} \qquad \text{y} \qquad D_4 = 1 + 3\frac{d_3}{d_2}$$

Dado que d_3 es la desviación estándar de W, la forma de calcular d_3 es análoga a la forma en la que se calcula d_2.

I.2. Cartas de control para $\bar{x}$ y S

Los límites de control para la carta $\bar{x}$ son

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s} \\ \text{LC} &= \bar{\bar{x}} \\ \text{LIC} &= \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s}. \end{aligned} \tag{5}$$

Para $\bar{s}$ son

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= B_4\bar{s} \\ \text{LC} &= \bar{\bar{s}} \\ \text{LIC} &= B_3\bar{s}. \end{aligned} \tag{6}$$

Donde,

$$A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}, \qquad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}, \qquad B_3 = 1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}$$

Así, A_3, B_3 y B_4 están definidas por c_4

La constante c_4 surge a partir de buscar un estimador insesgado para la desviación estándar σ ya que la desivación estándar muestral s no lo es. Se puede probar que

$$E(s) = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]} \sigma = c_4 \sigma$$

De esta manera un estimador insesgado parala desviación estándar es

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{c_4}.$$

Por lo tanto, se podrían obtener las constantes requeridas utilizando la función Gamma

$$c_4 = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]}$$

II. Código

```
def constantes(carta, n):
    if carta == 'X-R':
        # Calculamos d2 y d3
        M = np.random.normal(size=(100000,n))
        R = []
        for i in range(len(M)):
            R.append(np.max(M[i]) - np.min(M[i]))
        d2 = np.mean(R)
        d3 = np.std(R)
        # Calculamos las constantes
        A2 = 3/(d2*(n)**(0.5))
        D3 = 1 - 3*(d3/d2)
        if D3 < 0:
            D3 = 0
        D4 = 1 + 3*(d3/d2)
        print('A2={}, D3={}, D4={}'.format(A2,D3,D4))
        #return (A2, D3, D4)
    elif carta == 'X-S':
        # Calculamos c4
        c4 = (((2/(n - 1))**0.5) * (1/math.gamma((n-1)/2))*math.gamma(n/2))
        # Calculamos las constantes
        A3 = 3/(c4*(n)**0.5)
        B3 = 1 - (3/c4)*(1-c4**2)**0.5
        if B3 < 0:
            B3 = 0
        B4 = 1 + (3/c4)*(1-c4**2)**0.5
        print('A3={}, B3={}, B4={}'.format(A3, B3, B4))
        #return(A3, B3, B4)
```