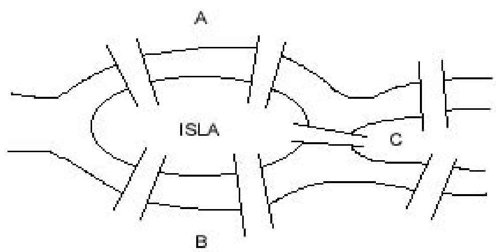
Capítulo 10: TEORIA DE GRAFOS

10.1 Introducción

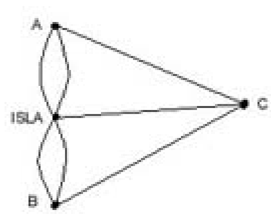
Leonhard Euler fue el más grande matemático, filósofo y físico suizo. Nació el 15 de abril de 1707 en Basilea (Suiza).

Siendo un adolescente ingresó a la Universidad de Basilea, donde a los 17 años de edad, se graduó Doctor, provocando grandes aplausos con un discurso probatorio.

Trabajó todas las ramas conocidas de la matemática de su época y a todas les aportó algo. Resolvió el problema de los Puentes de Konigsberg que consistía en lo siguiente: dos islas en el río Pregel que cruza Königsberg se unen entre ellas y con tierra firme mediante siete puentes. ¿Es posible dar un paseo empezando por una cualquiera de las cuatro partes de tierra firme, cruzando cada puente una sola vez y volviendo al punto de partida?



Euler enfocó el problema representando cada parte de tierra por un punto y cada puente, por una línea, uniendo los puntos que se corresponden. Entonces, el problema anterior se puede trasladar a la siguiente pregunta: ¿se puede recorrer el dibujo terminando en el punto de partida sin repetir las líneas?



Euler demostró que no era posible puesto que el número de líneas que inciden en cada punto no es par (condición necesaria para entrar y salir de cada punto regresando al punto de partida por caminos distintos en todo momento). En teoría de los grafos esta idea se corresponde con la posibilidad de encontrar un Ciclo Euleriano en un grafo.

Entre otras muchas de sus obras Introdujo los símbolos e (como la inicial de su nombre), la letra pi para dicho número (el honor a la letra inicial de Pitágoras), f(x) para las funciones, el sumatoria (∑) y el cálculo de i como la raíz cuadrada de -1. Argumentó que el infinito separaba los números positivos de los negativos de forma similar a como lo hace el cero. Definió las funciones logarítmicas y exponenciales. Elaboró e introdujo la integración doble. Descubrió el teorema de la composición de integrales elípticas. Amplió y perfeccionó la geometría plana y de sólidos. Fue el primero en considerar el seno y el coseno como funciones. Introdujo los factores integrantes en las ecuaciones diferenciales. Generalizó la congruencia de Fermat, introduciendo una expresión que Gauss denominó "indicador".

Considerado como el padre de la Teoría de Gráficas y como uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos.

Euler vivió casi durante los diecisiete últimos años de su vida en una ceguera total. Ni siquiera esta tragedia consiguió interrumpir sus investigaciones y publicaciones, que continuó al mismo e incluso a mayor ritmo hasta 1783.

En San Petersburgo el 18 de septiembre de 1783, en que, a la edad de setenta y seis años, murió de manera repentina mientras tomaba el té y jugaba con uno de sus nietos.

La teoría de gráficas o teoría de grafos es aplicada entre otras, en áreas tales como ciencias sociales, ciencias físicas, ingeniería de comunicación; pero, básicamente juega un papel importante en las ciencias de la computación, tales como inteligencia artificial, lenguajes formales, teoría de cambio y lógica de diseño, gráficos por computadora, sistemas operativos, compiladores, y organización y recuperación de información, en lo que respecta al modelado de problemas, indicando sus características de manera muy objetiva.

El concepto de grafo o gráfica es muy diferente a los trazos realizados en matemática sobre los ejes x e y.

Entre otras aplicaciones se utiliza para:

- Cartografía (coloreado de mapas)
- Modelado matemático
- Determinación de tiempos en el desarrollo de proyectos
- Urbanistas
- Programación de exámenes en una institución educativa
- Programación de horarios en una entidad cualquiera
- Programación de distribución de servicios públicos (recolección de basuras en una ciudad, red de acueducto, de alcantarillado y de gas)
- Diseño de boards o tarjetas plásticas para dispositivos electrónicos.
- Redes de computadores

Los elementos de un grafo son los nodos o vértices y las aristas. Cada arista se forma por la unión de dos vértices. En decir, hay una relación entre las aristas y los nodos. Por ejemplo, si se usan grafos para la ejecución de un plan de actividades, los vértices se pueden asociar con las actividades y las aristas corresponderían al tiempo que tarda o a la probabilidad que se tiene para que se realice una actividad. En tal caso se trabaja en grafos dirigidos con peso.

Este capitulo pretende completar, de un modo organizado, los conceptos y términos sobre grafos que aparecen en este tema, los cuales inciden, fundamentalmente en el tratamiento algorítmico de los problemas planteados.

10.2 Conceptos básicos de la teoría de grafos

10.2.1 Concepto de grafo

Sea V el conjunto no vacío de vértices o nodos y E el conjunto de lados o aristas (pares de vértices); se dice que G es un grafo, si G= (V, E) es una estructura de datos compuesta por esos dos conjuntos V y E que forman un conjunto de pares ordenados o desordenados de vértices o nodos. Los pares de vértices van entre paréntesis y los pares desordenados, pondrán entre llaves.

10.3 Clasificación de los grafos

10.3.1 Grafo dirigido

Un grafico dirigido G, también llamado “dígrafo o digrafo”, consta de un conjunto V de vértices y un conjunto E de aristas tales que cada arista e$\in$E se asocia con un par ordenado de vértices. Si existe una única arista e asociada con el par ordenado (v, w) de vértices, escribimos e = (v, w) lo cual denota una arista de v a w. En conclusión, se puede afirmar que un grafo dirigido es aquel que tiene uniones unidireccionales que suelen dibujarse con una flecha.

Un grafo dirigido es aquel que tiene todas sus aristas dirigidas; es decir, un dígrafo está asociado a un par ordenado (vea figura 9.1a). Por ejemplo, si w es vértice de partida y v es vértice de llegada, entonces la arista se asocia a la pareja ordenada (w,v), que es diferente de (v,w) ; es decir, (w,v)$\neq$(v,w).

Los vértices de donde parten las aristas se denominan vértices salientes y los vértices a donde llegan las aristas se llaman vértices entrantes.

$$\textbf{(Vi , Vj) =} \begin{cases} \textbf{Vi} \text{ ,es cola del lado} \\ \textbf{Vj} \text{ ,es cabeza del lado.} \end{cases}$$

10.3.2 Grafo no dirigido

Un grafo no dirigido (vea figura 10.1b) consta de un conjunto de vértices y un conjunto E de aristas tal que cada arista e$\in$E queda asociada a un par no ordenado de vértices. Si existe una única lista e asociada con los vértices v y w, escribimos e = {v,w} ó e = {w,v}. en este contexto, {v,w} denota una arista entre v y w en un grafo no dirigido y no un par ordenado. En conclusión un grafo no dirigido es aquel en el cual sus aristas son direccionales, es decir, si una arista conecta dos nodos A y B se puede recorrer tanto en sentido hacia B como en sentido hacia A. Sus aristas son no dirigidas; es decir, un dígrafo está asociado a un par desordenado (vea figura 10.1d).

Ejemplo 10.1: si u es vértice de partida y v es vértice de llegada, entonces la arista se asocia a la pareja desordenada {w,v}, que es igual que escribir {v,w}; es decir, {w,v}={v,w}. En tal caso, w es vértice e partida o de llegada; igualmente sucede con v.

10.3.3 Grafo dirigido con peso

Es aquel grafo dirigido en el que sus aristas tienen una etiqueta (vea figura 10.1c). Una etiqueta puede ser un nombre, costo ó un valor de cualquier tipo de dato. También a este grafo se le denomina red de actividades, y el número asociado al arco se le denomina factor de peso. Se usa en el modelado de problemas de la vida real; por ejemplo, al tiempo que se tardará en realizar una actividad determinada o la distancia que hay de un lugar a otro.

10.3.4 Grafo mixto

Es aquel grafo en el que algunas de sus aristas son dirigidas y otras son no dirigidas (vea figura 10.1d).

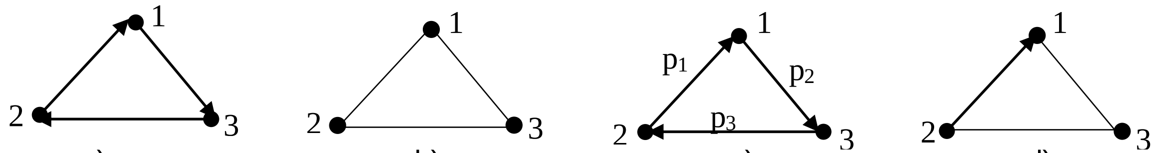


Figura 10.1: representación gráfica de grafos: a) grafo dirigido, b) grafo no dirigido, c) grafo dirigido con peso y d) grafo mixto

Según la figura 10.1c se podría interpretar por ejemplo, que para pasar de la actividad 1 a la 3 se tarda un tiempo p_2; que pasar de actividad 3 a la 2 se tarda un tiempo p_3 y, de la actividad 2 a la 1 se tardaría un tiempo p_1. Un grafo no dirigido puede dibujarse con aristas dirigidas haciendo que cada lado les corresponda aristas invertidas.

10.4 Vértices adyacentes

Son aquellos que conforman un lado o arista. Todo lado conformado por dos vértices se dice que es incidente sobre esos vértices. Si un vértice no tiene otro adyacente se dice que es **aislado**.

Ejemplo 10.2: en G2 de la figura 10.2, son adyacentes los vértices 1 y 3. Así que la arista {1,3} incide sobre los vértices 1 y 3

En G1 de la figura 10.2: 1 es adyacente hacia 2 ó 2 es adyacente desde 1, donde la arista (1,2) incide sobre los vértices 1 y 2.

Ejemplo 10.3: en el grafo de la figura 10.2 la arista e1 incide sobre los vértices 1 y 2; igualmente, e7 incide sobre los vértices 5 y 6.

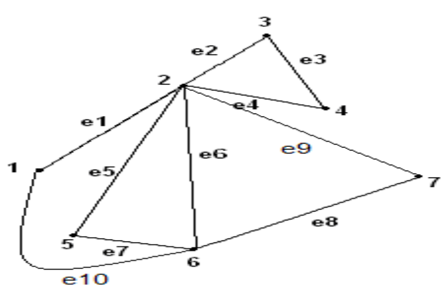


figura 10.2

10.5 Representación de grafos

De cualquier manera, para dar algo de sentido a la terminología usada y también para desarrollar algunas ideas intuitivas, se representará un grafo por medio de un diagrama. Ese diagrama se llamará igualmente grafo.

Las definiciones y términos presentadas en este texto no están restringidos a aquellos grafos que pueden ser representados por medio de diagramas, aunque parezca ser el caso, ya que estos términos tengan una fuerte asociación con dicha representación. Debemos resaltar que una representación diagramática es posible únicamente en casos muy simples.

10.5.1 Representación gráfica de grafos

Los diagramas se pueden representar gráficamente cuando la cantidad de vértices no es grande. Para tal fin, puede utilizar los siguientes diagramas:

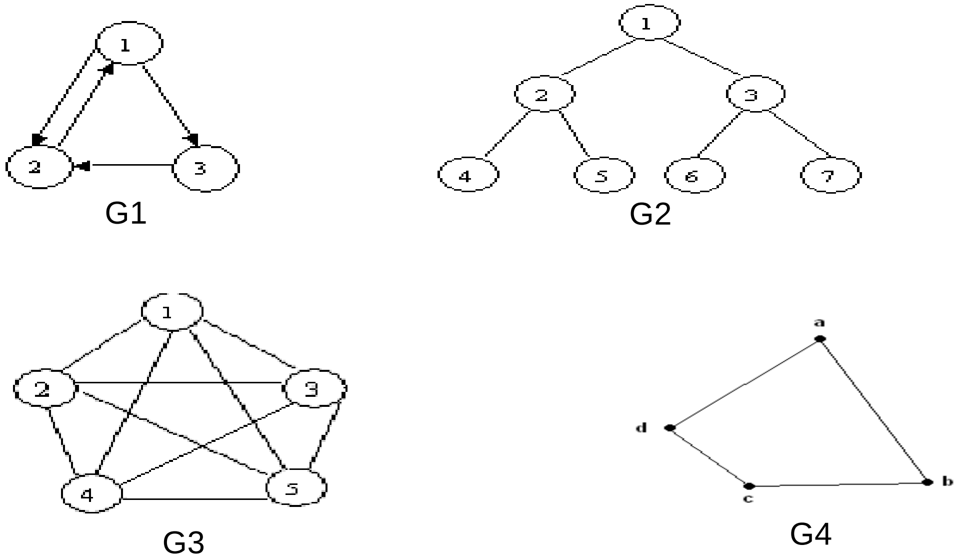


Figura 10.3: representación gráfica de grafos

Los grafos G2, G3 y G4 son grafos no dirigidos; G1 es un grafo dirigido

Ejemplo 10.4: según la figura 10.3 los elementos de estos grafos se representan como sigue:
G1: tiene 3 vértices y 4 lados $\Rightarrow$ V={1,2,3}

E={(1,2),(1,3),(2,1),(3,2)}

G2: tiene 7 vértices y 6 lados $\Rightarrow$ V={1,2,3,4,5,,6,7}
E={{1,2},{1,3},{2,4},{2,5},{3,6},{3,7}}

G3: tiene 5 vértices y 10 lados $\Rightarrow$V={1,2,3,4,5}
E={{1,2},1,3},{1,4},{1,5},{2,3},{2,4},{2,5}, {3,4},{3,5},{4,5}}
G4: tiene 4 vértices y 4 lados $\Rightarrow$ V={a,b,c,d}
E={{a,b},{b,c},{c,d},{d,a}}

Cuando un vértice se dirige a él mismo, se denomina “**bucle**”. Un grafo sin bucles se denomina “**Grafo simple**”.

10.5.2 Representación de grafos en la computadora

Matriz de adyacencia

Cuando la cantidad de vértices es razonablemente grande se puede utilizar una representación para la computadora: matrices. Esta manera de representación permite hacer manipulaciones de un grafo utilizando las operaciones que ofrecen las matrices y en consecuencia determinar, por ejemplo, el grado de un grafo, el camino más corto para ir a un vértice, el número de caminos de longitud n, los ciclos, entre otros.

En vista del orden de los vértices que se requiere para hacer la representación matricial, se utilizarán dígrafos y la matriz cuadrada conocida como "*matriz de adyacencia*" que se denotará MA.

Sea G=(V,E) un dígrafo en el que el conjunto $V=\{v_1,v_2,v_3, . . ., v_n\}$ se asume ordenado desde el vértice v_1 hasta el vértice v_n. Los elementos de la matriz e_{ij} están definidos por

$$e_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ si } (v_i,v_j)\in E \\ 0 \text{ si } (v_i,v_j)\notin E \end{cases}$$

Ejemplo 10.5: dado el grafo G1 de la figura 10.4, donde V={1,2,3} conjunto de vértices ordenado. Su matriz de adyacencia es

$$MA=\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

Figura 10.4: matriz de adyacencia del grafo G1

La matriz de adyacencia siempre es simétrica (aij = aji). Cuando se trata de grafos con peso o ponderados en lugar de 1 el valor que tomará será el peso de la arista. Si el grafo es no dirigido hay que asegurarse que se marca con un 1 (o con el peso) tanto la entrada a[**i**] [**j**] como la entrada a[**j**] [**i**], puesto que se puede recorrer en ambos sentidos.

El algoritmo Implementado en lenguaje C es:

```
int V, A, a[maxV][maxV];
void inicializar()
 {
        int x,y,I,p;
        cahr v1,v2;
        // lea V,A;
        memset(a,0,sizeof(a));
        for(i=1;i<=A;i++)
        {
                scanf("%c%c%d\n",&v1,&v2,&p);
                x=v1-'A';
                y=v2-'A';
                a[x][y]=p;
                a[y][x]=p;
        }
}
```

10.6 Grado en grafos

10.6.1 Grado entrante de un vértice

El grado entrante de un vértice es el número de aristas que llegan al vértice.

Ejemplo 10.6: el vértice 3 del grafo G3 de la figura 10.3, tiene grado entrante 4 y en el grafo G1 de la misma figura, el grado entrante del vértice 3 es 1.

10.6.2 Grado saliente de un vértice

El grado saliente de un vértice corresponde al número de aristas que salen del vértice.

Ejemplo 10.7: en G3 de la figura 10.3 el vértice 3 tiene grado saliente igual a 4. Ahora, en G1 de la figura 10.3 el vértice 1 tiene grado 2.

10.6.3 Grado de un vértice

Se llama grado de un vértice v al número de aristas que lo tienen como extremo, (cada bucle lo cuenta dos veces). Se designa por **d(v)** y corresponde al número de aristas incidentes sobre el vértice v. Un vértice aislado tiene grado cero.

En los grafos dirigidos el grado total de un vértice es la suma del grado entrante más el grado saliente. En los grafos no dirigidos, el grado total de un vértice es igual al número de aristas que tiene el vértice. Por lo tanto, la suma de los grados de los vértices es igual al doble de las aristas del grafo. Compruébalo con varios ejemplos.

Ejemplo 10.8: de la figura 10.5, el vértice a tiene grado total igual a 3; vértice b, grado 3; vértice c, grado 2; vértice d, grado 1; vértice e, grado 1.

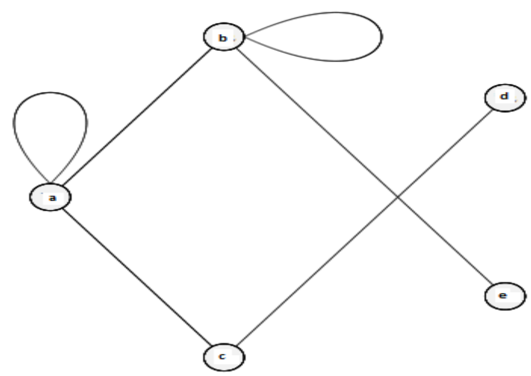


Figura 10.5: ejemplo 10.8

10.7 Grafos isomorfos

Isomorfismo significa “de igual forma”. Dos grafos son isomorfos si existe correspondencia uno a uno entre los nodos de ambos grafos, y además conservan la adyacencia tanto entre los nodos como en la dirección de los lados.

Dos grafos G_1 y G_2, son isomorfos si existe una correspondencia uno a uno entre los vértices de los grafos, tal que todo par de vértices que son adyacentes en un grafo si y sólo si el correspondiente par de vértices son adyacentes en el otro grafo.

Es decir, sean $G1 = (V1, E1)$ y $G2 = (V2, E2)$ grafos simples. Se dice $G1$ y $G2$ son isomorfos (la misma forma), si hay una función biyectiva f de $V1$ a $V2$ con la propiedad de que a y b son adyacentes en $G1$ si y solo si $f(a)$ y $f(b)$ son adyacentes en $G2$, para todo a y b en $V1$. Tal función f es llamada un isomorfismo.

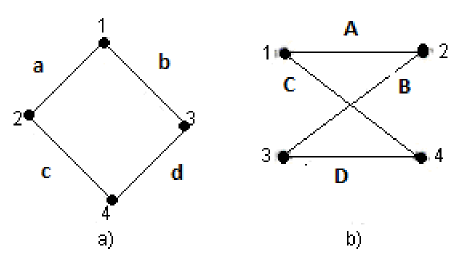


figura 10.6: Grafos del ejemplo 10.9

Ejemplo 10.9: de acuerdo con la definición de isomorfismo se podría decir que un par cualquiera de nodos que está unido por una arista debe tener los nodos correspondientes en el otro grafo también unidos por un eje, así mismo debe existir una correspondencia uno a uno entre los ejes. Por lo tanto, los grafos mostrados en la figura 10.6 (a) y (b) son isomorfos.

Invariantes de grafos isomorfos. Los invariantes de dos grafos simples isomorfos son tener iguales: 1. El número de vértices; 2. El número de aristas; 3. En la correspondencia de los grados de los vértices. De tal manera ambos grafos, para alguna ordenación de vértices y lados, sus matrices de adyacencia son iguales.

A partir de sus invariantes (propiedad que los grafos simples deben cumplir) podremos mostrar cuando 2 grafos no son isomorfos o lo que es lo mismo, cuando 2 grafos no son iguales. De tal manera, si en alguna de esas cantidades difieren los grafos simples, se puede decir que no son isomorfos.

Ejemplo 10.10: determine si los grafos de la figura 10.7 son isomorfos, utilizando sus matrices de adyacencia.

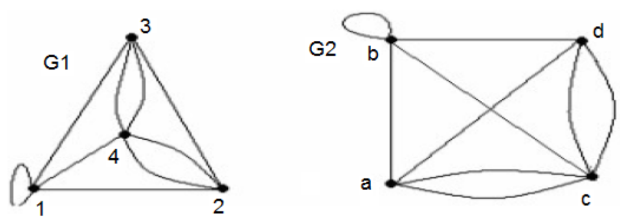


Figura 10.7: grafos del ejemplo 10.10

Solución:

$$G1:\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array} \qquad G2:\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 & c \\ b & a & d & c & \end{array}$$

Grafo	Numero vértices	Número aristas	Grado			
			1	2	3	4
G1	4	9	4	4	4	5

Ahora, con el otro grafo:

Grafo	Numero vértices	Número aristas	Grado			
			a	b	c	d
G2	4	9	4	4	4	5

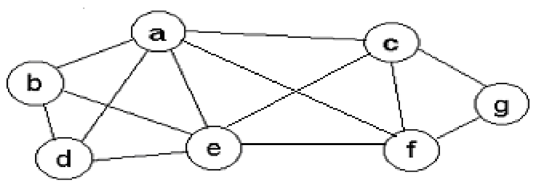
Por lo tanto, G1 y G2 son isomorfos

10.8 Grafos Planos

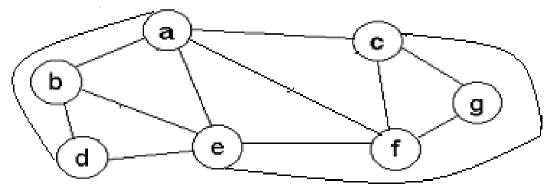
10.8.1 Regiones de un grafo plano

Se dice que G es un grafo plano si puede representarse gráficamente sin la intersección de sus aristas. Es decir, un grafo es plano si puede dividirse en regiones no acotadas.

Ejemplo 10.10: el grafo de la figura 10.7a representa un grafo plano, porque puede graficarse sin que se crucen las aristas, como la figura 10.7b. Dichos grafos son iguales.



a)



b)

Figura 10.8: Ejemplo de la representación plana de un grafo

10.8.2 Fórmula de Euler

Sea G un grafo plano conexo con **n** vértices y e aristas, que se descompone en **r** regiones, entonces **n-e+r=2**

Demostración por inducción sobre a

Si e=0, entonces n =1, r =1 y se cumple que n−e+r = 2

Supongamos que el resultado es cierto para todos los grafos planos y conexos con e-1 aristas, donde e>=1.

Sea G un grafo plano y conexo con **e** aristas. Si G no es árbol, entonces existe alguna arista e de un ciclo de G. Entonces, G-{e} es plano, conexo con n vértices, e-1 aristas y r-1 regiones.

La hipótesis de inducción asegura entonces que:

n- (e-1)+ (r-1)= 2 , es decir, n- e + r = 2

Corolario: Si *G*=(*V,E*) es un grafo plano con e aristas y *n* vértices: e ≤ 3n – 6

Ejemplo 10.12: los grafos de la figura 10.9 no representan grafos planos. Compruébelo.

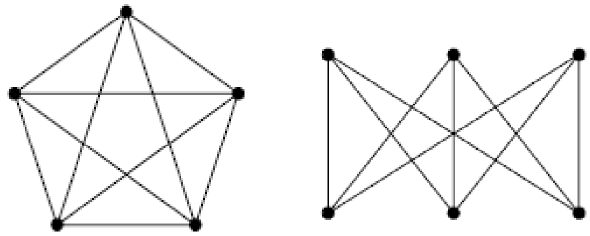


Figura 10.9: grafos del ejemplo 10.12

10.8.3 Grafos Homeomorfos

Dos grafos G1 y G2 son homeomorfos si pueden reducirse a gráficas isomorfas realizando varias reducciones en serie. La reducción en serie se da cuando en una gráfica G las aristas (v, v1) y (v, v2) están en serie, y al hacer reducción en serie desaparece v y solo queda v1, v2. Los grafos homeomorfos permiten afirmar cuándo una gráfica no es plana.

Por consiguiente, si ambos grafos G1 y G2 pueden obtenerse a partir de un mismo grafo por una sucesión de subdivisiones elementales de aristas o reducción en serie, se dice que los grafos son homeomorfos.

10.9 Grafos particulares

10.9.1 Grafo conexo. Es aquél grafo dirigido o no en que existe camino entre cualquier par de vértices. Es decir, desde cualquier vértice v puede irse a cualquier otro vértice w. También llamado grafo conectado.

Ejemplo 10.13: en la figura 10.10a, el grafo es conexo, pues dados dos vértices cualesquiera v y w existe un camino de v a w.

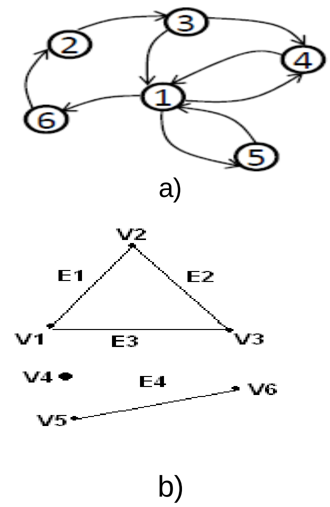


figura 10.10: a) grafo conexo b) grafo disconexo

Grafo disconexo. Un grafo G es disconexo, si dos o más de sus nodos no están conectados por caminos simples (figura 10.10b).

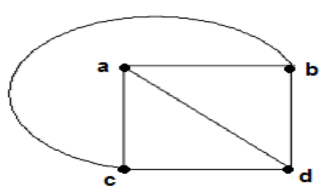


Figura 10.11: grafo regular y completo con cuatro vértices.

Grafo regular. Es un grafo G conexo (figura 10.11) cuyos vértices tienen el mismo grado.

Grafo completo. Un grafo G dirigido o no dirigido es completo si entre cada par de nodos (v,w) existe una arista de v hacia w y de w hacia v (forzosamente tendrán que cumplirse ambas condiciones), es decir que cada nodo del grafo es adyacente a los demás nodos del Grafo. Todo grafo completo es regular; pero no el recíproco; por ejemplo, el grafo de la figura 10.11.

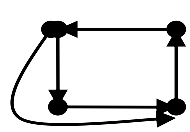


Figura 10.12: grafo fuertemente conexo

Grafo fuertemente conexo. Es un grafo dirigido que tiene camino entre cualquier par de vértices; por ejemplo, el grafo de la figura 10.12.

Grafo Bipartito. Un grafo G=(V,E) es bipartito, si el conjunto de vértices V puede separarse en dos subconjuntos V_1 y V_2 disjuntos ($V_1 \cap V_2=\emptyset$) de modo que cada arista de E sea incidente con un vértice de V_1 y con un vértice de V_2; también puede decirse, cada

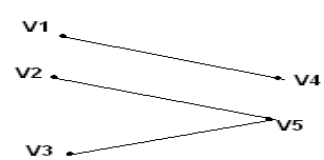


Figura 10.13: grafo bipartito

vértice de V_1 es adyacente con vértices de V_2, pero no hay adyacencias entre los vértices de cada subconjunto.

La figura 10.13 presenta un grafo bipartito, donde $V_1 = (v_1, v_2, v_3)$ y $V_2 = (v_4, v_5)$ son conjuntos disjuntos donde cada arista es incidente en un vértice de V_1 y un vértice de V_2; es decir, cada vértice de V_1 es adyacente con cada vértice de V_2. Observe que un grafo es bipartito, si y solo si, no tiene ciclos con longitud impar.

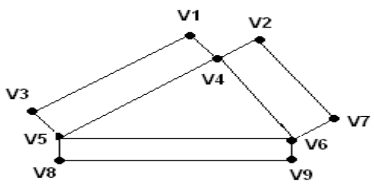


Figura 10.14: grafo no bipartito

Grafo no bipartito. Un grafo G= (V, E) es bipartito, si el conjunto de vértices V no se puede separar en dos o más subconjuntos. El grafo de la figura 10.14 no es bipartito porque no se puede separar en dos subconjuntos.

Grafo Bipartito Completo. El grafo bipartito completo con m y n vértices, denotada ($K_{m,\ n}$), es la gráfica simple cuyo conjunto de vértices esta dividido en conjuntos V_1 con m vértices y V_2 con n vértices, de los cuales existe una arista entre cada par de vértices v_1 y v_2, donde v_1 esta en V_1 y v_2 está en V_2.

El grafo de la figura 10.15 es bipartito completo con dos y cuatro vértices ($K_{2,4}$) donde V_1= {3,5} y V_2= {1, 2, 4, 6}.

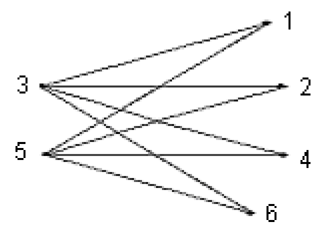


Figura 10.15: grafo bipartito completo

10.9 Terminología de grafos

10.9.1 Trayectoria o camino

Corresponde a los vértices por los cuales hay que pasar para ir desde un vértice w hacia un vértice v. Es decir un camino entre dos vértices es una lista de vértices que están conectados por una arista del grafo.

Para que un camino o trayectoria exista es condición necesaria que las aristas sobre la trayectoria existan sobre el conjunto de aristas que definen el grafo.

Ejemplo 10.14: en la figura 10.16 el camino abdefgc es un camino que comienza en el vértice a y pasa por los vértices b, d, e, f, g y c.

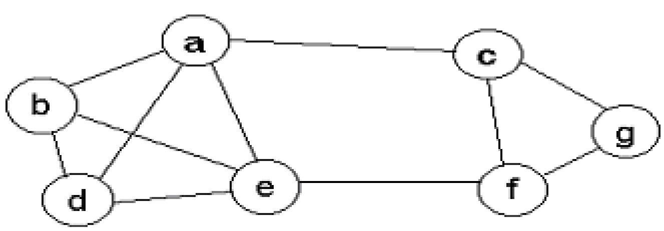


Figura 10.16: grafo del ejemplo 10.14

10.9.2 Camino Simple

Existe camino simple cuando todos sus vértices, excepto tal vez el primero y el último, son distintos.

Ejemplo 10.15: una trayectoria simple para ir desde el vértice b hasta el vértice g en el grafo de la figura 10.10, es: b-d-a-c-f-g.

En la figura 10.16 la trayectoria b-e-d-a-e-c-f-g no es simple, porque se pasa dos veces por el nodo e.

10.9.3 Longitud de una trayectoria

La longitud de una trayectoria corresponde al número de lados de la trayectoria para ir de un vértice a otro.

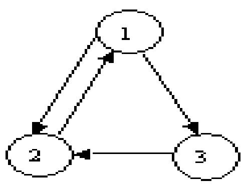


figura 10.17 del ejemplo 10.16

Ejemplo 10.16: según el grafo de la figura 10.17, para ir desde 3 hasta 1 el camino tiene longitud 2 (pasa por 2 aristas), pero de 1 hasta 3 tiene longitud 1 (sólo tiene 1 arista).

10.9.4 Ciclos

Un ciclo (también llamado circuito) es un camino simple de longitud mínimo 1 que empieza y termina en el mismo vértice; es decir, es una trayectoria simple en la cual el primero y el último vértices son el mismo.

Ejemplo 10.17: en el grafo de la figura 10.17, la trayectoria 1, 3, 2, 1 es un ciclo.

Ejemplo 10.18: en el grafo de la figura 10.16, la trayectoria a-d-b-e-f-g-c-a es un ciclo de longitud 7.

10.9.5 Distancia entre dos vértices

Sea G un grafo conexo. La distancia entre un par de vértices v y w es la longitud mínima de un camino entre esos vértices y se denota d(v, w). De acá se deduce:

Sea G = (VE), con v, $w \in V$ y $d(v, w) \geq 0$, se tiene:
- $d(v, w)=0$ si y solo si $v=w$
- $d(v,w)= d(w,v)$
- $d(v,w) \leq d(v,x)+ d(x,w)$

10.9.6 Máximo número de lados de un grafo

Si un grafo es dirigido el máximo número de lados es n(n-1) y para grafos no dirigidos n(n-1)/2.

Ejemplo 10.19: 1. ¿cuál es el máximo número de aristas de un grafo que tiene n vértices, ilustre la respuesta con dos ejemplos.

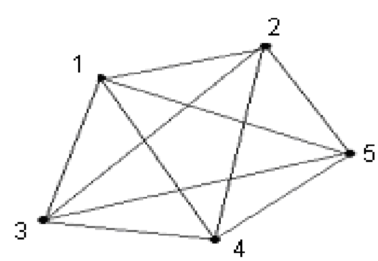


Figura 10.18: grafo completo

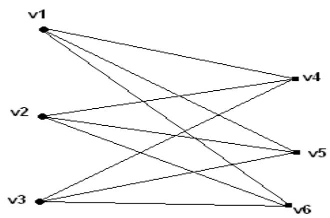


Figura 10.19: grafo bipartito

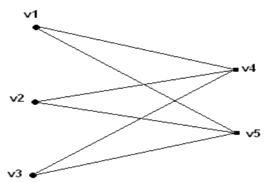


Figura 10.20: grafo bipartito de 5 vértices

El máximo número de aristas del grafo dirigido de la figura 10.18 es: $n(n-1)$ con n = 4 $\Rightarrow$ aristas dirigidas= $4(4-1)$ =12

Dada la figura 10.18, n = 5$\Rightarrow$ aristas = $\dfrac{n(n-1)}{2}$ = $\dfrac{5(4)}{2}$ = 10

2. ¿Cuál es el máximo número de aristas de un grafo bipartito con n vértices?; ilustre la respuesta con dos ejemplos.

El número máximo de aristas es $\dfrac{n^2}{4}$, si n es par e igual a $\dfrac{n^2-1}{4}$ si n es impar

Por ejemplo, la figura 10.19 n = 6:

$\Rightarrow$aristasmax = $\dfrac{n^2}{4}$ = $\dfrac{36}{4}$ = 9

En la figura 10.20, n = 5 $\Rightarrow$ aristasmax = $\dfrac{n^2-1}{4}$ = $\dfrac{25-1}{4}$ = $\dfrac{24}{4}$ = 6

10.9.7 Punto de Articulación

Un punto de articulación de un grafo no dirigido G es un nodo v tal que cuando es eliminado de G (junto con las aristas incidentes en el) se divide un componente conexo del grafo en dos o más componentes conexos. El cálculo de los puntos de articulación se basa en un recorrido de profundidad.

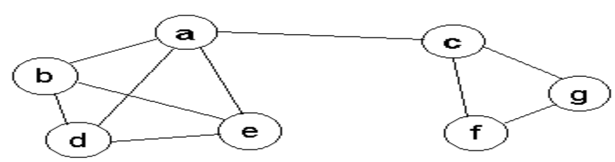


Figura 10.21: grafo ejemplo 10.20

Ejemplo 10.20: en la figura 10.21, los vértices a y c son puntos de articulación, pues si falla uno de estos, se pierde la comunicación entre otros nodos. Si este grafo representará una red de computadores, y si a o c no funcionaran esto causaría que ciertos computadores quedasen incomunicados.

Ejemplo 10.21: dibuje dos grafos con seis vértices que tengan exactamente a) dos puntos de articulación y b) cero puntos de articulación.
Solución:

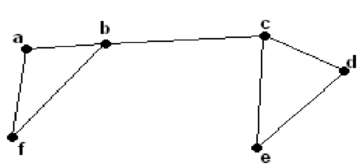


Figura 10.22: grafo con dos puntos de articulación

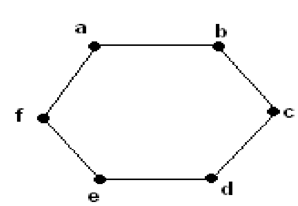


Figura 10.23: grafo con cero puntos de articulación

10.9.8 Potencias de la matriz

Sea MA la matriz de adyacencia de un grafo G. Las potencias de MA denotada MA^k contienen información acerca de los caminos para ir de un vértice del grafo G a otro vértice con determinada longitud igual a la potencia. Cada elemento MA_{ij}^{k} es igual al número de recorridos de longitud k entre dos vértices v_i y v_j.

Recordemos el concepto matemático del producto de matrices: sean A y B matrices de dimensiones mxp y pxn, respectivamente; entonces, la matriz producto C tendrá dimensiones mxn; MA^2 se obtiene sumando los productos de las filas por las columnas de la matriz MA. Un elemento c_{ij} se obtiene así:

$$c_{i,j} = \sum_{i=1}^{p} a_{i,k} * b_{k,j}$$

Para declarar la matriz en un lenguaje determinado utilice el tipo de dato entero y a partir de allí se determina la matriz potencia. Las instrucciones que determinarían los elementos de la matriz MA^2 son:

```
Para i=1 hasta n
        Para j=1 hasta n
                S[i, j]=0
                Para k=1 hasta n
                        S[i, j]=S[i, j]+MA[i, k]*MA[k, j]
                Fin para
                Muestre(S[i, j])
        Fin para
Fin para
```

Ejemplo 10.22: según el grafo de la figura 10.24, la matriz del ejemplo 10.25, determine las matrices potencia MA^2 y MA^3.

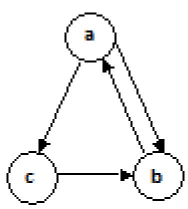


Figura 10.24

MA=

	a	b	c	
	0	1	1	a
	1	0	0	b
	0	1	0	c

Figura 10.25: matriz de adyacencia del grafo figura 10.24

MA^2=

a	b	c	
1	1	0	a
0	1	1	b
1	0	0	c

Figura 10.26: matriz de adyacencia MA^2 del grafo figura 10.24

MA^3=

a	b	c	
1	1	1	a
1	1	0	b
0	1	1	c

Figura 10.27: matriz de adyacencia MA^3 del grafo figura 10.24

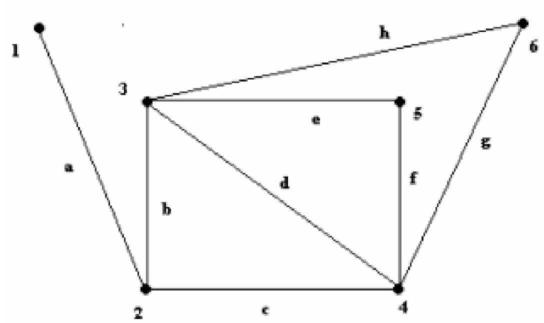
Según la matriz MA^2, el elemento MA_{ac} indica que para ir del vértice a al vértice c hay un solo camino de longitud 2 y no existe camino para ir de b hasta a.

De la matriz MA^3 el elemento MA_{bc} se concluye que para ir del vértice b al vértice c hay un solo camino de longitud 3, pero no hay camino para ir de c hasta a.

10.9.9 Matriz de Incidencia

Dado un grafo simple G = (V, E) con n=|V| vértices {v1,. .. , vn} y m=|E| aristas {e1, ..., em}, su matriz de incidencia es la matriz B de orden nxm, B(G)=(bij), donde bij=1 si vi es incidente con ej y bij=0 en caso contrario.

Si la matriz de incidencia sólo contiene ceros y unos (matriz binaria). Como cada arista incide exactamente en dos vértices, cada columna tiene exactamente dos unos. La cantidad de unos que aparece en cada fila es igual al grado del vértice correspondiente. Una fila compuesta sólo por ceros corresponde a un vértice aislado.



$$
\begin{array}{c} \\ B = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
$$

10.10 Ciclos y Caminos Especiales

Camino de Euler. Se dice que un grafo G conexo tiene camino de Euleriano si su trayectoria incluye todas las aristas una y solo una vez.

Ciclo o circuito de Euler. Un grafo G conexo tiene al menos un ciclo Euler si se recorren todas las aristas del grafo G exactamente una vez, excepto la arista inicial y la final (que son las mismas). Es decir, un grafo G tiene un circuito de Euler, si puede pasar por todas las aristas sin repetir arista.

Teorema 10.1: Un grafo G tiene un ciclo de Euler, si y solo si G es un grafo conexo y cada vértice tiene grado par.

Teorema 10.2: Si G es un grafo conexo que tiene un par de vértices de grado impar, entonces no puede existir un ciclo de Euler en G, pero si, camino de Euler.

Camino de Hamilton. Es aquella trayectoria que contiene cada vértice que lo compone una y solo una vez.

Ciclo de Hamilton. Un ciclo de una gráfica G es Hamiltoniano, si cada vértice del grafo G conexo aparece exactamente una vez, excepto por el vértice inicial y final (que aparece dos veces).

Teorema 10.3 (también llamado teorema de ORE, que hace memoria a Oystein Ore en 1960). Un grafo conexo G de *n* vértices para $n \geq 3$ tal que $deg(u) + deg(v) \geq n$ siendo *u* y *v* cualquier par de vértices no adyacentes del grafo *G,* entonces contiene un ciclo Hamiltoniano.

Teorema 10.4: (también llamado teorema de DIRAC, que memoriza a Gabriel A. Dirac en 1952) Un grafo conexo G de *n* vértices con $n \geq 3$ tal que todos los vértices de *G* tienen grado mayor o igual que $n/2$ contiene un ciclo Hamiltoniano.

Ejemplo 10.23: el grafo G3 de la figura 10.28 tiene ciclo Hamiltoniano

Ejercicio: Ilustre los teoremas 10.3, 10.4 y 10.5 con un ejemplo.

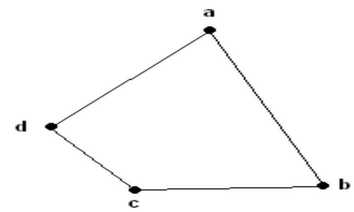


Figura 10.28: ciclo Hamiltoniano

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 10.1: determine si los grafos G y H de la figura 10.29 son isomorfos.

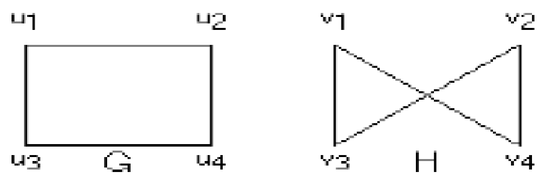


Figura 10.29: ejemplo de grafos isomorfos problema 10.1

Solución:
Los grafos son isomorfos, pues un posible isomorfismo es:
$f(u1) = v1$, $f(u2) = v4$, $f(u3) = v3$, $f(u4) = v2$

Problema 10.2: qué tipo de camino y de ciclo tiene el grafo de la figura 10.30**?**

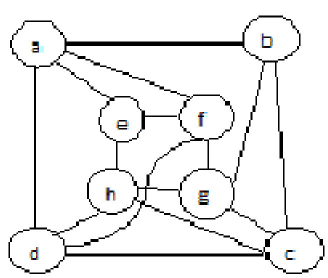


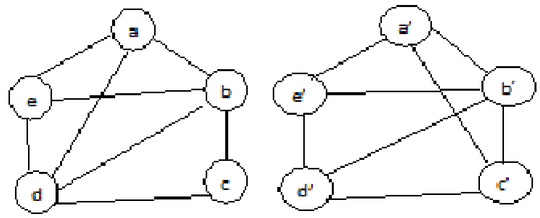
Figura 10.30: grafo del problema 10.2

El grafo de la figura **10.30** no tiene ciclo de Euler, pero si camino de Euler, porque tiene un solo par de nodos de grado impar; además tiene ciclo y camino de Hamilton, porque desde cualquier par de nodos no adyacentes, la suma de sus grados es mayor o igual que la mitad de cantidad de vértice.

Problema 10.3: determine, si los grafos G1 y G2 de las figuras 10.31, 10.32, 10.33 son isomorfos; cuál o cuáles tienen camino y/o ciclo de Euler o de Hamilton.

Solución:

Los grafos de la figura 10.31

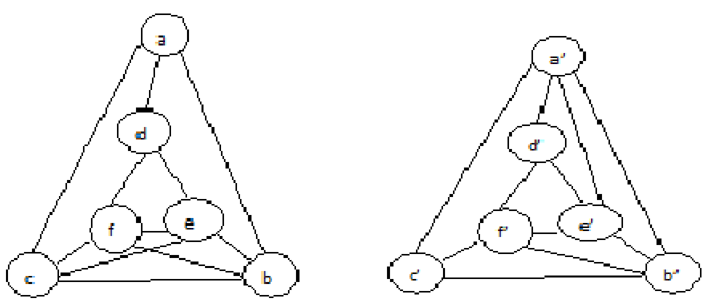


G1 G2

figura 10.31: grafos del problema 10.3

- no son isomorfos, porque falla la invariante del grado de los vértices, así: hay 2 nodos de grado 4 en el grafo G1 y en el G2 solo hay un vértice con este grado; en el grafo G2 hay un vértice de grado 2; en cambio en el grafo G2 ninguno tiene ese grado.
- G1 tiene ciclo y camino de Hamilton, ya que se pueden recorrer todos los vértices, sin repetir vértice. Además tiene camino de Euler, porque tiene exactamente 2 vértices de grado impar y permite recorrer todas las aristas sin repetir arista, basta con partir desde un vértice de grado impar hasta el otro vértice de grado impar: parta de a y llegue **e**. Pero no tiene ciclo de Euler ya que todos sus nodos no son de grado par.

Los grafos de la figura 10.32 se tiene



G1 G2

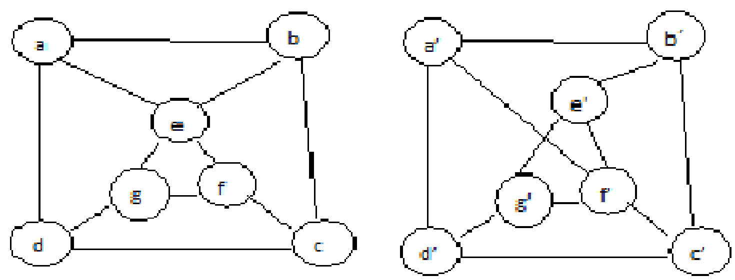
Figura 10.32: grafos del problema 10.3

- Los grafos G1 y G2 son isomorfos. Veamos un posible isomorfismo:

  f (a) = a', *f* (*b*) = *b',* *f* (*c*) = *c', f* (*d*) = *d', f* (*e*) = *f ', f* (*f*) = *e', f* (*g*) = *g', f* (*h*) = *h'*

- G1 y G2 tienen ciclo de Hamilton (porque desde cualquier par de vértices no adyacentes la suma de sus grados es mayor o igual que la cantidad de vértices del grafo) y por ende camino de Hamilton; tiene además, camino de Euler (porque tiene exactamente un par de vértices de grado impar), pero no tienen ciclo de Euler (algunos vértices tienen gado impar).

Los grafos de la figura 10.33 se puede afirmar que



G1 G2

figura 10.33: grafos del problema 10.3

- Los grafos G1 y G2 son isomorfos porque tienen la misma cantidad de aristas y de vértices, con su respectivo grado.

- G1 y G2 tienen ciclo y camino de Hamilton**,** no tienen ni ciclo ni camino de Euler.

Problema 10.4: determine si el grafo de la figura 10.34 es plano. Si lo es, dibújelo de nuevo sin que se crucen sus aristas.

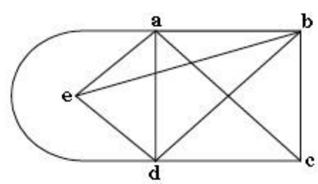


Figura 10.34: grafo no plano del problema 10.4

Efectivamente, luego de analizar detenidamente la gráfica se observa que se puede trazar sin que se crucen las aristas, quedando el grafo (figura 10.35):

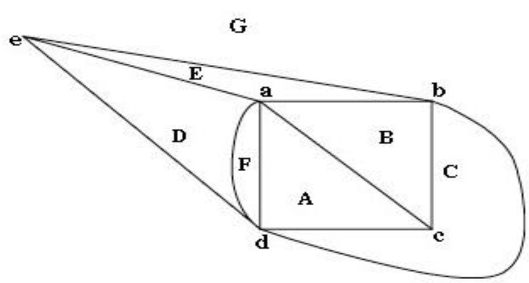


Figura 10.35: ejemplo de grafo plano

Ahora vamos a aplicar la fórmula para hace la verificación correspondiente.

Gráfica plana conexa con r = 7 regiones (A, B, C, D, E, F y cara externa), e = 10 aristas y v = 5 vértices; Por lo tanto, n - e + r =2; es decir, la grafica es plana.

Problema 10.4: para los grafos de las figuras 10.36 y 10.37, identifique las gráficas planas.

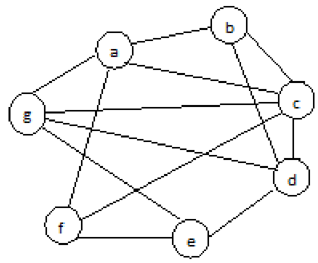


Figura 10.36: grafo del problema 10.4

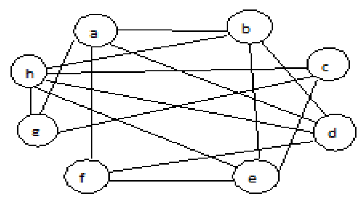


Figura 10.37: grafo del problema 10.4

Las gráficas de las figuras 10.36 y 10.37 no son planas, porque siempre quedan 2 vértices que al conectarse se cruzan otras aristas.

Problema 10.5: dibuje un grafo que tenga las siguientes características; grafo plano conexo con 9 vértices y con grados 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4 y 5. En efecto, El grafo de la figura 10.38 tiene 14 aristas, 6 caras. En efecto, cumple con las condiciones de una gráfica plana (7caras-14aristas+9vertices=2).

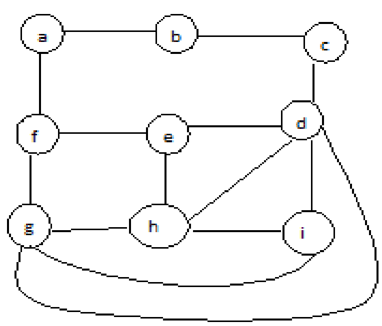


Figura 10.38: grafo del problema 10.5

AUTOEVALUACION 10

1. Del grafico cuya matriz de adyacencia esta dado por $M_A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ puede decirse que

A) es un grafo regular
B) es un grafo simple y conexo
C) es un grafo que tiene un camino de Euler
D) es un grafo bipartito

2. El grafo que cumple la siguiente condición dada en la tabla 1

Grado	A	B	C	D	E	F
Entrada	3	2	1	3	3	1
Salida	1	2	3	2	3	2

TABLA 1

A) Es Plano, con 8 regiones y fuertemente conexo
B) C) Es plano, con 8 regiones, pero no fuertemente conexo
C) Es plano, con 9 regiones y fuertemente conexo
D) D) Es plano, con 9 regiones, pero no fuertemente Conexo

TALLER 10

1. Dibuje un grafo de 7 vértices con:
    a. 0 puntos de articulación
    b. 1 punto de articulación
    c. 2 puntos de articulación
    d. 3 puntos de articulación
    e. 4 puntos de articulación
2. ¿El grafo de la figura 10.39 es bipartito?
3. Un grafo G es bipartito si y solo si todos sus ciclos tienen longitud par. En caso tal que la afirmación sea cierta ilústrelo con un ejemplo.

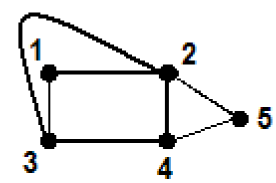


figura 10.39: grafo del ejercicio 2

4. Un grafo conexo G que tenga exactamente dos vértices v y w de grado impar, tiene un camino entre v y w. En caso tal que la afirmación sea cierta ilústrelo con un ejemplo.
5. Si una gráfica G tiene más de dos vértices de grado impar, entonces ¿G no puede tener un camino de Euler?. Ilustre su afirmación con un ejemplo.
6. Si G es un grafo conexo que tiene exactamente dos vértices de grado impar, entonces tiene un camino Euler (basta con partir de vértice de grado impar para llegar al otro vértice de grado impar). Ilustre la afirmación con un ejemplo usando grafos de 5 y de 6 vértices.

7. Complete los enunciados de los numerales 10.1 a 10.5 , respecto a la figura 10.39:

7.1 Un grafo G=(V,E) es bipartito si el conjunto de vértices V se puede separar en dos subconjuntos V_1 y V_2 disjuntos ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$) de modo que cada vértice V_1 sea adyacente con vértices de V_2**.** La gráfica, ¿es bipartita? ____. En caso afirmativo, ¿cuáles son los vértices? V_1={ } y V_2={ }

7.2 Un ciclo de una gráfica G es Hamiltoniano, si en cada vértice del grafo G aparece exactamente una vez, excepto el vértice inicial y el final (que aparece dos veces) y por lo tanto, cualquier par de vértices que no sea adyacente, la suma de sus grados es mayor o igual que n (n: número de vértices). El grafo ¿tiene ciclo Hamiltoniano? ___. En caso afirmativo, ¿cuántos? ___ ¿cuáles? ____________________________

7.3 Un ciclo de Euler en un grafo G existe, si G es conexo e incluye todas las aristas y cada vértice tiene grado par. El grafo ¿ciclo de Euler? ___. En caso afirmativo, ¿cuántos? ___ ¿cuáles?______________________________________

7.4 Un punto de articulación de un grafo no dirigido G es un nodo v tal que cuando es eliminado de G (junto con las aristas incidentes en el) se divide un componente conexo del grafo en dos o más componentes conexos. El grafo ¿tiene puntos de articulación? ___. En caso afirmativo, ¿cuántos? ___ ¿cuáles vértices? _________

8. Un grafo G con un punto de articulación ¿tiene ciclo de Euler? ____ Se puede afirmar que todo ciclo Euleriano no tiene punto de articulación? _____ Ilústrelo gráficamente.

9. Dibuje dos grafos que no sean Eulerianos.

10. Marque con X la respuesta correcta y en caso afirmativo complete el resto. Los grafos de las figuras 1 y 2 cumplen lo siguiente:

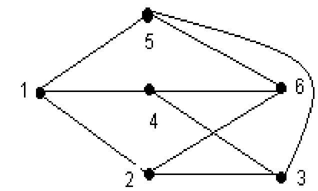


figura 1

El grafo de la figura 1	**SI**	**NO**	**Complete**
es bipartito completo?			V1={ } V2={ }
Tiene punto de articulación?			Cuál? _____________

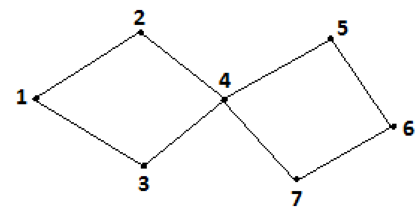


figura 2

El grafo de la figura 2	**SI**	**NO**	**COMPLETE**
Tiene ciclo de Euler?			Recorrido:
Tiene ciclo de Hamilton?			Recorrido:

11. **Cada numeral de selección múltiple tiene un valor de 16 puntos, siempre que esté completa la sustentación:**

12. Haga un programa que halle la matriz potencia (definida por el usuario).