8. FUNCIONES

8.1 Concepto de función

Sean A y B conjuntos numéricos. Si cada elemento de A está relacionado con uno y solo un elemento del conjunto B se dice que f es una función y se escribe f: A→B. Así que f(x)=y si y es el único elemento de B asignado por f al elemento x de A. La notación f(x) para una función de x se debe al matemático suizo Leonhard Euler. Si A=Conjunto de los números reales=R, se hablará de función real.

Ejemplo 8.1: Sea f:R→R una relación definida por f={(x,y)/ 7xy-4x+2y=5}. ¿es f una función? En caso de no serla, redefina f para que la sea.
En efecto, despeje y:

$$y=(5+4x)/(7x+2)$$

Para que la expresión quede definida en los reales se debe cumplir que

$$7x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2/7$$

Por lo tanto, f no es función, porque no está definida en todo el conjunto de los reales. Así que

f:R-{-2/7}→R es una función definida por

$$y=f(x)= (5+4x)/(7x+2).$$

Ejemplo 8.2: en una estación de gasolina venden a $64007/ galón de gasolina corriente y a $84007/ galón de gasolina extra. Si x= el numero de galones vendidos de gasolina corriente y y= el numero de galones vendidos de gasolina extra, en determinado día. La función que representa las ventas totales en la gasolinera en ese día es:

$$f(x,y)=6400x+8400y$$

8.2 Conjuntos dominio e imágenes de funciones

De una función f se pueden definir conjuntos de gran importancia en el desarrollo de las matemáticas y de las ciencias y la tecnología: dominio e imágenes de f.

8.2.1 Conjunto dominio de una función

Sean A y B conjuntos cualesquiera y f una función definida de A en B. El *dominio* de una función f, denotado $\mathfrak{D}(f)$ es el conjunto de partida; así que,

$$\mathfrak{D}(f)=\{x/xfy\}=A$$

Al dominio también se llama conjunto de "*pre-imágenes".* En efecto, despeje y para observar los valores de x para los cuales está definida y.

Ejemplo 5.3: Sea A={1,2,4,7} y B={2,4,8,14} y la función f:A→B una relación definida por f(x)=2x. Determine el $\mathfrak{D}$(f).
La relación estará definida como sigue:

f={(1,2),(2,4),(4,8), (7,14)}

Por lo tanto,

$\mathfrak{D}$(f)={1,2,4,7}

8.2.2 Conjunto de imágenes de una función

Sean A y B conjuntos cualesquiera y f una función definida de A en B. Las *Imágenes* de una función f, denotado Im(f) es el conjunto formado por todos los segundos elementos o segundas componentes de la función; así que,

Im(f)={y/xfy}

En efecto, despeje x para observar los valores de y para los cuales está definida x. El conjunto de imágenes también es llamado “codominio” o “rango” por algunos matemáticos.

Ejemplo 8.4: dados los conjuntos y la relación del ejemplo 8.2, el rango de f es,

Im(f)={2,4,8,14}

8.2.3 Técnica para hallar el dominio y las imágenes de una función real

Para hallar el domino o las imágenes para una función f:R→R se presentan entre otros, los siguientes casos:

- La variable x está en el denominador. En este caso se restringe a x para que no haga que el denominador sea cero.
- La variable está en la cantidad subradical de índice par. Restrinja a x para que haga que la cantidad subradical sea no negativa.
- La variable está como denominador en la cantidad subradical de índice par. En efecto, haga que el denominador sea diferente de cero y que la cantidad subradical sea no negativa.
- La variable no está ni como denominador ni como parte de la cantidad subradical de índice par. En este caso, la función estará definida para todo el conjunto de los reales.

Ejemplo 8.5: dada la relación f definida en los reales por

$$f=\{(x,y)\in RxR/3xy - 4x + 3y - 4 = 0\},$$

halle el dominio y las imágenes de f. En efecto, f:R→R no es función, porque al despejar la y de f se tienen valores para x que no definen la función. En efecto, $x\neq 4/3 \Leftrightarrow x\in R$-{4/3}. Por lo tanto,

$\mathfrak{D}$(f)= R-{4/3}

Para hallar el conjunto imagen despeje x de f para encontrar los valores de y que definen a f. Por consiguiente,

$$Im(f)= R-\{-1\}$$

Por lo tanto, redefinida f como f:R-{-4/3}→R es una función.

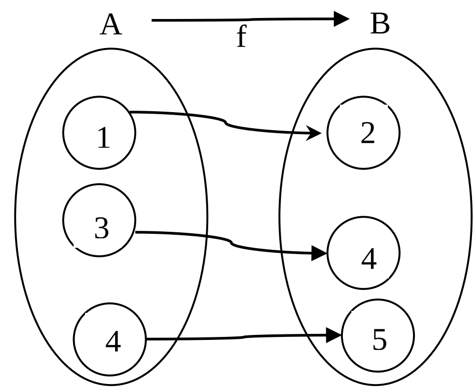

Figura 8.1: f es función

8.3 Clasificación de funciones

Las funciones se pueden clasificar entre otras en:

- Función constante
- Función lineal
- Función idéntica
- Función segmentada o por tramos

8.3.1 Función constante

Es aquella cuyos elementos del conjunto del dominio tienen la misma imagen. Es decir, aquella cuyo dominio de imagen es un conjunto unitario.
Son aquellas funciones de la forma f()=k con k = constante

Ejemplo 8.6: f(x)=3 es una función constante

8.3.2 Función lineal

Es una función cuyo dominio y rango son todos los números reales y cuya expresión analítica es un polinomio de primer grado. Son aquellas funciones de la forma f()=ax+b siendo a, b constantes

Ejemplo 8.7: si A={1, 3, 4} y B={2, 4, 5} y f(x)=x+1 para f:A→B. Determine f y represéntela gráficamente.
f(1)=2, f(3)=4 y f(4)=5
Su representación gráfica esta en la figura 8.1.

8.3.3 Función Idéntica

Es cuando cada elemento del dominio tiene como imagen a él mismo. Es decir, $f(x)=x$.

8.3.4 Función Inversa

Una función f:A→B se dice que tiene función inversa, si f es biyectiva y se denota por f^{-1}:B→A. Es decir, para todo y∈B existe un x∈A tal que la función inversa $f^{-1}(y)=x$.

Ejemplo 8.8: A={-1,0,1,2,3} y f:A→A una relación definida por
f={(-1,-1),(1,2),(0,1),(2,3),(3,0)}. Determine f^{-1}.

Solución

Observe que ninguna 1ª componente se repite y todos los elementos de A están relacionados; por lo tanto, f es función.

Ahora veamos, cualquier par de elementos diferentes de A les corresponden elementos diferentes del mismo conjunto; es decir, f es 1-1.

Observe además que el conjunto formado por las segundas componentes es igual al conjunto de llegada; por lo tanto, f es sobre.

Por consiguiente, f es función biyectiva (por ser 1-1 y sobre), lo cual implica que, existe función inversa f^{-1}.

Para calcular la función inversa f^{-1} basta con cambiar el orden de las componentes de las parejas ordenadas:

$$f^{-1}=\{(-1,-1),(2,1),(1,0),(3,2),(0,3)\}$$

Ejemplo 8.9: halle la función inversa de $f(x)=3x-1$para $f:R\rightarrow R$ si existe. En consecuencia, la función inversa corresponde a

$$f^{-1}(y)=(y+1)/3$$

8.3.5 Función por tramos

Es una función formada por la unión de dos o más funciones. Son de la forma

$$f(x)=f_1(x) \cup f_2(x) \cup f_3(x) \cup \ldots \cup f_n(x)$$

Tal que

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) \text{ para } x<a \\ f_2(x) \text{ para } a\leq x<b \\ f_3(x) \text{ para } b\leq x<c \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x) \text{ para } m\leq x<n \end{cases}$$

Ejemplo 8.10: en un almacén de juguetes venden sus artículos a \$4000 c/u, pero al por mayor (20 o más artículos) las ventas las realizan así: \$3000/unidad; ahora si la venta a un cliente es superior a 100 artículos le hacen un descuento del 10% adicional a los \$3000/artículo. Escriba la función que representa una venta. ¿Cómo se denomina la función anterior? Determine el dominio y el rango de esa función.

$$f(x)=\begin{cases} 4000x, \text{ si } x<20 \\ 3000x, \text{ si } 20\leq x\leq 100 \\ 2700x, \text{ si } x>100 \end{cases}$$

A este función se denomina “función segmentada o por tramos” y su dominio es [0,∝), porque nunca sería posible realizar una venta negativa de artículos.

8.4 Composición de funciones

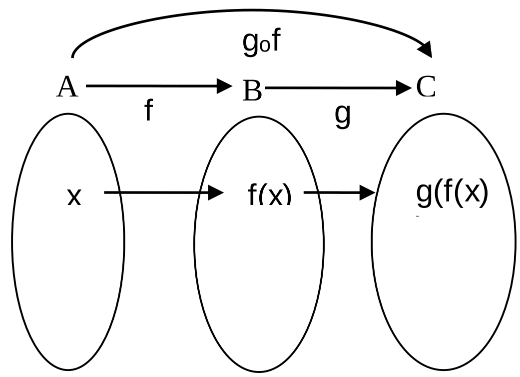

Figura 8.2: composición de g y f

Sean $f:A\to B$ y $g:B\to C$ funciones. La composición g y f denotadas por $g_o f:A\to C$

$$(g_o f)(x)=g(f(x))$$

Esto significa que la función $g_o f$ le asigna al elemento x de A, el respectivo elemento asignado por g a f(x). Vea la ilustración en la figura 8.2 Observe que $g_o f\neq f_o g$.

Dos funciones son inversa si su compuesta es igual a la función inversa. Es decir, sea $f: A\to A$ una función decimos que f^{-1} es la inversa si y sólo si $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I$.

Una función $f:A\to B$ se dice que tiene función inversa, si f es biyectiva y se denota por $f^{-1}:B\to A$. Es decir, para todo $y\in B$ existe un $x\in A$ tal que la función inversa $f^{-1}(y)=x$.

Ejemplo 8.11: sean $f:R\to R$ y $g:R\to R$ funciones definidas por $f(x)=(3x^2-2x+5)/4$ y $g(x)=2x+3$

$(g_o f)(x)=g(f(x))=(3(2x+3)^2 -2(2x+3)+5)/4=3x^2+8x+4$

$(f_o g)(x)= (3x^2-2x+5)/2 +3.$

TALLER 8

1. Dado que A={0,1,2,3,4,5} y B={0,1,2,3,4,5} y las relaciones R_i están definidas de A en B, determine qué clase de función es cada una de las siguientes relaciones:

1.1 R_1= {(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (,0), (5,0)}
1.2 R_2= {(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}
1.3 R_3= {(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5)}
1.4 R_4= {(0,0), (1,1), (2,0), (3,3), (4,1), (5,3)}
1.5 R_5= {(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5)}
1.6 R_6= {(0,0), (5,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}
1.7 R_7= {(0,0), (1,5), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}
Nota: si una relación es función, entonces relación inversa también lo es.

2. En cada una de las relaciones de los numerales 2.1 a 2.10 redefina f si es necesario para que sea función:
   2.1 $f:R-\{0,3\}\rightarrow R$ definida por $f(x)=1/x(x-3)$
   2.2 $f:R\rightarrow R$ definida por $f(x)=1/(x^3-27)$
   2.3 $f:R\rightarrow R$ definida por $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$
   2.4 $f:R\rightarrow R$ definida por $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+1}$
   2.5 $f:R-\{0,3\}\rightarrow R$ definida por $f(x)=\sqrt{1/x(x-3)}$
   2.6 $f:R\rightarrow R$ definida por $f(x)=1/(x^2-4)$
   2.7 $f:R\rightarrow R$ definida por $f(x)=(x^2-1)/(x+1)$
   2.8 $f:R\rightarrow R$ definida por $f=\{(x,y)/3x+2xy-5y+4=0\}$
   2.9 $f:R\rightarrow R$ definida por $f=\{(x,y)/yx^2-y-x^2=0\}$
   2.10 $f:R\rightarrow R$ definida por $f=\{(x,y)/\ yx^2-3xy-1=0\}$

3. Halle el rango de cada una de las funciones del numeral anterior

4. Halle $g_o f$ y $f_o g$ dado que $f:R\rightarrow R$ y $g:R\rightarrow R$ funciones definidas por:
   4.1 $f(x)=3x^2-2x+1$ y $g(x)=4x+7$.
   4.2 $f(x)=\sqrt{3x^2-2x+1}$ y $g(x)=x+1$
   4.3 $f(x)=\sqrt[3]{3x^3-1}$ y $g(x)=x^2-1$
   4.4 $f(x)=3/(x^2-2)+1$ y $g(x)=4-x$
   4.5 $f(x)=\sqrt{x-1}$ y $g(x)=1/(x^2-4)$

5. Escriba falso (F) o verdadero (V) a cada una de las siguientes afirmaciones:

____ 1. Toda relación es función
____ 2. Toda Función es relación
____ 3. El dominio de una función es igual al conjunto de partida.
____ 4. Si $f:A\rightarrow B$ es una relación y dominio de f es igual al conjunto de partida, entonces f siempre es función.
____ 5. Si $f:A\rightarrow B$ es función, entonces f es una relación y dominio de f es igual al conjunto de partida.

____ 6. Si 2 elementos del conjunto de llegada están relacionados con un mismo elemento del conjunto de partida, entonces f no es función.

____ 7. Sea f:A→B es una relación. Si un elemento del conjunto de partida no está relacionado, pero todos los elementos del conjunto de llegada están relacionados con uno y solo un elemento del conjunto de partida, entonces f siempre es función.

____ 8. Si f:A→B es una función, entonces el rango de f es igual al conjunto de llegada.

____ 9. Sea f:A→B una relación. Si el rango de f es igual al conjunto de llegada entonces f es siempre una función.

____ 10. Sea f:A→B es una relación. Si el rango de f es igual al conjunto de llegada y el dominio de f es igual al conjunto de partida, entonces f es siempre una función.

6. Sea f: $R \to R$ es una relación. Analice si f es una función y en caso negativo redefina f según las siguientes relaciones:
    1. f={(x,y)/2x-5y-7=0} Es función
    2. f={(x,y)/2x-5y+4xy -7=0} No es función. Redefinición f: $R-\{5/4\} \to R$
    3. f={(x,y)/ x-y+xy -2=0} No es función. Redefinición f: $R-\{1\} \to R$
    4. f={(x,y)/x^2-4xy -7=0} No es función. Redefinición f: $R-\{0\} \to R$
    5. f={(x,y)/x^2y-4xy-6=0} No es función. Redefinición f: $R-\{0, 4\} \to R$
    6. f={(x,y)/y^2-5xy^2-6=0} No es función. Redefinición f:$(-\infty, 1/5)$) $\to R$
    7. f={(x,y)/4y^2-4xy^2 -1=0} No es función. Redefinición f: $(-1, \infty)$) $\to R$
    8. f={(x,y)/4y^2-4xy+1=0} No es función. Redefinición f:$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$) $\to R$
    9. f={(x,y)/-2x^2+5y-9x+7=0} Es función
    10. f={(x,y)/4x+9y^2-16=0} No es función. Redefinición f:$(-\infty, 4]$) $\to R$
    11. f={(x,y)/y^2-6xy+144=0} No es función. Redefinición f:$(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$) $\to R$
    12. f={(x,y)/ x^2y^2-6xy-16=0} No es función. Redefinición f: $R-\{0\} \to R$