Capítulo 11: TEORIA DE ARBOLES BINARIOS

11.1 Introducción

En general los árboles se utilizan para construir árboles genealógicos, pero en informática tienen gran aplicación para la creación de los directorios (carpetas) en los discos de las computadoras, para mostrar las relaciones lógicas entre los registros de una base de datos (colección de registros controlados por una computadora) y las búsquedas en los compiladores de los lenguajes de programación (véase árboles binarios).

11.2 Concepto de árbol

Un árbol T es un grafo simple que cumple que entre los vértices v, w$\in$T existe un único camino simple.

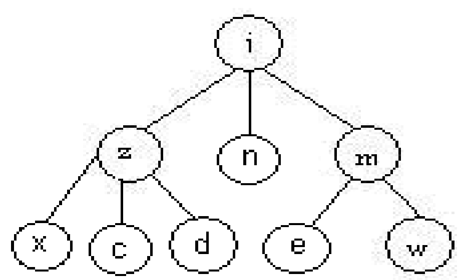

figura 11.1: árbol

Observe que para ir de un vértice cualquiera a otro siempre se tiene un camino simple; por ejemplo, para ir del vértice **d** al vértice **n**, basta con recorrer el camino d - z - i - n.

11.3 Conceptos básicos de árboles

Vértice. También llamado nodo y, corresponde a cada uno de los elementos del árbol.

Ejemplo 11.1: según la figura 11.1, los vértices son: i, z, n, m, x, c, d, e, w.

Raíz: es el vértice principal del árbol

Ejemplo 11.2: según la figura 11.1, la raíz es i.

Padre: es el vértice que puede o no tener ramificaciones (subárboles).

Ejemplo 11.3: según la figura 11.1, z es padre de los nodos x, c, d.

Hijo: es el vértice descendiente de un vértice raíz o padre.

Ejemplo 11.4: según la figura 10.1, los nodos x, c, d son hijos de z.

Hermanos: son los vértices descendientes de un mismo vértice padre

Ejemplo 11.5: según la figura 11.1, los nodos x, c, d son hermanos.

Descendiente: siempre que exista camino para ir de un vértice v a otro w, se dice que, v es descendiente de w.

Ejemplo 11.10: según la figura 11.1, los nodos descendientes de i son entre otros z, x.

Ancestro: si hay camino para ir de un vértice v a otro vértice w (máximo hasta la raíz) se dice que, w es ancestro de v.

Ejemplo 11.11: según la figura 11.1, los nodos x, c, d son i, z.

Hoja. es un vértice que no tiene ramificaciones (uno o más hijos). También se llama nodo terminal.

Ejemplo 11.6: según la figura 11.1, los nodos del árbol x, c, d, e w son hojas

Nodo no Terminal. Es aquel que tiene por lo menos una ramificación.

Ejemplo 11.7: según la figura 11.1, los nodos no terminales son: i, z, m, n.

Camino. Es el conjunto de vértices por los que se pasa para ir de un vértice a otro.

Ejemplo 11.8: según la figura 11.1, el camino para ir del nodo x al nodo n es x, z, i, n.

Longitud de un camino. Es el número de vértices por los que se deben pasar o recorrer para ir de un vértice a otro.

Ejemplo 11.9: La longitud del camino para ir del nodo x al nodo n de la figura 11.1 es 4.

Nivel: es la longitud del camino simple de la raíz al vértice. Cada nodo tiene un nivel dentro de un árbol.

Ejemplo 11.14: según la figura 11.1, el nodo raíz i tiene el nivel 0, sus hijos ocupan el nivel 1; sus nietos ocupan el nivel 2 y, así sucesivamente

Altura de un árbol. Es el nivel de la hoja u hojas más distantes de la raíz.

Ejemplo 11.14: según la figura 11.1, la altura del árbol es 2.

11.4 Concepto de árbol binario

Un árbol binario es un tipo de árbol en que cada vértice máximo puede tener dos hijos; su nodo raíz está enlazado a dos subárboles binarios disjuntos denominados subárbol izquierdo y subárbol derecho. Los árboles binarios no son vacíos ya que como mínimo tienen el nodo raíz.

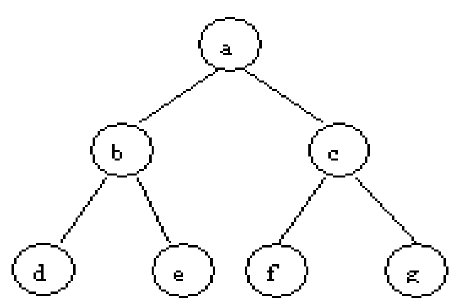

figura 10.2: árbol lleno

11.4.1 Árbol binario lleno

Es aquel árbol en el que los nodos de cada nivel tienen sus dos hijos o ninguno (si es hoja).

Ejemplo 11.15: el árbol de la figura 11.2 es lleno.

11.4.2 Árbol binario completo

Es aquel árbol binario lleno en que todas sus hojas están en el nivel n o n-1 considerando que para un hijo derecho hay siempre un hijo izquierdo. Estos árboles ocupan todas las posiciones del vector. Por lo tanto, todo árbol binario lleno es completo, pero no la viceversa.

Ejemplo 11.16: el árbol de la figura 11.3 es completo.

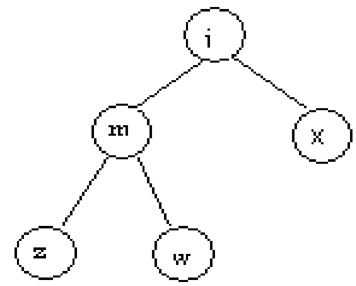

figura 11.3: árbol completo

11.5 Propiedades de los árboles binarios

1. Sea k un nivel cualquiera de un árbol binario, el máximo número de nodos en ese nivel es 2^k.

2. Para un árbol binario de altura k, el máximo número de nodos del árbol es 2^{k+1}-1.

3. Sea N_o= número de hojas (registros de grado cero) y N_2= número de nodos de grado 2. Entonces, N_o= N_2+1.

Ejemplo 11.17: el árbol de la figura 11.3 tiene 2 niveles; por lo tanto, el máximo número de nodos en el nivel 2 será 2^2=4; en el nivel 1 es 2^1=2

El árbol de la figura 11.2 es un árbol lleno de altura 2, conformado por 2^{2+1}-1=7 nodos.

En la figura 11.3, el número de hojas es 3; por lo tanto, el número de nodos de grado 2 es N_2= N_0-1=3-1=2.

11.6 Representación de árboles binarios

Los árboles binarios pueden representarse en un vector o en una lista ligada. Nuestro interés se centrará en los vectores.

Para representar a un árbol binario en un vector se escriben por niveles los nodos del árbol de manera ordenada, de izquierda a derecha (hijo izquierdo – hijo derecho).

Esta representación es poco eficiente cuando el árbol no es completo, en vista del gran desperdicio de memoria que podría haber por las posiciones libres que quedarían en el vector.

Si k es la posición en un vector de un nodo de un árbol con n niveles, se tiene:

- El vector tendrá 2^{n+1} -1 posiciones.
- El padre estará en la posición k/2 (con k>1)
- El hijo izquierdo estará en la posición 2*I (con 2*k<n) y el hijo derecho en la posición 2*k+1.

Ejemplo 11.18: represente en un vector el árbol de la figura 11.4

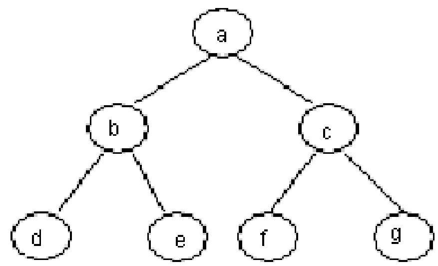

figura 11.4: árbol del ejemplo 11.18

El árbol de la figura 11.4 representado en un vector queda como sigue:

1	2	3	4	5	6	7
A	b	c	d	e	f	g

¿En qué posiciones están: el hijo izquierdo de b, el hijo derecho de c. ¿Cómo podría verificarse que f y e son hojas?

11.7 Recorridos en un árbol binario

Un recorrido en un árbol binario es una operación que consiste en visitar todos sus vértices o nodos, de tal manera que cada vértice se visite una sola vez.

Se distinguen tres tipos de recorrido: INORDEN, POSORDEN Y PREORDEN.

En cada recorrido se tiene en cuenta la posición de la raíz (de ahí su nombre) y que siempre se debe ejecutar primero el hijo izquierdo y luego el derecho.

Recorrido INORDEN. Este recorrido se realiza así: primero recorre el subárbol izquierdo, segundo visita la raíz y por último, va al subárbol derecho. En síntesis:

hijo izquierdo – raíz – hijo derecho

Recorrido PREORDEN. Este recorrido se realiza así: primero visita la raíz; segundo recorre el subárbol izquierdo y por último va a subárbol derecho. En síntesis:

raíz - hijo izquierdo – hijo derecho

Recorrido POSORDEN. Primero recorre el subárbol izquierdo; segundo, recorre el subárbol derecho y por último, visita la raíz. En síntesis:

hijo izquierdo– hijo derecho – raíz

Ejemplo 11.19: realice los diferentes recorridos sobre árboles de las figuras 11.5a, 11.5b y 11.5c.

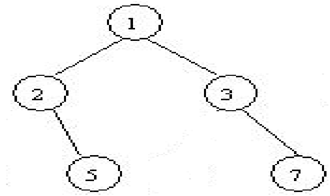

figura 11.5a

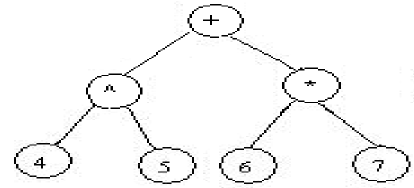

figura 11.5b

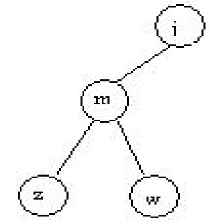

figura 11.5c

RECORRIDOS	Figura 11.5ª	Figura 11.5b	Figura 11.5c
INORDEN	2-5-1-3-7	4^5+6*7	z m n i
PREORDEN	1-2-5-3-7	+^4 5*6 7	i m z n
POSORDEN	5-2-7-3-1	4 5 ^ 6 7*+	z n m i

11.8 Tipos de árboles binarios
11.8.1 Árboles de expresión

Son árboles binarios que se utilizan para almacenar en la memoria de una computadora expresiones lógicas, aritméticas o algebraicas. Este proceso lo realizan los compiladores de los lenguajes de programación. Los PC y las calculadoras comunes utilizan el recorrido INORDEN usando la notación infija para evaluar las expresiones, al igual que los seres humanos. El recorrido PREORDEN utiliza la notación infija o polaca.

Algunos compiladores y algunas calculadoras como por ejemplo, la Hewlet Packard evalúan las expresiones en POSORDEN usando la notación posfija (o notación polaca inversa) donde el operador aparece después de sus operandos; por ejemplo, AB/ indican que A debe dividirse por B. Observe que la notación posfija tiene ventajas sobre la notación infija debido a que la notación posfija no necesita paréntesis ni tiene que predeterminar un orden de prioridad para sus operadores (lógicos o aritméticos); es por tal razón que una expresión se evaluará sin ambigüedad.

Para evaluar una expresión con recorrido INORDEN pueden seguirse los siguientes pasos:

1. Trascriba la expresión con recorrido INORDEN a POSORDEN (o PREORDEN). Para tal fin, parentice completamente la expresión y luego, cambie el paréntesis derecho (o izquierdo) por el operador más próximo no utilizado.

2. Forme el árbol de expresión con recorrido POSORDEN (o PREORDEN) a partir de la expresión dada. En efecto, el árbol se forma escribiendo como raíz el operador principal de la expresión y se escriben los operandos como subárboles izquierdo y derecho. Observe que las hojas del árbol corresponderán a los operandos.

3. Evalúe la expresión utilizando el árbol, dándole valores aritméticos o lógicos a los operandos.

Ejemplo 11.20: la representación en un árbol binario de la expresión algebraica

A+B*(-(C+D))

$$(A+(B*(-(C+D))))\Rightarrow ABCD+-*+$$

se ve en la figura 11.6a. La figura 11.6b representa la expresión

$$((C+D)/(B*(A-D)))\Rightarrow CD+BAD-*/$$

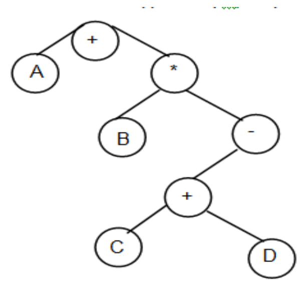

figura 11.6a

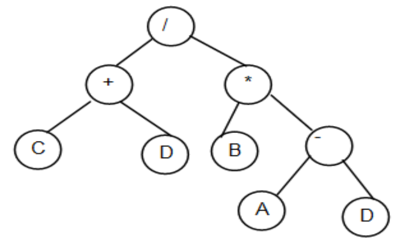

figura 11.6b

11.8.2 Árbol binario de búsqueda

Un árbol binario de búsqueda es aquel que tiene sus nodos con un orden definido, de tal manera que los datos del subárbol izquierdo son menores y los del subárbol derecho son mayores. Estos árboles tienen como particularidad la permisión de que se puedan realizar búsquedas de nodos o datos determinados, utilizando el método de búsqueda binaria de manera similar al usado en arreglos.

Para crear un árbol binario de búsqueda a partir un listado de datos, asuma que el primer dato es la raíz del árbol; los demás se ubican en el árbol así: los menores como hijos izquierdos y los mayores como hijos derechos.

Ejemplo 11.21: el grafico del árbol, según la siguiente lista: 43, 10, 8, 54, 15, 50, 53 está en la figura 11.7.

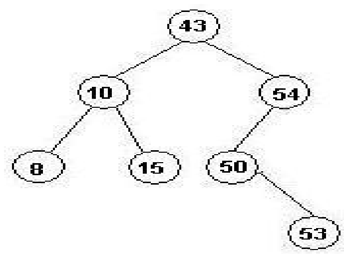

Figura 11.7: grafo ejemplo 11.5

AUTOEVALUACION

1. El recorrido en PREORDEN del árbol del figura 3 es
   A) isla, sol, mes, té, bar, cal
   B) isla, sol, cal, mes, té, bar
   C) isla, mes, té, sol, bar, cal
   D) isla, sol, mes, té, cal, bar

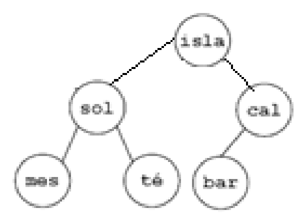

figura 11.8

2. Si los recorridos en inorden, preorden y postorden de un árbol binario de la figura 4 son los siguientes: inorden: X,Y,W,Z,T,K, en preorden: Z,Y,X,W,T,K y en postorden: X,W,Y,K,T,Z. El árbol binario correspondiente es

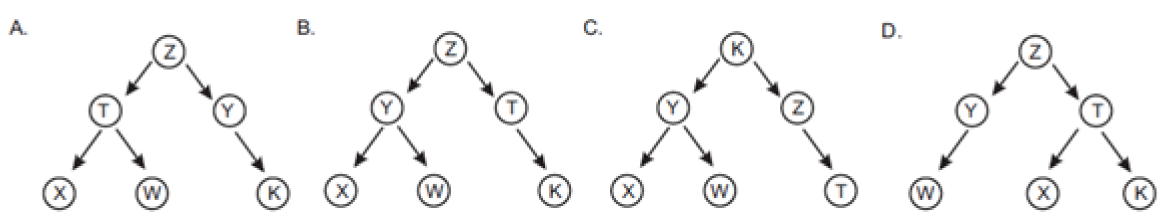

Figura 4

3. Al evaluar + – 8 * 2 3 * 4 – 9 7 que expresa el recorrido en PREORDEN de un árbol binario se obtiene como resultado:

   A) 5 B) 6 C) 10 D) 12

4. Dado el árbol de búsqueda binaria de la figura 5

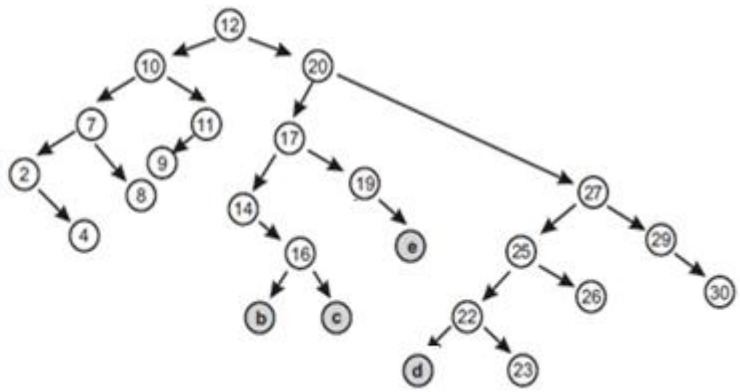

Figura 5

Si se inserta el número 21, éste quedaría ubicado en el nodo

A) b B) d C) c D) e

TALLER 11

1. Se dice que dos árboles binarios son semejantes si tienen el mismo número de nodos y los valores de los nodos del primer árbol son los mismos valores de los nodos del segundo árbol, sin importar la relación de parentesco entre ellos. Vea figura 10.8a, 10.8b y 10.8c, teniendo en cuenta el concepto anterior, haga la representación en un vector y desarrolle un programa determine si dos de esos árboles son o no semejantes.

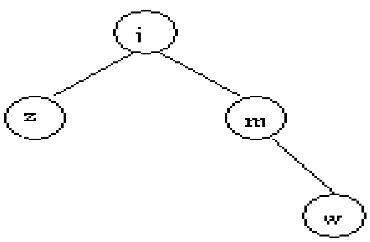

figura 11.8b

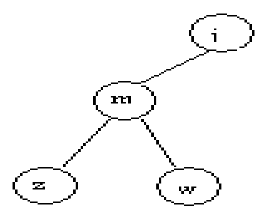

figura 11.8c

2. Haga un programa que determine el número de hojas de un árbol binario representado en un vector.
3. Haga un programa que determine el hermano de un nodo cualquiera.
4. Haga un programa que determine el padre de un nodo cualquiera.
5. Se dice que dos árboles binarios son isomorfos si tienen la misma estructura, aunque no tengan los mismos valores de los nodos (vea figura 11.9a y 11.9b). Teniendo en cuenta el concepto anterior, haga la representación en un vector y desarrolle un programa determine si dos árboles son o no isomorfos.

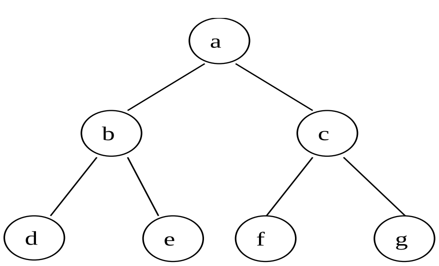

figura 11.9a

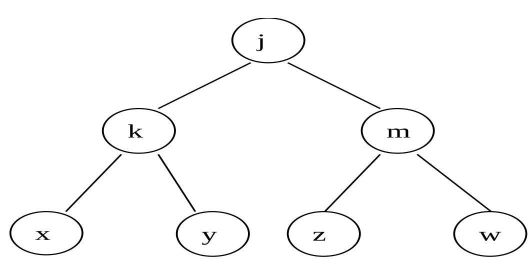

figura 11.9b

6. Escriba las .las siguientes expresiones en PREORDEN y en POSORDEN:
    a. (X*Y)/((A+B)*C)
    b. ((A-B)/(C-D)^(A+C))*B
    c. ((A+C)-(D*A)^C)/(B*D)
    d. (X+Y)*((A-B)/(D^C))
    e. (((A+B)*C+D)*E)-((A+B)*C-D)
    f. (((A-B)+C*D)/(E-E*D))^A

7. Determine el valor de la expresión POSORDEN si A=1, B=2, C=3 y D= 4
    a. ABC+- =>A-(B+C)
    b. AB+CD*AA/ - B* => ((A+B) - (C*D)/A – A)*B
    c. ABAB*+*D*
    d. ABC^*CBD+/-
    e. ADBCD*-+*

8. Haga el recorrido INORDEN, POSORDEN Y PREORDEN a los árboles de las figuras 11.8a, 11.8b, 11.8c, 11.9a y 11.9b.

9. Cada una de las siguientes expresiones representan un árbol binario, con recorrido POSORDEN Escriba en forma PREORDEN e INORDEN, de manera usual (con los correspondientes paréntesis):

    a. ABC/-
    b. ABC**CDE+/-
    c. AB+CD/AA*--B/
    d. ABC/*CDE+* -
    e. ABC**ABC++-

10. Dibuje el árbol correspondiente de cada una de las siguientes situaciones:
    a. El recorrido en INORDEN: ACFEBD y en PREORDEN: ABCEFD
    b. El recorrido en INORDEN: ADCEGFHB y en POSORDEN: DAGHFEBC
    c. El recorrido en POSORDEN: EFCHGDBA y en INORDEN: ABCFEDGH

11. Complete los enunciados a, b y c.

    a. Dado que un árbol binario lleno de altura k tiene 128 nodos en su último nivel; entonces, el número de nodos de grado 2 es: ______. Escriba el proceso del cálculo.

    b. Se quiere representar en un vector un árbol binario lleno que tiene 256 hojas, ¿cuántas posiciones debe tener el vector? _____. Escriba el proceso del cálculo.

    c. Un árbol binario lleno de 63 nodos de grado 2 está representado en un vector; la posición del hijo derecho del último nodo de grado 2 de este árbol está en la posición ______ del vector. Escriba el proceso del cálculo.

12. Dibuje el árbol de búsqueda correspondiente a la siguiente lista:

-7, 8, 12, 34, -25, 17, 5, 9, -13, 20, 17,-8

13. La figura 10.10representa un árbol de expresión. Evalúe la expresión obtenida dado que A=4, B=2, C= -2, D= -1.

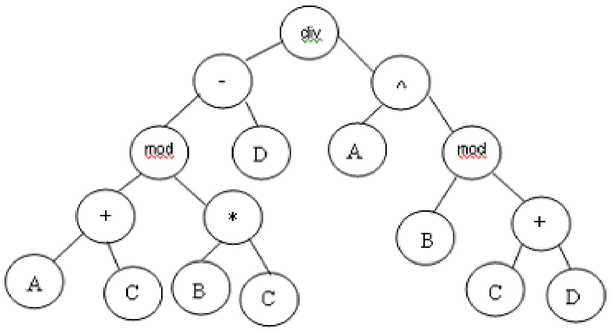

figura11.10

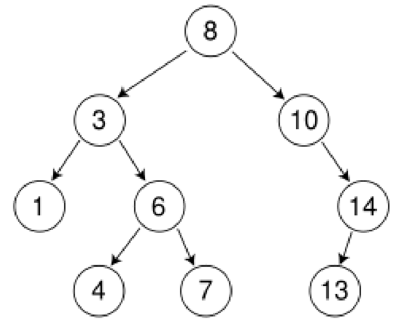

figura 11.11: problema 15

14. Dado el árbol de la figura 11.11, construya en árbol espejo; es decir, aquel en que los hijos izquierdos son derechos y viceversa.

15. Determine las hojas del árbol de los árboles binarios representados en los siguientes vectores; además, defina cuántos nodos de grado 2 tiene cada árbol:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	..	..	..		15	.	.	30	…	...
A	B	C		D		G	E	F						H			I		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	..	15	…	18	19	...	22	23	…	30	31
A	B	C	D	E		F		G		M		I		N	J			K		L	H

1	2	3	4	5	6	7	8	...	12	13	14	15	16	17	...	24	25	...	30	31
H	A	B	L		E	N	P		A			S		I		T	I		C	O

16. Recorra en: 1) INORDEN y POSORDEN el primer vector; 2)POSORDEN y PREORDEN, el segundo vector y, 3)INORDEN y PREORDEN el tercer vector.

17. Tres estudiantes de matemáticas discretas juegan “mi arbolito”. El profesor da las siguientes instrucciones: organícense el equipos de 3; el primero dibuja arbitrariamente un árbol binario; el segundo le ubica letras como nodos recorridos en INORDEN y el tercero escribe una expresión que pueda formarse cuando lo recorre en PREORDEN (con o sin sentido completo). Los jugadores siguieron las instrucciones del juego: dibujaron un árbol binario con 15 nodos, con los caracteres, NEAISTUMHCRFOOI. Curiosamente cuando el tercer jugador hizo el recorrido PREORDEN la expresión que apareció fue: TENIASMUCHOFRIO. El árbol binario que dibujó el primer estudiante fue: _______

18. Con el mismo juego “mi arbolito” otro equipo siguió atentamente las instrucciones: un estudiante dibujo el árbol binario con 12 nodos; el segundo lo lleno con las cifras 762485137209 decimales y el tercero lo recorrió en POSORDEN y le produjo el número 674823129075. ¿cuál es el recorrido en PREORDEN?

Según los grafos 3 y 4, complete cada uno de los enunciados:

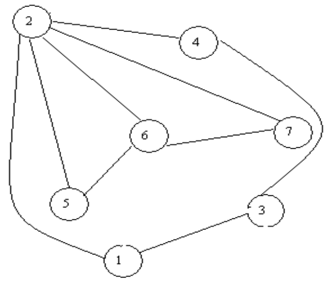

Figura 3: Grafo 3

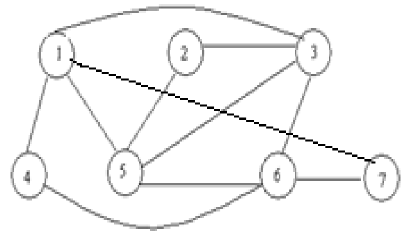

Figura 4: Grafo 4

1. Marque con X la respuesta correcta y en caso afirmativo complete el resto, teniendo en cuenta el grafo 3, que representa la internet de una empresa donde cada nodo corresponde a las oficinas de un departamento. Puede afirmarse según la figura 3 que

	SI	NO	Complete
tiene punto de articulación? Es decir, si se descompone una oficina, podrían quedar 2 ó más intranets con sus oficinas comunicadas entre sí?			Cuál (es) oficina (as) ?: __________
es una intranet completa; es decir, existe comunicación directa entre cualquier par de oficinas?			Por qué?
representa a un grafo bipartito?			V1= { } V2= { }
es un grafo fuertemente conexo? Es decir, todas las oficinas del departamento pueden comunicarse entre si?			Por qué?

2. En el grafo 4, cada arista corresponde a las carreteras para ir de una ciudad a otra. Puede afirmarse según la figura 4 que

	SI	NO	Complete
Puede partir de una ciudad, ir por todas las carreteras, sin repetir carretera y regresar a la ciudad de partida?			Recorrido:

Puede partir de una ciudad, ir por todas las ciudades, sin repetir ciudad y regresar a la ciudad de partida?			Recorrido:
Puede partir de una ciudad, ir por todas las carreteras, sin repetir carretera?			Recorrido:
Puede partir de una ciudad, ir por todas las ciudades, sin repetir ciudad?			Recorrido: