

ЛЕКЦИЯ 4. СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫХ КОДОВ, ОБНАРУЖИВАЮЩИХ ОШИБКИ

1. Применение помехоустойчивых кодов с проверкой на четность и их характеристика

$$(n, k) = (k+1, k)$$

Абсолютная избыточность кода - $(n-k)=1$, а относительная - $\eta = \frac{n-k}{n} = \frac{1}{n}$.

Относительная кодовая скорость равна $R = \frac{k}{n} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} = 1 - \eta$.

Любая разрешенная кодовая комбинация имеет четное число "1", число разрешенных кодовых комбинаций равно $2^k = 2^{n-1}$, т.е. ровно половине от общего числа n -элементных двоичных комбинаций.

Алгоритм кодирования. Информационная комбинация $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$.

Проверочный элемент "b" : $b = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \pmod{2}$.

Образующая матрица :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d_{\min} = 2. \quad t_{\text{оо}} = d_{\min} - 1.$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{E_{k \times k}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{R_{1 \times k}}$$

Алгоритм декодирования.

Проверочная матрица H : $H = \begin{bmatrix} R^T & E_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & E_{1 \times 1} \end{bmatrix}, \quad G \cdot H^T = 0$

$$H = \begin{bmatrix} \underbrace{111 \dots 1}_{R^T} & \underbrace{1}_{E_{1 \times 1}} \end{bmatrix}$$

Принятая комбинация $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$, $S = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \pmod{2}.$

$$P_{\text{пп}} = (1-p)^n; \quad P_{\text{оо}} = \sum_{i=1,3,5,\dots} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{1}{2} [1 - (1-2p)^n];$$

$$P_{\text{но}} = \sum_{i=2,4,6,\dots} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{1}{2} [1 + (1-2p)^n] - (1-p)^n.$$

$$P_b = \frac{1}{n} \sum_{i=2,4,\dots} iP(i,n) = \frac{1}{n} \sum_{i=2,4,\dots} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

КОИ-7 (ASCII – American Standard Code for Information Interchange),

Аналогом кода ASCII является международный код МТК-5, версия МККТТ.

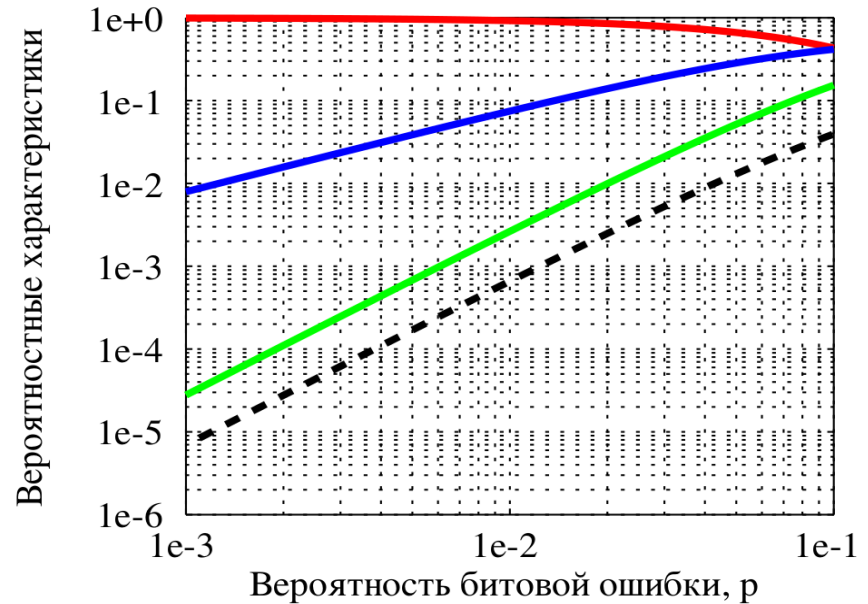
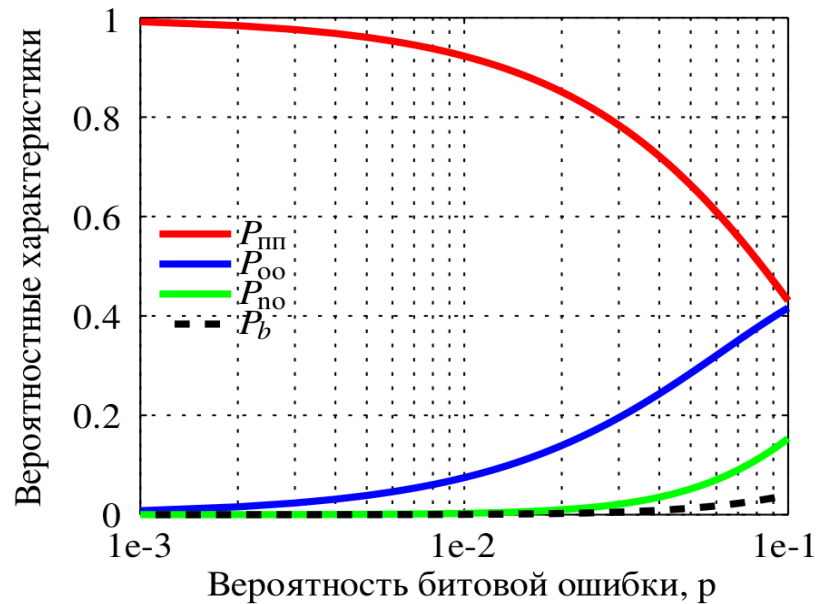
Определим вероятностные характеристики кода с проверкой на четность КОИ-7 в соответствии для канала ДСК с вероятностью ошибки $p=10^{-3}$:

$$P_{\text{ин}} = (1 - p)^8 = (0,999)^8 = 0,992;$$

$$P_{\text{оо}} = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2p)^8] = \frac{1}{2} [1 - (0,998)^8] = 7,9 \cdot 10^{-3};$$

$$P_{\text{но}} = \frac{1}{2} [1 + (1 - 2p)^8] - (1 - p)^8 = \frac{1}{2} [1 + (0,998)^8] - (0,999)^8 = 2,8 \cdot 10^{-5}.$$

$$P_b = \frac{1}{8} \sum_{i=2,4,6,8} iP(i,8) = \frac{1}{8} \sum_{i=2,4,6,8} iC_8^i p^i (1-p)^{8-i} \approx \frac{1}{8} 2C_8^2 p^2 (1-p)^6 = 6,9 \cdot 10^{-6}.$$



Протокол передачи файлов Xmodem

Двухбайтовый номер (01FE) → в двоичной системе (0000 0001 1111 1110).

Имеем 8 комбинаций простейшего помехоустойчивого кода $(n,k)=(2,1)$ с проверкой на нечетность

Однократные ошибки в двухэлементных комбинациях будут обнаруживаться, а двукратные ошибки обнаруживаться не будут и приведут к неверному определению номера блока.

Характеристики такого двухбайтового кода будут следующие.

Абсолютная избыточность по элементам равна 8, а относительная избыточность – 0,5; кодовая скорость будет $R= 1/2$.

Вероятностные характеристики для канала ДСК : $P_{\text{пп}} = (1 - p)^{16}$;

$$P_{\text{оо}} = \sum_{i=1}^8 C_8^i \theta^i (1 - \theta)^{8-i},$$

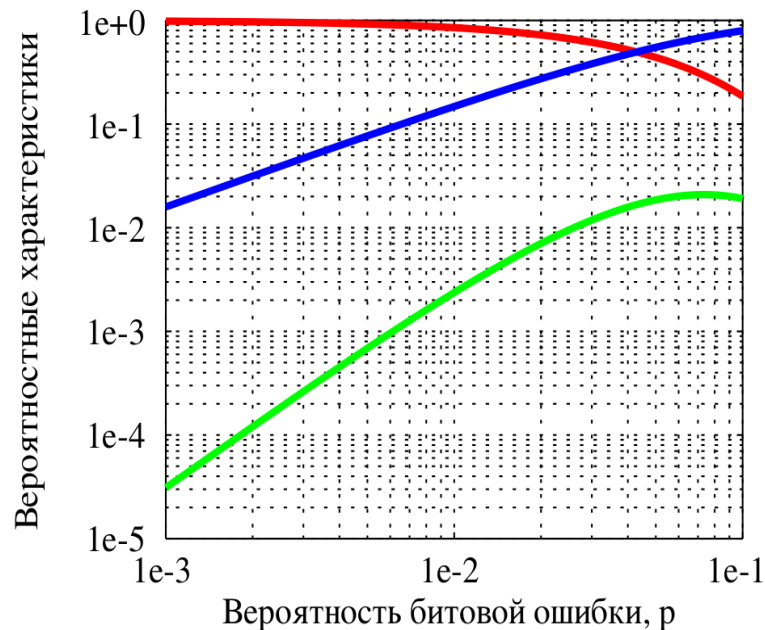
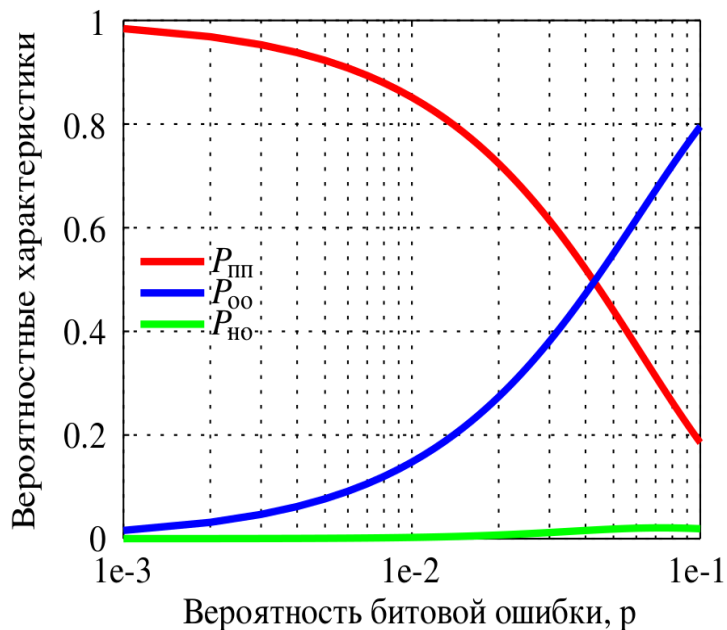
где $\theta = 2p(1-p)$ – вероятность однократной ошибки в двухэлементной двоичной комбинации;

$$P_{\text{но}} = \sum_{i=1}^8 C_8^i p^{2i} (1 - p)^{16-2i}.$$

Расчетные значения этих вероятностей для канала ДСК с $p = 10^{-3}$ равны:

$$P_{\text{пп}} = 0,9841; \quad P_{\text{оо}} = 0,01587; \quad P_{\text{но}} = 3 \cdot 10^{-5}$$

Вероятностные характеристики двухбайтового кода с проверкой на нечетность, использующегося в протоколе Xmodem



2. Методы обнаружения ошибок в блоках данных с использованием контрольной суммы.

2.1. Метод формирования контрольной суммы блока по mod255.

Алгоритм реализован в упомянутом ранее протоколе передачи файлов между компьютерами XModem.

Блок данных в этом протоколе состоит из 128 байт.

Ошибки в блоке будут обнаружены, если контрольные суммы, вычисленные на передаче и на приеме, не совпадают.

Не обнаруженными ошибки в блоке будут в том случае, когда суммарные десятичные значения ошибочных позиций среди "1" в исходном блоке будут компенсироваться суммарными десятичными значениями ошибочных позиций среди "0" в исходном блоке, например, $\sum_{n_i} 2^{n_i} = \sum_{m_j} 2^{m_j}$,

где n_i – ошибочные позиции среди "1", m_j – ошибочные позиции среди "0" в исходном блоке. Так как блок имеет байтовую структуру, то значения n_i и m_j могут принимать значения от 0 до 7 по всему множеству байтов от 1 до 128. Получение точного аналитического выражения для вероятности появления необнаруживаемых ошибок в блоке представляет собой довольно трудоемкую задачу. Поэтому целесообразно ограничиться приближёнными оценками или оценить вероятность необнаруживаемых ошибок путем моделирования

Вероятностные характеристики для канала ДСК $P_{\text{III}} = \left[(1-p)^8 \right]^{128}.$

Так как "1" и "0" предполагаются равновероятными, то для приближённых расчетов можно принять, что в каждой из 8 строк блока будет в среднем 64 единицы и 64 нуля. Тогда вероятность двукратной необнаруживаемой ошибки в блоке можно приближенно оценить выражением:

$$P_{\text{HO}}(t=2) = C_8^1 \left[C_{64}^1 p (1-p)^{63} \right]^2 (1-p)^{128 \cdot 7} = 32768 p^2 (1-p)^{1022}.$$

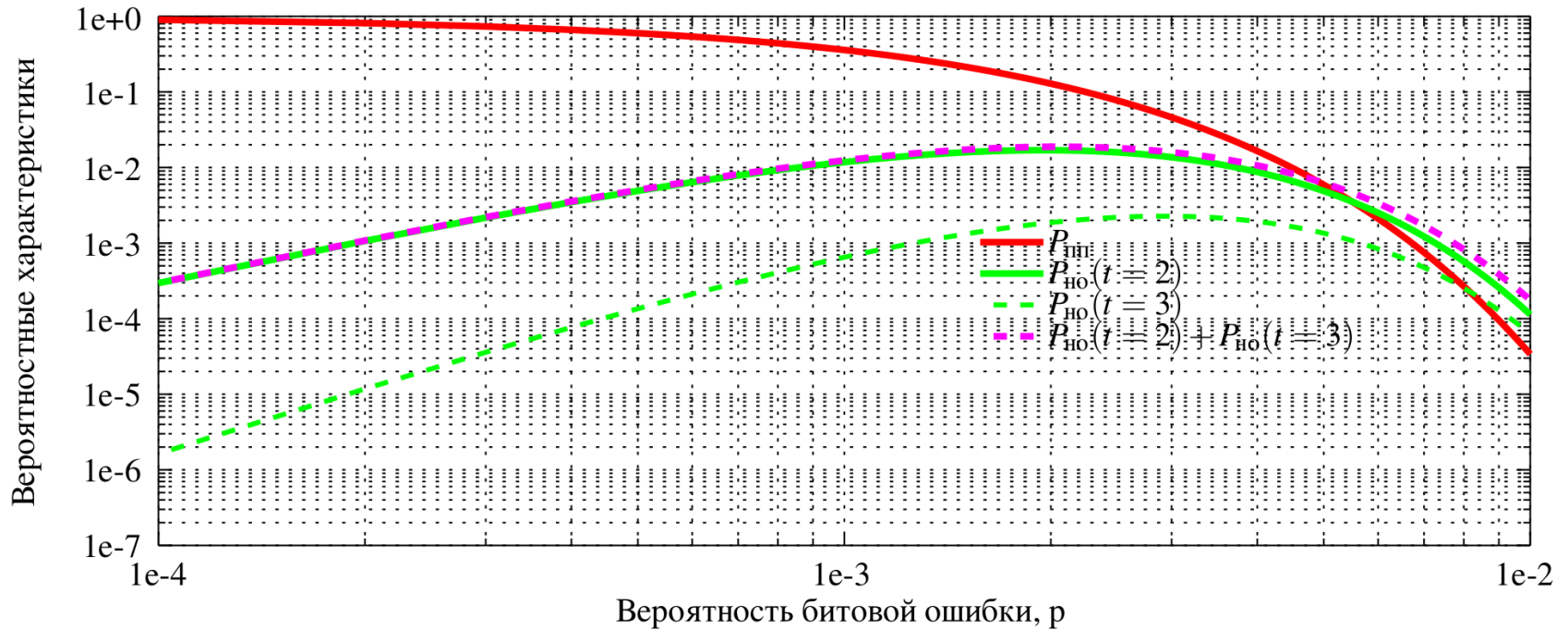
При этих условиях вероятность трёхкратных необнаруживаемых ошибок можно определить из выражения:

$$P_{\text{HO}}(t=3) = 2 \cdot 7 \left\{ C_{64}^1 p (1-p)^{63} (1-p)^{64} \right\} \cdot \left\{ C_{64}^2 p^2 (1-p)^{62} (1-p)^{64} \right\} (1-p)^{128 \cdot 6}.$$

В таблице ниже приведены расчетные значения суммы $P_{\text{HO}}(t=2)$ и $P_{\text{HO}}(t=3)$.

p	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$P_{\text{HO}}(t=2)$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$
$P_{\text{HO}}(t=3)$	$6,3 \cdot 10^{-5}$	$6,44 \cdot 10^{-4}$	$1,61 \cdot 10^{-6}$
$P_{\text{HO}}(t=2) + P_{\text{HO}}(t=3)$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$1,21 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$

Вероятностные характеристики кода с обнаружением ошибок на основе контрольной суммы по mod255, используемого в протоколе Xmodem в канале ДСК



2.2. Метод формирования контрольной суммы с проверкой на четность по строкам.

Для сравнения эффективности такого помехоустойчивого кода с эффективностью предыдущего кода примем, что длина блока данных также состоит из 128 байт, включая контрольный. Тогда вероятность приема блока по каналу ДСК с необнаруживаемыми ошибками будет определяться выражением

$$P_{\text{но}} = \sum_{j=1}^8 C_8^j \theta^j (1-p)^{128(8-j)},$$

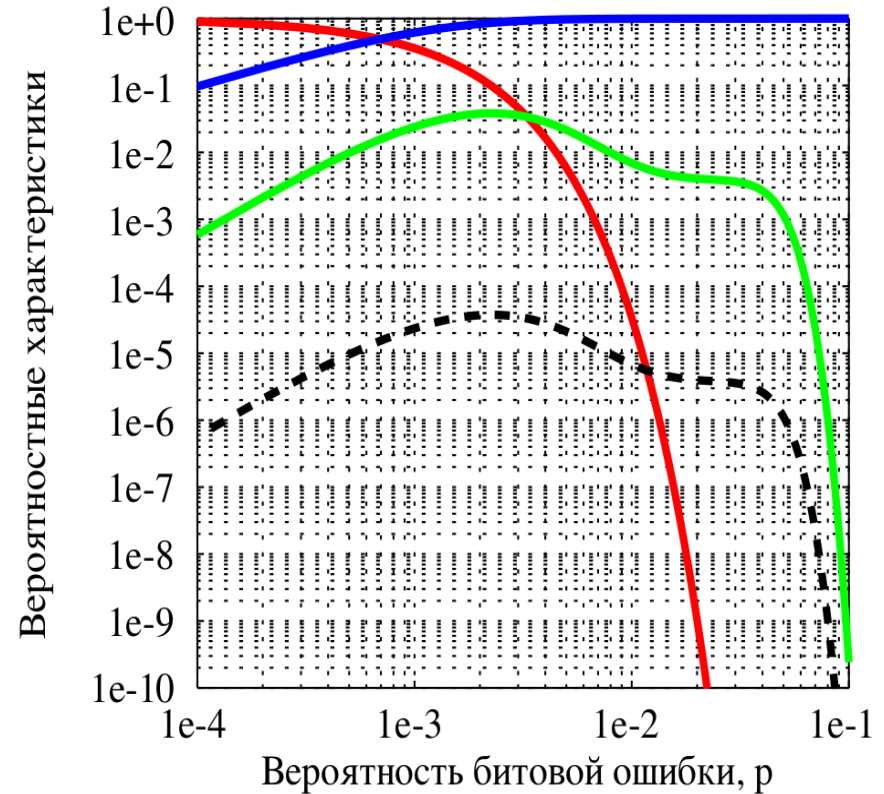
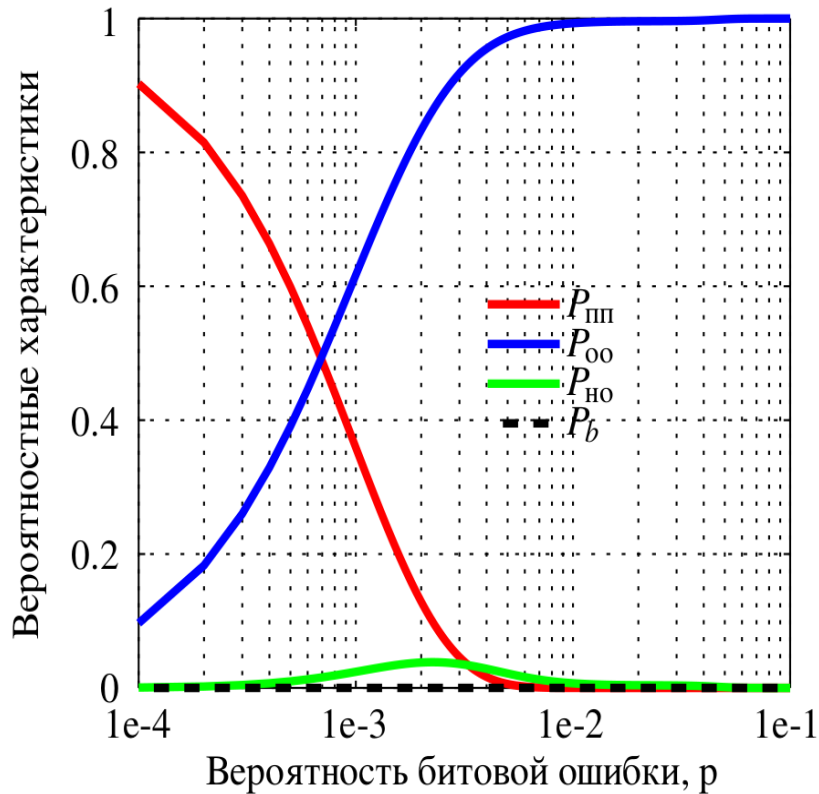
где θ – вероятность появления четного числа сшибок в одной строке, которая для нашего примера определяются выражением:

$$\theta = \sum_{i=2,4,6\dots} C_{128}^i p^i (1-p)^{128-i}.$$

Расчетные значения вероятности $P_{\text{но}}$ для некоторых p представлены в таблице:

p	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
θ	$2,61 \cdot 10^{-1}$	$7,2 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-4}$
$P_{\text{но}}$	$8,76 \cdot 10^{-3}$ $J = 1 \div 8$	$2,35 \cdot 10^{-2}$ $J = 1$	$7,3 \cdot 10^{-4}$ $J = 1$

Вероятностные характеристики кода с обнаружением ошибок на основе контрольной суммы с проверкой на четность по строкам для блока из 128 байт в канале ДСК



2.3. Метод контроля четности по строкам и столбцам блока.

Исходная информация в виде блока из k строк и n столбцов.

Блок помехоустойчивого кода: к каждой строке и к каждому столбцу добавляются по одному элементу – проверочному на четность.

Тогда кодовый блок будет содержать $(k-1) \cdot (n-1) = K$ информационных элементов из общего числа элементов в блоке, равном $N = k \cdot n$; $d_{\min} = 4$.

Кодовая скорость: $R = \frac{K}{N} = \frac{(k-1)(n-1)}{kn}$,

а число избыточных элементов – $(k + n + 1)$.

Тогда в канале ДСК с вероятностью битовой ошибки p вероятность 4-х кратной необнаруживаемой ошибки в блоке определим из выражения:

$$P_{\text{но}}(4, N) = C_n^2 \sum_{i=1}^{k-1} C_i^1 p^4 (1-p)^{N-4} = C_n^2 C_{k-1}^2 p^4 (1-p)^{N-4},$$

Аналогично вероятность 6-кратной необнаруживаемой ошибки :

$$P_{\text{но}}(6, N) = C_n^2 \sum_{i=1}^{k-2} C_{i+1}^1 C_i^1 p^6 (1-p)^{N-6} = C_n^2 \sum_{i=1}^{k-2} i(i+1) p^6 (1-p)^{N-6}.$$

k=5 строк, n=6 столбцов

1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0

4-х кратная
необнаруживаемая ошибка

1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0

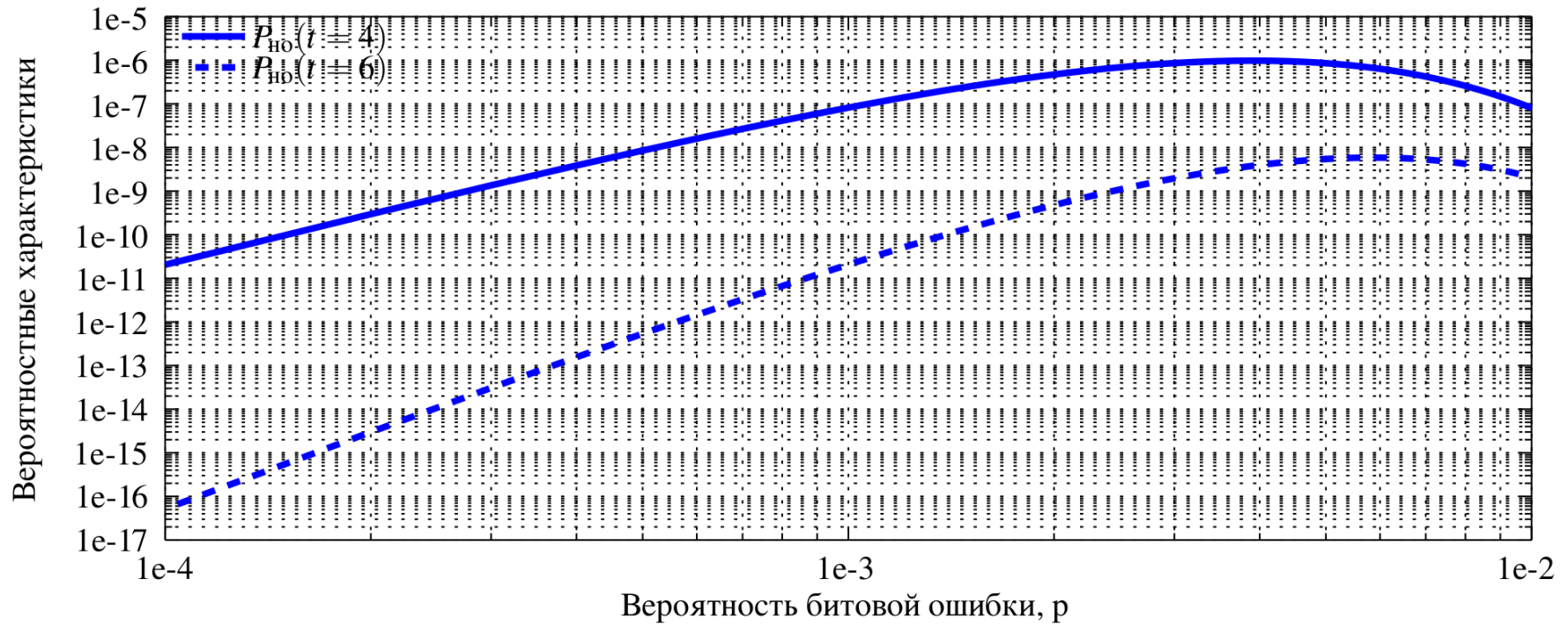
Рассмотренный метод контроля за ошибками применяется в байт-ориентированном асинхронном бинарном протоколе канального уровня с использованием кода ASCII (МТК-5). Для сравнительной оценки метода с ранее рассмотренными выберем длину кадра также равную 128 байтам. Тогда блок данных может быть представлен двоичной матрицей, состоящей из $n=128$ столбцов и $k=8$ строк. Таким образом, каждый байт является столбцом с одним проверочным элементом на четность, т.е. код (8,7), а каждая строка матрицы представляет собой код (128,127) с проверкой на четность.

Ниже в таблице приведены значения вероятностей необнаруживаемых ошибок такого матричного кода с $d_{\min}=4$, для некоторых значений битовой вероятности ошибки в канале ДСК:

p	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$P_{no}(t=4)$	$8 \cdot 10^{-8}$	$8,2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-11}$
$P_{no}(t=6)$	$2,1 \cdot 10^{-9}$	$2,1 \cdot 10^{-11}$	$5,2 \cdot 10^{-17}$

Как видно из таблицы, данный матричный код по сравнению с ранее рассмотренными имеет существенное преимущество по обеспечению достоверности передачи данных. Это объясняется его конструктивными особенностями, прежде всего каскадной структурой, и существенно большей избыточностью – 135 бит, по сравнению с ранее рассмотренными, где контрольная сумма составляла всего один байт. Кроме того, из данных таблицы видно, что для оценки эффективности матричного кода можно ограничиться вероятностью 4-х кратной битовой ошибки в реальных каналах ДСК с $p=10^{-2}$.

Графики вероятностей необнаруживаемых ошибок помехоустойчивым кодом в блоках из 128 байт на базе кода ASCII (МТК-5) с проверкой на четность по строкам и столбцам, используемым в байт-ориентированном асинхронном протоколе канального уровня в каналах ДСК с вероятностью битовой ошибки p :



ЛИТЕРАТУРА

О. С. Когновицкий, В. М. Охорзин, С. С. Владимиров.
ПРАКТИКА ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО КОДИРОВАНИЯ. Часть 1. Системы с
обнаружением ошибок и обратной связью. Учебное пособие; СПбГУТ – СПб. 2018.
– 100с. (*Материал по лекции – стр. 31 – 37*)