Розрахункова робота з

з дисципліни

«Теорії ймовірності та математичної статики»

студента групи ІК-21

Зробка Івана Михайловича

Варіант №8

1. Кидають два гральні кубики і записують кількості очок, які випали на їх гранях. Знайти ймовірність того, що із записаних цифр можна скласти: а) лише одне непарне двоцифрове число; б) лише ті двоцифрові числа, які менші від 40.

2. Студент знає відповіді на 27 із 35 питань програми. На іспиті він отримує білет, у якому 10 навмання вибраних питань програми. Яка ймовірність того, що він складе іспит з оцінкою "добре якщо для цього потрібно відповісти на 7 або 8 питань білета?

3. Ймовірність влучення в ціль першою і другою гарматою відповідно дорівнюють 0.75 і 0.95. Знайти ймовірність влучення при одному залпі(з обох гармат): а) хоча б однією гарматою; б) лише однією гарматою.

4. Партія деталей виготовлена двома робітниками. Перший робітник виготовив $\frac{7}{15}$ партії, а другий – $\frac{8}{15}$ партії. Ймовірність браку для кожного з робітників відповідно становить 3%, 5%. Яка ймовірність того, що навмання взята деталь буде стандартною? Яким з робітників найвірогідніше виготовлена ця

деталь?

5. *а)* У партії однотипних деталей кількості стандартних і бракованих відносяться як 4 : 3. Навмання з партії беруть 5 деталей. Знайти найімовірніше число k_0 появи стандартних деталей серед 5 навмання взятих і обчислити відповідну ймовірність.

б) Ймовірність того, що покупець, який завітав до взуттєвого магазину, здійснить покупку, дорівнює в середньому 0.14. Яка ймовірність того, що із 500 покупців, що завітали до магазину покупку здійснять: *а)* 70 покупців; *б)* від 80 до 120 покупців.

6. Із одинадцяти виробів, серед яких 4 вироби нового зразка, взято навмання 7 виробів. Скласти ряд розподілу і побудувати функцію розподілу випадкової величини X - кількості виробів нового зразка серед відібраних.

7. За заданим законом розподілу дискретної випадкової величини X знайти $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$:

X	1	2	3
p(x)	$\frac{125}{216}$	$\frac{76}{216}$	$\frac{15}{216}$

8. Для якого значення параметра a функція

$$f(x) = \begin{cases} ae^{2x}, & x \in (0,2), \\ 0, & x \notin (0,2) \end{cases}$$

є щільністю розподілу неперервної випадкової величини X. Обчислити ймовірність $P(-2 < X < 1)$.

9. Задана функції розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^2}{3} + 2x, & 0 < x \le \frac{1}{3}, \\ 1, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$ і числові характеристики $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$.

10. Для якого значення k функція $f(x) = ke^{-(4x^2-8x+4)}$ є щільністю розподілу випадкової величини X? Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ і обчислити $P(1.1 < X < 1.4)$.

11. Для заданого розподілу системи випадкових величин (X, Y)

Y X	-2	0	1	4
-1	5/36	1/36	1/12	1/18
1	1/6	1/9	1/18	1/12
3	1/18	1/12	1/9	1/36

знайти: *а)* розподіли складових X та Y; *б)* умовний розподіл X, якщо $Y = 1$ і умовний розподіл Y, якщо $X = 0$; *в)* умовні математичні сподівання $M(X/Y = 1)$ і $M(Y/X = 0)$; *г)* коефіцієнт кореляції r_{XY}; *д)* обчислити ймовірність $P(X > Y)$; *е)* знайти закон розподілу випадкової величини $Z = X^2 - Y$. Чи залежні випадкові величини X та Y?

12. Система випадкових величин (X, Y) розподілена рівномірно у трикутнику з вершинами $O(0; 0)$, $A(3; 0)$, $B(0; 2)$. Записати щільність розподілу $f(x, y)$ системи випадкових величин (X, Y). Знайти: *а)* щільність розподілів $f_1(x)$ і $f_2(x)$ складових X та Y; *б)* умовні щільності розподілів $f_1(x/y)$ і $f_2(y/x)$; *в)* математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$; *г)* умовні математичні сподівання $M(X/y)$ і $M(Y/x)$ (лінії регресії X на Y і Y на X); *д)* кореляційний момент $K(X, Y)$. Чи залежні випадкові величини X та Y?

1. Кидають два гральні кубики і записують кількість очок, які випали на їх гранях. Знайти ймовірність того, що із записаних цифр можна скласти, менш
а) лише одне непарне двоцифрове число
б) лише ті двоцифрові числа які менші за 40.

а) Кількість всіх варіантів двоцифрових чисел 56, а непарних двоцифрових 28.
Сума усіх ймовірних подій 36, так як на ~~одному~~ кубику є 6 граней, тобто є варіантів ; на іншому також то вони перемножаються $6 \cdot 6 = 36$

~~$P(A) = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$~~ ,

Але так як числа на кубиках залежать від перестановки, то сума всіх в $36 \cdot 2 = 72$

$P(A) = \frac{28}{72} = \frac{7}{18}$

б) таких чисел є від 10 до 40, тобто 30

$P(B) = \frac{30}{72} = \frac{15}{36}$

---

2. Студент знає відповіді на 27 із 35 питань. На іспиті він отримує білет, у якому 10 навмання вибраних питань програми. Яка ймов. того, що він складе іспит з оцінкою "добре" якщо для цього пот. відповісти на 7 ~~або~~ в. п

A_1 – відп. на 7 питань

A_2 – відп. на 8 питань

$n = C_{35}^{27} = \frac{35!}{8!\cdot 27!}$; – загальна кількість подій

Для несумісних подій $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$ ~~[illegible]~~

$$P(A)_2 = \frac{C_{27}^{8} \cdot C_{35-27}^{10-8}}{C_{35}^{27}} = \frac{27!}{8!\,19!} \cdot \frac{8!}{2!\,6!} \cdot \cancel{[illegible]} \cdot \frac{27!\,8!}{35!}$$

$$P(A)_1 = \frac{C_{27}^{7} \cdot C_{35-27}^{10-7}}{C_{35}^{27}} = \frac{27!}{7!\,20!} \cdot \frac{8!}{3!\cdot 5!} \cdot \frac{27!\cdot 8!}{35!}$$

$$P(A) = \frac{27!}{19!} \cdot \frac{27!\cdot 8!}{35!} + \frac{27!\cdot 27!\cdot \cancel{[illegible]}\cdot 448}{20!}$$

---

3. Ймовірність ~~[illegible]~~ влучення в ціль першою і другою гарматою відповідно = 0,75 і 0,95. Зн. ймовір. влучення при одному залпі (з обох гармат)
а) хоча б однією гарматою
б) лише однією гарматою

A – ~~[illegible]~~ ~~пострілу~~ влучення першої гармати

B – ~~пострілу~~ влучення другої

$P(A) = 0,75$, $P(B) = 0,95$; ~~$P(C)$~~.

C – влучення ~~обох~~ хоча б одного

$P(C) = P(A) \cdot P(B) = 0,95 \cdot 0,75 = 0,7125$

б) ~~P(D)~~ D – влучення лише однією гарматою

$A\bar{B}$ – лише перша влучить

$\bar{B}A$ – лише друга влучить

$P(D) = P(A\bar{B}) + P(\bar{B}A) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) =$
$= 0,75 \cdot 0,05 + 0,25 \cdot 0,95 = 0,275$

~~4. У першій скриньці білих кульок в 2 рази меньше, ніж чорних~~

4. Партія деталей виготовлена двома робітниками. Перший робітник виготовив 7/15 партії, а другий 8/15. Ймовірність браку становить 3% і 5% відповідно. Яка ймовірність того, що навмання взята деталь буде стандартною? Яким із робітників найвірогідніше виготовлена деталь?

H_1 – ~~стандартна деталь~~ деталь 1-го робітника $\quad P(H_1) = \frac{7}{15}$

H_2 – ~~з браком~~ 2-гого робітника $\quad P(H_2) = \frac{8}{15}$

A – витягнуть деталь $\quad P(A|H_1) = 0,97$

$P(A|H_2) = 0,95$

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)} =$$

$$= \frac{\frac{7}{15} \cdot 0,97}{\frac{7}{15} \cdot 0,97 + \frac{8}{15} \cdot 0,95} = \frac{0,45}{0,45 + 0,5} = \frac{0,45}{0,95} \approx \frac{9}{19}$$

$$P(H_2/A) = \frac{0,5}{0,5 + 0,45} = \frac{50}{95} = \frac{10}{19}$$

Найвірогідніше другим працівником.

5. а) У партії з однотипних деталей к-ті стандартних і бракованих відносять як 4:3. Навмання з партії беруть 5 деталей. Зн. найімовірніше число k_0 появи стандартних деталей серед 5 навмання взятих, обчисліть відповідну ймовірність

~~б)~~

б) Ймовірність того, що покупець, який завітав до взуттєвого магазину, здійснив покупку = 0,14. Яка ймов. того, що із 500 покупців, що завітали до магазину покупку здійснить а) 70 покупців б) від 60 до ...

1(а) За умовою $n = 5$

p - ? ймов. появи стандартної деталі

$p = \frac{4}{5} = 0{,}8$ тоді $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$$np - q \leq k_0 < np + p$$

$$5 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \leq k_0 < 5 \cdot 0{,}8 + 0{,}8$$

$$3{,}8 \leq k_0 < 4{,}8$$

$$k_0 = 4$$

За ф. Бернуллі

$$P_n(k_0) = P_5(4) = C_5^4\, p^4 q^{5-4} = \frac{5!}{(5-4)!\,4!} \cdot 0{,}8^4 = 5 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2$$

2б) $n = 500$; $p = 0{,}14$; $q = 0{,}86$; $k = 90$

Оскільки n достатньо велике то скористаємося локальною теоремою Лапласа

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ де } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

$X = \frac{70 - 500 \cdot 0,14}{\sqrt{500 \cdot 0,14 \cdot 0,86}} = \frac{0}{\sqrt{60,2}} = 0 \quad \varphi(0) = 0,3989$

$P_{500}(70) = \frac{0,3989}{7,76} \approx 0,05$

б) $n = 500;\ p = 0,14;\ q = 0,86,\ k_1 = 80,\ k_2 = 120$

За інтегральною т. Лапласа

$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $x_{1,2} = \frac{k_{1,2} - np}{\sqrt{npq}}$

$x_1 = \frac{80 - 500 \cdot 0,14}{7,76} = \frac{10}{7,76} \approx 1,29$

$x_2 = \frac{120 - 70}{7,76} = \frac{50}{7,76} \approx 6,44$

$P_{500}(80, 120) = \Phi(6,44) - \Phi(1,29) \approx 0,5 - 0,1736 = 0,33$

$P_{500}(80, 120) = \Phi(6,44) - \Phi(1,29) \approx 0,5 - 0,1736 = 0,33$

6. Із одинадцяти виробів, серед яких 4 вироби нового зразка, взято навмання 7 виробів. Скл. ряд розподілу і побудувати ф-цію розподілу випадкової величини X - кількості виробів нового зразка серед відібраних.

11 в.: → 4 нового зразка
7 старого зразка → 7в.

X - кількість вибраних виробів нового зразка може набувати $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2;\ x_4 = 3;\ x_5 = 4;$

За ф-лою $P(X=k)=\frac{C_n^k\cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$

N - заг. к-ть виробів
n - к-ть нов. зразка
m - к-ть відібраних виробів
k - к-ть нов. зразка серед відібраних

$P(X=0)=\frac{C_4^0\cdot C_7^7}{C_{11}^7}=\frac{1\cdot 1}{330}=\frac{1}{330}$

$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_7^6}{C_{11}^7}=\frac{4\cdot 7}{330}=\frac{28}{330}=\frac{14}{165}$

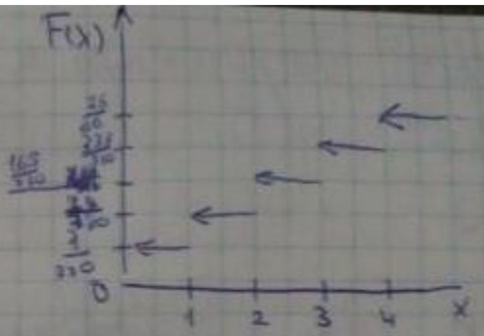
$P(X=2)=\frac{C_4^2\cdot C_7^5}{C_{11}^7}=\frac{6\cdot 21}{330}=\frac{126}{330}=\frac{63}{165}$

$P(X=3)=\frac{C_4^3\cdot C_7^4}{C_{11}^7}=\frac{4\cdot 42}{330}=\frac{168}{330}=\frac{84}{165}$

$P(X=4)=\frac{C_4^4\cdot C_7^3}{C_{11}^7}=\frac{1\cdot 42}{330}=\frac{42}{330}=\frac{21}{165}$

X	0	1	2	3	4
P(x	$\frac{1}{330}$	$\frac{14}{165}$	$\frac{63}{165}$	$\frac{84}{165}$	$\frac{21}{165}$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{1}{330} & 0<x\le 1 \\ \frac{29}{330} & 1<x\le 2 \quad P_0+P_1 \\ \frac{155}{330} & 2<x\le 3 \quad P_0+P_1+P_2 \\ \frac{323}{330} & 3<x\le 4 \quad P_0+P_1+P_2+P_3 \\ \frac{35}{66} & x>4 \quad P_0+P_1+P_2+P_3+P_4 \end{cases}$$



7)

X	1	2	3
P(X)	$\frac{125}{216}$	$\frac{76}{216}$	$\frac{15}{216}$

Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$

1. Математичне сподівання

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$$

$$M(X) = 1\cdot\frac{125}{216} + 2\cdot\frac{76}{216} + 3\cdot\frac{15}{216} = \frac{125+152+45}{216} = \frac{322}{216}.$$

2. Дисперсія $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$

де $M(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \dots$

$$M(X^2) = 1^2\cdot\frac{125}{216} + 2^2\cdot\frac{76}{216} + \frac{3^2\cdot 15}{216} = \frac{564}{216} = \frac{141}{54}$$

$$D(X) = \cancel{\frac{564}{216}}\ \frac{141}{54} - \left(\frac{161}{108}\right)^2 = 2{,}61 - 2{,}22 = 0{,}4$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}4} = 0{,}63$$

8. Для якого параметра a ф-ція

$$f(x)=\begin{cases} ae^{2x}, & x\in(0,2) \\ 0, & x\notin(0,2) \end{cases}$$

є щільністю розподілу неп. вип. величини X. Обч. ймовірність $P(-2<X<1)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$ Властивість щільності

$$1=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{2} ae^{2x}+\int_{2}^{+\infty} 0\,dx=\int_{0}^{2} ae^{2x}dx=a\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^2=$$

$$=a\left(\frac{1}{2}e^{2\cdot 2}-\frac{1}{2}e^{2\cdot 0}\right)=a\left(\frac{1}{2}e^{4}-\frac{1}{2}\right)$$

$1=a\left(\frac{1}{2}e^{4}-\frac{1}{2}\right);$ $\frac{1}{a}$ $\cancel{=\frac{e^4-1}{2}}$

$$a=\frac{2}{e^4-1}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{e^4-1}, & x\in(0;2) \\ 0; & x\notin(0;2) \end{cases}$$

Ймовірність знайдемо за формулою

$P\{a\le x\le b\}=\int_a^b f(x)\,dx$

Отже,

$$P\{-2<X<1\}=\int_{-2}^{1} 0\,dx+\int_{1}^{1}\frac{2}{e^4-1}\cdot e^{2x}=\int_{1}^{1}\frac{2}{e^4-1}\cdot e^{2x}=0$$

10. До якого зн. k ф-ція $f(x) = ke^{-(4x^2-8x+4)}$ є щільністю розподілу випадков. вк. Зн. $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ і обч. $P(1,1 < X < 1,4)$

Щільність нормального розподілу має вигляд

$$f_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

де m, σ ($-\infty < m < +\infty$, $\sigma > 0$) — пар. розп.
$m = M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$

$$4x^2 - 8x + 4 = (2x-2)^2 = \frac{(x-1)^2}{1/4}$$

$$f(x) = ke^{-\frac{(x+1)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$m = -1; \ \sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$K = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Далі

$$M(X) = m = -1, \quad D(X) = \sigma^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Знаходимо ймовірність

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right),$$ де

$\Phi(x)$ — ф-ція Лапласа.

$$P(1,1 < X < 1,4) = \Phi\left(\frac{1,1+(-1)}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{1,4+(-1)}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2\sqrt{2}}{10_5}\right) - \Phi\left(\frac{4\cdot 2\sqrt{2}}{10}\right) = \Phi\left(\frac{14}{5}\right) - \Phi(0,8) =$$

0,28

$$= 0,25 + 0,90 = 1,15$$

11. Для заданого розподілу системи ВВ (X Y)

Y \ X	-2	0	1	4
-1	5/36	1/36	1/12	1/18
1	1/6	1/9	1/18	1/12
3	1/18	1/12	1/9	1/36

Знайти а) розподіли складових X та Y
б) умовний розподіл X, якщо Y = 1
і умовний розподіл Y, якщо X = 0
в) умовні мат. сподівання $M(X/Y=1)$
і $M(Y/X=0)$
г) коефіцієнт кореляції r_{xy}
д) обч. ймов. $P(X > Y)$
е) зн. закон розподілу в.в $Z = X^2 - Y$
чи залежні вв X та Y?

а) $P(X=-2) = \frac{5}{36} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{5+6+2}{36} = \frac{13}{36}$

$P(X=0) = \frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{1+4+3}{36} = \frac{8}{36}$

$P(X=1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{3+2+4}{36} = \frac{9}{36}$

$P(X=4) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{2+3+1}{36} = \frac{6}{36}$

X	-2	0	1	4
P(x)	$\frac{13}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{6}{36}$

$1 = \frac{13+8+9+6}{36} = \frac{36}{36}$

$P(Y=-1) = \frac{5}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{5+1+3+2}{36} = \frac{11}{36}$

$P(Y=1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{6+4+2+3}{36} = \frac{15}{36}$

$P(Y=3) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{2+3+4+1}{36} = \frac{10}{36}$

Y	-1	1	3
P(y)	$\frac{11}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{10}{36}$

б) Зн. P(X) якщо $y_1 = 1$

$$P(X = {}^{-2}/_{y_1}) = \frac{P(X=-2, y=1)}{P(y_1=1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{15}{36}} = \frac{36}{6\cdot 15} = \frac{2}{5}$$

$$P(X = {}^{0}/_{y_1}) = \frac{P(X=0, y_1=1)}{P(y_1=1)} = \frac{1}{9}\cdot\frac{36}{15} = \frac{4}{15}$$

$$P(X = {}^{1}/_{y_1}) = \frac{P(X=1, y_1=1)}{P(y_1=1)} = \frac{1}{18}\cdot\frac{36}{15} = \frac{2}{15}$$

$$P(X = {}^{4}/_{y_1}) = \frac{P(X=4, y_1=1)}{P(y_1=1)} = \frac{1}{12}\cdot\frac{36}{15} = \frac{1}{5} = \frac{3}{15}$$

X	-2	0	1	4
P(X/y=1)	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$

Умовний закон розподілу

$$\frac{6}{15} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = 1$$

Знайдемо ймовірності можливих значень Y за умови, що складова $X_2 = 0$

$$P(y = {}^{-1}/_{X_2}) = \frac{P(X_2=0;\ y=-1)}{P(X_2=0)} = \frac{1}{36}\cdot\frac{36}{8} = \frac{1}{8}$$

$$P(y = {}^{1}/_{X_2}) = \frac{P(X_2=0,\ y=1)}{P(X_2=0)} = \frac{1}{9}\cdot\frac{36}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(y = {}^{3}/_{X_2}) = \frac{P(X_2=0;\ y=3)}{P(X_2=0)} = \frac{1}{12}\cdot\frac{36}{8} = \frac{3}{8}$$

$$1 = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \frac{3}{8}$$

Y	-1	1	3
P(Y/X=0)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

в) Умовні математичні сподівання $M(X/Y=1)$, $M(Y/X=0)$ зн. за ф-лами

$$M(X/y=y) = \sum_i x_i \frac{P(x_i, y)}{P(y)}$$

$$M(Y/X=x) = \sum_i y_i \frac{P(x, y_i)}{P(x)}$$

Отже

~~$M(X/Y=1) = -1\cdot\frac{11}{36} + 1\cdot\frac{15}{36} + 3\cdot\frac{10}{36} = \frac{34}{36}$~~

~~$M(Y/X=0) = -1\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{1}{2}$~~

$$M(X/Y=1) = -2\cdot\frac{2}{5} + 0\cdot\frac{4}{5} + 1\cdot\frac{2}{15} + 4\cdot\frac{1}{5} =$$

$$= -\frac{4}{5} + \frac{2}{15} + \frac{4}{5} = \frac{-12+2+12}{15} = \frac{2}{15}$$

$$M(Y/X=0) = -1\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{3}{8} = \frac{-1+4+9}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

г) Коефіцієнт кореляції

$r_{xy} = \frac{K(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$ $K(X,Y)$ кореляційний момент σ_x і σ_y — середні квадратичні відхи

$K(X,Y) = M(X\cdot Y) - M(X)M(Y)$

$M(X\cdot Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j p(x_i, y_j)$

З пункту а знайдемо математичні сподівання

$M(X) = -2\cdot\frac{13}{36} + 0\,\frac{8}{36} + 1\cdot\frac{8}{36} + 4\frac{6}{36} = \frac{-26+9+24}{36} = \frac{7}{36}$

$M(Y) = -1\cdot\frac{11}{36} + 1\cdot\frac{15}{36} + 3\cdot\frac{10}{36} = \frac{-11+15+30}{36} = \frac{34}{36}$

~~$M(X\cdot Y) = (-2)\cdot(-1)\cdot\frac{2}{36} + 1\cdot1\cdot(-\frac{6}{36}) + 4\cdot3(-\frac{4}{36})$~~

$M(X\cdot Y) = (-2)(-1)\cdot\frac{5}{36} + 0\cdot(-1)\cdot\frac{1}{36} + 1\cdot(-1)\cdot\frac{1}{12} + 4(-1)\frac{1}{18}$
$+ (-2)\cdot1\cdot\frac{1}{6} + 0 + 1\cdot1\cdot\frac{1}{18} + 4\cdot1\cdot\frac{1}{12} +$
$+ (-2)\cdot3\cdot\frac{1}{18} + 0 + 1\cdot3\cdot\frac{1}{9} + 4\cdot3\cdot\frac{1}{36} =$
$= \frac{5-3-8-12+2+12-12+12+12}{36} = \frac{8}{36}$

$K(X,Y) = \frac{8}{36} - \frac{34}{36}\cdot\frac{7}{36} = \frac{8\cdot36 - 34\cdot7}{1296} = \frac{288-238}{1296} = \frac{50}{1296} = 0{,}04$

Далі

$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 4\cdot\frac{13}{36} + \frac{9}{36} + 16\frac{6}{36} - \left(\frac{7}{36}\right)^2 = 4{,}32$

$D(Y) = M(Y)^2 - (M(Y))^2 = 1\cdot\frac{11}{36} + 1\cdot\frac{15}{36} + 9\cdot\frac{10}{36} - \left(\frac{34}{36}\right)^2 = 2{,}33$

$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4{,}32} = 2{,}07$

$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{2{,}33} = 1{,}53$

$r_{xy} = \frac{0{,}04}{2{,}07\cdot1{,}53} = 0{,}013$

д) Ймовірність $P(Y > X)$

$P(Y>X) = P(X=-2; Y=-1) + P(X=-2; Y=1) +$
$P(X=-2; Y=3) + \cancel{P(X=0; Y=-1)} + P(X=0; Y=1) +$
$+P(X=0; Y=3) + \cancel{P(X=1; Y=-1)} + P(X=1; Y=3) =$
$= \frac{5}{36} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} =$
$= \frac{5+6+2+4+3+4}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

е) $Z = X^2 - Y$

Z	5	3	1	2	-1	-3	2	0	-2	17	15	13
P(Z)	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$

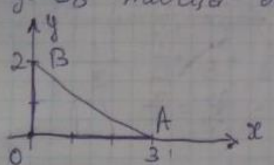
$\frac{5+6+2+1+4+3+3+2+4+2+3+1}{36} = 1$

$K(X,Y) \neq 0$ то величини залежні

12. Система вв. (X,Y) розподілена рівномірно у трикутнику з вершинами $O(0;0)$, $A(3;0)$, $B(0;2)$. Записати щільність розподілу $f(x,y)$ системи вв (X,Y).
Знайти: а) щільність розподілів $f_1(x)$ і $f_2(y)$ складових X та Y.
б) умовні щільності розподілів $f_1(x/y)$ і $f_2(y/x)$
в) математичне сподівання $M(X)$, $M(Y)$
г) умовні матем. сподівання $M(x)$ і $M(y)$ (лінії регресії X та Y і Y на X).
д) кореляційний момент $K(X,Y)$ чи залежні вв X та Y?

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & \text{якщо } (x,y)\in D, \\ 0, & \text{якщо } (x,y)\notin D \end{cases}$

де S_D – площа області D



D – обмежена лініями $x=0$; $y=0$; $y=\frac{2}{3}x+2$
$x=\frac{3}{2}y-3$

$y=kx+b$; $|k| = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$, $b=2$;

$S_D = \frac{1}{2}\cdot2\cdot3 = 3$

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases}$

а) Щільність розподілу складової X

$f_1(x) = 0$ якщо $x<0$ або $x>3$

$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{\frac{2}{3}x+2}^{0} \frac{1}{3}dy = \frac{1}{3}y\Big|_{\frac{2}{3}x+2}^{0} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{9}x,\ 0\le x\le 3$

Отже,

$f_1(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3} - \frac{2}{9}x & x\in[0;3] \\ 0, & x\notin(0;3) \end{cases}$

Щільність розподілу для складової y.

$f_2(y) = 0$ якщо $x<0$ або $x>2$

$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx = \int_0^{\frac{3}{2}y-3} \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}x\Big|_0^{\frac{3}{2}y-3} =$

$= \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}$, $0\le y\le 2$

Отже

$f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y - \frac{2}{3} & y\in[0;2] \\ 0 & y\notin(0;2) \end{cases}$

б) Знаходимо умовні розподіли

$f_1(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$, $f_2(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$

$f_1(x/y) = \frac{1/3}{\frac{1}{2}y - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{3}{2}y-2}$; $(x,y)\in D$

$f_2(y/x) = \frac{1/3}{-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}x} = \frac{1}{-2-\frac{2}{3}x}$; $(x,y)\in D$

в) Математичне сподівання

$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx = x\left(-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}x\right)dx = \left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{2}{9}\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3$

$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2} - \frac{2}{9}\cdot\frac{27}{3} = -3 - 2 = -5$

$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)dy \int_0^2 y\left(\frac{1}{2}y - \frac{2}{3}\right)dy = \left(\frac{1}{2}\frac{y^3}{3} - \frac{2}{3}y^2\right)\Big|_0^2$

$= -\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\cdot4\right) = \frac{4}{3}$