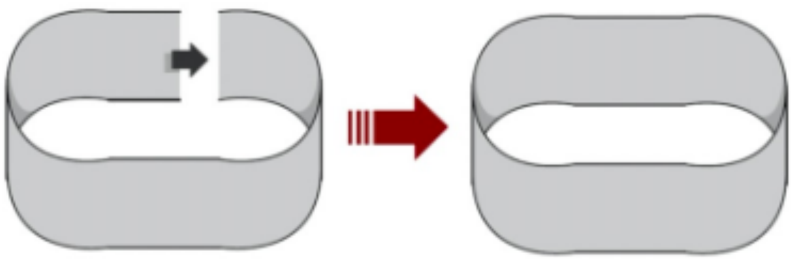
阿里巴巴全球数学竞赛-预选赛第一轮

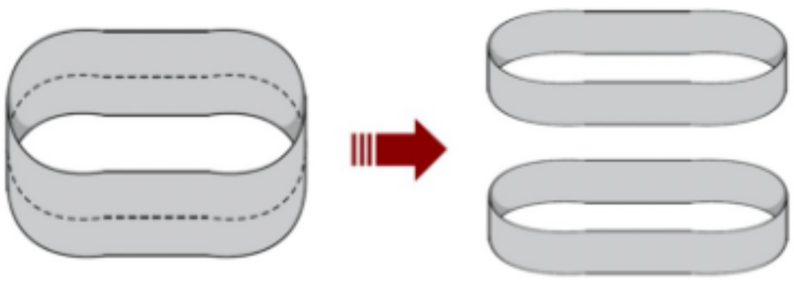
1.单选题 20 分

面条是中华传统美食，花样却不断翻新。清晨，擀宽面的张师傅别出心裁，把他的宽面条两头粘上，变成了宽面圈儿，如图 1。



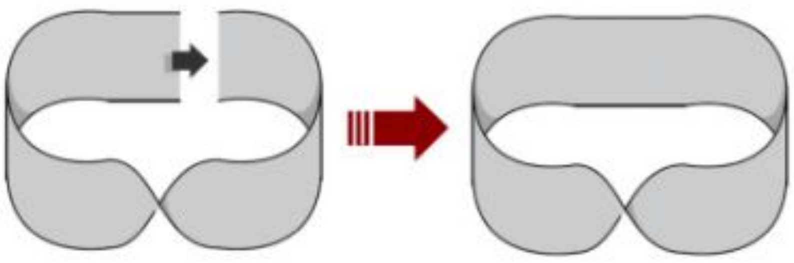
（图 1）

他像平时切面条一样，把宽面圈儿沿着中心线切开，就得到两个完全同样的宽面圈儿，如图 2。



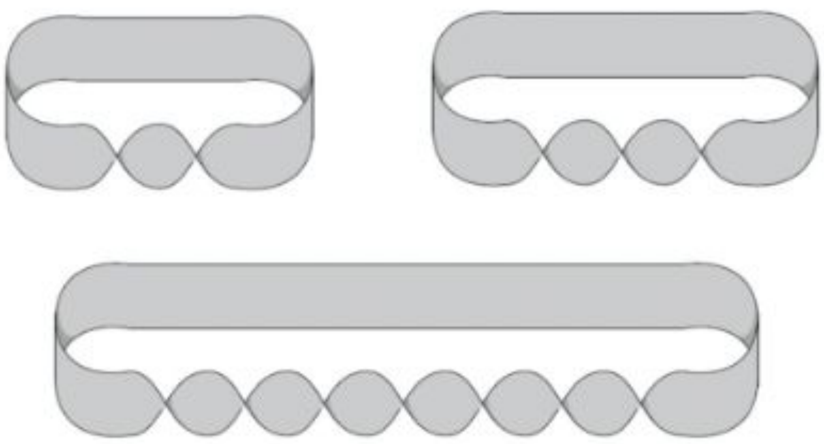
（图 2）

张师傅灵机一动，重新将面条拧了一下，再两头粘上。这样竟然成了数学中常常讲到的莫比乌斯带(以德国数学家奥古斯特•莫比乌斯命名)。



（图 3）

接着，他灵机两动，三动，直至 n 动。他将宽面拧了两下，三下，直至 n 下，总以如图的右手内旋的方式来拧，然后照样地两头粘上。这些个宽面圈儿在数学上还没有固定的名称。张师傅把莫比乌斯带称作 1 旋圈面，拧两下、三下的称作 2 旋、3 旋圈面，总之，拧 n 下就是 n 旋圈面：n 为 2、3、7 的情形如图 4。起先没有拧就粘上的，普普通通，只称作平凡圈面，或者 0 旋圈面。在张师傅看来，不同旋数的圈面是彼此不同的，(因为 只在厨房里摆放来，摆放去，总不能把一种变成另一种)。



（图 4）

张师傅把他的多旋圈面开店上架，一时网红。有人为百岁老人订制 100 旋圈面，有人为公司年会订制 2019 旋圈面，(张师傅拧得手都酸了)。试问：张师傅要是依旧沿中心线切开这两种圈面，分别会得到什么?

A. 一个 101 旋圈面，一个 2020 旋圈面

B. 两个 100 旋圈面，一个 4038 旋圈面

C. 一个 200 旋圈面，一个 0 旋圈面

D. 两个 100 旋圈面，一个 0 旋圈面

2.问答题 20 分

设$A=(a_{i,j})_{n\times n}$是一个由± 1组成的$n\times n$方阵（n>1）. 将A的n个行向量记为$v_1,\ldots,v_n$. 对于两个行向量$v=(a_i)_{1\leq i\leq n}$与$v'=(b_i)_{1\leq i\leq n}$，定义

$$v * v' = (a_i b_i)_{1\leq i\leq n}$$

以及

$$v\cdot v' = \sum_{1\leq i\leq n} a_i b_i.$$

假设:

(1) 对任意的i,j $(1\leq i,j\leq n)$，存在k $(1\leq k\leq n)$使得$v_i * v_j = v_k$;

(2) 对任意的i,j $(1\leq i,j\leq n,\ i\neq j)$，$v_i\cdot v_j = 0$.

证明:

(i) A有一个行向量为$\underbrace{(1,\ldots,1)}_{n}$; 对于$A$的另外任意一个行向量$v_i$，它有$\frac{n}{2}$个分量为1，$\frac{n}{2}$个分量为$-1$.

(ii) n是2的幂.

(iii) 设$n=2^m$，则可以通过重新排列A的行与列，将A变为方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{\otimes m}.$$

这里，

$$X^{\bigotimes m} = \underbrace{X \otimes \cdots \otimes X}_{m} = (\cdots(\underbrace{X \otimes X) \otimes \cdots) \otimes X}_{m}$$

是方阵X的m次张量积；两个方阵$X = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$与$Y = (y_{i'j'})_{1\leq i',j'\leq q}$的张量积被定义为一个$pq \times pq$方阵

$$X \otimes Y = (z_{kl})_{1\leq k,l\leq pq},$$

其中$z_{kl} = x_{ij}y_{i'j'}$，整数i, j, i', j' 满足$1 \leq i,j \leq p$，$1 \leq i',j' \leq q$，且由等式$k = p(i'-1)+i$与$l = p(j'-1)+j$唯一确定.

3.问答题 20 分

设$h(z)$是关于自变量z的多项式. 考虑系数在多项式环$\mathbb{C}[z]$中的，关于y的三次方程$y^3 - 3zy + h(z) = 0$.

(i) 当$h(z) = -z^3 - 1$时，找到此方程的至少一个一次多项式函数解.

(ii) 假设方程$y^3-3zy+h(z) = 0$有三个互不相等的整函数解$y = f_1(z), f_2(z), f_3(z)$，则$h(z)$可以取哪些多项式？ 注：整函数指在整个复平面上解析的函数.

4.问答题 40 分

蚂蚁森林是全球最大的个人碳账户平台，该平台以量化方式记录每个人的低碳行为。当支付宝用户收集到足够的“能量”时，他/她可以向蚂蚁森林申请种植一棵真正的树。截至2019年4月22日（世界地球日），支付宝蚂蚁森林的5亿用户已经在中国西北地区种植了1亿棵真树，总面积为11.2万公顷，保护着总面积为1.2万公顷的保护地。

1. 本题两小问中考虑在一个3×4的长方形区域的每个小方格的中心点种树，要求在横、竖、斜3个方向上都不能存在连续的3颗（及以上）树。令1表示可以种树，0表示不可以种树。满足种树条件的示意图为

1	1	0	1
0	1	0	0
0	0	0	1

不满足种树条件的示意图为

1	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1

(a) 请问在一个3×4的区域里，最多能种多少颗树，并给出一种种植的方式。

(b) 在满足上一问最多能种多少颗树答案的前提下，请问一共有多少种种法，给出思路和答案。

2. 考虑一个由从左到右的n个小方格组成的$1\times n$的区域，从左向右依次在每个小方格种一棵树，一共种n棵。树的种类只有两种：胡杨和樟子松。假设在第一个小方格种植的树是胡杨的概率是r。后续种树的规则为：如果前一个小方格种的是胡杨，则本格种胡杨的概率为s；如果前一个小方格种的是樟子松，则本格种樟子松的概率为t，$0<r,s,t<1$。

   (a) 假设$r=1/3, s+t\neq 1$。是否存在s和t，使得对任意的i，$2\le i\le n$，在第i个小方格种植的树是胡杨的概率都等于一个跟i无关的常数？如果存在，请给出s和t的关系；如果不存在，请说明理由。

   (b) 假设$r=\frac{1}{3}, s=\frac{3}{4}, t=\frac{4}{5}$。假设我们观察到第2019个小方格里种植的树是胡杨，但我们观察不到在其它小方格里种植的是哪种树。请问在第一个小方格里种植的树是胡杨的概率是多少？

3. 为了种树的可持续发展控制成本，蚂蚁森林希望在知道用户申请数量之前从公益机构获得种植配额。令随机变量D_1和D_2分别表示支付宝用户对胡杨和樟子松的申请数量。将D_i的分布函数记为F_i，其均值和方差分别表示为μ_i和σ_i^2（$i=1,2$）。假设蚂蚁森林只知道μ_i,σ_i^2（$i=1,2$）但并不知道F_i的其它信息。蚂蚁森林需要确定两种树的配额，分别记为Q_i（$i=1,2$）。由于环境的承受能力，种植的树木总数不能超过给定的常数M，即

$$Q_1+Q_2\le M.$$

并且假设$M\ge \mu_1+\mu_2$。

已知两种树的订购成本分别为cQ_i（$i=1,2$）。如果预留配额Q_i小于种树申请数量D_i，即$Q_i\le D_i$，则增加额外成本$m[D_i-Q_i]^+$（$i=1,2$）。这里$[x]^+\triangleq \max\{x,0\}$。$m,c,\mu_i,\sigma_i$为已知常数且满足关系$\frac{m-c}{c}>\left(\frac{\sigma_1}{\mu_1}\right)^2>\left(\frac{\sigma_2}{\mu_2}\right)^2$.

蚂蚁森林希望选择种树配额$Q_i\ge 0$（$i=1,2$）使得在**最坏情况**下总成本的期望极小，其中最坏情况是针对所有可能的均值为μ_i、方差为σ_i^2的分布函数F_i。从数学上讲，目标是求解以下优化问题：

$$\begin{aligned}\min_{Q_1,Q_2}\quad &\max_{F_1\in\mathcal{F}_1,F_2\in\mathcal{F}_2}\sum_{i=1,2}\left[cQ_i+\int_0^\infty\left(m[\xi-Q_i]^+\right)dF_i(\xi)\right],\\ \text{subject to}\quad & Q_1+Q_2\le M,\quad Q_1,Q_2\ge 0,\end{aligned}\tag{1}$$

其中$\mathcal{F}_i$是所有均值为μ_i、方差为σ_i^2（$i=1,2$）的累积分布函数的集合，其支撑集为非负数。

问题：请求解问题(1)，推导最优种树配额Q_i, $i=1,2$的显式表达式。

1. 选择题（20分）

淘宝某卖家推出了一款抗摔玻璃杯，号称从高空摔下，不碎不裂。阿里质检员小哥检查了这家店铺后决定做抗摔检测。他从这家店铺取了品质相同的三只杯子，去一幢120层的高楼，希望测出该款玻璃杯最高从哪层楼摔下不会坏(不碎、无裂纹)。每个杯子从某一层摔下, 有三种可能:

(a) 不碎、无裂纹;

(b) 不碎、有裂纹;

(c) 碎。

已知杯子在t层摔下出现情况(a)并在$t+1$层摔下出现情况(b), 那么在$t+2$层摔下必定也出现情 况(b), 且r层($r \geq t+3$)摔下必定出现情况(c)。并且绝对不会出现杯子在t层摔下出现情况(a)并 在$t+1$层摔下出现情况(c)。例如:一种可能出现的情况是，在5层或以下摔下出现 情况(a)，在6、7层摔下出现情况(b)，在8层或以上摔下出现情况(c)。

如果玻璃杯从1层窗口摔下就出现了情况(b)或(c)了，则记$N=0$。对每个$n=1,...,119$，如 果从第n层摔下出现情况不碎不裂, 但第$n+1$层摔下不碎却出现了裂纹，则记$N=n$。最后，如 果第120层摔下仍然不碎不裂，则记$N=120$。需要注意的是, 为了保证测试的稳定性, 一旦杯子 出现裂纹就无法再次使用。

阿里质检员小哥想设计一种最优方案来测试，使得对于N的所有可能取值0, 1, . . . , 120，最多 只需尝试从M 个不同层楼的窗口往下摔，就可以保证准确地测出N 。请问M 的最小值是多少?（　）

**此题场景纯属虚拟;高空抛物不仅不文明而且非常危险!*

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11　　E. 以上都不是

2. 选择题（20分）

现代通信网络通常连接在二维或三维空间中移动的节点，例如智能手机或卫 星。其中的问题经常会涉及几何和概率知识，本题所述如下：佐格行星是一个以O为中心的球。两个飞船A和B在其表面随机着陆，它们的位置是独立的，并且各自均匀地分布在其表面上。

请求解由直线OA和OB形 成的角度∠AOB的概率密度函数f（　）

A. $f(\alpha)=\frac{1}{2}\sin\alpha.\ \alpha \in [0,\pi]$.　　**B.** $f(\alpha)=\sin\alpha.\ \alpha \in [0,\pi]$.

C. $f(\alpha)=\frac{2}{\pi}\cos^2\alpha.\ \alpha \in [0,\pi]$.　　**D.** $f(\alpha)=\frac{2}{\pi^2}\alpha.\alpha\in[0,\pi]$.

E. 以上都不是.

3. 理论题（30分）

(a)对于实数轴$\mathbb{R}$上的任一偶多项式函数

$$f(x)=c_0+c_1x^2+\cdots+c_nx^{2n},$$

定义

$$T(f)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(x^2-y^2)\pi}\cos(2\pi xy)f(y)\mathrm{d}y.$$

（1）证明：T(f)也是一个偶多项式，并与f有相同的次数.

（2）对任意的非负整数n=0,1,2, ... ,记EP_n为次数不超过2n（包括2n次）的实数轴R上的偶多项式的集合,此为一个实向量空间,求子空间

$$V_n=\{f\in \mathrm{EP}_n: T(f)=f\}$$

的维数.

4. 场景题：电梯的简化模型（30分）

考虑一栋有$n+1$层的大楼，其中大堂是第0层，阁楼是第n层。第k层楼的高度是kh，$k=0,1,...,n$。阁楼到地面的高度是$H=nh$。简单起见，假设楼里的电梯要么处于停止状态(速度为0)，要么以固定的速度v上行或下行。如果没有明确说明，电梯的容量为无穷。假设速度 从0变到v之间电梯没有延迟(不考虑加减速的额外时间)。

1. 假设在时刻0电梯刚好从大堂离开往上运行，并且时刻0在每个第k层，$k=1,...,n-1$,有 一位想上行到阁楼的乘客在等待进入电梯，有另一位想要下到大堂的乘客在等待进入电梯 且直到电梯下行到并停止在该层时才进入电梯。因此，电梯以$1,2,...,n,n-1,...,0$的顺 序停止。不管有多少乘客进入或离开电梯，电梯每次停留所花的时间为c秒。

   定义乘客从时刻0开始的**等待时间**为乘客进入电梯的时间。请计算这$2(n-1)$位乘客的**平均等待时间**，即总时间除以$2(n-1)$，关于n的简洁表达式。请忽略他们在电梯里的停留时间。

2. 此题中假设电梯在大堂和阁楼之间不间断运行，且运行途中不改变运行方向。每一次上下 乘客停留所耗的时间为0。

   一位“饿了么”外卖小哥到达大堂送餐给一位客户。在小哥的到达时刻，电梯以1/2的概 率处于上行状态，并且电梯位于高度X，X是$[0,H]$之间均匀分布的随机变量。等待送餐 的客户所处楼层高度为Y，Y是在$[0,H]$之间均匀分布的随机变量，Y独立于X。

   (a) 假设外卖小哥一直在大堂的电梯门口等待，电梯下来后马上乘电梯去往客户的楼 层。请计算外卖小哥在进入电梯前的等待时间的期望。

   (b) 如果外卖小哥到达大堂时，客户立刻出发等待乘电梯下行到大堂找外卖小哥，而外 卖小哥在大堂里等待。请计算外卖小哥在见到客户前的等待时间的期望。