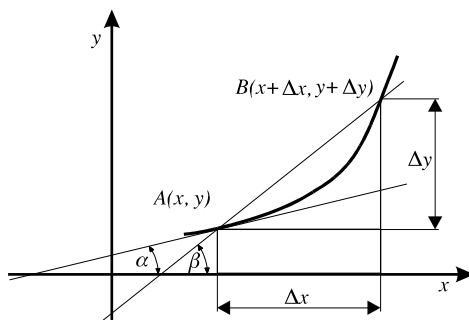


## DIFERENCIJALNI RAČUN

Posmatrajmo grafik neprekidne funkcije  $y = f(x)$  nad intervalom  $(a, b)$ .



Ako postoji granična vrednost  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ,  $x, x + \Delta x \in (a, b)$ , onda se ta granična vrednost, koja se označava sa  $f'(x)$  ili  $y'$  zove izvod funkcije  $f(x)$  u tački  $x$ .

Dakle, 
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Prava AB, gde su A i B tačke grafika, naziva se sečica te krive, određena tačkama A i B. Pustimo da se tačka B kreće po krivoj i da teži da se poklopi sa tačkom A. Sečica AB pri tom menja svoj položaj (nagib). Ukoliko postoji granični položaj te sečice kada tačka B teži ka tački A, tada se prava koja zauzima taj položaj naziva tangenta krive  $y = f(x)$  u tački A.

Pretpostavimo da je ugao  $\alpha$  koji tangenta zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose različit od  $\frac{\pi}{2}$ , ( $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ). Ako je  $\beta$  ugao koji zaklapa sečica AB sa pozitivnim delom x-ose, to je

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

pa je koeficijent pravca  $\operatorname{tg} \alpha$  tangente kroz tačku A dat izrazom

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Neka je funkcija  $y = f(x)$  diferencijabilna nad intervalom  $(a, b)$ . Izvod  $f'(x)$  funkcije  $f(x)$  je funkcija nezavisne promenljive  $x$ , definisana nad intervalom  $(a, b)$ . Ako je ona diferencijabilna u nekoj tački  $x \in (a, b)$ , onda se njen izvod

$(f'(x))'$  naziva drugim izvodom ili izvodom drugog reda funkcije  $f(x)$  u tački  $x$ , koji ćemo označavati sa  $y'' = f''(x)$ .

Ako je definisan izvod  $(n-1)$  reda,  $n \geq 2$ , tada je  $n$ -ti izvod ili izvod  $n$ -tog reda definisan kao izvod funkcije  $y = f^{(n-1)}(x)$ , tj.  $(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x)$ .

**Tablica izvoda**

Funkcija $f(x)$		Izvod $f'(x)$	Važi za
1.	$c = \text{const}$	0	$x \in \mathbb{R}$
2.	$x$	1	$x \in \mathbb{R}$
3.	$x^n$	$nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
	$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$	a) $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{N}$ neparan broj, $x \neq 0$ b) $\alpha = \frac{p}{q} > 1$ , $q$ neparan broj, $x \in \mathbb{R}$
	$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x \in \mathbb{R}, x > 0$
4.	$a^x$	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
5.	$e^x$	$e^x$	$x \in \mathbb{R}$
6.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
7.	$\ln  x $	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$ ,
8.	$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
9.	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
10.	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
11.	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
12.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x  < 1$
13.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x  < 1$
14.	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
15.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

## Osobine izvoda

Ako funkcije  $u = u(x)$  i  $v = v(x)$  imaju izvod u tački  $x$ , tada i funkcije  $u \pm v$ ,  $uv$ ,  $\frac{u}{v}$  i  $cu$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , imaju izvode u toj tački ( $\frac{u}{v}$  pod pretpostavkom da je  $v(x) \neq 0$  u datoj tački  $x$ ). Pri tom je:

- a)  $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$ ,
- b)  $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ ,
- c)  $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$ ,
- d)  $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$  ( $c$  je konstanta).

## Izvod složene funkcije

Neka je data složena funkcija  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$ . Ako  $g(x)$  ima izvod u tački  $x$ , a  $f(u)$  izvod u tački  $u$ , tada je  $(f \circ g)'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$  ( $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ).

1. Naći izvod funkcije  $y = x^2$  po definiciji.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

2. Naći izvod funkcije  $y = (x^2 - 3x + 3)^5$ .

$$u = x^2 - 3x + 3 \Rightarrow y = u^5$$

$$y' = y'_u \cdot u'_x = (u^5)'_u \cdot (x^2 - 3x + 3)'_x = 5u^4 \cdot (2x - 3) = 5(x^2 - 3x + 3)^4 \cdot (2x - 3).$$

3. Naći izvod funkcije  $y = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2 \arctg \sqrt{\sin x}$ .

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1 - \sqrt{\sin x}}{1 + \sqrt{\sin x}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}}\right)' + 2 \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{\sin x})^2} \cdot (\sqrt{\sin x})' = \frac{1 - \sqrt{\sin x}}{1 + \sqrt{\sin x}} \cdot \\ &\cdot \frac{(1 + \sqrt{\sin x})'(1 - \sqrt{\sin x}) - (1 + \sqrt{\sin x})(1 - \sqrt{\sin x})'}{(1 - \sqrt{\sin x})^2} + 2 \cdot \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)'(1 - \sqrt{\sin x}) - (1 + \sqrt{\sin x})\left(-\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\right)(\sin x)'}{(1 + \sqrt{\sin x})(1 - \sqrt{\sin x})} + \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x \cdot (1 - \sqrt{\sin x}) + (1 + \sqrt{\sin x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{(1 + \sin x) \cdot \sqrt{\sin x}} = \\ &= \frac{\cos x \cdot (1 - \sqrt{\sin x} + 1 + \sqrt{\sin x})}{2 \cdot (1 - \sin x) \cdot \sqrt{\sin x}} + \frac{\cos x}{(1 + \sin x) \cdot \sqrt{\sin x}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2\cos x \cdot (1 + \sin x) + 2\cos x \cdot (1 - \sin x)}{2 \cdot (1 - \sin x)(1 + \sin x) \cdot \sqrt{\sin x}} = \frac{2\cos x}{(1 - \sin^2 x) \cdot \sqrt{\sin x}} = \frac{2}{\cos x \cdot \sqrt{\sin x}}.$$

4. Naći izvod funkcije  $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$ .

$$y' = 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

5. Naći izvod funkcije  $y = \left(\frac{x}{a}\right)^b + \left(\frac{b}{x}\right)^a + \left(\frac{a}{b}\right)^x$ .

$$y' = \frac{1}{a^b} \cdot b \cdot x^{b-1} + b^a \cdot \left(-\frac{a}{x^{a+1}}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \ln \frac{a}{b}.$$

6.  $y = a^{a^x} + a^{x^a} + x^{a^a} + a^{a^a}$ .

$$y' = a^{a^x} \cdot \ln a \cdot a^x \cdot \ln a + a^{x^a} \cdot \ln a \cdot a \cdot x^{a-1} + a^a \cdot x^{a^a-1}.$$

### Logaritamski izvod

Po ovom pravilu možemo da tražimo izvod funkcije samo u tačkama gde je funkcija pozitivna.

7. Naći izvod funkcije  $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x$ .

$$\ln y = \ln \left( x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cos^2 x \right) = \frac{2}{3} \ln x + \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3 \ln \sin x + 2 \ln \cos x$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \cdot (-1) - \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x + 3 \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + 2 \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

$$y' = y \left( \frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3 \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} x \right)$$

$$y' = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot \left( \frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3 \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} x \right).$$

8. Naći drugi izvod funkcije  $y = x^x$ .

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$\frac{1}{y} y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \quad y'' = (x^x)' \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot (\ln x + 1)'$$

$$y' = x^x (\ln x + 1) \quad y'' = x^x (\ln x + 1)^2 + \frac{x^x}{x}.$$

9. Naći izvod funkcije  $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x + \ln x$ .

$$\text{Ako je } y_1 = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \text{ sledi } y' = y'_1 + (\ln x)'$$

$$\ln y_1 = x \cdot \ln \frac{x}{1+x}$$

$$\frac{1}{y_1} y'_1 = \ln \frac{x}{1+x} + x \cdot \frac{1+x}{x} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}$$

$$y'_1 = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \cdot \left[ \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right]$$

$$y' = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \cdot \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{x}.$$

Izvod funkcije zadate u parametarskom obliku

Neka su nad intervalom  $I \subset \mathbb{R}$  definisane dve realne funkcije  $x = \varphi(t)$  i  $y = \psi(t)$ ,  $t \in I$  i neka za funkciju  $\varphi(t)$  postoji inverzna funkcija  $t = \varphi^{-1}(x)$ . Tada je složena funkcija  $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$ , definisana nad skupom vrednosti  $\{\varphi(t) : t \in I\}$  funkcije  $\varphi(t)$ . Kažemo da je sa  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in I$ , funkcija  $f(x)$  zadata u parametarskom obliku pri čemu ćemo pomoćnu promenljivu  $t$  nazvati parametrom.

Neka je data funkcija  $y = f(x)$  u parametarskom obliku  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in (a, b)$ . Ako neprekidne funkcije  $\varphi(t)$  i  $\psi(t)$  imaju izvode u tački  $t \in (a, b)$ , i ukoliko je  $\varphi'(t) \neq 0$ , tada funkcija  $y = f(x)$  ima izvod u tački  $t$  i važi

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \text{ tj. } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{dy'_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

$$\left( y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{y'_t}{x'_t} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{y'_t}{x'_t} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3} \right)$$

$$y'''_x = \frac{dy''_x}{dx} = \frac{dy''_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (y''_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t}, \text{ itd.}$$

10. Naći  $y''$  za  $x = \ln t$  i  $y = t + \frac{1}{t}$ .

$$y'_t = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}, \quad x'_t = \frac{1}{t}, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{t^2 - 1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2 - 1}{t} = t - \frac{1}{t}$$

$$(y'_x)'_t = 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 + 1}{t^2}, \quad y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{t^2 + 1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2 + 1}{t} = t + \frac{1}{t}.$$

11. Pokazati da funkcija  $y = e^{2x} \sin 5x$  zadovoljava jednačinu  $y'' - 4y' + 29y = 0$ .

$$y' = 2e^{2x} \sin 5x + 5e^{2x} \cos 5x$$

$$y'' = 4e^{2x} \sin 5x + 10e^{2x} \cos 5x + 10e^{2x} \cos 5x - 25e^{2x} \sin 5x =$$

$$= -21e^{2x} \sin 5x + 20e^{2x} \cos 5x$$

$$\underbrace{-21e^{2x} \sin 5x + 20e^{2x} \cos 5x}_{y''} - 4 \cdot \underbrace{(2e^{2x} \sin 5x + 5e^{2x} \cos 5x)}_{y'} + 29e^{2x} \sin 5x = 0.$$