VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Blesi Andrija, Dedei Jovana, Dragi ore, Janjo Aleksandar, Mievi Irena, Ostoji Tijana, Prokić Aleksandar, Tošić Stefan, Vuković Manojlo

Katedra za matematiku
Fakultet tehničkih nauka

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe II.3

1.1. Ispitivanje funkcija

Ispitujemo osobine realne funkcije $f : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jedne realne promenljive.

- *Oblast definisanosti / Domen funkcije*
  - Racionalna funkcija $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je definisana za $Q(x) \neq 0$;
  - Funkcija $\sqrt[n]{R(x)}$, gde je n paran broj, je definisana za $R(x) \geq 0$. Ako je n neparan broj, funkcija je definisana za sve realne brojeve;
  - Funkcija $\ln(T(x))$ je definisana za $T(x) > 0$;
  - Funkcija $\operatorname{tg} x$ je definisana za $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, a funkcija $\operatorname{ctg}(x)$ je definisana za $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
  - Funkcije $\arcsin x$ i $\arccos x$ su definisane samo za $x \in [-1, 1]$;
  - Funkcije e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arcctg} x$ su definisane za sve realne brojeve.
- *Parnost funkcije*
  - Ako je $f(-x) = f(x)$ funkcija je parna, tj. njen grafik je simetričan u odnosu na y-osu (npr. $f(x) = x^2$);
  - Ako je $f(-x) = -f(x)$ funkcija je neparna, tj. njen grafik je simetričan u odnosu na koordinatni početak (npr. $f(x) = x^3$);
  - Ako je $f(-x) \neq \pm f(x)$, kažemo da funkcije nije ni parna ni neparna (npr. $f(x) = \frac{x^2+4x-5}{x-4}$).
- *Nule funkcije* su rešenja jednačine $f(x) = 0$, i ukoliko postoje predstavljaju tačke u kojima grafik funkcije seče x-osu.
- *Asimptote funkcije*
  - Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini (levoj, desnoj okolini) tačke a sem u tački a. Ako je bar jedna od graničnih vrednosti
  $$\lim_{x \to a^+} f(x), \qquad \lim_{x \to a^-} f(x)$$
  jednaka $+\infty$ ili $-\infty$ prava $x = a$ naziva se **vertikalna asimptota (V.A.)** grafika funkcije f;
  - Za $m \neq 0$ funkcija $y = f(x)$ ima **kosu asimptotu (K.A.)** $\phi(x) = mx + n$ kada $x \to +\infty$, gde je $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ i $n = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$, ako postoje brojevi m i n, tj. ako oba limesa postoje i konačni su.
  Analogno se posmatra slučaj kada $x \to -\infty$. Asimptote ne moraju biti iste kada $x \to +\infty$, odnosno $x \to -\infty$;

- Za $m = 0$ funkcija $y = f(x)$ ima **horizontalnu asimptotu (H.A.)** $\phi(x) = n$ kada $x \to +\infty$ ako postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = n$. Analogno se posmatra slučaj kada $x \to -\infty$.
  Primetimo da kada $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) funkcija ne može istovremeno imati i kosu i horizontalnu asimptotu.

- *Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije*
  - Neka funkcija $f(x)$ ima prvi izvod nad intervalom I. Ako je $f'(x) > 0$, funkcija $f(x)$ je monotono rastuća nad intervalom I, a ako je $f'(x) < 0$, funkcija je monotono opadajuća nad intervalom I.
    Ako funkcija u tački a ima minimum ili maksimum kažemo da u tački a ima ekstremnu vrednost.
  - Ako funkcija $f(x)$ u tački a ima ekstremnu vrednost i ako postoji $f'(a)$ tada je $f'(a) = 0$. Tačke u kojima je $f'(x) = 0$ zovemo stacionarnim tačkama. Jedna od mogućnosti da se ispita da li u tački a funkcija ima ekstremnu vrednost ili ne je da ispitamo znak prvog izvoda.
  - Ako je funkcija u tački a neprekidna i ako postoji $\delta > 0$ takvo da za $x \in (a-\delta, a)$ je $f'(x) > 0$, ($f'(x) < 0$), a za $x \in (a, a+\delta)$ je $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) onda funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost i to maksimum (minimum).

- *Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke funkcije*
  - Ako postoji f'' nad intervalom I i ako je $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) nad intervalom I, tada je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I. Ako postoji $f''(x)$ nad intervalom I i ako je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna) nad I, tada je $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) nad I.
  - Za tačku $P(a, f(a))$ se kaže da je prevojna tačka funkcije $f(x)$ ako postoji okolina $(a-\delta, a+\delta)$ tačke a, takva da je funkcija $f(x)$ nad intervalom $(a-\delta, a)$ konkavna (konveksna), a nad intervalom $(a, a+\delta)$ konveksna (konkavna). Ako je $P(a, f(a))$ prevojna tačka funkcije $f(x)$ i ako postoji $f''(a)$, tada je $f''(a) = 0$.

Zadatak 1.1. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = \sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{x}}$.
Rešenje.

- *oblast definisanosti*: za izraz ispod kvadratnog korena mora da važi $\dfrac{(x-2)^3}{x} \geq 0$ i $x \neq 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$(x-2)^3$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$
y	$+$	$-$	$+$

$\mathcal{D} : x \in (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$.

- *parnost*: ni parna, ni neparna funkcija. Može se zaključiti iz domena jer funkcija nije definisana na intervalu $[0, 2)$, pa njen grafik ne može biti simetričan u odnosu na y-osu niti koordinatni početak.

- *nule*:

$$y = \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^3}{x} = 0 \Leftrightarrow (x-2)^3 = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2,$$

tj. funkcija seče x- osu u tački $(2, 0)$.

- *asimptote*:

  – V.A. je prava $x = 0$ jer

$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} = +\infty.$$

  – H.A. ne postoji jer

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} = +\infty.$$

  – K.A. je prava $y_1 = x - 3$ kada $x \to +\infty$

$$m_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{(x-2)^2(x-2)}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{|x-2|}{x} \sqrt{\frac{x-2}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x} \sqrt{\frac{x-2}{x}} = 1$$

$$n_1 = \lim_{x \to +\infty} \Big[f(x) - x \Big] = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}} - 1 \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}} - 1}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x-(x-2)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -3 \cdot \left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = -3.$$

  Prava $y_2 = -x + 3$ je kosa asimptota funkcije kada $x \to -\infty$

$$m_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x-2|}{x} \sqrt{\frac{x-2}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2-x}{x} \sqrt{\frac{x-2}{x}} = -1$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty}\Big[f(x)-(-x)\Big] = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L.P.}}{=} 3.$$

- *monotonost i ekstremne vrednosti:*

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}}\cdot\frac{3(x-2)^2x-(x-2)^3}{x^2} = \frac{(x-2)^2(3x-x+2)}{2\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}\cdot x^4} =$$

$$= \frac{2(x+1)\sqrt{(x-2)^4}}{2\sqrt{x^3(x-2)^3}} = (x+1)\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$$

	$(-\infty,-1)$,	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$\times$	$+$
$\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$	$+$	$+$	$\times$	$+$
y'	$\searrow$	$\nearrow$	$\times$	$\nearrow$

$y' > 0$ za $x \in (-1,0)\cup[2,\infty)$, funkcija raste,
$y' < 0$ za $x \in (-\infty,-1)$, funkcija opada.
Funkcija ima minimum u tački $T_{min}(-1,\sqrt{27})$ $\big(x=-1,\ y(-1)=\sqrt{27}\big)$.

- *konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:* drugi izvod funkcije je dat sa

$$y'' = \sqrt{\frac{x-2}{x^3}} + (x+1)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}}\cdot\frac{x^3-(x-2)3x^2}{x^6} =$$

$$= \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\left(1+\frac{(x+1)(x-3x+6)}{\frac{2(x-2)}{x^3}\cdot x^4}\right) =$$

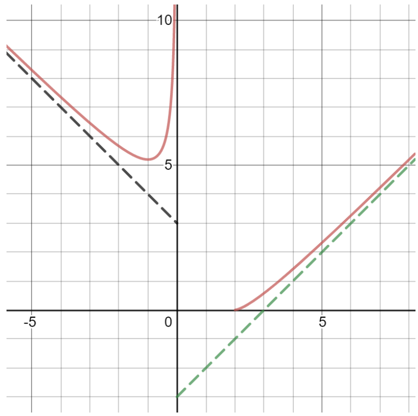
$$= \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\frac{x^2-2x+(x+1)(3-x)}{x(x-2)} = \frac{3}{x(x-2)}\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
x	$-$	$\times$	$+$
$x-2$	$-$	$\times$	$+$
$\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$	$+$	$\times$	$+$
y''	$\bigcup$	$\times$	$\bigcup$

$y'' > 0$ za $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$, funkcija je konveksna.
Kako je funkcija konveksna na celom domenu sledi da nema prevojnih tačaka.

- *tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod:* ako je α ugao između tangente i pozitivnog smera x-ose, onda je koeficijent pravca desne tangente u tački $(2, 0)$

$$\text{tg}(\alpha) = y'(2^+) = 3 \cdot \sqrt{\frac{0^+}{8}} = 0 \quad (\alpha = 0).$$



Slika 1: $y = \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}$

Zadatak 1.2. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = \text{arctg}\,\dfrac{2x}{x^2-1}$.
Rešenje.

- *oblast definisanosti*: funkcija $y = \text{arctg}\,x$ je definisana za sve realne brojeve, a $x^2 - 1 \neq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Dakle, $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

- *parnost*: ovo je neparna funkcija, jer je

$$f(-x) = \text{arctg}\,\frac{2(-x)}{(-x)^2-1} = \text{arctg}\,\frac{-2x}{x^2-1} = -\,\text{arctg}\,\frac{2x}{x^2-1} = -f(x),$$

  što znači da je njen grafik simetričan u odnosu na koordinatni početak pa je **u nastavku dovoljno posmatrati samo deo funkcije za** $x \geq 0$.

- *nule*:
$$y = \text{arctg}\,\frac{2x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

- *asimptote*:

  – V.A. ne postoji jer

$$\lim_{x\to 1^+} \text{arctg}\,\frac{2x}{x^2-1} = \text{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 1^-} \text{arctg}\,\frac{2x}{x^2-1} = \text{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

– H.A. je data jednačinom $y = 0$ jer

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1} = \operatorname{arctg}(0) = 0.$$

– K.A. ne postoji jer postoji horizontalna asimptota funkcije kada $x \to +\infty$.

- *monotonost i ekstremne vrednosti:* prvi izvod funkcije y je dat sa

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{x^2-1} = \frac{1}{\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2-2}{x^4+2x^2+1} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2}{x^2+1}$$

$y' < 0$ za svako $x \in \mathcal{D}$, funkcija je opadajuća, i nema ekstremnih vrednosti.

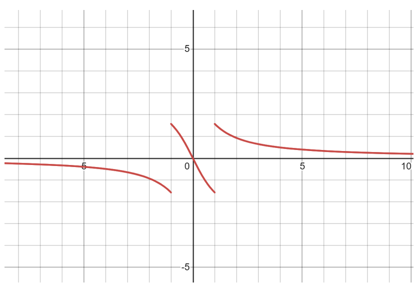
- *konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:* drugi izvod funkcije je dat sa

$$y'' = \left(\frac{-2}{x^2+1}\right)' = \frac{2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2},$$

te znak drugog izvoda zavisi samo od $4x$. Funkcija je otuda konkavna ($y'' < 0$) na intervalima $(-\infty,-1)$ i $(-1,0)$ i konveksna ($y'' > 0$) na intervalima $(0,1)$ i $(1,\infty)$. Prevojna tačka je $P(0,0)$.

- *tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod:* ako je α ugao između tangente i pozitivnog smera x-ose, onda je koeficijent pravca (funkcija nije definisana u $x = 1$ pa je u pitanju neprava tangenta)

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \lim_{x\to 1} y' = \lim_{x\to 1} \frac{-2}{x^2+1} = -1 \quad (\alpha = -\frac{\pi}{4}).$$

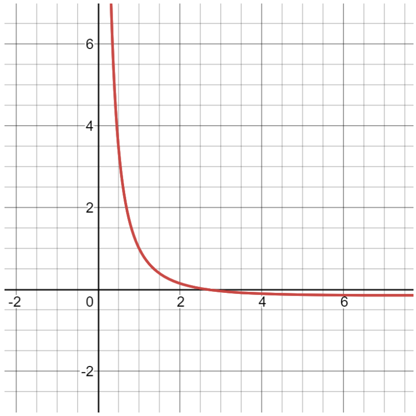


Slika 2: $y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1}$

Zadatak 1.3. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}$.
Rešenje.

- *oblast definisanosti:* je skup $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0 \wedge x \neq 0\}$ (ili $x \in (0, +\infty)$).
- *parnost*: funkcija je definisana samo za pozitivne realne brojeve pa ne može biti ni parna ni neparna.
- *nule:* $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.
- *asimptote*:
  - V.A. je prava $x = 0$ jer
  $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \ln x}{x} = \frac{1 - (-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$$
  - H.A. je prava $y = 0$ jer
  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \ln x}{x} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = 0.$$
  - K.A. ne postoji, jer funkcija ima horizontalnu asimptotu.
- *monotonost i ekstremne vrednosti:*
  $$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x - (1 - \ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{\ln x - 2}{x^2}$$
  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x - 2 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 2 \Leftrightarrow x > e^2$ i $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^2$, a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.
  Funkcija je rastuća na intervalu $(e^2, +\infty)$, a opadajuća na intervalu $(0, e^2)$.
  Funkcija ima minimum u tački $T_{min}(e^2, -\frac{1}{e^2})$.
- *konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:*
  $$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (\ln x - 2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{5 - 2\ln x}{x^3}$$
  $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 5 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{5}{2}}$ i
  $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > e^{\frac{5}{2}}$, a $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{5}{2}}$.

  Funkcija je konveksna na intervalu $(0, e^{\frac{5}{2}})$, konkavna na intervalu $(e^{\frac{5}{2}}, +\infty)$.
  Funkcija ima prevojnu tačku za $x = e^{\frac{5}{2}}$.
- *tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod:* ako je α ugao između tangente i pozitivnog smera x-ose, onda je koeficijent pravca (neprava desna tangenta)
  $$\mathrm{tg}(\alpha) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x - 2}{x^2} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \quad (\alpha = -\frac{\pi}{2}).$$



Slika 3: $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$

1.2. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1.4. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.

Zadatak 1.5. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = \sqrt{3-x} + \sqrt{3+x}$.

2. Vežbe II.4

2.1. Ispitivanje funkcija

Zadatak 2.1. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \ln\left|\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right|$.
Rešenje.

- *oblast definisanosti*: logaritam apsolutne vrednosti je definisan za sve vrednosti iz $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, što znači da mora važiti $\ln|x| - 1 \neq 0$, tj. $\ln|x| \neq 1$, tj. $x \neq \pm e$. Izraz $\ln|x| + 1$ takođe ne sme biti jednak nuli, tj. mora važiti $x \neq \pm\frac{1}{e}$. Iz izraza $\ln|x|$ sledi $x \neq 0$. Dakle, $\mathcal{D} : x \in \mathbb{R}\backslash\{-e, -\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}, e\}$.

- *parnost*: ovo je parna funkcija, jer je

$$f(-x) = \ln\left|\frac{\ln|-x|+1}{\ln|-x|-1}\right| = \ln\left|\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right| = f(x).$$

  što znači da je **u nastavku dovoljno posmatrati samo deo funkcije za** $x > 0$.

- *nule*: za $x > 0$ je $f(x) = 0$ akko je

$$\left|\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right| = 1, \qquad \text{tj.} \quad \frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1} = 1 \quad \text{ili} \quad \frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1} = -1.$$

  Gornji izraz ne može biti jedinica (vodi do kontradikcije)

$$\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1} = 1 \Leftrightarrow \ln|x| + 1 = \ln|x| - 1 \Leftrightarrow 1 = -1,$$

  ali može biti -1 jer

$$\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1} = -1 \Leftrightarrow \ln|x| + 1 = -\ln|x| + 1 \Leftrightarrow 2\ln|x| = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

- *asimptote:* (za $x > 0$)
  - V.A. su date jednačinama $x = \frac{1}{e}$ i $x = e$, jer je

$$\lim_{x\to\frac{1}{e}^+} \ln\left|\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right| = \ln \lim_{x\to\frac{1}{e}^+} \left|\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right| = \ln(0^+) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to e^+} \ln\left|\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right| = \ln \lim_{x\to e^+} \left|\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right| = \ln(+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left|\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right| = \ln \lim_{x\to 0^+} \left|\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right| = \ln 1 = 0.$$

  - H.A. je data jednačinom $y = 0$, jer je

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right| = 0.$$

– K.A. ne postoji.

- *monotonost i ekstremne vrednosti:* budući da je

	$(0,\frac{1}{e})$	$(\frac{1}{e},e)$	(e,∞)
$\ln(x)+1$	$-$	$+$	$+$
$\ln(x)-1$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

tj.

$$f(x)=\ln\left|\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right|=\begin{cases}\ln\frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1} & x\in(0,\frac{1}{e})\cup(e,\infty),\\ \ln\frac{\ln(x)+1}{1-\ln(x)} & x\in(\frac{1}{e},e),\end{cases}$$

na oba intervala se moraju naći izvodi. Specijalno, za $x\in(0,\frac{1}{e})\cup(e,\infty)$ važi

$$f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{\ln(x)+1}\cdot\frac{\frac{1}{x}(\ln(x)-1)-(\ln(x)+1)\frac{1}{x}}{(\ln(x)-1)^2}=$$
$$=\frac{2}{x(1-\ln^2(x))}=\frac{2}{(1+\ln(x))(1-\ln(x))},$$

te je funkcija opadajuća na $(0,\frac{1}{e})$ i (e,∞) na osnovu znaka prvog izvoda

	$(0,\frac{1}{e})$	$\times$	(e,∞)
$1+\ln(x)$	$-$	$\times$	$+$
$1-\ln(x)$	$+$	$\times$	$-$
$f'(x)$	$\searrow$	$\times$	$\searrow$

Za $x\in(\frac{1}{e},e)$ važi

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{\ln x+1}\cdot\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x)+(\ln x+1)\frac{1}{x}}{(1-\ln x)^2}=\frac{2}{x(1-\ln^2 x)}.$$

Funkcija je rastuća na intervalu $(\frac{1}{e},e)$, jer je $f'(x)>0$.
Na oba posmatrana intervala funkcija nema ekstremnih vrednosti.

- *konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:* prvi izvod je jednak i na $(0,\frac{1}{e})\cup(e,\infty)$ i na $(\frac{1}{e},e)$. Zato je

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\frac{2}{x(1-\ln^2(x))}\right)'=\frac{2(\ln^2(x)+2\ln(x)-1)}{x^2(1-\ln^2(x))^2}=$$
$$=\frac{2(\ln(x)-\ln(a))(\ln(x)-\ln(b))}{x^2(1-\ln^2(x))^2},\ \text{za}\ x\neq 0,e,e^{-1}$$

gde su a,b rešenja kvadratne jednačine $\ln^2(x)+2\ln(x)-1=0$ (važi $a\approx 0.089, b\approx 1.513$).
Na osnovu znaka drugog izvoda (primetiti da je $a\leq e^{-1}\leq b\leq e$)

	$(0,a)$	(a,e^{-1})	(e^{-1},b)	(b,e)	(e,∞)
$\ln(x)-\ln(a)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\ln(x)-\ln(b)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

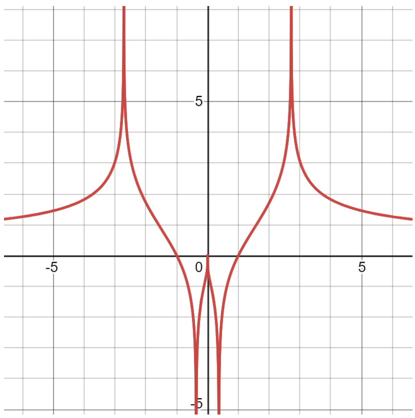
nije teško zaključiti da je funkcija konveksna, $f''(x)>0$ za $x\in(0,a)\cup(b,e)\cup(e,\infty)$ i takođe da je konkavna, $f''(x)<0$ za $x\in(a,e^{-1})\cup(e^{-1},b)$.

- *tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod:* za tačku $x=0$ je

$$tg(\alpha)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x(1-\ln^2(x))}=2\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{1-\ln^2(x)}\overset{\text{L.P.}}{=}2\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^{-2}}{\frac{-2\ln x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{\ln(x)}\overset{\text{L.P.}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{x}=-\infty$$

te je koeficijent pravca (neprave) tangente u nuli $\alpha=-\frac{\pi}{2}$. Slično i za ostale tačke.



Slika 4: $f(x)=\ln\left|\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right|$

Zadatak 2.2. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x)=x\cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}$ (bez nalaženja drugog izvoda).
Rešenje.

- *oblast definisanosti*: $3(x^2-2)\neq 0 \Leftrightarrow x^3\neq 2\Leftrightarrow x\neq\sqrt[3]{2}$, tj. $\mathcal{D}: x\in(-\infty,\sqrt[3]{2})\cup(\sqrt[3]{2},+\infty)$.

- *parnost*: $f(-x)=-x\cdot\dfrac{-x^3-1}{3(-x^3-2)}\neq\pm f(x)$, funkcija nije ni parna ni neparna.

- *nule*: proizvod dva činioca jednak je nuli akko je bar jedan od njih nula. Kako je $e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}\neq 0$ za svaki realan broj, sledi $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

- *asimptote*:
  - V.A. je data pravom $x = \sqrt[3]{2}$ jer

$$\lim_{x\to\sqrt[3]{2}^+} x\cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = \sqrt[3]{2}\cdot e^{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\sqrt[3]{2}^-} x\cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = \sqrt[3]{2}\cdot e^{-\infty} = 0.$$

  - H.A. ne postoji jer

$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = +\infty.$$

  - K.A. je prava $y = \sqrt[3]{e}\cdot x$ jer

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{xe^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = e^{\frac{1}{3}},$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} - x\cdot e^{\frac{1}{3}}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} - e^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L.P.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}}{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{3x^2(x^3-2)-(x^3-1)3x^2}{3(x^3-2)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}\cdot\frac{x^4}{(x^3-2)^2} = e^{\frac{1}{3}}\cdot 0 = 0.$$

- *monotonost i ekstremne vrednosti*:

$$f'(x) = e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} + x\cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}\cdot\frac{3x^2(x^3-2)-(x^3-1)3x^2}{3(x^3-2)^2} =$$

$$= e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}\cdot\left(1 + x\cdot\frac{-x^2}{(x^3-2)^2}\right) = e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}\cdot\frac{x^6-4x^3+4-x^3}{(x^3-2)^2} =$$

$$= e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}\cdot\frac{x^3(x^3-1)-4(x^3-1)}{(x^3-2)^2} = e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}\cdot\frac{(x^3-1)(x^3-4)}{(x^3-2)^2}$$

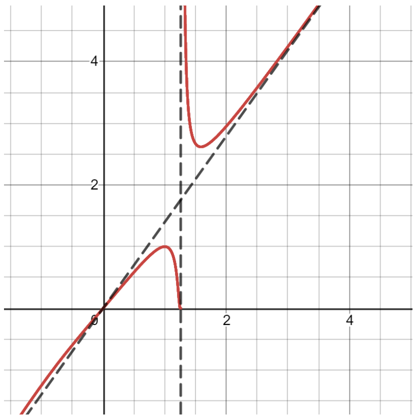
Sledi da je $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^3-1)(x^3-4) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \sqrt[3]{4}$. Potrebno je ispitati znak prvog izvoda da bismo odredili ekstremne vrednosti. Primetimo da znak prvog izvoda zavisi isključivo od izraza $(x^3-1)\cdot(x^3-4)$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \sqrt[3]{2})$	$(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$	$(\sqrt[3]{4}, \infty)$
x^3-4	$-$	$-$	$-$	$+$
x^3-1	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija je rastuća na intervalima $(-\infty, 1)$ i $(\sqrt[3]{4}, +\infty)$, a opadajuća na intervalima $(1, \sqrt[3]{2})$ i $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. Funkcija ima maksimum u tački $T_{max}(1,1)$, a minimum u tački $T_{min}(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{e})$

- *tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod:* za tačku $x = \sqrt[3]{2}$ koeficijent pravca (neprave leve) tangente je

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \lim_{x \to \sqrt[3]{2}^-} f'(x) = 0 \quad (\alpha = 0).$$



Slika 5: $f(x) = x \cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}$

2.2. Jednačina tangente i normale

Ako funkcija $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ ima prvi izvod u tački $x_0 \in (a, b)$, tada se prava

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

gde je $y_0 = f(x_0)$, zove **tangenta grafika funkcije** f u tački $T(x_0, f(x_0))$. Ako je α ugao između tangente grafika u tački x_0 i pozitivnog smera x-ose, tada važi

$$\operatorname{tg}(\alpha) = f'(x_0).$$

Ako je $f'(x_0) \neq 0$, tada je **normala grafika funkcije** f u tački $T(x_0, f(x_0))$ prava

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Zadatak 2.3. Naći jednačine tangente i normale za sledeće funkcije u datim tačkama:

a) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} - \ln x$ u tački čija je apcisa $x = 1$;

b) $x = 2 \operatorname{tg} t$, $y = 2\sin^2 t + \sin(2t)$ u tački $A(2, 2)$.

Rešenje.

a) Prvo računamo y koordinatu take $T(x_0, f(x_0))$.

$$y = f(1) = 2 \Rightarrow T(1,2),$$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad f'(1) = 1.$$

Jednačine tangente i normale su

$$t : y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 1 \cdot (x-1) \Rightarrow y = x + 1,$$

$$n : y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -1 \cdot (x-1) \Rightarrow y = -x + 3.$$

b) Funkcija je zadata parametarski pa koristimo izvod parametarski zadate funkcije

$$x'(t) = \frac{2}{\cos^2 t}, \quad y'(t) = 4 \sin t \cos t + 2\cos(2t)$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{2\sin(2t) + 2\cos(2t)}{\frac{2}{\cos^2 t}}$$

$$2 \operatorname{tg} t = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y'_x(t) = \frac{1}{2}.$$

$$t : y - y_0 = y'_x(t)(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 1.$$

$$n : y - y_0 = -\frac{1}{y'_x(t)}(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -2(x-2) \Rightarrow y = -2x + 6.$$

2.3. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 2.4. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = -(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

Zadatak 2.5. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = xe^{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}}$.

Zadatak 2.6. Odrediti jednačine tangente i normale grafika sledećih funkcija u datim tačkama:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, u tački čija je apcisa $x_0 = 4$;

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$, u tački čija je apcisa $x_0 = 0$.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.