Ilija M. Kovačević

Nebojša M. Ralević

Biljana N. Carić

Vojislav S. Marić

Momčilo B. Novković

Slavica S. Medić

MATEMATIČKA ANALIZA 1

UVODNI POJMOVI I GRANIČNI PROCESI

Novi Sad, 2013

Едиција: "ТЕХНИЧКЕ НАУКЕ - УЏБЕНИЦИ"

Назив уџбеника: "Математичка анализа 1: уводни појмови и гранични процеси" - треће издање

Аутори: др Илија М. Ковачевић, редовни професор ФТН-а у Новом Саду
академик др Војислав С. Марић, редовни професор ФТН-а у Новом Саду (у пензији)
др Небојша М. Ралевић, редовни професор ФТН-а у Новом Саду
др Момчило Б. Новковић, (неформално др)
мр Биљана Н. Царић, асистент и предавач ФТН Нови Сад
Славица С. Медић, асистент ФТН-а у Новом Саду

Рецензенти: др Јован Малишић, редовни професор Математичког факултета у Београду (у пензији)
др Мирко Будинчевић, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Издавач: Факултет техничких наука у Новом Саду

Главни и одговорни уредник:
Проф. др Раде Дорословачки, декан Факултета техничких наука у Новом Саду

Штампа: ФТН - Графички центар ГРИД, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад

Штампање одобрио:
Савет за издавачко-уређивачку делатност Факултета техничких наука у Новом Саду

Председник Савета за издавачко-уређивачку делатност:
Др Радош Радивојевић, редовни професор Факултета техничких наука у Новом Саду

CIP-Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

517(075.8)

МАТЕМАТИЧКА анализа 1 : уводни појмови и гранични процеси / Илија М. Ковачевић...[ет ал.]. - 3. изд. - Нови Сад : Факултет техничких наука, 2013 (Нови Сад : ФТН, Графички центар ГРИД). - 157 стр. : илустр. ; 24 cm. - (Едиција "Техничке науке - уџбеници" ; бр. 410)

Тираж 600. - Регистар. - Библиографија.

ISBN 978-86-7892-529-0

I. Ковачевић, Илија
а) Математичка анализа

COBISS.SR-ID 280394247

Predgovor

Ova knjiga je pisana prema planu i programu Matematičke analize 1 (granični procesi, diferencijalni račun funkcija jedne i više promenljivih sa primenama, integralni račun funkcija jedne promenljive, obične diferencijalne jednačine) za studente elektrotehničke struke i računarstva FTN u Novom Sadu.

Zbog nivoa izlaganja i raznovrsnog sadržaja knjiga može korisno da posluži i studentima tehničkih fakulteta, studentima PMF-a, kao i studentima ostalih fakulteta koji u okviru matematike izučavaju sadržaje iz matematičke analize.

Prve tri glave (Uvod, Realni i kompleksni brojevi, Realne funkcije) knjige predstavljaju standardni materijal koji se većim delom predaje u srednjim školama (sem delova o uvođenju pojma realnog broja) a predstavljaju materijal neophodan za savlađivanje gradiva iz oblasti Matematičke analize. Tu se detaljnije sa dosta novih termina razrađuje materija koja je svakom srednjoškolcu "poznata". Na fakultetima se pretpostavlja da je student upoznat sa tom materijom, pa se on ili ne obrađuje ili mu se daje suviše malo mesta. To znači da taj deo knjige može poslužiti profesorima matematike u srednjim školama, učenicima srednjih škola, studentima svih fakulteta i viših škola i svima onima koji žele da se dublje upuste u upoznavanje tog dela matematike.

U sledeće tri glave (Metrički prostori, Konvergencija nizova, Granična vrednost i neprekidnost funkcija), obzirom na mali fond časova, bili smo prinuđeni da u izvesnoj meri odstupimo od principa postupnosti, pa smo definicije i osnovne osobine za nizove i funkcije izučavali nad proizvoljnim metričkim prostorom, pri čemu smo se trudili da sve pojmove i osobine objasnimo na primerima realnih nizova i realnih funkcija jedne realne promenljive.

Pri pisanju knjige pošli smo i od toga da studenti donekle vladaju materijom, jer se granični procesi izučavaju u svim srednjim školama iz kojih se đaci upisuju na studije elektrotehničke struke i računarstva. Osim toga, cilj nam je da studenti nauče i da apstraktno misle, jer će na taj način lakše moći da primenjuju naučeno gradivo iz Matematičke analize 1, kao i da lakše shvate apstraktne pojmove i pojave koji se obrađuju u stručnim predmetima. Koliko smo u tome uspeli, najmerodavniji sud će dati i sami studenti kada završe fakultet.

Zahvaljujemo se recenzentima na korisnim sugestijama i primedbama kojima su omogućili da sadržaj knjige bude poboljšan.

Svesni smo da nijedna knjiga ne može da izađe bez štamparskih grešaka (nadamo se da ih u ovoj knjizi ima malo), pa ćemo biti zahvalni svima koji nam ukažu na pomenute greške koje bismo otklonili u narednom izdanju knjige.

Predgovor drugom izdanju

Ovo izdanje se razlikuje od prvog izdanja po tome što su u njemu otklonjene štamparske greške koje su u međuvremenu uočene, izvršene manje izmene teksta i dodati neki primeri.

Predgovor trećem izdanju

Ovo izdanje se razlikuje od drugog izdanja po tome što su u njemu otklonjene uočene štamparske greške, ubačene neke nove teme i izvršene manje izmene teksta.

Autori

Uspomeni na našeg dragog saradnika

Momčila Novkovića

Sadržaj

UVOD

1 Uvodni pojmovi

Pojam skupa se smatra jednim od osnovnih pojmova u matematici. Skup čine njegovi elementi i on je određen sa njima. Rečenicu "x je elemenat skupa X" beležimo kraće sa $x \in X$, dok rečenicu "x nije elemenat skupa X" kraće pišemo kao $x \notin X$. Skup možemo opisati pomoću osobine njegovih elemenata. Ako skup X sadrži sve objekte koji imaju osobinu P, tada pišemo $X = \{x \mid P(x)\}$ (ili $X = \{x : P(x)\}$) i čitamo: "Skup X je skup svih elemenata x koji imaju osobinu P". Skup koji sadrži samo elemente $x_1, ..., x_n$ zapisujemo sa $X = \{x_1, ..., x_n\}$.

1.1 Elementi logike

Iskaz je rečenica za koju znamo da li je tačna ($\top$) ili netačna ($\perp$).

Za označavanje iskaza se najčešće koriste slova $p, q, r, ...$ sa ili bez indeksa i njih nazivamo **iskazna slova**.

Konjunkcija redom iskaza p i q jeste iskaz "p i q" koji označavamo sa $p \wedge q$. Konjunkcija je tačan iskaz samo ako su i iskaz p i iskaz q tačni. U svim ostalim slučajevima je netačan iskaz.

Disjunkcija redom iskaza p i q jeste iskaz "p ili q" koji označavamo sa $p \vee q$. Disjunkcija je netačan iskaz samo ako su i iskaz p i iskaz q netačni. U svim ostalim slučajevima je tačan iskaz.

Ekskluzivna disjunkcija redom iskaza p i q jeste iskaz "ili p ili q" koji označavamo sa $p \underline{\vee} q$. Ekskluzivna disjunkcija je netačan iskaz samo ako su iskazi p i q oba tačni ili oba netačni. U svim ostalim slučajevima je tačan iskaz.

Implikacija redom iskaza p i q jeste iskaz "ako p, onda q" koji označavamo sa $p \Rightarrow q$. Implikacija je netačan iskaz samo ako je iskaz p tačan, a iskaz q netačan. U svim ostalim slučajevima je tačan iskaz.

Iskaz "ako p, onda q" ima isto značenje kao i sledeće rečenice: "iz p sledi q", "p je dovoljan uslov za q", "q je potreban (neophodan) uslov za p", "p implicira q", "p je pretpostavka za q".

Ekvivalencija redom iskaza p i q jeste iskaz "p ako i samo ako q" koji označavamo sa $p \Leftrightarrow q$. Ekvivalencija je tačan iskaz samo ako su i iskaz p i iskaz q tačni ili i iskaz p i iskaz q netačni. U ostalim slučajevima je netačan iskaz.

Iskaz "p ako i samo ako q" ima isto značenje kao i sledeće rečenice: "p akko q", "p ekvivalentno sa q", "p je potreban i dovoljan uslov za q", "ako p, onda q i obrnuto".

Negacija iskaza p jeste iskaz "nije p" koji označavamo sa $\neg p$. Negacija je tačan iskaz samo ako je iskaz p netačan, a netačan iskaz ako je iskaz p tačan.

Rekurzivna definicija **iskaznih formula** ili kraće formula je data sa

1) Iskazna slova su formule.

2) Ako su A i B formule, onda su i $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \underline{\vee} B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $\neg A$ formule.

3) Formule se mogu obrazovati samo konačnom primenom pravila 1) i 2).

Dogovorno se spoljne zagrade izostavljaju. Takođe uzimamo da $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ "jače" razdvajaju formulu od $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$, npr. $(((p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)) \Leftrightarrow t)$ pišemo kao $p \wedge q \Rightarrow r \vee s \Leftrightarrow t$.

Svakoj iskaznoj formuli A pridružujemo njenu istinitosnu vrednost $v(A)$ i to na sledeći način

1. Vrednost formule p je zapravo vrednost iskaznog slova p, tj. $v(p)$ koja je $\top$ odnosno $\perp$.

2. Ako su A i B formule, tada je $v(A \wedge B) = v(A) \wedge v(B)$, $v(A \vee B) = v(A) \vee v(B)$, $v(A \underline{\vee} B) = v(A) \underline{\vee} v(B)$, $v(A \Rightarrow B) = v(A) \Rightarrow v(B)$, $v(A \Leftrightarrow B) = v(A) \Leftrightarrow v(B)$, $v(\neg A) = \neg v(A)$.

Sada možemo pisati pomoću Kejlijevih[1] tablica:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

p	$\neg p$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Iskazna formula je **tautologija** ako je tačna za sve vrednosti svojih iskaznih slova. Tautologije su u stvari zakoni (ispravnog) mišljenja.

Primeri tautologija su

A. Kejli

[1] Kejli, A. (Arthur Cayley, 1821-1895) - engleski matematičar

1.	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	2.	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
3.	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	4.	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
5.	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	6.	$p \vee p \Leftrightarrow p$
7.	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	8.	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
9.	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	10.	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
11.	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	12.	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
13.	$p \vee \neg p$	14.	$p \Rightarrow p$
15.	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	16.	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$
17.	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	18.	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
19.	$p \underline{\vee} q \Leftrightarrow \neg(p \Leftrightarrow q)$		

Iskazna formula je **kontradikcija** ako je netačna za sve vrednosti svojih iskaznih slova.

Označimo rečenicu "broj x je deljiv brojem y " kratko kao $D(x, y)$. Posmatrajmo sada rečenicu "svaki prirodan broj deljiv sa 6 je deljiv sa 3". U njoj figuriše neodređena zamenica **svaki** koju označavamo sa $\forall$ i zovemo **univerzalnim kvantifikatorom.** Pomoću uvedene oznake D ovu rečenicu možemo zapisati kao $(\forall x)(D(x, 6) \Rightarrow D(x, 3))$. Ova rečenica je tačan iskaz, ako npr. x uzima vrednosti iz skupa prirodnih brojeva.

Pored zamenice svaki koristimo i zamenicu **postoji.** Označavamo je sa $\exists$ i zovemo **egzistencijalnim kvantifikatorom.** Na primer, rečenicu "postoji broj koji deli sve prirodne brojeve" možemo zapisati kao $(\exists x)(\forall y)\ D(y, x)$. Ova rečenica je tačna ako posmatramo skup prirodnih brojeva, jer 1 deli sve prirodne brojeve.

Uvedimo još neke oznake. Izraz $(\forall x_1)\ (\forall x_2) \ldots (\forall x_n)\ P(x_1, ..., x_n)$ kraće pišemo kao $(\forall x_1, ..., x_n)\ P(x_1, ..., x_n)$. Slično, $(\exists x_1)\ (\exists x_2) \ldots (\exists x_n)\ P(x_1, \ldots, x_n)$ kraće pišemo kao $(\exists x_1, ..., x_n)\ P(x_1, ..., x_n)$.

Rečenicu "svaki x iz skupa A ima osobinu P" zapisujemo kao $(\forall x \in A)\ P(x)$ što je zamena za $(\forall x)(x \in A \Rightarrow P(x))$, a rečenicu "postoji x iz skupa A sa osobinom P" zapisujemo kao $(\exists x \in A)\ P(x)$ što je zamena za $(\exists x)(x \in A \wedge P(x))$. Na taj način se uvode **ograničeni kvantifikatori** $(\forall x \in A)$ i $(\exists x \in A)$.

Ako hoćemo da naglasimo da postoji tačno jedan element a koji zadovoljava neku osobinu $P(a)$, tada zamenicu "**postoji tačno jedan**" označavamo sa $\exists_1$ ili $\exists!$ i pišemo $(\exists_1 a)\ P(a)$.

1.2 Skupovi

Skup se u matematiku uvodi preko aksioma, odnosno kažemo da se uvodi aksiomatski. U ovoj knjizi skupove nećemo uvoditi tako, već ćemo ostati na nivou takozvane *Kantorove*[2] *naivne teorije skupova.*

[2]Kantor, G. (Georg Cantor, 1845-1918) - nemački matematičar ruskog porekla

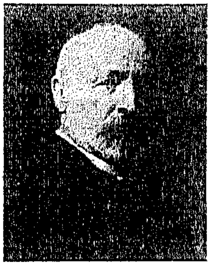
Skup A je jednak skupu B ako su im elementi isti, tj.

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Ako skupovi A i B nisu jednaki pišemo $A \neq B$.

Skup A je **podskup skupa** B, pišemo $A \subset B$, ako je svaki element skupa A i element skupa B, tj.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$



G. Kantor

Ako je skup A podskup skupa B, kažemo da je B **nadskup skupa** A i pišemo $B \supset A$. Ako je $A \subset B$ i $A \neq B$, tada se kaže da je skup A **pravi podskup** skupa B. Slično, ako je $B \supset A$ i $A \neq B$, kažemo da je skup B **pravi nadskup** skupa A. Jasno je da je

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A.$$

Skup koji nema elemenata se naziva **prazan skup** i obeležava se sa $\emptyset$. Prazan skup je podskup svakog skupa.

Od poznatih skupova gradimo nove pomoću sledećih operacija sa skupovima.

Unija skupova A i B, u oznaci $A \cup B$, je skup svih objekata koji su elementi skupa A ili skupa B, odnosno

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Presek skupova A i B, u oznaci $A \cap B$, je skup svih objekata koji su elementi i skupa A i skupa B, odnosno

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Skupovi A i B su **disjunktni** ako je $A \cap B = \emptyset$.

Razlika skupova A i B, u oznaci $A \setminus B$, je skup koji se sastoji od elemenata koji pripadaju skupu A, a ne pripadaju B, tj.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Neka je A podskup skupa B. **Komplement** skupa A u odnosu na skup B, u oznaci $C_B(A)$, je skup svih elemenata skupa B koji ne pripadaju skupu A, tj.

$$C_B(A) = B \setminus A = \{x \in B : x \notin A\}.$$

Partitivni skup skupa A, u oznaci $\mathcal{P}(A)$, je skup svih podskupova skupa A, tj.

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}.$$

Particija (razbijanje, podela) skupa A je skup čiji su elementi neprazni podskupovi skupa A, od kojih su svaka dva disjunktna, a čija je unija skup A.

Uređeni par (uređena dvojka) (x, y) dva objekta x i y je skup

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Objekat x se naziva **prva**, a y **druga komponenta (koordinata)** uređenog para (x, y).

Lako se može pokazati da su dva uređena para jednaka ako i samo ako su im odgovarajuće komponente jednake, odnosno

$$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \wedge y = v.$$

Rekurzivno definišemo **uređenu n-torku** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ za $n = 3, 4, \ldots$ sa

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = ((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n).$$

Objekat x_i, $i = 1, \ldots, n$ se naziva **i–ta koordinata (komponenta)**. Lako se pokazuje da su dve uređene n-torke jednake ako i samo ako su im odgovarajuće komponente jednake, odnosno

R. Dekart

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n.$$

Dekartov[3] **(direktni) proizvod** nepraznih skupova A i B, u oznaci $A \times B$, je skup svih uređenih parova, kod kojih je prva komponenta iz A, a druga iz B, tj.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Ako je $A = \emptyset$ ili $B = \emptyset$ definišemo da je tada $A \times B = \emptyset$.

Analogno se definiše Dekartov proizvod n $(n \geq 3)$ nepraznih skupova A_i, $i = 1, \ldots, n$

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\}.$$

Ako je za neko $i = 1, \ldots, n$, $A_i = \emptyset$, tada je po definiciji $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \emptyset$.

Ako su svi skupovi A_i, $i = 1, \ldots, n$, jednaki nekom skupu A, tada Dekartov proizvod tih skupova označavamo sa A^n i zovemo ga **Dekartov stepen** skupa A. Prema tome,

$$A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

[3]Dekart, R. (Rene Descartes (Cartesius), 1596-1650) - francuski matematičar, fizičar i filozof

Ako su A, B, C proizvoljni podskupovi skupa X, tada važe sledeće osobine:

1.	$(A \cup B) \cup C = (A \cup B) \cup C$	2.	$A \cup B = B \cup A$
3.	$A \cup \emptyset = A$	4.	$A \cup X = X$
5.	$A \cup A = A$	6.	$(A \cap B) \cap C = (A \cap B) \cap C$
7.	$A \cap B = B \cap A$	8.	$A \cap \emptyset = \emptyset$
9.	$A \cap X = A$	10.	$A \cap A = A$
11.	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	12.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
13.	$A \cup (A \cap B) = A$	14.	$A \cap (A \cup B) = A$
15.	$C_X(A \cap B) = C_X(A) \cup C_X(B)$	16.	$C_X(A \cup B) = C_X(A) \cap C_X(B)$
17.	$A \cup C_X(A) = X$	18.	$A \cap C_X(A) = \emptyset$
19.	$C_X(X) = \emptyset$	20.	$C_X(\emptyset) = X$
21.	$C_X(C_X(A)) = A$	22.	$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_X(B)$
23.	$A \cup B = X \Leftrightarrow C_X(A) \subset B$	24.	$A \subset B \Leftrightarrow C_X(A) \supset C_X(B)$
25.	$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$	26.	$A \setminus B = A \cap C_X(B)$
27.	$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$	28.	$\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
29.	$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$	30.	$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
31.	$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$	32.	$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

1.3 Relacije

Binarna relacija (ili kraće **relacija**) ρ (redom) između elemenata skupa A i skupa B, je proizvoljan podskup Dekartovog proizvoda skupova A i B, tj. $\rho \subset A \times B$. Često kažemo da je ρ **relacija iz skupa** A **u skup** B.

Relacija ρ **skupa** A je proizvoljan podskup Dekartovog kvadrata skupa A, tj. $\rho \subset A \times A = A^2$.

Ako je $(x, y) \in \rho$, reći ćemo da je x **u relaciji sa** y i obično zapisivati $x\rho y$. Ukoliko je $(x, y) \notin \rho$, kažemo da x **nije u relaciji sa** y i pišemo $x\not\rho y$ ili $x\neg\rho y$.

Relaciju

$$\rho^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \rho\} \subset B \times A$$

nazivamo **inverzna relacija** relacije $\rho \subset A \times B$.

Neka je ρ relacija skupa A.

Za relaciju ρ kažemo da je **refleksivna** ako važi

$$(R)\ (\forall x \in A)\ x\rho x.$$

Za relaciju ρ kažemo da je **simetrična** ako važi

$$(S)\ (\forall x, y \in A)(x\rho y \Rightarrow y\rho x).$$

Za relaciju ρ kažemo da je **antisimetrična** ako važi

$$(AS)\ (\forall x, y \in A)(x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y).$$

Za relaciju ρ kažemo da je **tranzitivna** ako važi

$$(T)\ (\forall x, y, z \in A)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z).$$

Napomenimo da relacija koja nije simetrična ne mora biti antisimetrična i obrnuto. Takođe je interesantno reći da je jedina relacija koja je i simetrična i antisimetrična ona koja sadrži samo uređene parove oblika (x, x). Ako relacija sadrži bar jedan par (x, y), $x \neq y$, ona ne može biti i simetrična i antisimetrična.

Ako je ρ binarna relacija u skupu A, tada ako važi da je $x\rho y$ ili $y\rho x$, za elemente $x, y \in A$ kažemo da su **uporedivi** u odnosu na relaciju ρ. U suprotnom oni su **neuporedivi** (u odnosu na relaciju ρ).

Relacija ekvivalencije

Relacija ρ je **relacija ekvivalencije**, odnosno **RST-relacija**, ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Primeri relacija ekvivalencije su vrlo česti u matematici.

- Relacija $=$ na proizvoljnom nepraznom skupu je relacija ekvivalencije.
- Ako je A proizvoljan neprazan skup, relacija A^2 je relacija ekvivalencije skupa A.
- Relacija $\|$, "... je paralelno sa ..." je relacija ekvivalencije na skupu pravih jedne ravni.
- Relacija $\perp$, " ... je normalna sa ..." nije relacija ekvivalencije u skupu pravih jedne ravni, jer nije ni refleksivna ni tranzitivna.

Ako je $\sim$ relacija ekvivalencije nepraznog skupa A, tada skup

$$C_x = \{y \in A : x \sim y\}$$

nazivamo **klasa ekvivalencije** elementa x s obzirom na $\sim \subset A^2$, a $x \in C_x$ je njen **predstavnik**. Skup

$$A/\sim\, = \{C_x : x \in A\}$$

svih klasa ekvivalencije skupa A za datu relaciju ekvivalencije nazivamo **količnički skup (faktor skup, kvocijent skup)**.

Klase ekvivalencije su neprazni skupovi. Unija svih klasa ekvivalencije relacije $\sim \subset A^2$, je skup A.

Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije nepraznog skupa A. Tada za proizvoljne $x, y \in A$ važi
(i) $x \in C_x$,
(ii) $x \sim y \Leftrightarrow C_x = C_y$,
(iii) $C_x \cap C_y = \emptyset \veebar C_x = C_y$.

Prema tome, klase ekvivalencije su neprazni podskupovi skupa A, od kojih su svaka dva različita disjunktna, a čija je unija skup A. Podsetimo se da je to upravo definicija particije skupa A, tako da je skup klasa ekvivalencije, količnički skup, uvek particija skupa A. Važi i obrnuto, svaka particija nepraznog skupa A jedinstveno određuje relaciju ekvivalencije $\sim$ skupa A takvu da je $A/\sim$ jednak toj particiji ($\sim$ definišemo tako da je $x \sim y$ ako i samo ako postoji elemenat particije čiji su elementi x i y).

Relacija poretka

Relacija je **relacija poretka**, ili **RAST-relacija**, ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Primeri relacija poretka:
- Relacija $\leq$ je relacija poretka npr. skupa realnih brojeva.
- Relacija $\subset$ je relacija poretka skupa $\mathcal{P}(A)$, gde je A proizvoljan neprazan skup.
- Relacija $|$, "...je deljivo sa...", je relacija poretka skupa prirodnih brojeva.

Relaciju poretka obično označavamo sa $\preceq$ i često je nazivamo **uređenje**.

Uređeni par $(A, \preceq)$, gde je A skup na kome je definisana relacija poretka $\preceq$ zovemo **uređen (parcijalno uređen)** skup (u odnosu na relaciju $\preceq$). Često kažemo i (kada znamo o kojoj je relaciji reč) da je skup A uređen.

Za uređen skup $(A, \preceq)$ kažemo da je **totalno (potpuno) uređen**, odnosno da je **lanac**, ako su svaka dva elementa uporediva, tj. važi

$$(\forall x, y \in A)(x \preceq y \vee y \preceq x),$$

Relaciju $\preceq$ zovemo **totalno uređenje**, odnosno **relacija totalnog poretka**.

Neka je $(A, \preceq)$ uređen skup i neka je $B \subset A$. Tada za element $a \in B$ kažemo da je **najveći element**, odnosno da je **maksimum (najmanji element**, tj. da je **minimum)** skupa B, ako je ispunjeno

$$(\forall x \in B)\, x \preceq a \quad ((\forall x \in B)\, a \preceq x).$$

U literaturi se često umesto pojma najmanji sreće pojam **prvi**, odnosno umesto najveći kaže se **poslednji**.

Uređen skup je **dobro uređen** ako svaki njegov (neprazan) podskup ima najmanji element.

Ako ne postoji element x uređenog skupa A, takav da je $a \preceq x$, $a \neq x$ ($x \preceq a$, $a \neq x$), kažemo da je $a \in A$ **maksimalni (minimalni) element**.

Važe osobine (videti [2])

Ako postoje, najveći i najmanji element su jedinstveni.

Svaki dobro uređen skup je totalno uređen.

Maksimalnih (minimalnih) elemenata može biti više.

Neka je $(A, \preceq)$ uređen skup i $B \subset A$. Element $a \in A$ je **gornje ograničenje (majoranta) skupa** B, ako je za svako $x \in B$, $x \preceq a$. Ako takvo $a \in A$ postoji, tada za skup $B \subset A$ kažemo da je **ograničen sa gornje strane (odozgo)**. Maksimum skupa B (ako postoji) je gornje ograničenje skupa B i obeležavamo ga sa $\max B$. Za $a \in A$ kažemo da je **donje ograničenje (minoranta) skupa** B, ako je za svako $x \in B$, $a \preceq x$. Ako takvo $a \in A$ postoji, tada za skup $B \subset A$ kažemo da je **ograničen sa donje strane (odozdo)**. Minimum skupa B (ako postoji) je donje ograničenje skupa B i obeležavamo ga sa $\min B$.

Gornjih i donjih ograničenja nekog skupa može biti više. Na primer, u uređenom skupu $(\mathbb{N}, |)$ imamo beskonačno mnogo gornjih ograničenja skupa $\{2, 3, 4, 6\}$. To su svi prirodni brojevi koji su deljivi sa 3 i 4 (pa samim tim i sa 2, pa i sa 6).

Ako skup gornjih ograničenja skupa B ima najmanji element, zovemo ga **supremum skupa** B. Slično, **infimumom skupa** B zvaćemo najveći element skupa donjih ograničenja skupa B, ako takav postoji. Supremum skupa B označavamo sa $\sup B$, dok infimum skupa B označavamo sa $\inf B$.

Na primer, supremum skupa iz predhodnog primera u skupu prirodnih brojeva je 12. Skup $\{2, 3, 4, 6\}$ u skupu prirodnih brojeva ima samo jedno donje ograničenje, 1, pa je 1 infimum skupa $\{2, 3, 4, 6\}$.

Uobičajeno je da ako se u nepraznom skupu A proučava relacija totalnog poretka $\preceq$, da se u njemu definiše i relacija $\prec$, **striktnog poretka**:

$$a \prec b \Leftrightarrow a \preceq b \land a \neq b.$$

Sada gornju definiciju supremuma, odnosno infimuma možemo iskazati i na drugi način.

Za $s \in A$ ($i \in A$) kažemo da je supremum (infimum) nepraznog skupa $B \subset A$, gde je $(A, \preceq)$ totalno uređen skup, ako je

$$(\forall b \in B)\ b \preceq s\ \land\ (\forall a \in A)(a \prec s \Rightarrow (\exists b_0 \in B)\ a \prec b_0)$$

$$((\forall b \in B)\ i \preceq b\ \land\ (\forall a \in A)(i \prec a \Rightarrow (\exists b_0 \in B)\ b_0 \prec a)).$$

Neka je $A \neq \emptyset$ uređen u odnosu na relaciju poretka $\preceq$. Ako za elemente x, y, $x \neq y$ važi da je $x \preceq y$, onda se kaže da je x **ispred (ispod)** y, a y **iza (iznad)** x. Ako je $x \preceq y$ i $y \preceq z$, pri čemu su x, y i z međusobno različiti elementi, onda se kaže da je y **između** x i z. Ako između x i y ne postoji ni jedno z, onda se kaže da je x **neposredni predak** od (ili da je **neposredno ispod**) y, a y **neposredni potomak** od (tj. da je **neposredno iznad**) x.

Kažemo da je totalno uređen skup $(A, \preceq)$ **diskretan**, odnosno da A ima **diskretno uređenje**, ako svaki element koji nije najmanji ima neposrednog pretka i svaki element koji nije najveći ima neposrednog potomka.

Neka je $\emptyset \neq A_1 \subset A$. Za totalno uređen skup $(A_1, \preceq)$ kažemo da je **gust u** totalno uređenom skupu $(A, \preceq)$ ako između svaka dva elementa iz A postoji bar jedan element iz A_1. Ako je $A_1 = A$, onda kažemo da je skup $(A, \preceq)$ gust.

Skup $\mathbb{Q}$ je gust skup u $\mathbb{R}$, dok $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ nisu.

Posmatrajmo totalno uređen skup $(A, \preceq)$ (sa bar tri elementa). Neka za $a, b \in A$, postoji $x \in A$ tako da $a \prec x \prec b$.

Pod **otvorenim intervalom** (sa krajevima a i b) podrazumevamo skup

$$(a, b) = \{x \in A \ : \ a \prec x \prec b\},$$

a pod **zatvorenim intervalom** (**odsečkom, segmentom**) sa krajevima a i b

$$[a, b] = \{x \in A \ : \ a \preceq x \preceq b\}.$$

Takođe često posmatramo **poluotvorene** (**poluzatvorene**) **intervale**, tj. skupove oblika

$$[a, b) = \{x \in A \ : \ a \preceq x \prec b\},$$

$$(a, b] = \{x \in A \ : \ a \prec x \preceq b\}.$$

Iz konteksta je jasno kada se radi o uređenom paru (a, b), a kada o otvorenom intervalu.

Neprazan skup:
$[a, \cdot) = \{x \in A \ : \ a \preceq x\}$ zovemo **desni (završni) zatvoren deo** skupa A;
$(a, \cdot) = \{x \in A \ : \ a \prec x\}$ zovemo **desni (završni) otvoren deo** skupa A;
$(\cdot, a] = \{x \in A \ : \ x \preceq a\}$ zovemo **levi (početni) zatvoren deo** skupa A;
$(\cdot, a) = \{x \in A \ : \ x \prec a\}$ zovemo **levi (početni) otvoren deo** skupa A.

1.4 Funkcije

Neka su X i Y neprazni skupovi. Relaciju $f \subset X \times Y$ zovemo **preslikavanje** ili **funkcija** skupa X u Y ako

(1) $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x, y) \in f$,
(2) $(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

Skup X zovemo **oblast definisanosti** (**domen**) funkcije, a skup $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ zovemo **skup vrednosti** (**kodomen**) funkcije. Elemente skupa X zovemo **originali**, a elemente skupa $f(X)$ **slike**. Takođe, ako $(x, y) \in f$ kažemo da je y slika originala x. Dakle, relacija f je funkcija, ako svakom originalu odgovara tačno jedna slika.

Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ i $Y = \{a, b\}$. Relacija $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ je primer funkcije skupa X u skup Y. Relacija $f_2 = \{(1, a), (2, b)\}$ to nije jer element 3 nema svoju sliku. Relacija $f_3 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, b)\}$ takođe nije funkcija X u Y jer element 1 ima dve slike.

Da funkcija f preslikava skup X u skup Y označavamo sa $f : X \to Y$ i kažemo kraće funkcija $f : X \to Y$.
Ako je $(x, y) \in f$, onda pišemo $y = f(x)$ ili $f : x \mapsto y$.

Za funkciju $f : X \to Y$ za koju je $Y \subset \mathbb{R}$, kažemo da je **realna funkcija**. Ukoliko je $Y \subset \mathbb{C}$, f je **kompleksna funkcija.**

Preslikavanje $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}$, je **funkcija jedne realne promenljive**, a preslikavanje $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{C}$, je **funkcija jedne kompleksne promenljive.**

Tako ako imamo da je $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, za funkciju $f : X \to Y$, $Y \subset \mathbb{R}$ ($Y \subset \mathbb{C}$) kažemo da je realna (kompleksna) funkcija jedne realne promenljive.

Slično, ako je $\emptyset \neq X \subset \mathbb{C}$, za funkciju $f : X \to Y$, $Y \subset \mathbb{R}$ ($Y \subset \mathbb{C}$) kažemo da je realna (kompleksna) funkcija jedne kompleksne promenljive. Npr. funkcija $|\ |$ (modul kompleksnog broja) je realna funkcija jedne kompleksne promenljive.

Preslikavanje $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, je **funkcija n realnih promenljivih**, a preslikavanje $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{C}^n$, je **funkcija n kompleksnih promenljivih.** Ako je $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, često se kaže da je f **funkcija više realnih (kompleksnih) promenljivih.** Analogno prethodnom kao specijalne slučajeve za $Y \subset \mathbb{R}$ ($Y \subset \mathbb{C}$) imamo **realne (kompleksne) funkcije n realnih promenljivih**, odnosno **n kompleksnih promenljivih.**

Ponekad ćemo za funkciju $f : X \to Y$, datu sa $y = f(x)$ reći kraće funkcija $f(x)$, $x \in X$ ili samo funkcija $f(x)$. Takođe umesto da kažemo "funkcija f definisana sa $f(x) = ...$" reći ćemo kraće "funkcija $f(x) = ...$".

Dva preslikavanja f i g su jednaka ako i samo ako imaju isti domen i ako je $f(x) = g(x)$, za svako x iz domena.

Funkcija $f : X \to Y$ je **injekcija (injektivna)**, tj. "$1-1$" ako je

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)),$$

tj.

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Primetimo da za injektivnu funkciju zapravo važi ekvivalencija:

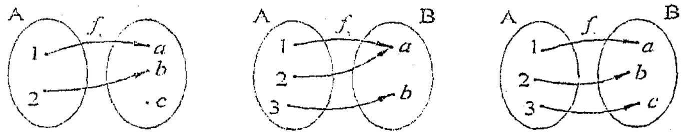
$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Funkcija $f : X \to Y$ je **sirjekcija (sirjektivna)**, tj. "na" ako je $f(X) = Y$, odnosno

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ y = f(x).$$

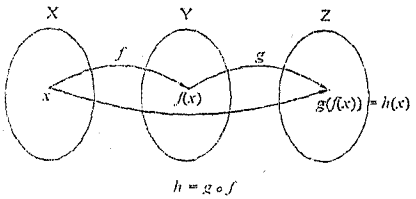
Funkcija $f : X \to Y$ je **bijekcija, tj. bijektivno preslikavanje** ako je ona injekcija i sirjekcija.

Funkcija $f_1 : \{1, 2\} \to \{a, b, c\}$, data sa $f_1(1) = a$ i $f_1(2) = b$, je "1-1", ali nije "na", jer elemenat c nema original. Funkcija $f_2 : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$, data sa $f_2(1) = f_2(2) = a$ i $f_2(3) = b$ je "na", ali nije "1-1" jer se 1 i 2 preslikavaju na istu sliku ($1 \neq 2$ i nije $f_2(1) \neq f_2(2)$). Funkcija $f_3 : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ data sa $f_3(1) = a$, $f_3(2) = b$ i $f_3(3) = c$, je primer bijekcije.



Sl. 1.1

Bijekcija konačnog skupa A na samog sebe zove se **permutacija** skupa A.



Sl. 1.2

Ako su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ funkcije, tada funkciju $h : X \to Z$ zadatu sa

$$h = \{(x, g(f(x))) : x \in X\}$$

zovemo **složena funkcija (kompozicija, slaganje, proizvod)**, funkcija f i g i pišemo $h = g \circ f$. Znači $h(x) = g(f(x))$.

Na primer, neka je $f : \{1,2,3\} \to \{a,b\}$, $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = b$, jedna, a $g : \{a,b\} \to \{\square, \triangle\}$, $g(a) = \square$, $g(b) = \triangle$, druga funkcija. Složena funkcija $h = g \circ f$ je preslikavanje skupa $\{1,2,3\}$ u skup $\{\square, \triangle\}$ dato sa $h(1) = (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = \square$, slično $h(2) = (g \circ f)(2) = \square$ i $h(3) = (g \circ f)(3) = \triangle$. Primetimo da $f \circ g$ u ovom slučaju nije ni definisana. Čak i kada je $f \circ g$ definisana, ne mora važiti komutativnost kompozicije preslikavanja, tj. ne važi uvek da je $f \circ g = g \circ f$. Na primer za $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ je $(g \circ f)(x) = 2^x + 1$, $(f \circ g)(x) = 2^{x+1}$.

Za proizvoljna preslikavanja važi zakon asocijativnosti za slaganje preslikavanja (za dokaz videti [2]), tj.

Za funkcije $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ je

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ dve funkcije. Ako su f i g injektivne (sirjektivne) funkcije, onda je takva i $g \circ f$. Odatle imamo da iz bijektivnosti f i g sledi i bijektivnost $g \circ f$. Ukoliko je $g \circ f$ injektivno (sirjektivno), tada je i f injektivno (g sirjektivno). Odatle iz bijektivnosti $g \circ f$, sledi injektivnost od f i sirjektivnost od g.

Ako je $X \neq \emptyset$, tada funkciju i_X (kraće i) zovemo **identičko preslikavanje** skupa X, ako je

$$i_X = \{(x, x) : x \in X\},$$

tj.

$$(\forall x \in X)\ i_X(x) = x.$$

Važna osobina kompozicije preslikavanja jeste da

$$f \circ i_X = f = i_Y \circ f,$$

važi za svako preslikavanje $f : X \to Y$.

Preslikavanje $\chi_A : X \to Y$, gde je $\emptyset \neq A \subset X$ i $Y = \{0, 1\}$ definisano sa

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

zovemo **karakteristična funkcija** podskupa A.

Ako je $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \neq \emptyset$, tada preslikavanje $p_i : X \to X_i$, $(i = 1, ..., n)$ definisano na sledeći način

$$p_i(x) = x_i, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

zovemo $i-$**ta projekcija**, odnosno **projekcija** na skup X_i.

Neka je $X \neq \emptyset$ i $f : X \to Y$. Tada ako je relacija

$$f^{-1} = \{(f(x), x) : x \in X\}$$

funkcija, kažemo da je $f^{-1} : f(X) \to X$ **inverzna funkcija** funkcije f.

Važe osobine (videti [2])

Za inverznu funkciju $f^{-1} : f(X) \to X$ funkcije $f : X \to Y$ važi da je $f \circ f^{-1} = i_{f(X)}$ i $f^{-1} \circ f = i_X$.

Neka je $f : X \to Y$ preslikavanje skupa X u skup Y. Inverzna relacija f^{-1} je inverzno preslikavanje preslikavanja f ako i samo ako je f injektivno preslikavanje. Tada je f^{-1} takođe injektivno preslikavanje.

Neka je $f : X \to Y$ preslikavanje. Ako postoji preslikavanje $g : f(X) \to X$ tako da je $g \circ f : X \to X$ identičko preslikavanje skupa X, ono je jedinstveno i $g = f^{-1}$.

Ako je $f : X \to Y$ i $\emptyset \neq A \subset X$, tada funkciju $f_A : A \to Y$ definisanu sa $(\forall x \in A)\ f_A(x) = f(x)$, zovemo **restrikcija funkcije** f na skup A. Ukoliko je f_A restrikcija funkcije $f : X \to Y$ na skup $A \subset X$, tada funkciju f zovemo **ekstenzija funkcije** f_A.

Neka su X i Y neprazni skupovi. Ako je $A \subset X$ i $B \subset Y$, a $f : X \to Y$ preslikavanje, tada skup

$$f(A) = \{y \in Y : (\exists x \in A)\ y = f(x)\}$$

nazivamo slika skupa A, a za skup

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

kažemo da je **inverzna slika skupa** B pri preslikavanju f.

Jasno je da je $f(A) \subset Y$ i $f^{-1}(B) \subset X$. Primetimo da su inverzna slika i inverzna funkcija dva različita pojma. Tako je inverzna slika preslikavanja $f : X \to Y$ u stvari preslikavanje $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$.

Očigledno je $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$.

Ako je $f : X \to Y$ *funkcija,* $\emptyset \neq A \subset X$ *i* $B \subset Y$, $f^{-1}(B) \neq \emptyset$, *tada važi*

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \quad i \quad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

Ako je f *injekcija, tada je* $A = f^{-1}(f(A))$, $A \subset X$ *i obrnuto. Slično, ukoliko je funkcija* f *sirjekcija, tada je* $f(f^{-1}(B)) = B$, $B \subset Y$. *Obrnuto, iz* $f(f^{-1}(Y)) = Y$ *sledi sirjektivnost od* f.

Navešćemo još neke osobine slike i inverzne slike funkcije.

Neka je $f : X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$ *i* $B_1, B_2 \subset Y$, *tada važi:*

1. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
3. $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$;
4. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
5. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
6. $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$.

Primetimo da inkluzija u tačkama 5. i 6. može biti striktna, a jednakost važi pod uslovom da je f "1-1" funkcija.

Definišimo sada pojam familije skupova. Neka je X proizvoljan, a I proizvoljan neprazan skup. Posmatrajmo preslikavanje $A : I \to \mathcal{P}(X)$. Označimo sliku elementa i iz I sa A_i. Skup $\{A_i : A_i \subset X, i \in I\}$ zvaćemo **familija**. Pisaćemo

$$\{A_i\}_{i\in I} \text{ ili } \{A_i : i \in I\}.$$

U literaturi možemo naići i na oznaku $(A_i, i \in I)$. Za ovu familiju kažemo da je **indeksirana** skupom I. Skup I zovemo **indeksnim skupom**. Element i iz I je **indeks skupa** A_i. Ako je $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, tada je familija $\{A_i : i \in I\}$ jednostavno skup $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Familija $\{A_i : i \in I\}$ je **podfamilija familije** $\{A_i : i \in J\}$ ako je $I \subset J$.

Unija familije skupova $\{A_i : i \in I\}$, u oznaci $\bigcup_{i\in I} A_i$ ili $\bigcup\{A_i : i \in I\}$, je skup $\{x : (\exists i \in I)\, x \in A_i\}$.

Presek familije skupova $\{A_i : i \in I\}$, u oznaci $\bigcap_{i\in I} A_i$ ili $\bigcap\{A_i : i \in I\}$, je skup $\{x : (\forall i \in I)\, x \in A_i\}$.

Dekartov proizvod familije skupova $\{A_i\}_{i\in I}$, u oznaci $\prod_{i\in I} A_i$, je skup svih funkcija $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ takvih da $(\forall i \in I)\, f(i) \in A_i$.

Ako je $I = \{1, \ldots, n\}$, tada se $\prod_{i\in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \ : \ f(i) \in A_i\}$ svodi na već definisan direktan proizvod konačnog broja skupova. Za $f \in \prod_{i\in I} A_i$, tačka $f(i) \in A_i$ je i-ta koordinata od f.

Ako je $\{A_i\}_{i\in I}$ proizvoljna familija podskupova skupa X, a B njegov proizvoljan podskup, tada važe osobine:

1. $(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$;
2. $(\bigcap_{i\in I} A_i) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$;
3. $C_X(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} C_X(A_i)$;
4. $C_X(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} C_X(A_i)$.

Za preslikavanje $f : X \to Y$ i familije $\{A_i\}_{i\in I}$, $A_i \neq \emptyset, i \in I$ i $\{B_j\}_{j\in J}$ podskupova redom skupova X i Y, važe osobine:

1. $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$;
2. $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$;
3. $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;
4. $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

Osobinu da iz svakog skupa A_i familije nepraznih podskupova $\{A_i\}_{i\in I}$ možemo uzeti po jedan element garantuje nam tzv. **aksioma izbora (Cermelova[4] aksioma)**:

Za familiju $\{A_i\}_{i\in I}$ nepraznih podskupova skupa A, postoji funkcija $f : I \to A$ takva da je $(\forall i \in I)\ f(i) = a_i \in A_i$.

Ekvivalentna tvrđenja aksiomi izbora su

Cornova[5] lema. *Ako u uređenom skupu svaki lanac ima gornje (donje) ograničenje, taj skup ima bar jedan maksimalni (minimalni) element.*

Hausdorfov[6] princip maksimalnosti. *Za svaki neprazan uređen skup, postoji jedan maksimalni lanac.*

E. Cermelo

F. Hausdorf

[4] Cermelo, E. (Ernst Zermelo, 1871-1953) - nemački matematičar
[5] Corn, M. A. (Max August Zorn, 1906-) - nemački matematičar
[6] Hausdorf, F. (Felix Hausdorff, 1868-1942) - nemački matematičar

1.5 Algebarske strukture

Ako je $X \neq \emptyset$, funkciju $* : X^2 \to X$ zovemo **binarna (unutrašnja) operacija**. Uobičajeno je da se umesto $*((x, y)) = z$ $(x, y, z \in X)$ piše $x * y = z$.

Preslikavanje $f : X^n \to X$, $n \in \mathbb{N}$ nazivamo **n-arna operacija** skupa $X \neq \emptyset$. Broj n se naziva **dužina operacije.** Jasno da se za $n = 2$ dobija binarna operacija, dok za $n = 1$ imamo **unarnu operaciju.**

Pod **spoljašnjom operacijom** skupa $X \neq \emptyset$ nad $K \neq \emptyset$ zovemo funkciju koja preslikava skup $K \times X$ u skup X.

Ako je $*$ binarna operacija nepraznog skupa X, tada uređen par $(X, *)$ zovemo **grupoid.**

Neka je $(X, *)$ grupoid.

Za operaciju $*$ kažemo da je **asocijativna**, odnosno da za nju važi **zakon asocijativnosti** ako je

$$(\forall x, y, z \in X)\ (x * y) * z = x * (y * z).$$

Operacija $*$ je **komutativna**, odnosno za nju važi **zakon komutativnosti,** ukoliko je ispunjeno

$$(\forall x, y \in X)\ x * y = y * x.$$

Ako postoji $e \in X$ takav da važi

$$(\forall x \in X)\ e * x = x * e = x,$$

taj element nazivamo **neutralni element.**

Element $a \in X$ nazivamo **regularnim** ako važi

$$(\forall x, y \in X)((a * x = a * y \Rightarrow x = y) \wedge (x * a = y * a \Rightarrow x = y)).$$

Neka je $(X, *)$ grupoid sa neutralnim elementom e. Tada, ako postoji $x' \in X$ tako da je

$$x' * x = x * x' = e,$$

za element $x \in X$ kažemo da ima **inverzni (simetrični)** element x'.

Grupoid $(X, *)$ je **polugrupa** ako je $*$ asocijativna operacija.

Grupoid $(X, *)$ je **komutativan** ako je $*$ komutativna operacija.

Ako u grupoidu postoji neutralni element, on je jedinstven.

Polugrupa $(X, *)$ je **grupa** ako postoji neutralni element e i ako za svaki element x postoji inverzni element x'.

Grupa u kojoj važi komutativni zakon zove se **komutativna ili Abelova**[7]

[7] Abel, N. H. (Niels Henrih Abel, 1802-1829) - norveški matematičar

grupa.

Ako je $(X,*)$ grupa, tada je inverzni element x' elementa $x \in X$ jedinstven.

N. H. Abel

Obično umesto grupoid (grupa) $(X,*)$ kratko kažemo samo grupoid (grupa) X.

Može se pokazati da (videti [2]):

Za svaki elemenat x, y, z grupe $(X,*)$ je

1) $(x')' = x$,
2) $(x*y)' = y' * x'$,
3) $x*y = x*z \Rightarrow y = z$,
4) $(\exists_1 u \in X)(\exists_1 v \in X)(x*u = y \wedge v*x = y)$.

Ako u grupoidu sem osobine 3) važi i osobina 3′) $y*x = z*x \Rightarrow y = z$, jednim imenom ih nazivamo **zakon skraćivanja**, odnosno **kancelativni zakon**.

Ako je operacija asocijativna, zagrade ne stavljamo. Ako za simbol operacije grupe umesto $*$ uzmemo $+$ $(\cdot)$, tada grupu $(X,+)$ $((X,\cdot))$ zovemo **aditivna** (**multiplikativna**) grupa. U aditivnoj (multiplikativnoj) grupi neutralni elemenat označavamo sa 0 (1) i čitamo "nula" ("jedinica"), a inverzni elemenat za x se označavamo sa $-x$ (x^{-1}). Umesto $x \cdot y$ pišemo xy.

Ako je $(X,*)$ grupoid (grupa) i $\emptyset \neq X_1 \subset X$, tada je $(X_1, *_1)$ **podgrupoid** (**podgrupa**) **grupoida** (**grupe**) $(X,*)$ ukoliko je operacija $*_1$ restrikcija operacije $*$. Često se za operaciju $*_1$ koristi i oznaka $*$.

Potreban i dovoljan uslov da je $(X_1,*)$ podgrupa grupe $(X,*)$ jeste da je

$$(\forall x, y \in X_1)\ x * y' \in X_1.$$

Neka su $(X,*)$ i $(Y,\star)$ grupoidi (grupe). Funkcija $f : X \to Y$ je **homomorfizam grupoida** (**grupe**) $(X,*)$ u grupoid (grupu) $(Y,\star)$ ako je

$$(\forall x, y \in X)\ f(x*y) = f(x) \star f(y).$$

Ako je taj homomorfizam bijekcija mi ga zovemo **izomorfizam** i u tom slučaju grupoidi (grupe) $(X,*)$ i $(Y,\star)$ su **izomorfni grupoidi** (**izomorfne grupe**).

Neka su grupoidi $(X,*)$ i $(Y,\star)$ izomorfni, sa izomorfizmom f.

Ako u X postoji neutralni elemenat u odnosu na operaciju $*$, onda mora postojati i u Y neutralni elemenat u odnosu na odgovarajuću operaciju $\star$ i tim izomorfizmom neutralni elemenat se preslikava na neutralni elemenat.

Ako je $*$ asocijativna (komutativna) operacija, onda je i $\star$ asocijativna (komutativna) operacija.

Ako X ima neutralni elemenat u odnosu na $*$ i ako je $x' \in X$ inverzni za $x \in X$, onda je $f(x')$ inverzni za $f(x)$ u odnosu na operaciju $\star$.

Posmatrajmo algebarske strukture sa dve binarne operacije, od kojih ćemo jednu označavati aditivno sa $+$, a drugu multiplikativno sa $\cdot$.

Ako je F neprazan skup, tada za uređenu trojku $(F, +, \cdot)$ kažemo da je **prsten (polje)** ako i samo ako važi

1) $(F, +)$ je Abelova grupa
2) $(F, \cdot)$ je polugrupa ($(F \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa).
3) $(\forall x, y, z \in F)(x(y+z) = (xy) + (xz) \ \wedge \ (x+y)z = (xz) + (yz))$.

Osobinu 3) zovemo **zakon distributivnosti**. Kako usvajamo konvenciju da $\cdot$ ima "prvenstvo" u odnosu na $+$, to se npr. $x(y+z) = (xy) + (xz)$ može napisati kao $x(y+z) = xy + xz$.

Iz definicije sledi da je svako polje prsten, ali obrnuto ne mora da važi.

Za $F_1 \subset F$ kažemo da je **potprsten (potpolje) prstena (polja)** F ako on čini prsten (polje) u odnosu na restrikcije operacija iz F.

Ako je $(F, +, \cdot)$ polje, tada za $x \in F$ i $n \in \mathbb{N}$ možemo rekurzivno definisati nx sa: (i) $1x = x$; (ii) $(n+1)x = nx + x$. Takođe je po definiciji $0x = 0 \in F$ i $(-n)x = n(-x)$, $n \in \mathbb{N}$. Ako $x \in F$, tada možemo rekurzivno definisati x^n, $n \in \mathbb{N}$ sa: (i) $x^1 = x$; (ii) $x^{n+1} = x^n \cdot x$. Opet po definiciji važi da je $x^0 = 1 \in F$ i $x^{-n} = (x^{-1})^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$. Jasno je da zbog asocijativnosti operacije $+$ $(\cdot)$ možemo npr. za $n > 1$ pisati $x + x + \ldots + x = nx$ $(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x = x^n)$.

U prstenu (polju) $(F, +, \cdot)$ važi:

$$1)\ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0, \quad 2)\ (-x)y = x(-y) = -(xy),$$
$$3)\ (-x)(-y) = xy, \quad 4)\ (nx)y = x(ny) = n(xy).$$

za sve elemente x i y iz F i sve $n \in \mathbb{Z}$.

Sada za $-(xy)$ možemo uvesti kraću oznaku $-xy$.

U polju $(F, +, \cdot)$, za sve $x, y \in F$ važi:

$$5)\ (-1)x = -x, \quad 6)\ xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0.$$

Definišimo pojam uređenog prstena (polja). Neka je $(F, +, \cdot)$. Ako je nad skupom F definisana relacija $\preceq$ za koju važi

$i)$ $(\forall x, y \in F)(x \preceq y \vee y \preceq x)$,

$ii)$ $(\forall x, y, z \in F)(x \preceq y \Rightarrow x + z \preceq y + z)$,

$iii)$ $(\forall x, y \in F)(0 \preceq x \wedge 0 \preceq y \Rightarrow 0 \preceq x \cdot y)$,

onda je prsten (polje) $(F, +, \cdot)$ **uređen prsten (uređeno polje)** i obeležava se sa $(F, +, \cdot, \preceq)$ ili kraće samo sa F.

Primetimo da iz $i)$ sledi da je relacija $\preceq$ refleksivna, odnosno da je $\preceq$ relacija poretka.

Uređeni prsten (polje) $(F, +, \cdot, \preceq)$ je **potpuno uređen prsten (potpuno uređeno polje)** ako svaki neprazni podskup A skupa F koji je ograničen sa gornje strane, ima supremum.

Neka su $(F_i, +_i, \cdot_i)$, $i = 1, 2$ prsteni (polja). Funkcija $f : F_1 \to F_2$ je **homomorfizam prstena (polja)** F_1 u prsten (polje) F_2 ako i samo ako

$$(\forall x, y \in F_1)\ f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y),$$

$$(\forall x, y \in F_1)\ f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y).$$

Ako je taj homomorfizam bijekcija mi ga zovemo **izomorfizam** i u tom slučaju **prsteni (polja)** F_1 i F_2 su **izomorfni.**

Ukoliko je f izomorfizam između prstena (polja) F_1 i F_2, uređenih redom relacijama $\preceq_i$, $i = 1, 2$, za koji važi

$$(\forall x, y \in F_1)\ x \preceq_1 y \Leftrightarrow f(x) \preceq_2 f(y),$$

tada kažemo da su uređeni prsteni (polja) $(F_1, +_1, \cdot_1, \preceq_1)$ i $(F_2, +_2, \cdot_2, \preceq_2)$ **izomorfni.**

Ove osobine bijekcije f nam govore da se ona slaže sa sabiranjem, množenjem i relacijama poretka skupova F_1 i F_2, tj. da će sve osobine elemenata skupa F_1 imati i elementi skupa F_2. Dakle, bijekcija f čuva sve bitne osobine ovih skupova. Za F_1 i F_2 takođe kažemo da su **jednaki do na izomorfizam**, odnosno da se suštinski ne razlikuju. Mi ćemo zbog jednostavnosti operacije i poredak u oba prstena (polja) jednako označavati.

1.6 Kardinalni brojevi

Skup je **beskonačan** ako postoji bijekcija koja ga preslikava na njegov pravi podskup. Skup je **konačan** ako nije beskonačan.

Skupovi X i Y su **bijektivni (iste moći)** ako postoji bijektivno preslikavanje X na Y.

Prazan skup je bijektivan sa samim sobom.

Svaki podskup konačnog skupa je konačan skup. Skup bijektivan sa konačnim skupom je i sam konačan. Ako je A konačan skup, onda je i skup $A \cup \{a\}$ konačan, tj. dodavanjem jednog elementa konačnom skupu, opet dobijamo konačan skup. Ako je A beskonačan skup, onda je i $A \setminus \{a\}$ beskonačan.

Važi i **teorema Kantor-Bernštajna**[8] (za dokaz videti [2])

[8]Bernštajn, F. (Felix Bernstein, 1878-1956) - nemački matematičar

Ako je skup A bijektivan sa nekim podskupom skupa B i B je bijektivan sa nekim podskupom skupa A, onda su skupovi A i B bijektivni. Ako su A, B i C tri proizvoljna skupa za koja važi $C \subset B \subset A$ i ako su A i C bijektivni, onda su sva tri skupa međusobno bijektivni.

Za skupove A i B iz neprazne familije $\mathcal{A}$ skupova kažemo da su u relaciji $\sim$ ako i samo ako su bijektivni. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije, pa klasu ekvivalencije koja odgovara skupu A u odnosu na nju zovemo **kardinalni broj** skupa A i to obeležavamo sa $\overline{\overline{A}} = card(A) = |A|$.

F. Bernštajn

Napomena 1.1 Može se postaviti pitanje nad kojim skupom je definisana ta relacija ekvivalencije. U prvom trenutku se čini da je definisana nad "skupom svih skupova". Međutim, pokazalo se da korišćenje tako opsežnog objekta, dovodi do kontradikcije, tj. da svi skupovi ne čine skup već opštiji pojam koji se zove klasa. No, do teškoća neće doći, ako se relacija ekvivalencije ograniči na podskupove nekog skupa, što je u svakom pojedinačnom razmatranju dovoljno.

Kardinalni brojevi nepraznih konačnih skupova su prirodni brojevi, a beskonačnih **transfinitni brojevi**. Kardinalni broj praznog skupa je 0.

Kažemo da je kardinalni broj skupa A **manji ili jednak** od kardinalnog broja skupa B i to označavamo sa $\overline{\overline{A}} \preceq \overline{\overline{B}}$, ako A ima isti kardinalni broj kao neki podskup skupa B. Takođe možemo definisati i relaciju "**manje**" u oznaci $\prec$, odnosno kažemo da je kardinalni broj skupa A manji od kardinalnog broja skupa B ako je $\overline{\overline{A}} \preceq \overline{\overline{B}}$ i skupovi A i B nisu bijektivni.

Relacija $\preceq$ je relacija poretka. Tom relacijom skup svih kardinalnih brojeva je totalno uređen.

Zbir kardinalnih brojeva skupova A i B je kardinalni broj skupa $(\{1\} \times A) \cup (\{2\} \times B)$, tj.

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{(\{1\} \times A) \cup (\{2\} \times B)}}.$$

Ako su A i B disjunktni skupovi, tada je $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \cup B}}$.

Proizvod kardinalnih brojeva skupova A i B je kardinalni broj skupa $A \times B$, tj.

$$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}}.$$

Operacije sabiranja i množenja kardinalnih brojeva su komutativne i asocijativne operacije.

Za $n \in \mathbb{N}$ možemo definisati i n–ti **stepen kardinalnog broja** skupa A kao kardinalni broj skupa A^n, tj. $(\overline{\overline{A}})^n = \overline{\overline{A^n}}$. Takođe, za neprazne skupove A i B, definišemo i $\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}}$, kao kardinalni broj skupa $A^B = \{f \ : \ f : B \to A\}$, tj.

$$\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{\{f \ : \ f : B \to A\}}}.$$

Kardinalni broj skupa $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva obeležavamo sa $\aleph_0$ (čitamo **alef nula**) i to je najmanji transfinitni kardinalni broj.

Da je zaista skup $\mathbb{N}$ beskonačan sledi iz postojanja bijekcije $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_1$, $f(n) = 7n$, $\mathbb{N}_1 = \{7n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, skupa prirodnih brojeva na njegov pravi podskup.

Skupove koji su bijektivni sa skupom prirodnih brojeva zovemo **prebrojivi** skupovi. Skup $\mathbb{Z}$ celih brojeva i skup $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva su primeri prebrojivih skupova.

Za skupove koji su konačni ili prebrojivi kažemo da su **najviše prebrojivi.**

Važi tvrđenje

Partitivni skup $\mathcal{P}(A)$ skupa A ima kardinalni broj koji je veći ali ne i jednak sa kardinalnim brojem skupa A.

Da bismo to dokazali pretpostavimo suprotno, da za neki skup A važi $A \sim \mathcal{P}(A)$. Pre svega $A \neq \emptyset$, jer $\emptyset$ nije bijektivan sa skupom $\{\emptyset\}$. Dakle, postoji bijekcija $f : A \to \mathcal{P}(A)$.

Uočimo skup $A_1 = \{x \in A : x \notin f(x)\}$. Taj skup je neprazan, jer postoji $a \in A$ tako da je $f(a) = \emptyset$, pa $a \notin f(a)$. Skup A_1 je pravi podskup skupa A jer postoji element $b \in A$ tako da je $f(b) = A$, tj. $b \in f(b)$, odnosno $b \notin A_1$.

Postoji $c \in A_1$ ($c \neq a$, $c \neq b$) tako da je $f(c) = A_1$. Ako $c \in A_1$, tada $c \notin f(c) = A_1$, što je kontradikcija. Ukoliko $c \notin A_1$, tj. $c \in f(c) = A_1$, opet dolazimo do kontradikcije. Prema tome pretpostavka da postoji bijekcija f skupa A na $\mathcal{P}(A)$ nije tačna, pa je time tvrđenje dokazano.

Skup realnih brojeva iz intervala $(0,1)$ nije prebrojiv i ima isti kardinalni broj kao i skup $\mathbb{R}$ realnih brojeva, jer je preslikavanje $f:\mathbb{R}\to(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ bijektivno. Taj kardinalni broj zovemo **kardinalni broj kontinuuma** ili kraće **kontinuum** i obeležavamo ga sa $\mathbf{c}$ ili $2^{\aleph_0}$. Skupovi $\mathbb{I}$ iracionalnih i $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva imaju kardinalni broj kontinuuma. Skup $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ima isti kardinalni broj kao i interval $(0,1)$. Jasno je da iz već rečenog sledi da $\mathbf{c}$ veći od $\aleph_0$. Odatle možemo postaviti pitanje da li postoji kardinalni broj $\aleph_1$ veći od $\aleph_0$ a manji od $\mathbf{c}$. Usvojimo da važi tzv. **hipoteza kontinuuma**, tj. da ne postoji takav kardinalan broj, odnosno da je $\aleph_1=\mathbf{c}$.

P. Koen

Ta pretpostavka je nezavisna od ostalih aksioma teorije skupova, odnosno ne može biti ni dokazana ni opovrgnuta unutar poznatih aksiomatskih sistema teorije skupova, što je dokazao P. Koen[9] šezdesetih godina ovog veka. Tako se u poslednje vreme razvijaju neke oblasti matematike koje uzimaju drugačiju hipotezu.

Ako je $n\in\mathbb{N}$, tada važi

1) $n+\aleph_0=\aleph_0$, 2) $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$, 3) $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$, 4) $\aleph_0^n=\aleph_0$, 5) $\mathbf{c}+\mathbf{c}=\mathbf{c}$,
6) $n\mathbf{c}=\mathbf{c}$, 7) $\aleph_0\mathbf{c}=\mathbf{c}$, 8) $\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{c}$, 9) $\mathbf{c}^n=\mathbf{c}$, 10) $\mathbf{c}^{\aleph_0}=\mathbf{c}$.

1.7 Nizovi

Jedna specijalna klasa funkcija jedne realne promenljive su nizovi.

Definicija 1.1 *Neka je A prebrojiv podskup skupa prirodnih brojeva (ili skupa $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$) i X neprazan skup. Preslikavanje $a:A\to X$ zovemo* **nizom u** *skupu X.*

Obično se u definiciji niza uzima da je $A=\mathbb{N}$. Međutim, tada za sledeća preslikavanja definisana sa

$$a(n)=\frac{1}{n-2},\quad a(n)=\frac{1}{1+(-1)^n}$$

ne bismo mogli reći da predstavljaju niz. U prvom slučaju oblast definisanosti nije čitav skup $\mathbb{N}$ već $\mathbb{N}\setminus\{2\}$, a u drugom slučaju $\mathbb{N}\setminus\{2n:n\in\mathbb{N}\}$. Bez gubitka

[9] Koen, P. (Paul Cohen, 1934-) - američki matematičar

opštosti za domen niza se može uzimati skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, jer za svaki prebrojiv skup A, $A \subset \mathbb{N}$, postoji bijekcija $\phi : \mathbb{N} \rightarrow A$ skupa $\mathbb{N}$ na skup A sa osobinom da ako je $n < m$, tada je i $\phi(n) < \phi(m)$, za sve $n, m \in \mathbb{N}$. Tada umesto niza a možemo posmatrati niz $a \circ \phi : \mathbb{N} \rightarrow X$. Primetimo da njegov domen jeste skup prirodnih brojeva i da oba preslikavanja imaju isti skup vrednosti.

Bijekciju ϕ možemo definisati na sledeći način: $\phi(1) = \min A$, $\phi(2) = \min(A \setminus \{\phi(1)\}), \ldots, \phi(n) = \min(A \setminus \{\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n-1)\})$, za sve $n > 1$.

Na primer, bijekcija ϕ za niz dat sa $a(n) = \dfrac{1}{n-2}$ preslikava skup $\mathbb{N}$ na skup $\mathbb{N} \setminus \{2\}$ i data je sa $\phi(1) = 1$, $\phi(n) = n + 1$ za sve $n > 1$.

Neka je $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ niz. Elemenat $a(n)$ skupa X (slika prirodnog broja n) obeležavamo sa a_n i zovemo ga **n-ti član niza** a ili **opšti član niza** a. Dakle, $a(1) = a_1$ je prvi član niza, $a(2) = a_2$ je drugi član niza, itd.

Niz $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ kraće obeležavamo sa $\{a_n\}$, $< a_n >$ ili (a_n). Koristićemo oznaku $\{a_n\}$.

Ako je $X = \mathbb{R}$, onda kažemo da je $\{a_n\}$ **realan niz**, a ako je $X = \mathbb{C}$ onda kažemo da je $\{a_n\}$ **kompleksan niz.** Primetimo da svakom kompleksnom nizu $\{a_n\} = \{x_n + iy_n\}$ odgovaraju dva realna niza $\{x_n\}$ -niz realnih delova niza $\{a_n\}$ i $\{y_n\}$ -niz imaginarnih delova niza $\{a_n\}$.

Neka je $(X, \preceq)$ totalno uređen skup i $\{a_n\}$ niz u tom skupu.

1) Ako postoji $M \in X$, tako da je $a_n \preceq M$, za sve $n \in \mathbb{N}$, onda kažemo da je niz $\{a_n\}$ **ograničen sa gornje strane**. Element M zovemo **gornja granica niza (gornje ograničenje)**. Najmanja gornja granica niza (ako postoji) koji je ograničen sa gornje strane, zove se **supremum niza (gornja međa)**, u oznaci $\sup a_n$.

2) Ako postoji $m \in X$, tako da je $m \preceq a_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$, onda kažemo da je niz $\{a_n\}$ **ograničen sa donje strane**. Element m zovemo **donja granica niza (donje ograničenje)**. Najveća donja granica niza (ako postoji) ograničenog sa donje strane zove se **infimum niza (donja međa)**, u oznaci $\inf a_n$.

Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen i sa gornje i sa donje strane, kažemo da je **ograničen.** Ako je $M = \sup a_n$ i $m = \inf a_n$, tada za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $m \preceq a_n \preceq M$. Ograničen niz realnih brojeva ima supremum i infimum.

Realan niz $\{\dfrac{1}{n}\}$ je ograničen, pri čemu je $M = \sup \dfrac{1}{n} = 1$ prvi član niza, a $m = \inf \dfrac{1}{n} = 0$ nije član niza. Realan niz $\{n\}$ je ograničen sa donje strane ($m = 1$), a nije ograničen sa gornje strane. Realan niz $\{(-1)^n n\}$ nije ograničen ni sa gornje ni sa donje strane.

Ako za niz $\{a_n\}$ važi:
1) $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \prec a_{n+1}$ - niz je **monotono rastući,**
2) $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{n+1} \prec a_n$ - niz je **monotono opadajući,**
3) $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \preceq a_{n+1}$ - niz je **monotono neopadajući,**

4) $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{n+1} \preceq a_n$ - niz je **monotono nerastući**.

Ako niz $\{a_n\}$ zadovoljava neki od gornja četiri uslova, kažemo da je **monoton**. Ako niz zadovoljava uslov 1) ili 2) kažemo da je i **strogo (striktno) monoton**. Očigledno je da je monotono rastući niz ujedno i monotono neopadajući, a monotono opadajući niz je ujedno i monotono nerastući.

Ako je $0 < q < 1$, realan niz $\{a_n\}$, gde je $a_n = q^n$ je monotono opadajući, jer

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{q^n}{q^{n+1}} = \frac{1}{q} > 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n.$$

Realan niz $\{a_n\}$, gde je $a_n = \frac{n}{n+1}$ je monotono rastući, jer

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1 \Rightarrow a_n < a_{n+1}.$$

Kažemo da je niz $\{a_n\}$ **gotovo monotono rastući**, ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, važi $a_n \prec a_{n+1}$. Slično se definišu pojmovi **gotovo monotono opadajućeg, gotovo monotono nerastućeg, gotovo monotono neopadajućeg** i **gotovo monotonog** niza.

Definicija 1.2 *Ako je $\{n_k\}$ monotono rastući niz prirodnih brojeva, onda za niz $\{a_{n_k}\}$ kažemo da je* **podniz niza** $\{a_n\}$.

Na primer podnizovi niza $\{a_n\}$ su nizovi $\{a_{2n}\}$, $\{a_{3n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$, itd.

REALNI I KOMPLEKSNI BROJEVI

2 Realni brojevi

Kao što ćemo kasnije videti skup $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva se uvodi aksiomatski preko Peanovih[10] aksioma. Nad njim se definišu operacije sabiranja $+$ i $\cdot$ množenja.

Pokazuje se da je $(\mathbb{N}, +)$ komutativna polugrupa, a $(\mathbb{N}, \cdot)$ komutativna polugrupa sa neutralnim elementom. Takođe se može pokazati da u strukturi $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ važi i distributivni zakon $\cdot$ prema $+$, kao i da se može definisati relacija $\leq$ koja je totalno uređenje.

Međutim, ta struktura ima nedostatak da jednačina $a + x = b$, $a, b \in \mathbb{N}$ nema uvek rešenja, tj. ne postoji uvek $x \in \mathbb{N}$ tako da je ta jednakost tačna. Proširivanjem strukture $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ u najmanju nadstrukturu, tako da su očuvane sve njene osobine, a uklanja se pomenuti nedostatak, dolazimo do skupa $\mathbb{Z}$ celih brojeva. Za tako dobijenu strukturu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ imamo da je ona komutativni prsten sa jedinicom u kojem za sve $a, b \in \mathbb{Z}$ važi formula $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$.

Đ. Peano

No, za proizvoljne $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ ne postoji uvek $x \in \mathbb{Z}$, tako da je $a \cdot x = b$, odnosno ta jednačina nema uvek rešenja u skupu $\mathbb{Z}$. Da bismo izbegli taj nedostatak proširujemo prsten $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ u najmanju nadstrukturu u kojoj će data jednačina imati jedinstveno rešenje. Tako dolazimo do skupa $\mathbb{Q}$, racionalnih brojeva, odnosno do nadstrukture $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ sa na odgovarajući način definisanim operacijama $+$ i $\cdot$ i relacijom $\leq$. Ta struktura je uređeno polje, a videćemo da nije potpuno uređeno polje.

Neka je u kvadratu $a \in \mathbb{Q}$ dužina stranice, a d dužina dijagonale. Postavlja se pitanje da li postoji racionalan broj $r > 0$ takav da je $d = ra$. Iz pretpostavke da postoji pozitivan racionalan broj r za koji važi da je $d = ra$, sledi da je

$$d^2 = 2a^2 \Rightarrow r^2a^2 = 2a^2 \Rightarrow r^2 = 2.$$

Dobili smo da je kvadrat racionalnog broja r broj 2. Neka je $r = \frac{p}{q}$, gde su p i q uzajamno prosti brojevi. Neka je neki od brojeva p i q neparan (u suprotnom razlomak $\frac{p}{q}$ bi se mogao skratiti). No $(\frac{p}{q})^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

[10] Peano, Đ. (Giuseppe Peano, 1857-1932) - italijanski matematičar i logičar

Tada je

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k \Rightarrow q = 2k_1,\ k_1 \in \mathbb{Z}.$$

Dakle, p i q su parni brojevi, što je kontradikcija. Znači, ne postoji racionalan broj r sa osobinom da je $d = ra$. Dakle, ni jedan racionalan broj ne može da bude dužina dijagonale kvadrata, ukoliko mu je stranica racionalan broj.

Znači, sa poznavanjem samo racionalnih brojeva ne bismo bili u mogućnosti da sve dužine duži izmerimo, tj. postoje duži čija se dužina ne izražava racionalnim brojevima. Tako smo primorani da uvedemo i nove brojeve, koji nisu racionalni. Te brojeve ćemo, kao što ćemo videti, zvati iracionalnim brojevima, a zajedno, racionalne i iracionalne, realnim brojevima.

Pokažimo sada da polje $\mathbb{Q}$ nije potpuno uređeno polje. U tu svrhu posmatrajmo skupove

$$A' = \{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 < 2\}, \quad B = \{q \in \mathbb{Q}^+ : q^2 > 2\}.$$

Sledi da je svaki element skupa A' manji od svakog elementa skupa B. Pridodajmo skupu A' sve negativne racionalne brojeve i 0, tj. neka je $A = A' \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$. Tada je

$$\mathbb{Q} = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset, \quad (\forall x \in A)(\forall y \in B)\ x < y.$$

Dokažimo da skup A, koji je ograničen sa gornje strane, nema najveći element, niti skup B, koji je ograničen sa donje strane, najmanji element.

Pretpostavimo da je p najveći element u skupu A. Kako $p \in A$ i $p > 0$, to je $p^2 < 2$, tj. $2 - p^2 > 0$. Neka je $h = \frac{2-p^2}{2p+1}$. Broj h je pozitivan racionalan broj manji od 1, jer je $p > 0$, $p^2 < 2$ i $(p+1)^2 > 2$. Neka je $p' = p + h$. Tada je $p < p'$ i

$$p'^2 = (p+h)^2 = p^2 + (2p+h)h < p^2 + (2p+1)h = p^2 + 2 - p^2 = 2.$$

Dakle, $p'^2 < 2$ i $p' \in Q$, pa je $p' \in A$. Znači, p nije najveći element skupa A. Dakle, skup A nema najveći element.

Pretpostavimo da je q najmanji element u B. Tada je $q^2 > 2$, tj. $q^2 - 2 > 0$. Neka je $q' = q - \frac{q^2-2}{2q} = \frac{q}{2} + \frac{1}{q}$. Kako je $q^2 > 2$, to je $0 < q' < q$. Dokažimo da je $q' \in B$. Zaista,

$$q'^2 = (q - \frac{q^2-2}{2q})^2 = q^2 - (q^2 - 2) + (\frac{q^2-2}{2q})^2 > q^2 - (q^2 - 2) = 2.$$

Znači, $q'^2 > 2$ i kako je $q' \in \mathbb{Q}$, to je $q' \in B$. Dakle, q nije najmanji element skupa B.

Skup A je ograničen sa gornje strane proizvoljnim elementom skupa B, a ne postoji $\sup A \in \mathbb{Q}$ (A nema najveći element, B nema najmanji element), što znači da $\mathbb{Q}$ nije potpuno uređeno polje.

Dakle, dolazi do potrebe da se uvede jedno potpuno uređeno polje brojeva. To polje ćemo obraditi u sledećem poglavlju.

2.1 Polje realnih brojeva

Polje realnih brojeva $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je neprazan skup $\mathbb{R}$ u kojem su definisane binarne operacije **sabiranje** $+$ i **množenje** $\cdot$, kao i binarna relacija $\leq$, tako da važi

R_1) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x+y)+z = x+(y+z)$ (asocijativnost sabiranja),

R_2) $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ 0+x = x+0 = x$ (0 je neutralni element za sabiranje),

R_3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists -x \in \mathbb{R})\ (-x)+x = x+(-x) = 0$ ($-x$ je inverzni element za sabiranje, elementa x),

R_4) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x+y = y+x$ (komutativnost sabiranja),

R_5) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (asocijativnost množenja),

R_6) $(\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ (1 je neutralni element za množenje),

R_7) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\ x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$ (x^{-1} je inverzni element za množenje, elementa x),

R_8) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = y \cdot x$ (komutativnost množenja),

R_9) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \wedge (x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z))$ (distributivnost množenja prema sabiranju),

R_{10}) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x \leq x$ (refleksivnost $\leq$),

R_{11}) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ (x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$ (antisimetričnost $\leq$),

R_{12}) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ (tranzitivnost $\leq$),

R_{13}) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \leq y \vee y \leq x)$ (svaka dva elementa su uporediva),

R_{14}) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z)$ (slaganje $\leq$ sa sabiranjem),

R_{15}) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y)$ (slaganje $\leq$ sa množenjam),

R_{16}) Svaki neprazni podskup A skupa $\mathbb{R}$ koji je ograničen sa gornje strane ima supremum.

Napomena 2.1 Kao što smo videli u prvoj glavi sistem aksioma nije nezavisan jer npr. iz R_{13}) sledi R_{10}. Relaciju poretka $\leq$ zovemo **manje ili jednako**. U aksiomi R_{16}) uzimamo ograničenost u odnosu na relaciju $\leq$.

Dakle, polje realnih brojeva je potpuno uređeno polje. Ovo polje ćemo označavati sa $\mathbf{R}$, ili ako ne dolazi do zabune isto kao i njegov nosač sa $\mathbb{R}$. Elemente skupa $\mathbb{R}$ zovemo **realni brojevi.**

Primetimo da pomoću relacije $\leq$ možemo definisati relacije $\geq$, $<$ i $>$. Tako za svako $x, y \in \mathbb{R}$, imamo

$$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x, \quad x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y, \quad x > y \Leftrightarrow y < x.$$

Za svako $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ važe osobine

1°)	$-(-x) = x, \quad (x^{-1})^{-1} = x \ (x \neq 0)$;	2°)	$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$;
3°)	$x \cdot (-y) = -(xy) = (-x) \cdot y$;	4°)	$(-x) \cdot (-y) = xy$;
5°)	$x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x$;	6°)	$x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$;
7°)	$x \leq 0 \wedge y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq xy$;	8°)	$x \leq 0 \wedge 0 \leq y \Rightarrow xy \leq 0$;
9°)	$x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$;	10°)	$0 < 1$.

Za dokaz videti [2].

Skup $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\}$ zovemo **skup pozitivnih realnih brojeva**, dok skup $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 0\}$ zovemo **skup negativnih realnih brojeva.** Dakle, 1 je pozitivan realan broj.

Primetimo da osobine 5°) – 9°), važe i kada umesto $\leq$ stavimo relaciju $<$. Takođe se mogu dokazati slični analogoni aksiomama R_{12}), R_{14}) i R_{15}).

Važi i osobina

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 \leq x \cdot x = x^2.$$

Teorema 2.1 *Svaki neprazni podskup A skupa $\mathbb{R}$ koji je ograničen odozdo ima infimum.*

Dokaz. Posmatrajmo skup $-A = \{-a : a \in A\} \subset \mathbb{R}$. On je neprazan, jer je takav i A. Neka je m donje ograničenje skupa A, odnosno $(\forall a \in A)\ m \leq a$. Tada iz osobine 6°) sledi $(\forall a \in A)\ -a \leq -m$, tj. dobijamo da je skup $-A$ ograničen odozgo, pa prema aksiomi supremuma postoji $s = \sup(-A)$.

No tada je $-a \leq s$, za svako $a \in A$, odnosno važi $(\forall a \in A)\ -s \leq a$.

Pokažimo da je $i = -s$ najveće donje ograničenje skupa A.

Pretpostavimo da je $i' \in \mathbb{R}$ takav da je $(\forall a \in A)\ i' \leq a$, odnosno $(\forall a \in A)\ -a \leq -i'$. Znači $-i'$ je gornje ograničenje skupa $-A$, te kako je $s = \sup(-A)$, to je $s = -i \leq -i'$, odnosno $i' \leq i$.

Dakle, sledi $i = \inf A$. □

Aksiomu R_{16}) nazivamo **aksioma supremuma.**

Prethodna teorema se često uzima umesto nje i tada je obično nazivamo **aksioma infimuma.** To znači da se na osnovu nje i ostalih aksioma može dokazati tvrđenje aksiome supremuma, te tako imamo u tom smislu ekvivalenciju aksioma supremuma i infimuma.

Takođe se umesto aksiome R_{16}) uzima i sledeća **Dedekindova**[11] **teorema.**

Teorema 2.2 *Neka su X i Y neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$, tako da za svako $x \in X$ i za svako $y \in Y$ važi da je $x \leq y$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ tako da za svako $x \in X$ i za svako $y \in Y$ važi $x \leq z \leq y$.*

Dokaz. Kako je $X \neq \emptyset$ i ograničen je sa gornje strane (jer za $y \in Y \neq \emptyset$, važi $(\forall x \in X)\ x \leq y$), to na osnovu R_{16}) postoji $\sup X$. Pokažimo da je $z = \sup X$. Jasno je da je $(\forall x \in X)\ x \leq z$. Kako su elementi skupa Y gornja ograničenja za skup X, to je $z = \sup X \leq y$, za sve $y \in Y$, jer je sup najmanje gornje ograničenje. □

Pretpostavimo sada da umesto aksiome R_{16}) važi Dedekindova teorema i pokažimo da važi aksioma supremuma, tj. svaki neprazan sa gornje strane ograničen skup $X \subset \mathbb{R}$ ima supremum. Definišimo skup Y na sledeći način

$$Y = \{y \in \mathbb{R} : (\forall x \in X)\ x \leq y\}.$$

Skup Y je skup svih gornjih ograničenja skupa X i po pretpostavci je neprazan, pa na osnovu teoreme, postoji $z \in \mathbb{R}$ tako da za svako $x \in X$ i $y \in Y$ važi $x \leq z \leq y$. Kako je $z \leq y$ ($z \in Y$, jer $(\forall x \in X)\ x \leq z$), za sve $y \in Y$, to je z najmanji element skupa Y, svih gornjih ograničenja skupa X, pa je $z = \sup X$.

Preslikavanje $|\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisano sa

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

zovemo **modul** ili **apsolutna vrednost**, dok je broj $|x|$ **apsolutna vrednost realnog broja** x.

R. Dedekind

Iz definicije i osobina relacije $\leq$ dobijamo da za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon, \quad (|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon),$$

kao i

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

Za $|\ |$ važe osobine:

1) $|x| \geq 0$; 2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; 4) $|x + y| \leq |x| + |y|$; 5) $|-x| = |x|$; 6) $|\,|x|\,| = |x|$; 7) $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

[11] Dedekind, R. (Richard Dedekind, 1831-1916) - nemački matematičar

Funkcija znaka promenljive (signum) $y = \operatorname{sgn} x$, je data sa

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Apsolutnu vrednost sada možemo predstaviti i na sledeći način

$$|x| = \operatorname{sgn} x \cdot x.$$

2.2 Podskupovi skupa realnih brojeva

Prirodni brojevi

Neka je $\mathcal{N} = \{N_i : i \in I\}$ skup svih podskupova $N_i \subset \mathbb{R}$ za koje važe osobine

$$1 \in N_i,$$

$$x \in N_i \Rightarrow x + 1 \in N_i.$$

Skup $\mathcal{N}$ je neprazan jer $\mathbb{R} \in \mathcal{N}$.

Neka je $\mathbb{N} = \bigcap_{i \in I} N_i$. Lako se proverava da je $\mathbb{N} \in \mathcal{N}$. Tako definisani skup $\mathbb{N}$ zovemo **skup prirodnih brojeva**, a njegove elemente **prirodnim brojevima**.

Svi prirodni brojevi su pozitivni. Zaista, iz osobine 10°) sledi $1 \in \mathbb{R}^+$. Ako $x \in \mathbb{R}^+$, tada sledi $x + 1 \geq 0 + 1 = 1 > 0$, tj. $x + 1 \in \mathbb{R}^+$. Dakle, $\mathbb{R}^+ \in \mathcal{N}$, tj. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$.

Ako je n prirodan broj, tada za prirodan broj $n+1$ kažemo da je **sledbenik broja** n i obeležavamo ga najčešće sa n'.

Važi teorema (videti dokaz u [2])

Teorema 2.3 *Postoji preslikavanje* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *za koje važe sledeće osobine*

N_1) $\pi(n)$ *je sledbenik broja* n, *za svako* $n \in \mathbb{N}$,

N_2) *Preslikavanje* π *je injekcija, tj.* $\pi(m) = \pi(n) \Rightarrow m = n$,

N_3) $1 \in \mathbb{N}$,

N_4) $(\forall n \in \mathbb{N})\ \pi(n) \neq 1$,

N_5) *Ako je* N^* *podskup skupa* $\mathbb{N}$, *koji zadovoljava uslove*

- *i*) $1 \in N^*$,
- *ii*) $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in N^* \Rightarrow \pi(n) \in N^*)$,

tada je $N^* = \mathbb{N}$.

Napomena 2.2 Ove osobine nazivamo **Peanove aksiome**, jer se polazeći od njih uvodi skup prirodnih brojeva. Ovde je to teorema jer smo krenuli od potpuno uređenog polja i iz njega "izvlačimo" njegov podskup.

Te osobine možemo iskazati i na drugi način

P_1) Sledbenik ma kojeg prirodnog broja je prirodan broj.

P_2) Svaki prirodan broj je sledbenik najviše jednog prirodnog broja.

P_3) 1 je prirodan broj.

P_4) Broj 1 nije sledbenik nijednog prirodnog broja.

P_5) Ako skup $N^* \subset \mathbb{N}$ sadrži 1 i sa svakim svojim članom sadrži i njegovog sledbenika, onda je $N^* = \mathbb{N}$.

Osobina N_5) se zove **princip matematičke indukcije** i često se u primenama javlja u nešto drugačijem obliku

Neka je T tvrđenje iskazano za prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$. Ako je tvrđenje T tačno za $n = 1$ i ako za svako $k \in \mathbb{N}$ iz pretpostavke da je tvrđenje T tačno za k sledi da ono važi i za $\pi(k) = k + 1$, tada je to tvrđenje T tačno za sve $n \in \mathbb{N}$.

Primetimo da u ovom slučaju uzimamo da je N^* skup svih prirodnih brojeva za koje važi tvrđenje T.

Važe osobine (za dokaz videti [2]):

1°) $(\forall m, n \in \mathbb{N})(m + n, m \cdot n \in \mathbb{N})$,

2°) $\pi(\mathbb{N}) = \{\pi(n) : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, tj. $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})\ n - 1 \in \mathbb{N}$,

3°) $(\forall m, n \in \mathbb{N})(m > n \Rightarrow m - n \in \mathbb{N})$,

4°) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq 1$, tj. $\min \mathbb{N} = 1$; $(\forall m, n \in \mathbb{N})(m > n \Rightarrow m \geq n + 1)$,

5°) Svaki neprazan skup $A \subset \mathbb{N}$ ima najmanji element.

Koristimo uobičajene oznake $2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, \ldots$.

Skup $\mathbb{N}$ je dobro uređen i diskretan skup.

Induktivno možemo definisati funkciju **faktorijel** kao

$$1! = 1, \quad (n + 1)! = n! \cdot (n + 1).$$

Obično se definiše i da je $0! = 1$.

Važi osobina

Za svaka dva prirodna broja m i n, postoje jedinstveni brojevi $q \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq r < n$, takvi da važi

$$m = qn + r.$$

Kaže se da prirodan broj n **deli** prirodan broj m, odnosno da je m **deljiv** sa n i piše $n|m$, ako postoji prirodan broj q, takav da je $m = qn$. Ako je $n|m$, tada je u prethodnoj teoremi $r = 0$.

Pokazuje se da je $|$ relacija poretka, kao i da ako $n|m$, sledi $n \leq m$.
Svaki prirodan broj n je deljiv sa 1 i sa samim sobom. Prirodan broj $p > 1$, koji je deljiv samo sa 1 i p, zove se **prost broj** ili **prim broj**.

Za prirodan broj s kaže se da je **zajednički sadržalac** prirodnih brojeva m i n, ako $m|s$ i $n|s$.
Može se pokazati da je skup zajedničkih sadržalaca za brojeve $m, n \in \mathbb{N}$ neprazan i da ima najmanji element. Taj element, u oznaci $S(m,n)$, tj. $NZS(m,n)$ nazivamo **najmanji zajednički sadržalac** brojeva m i n.

Za prirodan broj d kaže se da je **zajednički delilac** prirodnih brojeva m i n, ako $d|m$ i $d|n$.

Arhimed

Pokazuje se da je skup zajedničkih sadržalaca za brojeve $m, n \in \mathbb{N}$ neprazan i da ima najveći element. Taj element, u oznaci $D(m,n)$, tj. $NZD(m,n)$ nazivamo **najveći zajednički delilac** brojeva m i n.

Važi tzv. **osnovna teorema aritmetike**:

Svaki prirodan broj n može se na jedinstven način prikazati u obliku

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

gde su p_i različiti prosti brojevi, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, k$.

Postoji bijekcija između skupova $\mathbb{N}^2$ i $\mathbb{N}$ i ona je definisana sa

$$f((m,n)) = \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} - n + 1, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, $\mathbb{N}^2$ i $\mathbb{N}$ su iste kardinalnosti $\aleph_0$.

Važi sledeća teorema (**Arhimedova**[12] **aksioma**):

Teorema 2.4 *Za svaki pozitivan realan broj a i svaki realan broj b, postoji prirodan broj n, takav da je $na > b$, tj.*

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\ na > b.$$

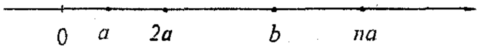
[12] Arhimed ('Αρχιμηδης, 287?-212 p.n.e.) - starogrčki matematičar

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da za neko $a > 0$ i neko $b \in \mathbb{R}$, za sve $n \in \mathbb{N}$, važi $na \leq b$. To znači da je skup

$$A = \{na : n \in \mathbb{N}\}$$

ograničen sa gornje strane, pa postoji $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$. Na osnovu osobine supremuma, za $a > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, odnosno postoji $n_0 a \in A$, tako da je $n_0 a > \alpha - a$.

Međutim, tada je $(n_0 + 1)a > \alpha$, $(n_0 + 1)a \in A$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je α najmanje gornje ograničenje skupa A. □



Sl. 2.1

Za svako $x \in \mathbb{R}$, postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, takvi da je $-n_1 < x < n_2$.

Navedimo i sledeću teoremu (**Kantorovu aksiomu**) (dokaz u poglavlje 9.5)

Teorema 2.5 *Neka je dat niz zatvorenih intervala $\{[a_n, b_n]\}$ za koji važi da se svaki sledeći nalazi se u prethodnom intervalu, tj. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$.*

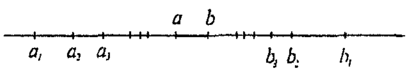
Tada je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$, odnosno $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, gde je $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ukoliko važi i da se dužine intervala smanjuju ("teže nuli"), tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |b_n - a_n| < \varepsilon),$$

tada postoji jedan i samo jedan broj koji pripada svim intervalima.

Napomena 2.3 Može se pokazati da Arhimedova aksioma zajedno sa Kantorovom predstavlja ekvivalent aksiomi supremuma. Otuda i naziv aksioma za teoreme 2.4 i 2.5.



Sl. 2.2

Celi brojevi

Posmatrajmo sve podgrupe $(Z_j, +)$, $j \in J$ grupe $(\mathbb{R}, +)$ takve da $1 \in Z_j$, $j \in J$. Skup $\mathcal{Z} = \{Z_j : j \in J\}$ je neprazan jer sadrži $\mathbb{R}$. Neka je $\mathbb{Z} = \bigcap\limits_{j\in J} Z_j$. Lako se vidi da je i $(\mathbb{Z}, +)$ podgrupa od $(\mathbb{R}, +)$ i da $1 \in \mathbb{Z}$, pa $\mathbb{Z} \in \mathcal{Z}$. Skup $\mathbb{Z}$ zovemo **skup celih brojeva**, a njegove elemente **celi brojevi**.

Ako je $-\mathbb{N} = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$, tada je $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Pokazuje se da je proizvod dva cela broja ceo broj, što zajedno sa svojstvima operacija + i – implicira da je $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ komutativan prsten sa jedinicom.

Skup $\mathbb{Z}$ *je prebrojiv, odnosno postoji bijekcija između skupa* $\mathbb{N}$ *i skupa* $\mathbb{Z}$.

Postoji bijekcija između skupova $\mathbb{N}$ *i* $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Za svaki $x \in \mathbb{R}$, *postoji jedinstven* $c \in \mathbb{Z}$, *takav da* $c \leq x < c + 1$.

Taj ceo broj c se označava sa $[x]$ i naziva **ceo deo** od x (najveće celo od x). Tako je $[4] = 4$, $[0] = 0$, $[-4] = -4$, $[4,7] = 4$, $[-3,7] = -4$.

Skup $\mathbb{Z}$ *nije dobro uređen skup, ali je diskretno uređen.*

Racionalni i iracionalni brojevi

Posmatrajmo sva potpolja $(Q_k, +, \cdot)$, $k \in K$, polja $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Neka je $\mathcal{Q} = \{Q_k : k \in K\}$ i $\mathbb{Q} = \bigcap_{k \in K} Q_k$. Očigledno $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$. Skup $\mathbb{Q}$ zove se **skup racionalnih brojeva**, a njegovi elementi su **racionalni brojevi**. Skup $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ je **skup iracionalnih brojeva**, a njegovi elementi zovu se **iracionalni brojevi**. Jasno je da je $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$, a na osnovu prethodnog poglavlja je $\mathbb{Q} \in \mathcal{Z}$, tj. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Uvedemo li za $xy^{-1} = y^{-1}x$, $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, uobičajenu oznaku $\frac{x}{y}$, onda važi

$$\mathbb{Q} = \{\frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Skup $\mathbb{Q}$ *je prebrojiv, odnosno postoji sirjekcija* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. *Za svaki interval* (a, b), $a < b$, *postoji sirjekcija* $f : \mathbb{N} \to (a, b)_{\mathbb{Q}} = \{q \in \mathbb{Q} : a < q < b\}$.

Teorema 2.6 *U svakom intervalu realnih brojeva* (a, b), $a < b$, *ima bar jedan racionalan broj, tj.*

$$(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset,$$

odnosno skup $\mathbb{Q}$ *je gust u* $\mathbb{R}$.

Dokaz. Kako je $a < b$, to je $b - a > 0$, pa po Arhimedovoj aksiomi postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n(b - a) > 1$, tj.

$$\frac{1}{n} < b - a. \tag{1}$$

Postoji ceo broj $z \in \mathbb{Z}$ takav da je $z \leq a$, tj. $a - z \geq 0$. Ponovnom primenom Arhimedove aksiome zaključujemo da postoji broj $p \in \mathbb{N}$ za koji je $p \cdot \frac{1}{n} > a - z$. Neka je $p_0 \in \mathbb{N}$ najmanji element (nepraznog) skupa $A = \{p \in \mathbb{N} : p \cdot \frac{1}{n} > a - z\}$. Tada sledi $\frac{p_0}{n} > a - z$. Nadalje, ako je $p_0 > 1$, onda je $p_0 - 1 \in \mathbb{N}$, pa je

$$\frac{p_0 - 1}{n} \leq a - z. \tag{2}$$

Ta nejednakost važi i ako je $p_0 = 1$, jer se tada svodi na $0 \leq a - z$. Sabiranjem nejednakosti (1) i (2) dobija se da je $\frac{p_0}{n} < b - z$. Pokazali smo, dakle da je $a - z < \frac{p_0}{n} < b - z$, tj. da je $z + \frac{p_0}{n} \in (a, b)$.

Budući da je $z + \frac{p_0}{n} \in \mathbb{Q}$, to je zaista $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. $\square$

Egzistencija iracionalnih brojeva

Teorema 2.7 *Ne postoji sirjekcija $g : \mathbb{N} \to [a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$.*

Dokaz ove teoreme videti u [2]. Iz nje sledi da je

Svaki interval je neprebrojiv skup. Skup $\mathbb{R}$ je neprebrojiv.

U svakom intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$, postoji bar jedan iracionalan broj.

Dakle, postoje iracionalni brojevi, tj. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I} \neq \emptyset$ i važi da je *skup $\mathbb{I}$ gust u $\mathbb{R}$.*

2.3 Stepeni

Princip indukcije može se koristiti i za definisanje novih pojmova i oznaka. Tako npr. ako su $x_1, x_2, ...x_n, ...$ realni brojevi, definišemo zbir $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $n \in \mathbb{N}$, na sledeći način

$$\sum_{i=1}^{1} x_i = x_1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i = (\sum_{i=1}^{n} x_i) + x_{n+1}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Na sličan način se uvodi oznaka za proizvod $\prod_{i=1}^{n} x_i$ brojeva $x_1, x_2, ..., x_n$. U ovim oznakama lako je formulisati i dokazati neka uopštenja navedenih aksioma i stavova:

$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n$ ima istu vrednost, nezavisno od toga kako se u tom izrazu rasporede zagrade; slično važi za $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_n$ (**uopšteni asocijativni zakon**),

$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n$ ima istu vrednost, nezavisno od toga kako se izvrši permutacija sabiraka; slično važi za $\prod_{i=1}^{n} x_i$ (**uopšteni komutativni zakon**).

$x(\sum_{i=1}^{n} y_i) = \sum_{i=1}^{n} x y_i$ (**uopšteni distributivni zakon**),

$0 \leq x_i$, $i = 1, 2, ..., n \Rightarrow 0 \leq \prod_{i=1}^{n} x_i$ (uopštenje aksiome R_{15})),

$\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow (\exists i)\ x_i = 0,$

$0 \le x_i \le y_i\ (i = 1, 2, ..., n) \Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{n} x_i \le \prod\limits_{i=1}^{n} y_i,$

$|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i| \le \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ (**uopštena nejednakost trougla**),

$|\prod\limits_{i=1}^{n} x_i| = \prod\limits_{i=1}^{n} |x_i|.$

Takođe na ovaj način se uvodi pojam **stepena (potencije)**:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n \cdot x,\ n \in \mathbb{N}.$$

Broj $x \in \mathbb{R}$ je **osnova (baza) stepena**, a $n \in \mathbb{N}$ je njegov **eksponent**. Za njega važe poznate osobine, npr.

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}, \quad (xy)^n = x^n y^n.$$

Takođe važi

$$0 \le x < y \Rightarrow x^n < y^n, \quad x > 1 \Rightarrow x^n > 1, \quad (x > 1 \wedge m > n) \Rightarrow x^m > x^n.$$

Po definiciji uzimamo da je za $n \in \mathbb{N}$ i $x \ne 0$, $x^{-n} = (x^{-1})^n$, $x^0 = 1$.

Kompozicijom sabiranja i stepenovanja dobijamo **polinomsku funkciju** ili kraće **polinom**, tj. preslikavanje $x \mapsto p(x)$, dato sa

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0,$$

gde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., n$, $a_n \ne 0$, $n \in \mathbb{N}$. Brojevi a_i se zovu **koeficijenti polinoma**, a n je **stepen polinoma**.

Realan broj x_0 je **algebarski**, ako postoji polinom $p(x)$ stepena $n \ge 1$, čiji su koeficijenti celi brojevi, tako da je $p(x_0) = 0$. Realan broj je **transcedentan** ako nije algebarski.

Primetimo da u prethodnoj definiciji koeficijenti polinoma mogu biti i racionalni brojevi, jer se množenjem jednačine $p(x_0) = 0$ uvek može dobiti da je $q(x_0) = 0$, za neki polinom q sa celobrojnim koeficijentima.

Indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ se može pokazati da vredi tzv. **binomna formula**

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Brojeve

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$, nazivamo **binomni koeficijenti**.

J. Bernuli

Oni imaju sledeće osobine

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Takođe se indukcijom po $n \in \mathbb{N}$, lako pokazuje da za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, važi formula

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

kao i Bernulijeva[13] nejednakost

$$(1 + h)^n > 1 + nh,$$

za $h > -1$, $h \neq 0$, $n > 1$.

Da bismo definisali $n-$ti koren iz realnog broja navodimo sledeću teoremu

Teorema 2.8 *Ako je $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, onda postoji jedan i samo jedan broj $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, takav da je*

$$x^n = a.$$

Dokaz. U dokazu ove teoreme biće nam potrebne dva stava.

Stav 2.1 *Neka je $x, y \in \mathbb{R}$. Tada za svako $\varepsilon > 0$, postoje realni brojevi $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, takvi da iz $|h| < \delta_1$, $|k| < \delta_2$, $h, k \in \mathbb{R}$, sledi*

$$|(x + h)(y + k) - xy| < \varepsilon.$$

Dokaz. $|(x + h)(y + k) - xy| = |(x + h)k + hy| \leq (|x| + |h|)|k| + |h||y|$.

Ako je $\delta_1 = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2(1+|y|)}\} > 0$, $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2(1+|x|)} > 0$, tada iz $|h| < \delta_1$, $|k| < \delta_2$ sledi

$$(|x| + |h|)|k| + |h||y| < (|x| + 1)|k| + |h|(1 + |y|) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

[13]Bernuli, J. (Jakob Bernoulli, 1654-1705)- švajcarski matematičar

Stav 2.2 *Za svaki* $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, *postoji* $\delta > 0$, *takav da iz* $|h| < \delta$ *sledi* $|(x+h)^n - x^n| < \varepsilon$.

Dokaz. Dokaz sprovodimo indukcijom po n. Za $n = 1$ može se uzeti $\delta = \varepsilon$. Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za neki $n \in \mathbb{N}$. Stavimo li da je $y = x^n$, to po prethodnom stavu, postoje brojevi $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tako da iz $|h| < \delta_1$, $|k| < \delta_2$ sledi

$$|(x+h)(x^n + k) - x^{n+1}| < \varepsilon. \tag{3}$$

Po pretpostavci indukcije za $\delta_2 > 0$, postoji $\delta_3 > 0$ takav da $|h| < \delta_3$ povlači $|(x+h)^n - x^n| < \delta_2$. Zaključujemo da za $\delta = \min\{\delta_1, \delta_3\} > 0$, $|h| < \delta$ povlači $|h| < \delta_1$, $|k| < \delta_2$, gde smo stavili da je $k = (x+h)^n - x^n$. Primenimo li sada (3), dobijamo

$$|h| < \delta \Rightarrow |(x+h)^{n+1} - x^{n+1}| < \varepsilon.$$

□

Dokažimo sada teoremu.

Jedinstvenost. Neka je $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ i $x_1^n = x_2^n = a$. Kada bi bilo npr. $x_1 < x_2$, mogli bismo indukcijom dobiti $a = x_1^n < x_2^n = a$, što je kontradikcija.

Egzistencija. Posmatramo skup $B = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0, a < r^n\}$. Čim je $r > \max\{a, 1\}$, već je $r^n > r > a$, što dokazuje da je $B \neq \emptyset$. Kako je $0 \leq B$, to postoji $x = \inf B$ i očigledno je $x \geq 0$. Pretpostavimo li da je $x^n \neq a$, onda je $\varepsilon = |a - x^n| > 0$, pa po stavu 2.2 za taj ε, postoji $\delta > 0$, takav da $|h| < \delta$ povlači $|(x+h)^n - x^n| < \varepsilon$.

Pretpostavimo najpre da je $x^n > a$. Onda je $\varepsilon = x^n - a$, a osim toga ne može biti $x = 0$, već mora biti $x > 0$. Za $h < 0$, takav da je $|h| < \delta$ i $|h| < x$, imamo tada $0 < x + h < x$, pa je $0 < x^n - (x+h)^n = |x^n - (x+h)^n| < \varepsilon = x^n - a$, odakle zaključujemo da je $a < (x+h)^n$, tj. da je $x+h \in B$, što je u kontradikciji s definicijom broja $x = \inf B$, jer je $x + h < x$.

Pretpostavimo sada da je $x^n < a$. Za $0 < h < \delta$, imamo $x < x + h$, pa je

$$0 < (x+h)^n - x^n = |(x+h)^n - x^n| < \varepsilon = a - x^n,$$

odakle proizilazi da je $(x+h)^n < a$. Kako je $h > 0$ i $x = \inf B$, to postoji tačka $r \in B$, $r < x + h$. Stoga je po definiciji skupa B, $a < r^n < (x+h)^n$, što je u kontradikciji sa već dokazanom nejednakosti $(x+h)^n < a$.

Kako je, dakle, pretpostavka $x^n \neq a$ dovela do kontradikcije, mora biti $x^n = a$, pa je teorema dokazana. □

Jedino rešenje $x \geq 0$ jednačine $x^n = a$, $n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$, označava se obično sa $a^{\frac{1}{n}}$ ili $\sqrt[n]{a}$ i zove se n-ti koren od a. Na taj način uveden je stepen s eksponentom $\frac{1}{n}$. Jednačina $x^n = a$, za $a > 0$, ima dva rešenja $\sqrt[n]{a}$ i $-\sqrt[n]{a}$, ako je n paran broj, od kojih se prvo uzima za $n-$ti koren. Ako je n neparan broj, za $a < 0$ uzimamo da je po definiciji $-\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{-a}$. Za $a = 0$, posmatrana jednačina ima jedinstveno rešenje 0.

Umesto sa $\sqrt[2]{a}$, **drugi koren** obično se označava sa $\sqrt{a}$. Ako je $q = \frac{p}{n} \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, onda se stavlja po definiciji $a^{\frac{p}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^p$. Primetimo da je $a^q > 0$, za svaki $q \in \mathbb{Q}$, $a > 0$. Dakle, važi

$$a^1 = a, \quad a^{n+1} = a^n \cdot a \quad (n \in \mathbb{N}), \quad a^0 = 1 \quad (a \neq 0), \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0),$$

$$a^{-n} = (a^{-1})^n \quad (a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}), \quad a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0,\ n \in \mathbb{N}),$$

i lako je proveriti da važe pravila za računanje sa stepenima čiji su eksponenti racionalni brojevi:

$$a^{q_1}a^{q_2} = a^{q_1+q_2}, \quad (a^{q_1})^{q_2} = a^{q_1 q_2}, \quad (ab)^q = a^q b^q,$$

gde je $a, b \in \mathbb{R}^+$, $q, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Dalje je

$$(q > 0 \wedge 0 \leq a < b) \Rightarrow a^q < b^q, \qquad (a > 1 \wedge q_1 < q_2) \Rightarrow a^{q_1} < a^{q_2}.$$

Za $a > 0$ mogu se uvesti i stepeni s proizvoljnim realnim eksponentom $x \in \mathbb{R}$:

$$a^x = \begin{cases} \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\}, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ (\frac{1}{a})^{-x}, & 0 < a < 1 \end{cases}.$$

Može se pokazati da pravila ostaju valjana i za proizvoljni eksponent $x \in \mathbb{R}$.

2.4 Geometrijska interpretacija sistema aksioma realnih brojeva

Da bi se strogo pokazalo postojanje bijekcije između skupa $\mathbb{R}$ i skupa tačaka neke prave i na taj način precizno uveli pojam brojne ose, potrebno bi bilo najpre precizno znati šta je to prava, odnosno raspolagati aksiomatikom elementarne geometrije.

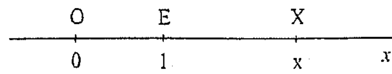
Neka je data prava x i na njoj tačka označena sa O i tačka E, različita od O. Poluprava sa početnom tačkom u O kojoj pripada tačka E, određuje jedan smer koji zovemo pozitivnim. Pridružimo tački O broj 0, a tački E broj 1.

Pomenuta prava x se naziva **koordinatna** ili **brojna osa**, odnosno kratko osa, pozitivan smer se označava strelicom, a tačku O zovemo **koordinatnim početkom.**

Svakoj tački na pravoj x odgovara jednoznačno određen realan broj, koordinata te tačke.

Važi i obrnuto. *Svakom realnom broju jednoznačno odgovara tačka na pravoj x, pri čemu 0 odgovara tačka O, a broju 1 odgovara tačka E.*

Dakle, ako na pravoj x utvrdimo dve tačke kojima odgovaraju nula i jedinica, koordinate ostalih tačaka su jednoznačno određene.



Sl. 2.3

Poluprava (određena pozitivnim smerom) na koju se preslikavaju pozitivni brojevi naziva se **pozitivna poluosa**, dok je poluprava na koju se preslikavaju negativni brojevi **negativna poluosa.**

Uobičajeno je da se tačke obeležavaju velikim, a koordinate malim slovima latinice. Kao posledica definicije sledi da: ako se tačka X nalazi između tačaka O i E, tada se njena koordinata x nalazi između 0 i 1; ako je E između O i X, tada je $x > 1$; a ako je tačka O između tačaka X i E, tada je $x < 0$.

Tako dobijeni geometrijski model skupa $\mathbb{R}$ koristićemo da bismo lakše zamišljali određene odnose među elementima i podskupovima skupa $\mathbb{R}$. Specijalno, često ćemo se koristiti geometrijskim jezikom koji proističe iz pomenute reprezentacije.

Između tačaka prave (odnosno elemenata skupa $\mathbb{R}$) x i y uvodimo i pojam **rastojanja**, kao funkciju $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, datu formulom

$$d(x, y) = |y - x|.$$

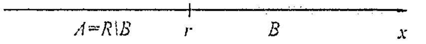
Na osnovu osobina apsolutne vrednosti može se pokazati da za svako $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ važi:

1) $d(x_1, x_2) \geq 0$; 2) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$;
3) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$; 4) $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$.

2.5 Preseci

Neka je $(X, \leq)$ totalno uređen skup, a A, B podskupovi od X. Ako za svaki $a \in A$ i svaki $b \in B$ važi $a \leq b$ $(a < b)$, onda se to kraće označava sa $A \leq B$ $(A < B)$. Oznake $C \leq \{x\}$, $\{x\} \leq C$ pojednostavljuju se u $C \leq x$, $x \leq C$.

Definicija 2.1 *Pod* **presekom u totalno uređenom skupu** $(X, \leq)$ *podrazumevamo svaki podskup $B \subset X$ sa osobinama;*



Sl. 2.4

i) $B \neq \emptyset$, $B \neq X$,
ii) $A = X \setminus B < B$,.
iii) *u skupu B ne postoji* $\min B$.

Presek se može definisati i preko skupa A, tj.

Pod presekom u totalnom uređenom skupu $(X, \leq)$ podrazumevamo svaki podskup $A \subset X$ sa osobinama:

i) $A \neq \emptyset$, $A \neq X$,

ii) $A < X \setminus A = B$,

iii) u skupu A ne postoji $\max A$.

Često se o preseku govori kao o uređenom paru (A, B), gde je $A = X \setminus B$.

Označimo sa $\overline{X}$ skup svih preseka u X. Može se pokazati da je relacija poretka $\subset$, totalno uređenje u $\overline{X}$, odnosno da su svaka dva preseka uporediva.

Lako je pokazati da je preslikavanje $b : X \to \overline{X}$, definisano sa $b : r \mapsto B(r) = (r, \cdot) = \{x \in X : r < x\}$ injektivno.

Teorema 2.9 *$b(X)$ je gust podskup skupa $\overline{X}$.*

Dokaz. Neka su B_i, $i = 1, 2$ dva elementa iz $\overline{X}$, pri čemu je $B_2 \subset B_1$. Kako je $B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset$, to postoji element $r \in X$, tako da $r \in B_1 \setminus B_2$. No, iz toga da je $r = \inf B(r) \notin B_2$ sledi $B_2 \subset B(r)$. Presek B_1 nema najmanji element, pa postoji $s \in B_1$, tako da je $s < r$ $(r \in B_1)$. Odatle sledi da je $B(r)$ pravi podskup od $B(s)$, tj. $B(r) \subset B(s)$, $B(r) \neq B(s)$. Kako $s \in B_1$ to je $B(s) \subset B_1$, $B(s) \neq B_1$.

Dakle, postoji $B(s) \in b(X)$, različit od B_1 i B_2, za koji je $B_2 \subset B(s) \subset B_1$, te je $b(X)$ gust u $\overline{X}$. □

Kako je $\overline{X}$ gust totalno uređen skup, i u njemu se mogu posmatrati preseci. Tako se može pokazati da ako je $\overline{B}$ presek, on nema najmanji element. Svaki neprazan podskup M skupa $\overline{X}$ koji je ograničen sa gornje (donje) strane ima supremum (infimum).

Iz aksiome infimuma proizilazi da svakom preseku $B \subset \mathbb{R}$ u skupu $\mathbb{R}$ realnih brojeva pripada tačno određena tačka $a_0 = \inf B \in \mathbb{R}$. Iz osobine iii) preseka zaključujemo da je $a_0 \in X \setminus B = A$, jer ne postoji $\min B$. To znači da je $a_0 < b$ za svaki $b \in B$.

Aksioma R_{16}) se ponekad zamenjuje ekvivalentnom aksiomom:

Za svaki presek B postoji $\inf B \in \mathbb{R}$.

Napomena 2.4 Ako je B presek u skupu $\mathbb{R}$ realnih brojeva, tada A ima najveći element, dok to ne važi za skup $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva. Npr. ako je $B = (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$, $A = (-\infty, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$. Dakle, ne postoji korespodencija između skupa racionalnih brojeva i preseka kao što je slučaj sa realnim brojevima.

Teorema 2.10 *Ako je $r \in \mathbb{R}$, onda je $(r, \cdot)_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} : x > r\}$ presek u skupu $\mathbb{Q}$. Za svaki presek $B \subset \mathbb{Q}$ u skupu $\mathbb{Q}$ postoji samo jedna tačka $r \in \mathbb{R}$ takva da je $B = (r, \cdot)_{\mathbb{Q}}$.*

Prethodna teorema nam pokazuje da je preslikavanje, koje svakom $r \in \mathbb{R}$ pridružuje $(r, \cdot)_{\mathbb{Q}}$, bijekcija skupa $\mathbb{R}$ u skup svih preseka u $\mathbb{Q}$.

Relaciju $\leq$ u $\mathbb{R}$, kao i operacije $+$ i $\cdot$ možemo sada okarakterisati odgovarajućom relacijom i operacijama u skupu svih preseka u $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.11 *Potreban i dovoljan uslov da je* $(r_2, \cdot)_{\mathbb{Q}} \subset (r_1, \cdot)_{\mathbb{Q}}$ *jeste* $r_1 \leq r_2$.

Neka je za $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{Q}$

$$Q_1 + Q_2 = \{q_1 + q_2 : q_1 \in Q_1,\ q_2 \in Q_2\},$$

$$Q_1 \cdot Q_2 = \{q_1 \cdot q_2 : q_1 \in Q_1,\ q_2 \in Q_2\}.$$

Teorema 2.12 *Za svaka dva broja* $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ *je* $(r_1, \cdot)_{\mathbb{Q}} + (r_2, \cdot)_{\mathbb{Q}} = (r_1 + r_2, \cdot)_{\mathbb{Q}}$. *Ako je* $r_1 > 0$ *i* $r_2 > 0$, *onda je* $(r_1, \cdot)_{\mathbb{Q}} \cdot (r_2, \cdot)_{\mathbb{Q}} = (r_1 \cdot r_2, \cdot)_{\mathbb{Q}}$.

Označimo sa $\overline{Q}$ skup svih preseka skupa $\mathbb{Q}$. Kao što smo videli $\mathbb{Q}$ je uređeno polje, pri čemu je $\mathbb{Q}$ gust skup. Može se pokazati da je $\overline{Q}$ potpuno uređeno polje, odnosno polje realnih brojeva. Dakle, razmatranjem preseka na $\mathbb{Q}$ se može doći do polja realnih brojeva, dok sa presecima u samom $\mathbb{R}$ ne možemo ništa više dobiti (odnosno da presecima u $\mathbb{R}$ dobijamo isto to polje).

2.6 Jedinstvenost i postojanje skupa realnih brojeva

Skup prirodnih brojeva

Da bi se pokazala egzistencija skupa realnih brojeva razmotrićemo bliže skup $\mathbb{N}$ u kome važe Peanove aksiome. Može se pokazati (videti [2]) da je skup $\mathbb{N}$ ovim aksiomama određen do izomorfizma, odnosno da važi

Neka su $(\mathbb{N}, \pi, 1)$ *i* $(N', \pi', 1')$ *dve uređene trojke koje zadovoljavaju Peanove aksiome* $N_1) - N_5)$. *Tada postoji jedna i samo jedna bijekcija* $f : \mathbb{N} \longrightarrow N'$ *takva da je* $f(1) = 1'$, $f(\pi(n)) = \pi'(f(n))$.

Značaj prethodne osobine je u tome što pokazuje da Peanove aksiome $N_1) - N_5)$ potpuno karakterišu prirodne brojeve, odnosno da postoji najviše jedan skup prirodnih brojeva (određen do izomorfizma).

Da zaista postoji skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, koji zadovoljava aksiome $N_1) - N_5)$ prihvatamo na temelju iskustva. Napominjemo da smo u teoremi 2.3 samo pokazali da prirodni brojevi postoje, ako postoje realni brojevi.

Ako struktura $(\mathbb{N}, \pi, 1)$ *zadovoljava Peanove aksiome* $N_1) - N_5)$, *onda postoji samo jedno preslikavanje* $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *i samo jedno preslikavanje* $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, *tako da za svako* $m, n \in \mathbb{N}$ *važi*

$$m + 1 = \pi(m), \quad m + \pi(n) = \pi(m + n),$$

$$m \cdot 1 = m, \quad m \cdot \pi(n) = mn + m.$$

Takođe važi da postoji jedinstvena binarna relacija $\leq$ *tako da su ispunjene aksiome* $R_1)$, $R_4) - R_6)$ *i* $R_8) - R_{14})$, *te da je* $\pi(n) = n + 1$ *i* $1 = \min \mathbb{N}$.

Dakle, isključivo na osnovu aksioma $N_1) - N_5)$ možemo definisati sabiranje i množenje u $(\mathbb{N}, \pi, 1)$. Za bijekciju $f : \mathbb{N} \to N'$ napred pomenutu za sve $m, n \in \mathbb{N}$ važi i:

$$f(m+n) = f(m) +' f(n), \quad f(m \cdot n) = f(m) \cdot' f(n), \quad m \leq n \Rightarrow f(m) \leq' f(n).$$

Jedinstvenost skupa realnih brojeva

Pitanje koje se samo po sebi nameće je da li neprotivrečan sistem aksioma ima samo jedan model ili ih ima više, tj. da li sistem aksioma u potpunosti opisuje objekat kojeg uvodimo. To je pitanje **kategoričnosti** datog sistema aksioma.

Da bismo odgovorili na ovo pitanje za sistem aksioma $R_1) - R_{16})$, primetimo da se realni brojevi mogu konstruisati na više načina (pomoću Dedekindovih preseka, preko nizova i preko decimalnog zapisa).

Važi tvrđenje (dokaz videti u [2])

Ako su $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *i* $(R', +, \cdot, \leq)$ *dva potpuno uređena polja, tada postoji jedan i samo jedan izomorfizam* $f : \mathbb{R} \to R'$ *tih polja.*

Zbog jednostavnosti, operacije i poredak u oba polja smo jednako označili.
Dakle, svi modeli aksioma $R_1) - R_{16})$ su međusobno izomorfni, pa na primer, skup decimalnih zapisa realnih brojeva kao i skup tačaka realne prave, predstavljaju skup realnih brojeva iako im je priroda elemenata različita.

Prema tome, zaključujemo da su sva potpuno uređena polja međusobno izomorfna i izomorfna polju realnih brojeva, odnosno da postoji najviše jedan sistem realnih brojeva, tj. da su aksiomama $R_1) - R_{16})$ potpuno okarakterisani realni brojevi.

Interesantno je napomenuti da veliku ulogu u kategoričnosti ovog sistema aksioma igra upravo aksioma potpunosti $R_{16})$. Naime, postoje uređena polja koja nisu međusobno izomorfna, ali sva potpuno uređena polja su međusobno izomorfna. To znači da ako bismo iz ovog spiska aksioma izostavili aksiomu $R_{16})$, izgubili bismo kategoričnost aksioma.

Egzistencija skupa realnih brojeva

Kada neki pojam (objekat) uvodimo preko aksioma prvo pitanje koje nam se nameće je da li postoji objekat koji zadovoljava te aksiome, to jest da li aksiome garantuju egzistenciju traženog objekta. Ovo je pitanje neprotivrečnosti datog sistema aksioma. Sistem aksioma je neprotivrečan ako postoji struktura koja ga zadovoljava, tj. u kojoj sve aksiome važe. Ovo pitanje se rešava konstrukcijom **modela sistema aksioma**, tj. strukture koja zadovoljava te aksiome.

Pođimo od skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ određenog Peanovim aksiomama i definušimo operacije $+$, $\cdot$ i relaciju $\leq$ na poznat način. Taj skup se može redom proširiti (videti [2]) na skup $\mathbb{Z}$ celih, a zatim i racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. U te skupove operacije $+$ i $\cdot$ kao i relaciju $\leq$ možemo uvesti kao ekstenzije prethodnih operacija. Može se proveriti da je $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ uređen komutativan prsten sa jedinicom tj. da vrede aksiome $R_1) - R_6)$ i $R_8) - R_{15})$, kao i da je $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ uređeno polje, tj. da vrede aksiome $R_1) - R_{15})$.

U svakom uređenom skupu, pa i u skupu $(\mathbb{Q}, \leq)$ mogu posmatrati preseci. Neka je $\mathbb{R}$ skup svih preseka u $\mathbb{Q}$. Pomoću sabiranja, množenja i relacije poretka u $\mathbb{Q}$ definiše se sada sabiranje, množenje i relacija poretka u $\mathbb{R}$ na sledeći način

Ako su $r_i = B_i$, $i = 1, 2$, dva preseka u $\mathbb{Q}$, stavlja se $r_1 \leq r_2$ ako je $B_2 \subset B_1$. Dalje je po definiciji $r_1 + r_2 = B_1 + B_2 = \{b_1 + b_2 : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}$. Lako je proveriti da je $B_1 + B_2$ zaista presek u skupu $\mathbb{Q}$. Slično, ako je $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, tj. $B_1 > 0$, $B_2 > 0$, onda je $B_1 \cdot B_2 = \{b_1 \cdot b_2 : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}$ opet presek i očigledno je $B_1 \cdot B_2 > 0$. Po definiciji se stavlja $r_1 \cdot r_2 = B_1 \cdot B_2$. Preostali slučajevi množenja svode se na uobičajeni način na slučaj $r_i > 0$, $i = 1, 2$. Npr. ako je $r_1 < 0$, $r_2 > 0$, onda se stavlja $r_1 \cdot r_2 = -((-r_1) \cdot r_2)$.

Preslikavanje iz $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$, koje svakom $q \in \mathbb{Q}$ pridružuje presek $(q, \cdot)_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Q}$ je injekcija, pa se $\mathbb{Q}$ može identifikovati sa svojoj slikom u $\mathbb{R}$, tj. može se smatrati da je $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Pri toj identifikaciji očuvane su operacije $+$, $\cdot$ i relacija $\leq$.

Na kraju treba proveriti da li su u $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ zadovoljene sve aksiome $R_1) - R_{16})$. Umesto aksiome supremuma ćemo ovde primera radi, pokazati da je zadovoljena njoj ekvivalentna aksioma infimuma.

Neka je $A \subset \mathbb{R}$ skup iz $\mathbb{R}$, ograničen sa donje strane, tj. neka postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je $m \leq A$. Prema definiciji skupa $\mathbb{R}$, m je neki presek $B_m \subset \mathbb{Q}$, a A je skup preseka $B_a = (a, \cdot)_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Q}$, $a \in A$, tj. $A = \{B_a : a \in A\}$. Zbog $m \leq A$ je $B_m \supset B_a$ za svako $a \in A$. Zato za skup $B = \bigcup\limits_{a \in A} B_a \subset \mathbb{Q}$ vredi $B_m \supset B$. Kako je $B_a \neq \emptyset$, to je i $B \neq \emptyset$. Takođe je i $\mathbb{Q} \setminus B \supset \mathbb{Q} \setminus B_m \neq \emptyset$. Dalje, kako je $\mathbb{Q} \setminus B_a < B_a$ za svaki $a \in A$, to je $\mathbb{Q} \setminus B = \bigcap\limits_{a \in A} (\mathbb{Q} \setminus B_a) < B_a$ za svaki $a \in A$, pa je zato $\mathbb{Q} \setminus B < B = \bigcup\limits_{a \in A} B_a$. Napokon, B ne može imati minimalni element, jer bi taj element pripadao nekom skupu B_a i bio bi minimum za B_a, što se protivi činjenici da su skupovi B_a preseci. Prema tome, B je presek u skupu $\mathbb{Q}$ te predstavlja neku tačku $b \in \mathbb{R}$. Kako je $B \supset B_a$ za svaki $a \in A$, to je $b = B \leq B_a = a$, tj. b je donje ograničenje skupa A. S druge strane, ako je b' takođe donje ograničenje skupa A sa pripadnim presekom B' moralo bi biti $b' \leq a$ za svaki $a \in A$, tj. imali bismo zaključak da $B' \supset B_a$ za svaki $a \in A$, a odatle $B' \supset B = \bigcup\limits_{a \in A} B_a$. Drugim rečima, bilo bi $b' \leq b$, što dokazuje da je b zaista najveće donje ograničenje skupa A, tj. $b = \inf A$.

Dakle, važi sledeće tvrđenje

Ako uređena trojka $(\mathbb{N}, \pi, 1)$ *zadovoljava Peanove aksiome* $N_1) - N_5)$, *onda postoji uređena četvorka* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *koja zadovoljava aksiome* $R_1) - R_{16})$ *potpuno uređenog polja.*

3 Kompleksni brojevi

3.1 Definicija kompleksnih brojeva

Posmatrajmo jednačinu

$$x^2 + 1 = 0.$$

Na osnovu osobina da je za svako $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x^2$ i da je $0 < 1$, zbog aksiome R_{14}) kao i osobine $x < y \wedge y \leq z \Rightarrow x < z$, sledi

$$0 < 1 = 0 + 1 \leq x^2 + 1$$

pa jednačina $x^2+1 = 0$ nema rešenje u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$. Dakle, potrebno je proširiti skup realnih brojeva, tako da u novom skupu data jednačina ima rešenje.

Definišimo na skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ operacije sabiranja $+$ i množenja $\cdot$ na sledeći način

$$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\ (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\ (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Uređena trojka $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ je polje. To polje se naziva **polje kompleksnih brojeva** i obeležava sa $\mathbf{C}$, dok njegove elemente zovemo **kompleksni brojevi.** Nosač tog polja $\mathbb{R}^2$ se često obeležava sa $\mathbb{C}$ kao i polje $\mathbf{C}$, a iz konteksta se vidi da li se radi o skupu ili algebarskoj strukturi.

Iz jednakosti uređenih parova sledi

$$(\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C})(\ (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d\ ).$$

Dokaz da je $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ polje može se naći u [2].

Očigledno je da kompleksan broj $(0, 0)$ nema inverzni element za množenje, jer iz jednakosti $(0, 0) \cdot (a, b) = (1, 0)$, tj. $(0, 0) = (1, 0)$ sledilo bi da je $0 = 1$, što je nemoguće.

Kompleksan broj $(0, 0)$ zvaćemo **kompleksna nula**, a kompleksan broj $(1, 0)$ **kompleksna jedinica**. Znači, kompleksna nula je neutralni element za sabiranje (i on je jedinstven), a kompleksna jedinica je neutralni element za množenje (i taj neutralni element je jedinstven).

Svaki kompleksan broj $z = (a, b)$ ima jedinstven inverzni element (u odnosu na sabiranje)

$$-z = (-a, -b),$$

jer je $(\mathbb{C}, +)$ Abelova grupa, tj. važi

$$z + (-z) = (-z) + z = (0, 0).$$

Kompleksan broj $-z$ se zove **suprotan broj** kompleksnog broja z.

Svaki kompleksan broj $z = (a, b) \neq (0,0)$ ima jedinstven inverzni element u odnosu na množenje $z' = (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$ ($(\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$ je Abelova grupa), tj. važi $z \cdot z' = z' \cdot z = (1,0)$. Kompleksan broj z' označavamo sa $\frac{1}{z}$ i kažemo da je **recipročan broj** kompleksnog broja z. Dakle, ako je $z = (a, b) \neq (0,0)$, tada je

$$\frac{1}{z} = (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$$

i važi

$$z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = (1,0).$$

Videli smo da kompleksna nula nema inverzni element u odnosu na množenje, tj. kompleksna nula nema recipročan broj.

Na osnovu izloženog mogu se definisati oduzimanje i deljenje kompleksnih brojeva. Onaj kompleksan broj z za koji je $z + z_1 = z_2$, zove se **razlika kompleksnih brojeva** z_2 i z_1 i označava se sa $z = z_2 - z_1$.

Kako je $(\mathbb{C}, +)$ Abelova grupa, sledi da jednačiua $z + z_1 = z_2$ ima jedinstveno rešenje $z = z_2 + (-z_1)$, tj. razlika za svaka dva kompleksna broja postoji i ona je jednoznačno određena.

Kompleksan broj z je **količnik kompleksnih brojeva** z_2 i z_1, $z_1 \neq (0,0)$, ako je $z_1 \cdot z = z_2$.

Kompleksan broj z ćemo označavati sa $\frac{z_2}{z_1}$, tj. $z = \frac{z_2}{z_1}$.

Kako je $(\mathbb{C}, \cdot)$ polugrupa sa neutralnim elementom $(1,0)$ i kako svaki element $z_1 \neq (0,0)$ ima recipročnu vrednost, sledi da svaka jednačina $z_1 \cdot z = z_2$ ($z_1 \neq (0,0)$) ima jedno i samo jedno rešenje $z = \frac{1}{z_1} \cdot z_2$, tj. količnik uvek postoji i jednoznačno je određen.

Posmatrajmo podskup C_1 skupa $\mathbb{C}$, gde je

$$C_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Lako se može videti da je $(C_1, +, \cdot)$ polje i da je ono izomorfno sa poljem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ($f : \mathbb{R} \to C_1$, $f(x) = (x, 0)$). Skup C_1 se, dakle, "ponaša" kao i skup realnih brojeva, pa se u smislu izomorfizma mogu identifikovati, tj. možemo staviti da je

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (x,0) = x.$$

Specijalno, $(0,0) = 0$, $(1,0) = 1$. Kompleksan broj $(0,1)$ označićemo sa i, tj.

$$(0,1) = i$$

i zvaćemo ga **imaginarna jedinica**. Tada je

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y,0) \cdot (0,1) = x + yi.$$

Oblik $x + yi$ naziva se **algebarski oblik** kompleksnog broja. Pritom je

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1.$$

Dakle, $\mathbb{R} = C_1 \subset \mathbb{C}$.

Znači, polje $\mathbb{C}$ je proširenje polja C_1, tj. proširenje polja $\mathbb{R}$.

Skup $\mathbb{C}$ *se ne može totalno urediti relacijom* $\leq$, *tako da* $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ *bude uređeno polje.*

Pretpostavimo suprotno da se može definisati u skupu $\mathbb{C}$ relacija totalnog uređenja $\leq$, tako da $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ bude uređeno polje. Tada iz R_{13}) sledi $i \leq 0$ ili $0 \leq i$. Neka je $0 \leq i$. Tada iz R_{15}) sledi: $0 \leq i \cdot i = -1$. Kontradikcija. Slično, ako je $i \leq 0$, iz osobina realnih brojeva sledi $0 = -0 \leq -i$, tj. $0 \leq (-i) \cdot (-i) = i \cdot i = -1$, što opet dovodi do kontradikcije. $\square$

Napomena 3.1 Važi tzv. **osnovna teorema** (**osnovni stav**) **algebre**, da *svaki polinom* $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ *ima bar jednu* **nulu**, *tj. postoji broj* $x_0 \in \mathbb{C}$ *tako da je* $p(x_0) = 0$. Tu osobinu, kao što smo videli nema skup realnih brojeva i na tome se temelji prednost kompleksnih brojeva nad realnim. Za polje koje ima navedenu osobinu kažemo da je **algebarski zatvoreno**. Može se pokazati da je $\mathbb{C}$ najmanje algebarski zatvoreno proširenje polja realnih brojeva, u tom smislu da svako polje koje sadrži $\mathbb{R}$ kao potpolje i algebarski je zatvoreno, mora sadržavati neko potpolje koje je izomorfno sa $\mathbb{C}$.

Ako kompleksne brojeve z_1 i z_2, predstavimo u algebarskom obliku, tj. ako je $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, tada se navedene definicije za sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje kompleksnih brojeva svode na jednakosti:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2) i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i,$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_2 + y_2 i}{x_1 + y_1 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} i, \quad z_1 \neq 0.$$

Direktnom proverom dolazi se do zaključka da se ove jednakosti dobijaju i ako se primene pravila algebre realnih brojeva pri čemu se kompleksni brojevi tretiraju kao binomi po i sa realnim koeficijentima, gde je $i^2 = -1$, pa se u stvari na taj način mogu izvoditi sve operacije sa kompleksnim brojevima.

Ako je $z = x + yi$ dati kompleksan broj, onda je realni broj x **realni deo** kompleksnog broja z i piše se

$$x = \mathrm{Re}\ z,$$

a realan broj y **imaginaran deo** kompleksnog broja z i piše se

$$y = \mathrm{Im}\ z.$$

Lako je videti da je

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\ z_1 = \mathrm{Re}\ z_2 \wedge \mathrm{Im}\ z_1 = \mathrm{Im}\ z_2.$$

Odatle sledi da ako $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im } z = 0$. Ako je $\text{Im } z \neq 0$, kažemo da je kompleksan broj z **imaginaran**. Ako je uz to $\text{Re}\, z = 0$, kompleksan broj je **čisto imaginaran**.

Očigledno važi:

$$\text{Re } (z_1 \pm z_2 \pm \ldots \pm z_n) = \text{Re } z_1 \pm \text{Re } z_2 \pm \ldots \pm \text{Re } z_n,$$

$$\text{Im } (z_1 \pm z_2 \pm \ldots \pm z_n) = \text{Im } z_1 \pm \text{Im}_2 \pm \ldots \pm \text{Im } z_n.$$

Konjugovanje kompleksnih brojeva je preslikavanje skupa $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$ koje kompleksan broj $z = x + yi$ preslikava u kompleksan broj $\overline{z} = x - yi$, koji se zove **konjugovano kompleksan broj** broja z. Očigledno je

$$\overline{(\overline{z})} = z.$$

Sledi da je

$$\text{Re } z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \text{Im } z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Takođe je

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = (\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2.$$

Ako je $z = \overline{z}$, kompleksan broj z je realan, a ako je $z = -\overline{z}$, kompleksan broj z je čisto imaginaran ($z \neq 0$).

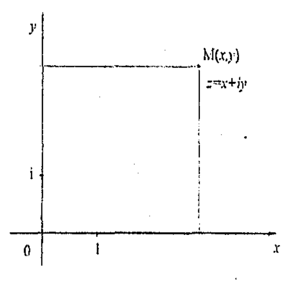
Lako se pokazuje da za svako $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ važi

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0.$$

3.2 Geometrijska interpretacija kompleksnog broja

Geometrijski, kompleksan broj $z = (x, y)$ možemo interpretirati kao tačku u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu u Oxy ravni.

K. F. Gaus



Sl. 3.1

Kao što ćemo videti postoji uzajamno jednoznačna korespondencija između skupa $\mathbb{R}^2$ i skupa tačaka u Oxy ravni, te svakom kompleksnom broju (x, y) odgovara jedna i samo jedna tačka u Oxy ravni i obrnuto. Ova ravan naziva se **Gausova**[14] ili **kompleksna ravan.**

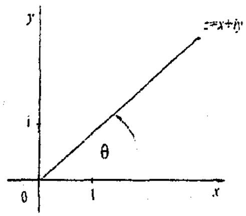
Mi ćemo x-osu zvati **realna osa**, a y-osu **imaginarna osa**. Dakle, na realnoj osi nalaze se realni brojevi, a na imaginarnoj osi čisto imaginarni brojevi i realan broj 0. Primetimo da je konjugovanje kompleksnih brojeva u stvari osna simetrija u odnosu na realnu osu.

Posmatrajmo proizvoljan kompleksan broj $z = x + yi$, kojem u Gausovoj ravni odgovara tačka $M(x, y)$.

Funkcija $|\ |: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definisana sa

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$z = x + yi$, zove se **modul**, a $|z|$ (vrednost funkcije modul u tački z) se zove **modul kompleksnog broja** z.



Sl. 3.2

Kako je $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$, to je $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Primetimo da $|z| = r$ geometrijski predstavlja rastojanje OM, tačke M određene kompleksnim brojem z, od koordinatnog početka O.

Pod rastojanjem d **u skupu** $\mathbb{C}$ podrazumevamo funkciju $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definisanu sa

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Realan broj $d(z_1, z_2)$ zovemo **rastojanjem kompleksnih brojeva** z_1 i z_2. Za funkciju d očigledno važe sledeće osobine:

1) $d(z_1, z_2) \geq 0$, 2) $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$,
3) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$, 4) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$.

Posmatrajmo funkciju $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$ definisanu sa:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0 \land y \geq 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0 \land y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \land y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \land y < 0 \end{cases},$$

$z = x + yi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Broj $\arg z$ (tj. vrednost funkcije arg u tački z) zove se **glavna vrednost** ili **glavni argument kompleksnog broja** z.

[14] Gaus, K. F. (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) - nemački matematičar, fizičar i astronom

Relacija

$$\text{Arg} = \{(z, \arg\, z + 2k\pi) : z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{Z}\}$$

zove se **argument**, arg $z + 2k\pi$ se zove **argument kompleksnog broja z** (vrednost relacije u tački z), tj. Arg $z = \arg\, z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Za kompleksan broj $0 = (0, 0)$ argument se ne definiše.

Geometrijska interpretacija arg z ($z = x + yi \neq 0$) je **mera ugla** θ ako je $y \geq 0$, a - (minus) mera ugla ako je $y < 0$ (kraće kažemo samo da je arg z ugao) čiji jedan krak je pozitivna realna osa, a drugi krak je poluprava koja polazi iz koordinatnog početka i prolazi kroz tačku $M(x, y)$ koju određuje kompleksan broj z.

Očigledno je da za $0 \neq z = x + iy$, $r = |z|$, $\theta = \arg z$, važe jednakosti:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}, \ x \neq 0.$$

Ako je $x = 0$, a $y > 0$, tada je $\theta = \frac{\pi}{2}$, odnosno za $x = 0$, $y < 0$, je $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Sada se dobija novi oblik kompleksnog broja

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

koji zovemo **trigonometrijski oblik** kompleksnog broja z.

Znači, da bismo kompleksan broj predstavili u trigonometrijskom obliku potrebno je znati njegov modul i njegov argument.

Obrnuto, svaki oblik

$$z = u(\cos v + i\sin v), \ u \geq 0,$$

je trigonometrijski oblik kompleksnog broja z, jer važi

$$r = |z| = \sqrt{u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v} = u, \qquad \left.\begin{array}{l}\cos\theta = \cos v\\ \sin\theta = \sin v\end{array}\right\} \Rightarrow v = \theta + 2k\pi,$$

tj. za kompleksan broj z, u je modul a v argument.

Dva kompleksna broja z_1 *i* z_2 ($z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$) *su jednaka ako i samo ako je:* $|z_1| = |z_2|$ *i* Arg $z_1 =$ Arg $z_2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Množenje i deljenje kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku

Neka su data dva kompleksna broja $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Na osnovu poznatih pravila za množenje kompleksnih brojeva u algebarskom obliku imamo:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)),$$

odakle sledi da je

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg}\, z_1 + \text{Arg}\, z_2.$$

Znači, dva kompleksna broja se množe u trigonometrijskom obliku tako što se moduli pomnože, a argumenti saberu.

Za $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \neq 0$, važi

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

Prema tome je

$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg } \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

Dakle, kompleksni brojevi se dele tako, što se moduli podele, a argumenti oduzmu. Ako uvedemo oznaku

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{\theta i}$$

(može se pokazati da $e^{\theta i}$ u stvari i jeste stepen realnog broja e), tada kompleksan broj $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ možemo predstaviti u obliku

$$z = re^{\theta i}$$

L. Ojler

što predstavlja **eksponencijalni** ili **Ojlerov**[15] **oblik** kompleksnog broja koji je kao i trigonometrijski oblik određen modulom i argumentom kompleksnog broja z.

Očigledno, ako je $z_1 = r_1e^{\theta_1 i}$, $z_2 = r_2e^{\theta_2 i}$, tada je

$$z_1 \cdot z_2 = r_1e^{\theta_1 i} \cdot r_2e^{\theta_2 i} = r_1r_2e^{(\theta_1+\theta_2)i},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{\theta_1 i}}{r_2e^{\theta_2 i}} = \frac{r_1}{r_2}e^{(\theta_1-\theta_2)i}, \quad z_2 \neq 0.$$

Kako je $\cos\theta + i\sin\theta = e^{\theta i}$, to je $\cos\theta - i\sin\theta = e^{-\theta i}$, pa je

$$\cos\theta = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}.$$

Očigledno, ako je $|z_1 - z_0| = |z_2 - z_0|$ i arg $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \theta$, $(z_1 \neq z_0,\ z_2 \neq z_0)$, sledi da je

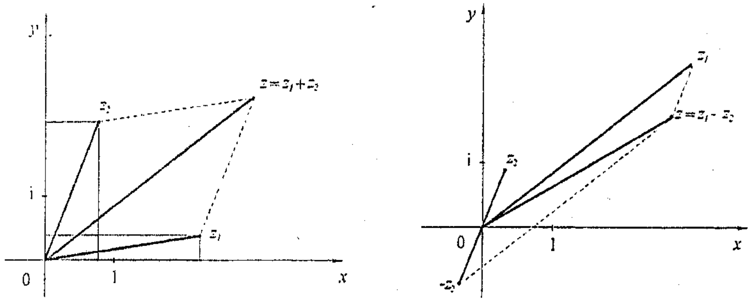
$$z_2 = z_0 + (z_1 - z_0)e^{\theta i}.$$

Daćemo sada geometrijsku interpretaciju svih operacija za kompleksne brojeve. Ako je $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, tada je $z = z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i$.

[15] Ojler, L. (Leonhard Euler, 1707-1783) - švajcarski matematičar

Ako je $z_1 \cdot z_2 \neq 0$ i $\operatorname{Arg} z_1 \neq \operatorname{Arg} z_2 + k\pi$, sledi da je četvorougao Oz_1zz_2 paralelogram. Znači, kompleksan broj z se dobija kao četvrto teme paralelograma konstruisanog nad dužima Oz_1 i Oz_2. Za razliku $z_1 - z_2$, prvo nađemo broj $-z_2$, pa ga saberemo sa z_1.

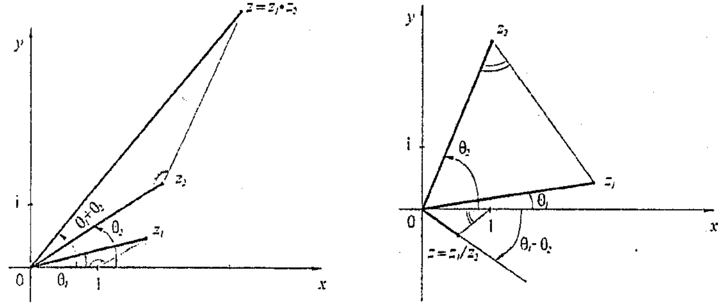
Dakle, kompleksni brojevi se sabiraju i oduzimaju kao i vektori u ravni. Sličnim rezonovanjem dobićemo da se kompleksni brojevi sabiraju i oduzimaju kao i vektori u ravni ako je $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + k\pi$, $(z_1 \cdot z_2 \neq 0)$, ili $z_1 \cdot z_2 = 0$.



a) b)

Sl. 3.3

Neka je sada $z = z_1 \cdot z_2$ ($z_1 \cdot z_2 \neq 0$ i bar jedan od kompleksnih brojeva z_1 i z_2 je različit od 1). Kako je $|z| = |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \theta_1 + \theta_2$, sledi da su trouglovi $O1z_1$ i Oz_2z slični, pa ugao kod temena z_2 mora biti isti kao i kod broja 1. Ako je $z_1 \cdot z_2 = 0$, to je $z = 0$, a ako je $z_1 = z_2 = 1$, tada je $z = 1$.



a) b)

Sl. 3.4

Za količnik $z = \frac{z_1}{z_2}$ je ($z_1 \cdot z_2 \neq 0$ i bar jedan od kompleksnih brojeva z_1 i z_2 je različit od 1), je $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, a Arg z = Arg z_1 − Arg z_2. Na osnovu sličnosti trouglova Oz_1z_2 i $O1z$ sledi da ugao kod temena z_2 mora biti isti kao i kod temena 1. Ako je $z_1 = 0$, to je i $z = 0$, a ako je $z_1 = z_2 = 1$, to je i $z = 1$.

Stepenovanje kompleksnog broja

Može se na osnovu principa matematičke indukcije dokazati da ako je $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k = 1, 2, ..., n$ da je

$$z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)],$$

odakle je

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot ... \cdot |z_n|,$$
$$\text{Arg } (z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 + ... + \text{Arg } z_n.$$

Ako je $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$, onda je $r_1 = r_2 = ... = r_n = r$ i $\theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_n = \theta$, a time i

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

tj. $|z^n| = |z|^n$, Arg $z^n = n$ Arg z, ili u eksponencijalnom obliku

$$z^n = r^n e^{n\theta i}.$$

A. Moavr

Sada se lako može dobiti **Moavrov**[16] **obrazac** (Moavrova formula)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Korenovanje kompleksnog broja

Neka je data jednačina

$$z^n = u,$$

gde je $n \in \mathbb{N}$, a $u = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ dati kompleksan broj različit od nule. Tada pišemo

$$z = \sqrt[n]{u}.$$

Imamo n različitih vrednosti za $\sqrt[n]{u}$, i to su

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1,$$

[16]Moavr, A. (Abraham de Moivre, 1667-1754) - engleski matematičar

ili u eksponencijalnom obliku

$$z_k = \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\phi + 2k\pi}{n} i}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Sva ova rešenja leže na kružnici poluprečnika $\sqrt[n]{r}$ i čine temena pravilnog n-tougla, čije je jedno teme (z_0) sa argumentom ϕ/n, a za svako sledeće teme argument se povećava za $2\pi/n$.

REALNE FUNKCIJE

4 Realne funkcije jedne realne promenljive

Kao što smo rekli u prvoj glavi, pod realnom funkcijom jedne realne promenljive podrazumevamo preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$. Dakle, oblast definisanosti i skup vrednosti su podskupovi skupa realnih brojeva.

Postoji više načina zadavanja funkcija: analitički, grafički i tabelarni.

Realne funkcije jedne realne promenljive se najčešće zadaju preko analitičkog izraza, odnosno **analitički**. To znači da će nam funkcija f biti data izrazom $y = f(x)$ na osnovu koga možemo videti šta je slika svakog x iz domena funkcije. Domen funkcije, tzv. **prirodni domen funkcije**, je tada skup svih realnih brojeva za koje je izraz $f(x)$ definisan kao realan broj, tj. skup

$$D = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Na primer, izrazom $y = x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ je zadata funkcija koja je definisana za sve realne brojeve, pa joj se domen poklapa sa prirodnim. Slika realnog broja x je $x + 3$.

Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D_1 \\ f_2(x), & x \in D_2 \\ \vdots & \\ f_n(x), & x \in D_n \end{cases}, \tag{4}$$

koja je zadata različitim analitičkim izrazima, na uzajamno disjunktnim podskupovima D_i, $i = 1, \dots, n$ od $\mathbb{R}$. Njen domen je $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$. Da bismo izračunali vrednost date funkcije u nekoj tački $x_0 \in D$, potrebno je utvrditi kojem delu domena pripada x_0 (odnosno za koje i je $x_0 \in D_i$), pa onda izračunati $f(x_0)$ $(= f_i(x_0))$.

Tako je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \in [-2, 0) \\ x + 4, & x \in [0, 5] \end{cases},$$

zadata različitim analitičkim izrazima, na disjunktnim skupovima brojeva. Ova funkcija je definisana na intervalu $[-2, 5]$. Vrednost funkcije u nekoj proizvoljnoj tački npr. $x_0 = 1$ određujemo tako što utvrdimo da $x_0 \in [0, 5]$, pa onda izračunavamo da je $f(x_0) = 1 + 4 = 5$.

Za funkciju datu sa $y = \sqrt{1-x^2}$ uzimamo da je definisana na skupu $\{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$, svom prirodnom domenu.

Prirodni domen funkcije $y = \sqrt{1+x} + \frac{1}{1-x}$ je skup onih $x \in \mathbb{R}$ za koje je $1 + x \geq 0$ i $1 - x \neq 0$, tj. $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1, x \neq 1\} = [-1, 1) \cup (1, \infty)$.

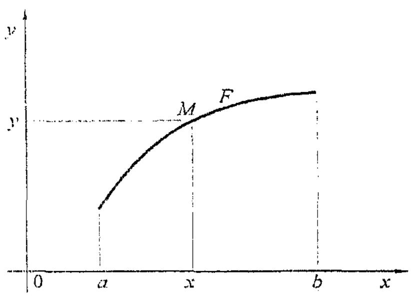
Napomenimo da ćemo nekada pod $f(x)$ podrazumevati funkciju f, a ne vrednost funkcije f za vrednost nezavisne promenljive x. Na primer, pod 2^x podrazumevaćemo eksponencijalnu funkciju sa osnovom 2, a ne njenu vrednost u x.

Funkcije možemo zadavati **tabelarno**. To radimo tako što dajemo u obliku tablice vrednosti funkcije (obično približne vrednosti ako nemamo tačne), za funkcije koje su definisane na konačnom skupu vrednosti.

Primeri takvog zadavanja su tablice kvadrata, kubova, korena, logaritama,...

Ukoliko je domen funkcije skup $X = \{x_1, ..., x_n\}$ i ako je $f(x_i) = y_i$, za $i = 1, ..., n$, tada se funkcija može zadati sledećom tabelom

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n



Sl. 4.1

Označimo sa F skup tačaka u (npr. Dekartovoj) koordinatnoj ravni koje imaju osobinu da svaka prava koja je paralelna y-osi seče ovaj skup u najviše jednoj tački. Uzmimo broj x iz zatvorenog intervala $[a, b]$ (videti sliku 4.1) i kroz tačku koja mu odgovara na x-osi nacrtajmo pravu paralelnu y-osi. Neka ona seče skup F u tački M.

Projektujući tačku M na y-osu (tj. tražeći tačku preseka y-ose i prave normalne na nju koja prolazi kroz M), nalazimo broj $f(x)$ (odgovara projekciji) koji se na taj način pridružuje broju x. Tako je funkcija $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ opisana grafom, a taj način predstavljanja se naziva **grafički.**

Ovaj način se primenjuje u praksi obično tako što se koriste određeni instrumenti (termograf, barograf,...) za izračunavanje promena nekih veličina u zavisnosti od vremena.

Analitički oblici zadavanja realne funkcije jedne realne promenljive su: eksplicitni, implicitni i parametarski.

Ako je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, definisana sa $y = f(x)$, $x \in X$ kažemo da je data u **eksplicitnom obliku.**

Neka je F realna funkcija dve realne promenljive, tj. $F : X \times Y \to \mathbb{R}$, $X, Y \subset \mathbb{R}$. Za funkciju $f : X \to Y$, takvu da je $F(x, f(x)) = 0$, $x \in X$ kažemo da je data u **implicitnom obliku.**

Postoji samo jedna funkcija $y = -x$, čiji je domen $\mathbb{R}$, koja zadovoljava jednakost $x+y=0$. Ne postoji samo jedna funkcija $y = f(x)$ takva da je jednakost $x^2 + y^2 = 1$ identički zadovoljena. Primeri dve takve funkcije su $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ i $y = -\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$.

Svaka funkcija u eksplicitnom obliku $y = f(x)$ se može napisati i u implicitnom obliku $y - f(x) = 0$, ali obrnuto ne važi, naime ne možemo uvek iz jednakosti $F(x,y) = 0$ koja definiše funkciju "izraziti" y.

Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, funkcija definisana sa $y = f(x)$, $x \in X$. Ako su $\varphi : T \to \mathbb{R}$, $\psi : T \to \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}$, dve funkcije, gde je $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T$, tada za funkciju f kažemo da je data u **parametarskom obliku.**

Promenljivu t zovemo **parametrom funkcije.** Ako postoji inverzna funkcija φ^{-1} funkcije φ, tada je $t = \varphi^{-1}(x)$, pa funkciju možemo zapisati u eksplicitnom obliku $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Na primer, ako je $x = t-1$ i $y = t^2$, tada je $t = x+1$, pa je $y = (x+1)^2$. Domen ove funkcije je $\mathbb{R}$. Primetimo da ne možemo uvek parametarski zadatu funkciju napisati u eksplicitnom obliku (ne možemo uvek "izraziti" t iz $x = g(t)$).

Posmatrajmo sada funkciju datu sa $x = t^2$, $y = t^2 + 1$. Ona je definisana za $x \geq 0$ (jer je $t^2 \geq 0$). Zamenom $x = t^2$ u $y = t^2 + 1$ dobijamo funkciju $y = x+1$. Domen ove funkcije je $\mathbb{R}$. Dakle, funkcije $x = t^2$, $y = t^2 + 1$ i $y = x + 1$ nisu jednake jer im domeni nisu isti. Njihove vrednosti su jednake samo za $x \geq 0$.

Primetimo i da svake dve jednakosti $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$ ne moraju definisati jedinstvenu funkciju. Na primer, neka je $x = \cos t$ i $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$. Tada je $x^2 + y^2 = 1$, a napred smo videli da ova jednakost ne definiše jednoznačno funkciju. Naravno, za $t \in [0, \pi]$, funkcija koja je na taj način parametarski zadata je $y = \sqrt{1-x^2}$.

4.1 Koordinatni sistemi u ravni i grafici funkcija u njima

Dekartov pravougli koordinatni sistem u ravni

U ravni je zadat **Dekartov pravougli koordinatni sistem**, ako:

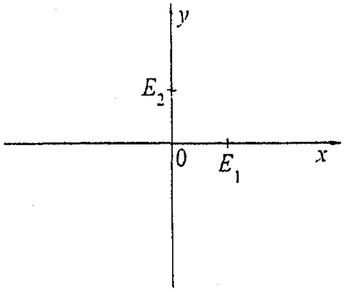
1°) U ravni su određene dve prave koje se obično obeležavaju x i y i seku se pod pravim uglom. Označimo tačku preseka sa O.

2°) Na svakoj od datih pravih izabran je jedan smer i nazvan pozitivnim.

3°) Na pozitivnom delu prave x je izabrana tačka $E_1 \neq O$, a na pozitivnom delu prave y tačka E_2, tako da je $|OE_1| = |OE_2|$.

4°) Tački O pridružen je broj 0, a tačkama E_1 i E_2 broj 1.

Sa $|OE|$ smo označili dužinu duži OE.



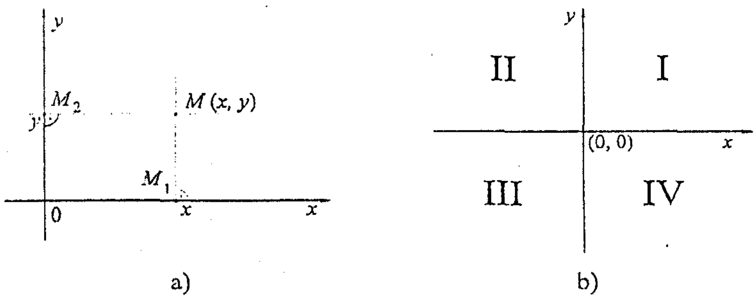
Sl. 4.2

Prava x se naziva x–osa, odnosno **apscisna osa** (ili kraće **apscisa**). Ona se obično predstavlja horizontalno sa pozitivnim smerom udesno. Prava y se naziva y–osa, odnosno **ordinatna osa** (ili kraće **ordinata**). Pozitivan smer je na crtežu označen strelicom. Njihov presek, tačku O, zovemo **koordinatni početak**. Poluprava koja određuje pozitivni smer x–ose (y–ose) se naziva **pozitivni deo x–ose**, (**pozitivni deo y–ose**), a ona dopunska poluprava je **negativni deo x–ose** (**negativni deo y–ose**).

Ako je u ravni dat Dekartov pravougli koordinatni sistem, tada svakoj tački u ravni jednoznačno odgovara uređeni par realnih brojeva i obrnuto svakom paru realnih brojeva jednoznačno odgovara tačka u ravni.

Ako je M proizvoljna tačka u ravni, tada par realnih brojeva (x, y) koji po teoremi odgovara toj tački, nazivamo **Dekartove koordinate** (kraće koordinate) tačke M. Broj x se naziva **prva koordinata** (**prva komponenta, apscisa**, x–koordinata), a y **druga koordinata** (**druga komponenta, ordinata**, y–koordinata) tačke M.

Koordinatni početak ima koordinate $(0, 0)$. Sve tačke sa x-ose imaju koordinate oblika $(x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, a koordinate tačaka sa y-ose su oblika $(0, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Deo ravni bez koordinatnih osa se sastoji od četiri oblasti, nazvanih **kvadranti** (videti sliku 4.3).

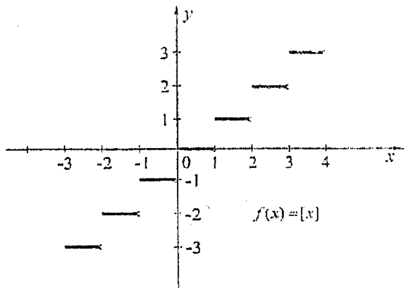


Sl. 4.3

Obično kada kažemo (Dekartov) koordinatni sistem podrazumevamo Dekartov pravougli koordinatni sistem. Ravan u kojoj je zadat koordinatni sistem često se kratko zove **koordinatna ravan** ili xy–ravan (xOy ravan).

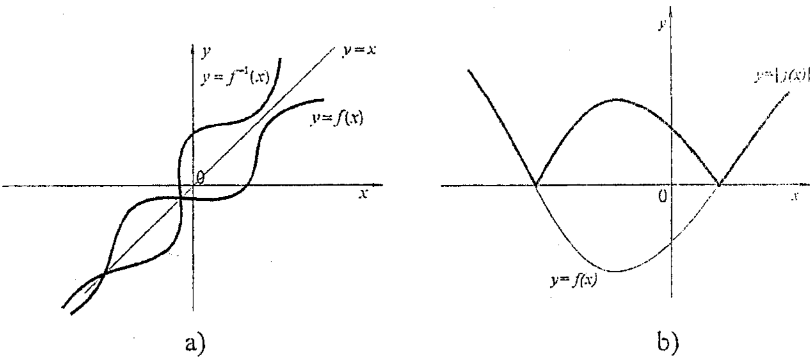
Grafik funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, je skup tačaka koordinatne ravni čije su koordinate $(x, f(x))$, za $x \in X$.

Nacrtajmo grafik funkcije $y = [x]$. On se sastoji od horizontalnih duži čije su desne krajnje tačke isključene.



Sl. 4.4

Naglasimo ovde da je grafik inverzne funkcije (kada postoji) realne funkcije f simetričan grafiku funkcije f u odnosu na pravu $y = x$.



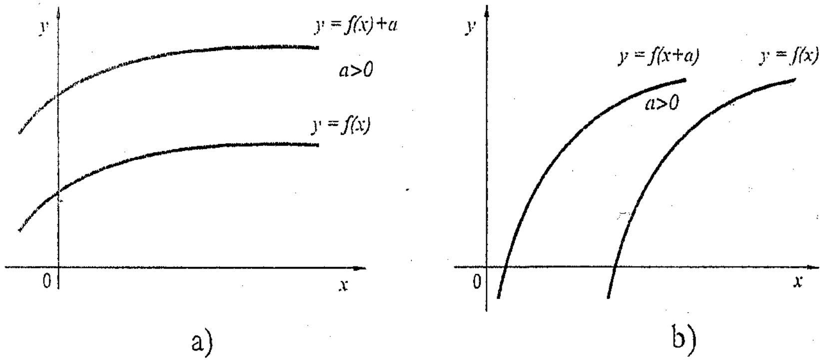
Sl. 4.5

Za grafik funkcije zadate sa (4), potrebno je posebno nacrtati grafike funkcija $f_i(x)$, $x \in D_i$, $i = 1, ..., n$ te unijom tih grafika dobijamo grafik funkcije f. Na primer grafik funkcije $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$, dobijamo crtanjem grafika funkcije $y = f(x)$, za one x za koje je $f(x) \geq 0$ i funkcije $y = -f(x)$, za one x za koje je $f(x) < 0$.

Ako znamo grafik funkcije $y = f(x)$, lako možemo da dobijemo i grafike još nekih funkcija u istom koordinatnom sistemu.

Grafik funkcije $y = f(x) + a$ dobijamo translacijom grafika funkcije $y = f(x)$

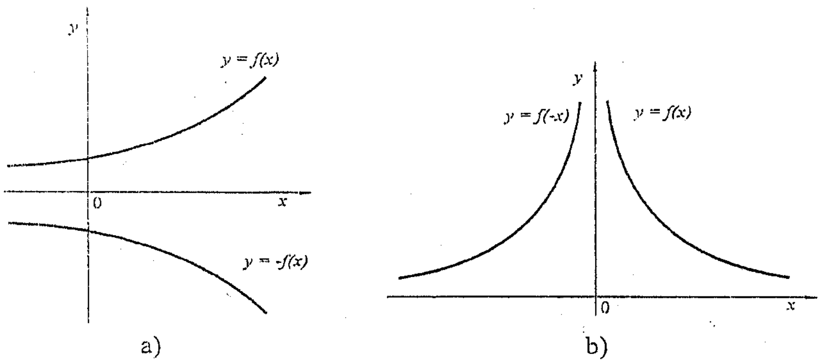
u pravcu y-ose za a.



Sl. 4.6

Grafik funkcije $y = f(x+a)$ dobijamo translacijom grafika funkcije $y = f(x)$ u pravcu x-ose za $-a$.

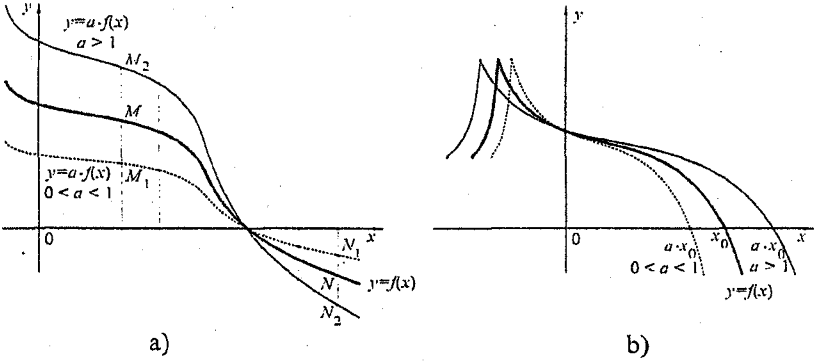
Grafik funkcije $y = -f(x)$ je simetričan grafiku funkcije $y = f(x)$ u odnosu na x-osu.



Sl. 4.7

Grafik funkcije $y = f(-x)$ je simetričan grafiku funkcije $y = f(x)$ u odnosu na y-osu.

Grafik funkcije $y = a \cdot f(x)$, $a > 1$ se može dobiti "širenjem" ("rastezanjem"), sa koeficijentom a, u pravcu y–ose grafika funkcije $y = f(x)$. Ukoliko je $0 < a < 1$ grafik funkcije $y = a \cdot f(x)$ dobijamo "skupljanjem" ("sabijanjem"), sa koeficijentom a, u pravcu y-ose grafika funkcije $y = f(x)$.



Sl. 4.8

Grafik funkcije $y = f(a \cdot x)$, se za $0 < a < 1$ dobija "širenjem" ("rastezanjem"), a za $a > 1$ "skupljanjem" ("sabijanjem"), u pravcu $x-$ose (sa koeficijentom $\frac{1}{a}$) grafika funkcije $y = f(x)$.

Skup tačaka koji opisuje (fiksna) tačka sa kružnice, koja se "kotrlja" (bez klizanja) po pravoj, zove se **cikloida**.

Posmatrajmo u Dekartovom koordinatnom sistemu kružnicu sa centrom u tački $(0, a)$, $a > 0$, poluprečnika a. Neka se ona kotrlja (bez klizanja) po $x-$osi. Posle obrtanja kružnice za ugao t, tačka O će doći u položaj M tako da je $\angle MCT = t$, $\overset{\frown}{MT} = \overline{OT} = at$, pa ako su koordinate tačke $M(x, y)$, tada je (videti sl. 4.9 a)):

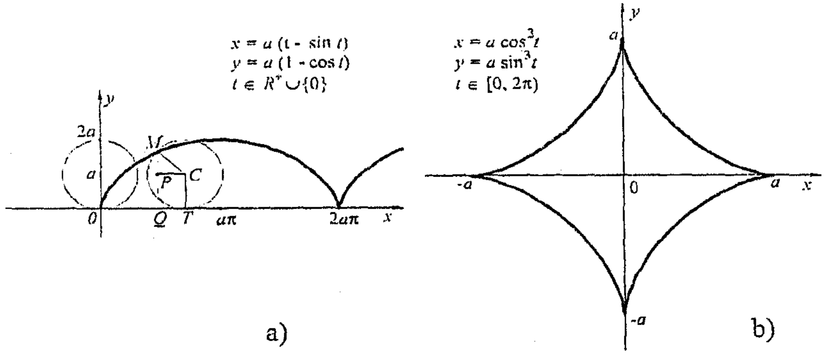
$$x = \overline{OQ} = \overline{OT} - \overline{QT} = \overset{\frown}{MT} - \overline{PC} = at - a\cos(t - \frac{\pi}{2}) = at - a\sin t,$$

$$y = \overline{MQ} = \overline{TC} + \overline{MP} = a + a\sin(t - \frac{\pi}{2}) = a - a\cos t,$$

tj. parametarske jednačine cikloide su :

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Kako je $x(t + 2k\pi) = x(t) + 2ak\pi$, $y(t + 2k\pi) = y(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, to se da zaključiti da se cikloida sastoji od neograničenog broja "svodova" dužine osnove $2a\pi$.



Sl. 4.9

Skup tačaka Dekartove ravni čije su parametarske jednačine:

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi),$$

zove se **astroida**. Iz $\sin t = (\frac{y}{a})^{\frac{1}{3}}$, $\cos t = (\frac{x}{a})^{\frac{1}{3}}$, i koristeći identitet $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, eliminacijom parametra t dobijamo jednačinu astroide u obliku $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Polarni koordinatni sistem u ravni

Sem u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, funkcija se može predstaviti i u polarnom koordinatnom sistemu.

Kažemo da je u ravni zadat **polarni koordinatni** sistem, ako je:

1°) Određena poluprava Op koju zovemo **polara**, sa početnom tačkom O koju nazivamo **pol**;

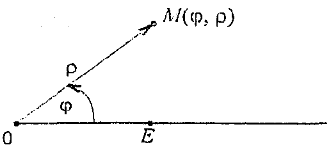
2°) Na polari izabrana tačka $E \neq O$.

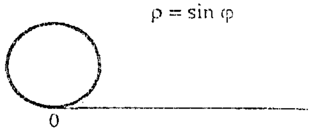
3°) Dužini $|OE|$ pridružen pozitivan realan broj 1.

Pravu koja je nosač polare (koja sadrži polaru) zovemo **polarna osa**.

Tačku $M \neq O$ ravni, u polarnom koordinatnom sistemu predstavljamo dvema drugim karakteristikama tzv. **polarnim koordinatama**, rastojanjem ρ tačke M od pola O i uglom $\varphi = \angle EOM$ koji zaklapa duž OM sa polarom, odnosno uređenim parom (φ, ρ). Prva koordinata φ je **polarni ugao**, a druga ρ je **polarni radijus** (krаće radijus, poluprečnik) tačke M.

Da tačka M ima polarne koordinate φ i ρ označavamo sa $M(\varphi, \rho)$. Napomenimo da je radijus očigledno nenegativan broj, tj. $\rho \geq 0$, jer je rastojanje tačaka broj veći ili jednak nuli. Uobičajeno je da se uzima da je polarni ugao φ iz intervala $[0, 2\pi)$ ili nekog drugog poluotvorenog intervala dužine 2π.





Sl. 4.10

Grafik funkcije $\rho : X \to \mathbb{R}_0^+$, $X \subset \mathbb{R}$ u polarnom koordinatnom sistemu, je skup tačaka te ravni čije su polarne koordinate $(\varphi, \rho(\varphi))$, za $\varphi \in X$.

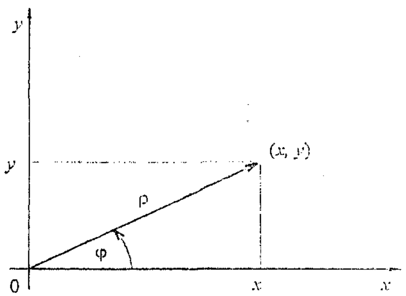
Na primer, grafik funkcije $\rho = \sin\varphi$ je dat na slici 4.10 b).

Primetimo da su grafici funkcija $y = \sin x$ i $\rho = \sin\varphi$, prve u Dekartovom, a druge u polarnom koordinatnom sistemu, dva različita skupa tačaka.

Često se polarni koordinatni sistem zadaje tako da se pol poklapa sa koordinatnim početkom već zadatog Dekartovog sistema, a polara sa pozitivnim delom x–ose (videti sliku 4.11). Tada su veze između koordinata tačke u Dekartovom i polarnom koordinatnom sistemu date sa

$$x = \rho\cos\varphi\ , \qquad y = \rho\sin\varphi,$$

odakle je $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Sl. 4.11

Pri crtanju grafika funkcije $\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in X$, treba voditi računa o nekim elementima, od kojih navodimo najvažnije.

- Odrediti oblast definisanosti funkcije f.

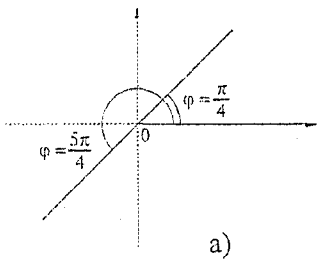
- U nekim slučajevima je zgodno ispitati da li je grafik funkcije simetričan u odnosu na pol, polarnu osu, pravu koja je normalna na polarnu osu, odnosno proizvoljnu pravu. Tako ako je $f(2\pi - \varphi) = f(\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi) \cap X$ grafik će biti simetričan u odnosu na polarnu osu, ako je $f(\pi + \varphi) = f(\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi) \cap X$ simetričan je u odnosu na pol. Kada je $f(\pi - \varphi) = f(\varphi)$, imamo simetriju u odnosu na pravu ortogonalnu na polarnu osu.

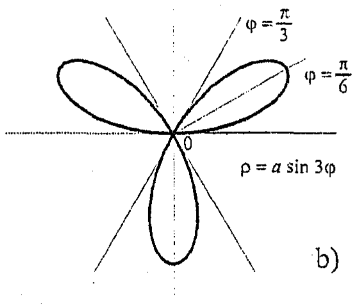
- Ispitati da li pol pripada grafiku funkcije f. Ako je to moguće svrsishodno je i ispitati kada je ρ najveće (najmanje), odnosno koja je tačka najudaljenija od pola (najbliža polu).
- Određen broj tačaka grafika se (obično tablično) odredi.
- Na osnovu svega toga skicira se grafik.

Sem navedenih, ispituju se i neke druge složenije osobine funkcije, koje daju precizniju sliku o grafiku posmatrane funkcije, ali ih zbog složenosti ne navodimo.

Jednačina simetrale prvog i trećeg kvadranta u Dekartovim koordinatama glasi $y = x$, dok je u polarnim koordinatama njena jednačina $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\rho \geq 0$ i $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, $\rho \geq 0$.

Nacrtajmo grafik funkcije $\rho = a\sin 3\varphi$, $a > 0$, zadate polarnim koordinatama. Jasno je da mora biti $\sin 3\varphi \geq 0$, tj. $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi] \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$. No kako je $\rho(\varphi + \frac{2\pi}{3}) = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi]$ i $\rho(\frac{\pi}{3} - \varphi) = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{6}]$, to je dovoljno posmatrati interval $[0, \frac{\pi}{6}]$. Za $\varphi \in [0, \frac{\pi}{6}]$, funkcija ρ je rastuća. Pol očigledno pripada grafiku. Lako je proveriti da npr. i tačke $(\frac{\pi}{12}, \frac{a}{\sqrt{2}})$, $(\frac{\pi}{9}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{\pi}{6}, a)$ pripadaju grafiku. Na taj način dolazimo do polovine jednog "lista" ovog grafika, koji je simetričan u odnosu na polupravu $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Ostali delovi grafika se sada lako dobijaju. Primetimo da se (zbog odgovarajuće slike) taj grafik često naziva "**trolisnik**".

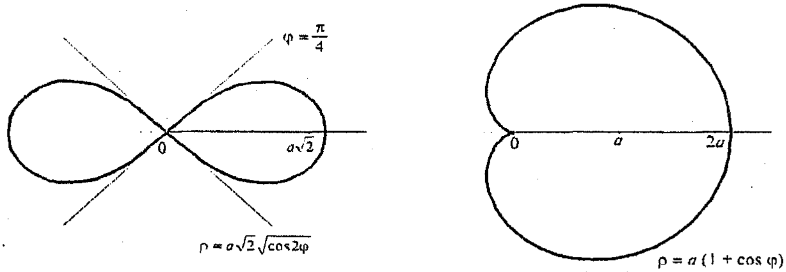




Sl. 4.12

Nacrtajmo grafik funkcije $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$, $a > 0$. Zbog zahteva da je $\cos 2\varphi \geq 0$, jasno je da $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$, što određuje deo ravni u kojem se kriva nalazi. Za tu funkciju važi $\rho(2\pi - \varphi) = \rho(\varphi)$ i $\rho(\pi - \varphi) = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$, pa je njen grafik simetričan i u odnosu na polarnu osu i na pravu upravnu na nju, a time i u odnosu na pol. Dakle, dovoljno je posmatrati interval $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Za $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$, funkcija ρ je opadajuća. Može se lako proveriti da npr. tačke $(0, a\sqrt{2})$, $(\frac{\pi}{12}, a\sqrt[4]{3})$, $(\frac{\pi}{8}, a\sqrt[4]{2})$, $(\frac{\pi}{4}, 0)$ pripadaju grafiku. Sada se može približno nacrtati grafik funkcije, koji se naziva **Bernulijeva lemniskata**. Njena jednačina u Dekartovim koordinatama je $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.



a) b)

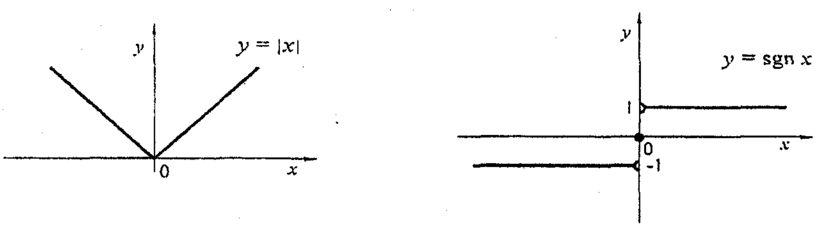
Sl. 4.13

Grafik funkcije $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$ zove se **kardioida**.

Funkcija je definisana za sve $\varphi \in [0, 2\pi)$. Zbog $\rho(2\pi - \varphi) = \rho(\varphi)$ njen grafik je simetričan u odnosu na polarnu osu. Funkcija ρ je opadajuća za $\varphi \in [0, \pi]$, dok je za $\varphi \in [\pi, 2\pi)$ rastuća. Tačke $(0, 2a)$, $(\frac{\pi}{3}, \frac{3a}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, a)$, $(\frac{2\pi}{3}, \frac{a}{2})$, $(\pi, 0)$ pripadaju grafiku, pa ga je sada lako nacrtati. Često se posmatra i kardioida $\rho = a(1 - \cos\varphi)$, $a > 0$ koja je simetrična prethodnoj u odnosu na pol.

4.2 Osobine realnih funkcija

Definicija 4.1 *Za neprazan skup $X \subset \mathbb{R}$ kažemo da je* simetričan, *ako za proizvoljno $x \in X$, imamo da i $-x \in X$.*



a) b)

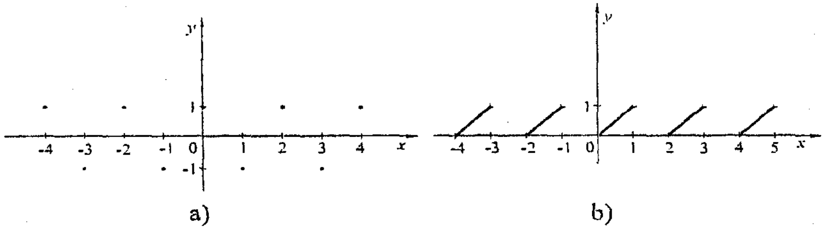
Sl. 4.14

Na primer skupovi $(-1, 1)$, $[-2, 2]$, $(-5, -3] \cup [3, 5)$, $\mathbb{R}$ su simetrični.

Definicija 4.2 *Neka je X simetričan skup. Kažemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$* **parna,** *ako za sve $x \in X$ važi da je $f(-x) = f(x)$. Funkcija f je* **neparna** *ako za sve $x \in X$ važi da je $f(-x) = -f(x)$.*

Grafik parne funkcije je (osno) simetričan u odnosu na y-osu, dok je grafik neparne funkcije (centralno) simetričan u odnosu na koordinatni početak. Ovo nam znatno olakšava crtanje grafika parnih i neparnih funkcija, jer je ove funkcije dovoljno ispitivati za nenegativne brojeve iz domena. Primer parne funkcije je funkcija $f(x) = |x|$, a neparne funkcija $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Kompozicija parnih (neparnih) funkcija je opet parna (neparna) funkcija. Kompozicija parne i neparne funkcije je uvek parna funkcija.



Sl. 4.15

Definicija 4.3 *Funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* **periodična** *ako postoji pozitivan realan broj* T *takav da za sve* $x \in \mathbb{R}$ *važi*

$$f(x+T) = f(x).$$

Broj T se zove **period funkcije** f. Najmanji pozitivan broj, ako takav postoji, koji je period funkcije f se zove **osnovni period funkcije** f. Ako je T_0 osnovni period funkcije, tada je i kT_0 period funkcije, za $k \in \mathbb{Z}$. Konstantna funkcija je periodična, ali nema osnovni period.

Definicija 4.4 *Za* $x \in X$ *kažemo da je* **nula funkcije** $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, *ako je* $f(x) = 0$.

Ako je x nula funkcije f, tada tačka $(x, 0)$ sa $x-$ose pripada grafiku funkcije.

Definicija 4.5 *Za funkciju* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, *kažemo da je* **ograničena sa gornje (donje) strane** *ako je skup njenih vrednosti* $f(X)$ *ograničen sa gornje (donje) strane u odnosu na relaciju* $\leq$, *tj. ako postoji* $\mu \in \mathbb{R}$ *tako da za sve* $x \in X$ *važi da je* $f(x) \leq \mu$ $(\mu \leq f(x))$. *Reći ćemo da je funkcija* f *ograničena sa gornje (donje) strane sa* μ, *a broj* μ *zvaćemo* **gornjim (donjim) ograničenjem** *ili* **gornjom (donjom) granicom funkcije** f.

Funkcija f *je* **ograničena** *ako je ograničena i sa gornje i sa donje strane.*

Često umesto ograničena sa gornje strane kažemo da je funkcija **ograničena odozgo (od gore)**, a umesto ograničena sa donje strane kažemo da je funkcija **ograničena odozdo (od dole)**.

Potreban i dovoljan uslov da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ ograničena, je da postoji $\nu \in \mathbb{R}^+$, tako da za svako $x \in X$ važi $|f(x)| \leq \nu$.

Gornja i donja granica, ako postoje, nisu jedinstvene. Ako je μ gornja (donja) granica funkcije f, to je i svaki broj koji je veći (manji) od μ. Ukoliko je funkcija f ograničena sa gornje strane, najmanja gornja granica je supremum **funkcije** f. Slično, ako je funkcija f ograničena sa donje strane, najveća donja granica je **infimum funkcije** f. Dakle

Definicija 4.6 *Neka je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ ograničena sa gornje (donje) strane.* **Supremum (infimum)** *funkcije f, u oznaci* $\sup f$ ($\inf f$), *je supremum (infimum) skupa* $\{f(x) : x \in X\}$.

Zbog aksioma supremuma (i infimuma) sve ograničene funkcije imaju supremum i infimum.

Definicija 4.7 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, funkcija ograničena sa gornje strane. Za $x_0 \in X$ kažemo da je* **tačka (strogog, striktnog) maksimuma funkcije** f, *ako je*

$$(\forall x \in X)\ f(x) \leq f(x_0) \qquad ((\forall x \in X \setminus \{x_0\})\ f(x) < f(x_0)).$$

Za funkciju f u tom slučaju kažemo da ima **(strogi) maksimum** $f(x_0)$, *tj. da ima maksimum u* $(x_0, f(x_0))$.

Za $x_0 \in X$ kažemo da je **tačka (strogog) minimuma** *funkcije f, ako je*

$$(\forall x \in X)\ f(x) \geq f(x_0) \qquad ((\forall x \in X \setminus \{x_0\})\ f(x) > f(x_0)).$$

Za funkciju f u tom slučaju kažemo da ima **(strogi) minimum** $f(x_0)$, *tj. da ima minimum u* $(x_0, f(x_0))$.

Maksimum i minimum funkcije zovemo **(apsolutnim) ekstremima.**

Dakle, $f(x_0)$ je maksimum (minimum) funkcije f ako je

$$f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in X\}, \qquad (f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in X\}).$$

Definicija 4.8 *Za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, kažemo da je na skupu $A \subset X \subset \mathbb{R}$*

1) **monotono rastuća** *ako važi*

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)),$$

2) **monotono opadajuća** *ako važi*

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)),$$

3) **monotono neopadajuća** *ako važi*

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)),$$

4) **monotono nerastuća** *ako važi*

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Funkcija je **monotona** *ako je monotono rastuća, opadajuća, nerastuća ili neopadajuća. Funkcija je* **strogo (striktno) monotona** *ako je monotono rastuća ili opadajuća.*

Jasno je da je monotono rastuća funkcija ujedno i monotono neopadajuća i da je monotono opadajuća funkcija ujedno i monotono nerastuća.

Kažemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ **(striktno, strogo) monotona po delovima** ukoliko postoje disjunktni podskupovi A od X na kojima je (striktno) monotona.

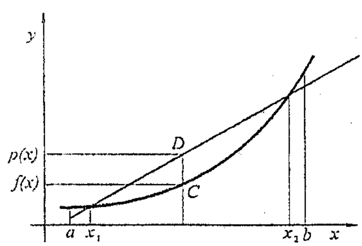
Neka je funkcija f definisana na intervalu (a,b) i $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$. Jednačina prave p kroz tačke $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$ je

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) = p(x).$$

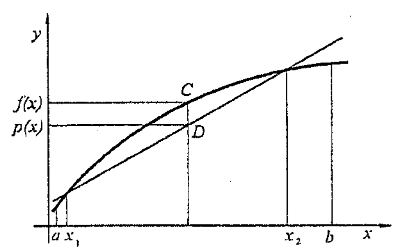
Definicija 4.9 *Neka su x_1 i x_2 proizvoljne tačke intervala (a,b), takve da je $x_1 < x_2$. Funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je* **konveksna (konkavna)** *na intervalu (a,b), ako za sve $x \in (x_1, x_2)$, važi*

$$f(x) < p(x) \qquad (f(x) > p(x)).$$

Grafički, ako je f konveksna (Sl. 4.16 a)) (konkavna (Sl. 4.16 b))) funkcija na intervalu (a,b) i $a < x_1 < x < x_2 < b$, tada je tačka $C(x, f(x))$ ispod (iznad) tačke $D(x, p(x))$.



a)



b)

Sl. 4.16

Na primer, funkcija $y = x^2$ je konveksna na celom skupu $\mathbb{R}$. Funkcija $y = -x^2$ je konkavna na $\mathbb{R}$. Funkcija $y = ax + b$ nije ni konkavna, ni konveksna ni na jednom intervalu. Funkcija $y = x^3$ je konkavna za $x < 0$, a konveksna za $x > 0$.

Napomena 4.1 Pored termina konkavno i konveksno koriste se respektivno i termini **ispupčena na gore** i **ispupčena na dole**. U literaturi se može naići i na definicije konveksnosti (konkavnosti) u kojima se umesto $f(x) < p(x)$ $(f(x) > p(x))$ dozvoljava da je $f(x) \leq p(x)$ $(f(x) \geq p(x))$. Po ovakvoj definiciji prava bi bila i konkavna i konveksna.

Napomena 4.2 Takođe, u nekim knjigama se umesto termina konkavno koristi termin konveksno i obrnuto, pa na to treba obratiti pažnju.

Ako je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, konveksna (konkavna) na celom domenu, kažemo kratko da je konveksna (konkavna). Ukoliko postoje disjunktni otvoreni intervali $(a, b) \subset X$, na kojima je funkcija konveksna (konkavna), onda ćemo često reći da je **konveksna (konkavna) po delovima (intervalima)**.

Definicija 4.10 *Za funkciju* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, *tačka* $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in X$, *je* **prevojna tačka**, *ako postoji realan broj* $\varepsilon > 0$, *gde* $x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \in X$, *tako da je funkcija* f *konkavna na intervalu* $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, *a konveksna na intervalu* $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ *ili obrnuto, konveksna na intervalu* $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, *a konkavna na intervalu* $(x_0, x_0 + \varepsilon)$.

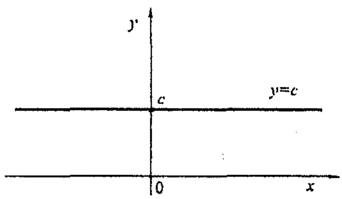
Na primer, $(0, 0)$ je prevojna tačka funkcije $y = x^3$.

Umesto da kažemo da je $x = x_0 \in X$ apscisa prevojne tačke $(x_0, f(x_0))$, kratko kažemo da je $x = x_0 \in X$ prevojna tačka funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$.

4.3 Elementarne funkcije

Osnovne elementarne funkcije su sledeće funkcije

Konstantna funkcija je funkcija $y = c$, gde je c fiksiran proizvoljan realan broj. Njen domen je $\mathbb{R}$. Primer konstantne funkcije je **nula funkcija**, $O(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.



Sl. 4.17

Stepena funkcija je funkcija $y = x^a$, gde je a proizvoljan realan broj. Domen ove funkcije je $\mathbb{R}^+$. Skup vrednosti je takođe $\mathbb{R}^+$. Ako je $a > 0$ to je monotono rastuća, a za $a < 0$ monotono opadajuća funkcija. Za $a \in (0, 1)$ stepena funkcija je konkavna, a za $a \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ konveksna.

Ova funkcija se razmatra i za specijalne vrednosti.

Za $a \in \mathbb{N}$ domen ove funkcije je $\mathbb{R}$, a nula $x = 0$.

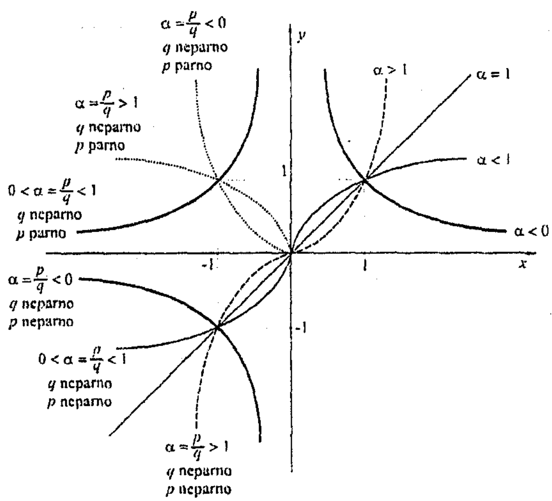
Ako je a neparan prirodan broj, funkcija x^a je neparna, monotono rastuća i nije ograničena. Konveksna je za $x > 0$, a $(0,0)$ je prevojna tačka ove funkcije. Ako je a paran prirodan broj, funkcija x^a je parna, nenegativna i konveksna. Za $x > 0$ monotono je rastuća, a u tački $(0,0)$ ima minimum.

Za slučaj kada je a negativan ceo broj ovu funkciju možemo pisati u obliku $\dfrac{1}{x^{-a}}$, $-a \in \mathbb{N}$. Domen ove funkcije je skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ako je $a = -(2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$, to je neparna funkcija, opadajuća po delovima i za $x < 0$ i za $x > 0$. Konveksna je i pozitivna za $x > 0$. Ako je $a = -2k$, $k \in \mathbb{N}$, to je parna, pozitivna funkcija konveksna za $x < 0$ kao i za $x > 0$. Rastuća je za $x < 0$.

Za $a = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$, domen stepene funkcije je $\mathbb{R}$ za n neparno, a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ za n parno.

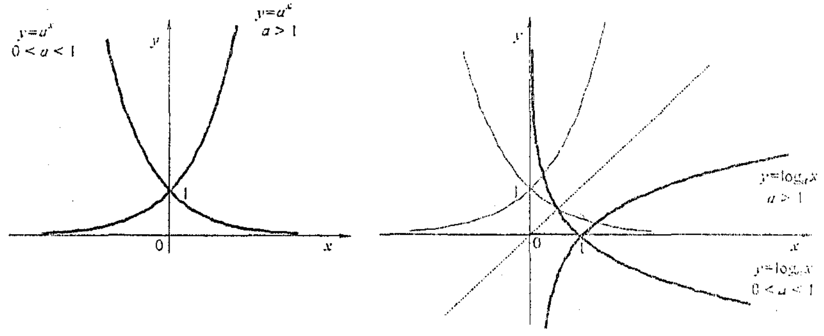
Ako je n neparan broj funkcija $y = x^{\frac{1}{n}}$ je inverzna funkciji x^n. Ako je n paran broj, funkcija x^n nije bijekcija, pa nema inverznu funkciju. Njena restrikcija na intervalu $[0, \infty)$ jeste bijekcija, i njoj inverzna funkcija joj je $x^{\frac{1}{n}}$. Primetimo da je $(x^n)^{\frac{1}{n}} = x$ i $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$ samo za $x \geq 0$.



Sl. 4.18

Za $a = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^-$, domen ove funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ za n neparno, a $\mathbb{R}^+$ za n

parno.



a) b)

Sl. 4.19

Eksponencijalna funkcija je funkcija $y = a^x$, gde je $a > 0$ i $a \neq 1$. Broj a se zove **osnova** ili **baza**. Domen joj je skup $\mathbb{R}$. Ova funkcija nema realnih nula i veća je od 0 nad celim domenom. Za $a > 1$ to je monotono rastuća funkcija, a za $a \in (0,1)$ monotono opadajuća. Eksponencijalna funkcija je konveksna.

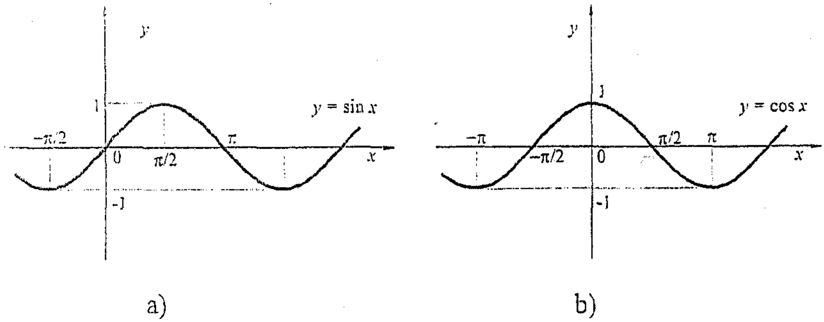
Logaritamska funkcija je funkcija $y = \log_a x$, gde je $a > 0$ i $a \neq 1$. Broj a se zove **osnova (baza) logaritma**. Ova funkcija je inverzna eksponencijalnoj funkciji, te joj je oblast definisanosti $\mathbb{R}^+$, a oblast vrednosti $\mathbb{R}$. Njena jedina nula je $x = 1$. U slučaju kada je $a > 1$, funkcija je pozitivna za $x > 1$, monotono rastuća i konkavna. Ako je $a \in (0,1)$, funkcija $\log_a$ je pozitivna za $x \in (0,1)$, monotono je opadajuća i konveksna.

Logaritam sa bazom e zove se **prirodni logaritam** i označava sa $\ln x$. Za logaritam $\log_{10} x$ kažemo da je **dekadni** i pišemo $\log x$.

Trigonometrijske funkcije su funkcije sinus ($y = \sin x$), kosinus ($y = \cos x$), tangens ($y = \operatorname{tg} x$) i kotangens ($y = \operatorname{ctg} x$).

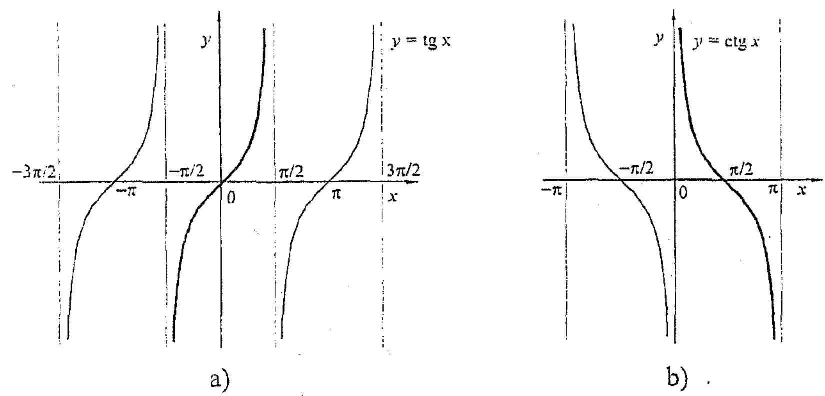
Funkcija **sinus** je definisana za sve realne brojeve. Ona je neparna i ograničena (skup vrednosti je $[-1,1]$). To je periodična funkcija sa osnovnim periodom 2π. Sinusna funkcija je pozitivna za $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, kada je i konkavna (po intervalima). Nule funkcije sin su $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a to su ujedno i prevojne tačke. Sinus je monotono rastuća na intervalima $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, u tačkama $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1)$, $k \in \mathbb{Z}$ ima minimum, a maksimum u $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcija **kosinus** je definisana za sve $x \in \mathbb{R}$. To je parna i ograničena funkcija ($|\cos x| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$). Periodična je sa osnovnim periodom 2π. Kosinusna funkcija je pozitivna za $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, kada je i konkavna (po delovima). Nule funkcije cos su $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a to su ujedno i prevojne tačke. Kosinus je monotono opadajuća na intervalima $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, u tačkama $(2k\pi, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$ ima maksimum, a minimum u $((2k+1)\pi, -1)$, $k \in \mathbb{Z}$.



Sl. 4.20

Funkcija **tangens** je definisana na skupu $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. To je neparna i periodična funkcija. Osnovni period je π. Nule funkcije su $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a to su i prevojne tačke. Na intervalima $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ funkcija je pozitivna i konveksna (po delovima). Funkcija tg je monotono rastuća po intervalima $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.



Sl. 4.21

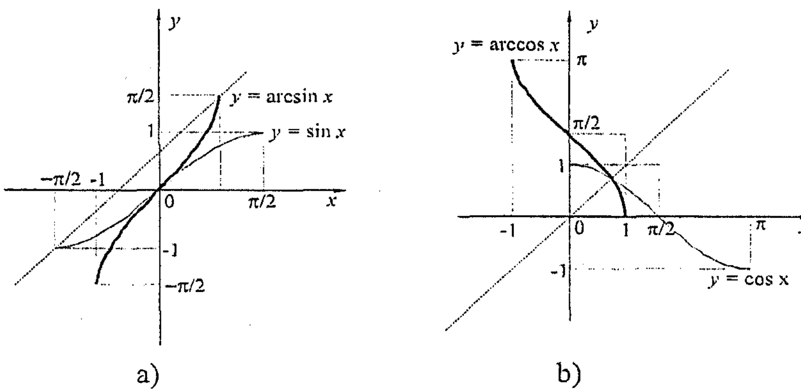
Funkcija **kotangens** je definisana na skupu $\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Ona je neparna i periodična. Osnovni period je π. Nule funkcije su $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a to su i prevojne tačke. Na intervalima $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, funkcija je pozitivna i konveksna (po delovima). Funkcija ctg je monotono opadajuća po intervalima $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Inverzne trigonometrijske funkcije su funkcije inverzne trigonometrijskim funkcijama (njihovim restrikcijama). Zovu se još i **ciklometrijske funkcije.** To su funkcije arkus sinus ($y = \arcsin x$), arkus kosinus ($y = \arccos x$), arkus tangens ($y = \operatorname{arctg} x$) i arkus kotangens ($y = \operatorname{arcctg} x$). Ove funkcije se označavaju još i sa $y = \sin^{-1} x$, $y = \cos^{-1} x$, $y = \operatorname{tg}^{-1} x$ i $y = \operatorname{ctg}^{-1} x$.

S obzirom da trigonometrijske funkcije nisu bijekcije, da bi dobili inverzne trigonometrijske funkcije, moramo posmatrati njihove restrikcije na intervalima gde one jesu bijekcije.

Funkcija **arkus sinus** je definisana na intervalu $[-1, 1]$ i skup vrednosti joj je interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. To je neparna funkcija. Tačka $x = 0$ je nula funkcije i istovremeno prevojna tačka. Za $x \in (0, 1]$ funkcija je pozitivna i konveksna. Monotono je rastuća.

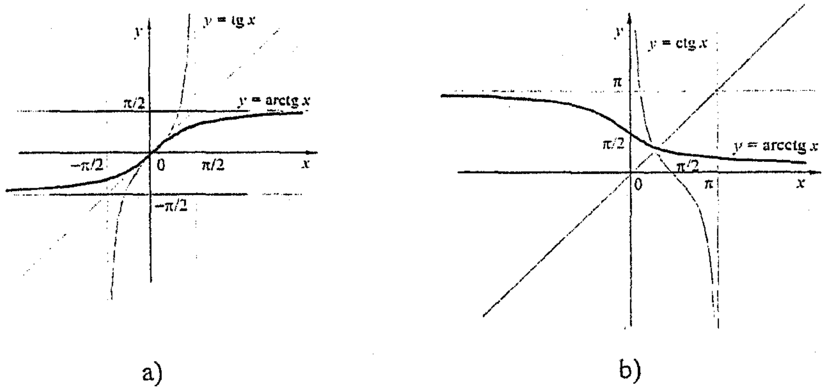
Funkcija **arkus kosinus** je definisana na intervalu $[-1, 1]$ i skup vrednosti joj je interval $[0, \pi]$. Tačka $x = 1$ je nula funkcije. Preslikavanje je monotono opadajuće. Za $x \in [-1, 0)$ funkcija konveksna i tačka $(0, \frac{\pi}{2})$ je prevojna.



Sl. 4.22

Funkciju **arkus tangens** definišemo na $\mathbb{R}$, dok joj je skup vrednosti interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. To je neparna funkcija čija je jedina nula $x = 0$ ujedno i prevojna tačka. Monotono je rastuća, pozitivna i konkavna za $x > 0$.

Funkciju **arkus kotangens** definišemo na $\mathbb{R}$. Njen skup vrednosti je interval $(0, \pi)$. To je monotono opadajuća funkcija konveksna za $x > 0$, sa prevojnom tačkom $(0, 0)$.



Sl. 4.23

Elementarne funkcije se dobijaju od osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačne primene algebarskih operacija (sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja) i kompozicije funkcija.

Elementarne funkcije uvodimo sledećom rekurzivnom definicijom.

Definicija 4.11

1. *Osnovne elementarne funkcije su elementarne funkcije.*
2. *Ako su f i g elementarne funkcije, $g \neq O$ (O nula funkcija), tada su elementarne funkcije i $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$.*
3. *Elementarne funkcije se mogu dobiti samo konačnom primenom pravila 1. i 2. ove definicije.*

Na primer, elementarne funkcije su: $y = 2x^2 + 3x + 5$, $y = 3^{2x} - \sin^2 x$, $y = \ln(\sqrt{x} + 3)$, $y = \frac{\ln x + 5}{\operatorname{arctg} x + 3x}$, $y = \ln(\arcsin x^2)$.

Elementarne funkcije delimo u nekoliko klasa.

Polinomske funkcije, (realne) koje su definisane za sve realne brojeve. Njih možemo dobiti iz funkcija $f_1(x) = c$ (c konstanta) i $f_2(x) = x$ posredstvom operacija sabiranja i množenja.

Racionalne funkcije su funkcije koje su količnici dve polinomske funkcije, dakle oblika

$$r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

Njih možemo dobiti iz funkcija $f_1(x) = c$ (c konstanta) i $f_2(x) = x$ pomoću operacija sabiranja, množenja i deljenja.

Primetimo da su polinomske funkcije i racionalne (za $q_0(x) = 1$). Racionalne funkcije su definisane za sve realne brojeve sem za nule imenioca, tj. za sve realne brojeve sem za rešenja jednačine $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$. Na primer, to su $\frac{x^2+1}{3x-1}$, $\frac{x^4}{x^2+1}, \ldots$.

Racionalna funkcija $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ je **prava racionalna funkcija**, ako je stepen od $p(x)$ manji od stepena polinoma $q(x)$, dok je u suprotnom slučaju **neprava**. Svaka neprava racionalna funkcija se može predstaviti kao zbir polinoma i prave racionalne funkcije (deljenjem $p(x)$ sa $q(x)$).

Za racionalnu funkciju koja ima jedan od oblika

$$r(x) = \frac{A}{(x-\alpha)^k}, \quad r(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

gde $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta^2 - 4\gamma < 0$, kažemo da je **prost (parcijalan) razlomak**.

Neka je $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\beta_1, \ldots, \beta_l, \gamma_1, \ldots, \gamma_l \in \mathbb{R}$, $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$, $i = 1, \ldots, l$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $(\beta_i, \gamma_i) \neq (\beta_j, \gamma_j)$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, l\}$ *i*

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_k)^{m_k} \cdot (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1} \cdots (x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{n_l}.$$

Tada pravu racionalnu funkciju $\frac{p(x)}{q(x)}$ *možemo na jedinstven način predstaviti u obliku*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{1,1}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} +$$

$$+\ldots+$$

$$+\frac{A_{k,1}}{x-\alpha_k} + \frac{A_{k,2}}{(x-\alpha_k)^2} + \ldots + \frac{A_{k,m_k}}{(x-\alpha_k)^{m_k}} +$$

$$+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1,n_1}x+C_{1,n_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1}} +$$

$$+\ldots+$$

$$+\frac{B_{l,1}x+C_{l,1}}{x^2+\beta_l x+\gamma_l} + \frac{B_{l,2}x+C_{l,2}}{(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^2} + \ldots + \frac{B_{l,n_l}x+C_{l,n_l}}{(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{n_l}}.$$

Ovaj zbir se često naziva **Hevisajdov**[17] **razvoj** racionalne funkcije.

[17] Hevisajd, O. (Oliver Heaviside, 1850-1925) - engleski matematičar

O. Hevisajd

Koeficijenti $A_{1,1}, \dots, B_{1,1}, \dots, C_{1,1}, \dots$ se mogu odrediti jer je dati izraz identitet, pa ako desnu stranu saberemo, dobijamo u brojiocu sa leve i desne strane dva polinoma. Izjednačujući koeficijente uz odgovarajuće stepene od x tih polinoma dobijamo sistem jednačina za određivanje tih koeficijenata.

Algebarske funkcije su racionalne funkcije i funkcije koje se dobijaju od racionalnih konačnom primenom algebarskih operacija, stepenovanja racionalnim brojem i kompozicijom. Na primer, to su funkcije

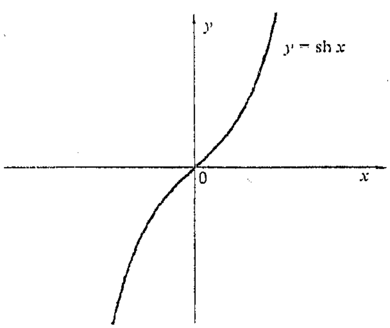
$$y = \sqrt{x^2 - 1}, \quad y = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2}}{x + \sqrt{x^3}}, \dots .$$

Te funkcije možemo dobiti iz konstantne funkcije $f_1(x) = c$ i funkcije $f_2(x) = x$ pomoću operacija sabiranja, množenja, deljenja, korenovanja i kompozicije.

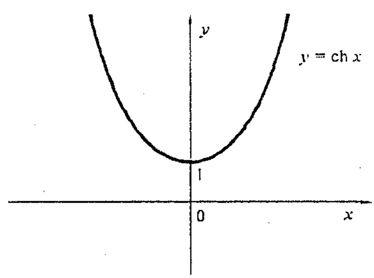
Iracionalne funkcije su sve algebarske funkcije koje nisu racionalne. Te funkcije mogu biti date izrazom koji sadrži izvlačenje korena, ali ne može biti predstavljen u obliku algebarskog razlomka ili polinoma. Funkcije $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$, $y = \sqrt{x - 1}$ su iracionalne, dok funkcija $y = \sqrt{(x^2 + 3)^2} = x^2 + 3$ to nije.

Transcedentne funkcije su sve ostale elementarne funkcije. Takve su npr. $y = \sin x$, $y = e^x$, $y = \log x$ itd.

Spomenimo ovde još neke realne funkcije koje ne spadaju u klasu osnovnih elementarnih funkcija, ali se često sreću pri radu sa realnim brojevima.



a)



b)

Sl. 4.24

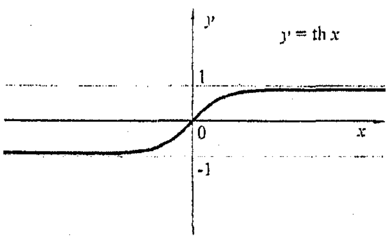
Hiperbolične funkcije su funkcije sinus hiperbolični $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, kosinus hiperbolični $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, tangens hiperbolični $y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} =$

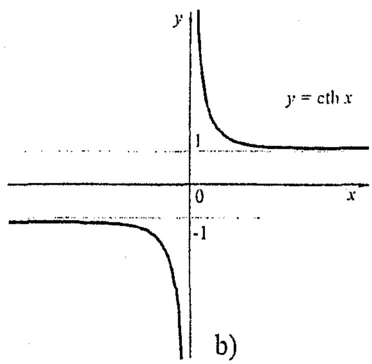
$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ i kotangens hiperbolični $y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. Ove funkcije se označavaju još i sa $y = \sinh x$, $y = \cosh x$, $y = \tanh x$ i $y = \coth x$. Lako je videti da važi: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Funkcija **sinus hiperbolični** je definisana na $\mathbb{R}$ što joj je i skup vrednosti. To je neparna funkcija. Tačka $x = 0$ je nula funkcije i istovremeno prevojna tačka. Za $x > 0$ funkcija je pozitivna i konveksna. Monotono je rastuća.

Preslikavanje **kosinus hiperbolični** definisano je na $\mathbb{R}$, dok je skup vrednosti $[1, \infty)$. Funkcija $y = \operatorname{ch} x$ je parna i konveksna. Za $x > 0$ funkcija je monotono rastuća. Tačka minimuma je $(0, 1)$.

Domen funkcije **tangens hiperbolični** je $\mathbb{R}$, a kodomen $(-1, 1)$. Funkcija $y = \operatorname{th} x$ je neparna. Nula tog preslikavanja je $x = 0$. Funkcija je monotono rastuća. Za $x > 0$ funkcija je pozitivna i konkavna, a tačka prevoja je $(0, 0)$.





Sl. 4.25

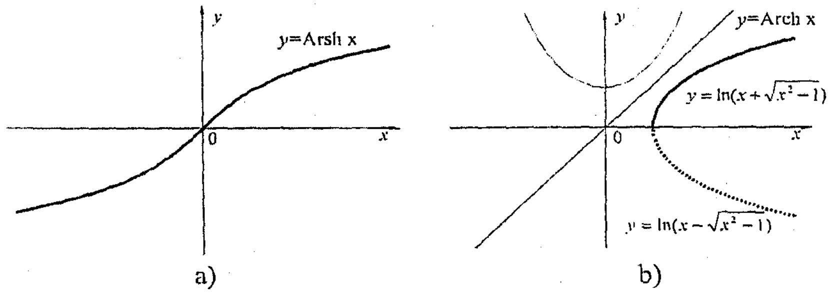
Domen funkcije **kotangens hiperbolični** je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a kodomen $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Funkcija $y = \operatorname{cth} x$ je neparna. Ona monotono opada i za $x < 0$ i za $x > 0$. Za $x > 0$ funkcija je pozitivna i konveksna.

Inverzne funkcije hiperboličnih funkcija su funkcije Area sinus hiperbolični $y = \operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, Area kosinus hiperbolični $y = \operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, Area tangens hiperbolični $y = \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ i Area kotangens hiperbolični $y = \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$.

Funkcija **Area sinus hiperbolični** inverzna je funkciji $y = \operatorname{sh} x$, pa su joj i domen i kodomen $\mathbb{R}$. To je neparna monotono rastuća funkcija. Pozitivna i konkavna je za $x > 0$.

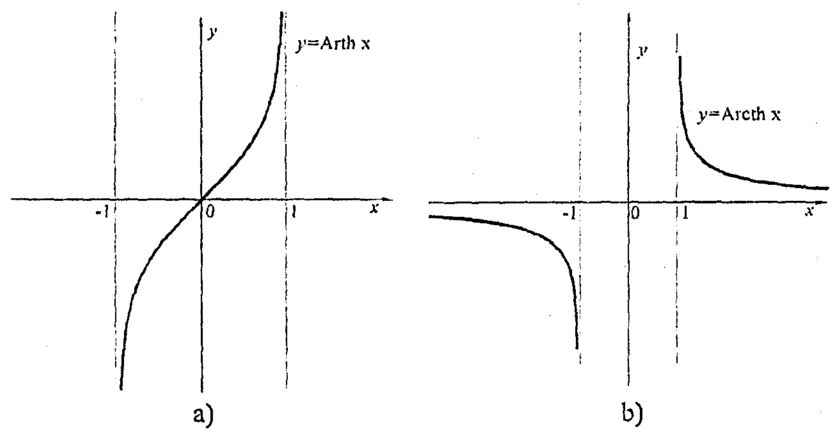
Funkcija $y = \operatorname{ch} x$ nema inverznu funkciju jer nije injektivna, pa uzimamo restrikciju nad $[0, \infty)$, koja ima inverznu funkciju i to **Area kosinus hiperbolični** kojoj je zbog toga domen $[1, \infty)$, a kodomen $[0, \infty)$. Funkcija je monotono rastuća i konkavna. Ima minimum u tački $(1, 0)$.

Često se posmatra i restrikcija funkcije ch nad intervalom $(-\infty, 0]$, čija je inverzna funkcija $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$.



Sl. 4.26

Preslikavanje **Area tangens hiperbolični** je inverzno preslikavanju $y = \operatorname{th} x$, pa je zato oblast definisanosti $(-1, 1)$, oblast vrednosti $\mathbb{R}$. Funkcija Arth je neparna. Funkcija je monotono rastuća. Za $x > 0$ ona je pozitivna i konveksna. Tačka prevoja je $(0, 0)$.



Sl. 4.27

Preslikavanje **Area kotangens hiperbolični** je inverzno preslikavanju $y = \operatorname{cth} x$, pa je zato oblast definisanosti $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, oblast vrednosti $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkcija $y = \operatorname{Arcth} x$ je neparna. Funkcija monotono opada po delovima i to za $x < -1$, kao i za $x > 1$. Za $x > 1$ funkcija je pozitivna i konveksna.

5 Realne funkcije više realnih promenljivih

U praksi se često srećemo sa funkcijama koje ne zavise samo od jedne veličine nego od više njih. Na primer, zapremina pravog valjka V je funkcija poluprečnika osnove r i visine valjka h ($V = r^2\pi h$).

U ovom poglavlju ćemo se baviti upravo ovakvim funkcijama, realnim funkcijama više realnih promenljivih. Kažemo da je funkcija realna jer joj je kodomen podskup skupa $\mathbb{R}$, a da je to funkcija više realnih promenljivih jer joj je argument n-torka $(x_1, ..., x_n)$ iz skupa $\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Isto kao i funkcije jedne promenljive i ove funkcije možemo zadavati: analitički, tabelarno i grafički.

Za funkciju f zadatu izrazom $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ kažemo da je data **analitički.** Skup svih $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ za koje je izraz $f(x_1, \ldots, x_n)$ definisan kao realan broj je **(prirodni) domen** funkcije f.

U ovoj knjizi ćemo se zadržati na slučajevima $n = 2$ i $n = 3$, tj. na funkcijama $z = f(x, y)$ i $u = f(x, y, z)$. Tako je domen funkcije $z = x^2 + y^2$ je ceo skup $\mathbb{R}^2$ ($x^2 + y^2$ je definisano za sve $x, y \in \mathbb{R}$). Funkcija $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ je definisana za $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, tj. za $x^2 + y^2 \leq 1$. Skup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ je unutrašnjost jedinične kružnice zajedno sa samom kružnicom. Domen funkcije $u = \frac{\ln(x-y)}{z^2-4}$ je skup $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > y \text{ i } z \neq \pm 2\}$.

Funkcije možemo zadavati **tabelarno.** To radimo tako što u obliku tablice dajemo vrednosti originala i odgovarajućih slika, za funkcije koje su definisane na konačnom skupu.

Tako, ukoliko je domen funkcije konačan skup $X = \{(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$ i ako je $f_i = f(x_i, y_i)$, za $i = 1, ..., n$, tada se funkcija može zadati sledećom tablicom

(x, y)	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	$\cdots$	(x_n, y_n)
f	f_1	f_2	$\cdots$	f_n

Jedan od načina reprezentacije funkcije od dve promenljive je grafičko predstavljanje. Njega ćemo kasnije posebno obraditi.

Analitički oblici zadavanja realne funkcije više realnih promenljivih su: eksplicitni, implicitni i parametarski.

Ako je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ definisana sa $y = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, reći ćemo da je data u **eksplicitnom obliku.**

Ako postoji realna funkcija $(n+1)-$realne promenljive, $F : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y \to Z$, $X_i, Y, Z \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, tada za funkciju $f : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y$, $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ takvu da je $F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0$, $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, kažemo da je data u **implicitnom obliku.**

Ako jednakost $F(x_1,\ldots,x_n,y)=0$ ima rešenje (npr. jednakost $x^2+y^2+1=0$ nema rešenje), ona ne mora definisati jedinstvenu funkciju, koja je tako implicitno zadata. Na primer jednakost $x+y+z=0$ definiše jedinstvenu funkciju $z=-x-y$ čiji je domen $\mathbb{R}^2$, dok jednakost $x^2+y^2+z^2=1$ (jednačina centralne jedinične sfere) ne definiše jedinstvenu funkciju nad $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$.

Svaka funkcija u eksplicitnom obliku $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ se može napisati i u implicitnom obliku $y-f(x_1,\ldots,x_n)=0$, ali obrnuto ne važi, naime ne možemo uvek iz jednakosti $F(x_1,\ldots,x_n,y)=0$ koja definiše funkciju "izraziti" y.

Neka je data funkcija $f : X\to\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ definisana sa $y=f(x)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in X$. Ako postoje funkcije $\varphi_i : T\to\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$ i $\psi : T\to\mathbb{R}$, $T\subset\mathbb{R}$, takve da je $x_i=\varphi_i(t)$, $i=1,\ldots,n$, $y=\psi(t)$, $t\in T$, reći ćemo da je funkcija data u **parametarskom obliku.** Promenljivu t zovemo **parametrom funkcije.**

Primetimo da funkcije φ_i, $i=1,\ldots,n$, i ψ, ne moraju uvek definisati jedinstvenu funkciju f. Napomenimo da se može uzeti i da je $t=(t_1,\ldots,t_k)\in T\subset\mathbb{R}^k$, $k\in\mathbb{N}$, odnosno da parametara može biti više.

5.1 Koordinatni sistemi u prostoru

Dekartov pravougli koordinatni sistem u prostoru

Kažemo da je (**desni**) **Dekartov pravougli koordinatni sistem u prostoru** određen, ako su:

1°) Date tri prave koje se obično nazivaju x, y i z i svake dve se seku pod pravim uglom u tački O.

2°) Na svakoj od datih pravih izabran je jedan smer (odnosno jedna poluprava) i nazvan pozitivnim.

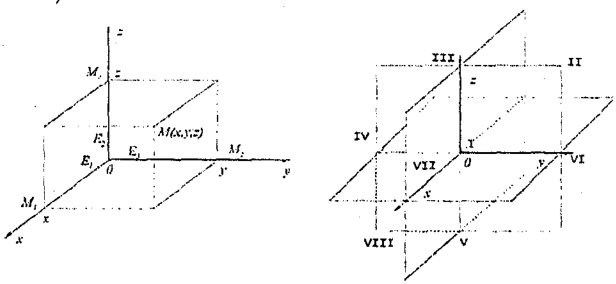
3°) Na pozitivnim smerovima pravih x, y i z izabrane su redom tačke $E_1\neq O$, E_2 i E_3 tako da je $|OE_1|=|OE_2|=|OE_3|$.

4°) Tački O pridružen je broj 0, dok je broj 1 pridružen tačkama E_1, E_2 i E_3.

Prava x se naziva $x-$osa, odnosno **apscisna osa** (kraće **apscisa**). Prava y se naziva $y-$osa, odnosno **ordinatna osa** (kraće **ordinata**). Prava z se naziva $z-$osa, odnosno **aplikatna osa** (kraće **aplikata**). Obično se predstavlja vertikalno sa pozitivnim smerom na gore. Njihov presek, tačku O, zovemo **koordinatni početak.**

Ako je u prostoru dat Dekartov pravougli koordinatni sistem, tada svakoj tački u prostoru jednoznačno odgovara uređena trojka realnih brojeva i obrnuto, svakoj uređenoj trojci realnih brojeva jednoznačno odgovara tačka u prostoru.

Ako je M proizvoljna tačka u prostoru, tada trojku realnih brojeva (x,y,z) koja po teoremi odgovara toj tački, nazivamo **Dekartove koordinate** (kraće koordinate) tačke M. Broj x se naziva **prva koordinata (prva komponenta, apscisa, x–koordinata)**, y **druga koordinata (druga komponenta, ordinata, y–koordinata)**, a z **treća koordinata (treća komponenta, aplikata, z–koordinata)** tačke M.



a) b)

Sl. 5.1

Koordinatni početak ima koordinate $(0,0,0)$. Sve tačke sa x-ose imaju koordinate oblika $(x_0,0,0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, koordinate tačaka sa y-ose su oblika $(0,y_0,0)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, koordinate tačaka sa z-ose su oblika $(0,0,z_0)$, $z_0 \in \mathbb{R}$. Ravan određena sa x-osom i y-osom se zove xy–ravan (Oxy–ravan ili xOy–ravan). Slično se definišu i xz–ravan i yz–ravan. Ove tri ravni se zovu **koordinatne ravni**. Ostatak prostora se sastoji od osam oblasti, koje se zovu **oktanti**.

Obično ako kažemo (Dekartov) koordinatni sistem u prostoru podrazumevamo Dekartov pravougli koordinatni sistem u prostoru. Ako je u prostoru zadat koordinatni sistem kažemo često **koordinatni prostor**.

Grafik funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$ u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu u prostoru, je skup tačaka koordinatnog prostora čije su koordinate $(x, y, f(x,y))$, za $(x,y) \in X$.

Ako znamo grafik funkcije $z = f(x,y)$, lako možemo da dobijemo i grafike još nekih funkcija.

Grafik funkcije $z = f(x,y) + a$ dobijamo pomeranjem (translacijom) grafika funkcije $z = f(x,y)$ duž z-ose za a.

Grafik funkcije $z = f(x+a,y)$ ($z = f(x,y+a)$) dobijamo translacijom grafika funkcije $z = f(x,y)$ duž x-ose (y–ose) za $-a$.

Grafik funkcije $z = -f(x,y)$ simetričan je grafiku funkcije $z = f(x,y)$ u odnosu na xy-ravan.

Grafik funkcije $z = f(-x,y)$ ($z = f(x,-y)$) simetričan je grafiku funkcije $z = f(x,y)$ u odnosu na yz-ravan (xz-ravan).

Neka su sada X i Y tačke u koordinatnoj ravni, redom sa koordinatama (x_1, x_2) i (y_1, y_2). **Rastojanje tačaka X i Y**, odnosno **rastojanje tačaka u $\mathbb{R}^2$** definišemo sa

$$d(X,Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

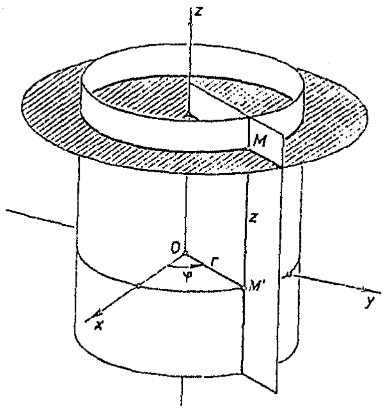
Slično se definiše i funkcija rastojanja tačaka u koordinatnom prostoru. Ako su X i Y tačke prostora sa koordinatama (x_1, x_2, x_3) i (y_1, y_2, y_3), respektivno, tada **rastojanje tačaka X i Y**, odnosno **rastojanje tačaka u $\mathbb{R}^3$** definišemo sa

$$d(X,Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}.$$

Za rastojanje tačaka u koordinatnom prostoru (kao i u ravni) može se pokazati da važe sledeće osobine

$$\begin{array}{ll} d(X,Y) \geq 0, & d(X,Y) = 0 \iff X = Y, \\ d(X,Y) = d(Y,X), & d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y). \end{array}$$

Polarno-cilindrični koordinatni sistem



Sl. 5.2

Neka je u fiksiranoj ravni α zadat polarni koordinatni sistem sa polom O i polarom Ox. Označimo jedan od poluprostora određenih tom ravni sa $\mathcal{P}_1$. Odredimo položaj proizvoljne tačke M iz prostora. Ortogonalna projekcija M' tačke M na ravan α, određena je sa parom brojeva (φ, r), njenim polarnim koordinatama. Neka je d rastojanje tačke M do ravni α. Položaj tačke M određen je pored r i φ i sa brojem z koji je jednak d ako tačka $M \in \mathcal{P}_1 \cup \alpha$, inače je jednak $-d$.

Brojevi φ, r, z koji određuju položaj tačke M u prostoru, nazivaju se **polarno-cilindrične koordinate** tačke M.

Ako izaberemo, koordinatnu ravan xOy za ravan α, nenegativni deo $x-$ose za polaru (videti sliku 6.2), tada je veza između Dekartovih pravouglih i polarno-cilindričnih koordinata data sa

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

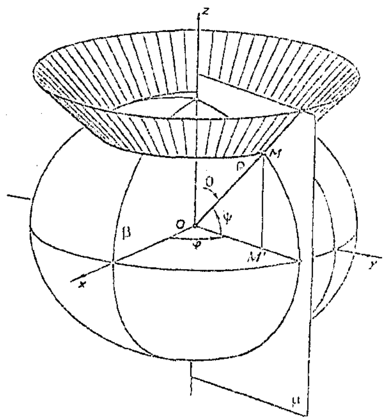
Geometrijsko mesto tačaka prostora za koje je jedna koordinata fiksna, zove se **koordinatna površ**. Za konstantno r koordinatne površi su kružni cilindri sa zajedničkom osom (z-osom), za $\varphi = const$ koordinatne površi su poluravni koje određuje osa Oz, a zaklapaju ugao φ sa nepokretnom poluravni Oxz (koja sadrži nenegativni deo $x-$ose). Ako je $z = const$ koordinatne površi su ravni paralelne sa ravni Oxy.

Geometrijsko mesto tačaka prostora za koje su dve koordinate konstantne, zove se **koordinatna linija**. Na primer, za konstantne r i φ koordinatna linija nastaje presekom dve koordinatne površi: kružnog cilindra sa z-som kao osom i ravni koja prolazi kroz ovu osu, a to je izvodnica (generatrisa) ovog cilindra.

Sferni koordinatni sistem

Posmatrajmo jednu fiksiranu ravan β (**prvi meridijan**) i u njoj polarni koordinatni sistem sa polom O i polarom Oz. Odredimo položaj proizvoljne tačke M iz prostora na sledeći način. Neka je μ ravan (**meridijanska ravan**) koja sadrži tačku M i polaru Oz. Njen položaj u odnosu na ravan β određen je uglom $\varphi \in [0, 2\pi)$. Položaj tačke M u μ određen je sa dužinom $\rho = OM$ i uglom θ koji OM zaklapa sa polarom Oz. Uzimamo da je $\theta \in [0, \pi]$. Jasno je da je $\rho \geq 0$.

Brojevi φ, ρ, θ koji određuju položaj tačke M u prostoru, nazivaju se **sferne koordinate** tačke M.



Sl. 5.3

Izabere li se koordinatna ravan Oxz Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema za ravan β, sa nenegativnim delom $z-$ose kao polarom (videti sliku 6.3), tada je veza između Dekartovih pravouglih i sfernih koordinata data sa

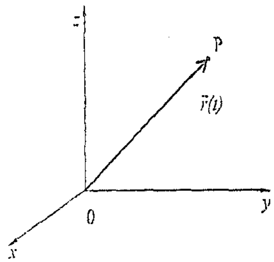
$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta.$$

Često se umesto ugla θ posmatra njegov komplementarni ugao ψ (videti sliku 6.3). Tada se brojevi φ, ρ, ψ nazivaju sfernim koordinatama i njihova veza sa Dekartovim pravouglim koordinatama je data sa

$$x = \rho\cos\psi\cos\varphi, \quad y = \rho\cos\psi\sin\varphi, \quad z = \rho\sin\psi.$$

Za konstantno ρ koordinatne površi su koncentrične sfere sa centrom u O, za $\varphi = const$ to su poluravni određene $z-$osom, a za fiksno θ su kružne (polu)konusne površi sa vrhom u O čije sve izvodnice zaklapaju konstantan ugao θ sa osom Oz.

6 Vektorske funkcije



Sl. 6.1

Sa E označimo skup tačaka trodimenzionalnog prostora. Neka je O fiksna tačka (koordinatni početak). Vektor $\overrightarrow{OP}$, gde je P promenljiva tačka iz E, je vektor položaja tačke P u odnosu na dati koordinatni sistem.

Označimo sa $X_0(E) = \{\overrightarrow{OP} : P \in E\}$. Preslikavanje $f : E \longrightarrow X_0(E)$ dato sa $f(P) = \overrightarrow{OP}$, $P \in E$ je bijekcija. Skup $X_0(E)$ ćemo kraće označavati sa X_0.

Definicija 6.1 *Neka je $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ i neka su $x : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $y : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $z : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tri realne funkcije realne promenljive. Svako preslikavanje $\vec{r} : D \longrightarrow X_0$ definisano sa*

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in D,$$

zovemo **vektorskom funkcijom jedne skalarne promenljive.**

Slično,

Definicija 6.2 *Ako je $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ i ako su $x : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $y : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $z : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tri realne funkcije n realnih promenljivih, tada se preslikavanje $\vec{r} : D \longrightarrow X_0$ zadato sa*

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in D,$$

zove **vektorska funkcija n realnih promenljivih.**

METRIČKI PROSTORI

7 Metrički prostori

7.1 Metrika i metrički prostor

Kao što znamo rastojanje dva realna (kompleksna) broja x i y je realan broj

$$d(x,y) = |y-x|$$

(apsolutna vrednost razlike realnih brojeva x i y ako $x,y \in \mathbb{R}$, odnosno modul razlike kompleksnih brojeva x i y, ako $x,y \in \mathbb{C}$).

Ako je $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ i $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, rastojanje tačaka x i y je realan broj

$$d(x,y) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2},$$

a ako je $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ i $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, rastojanje tačaka x i y je realan broj

$$d(x,y) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2}.$$

Dakle, ako je skup X jedan od skupova $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, rastojanje d je realna funkcija koja je definisana na skupu X^2, odnosno to je preslikavanje $d : X^2 \to \mathbb{R}$ koje zadovoljava sledeće osobine

1) $d(x,y) \geq 0$ (rastojanje je nenegativan realan broj),

2) $d(x,y) = d(y,x)$ (osobina simetrije, tj. rastojanje tačaka x i y je isto kao i rastojanje tačaka y i x),

3) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (rastojanje je jednako nuli ako i samo ako se tačke x i y poklapaju),

4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (**nejednakost trougla**).

(Ako $x,y,z \in \mathbb{R}^2$ ($x,y,z \in \mathbb{R}^3$) ova osobina iskazuje da je jedna stranica u trouglu manja ili jednaka od zbira ostale dve stranice u datom trouglu.)

Ove osobine rastojanja će nam poslužiti da definišemo rastojanje na već datom nepraznom skupu X.

Definicija 7.1 **Metrika** *ili* **rastojanje** *na nepraznom skupu X je svako preslikavanje $d : X^2 \to \mathbb{R}$ za koje važi*

(M_1) $d(x,y) \geq 0$,

(M_2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M_3) $d(x,y) = d(y,x)$,

(M_4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Metrički prostor *je uređen par* (X,d) *skupa* X *i metrike* d *na* X. *Za skup* X *kažemo da je* **nosač metričkog prostora** (X,d).

Realan broj $d(x,y)$ je **rastojanje elemenata** (tačaka) $x, y \in X$.

U slučaju kada nema nesporazuma metrički prostor (X,d) ćemo kraće označavati istim slovom kao i njegov nosač. Tako metričke prostore $(\mathbb{R}, d)$, $(\mathbb{C}, d)$, $(\mathbb{R}^2, d)$ i $(\mathbb{R}^3, d)$ sa napred definisanim metrikama kraće obeležavamo redom sa $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

U metričkom prostoru (X,d) važi i tzv. **nejednakost mnogougla:**

$$d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Primeri:

1. Može se dokazati (videti [3]) da je $(\mathbb{R}^n, d)$ metrički prostor, gde je metrika $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

za $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Za metriku d kažemo da je **euklidska**, a prostor $(\mathbb{R}^n, d)$, koji ćemo kraće obeležavati sa $\mathbb{R}^n$, $n-$**dimenzionalni euklidski prostor**. Metrika d je uopštenje metrika iz $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

2. Ako je $X \neq \emptyset$ proizvoljan skup, tada je preslikavanje $d : X^2 \to \mathbb{R}$ definisano sa

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases},$$

metrika. Za (X,d) kažemo da je **diskretan metrički prostor**.

3. Označimo sa $B(T)$ skup svih ograničenih realnih funkcija $f : T \to \mathbb{R}$ definisanih na skupu T. Metriku $d : B(T) \times B(T) \to \mathbb{R}$ možemo definisati sa

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in T\}.$$

Neka je (X,d) metrički prostor i neka je $\emptyset \neq Y \subset X$. Sa d_Y obeležimo restrikciju preslikavanja d nad skupom Y, tj. neka je $d_Y(x,y) = d(x,y)$, $x, y \in Y$. Očigledno d_Y je metrika na skupu Y, tj. (Y, d_Y) je metrički prostor. Kažemo da je (Y, d_Y) **potprostor prostora** (X,d). Zbog jednostavnosti metriku d_Y najčešće označavamo takođe sa d, pa je reč o potprostoru (Y,d) prostora (X,d).

Definicija 7.2 *Za neprazan skup $A \subset X$ metričkog prostora (X, d) kažemo da je* **ograničen** *ako je skup $\{d(a, b) : a, b \in A\}$ ograničen u skupu $\mathbb{R}$. Prazan skup je ograničen skup.*

Definicija 7.3 *Ako je (X, d) metrički prostor i ako je neprazan skup $A \subset X$ ograničen, tada postoji realan broj $d(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$ koji zovemo* **dijametar skupa** A. *Po definiciji uzimamo da je $d(\emptyset) = 0$.*

Definicija 7.4 *Za preslikavanje $f : D \to X$ skupa D u metrički prostor X kažemo da je* **ograničeno nad skupom** $A \subset D$ *ako je $f(A) \subset X$ ograničen skup u X. Ako je $A = D$, tada je preslikavanje f* **ograničeno**.

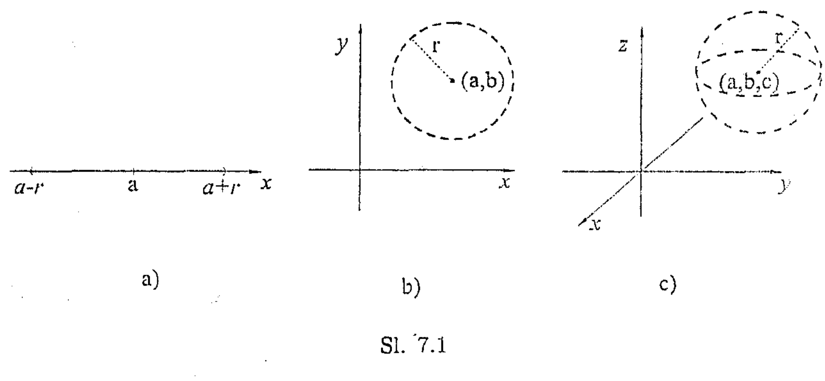
Ograničeno preslikavanje $f : N_1 \to X$ (gde je N_1 proizvoljan beskonačan podskup skupa prirodnih brojeva) je **ograničen niz**.

7.2 Topologija u metričkom prostoru

Definicija 7.5 *Neka je (X, d) metrički prostor, $a \in X$ i $r \in \mathbb{R}^+$. Za skup*

$$L(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

kažemo da je **otvorena lopta** *u metričkom prostoru (X, d) sa centrom u tački a poluprečnika r.*



Sl. 7.1

Kako je $d(a, a) = 0 < r$, jasno je da otvorena lopta $L(a, r)$ sadrži svoj centar. Ako je $r_1 \leq r_2$, očigledno je $L(a, r_1) \subset L(a, r_2)$.

Interval $(a - r, a + r)$ predstavlja u metričkom prostoru $\mathbb{R}$ otvorenu loptu sa centrom u a poluprečnika r. Skup $\{(x, y) : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}$ je u $\mathbb{R}^2$ otvorena lopta sa centrom u (a, b) poluprečnika r, dok u prostoru $\mathbb{R}^3$ skup $\{(x, y, z) : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < r\}$ predstavlja otvorenu loptu sa centrom u (a, b, c) poluprečnika r.

Stav 7.1 *Ako je $L(a,r)$ otvorena lopta u metričkom prostoru (X,d), tada za svaku tačku $b \in L(a,r)$, postoji $s \in \mathbb{R}^+$ tako da je $L(b,s) \subset L(a,r)$.*

Dokaz. Kako je $b \in L(a,r)$, to je $d(a,b) < r$, pa možemo uzeti da je $s = r - d(a,b) > 0$. Odatle sledi da je $d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x) < r$ za svaku tačku $x \in L(b,s)$, što dokazuje da je $L(b,s) \subset L(a,r)$. □

Prethodna osobina daje nam povod da definišemo otvoren skup u metričkom prostoru (X,d) na sledeći način

Definicija 7.6 *Za neprazan skup $U \subset X$ kažemo da je* **otvoren** *u metričkom prostoru (X,d) ako*

$$(\forall x \in U)(\exists r \in \mathbb{R}^+)\ L(x,r) \subset U.$$

Uzimamo da je $\emptyset$ po definiciji otvoren.

Na osnovu stava 7.1 i definicije možemo zaključiti da je otvorena lopta otvoren skup u metričkom prostoru. Za neprazan skup $U \subset X$ koji je otvoren u metričkom prostoru (X,d) za svaku tačku $x \in U$, postoji $r_x \in \mathbb{R}^+$, tako da je $x \in L(x,r_x) \subset U$, pa je $U = \cup\{L(x,r_x) : x \in U\}$, tj. sledi da je neprazan otvoren skup u metričkom prostoru (X,d) unija neke familije otvorenih lopti iz metričkog prostora (X,d).

Familiju τ svih otvorenih skupova metričkog prostora (X,d) zovemo topološka struktura ili **topologija metričkog prostora** (X,d). Za topologiju τ kažemo da je definisana metrikom d. Jasno je da sem $\emptyset \in \tau$ imamo i da $X \in \tau$. Takođe je poznato da unija svake familije elemenata iz τ je ponovo element iz τ, i da je presek od konačno mnogo elemenata iz τ elemenat iz τ.

Definicija 7.7 *Za podskup A metričkog prostora X kažemo da je* **zatvoren** *ako je $C_X(A) = X \setminus A$ otvoren skup.*

Očigledno da su $\emptyset$ i skup X i zatvoreni skupovi.

7.3 Pojam okoline tačke

Definicija 7.8 *Neka je X dati metrički prostor i a tačka u X. Za skup $V \subset X$ kažemo da je* **okolina tačke** *a u metričkom prostoru X, ako postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tako da $L(a,\varepsilon) \subset V$. Ako je V otvoren skup kažemo da je V* **otvorena okolina** *tačke a.*

*Otvorenu loptu $L(a,\varepsilon)$ zovemo $\varepsilon-$***okolina** *tačke a.*

Prema tome, okolina tačke a u prostoru X je neki podskup od X koji sadrži ne samo tačku a već i neku otvorenu loptu sa centrom u tački a.

Očigledno je da je skup X okolina svake svoje tačke u prostoru X.

Neprazan skup $U \subset X$ je otvoren ako i samo ako je U okolina svake svoje tačke.

Za proizvoljnu tačku a u prostoru (X, d) familiju svih okolina tačke a u X nazivamo **sistem okolina tačke** a u prostoru X. Sistem okolina tačke a obeležavaćemo sa $\mathcal{V}(a)$.

Iz same definicije okoline tačke a sledi da je dovoljno posmatrati otvorene lopte $L(a, \varepsilon)$, tj. ε–okoline tačke a. U tom svetlu će se davati neke definicije i tvrđenja.

Teorema 7.1 *Ako je (X, d) metrički prostor, tada za svake dve različite tačke a i b, postoje disjunktne otvorene okoline $L(a, \varepsilon)$ i $L(b, \varepsilon)$, tj. svake dve različite tačke mogu se odvojiti disjunktnim otvorenim okolinama.*

Dokaz. Kako je $a \neq b$, to možemo uzeti da je $\varepsilon = \frac{1}{2}d(a, b) > 0$. Dokažimo da je $L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon) = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon) \neq \emptyset$, odnosno postoji $z \in L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon)$. Tada je $z \in L(a, \varepsilon)$ i $z \in L(b, \varepsilon)$, tj. $d(a, z) < \varepsilon$, $d(b, z) < \varepsilon$, pa je $0 < d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(a, b)$, što je kontradikcija, jer je $d(a, b) > 0$. □

Napomena 7.1 Ako je U okolina tačke a, tada postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da važi $L(a, \frac{1}{n}) \subset U$.

Zaista, ako je U okolina tačke a, tada postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tako da je $a \in L(a, \varepsilon) \subset U$. No kako postoji $n \in \mathbb{N}$, tako da je $\frac{1}{n} < \varepsilon$, to je $L(a, \frac{1}{n}) \subset L(a, \varepsilon) \subset U$.

7.4 Klasifikacija tačaka i skupova u metričkom prostoru

Definicija 7.9 *Neka je A podskup metričkog prostora X. Za tačku $a \in X$ kažemo da je* **unutrašnja tačka** *skupa A, ako postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tako da je $L(a, \varepsilon) \subset A$. Skup A° svih unutrašnjih tačaka zovemo* **unutrašnjost skupa** A.

Može se pokazati da važe (videti [3]) tvrđenja

Skup A° je najveći otvoren skup sadržan u A. (Najveći u smislu da za svaki otvoren skup $G \subset A$ važi da je $G \subset A^\circ \subset A$.)

Skup A je otvoren ako i samo ako je $A^\circ = A$.

Definicija 7.10 *Za tačku $a \in X$ kažemo da je* **spoljašnja tačka** *podskupa A metričkog prostora X ako postoji okolina tačke a koja ne sadrži nijednu tačku skupa A. Skup svih spoljašnjih tačaka zovemo* **spoljašnjost skupa** A.

Očigledno važi da ako je a spoljašnja tačka skupa A, tada je a unutrašnja tačka skupa $X \setminus A$. Dakle, spoljašnjost skupa A je skup $(X \setminus A)^\circ$.

Definicija 7.11 *Tačka $a \in X$ je* **adherentna tačka** *skupa $A \subset X$ ako svaka $\varepsilon-$okolina tačke a ima neprazan presek sa skupom A, tj.*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\ L(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Skup $\overline{A}$ svih adherentnih tačaka zovemo **adherencija** *ili* **zatvorenje skupa** *A.*

Skup $\overline{A}$ je najmanji zatvoren skup koji sadrži skup A. (Najmanji u smislu da za svaki zatvoren skup F koji sadrži skup A važi $A \subset \overline{A} \subset F$.)

Skup A je zatvoren ako i samo ako je $A = \overline{A}$.

Definicija 7.12 *Za tačku $a \in X$ kažemo da je* **tačka nagomilavanja** *skupa $A \subset X$ ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\ L(a,\varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

(svaka $\varepsilon-$okolina tačke a ima neprazan presek sa skupom $A \setminus \{a\}$).

Skup svih tačaka nagomilavanja skupa A obeležavamo sa A'.

Svaka tačka nagomilavanja skupa A je adherentna tačka datog skupa, tj. važi da je $A' \subset \overline{A}$. Svaka tačka skupa ne mora biti tačka nagomilavanja datog skupa, pa odatle sledi da svaka adherentna tačka ne mora da bude i tačka nagomilavanja datog skupa. Na primer, ako je $A = (0,1) \cup \{3,4\}$, tada je $A' = [0,1]$, $\overline{A} = [0,1] \cup \{3,4\}$. Dakle, $3 \in \overline{A}$, ali $3 \notin A'$.

Očigledno važi da je $\overline{A} = A \cup A'$.

Definicija 7.13 *Za tačku $a \in A$ kažemo da je* **izolovana tačka** *skupa $A \subset X$ ako*

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\ L(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$$

(postoji $\varepsilon-$okolina tačke a koja sadrži samo tačku a iz skupa A).

Definicija 7.14 *Za tačku $a \in X$ kažemo da je* **rubna tačka** *skupa $A \subset X$ ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(L(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \land L(a,\varepsilon) \cap C_X(A) \neq \emptyset)$$

(svaka $\varepsilon-$okolina tačke a ima neprazan presek i sa skupom A i sa njegovim komplementom). Skup A^* svih rubnih tačaka skupa A nazivamo **rubom skupa** *A.*

Primer 7.1 Za skup $A = (1,2] \cup \{3\}$ je $A^\circ = (1,2)$, $\overline{A} = [1,2] \cup \{3\}$, $A' = [1,2]$, $A^* = \{1,2,3\}$. Tačka 3 je izolovana tačka skupa A.

Za skup $B = \{1,2,3\}$ je $B^\circ = \emptyset$, $\overline{B} = B = B^*$, $B' = \emptyset$. Sve tačke skupa B su izolovane tačke.

ІИ

KONVERGENCIJA NIZOVA

8 Konvergencija nizova u metričkom prostoru

Definicija 8.1 *Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $\{a_n\} \subset X$ kažemo da ima* **graničnu vrednost** $a \in X$ *i pišemo da je* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in L(a, \varepsilon)),$$

tj.

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon).$$

Prethodna defiuicija za prostore $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ je

Broj $a \in \mathbb{R}$ je granična vrednost realnog niza $\{a_n\}$ u $\mathbb{R}$ ako i samo ako je ispunjen uslov

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon),$$

odnosno počev od n_0 svi članovi niza nalaze se u $\varepsilon-$okolini tačke a, tj. u otvorenom intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Broj $z \in \mathbb{C}$ je granična vrednost kompleksnog niza $\{z_n\}$ u $\mathbb{C}$ ako i samo ako je ispunjen uslov

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon).$$

Ako niz $\{a_n\}$ ima graničnu vrednost a, tada kažemo da niz **konvergira** ili **teži** ka a, odnosno da je niz $\{a_n\}$ **konvergentan**. Za niz koji nije konvergentan kažemo da **divergira**, odnosno da je **divergentan**.

Broj n_0 očigledno zavisi od ε i pokazuje koliko se članova niza $\{a_n\}$ nalazi izvan $\varepsilon-$okoline tačke a. Počev od n_0 svi članovi niza se nalaze u otvorenoj lopti $L(a, \varepsilon)$ dok se van nje nalazi najviše $n_0 - 1$ članova niza. Kažemo i da su u svakoj okolini **skoro svi članovi niza.**

Napomena 8.1 Ponekad se umesto $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ piše $a_n \to a$, $n \to \infty$ ili kraće $a_n \to a$.

Primer 8.1 Za svako $\alpha > 0$ u $\mathbb{R}$ važi

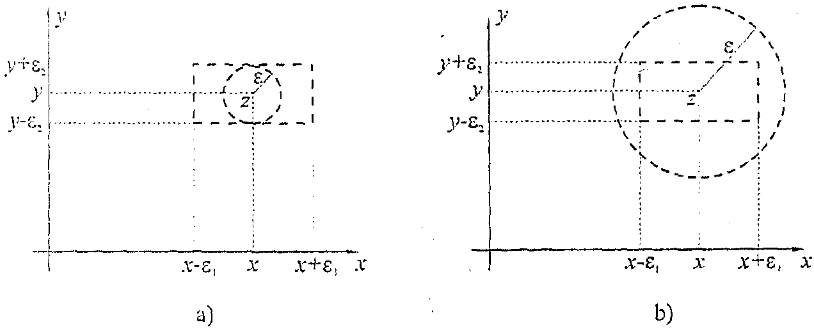
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

To je tačno, jer je

$$|\frac{1}{n^\alpha} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon \Leftrightarrow n > (\frac{1}{\varepsilon})^{1/\alpha},$$

pa za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 = [(\frac{1}{\varepsilon})^{1/\alpha}] + 1$. Tako ako je $\alpha = 1$ i $\varepsilon = \frac{1}{10}$, tada je $n_0 = 11$.

Ako je $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus N_1)\ a_n = a$, gde je $N_1 \subset \mathbb{N}$ konačan skup, onda kažemo da je niz $\{a_n\}$ **stacionaran**. Kako za stacionaran niz $\{a_n\}$ gde je $a_n = a$, za $n \in \mathbb{N} \setminus N_1$ važi $d(a_n, a) = d(a, a) = 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus N_1$ to sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Slično, ako je $\{a_n\}$ **konstantan** niz, tj. $a_n = a$ za svako $n \in \mathbb{N}$, sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.



Sl. 8.1

Ako je $\{z_n\}$, gde je $z_n = x_n + y_n i$ kompleksan niz, granična vrednost niza $\{z_n\}$ može se odrediti preko graničnih vrednosti realnih nizova $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$. Naime, važi

Teorema 8.1 *Kompleksan broj $z = x + yi$ je granična vrednost kompleksnog niza $\{z_n\}$, $z_n = x_n + y_n i$ u $\mathbb{C}$ ako i samo ako je x granična vrednost niza $\{x_n\}$ u $\mathbb{R}$, a y granična vrednost niza $\{y_n\}$ u $\mathbb{R}$, tj.*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z = x + yi \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z = x + yi$. Neka je $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$, ε_1–okolina tačke x i $(y - \varepsilon_2, y + \varepsilon_2)$, ε_2–okolina tačke y. Uzmimo da je $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Tada $z_n \in L(z, \varepsilon)$, za $n \geq n_0$, pa sledi da $|x_n - x| < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ i $|y_n - y| < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ za $n \geq n_0$, odnosno za nizove $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ važi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Pretpostavimo obrnuto, tj. neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, a $L(z, \varepsilon)$ proizvoljna ε okolina tačke z. Upišimo u $L(z, \varepsilon)$ pravougaonik sa stranicama $2\varepsilon_1$ i $2\varepsilon_2$ čije su stranice paralelne koordinatnim osama.

Tada je $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$, ε_1–okolina tačke x i $(y - \varepsilon_2, y + \varepsilon_2)$, ε_2–okolina tačke y, pa iz $x_n \in (x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$, $n \geq n_1$ i $y_n \in (y - \varepsilon_2, y + \varepsilon_2)$, $n \geq n_2$ sledi da $z_n \in L(a, \varepsilon)$ za $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. □

Napomena 8.2 Slično se može dokazati da niz $\{(x_n^1, x_n^2, ..., x_n^m)\} \subset \mathbb{R}^m$ konvergira ka $(a^1, a^2, ..., a^m) \in \mathbb{R}^m$ u $\mathbb{R}^m$ ako i samo ako za svako $i = 1, ..., m$ niz $\{x_n^i\}$ konvergira ka a^i u $\mathbb{R}$, tj.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^1, x_n^2, ..., x_n^m) = (a^1, a^2, ..., a^m) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^i = a^i,\ i = 1, ..., m.$$

Napomena 8.3 Niz $\{a_n\} \subset X$ konvergira ka $a \in X$ u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako niz realnih brojeva $\{d(a_n, a)\}$ konvergira ka nuli u $\mathbb{R}$.

Napomena 8.4 Ako je k fiksan prirodan broj, tada ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, sledi takođe da je $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

Teorema 8.2 *Ako niz $\{a_n\} \subset X$ konvergira u metričkom prostoru (X, d), tada je granična vrednost jednoznačno određena.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dve granične vrednosti a i b. Kako je X metrički prostor, to postoje otvorene lopte $L(a, \varepsilon)$ i $L(b, \varepsilon)$, $\varepsilon = \frac{1}{2}d(a, b)$ koje su disjunktne. Tada postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 tako da važi

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \Rightarrow a_n \in L(a, \varepsilon)), \quad (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_2 \Rightarrow a_n \in L(b, \varepsilon)).$$

Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada sledi da je

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow \boxed{a_n \in L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon);}$$

nemoguće je jer su disjunktne okoline.

što je nemoguće. Dakle, ako niz ima graničnu vrednost, ona je jednoznačno određena. □

Teorema 8.3 *Konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d) je ograničen.*

Dokaz. Iz toga da je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, imamo da važi

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in L(a, 1)).$$

Ako je $n_0 = 1$, tada se svi članovi niza nalaze u otvorenoj lopti $L(a, 1)$ pa je niz ograničen. Za $n_0 > 1$, neka je $d = \max\{1, d(a, a_1), d(a, a_2), ..., d(a, a_{n_0-1})\}$. Tada je $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) \leq 2d$, pa je

$$\sup\{d(a_n, a_m) : a_n, a_m \in \{a_n\}\} \leq 2d.$$

Dakle, niz $\{a_n\}$ je ograničen. □

Definicija 8.2 *Za tačku $a \in X$ kažemo da je* **tačka nagomilavanja niza** $\{a_n\}$ *u metričkom prostoru (X, d) ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n \geq m \wedge a_n \in L(a, \varepsilon)).$$

Dakle, ako je a tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$, tada svaka ε−okolina tačke a sadrži bar jedan član datog niza. Obrnuto nije tačno. Na primer, ako posmatramo realan niz $\{a_n\}$ gde je $a_n = \frac{1}{n}$, tada $L(1, \varepsilon)$ sadrži prvi član niza $a_1 = 1$, ali 1 nije tačka nagomilavanja datog niza u $\mathbb{R}$.

Tačke nagomilavanja niza $\{(-1)^n\}$ u $\mathbb{R}$ su očigledno -1 i 1. Tačka nagomilavanja niza $\{n^{(-1)^n}\}$ u $\mathbb{R}$ je 0. Niz $\{n\}$ nema ni jednu tačku nagomilavanja u $\mathbb{R}$. Dakle, niz može da nema ni jednu, jednu ili više tačaka nagomilavanja, pa i beskonačno mnogo.

Teorema 8.4 *Za svaku okolinu V tačke nagomilavanja a niza $\{a_n\}$, postoji beskonačan skup $M \subset \mathbb{N}$ tako da je $(\forall m \in M)\ a_m \in V$.*

Dokaz. Dokažimo da je skup $M = \{n \in \mathbb{N} : a_m \in V\}$ beskonačan. On je neprazan jer iz same definicije tačke nagomilavanja sledi da postoji prirodan broj n takav da $a_n \in V$.

Pretpostavimo da je M konačan skup. Tada postoji $n_1 = \max\{n : n \in M\}$. Ako uzmemo da je $m = n_1 + 1$, tada postoji $n \geq m > n_1$ tako da $a_n \in V$, pa je $n \in M$ tj. $n \leq n_1$ što je kontradikcija. Dakle, M je beskonačan. □

Iz definicije tačke nagomilavanja niza $\{a_n\}$ sledi da je tačka nagomilavanja niza adherentna tačka skupa $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, ali ne mora da bude tačka nagomilavanja toga skupa. Npr. u slučaju niza čiji je opšti član $a_n = (-1)^n$ tačke 1 i −1 su tačke nagomilavanja niza u $\mathbb{R}$, dok je skup $\{1, -1\}$ konačan i nema tačke nagomilavanja.

Napomena 8.5 Ako niz $\{a_n\} \subset X$ u metričkom prostoru X konvergira ka a, onda je a jedina tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$.

Tačka a je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ ako i samo ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ koji konvergira ka a.

U metričkom prostoru (X, d), skup $A \subset X$ je zatvoren ako i samo ako za svaki niz $\{a_n\}$ elemenata iz A koji konvergira ka a sledi da $a \in A$.

Teorema 8.5 *Neka je (X, d) metrički prostor. Skup svih tačaka nagomilavanja niza $\{a_n\} \subset X$ je zatvoren u (X, d).*

Dokaz. Označimo sa A skup tačaka nagomilavanja niza $\{a_n\}$. Pokažimo da iz $b \in \overline{A}$ sledi da $b \in A$. Neka je V proizvoljna otvorena okolina tačke b. Tada, kako je b adherentna tačka za A, to je $A \cap V \neq \emptyset$, tj. postoji $a \in A \cap V$. Kako je $a \in A$ tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$, a V okolina svake svoje tačke pa i a, to za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji prirodan broj $m \geq n$ takav da je $a_m \in V$. To dokazuje da je b tačka nagomilavanja niza a_n, odnosno da $b \in A$. □

Pretpostavimo da je skup tačaka nagomilavanja A realnog niza $\{a_n\}$ neprazan i ograničen. Kako je skup tačaka nagomilavanja zatvoren, to sledi da skup A

ima najveći i najmanji element, tj. najveću i najmanju tačaka nagomilavanja. Tada

a) najveću tačku nagomilavanja zovemo **limes superior** datog niza i označavamo je sa limsup a_n ili $\overline{\lim}\, a_n$.

b) najmanju tačku nagomilavanja zovemo **limes inferior** datog niza i označavamo je sa liminf a_n ili $\underline{\lim}\, a_n$.

Uslov da je skup tačaka nagomilavanja nekog realnog niza ograničen je potreban, što pokazuje sledeći primer.

Primer 8.2 Funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$f((m,n)) = \binom{m+n-1}{2} + m = \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + m$$

kao što znamo je bijekcija, tj. skupovi $M = \mathbb{N}^2$ i $\mathbb{N}$ su bijektivni.

Uvedimo oznake $N_i = \{(i,n) : n \in \mathbb{N}\}$, $N_i' = f(N_i) \subset \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i \quad \text{i} \quad N_i \cap N_j = \emptyset,\ i \neq j,$$

pa kako je f bijekcija to je

$$\mathbb{N} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i' \quad \text{i} \quad N_i' \cap N_j' = \emptyset,\ i \neq j.$$

Definišimo niz $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tako da je $a_n = i$, $n \in N_i'$. Jasno je da je svaki prirodan broj i tačka nagomilavanja za niz $\{a_n\}$.

9 Konvergencija realnih nizova

U ovoj glavi posmatraćemo samo realne nizove i to u metričkom prostoru $\mathbb{R}$, pa te činjenice nećemo posebno naglašavati.

9.1 Divergencija realnih nizova

Definicija 9.1 *Za niz* $\{a_n\}$ *kažemo da* **teži** ∞ *kada* $n \to \infty$, *tj.* $a_n \to \infty$ *kada* $n \to \infty$ *ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > K).$$

Za niz $\{a_n\}$ *kažemo da* **teži** $-\infty$ *kada* $n \to \infty$, *tj.* $a_n \to -\infty$ *kada* $n \to \infty$ *ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n < K).$$

Ako niz $\{a_n\}$ *teži* $+\infty$ *ili* $-\infty$ *kažemo da je* **divergentan u užem smislu**. *Za niz koji je divergentan, ali ne u užem smislu, kažemo da je* **divergentan u širem smislu**.

Napomena 9.1 Umesto $a_n \to \infty$ odnosno kada $a_n \to -\infty$ kada $n \to \infty$ često ćemo pisati $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Niz $\{(-1)^n\}$ je očigledno divergentan u širem smislu. (Ovaj niz ima dve tačke nagomilavanja.)

Niz $\{n^{(-1)^n}\}$ divergira u širem smislu. (Ovaj niz ima samo jednu tačku nagomilavanja i to realan broj 0.)

Niz $\{(-1)^n n\}$ je divergentan u širem smislu. (Ovaj niz nema ni jednu tačku nagomilavanja.)

Niz $\{\sqrt{n}\}$ teži ka ∞ kada $n \to \infty$, a niz $\{-n^2\}$ teži ka $-\infty$ kada $n \to \infty$.

9.2 Osnovne osobine konvergentnih nizova

1° *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *tada je* a *jedina tačka nagomilavanja niza* $\{a_n\}$.

2° *Konvergentan niz* $\{a_n\}$ *ima jedinstvenu graničnu vrednost.*

3° *Konvergentan niz je ograničen.*

4° *Ako je niz* $\{a_n\}$ *ograničen i ima jednu tačku nagomilavanja, tada je on konvergentan i njegova granična vrednost je tačka nagomilavanja.*

5° *Ako niz* $\{a_n\}$ *konvergira ka broju* a, *tada je i niz* $\{|a_n|\}$ *konvergentan i konvergira ka broju* $|a|$, *tj.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$$

6° *Ako niz* $\{|a_n|\}$ *konvergira ka broju* 0, *tada je i niz* $\{a_n\}$ *konvergentan i konvergira ka broju* 0, *tj.*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

7° *Ako su nizovi* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *takvi da je* $a_n \leq b_n$ *za* $n \geq k$ *i ako je* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, *tada je* $a \leq b$.

8° *Ako su nizovi* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *i* $\{c_n\}$ *takvi da je* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *za* $n \geq k$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, *onda je i* $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

9° Neka je $\{b_n\}$ niz prirodnih brojeva za koji važi da je $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, tada je i $\lim_{n\to\infty} a_{b_n} = a$.

10° Ako niz $\{a_n\}$ konvergira ka a, tada i svaki podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ konvergira ka a.

Dokaz.
1° Videti napomenu 8.5

2° Videti dokaz teoreme 8.2

3° Videti dokaz teoreme 8.3

4° Videti posledicu 9.3

5° Očigledno da kako za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \geq n_0$, važi $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, tj. $|a_n - a| < \varepsilon$, to iz nejednakosti

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$$

sledi $||a_n| - |a|| < \varepsilon$, tj. važi $|a_n| \in (|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon)$, $n \geq n_0$, pa je osobina time i dokazana.

Obrnuto nije tačno. Na primer, niz $\{(-1)^n\}$ je divergentan, a niz $\{|(-1)^n|\}$, tj. $\{1\}$ je konvergentan (konvergira ka broju 1).

6° Očigledno da kako za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da važi $|a_n - 0| = ||a_n| - 0| < \varepsilon$, $n \geq n_0$, to važi tvrđenje. Jasno, da važi i obrnut smer, što je posledica prethodne osobine.

7° Neka je $a > b$ i $\varepsilon = \frac{1}{4}(a-b)$. Tada $a_n \in L(a,\varepsilon)$ za $n \geq n_1$, $b_n \in L(b,\varepsilon)$ za $n \geq n_2$, pa za $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, k\}$ sledi da $b_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < a_n$, što je nemoguće. Dakle, $a \leq b$.

8° Kako je $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ za $n \geq n_1$, $c_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ za $n \geq n_2$, to iz $a-\varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a+\varepsilon$ za $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, k\}$ sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

9° Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, to je

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Iz toga da je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, sledi

$$(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1)\; b_n \geq n_0.$$

Dakle, za svako $n \geq n_1$ važi $|a_{b_n} - a| < \varepsilon$, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} a_{b_n} = a$.

10° Ova osobina je posledica prethodne. □

Napomena 9.2 Poslednje dve osobine važe i u proizvoljnom metričkom prostoru (X, d).

Napomena 9.3 Iz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ i $a_n < b_n$ za $n \geq k$, sledi $a \leq b$, ali ne uvek i $a < b$, što se npr. videti ako se uzme da je $a_n = \frac{n}{n+1}$ i $b_n = 1$. Tada je $a_n < b_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

Primer 9.1 Kako je $\frac{n}{n^3+n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3+n} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3+i} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3+1} = \frac{n}{n^3+1}$, to prema osobini 8° sledi da je $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3+i}) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+1} = 0$, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+2} + \ldots + \frac{1}{n^3+n}\right) = 0.$$

9.3 Računske operacije sa graničnim vrednostima i primeri

Teorema 9.1

a) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *tada je*

1°) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$,

2°) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$,

3°) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$,

4°) *za* $b_n \neq 0$ *i* $b \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$,

5°) *za* $b_n \neq 0$ *i* $b \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

b) *Ako* $a_n \to \infty$ *i* $b_n \to b$ $(b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$, *tada*

1°) $(a_n + b_n) \to \infty$,

2°) $(a_n \cdot b_n) \to \infty$, *za* $b > 0$, *odnosno* $(a_n \cdot b_n) \to -\infty$, *za* $b < 0$.

c) *Ako* $a_n \to -\infty$ *i* $b_n \to b$ $(b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$, *tada*

1°) $(a_n + b_n) \to -\infty$,

2°) $(a_n \cdot b_n) \to -\infty$ *za* $b > 0$, *odnosno* $(a_n \cdot b_n) \to \infty$ *za* $b < 0$.

d) *Neka je* $\{a_n\}$ *niz za koji je* $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Dokaz. a) 1^0) Iz konvergencije nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ sledi da za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoje prirodni brojevi $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tako da je

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_1$$

i

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_2.$$

Birajući $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, imamo da je

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

a) 2^0) Treba dokazati da za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Iz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ sledi

1) Niz $\{a_n\}$ je ograničen, tj. postoji $G > 0$ tako da je $|a_n| < G$;
2) Postoji $n_1 \in \mathbb{N}$, tako da je $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2G}$, za $n \geq n_1$;
3) Za $b \neq 0$, postoji $n_2 \in \mathbb{N}$, tako da je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$, za $n \geq n_2$.

Kako je

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b|,$$

to je

$$|a_n b_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{za } n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}.$$

Ako je $b = 0$, to je $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - 0| = |a_n||b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, za $n \geq n_1$.

Dakle, važi da je niz $\{a_n b_n\}$ konvergentan i da konvergira ka $a \cdot b$.

a) 3°) Ako uzmemo da je $\{a_n\}$ konstantan niz, tj. $a_n = c$, tada je $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, pa na osnovu 2°) sledi tvrđenje.

a) 4°) Kako $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, to za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_1$ važi

$$|b_n - b| < \frac{b^2}{2}\varepsilon.$$

Takođe, postoji $n_2 \in \mathbb{N}$, tako da za sve $n \geq n_2$ važi $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$, odakle sledi

$$|b_n| \geq |b| - |b_n - b| > \frac{|b|}{2}.$$

Sada, birajući $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, imamo da za sve $n \geq n_0$ važi

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{\frac{b^2}{2}\varepsilon}{\frac{|b|}{2}|b|} = \varepsilon.$$

a) 5°) Na osnovu osobine 4°) imamo da je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$, pa iz osobine 2°) sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot \frac{1}{b_n}) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Kako se osobine pod **b)** i **c)** slično dokazuju, dokažimo npr. osobinu **b)** 1°)

b) 1°) Neka je $K > 0$ proizvoljan nenegativan realan broj.

Ako je $\{b_n\}$ konvergentan niz, to je on i ograničen, tj. postoji $M > 0$ tako da za $n \in \mathbb{N}$ važi $|b_n| < M$, odnosno $-M < b_n < M$. Niz $\{a_n\}$ teži ∞, pa za svako $K_1 > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je $a_n > K_1$ za $n \geq n_0$. Ako izaberemo da je $K_1 = K + M > 0$ imamo da je $a_n + b_n > K_1 + (-M) = K$, za $n \geq n_0$, što je i trebalo dokazati.

Ukoliko $b_n \to \infty$ to za svako $K_2 > 0$, pa time i za $K_2 = \frac{K}{2}$, postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_1$ važi $b_n > K_2$. Kako niz $\{a_n\}$ teži ∞, to za svako $K_1 > 0$, pa i za $K_1 = \frac{K}{2}$, postoji $n_2 \in \mathbb{N}$, tako da je $a_n > K_1$ za $n \geq n_1$. Uzimajući da je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ imamo da za sve $n \geq n_0$ važi da je $a_n + b_n > K_1 + K_2 = K > 0$, tj. $(a_n + b_n) \to \infty$.

d) Pretpostavimo da $|a_n| \to \infty$. Tada za svako $K > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \geq n_0$ važi $|a_n| > K$. Jasno da za proizvoljno $\varepsilon > 0$, birajući $K = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ imamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je $|a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$, odnosno $|\frac{1}{a_n}| < \varepsilon$, pa $\frac{1}{a_n} \to 0$.

Obrnuto, iz $\frac{1}{a_n} \to 0$, imamo da za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je $|\frac{1}{a_n}| < \varepsilon$. Sada za proizvoljno $K > 0$, birajući da je $\varepsilon = \frac{1}{K} > 0$ imamo da za $n \geq n_0$ važi $|a_n| > K$, pa $|a_n| \to \infty$. □

9.4 Princip monotonije. Broj e

Teorema 9.2 *Svaki monotono neopadajući (rastući) niz koji je ograničen sa gornje strane konvergira svome supremumu, a svaki monotono nerastući (opadajući) niz ograničen sa donje strane konvergira svome infimumu.*

Dokaz. Pretpostavimo na primer, da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane i monotono neopadajući. Neka je $(M-\varepsilon, M+\varepsilon)$, gde je $M = \sup a_n$, $\varepsilon-$okolina tačke M. Tada postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da $M - \varepsilon < a_{n_1} \le M$.

Zaista, ako ne bi postojao takav prirodan broj n_1, sledilo bi da za sve članove niza važi $a_n \le M - \varepsilon$, pa bi broj $M - \varepsilon < M$ bio gornja granica niza, koja je manja od njegovog supremuma M što je nemoguće.

S obzirom da je $\{a_n\}$ monotono neopadajući niz, važi

$$M - \varepsilon < a_{n_1} \le a_{n_1+1} \le a_{n_1+2} \le \ldots \le M < M + \varepsilon,$$

tj. $a_n \in (M-\varepsilon, M+\varepsilon)$ za $n \ge n_1$, pa je M granična vrednost niza $\{a_n\}$. Slično se dokazuje preostali slučaj. □

Posledica 9.1 *Svaki gotovo monoton i ograničen niz je konvergentan.*

Posmatrajmo nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, gde je $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$.

1) Niz $\{a_n\}$ je monotono rastući , jer

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^n} = (\frac{n(n+2)}{(n+1)^2})^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

i koristeći Bernulijevu nejednakost $(1+h)^n > 1 + nh$, $h > -1$, $h \ne 0$, $n > 1$ dobijamo da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > (1 - \frac{1}{n+1}) \cdot \frac{n+1}{n} = 1,$$

tj. $a_{n+1} > a_n$.

2) Niz $\{b_n\}$ je monotono opadajući, jer iz

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = (\frac{(n+1)^2}{n(n+2)})^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$(1 + \frac{1}{n(n+2)})^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} > (1 + \frac{1}{n(n+2)} \cdot (n+2)) \cdot \frac{n}{n+1} = 1,$$

sledi da je $b_{n+1} < b_n$.

Kako je $a_n < b_n$, to je $a_1 \le a_n \le b_n \le b_1$, tj. nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su ograničeni, pa su zbog njihove monotonosti oba niza konvergentna.

Neka je $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

Č. Ermit

Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) = e$, pa je

$$(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}, \tag{5}$$

jer je e supremum za niz $\{a_n\}$, a infimum za niz $\{b_n\}$. Svi članovi nizova a_n i b_n su racionalni brojevi. Broj e je iracionalan, pa u (5) važi stroga nejednakost.

Napomenimo da je $e \approx 2,718281828...$ transcedentan broj, odnosno nije nula nijednog polinoma sa celobrojnim koeficijentima. Transcedentnost broja e dokazao je Ermit[18] 1873. godine.

Važe osobine

1) *Ako niz $\{a_n\}$, $a_n > 0$ konvergira ka broju $a > 0$, tada je i niz $\{\ln a_n\}$, konvergentan i konvergira ka broju* $\ln a$.

2) *Ako niz $\{a_n\}$ konvergira ka a, tada je i niz $\{e^{a_n}\}$, konvergentan i konvergira ka e^a.*

3) *Ako niz $\{a_n\}$, $a_n \geq 0$ konvergira ka broju a, tada je i niz $\{\sqrt[k]{a_n}\}$, $k \in \mathbb{N}$, konvergentan i konvergira ka broju $\sqrt[k]{a}$.*

4) *Ako je $\{a_n\}$ niz takav da $a_n \to \infty$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e$.*

5) *Ako je $\{a_n\}$ niz takav da $a_n \to -\infty$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e$.*

Dokaz. 1) Neka je ε proizvoljan pozitivan broj. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, to za proizvoljno $\varepsilon_1 > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za $n \geq n_0$ važi $a - \varepsilon_1 < a_n < a + \varepsilon_1$. Izaberimo ε_1, tako da je $\varepsilon_1 < \min\{a, a - ae^{-\varepsilon}, ae^{\varepsilon} - a\}$. Tada sledi da je

$$\ln a - \varepsilon < \ln(a - \varepsilon_1) < \ln a_n < \ln(a + \varepsilon_1) < \ln a + \varepsilon,$$

tj.

$$|\ln a_n - \ln a| < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

2) Neka je ε proizvoljan pozitivan broj. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, to za proizvoljno $\varepsilon_1 > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za $n \geq n_0$ važi $a - \varepsilon_1 < a_n < a + \varepsilon_1$.

Neka je $e^a - \varepsilon > 0$. Izaberimo ε_1, tako da je $\varepsilon_1 < \min\{a - \ln(e^a - \varepsilon), \ln(e^a + \varepsilon) - a\}$. Tada sledi da je

$$e^a - \varepsilon < e^{a-\varepsilon_1} < e^{a_n} < e^{a+\varepsilon_1} < e^a + \varepsilon,$$

[18] Ermit, Č. (Charles Hermite, 1822-1901) francuski matematičar

tj.

$$|e^{a_n} - e^a| < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Ako je $e^a - \varepsilon \leq 0$, tada biramo ε_1, tako da je $\varepsilon_1 < \ln(e^a + \varepsilon) - a$, pa imamo da važi

$$e^a - \varepsilon \leq 0 < e^{a-\varepsilon_1} < e^{a_n} < e^{a+\varepsilon_1} < e^a + \varepsilon,$$

tj.

$$|e^{a_n} - e^a| < \varepsilon, \quad n \geq n_0. \quad \square$$

3) Na osnovu osobine 7° (str. 97), iz $a_n \geq 0$ dobijamo da je $a \geq 0$. Pretpostavimo da je $a > 0$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, to za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za $n \geq n_0$ važi $|a_n - a| < \varepsilon a^{\frac{k-1}{k}}$, pa je

$$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| = |(\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}) \cdot \frac{(\sqrt[k]{a_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{a_n})^{k-2}\sqrt[k]{a} + \ldots + (\sqrt[k]{a})^{k-1}}{(\sqrt[k]{a_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{a_n})^{k-2}\sqrt[k]{a} + \ldots + (\sqrt[k]{a})^{k-1}}|$$

$$= \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[k]{a_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{a_n})^{k-2}\sqrt[k]{a} + \ldots + (\sqrt[k]{a})^{k-1}} \leq \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[k]{a})^{k-1}} < \frac{\varepsilon a^{\frac{k-1}{k}}}{(\sqrt[k]{a})^{k-1}} = \varepsilon.$$

Ako je $a = 0$, tada za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za $n \geq n_0$ važi $|a_n| = a_n < \varepsilon^k$, pa je $|\sqrt[k]{a_n} - 0| < \sqrt[k]{\varepsilon^k} = \varepsilon$.

4) Neka je $n_k = [a_k]$ najveći ceo deo od a_k. Tada niz $\{n_k\}$ teži prema ∞ i koristeći osobinu 9° (str. 97) imamo da važi

$$\lim_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{n_k})^{n_k} = \lim_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{n_k + 1})^{n_k+1} = e.$$

Zbog $n_k \leq a_k < n_k + 1$ dobija se

$$(1 + \frac{1}{n_k + 1})^{n_k} < (1 + \frac{1}{a_k})^{a_k} \leq (1 + \frac{1}{n_k})^{n_k+1},$$

pa tvrđenje sledi na osnovu prethodnog i osobine 8° (str. 97).

5) Za $b_n = -a_n$ je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, pa na osnovu a) izraz

$$(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = (1 - \frac{1}{b_n})^{-b_n} = (1 + \frac{1}{b_n - 1})^{b_n-1} \cdot (1 + \frac{1}{b_n - 1})$$

konvergira prema e. $\square$

Primeri nekih graničnih vrednosti nizova (dokaze videti u Dodatku) su:

Primer 9.2

1) $a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases}$; 4) $\alpha \in \mathbb{R},\ a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

1) Ako je $a = 1$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Ako je $a > 1$, tada je $\sqrt[n]{a} > 1$, tj. $\sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Odatle, a i iz

$$a = (\sqrt[n]{a})^n = (1 + \sqrt[n]{a} - 1)^n =$$

$$1 + \binom{n}{1}(\sqrt[n]{a} - 1) + \binom{n}{2}(\sqrt[n]{a} - 1)^2 + \ldots + (\sqrt[n]{a} - 1)^n,$$

sledi $n(\sqrt[n]{a} - 1) < a$, tj. $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n}$, pa je

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0.$$

Dakle, dobili smo $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0$, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Ukoliko je $a < 1$, tada je $b = \frac{1}{a} > 1$, pa na osnovu prethodno dokazanog sledi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1.$$

2) Iz

$$n = (1 + \sqrt[n]{n} - 1)^n = 1 + \binom{n}{1}(\sqrt[n]{n} - 1) + \binom{n}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \ldots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n,$$

sledi $\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 < n$, tj. za $n > 1$, imamo $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, pa je

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0,$$

odakle se dobija $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3) Za $q = 1$, trivijalno imamo da je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Neka je $0 < q < 1$. Tada uzimajući da je $q = \frac{1}{1+h}$, $h > 0$ imamo da je $q^n = \frac{1}{(1+h)^n}$, pa iz Bernulijeve nejednakosti $(1 + h)^n \geq 1 + nh$, sledi $\frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh}$, tj.

$$0 < q^n \leq \frac{1}{1+nh}.$$

Sada je $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} q^n \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+nh} = 0$, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Ako je $q > 1$, tada je $b = \frac{1}{q} < 1$, pa na osnovu prethodnog razmatranja imamo da je $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

4) Ako je $\alpha < 0$, tada za $\alpha = -\beta$, $\beta > 0$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^\beta} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^n\right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Ako je $\alpha = 0$, tada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{a})^n = 0.$$

Neka je $\alpha > 0$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha < k$, pa je

$$\frac{n^\alpha}{a^n} < \frac{n^k}{a^n} = (\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n})^k.$$

Kako je $a > 1$, to je $\sqrt[k]{a} - 1 > 0$, pa imamo da važi

$$(\sqrt[k]{a})^n = (1 + \sqrt[k]{a} - 1)^n = 1 + \binom{n}{1}(\sqrt[k]{a} - 1) + \binom{n}{2}(\sqrt[k]{a} - 1)^2 + \ldots + (\sqrt[k]{a} - 1)^n,$$

odnosno $(\sqrt[k]{a})^n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[k]{a} - 1)^2$, tj. $\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} < \frac{2}{(n-1)(\sqrt[k]{a}-1)^2}$, odakle je

$$0 < \frac{n^\alpha}{a^n} < (\frac{2}{(\sqrt[k]{a} - 1)^2} \cdot \frac{1}{n-1})^k \Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} \le \frac{2^k}{(\sqrt[k]{a} - 1)^{2k}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-1)^k} = 0,$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

5) Iz osobine 6° (vidi str. 97) sledi da ako pokažemo da tvrđenje važi za $a > 0$ važi i za $a < 0$. Za $a \in [0, 1)$ tvrđenje je trivijalno ispunjeno jer iz 8° (vidi str. 97) imamo $0 < \frac{1}{n!} \le \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$, pa zbog 3) sledi $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} (a^n \cdot \frac{1}{n!}) = 0 \cdot 0 = 0$. Jasno da je za $a = 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

Neka je $a > 1$. Postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $a < k$, odnosno $\frac{a}{k} < 1$, a odatle i s obzirom da je $\frac{a}{k+i} < \frac{a}{k}$, $i \in \mathbb{N}$ imamo

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{k} \cdot \frac{a}{k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{n} < \frac{a^k}{k!} \cdot (\frac{a}{k})^{n-k} = \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{a^n a^{-k}}{k^n k^{-k}},$$

tj.

$$0 < \frac{a^n}{n!} < \frac{k^k}{k!} \cdot (\frac{a}{k})^n,$$

pa sledi $0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \le \frac{k^k}{k!} \lim_{n\to\infty} (\frac{a}{k})^n = 0$, odnosno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Neka je $\{a_n\}$ niz. Tada niz $\{A_n\}$ definisan sa

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

zovemo niz **aritmetičkih sredina** niza $\{a_n\}$.

Ako je $a_n > 0$, tada niz $\{G_n\}$ definisan sa

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

zovemo niz **geometrijskih sredina** niza $\{a_n\}$.

Ako je $\{p_n\}$ niz pozitivnih brojeva takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = \infty$, tada niz $\{F_n\}$ definisan sa

$$F_n = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n},$$

zovemo niz **uopštenih aritmetičkih sredina** niza $\{a_n\}$. Uzimajući da je $p_1 = \ldots = p_n = 1$ niz uopštenih aritmetičkih sredina niza $\{a_n\}$ se svodi na njegov niz aritmetičkih sredina.

Neka je $\{a_n\}$ konvergentan niz takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Tada i njegov niz uopštenih aritmetičkih sredina konvergira i $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = a$.

Neka je $\{a_n\}$ konvergentan niz takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Tada i njegov niz aritmetičkih sredina $\{A_n\}$ konvergira i $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = a$.

Neka je $\{a_n\}$ konvergentan niz takav da je $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Tada i niz geometrijskih sredina $\{G_n\}$ konvergira i $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = a$.

Neka je b_0 proizvoljan realan broj i $\{b_n\}$ niz za koji važi $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - b_{n-1}) = a$. Tada postoji i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n}$ i važi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = a$.

Neka je $\{b_n\}$ niz takav da je $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i b_0 proizvoljan pozitivan realan broj. Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = a$, onda postoji i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$ i važi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = a$.

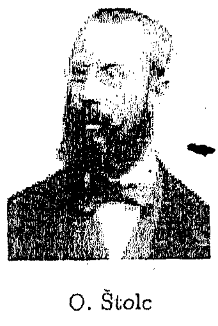
Iz prethodnih osobina (za dokaze videti [3]) sledi teorema Štolca[19]

Teorema 9.3 *Neka je $\{b_n\}$ monotono rastući niz pozitivnih realnih brojeva, takav da $b_n \to \infty$, a $\{a_n\}$ proizvoljan niz realnih brojeva. Ako je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \alpha \in \mathbb{R},$$

onda je i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha.$$



O. Štolc

[19]Štolc, O. (Otto Stolz, 1842-1905) - austrijski matematičar

9.5 Niz umetnutih intervala. Bolcano-Vajerštrasova teorema

Pod **nizom umetnutih intervala** podrazumeva se niz zatvorenih intervala $\{[a_n, b_n]\}$ za koji važi

1) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ (svaki sledeći nalazi se u prethodnom intervalu).

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ (dužina intervala teži ka nuli).

Teorema 9.4 *Neka je dat niz zatvorenih intervala* $\{[a_n, b_n]\}$ *za koji važi* 1).

Tada je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$, *gde je* $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ukoliko je $\{[a_n, b_n]\}$ *niz umetnutih intervala, tj. važi i* 2), *tada postoji jedan i samo jedan broj koji pripada svim intervalima.*

Dokaz. Posmatrajmo nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$. Tada očigledno važi:
- niz $\{a_n\}$ je monotono neopadajući,
- niz $\{b_n\}$ je monotono nerastući,
- $a_1 \le a_n \le b_n \le b_1$, $n \in \mathbb{N}$, odnosno nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su ograničeni.

Dakle, nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su konvergentni, prema principu monotonije, i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Takođe je $a \le b$ (osobina 7°).

Iz $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = b - a = 0$ sledi da je $a = b$. Kako za svako n važi $a_n \le a = b \le b_n$ to je a jedna od zajedničkih tačaka za sve intervale.

Dokažimo da je jedina. Neka postoji još jedna tačka $c \ne a$, za koju važi $(\forall n \in \mathbb{N})\ c \in [a_n, b_n]$. Tada iz $b_n - a_n \ge |c - a| > 0$ sledi da $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) \ge \lim\limits_{n\to\infty} |c - a| = |c - a| > 0$, pa niz $\{[a_n, b_n]\}$ ne bi bio niz umetnutih intervala. Dakle, a je jedina zajednička tačka za sve intervale. □

Ovu osobinu nema skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

Između brojeva $\sqrt{2} - \frac{1}{n}$ i $\sqrt{2} - \frac{1}{n+1}$ uzmimo racionalan broj a_n, a između brojeva $\sqrt{2} + \frac{1}{n}$ i $\sqrt{2} + \frac{1}{n+1}$ racionalan broj b_n. Tako dobijamo niz zatvorenih intervala $\{[a_n, b_n]\}$ pri čemu

1) $a_n \in \mathbb{Q}$, $b_n \in \mathbb{Q}$,
2) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$,
3) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

To bi bio niz umetnutih intervala u skupu $\mathbb{R}$. U skupu $\mathbb{R}$ dati niz ima jednu i samo jednu zajedničku tačku i to $\sqrt{2}$.

Označimo sa $[a,b]_{\mathbb{Q}} = [a,b] \cap \mathbb{Q}$. Za niz $\{[a_n, b_n]_{\mathbb{Q}}\}$ važi

1) $[a_1, b_1]_{\mathbb{Q}} \supset [a_2, b_2]_{\mathbb{Q}} \supset \ldots \supset [a_n, b_n]_{\mathbb{Q}} \supset \ldots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Ne postoji racionalan broj q, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, $q \in [a_n, b_n]_{\mathbb{Q}}$, jer bi tada niz $\{[a_n, b_n]\}$ imao dve zajedničke tačke q i $\sqrt{2}$, što protivureči dokazu prethodne teoreme.

Dokažimo Bolcano[20]-Vajerštrasovu[21] teoremu

Teorema 9.5 *Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.*

Dokaz. Neka je niz $\{a_n\}$ ograničen i $m = \inf a_n \le a_n \le M = \sup a_n$. Ako je $m = M$, tada je $a_n = m$, odnosno niz $\{a_n\}$ je konstantan, pa on ima jedinstvenu tačku nagomilavanja-graničnu vrednost. Pretpostavimo da je $m \ne M$. Podelimo interval $[m, M]$ na dva jednaka dela. U bar jednom delu, označimo taj interval sa $[m_1, M_1]$, ima beskonačno mnogo članova niza i to u smislu da je skup $N_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in [m_1, M_1]\}$ beskonačan.

B. Bolcano

Podelimo $[m_1, M_1]$ na dva jednaka dela. Sa $[m_2, M_2]$ označavamo onaj od podintervala intervala $[m_1, M_1]$ koji sadrži beskonačno mnogo članova niza. Nastavljajući dolazimo do niza $\{[m_n, M_n]\}$ zatvorenih intervala za koji važi:

1) $[m_n, M_n]$ sadrži beskonačno mnogo članova niza,

2) $[m_1, M_1] \supset [m_2, M_2] \supset \ldots \supset [m_n, M_n] \supset \ldots$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (M_n - m_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{M-m}{2^n} = 0$.

K. Vajerštras

Dakle, postoji jedinstvena tačka a koja pripada svim zatvorenim intervalima. Dokažimo da je a tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$ i $m_n \le a \le M_n$, sledi da za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tako da je $m_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ za $n \ge n_1$ i $M_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ za $n \ge n_2$, odnosno

$$[m_n, M_n] \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \text{za} \quad n \ge n_0 = \max\{n_1, n_2\},$$

[20]Bolcano, B. (Bernhard Bolzano, 1781-1848) - češki matematičar i filozof

[21]Vajerštras, K. (Karl Weierstrass, 1815-1897) - nemački matematičar

pa je a tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ jer $[m_n, M_n]$ sadrži beskonačno mnogo članova datog niza. □

Posledica 9.2 *Iz svakog ograničenog niza može se izdvojiti konvergentan podniz.*

Dokaz. Neka je $\{a_n\}$ ograničen niz. Postoji bar jedna tačka nagomilavanja a tog niza. Tada postoji monotono rastući niz prirodnih brojeva $\{n_k\}$ tako da za svako $k \in \mathbb{N}$ imamo da $a_{n_k} \in L(a, \frac{1}{k})$. Podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$, kako je konstruisan konvergira ka tački a. □

Napomena 9.4 Slična osobina važi i za prostor $\mathbb{R}^m$, tj. iz svakog ograničenog niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^m$ može se izdvojiti konvergentan podniz.

Posledica 9.3 *Svaki ograničen niz $\{a_n\}$ koji ima samo jednu tačku nagomilavanja, je konvergentan.*

Dokaz. Neka je $\{a_n\}$ ograničen niz, tj. $m = \inf a_n \le a_n \le M = \sup a_n$ i neka je a jedina tačka nagomilavanja niza a_n. Dokažimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Pretpostavimo suprotno, postoji okolina $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ izvan koje ima beskonačno mnogo članova niza. Ovi članovi niza izvan $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, obrazuju novi niz $\{a_{n_k}\}$ koji je podniz datog niza. Ovaj niz je ograničen, pa ima jednu tačku nagomilavanja b. Očigledno je da je b ujedno i tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ i da $b \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Dakle, niz $\{a_n\}$ ima dve tačke nagomilavanja, što je suprotno pretpostavci. Znači $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. □

Napomena 9.5 Posmatrajmo niz čiji su svi članovi sa parnim indeksom jednaki 1, tj. $a_{2n} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, a oni sa neparnim indeksom zadovoljavaju $a_{2n+1} \in (\sqrt{3} + \frac{1}{n+1}, \sqrt{3} + \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$. Prvi podniz konvergira 1, a drugi $\sqrt{3}$. U $\mathbb{Q}$ niz $\{a_n\}$ racionalnih brojeva ima samo jednu tačku nagomilavanja, ograničen je ali nije konvergentan.

a_n

a_{n_1}

m m_1 M_1 M

m a_n

Za $x \neq y$ važi da je ?

$$|f(x) - f(y)| = \boxed{|\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}| = \frac{|x-y||x+y|}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}}}$$

$$< |x-y|\frac{|x+y|}{|x|+|y|} \leq |x-y|\frac{|x|+|y|}{|x|+|y|} = |x-y|,$$

tj. $|f(x) - f(y)| < |x-y|$, dok preslikavanje nema fiksnu tačku.

Napomena 10.2 Primetimo da je uslov kompletnosti prostora neophodan. Zaista, u tu svrhu posmatrajmo prostor $X = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \setminus \{0\}$ i funkciju $f(x) = x^2$. Pokažimo da je f kontrakcija, da prostor X nije kompletan i da funkcija nema nepokretnu tačku u X.

$$d(f(x), f(y)) = |x^2 - y^2| = |x+y||x-y| \leq \frac{2}{3}|x-y| = \frac{2}{3}d(x,y), \quad x, y \in X.$$

Jasno, da zbog $f(x) = x^2 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$ funkcija f nema u X nepokretnu tačku.

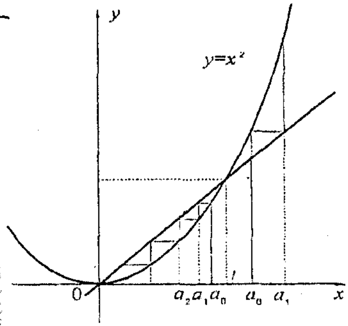
Ako bi (X, d) bio kompletan prostor, na osnovu Banahove teoreme, sledilo bi da funkcija $f : X \to X$ ima nepokretnu tačku, što je kontradikcija.

Formula (6) daje ocenu greške koja se dobija u n-toj aproksimaciji a_n, tražene fiksne tačke a. Iako fiksna tačka do koje dolazimo opisanim **metodom sukcesivnih aproksimacija** ne zavisi od izbora početne aproksimacije a_0, broj koraka potrebnih da se postigne željena tačnost zavisi od a_0, pa se u numeričkoj analizi posebna pažnja poklanja izboru početne aproksimacije.

Pojam fiksne tačke za dato preslikavanje $f : X \to X$ ne zavisi od izbora metrike $d : X^2 \to \mathbb{R}$. Može se stoga dogoditi da neko preslikavanje f nije kontrakcija u metričkom prostoru (X, d), ali da je moguće definisati drugu metriku $d_1 : X^2 \to \mathbb{R}$ na takav način da je (X, d_1) kompletan metrički prostor i da je $f : X \to X$ kontrakcija u metričkom prostoru (X, d_1), odnosno da f ima fiksnu tačku.

Često je potrebno ispitati da li je neki niz $\{a_n\}$ konvergentan, pri čemu je on zadat rekurzivno $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, za neko $a_0 \in \mathbb{R}$. Ukoliko on konvergira, tada za njegovu graničnu vrednost $a \in \mathbb{R}$, važi $a = f(a)$, tj. niz konvergira nepokretnoj tački funkcije f.

Konvergencija takvog niza zavisi od izbora početnog člana niza a_0, što se može videti iz sledećeg primera



Sl. 10.1

GRANIČNA VREDNOST I NEPREKIDNOST FUNKCIJA

11 Granična vrednost funkcije

11.1 Definicija granične vrednosti funkcije. Primeri

Definicija 11.1 *Neka su dati metrički prostori* (X, d_X) *i* (Y, d_Y). *Neka je* $a \in X$ *tačka nagomilavanja za oblast definisanosti* $D \subset X$ *funkcije* $f : D \to Y$. *Za* $A \in Y$ *kažemo da je* **granična vrednost funkcije** f **u tački** a *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ f(L(a, \delta) \cap (D \setminus \{a\})) \subset L(A, \varepsilon),$$

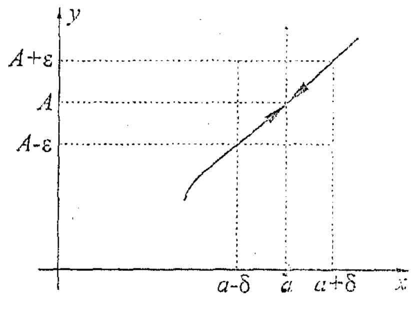
tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{a\})(d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(A, f(x)) < \varepsilon).$$

Pišemo da je $\lim_{x \to a} f(x) = A$, *ili* $f(x) \to A$, $x \to a$.

Dakle, za svaku $\varepsilon-$okolinu tačke A, postoji $\delta-$okolina tačke a koja se sva, izuzev tačke a, preslikava u $\varepsilon-$okolinu tačke A.

Primetimo da u tački a funkcija ne mora da bude definisana, a ako je i definisana, A ne mora da bude $f(a)$, jer u definiciji granične vrednosti isključena je tačka a iz okoline $L(a, \delta)$.



Sl. 11.1

Napomena 11.1 Kod što kod nizova n_0 zavisi od ε, tako i ovde δ zavisi od ε. Kako se ε menja tako se i δ menja.

Napomena 11.2 Kao i kod nizova, kada je reč o realnim funkcijama ili funkcijama jedne ili više realnih promenljivih, uvek ćemo posmatrati metrički prostor $\mathbb{R}$, odnosno $\mathbb{R}^n$ i to posebno nećemo naglašavati.

Za graničnu vrednost realne funkcije jedne realne promenljive, tj. gde je $X = Y = \mathbb{R}$, definiciju $\lim_{x \to a} f(x) = A$ možemo zapisati u obliku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{a\})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Za graničnu vrednost realne funkcije n realnih promenljivih, tj. gde je $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$, definiciju $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ možemo zapisati u obliku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}^n)(d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$

gde je $d(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2}$.

Slično se može dokazati kao i kod granične vrednosti nizova, da ako funkcija $f : D \to Y$ ima graničnu vrednost A u tački a, da je ta granična vrednost jednoznačno određena.

Zaista, ako bi funkcija f imala dve različite granične vrednosti A i B u tački a, to bi za $\varepsilon = \frac{1}{4} d_Y(A, B)$ postojali pozitivni realni brojevi δ_1, δ_2 tako da važi $f((D \setminus \{a\}) \cap L(a, \delta_1)) \subset L(A, \varepsilon)$, odnosno $f((D \setminus \{a\}) \cap L(a, \delta_2)) \subset L(B, \varepsilon)$, odakle bi sledilo da je

$$\begin{aligned} & f((D \setminus \{a\}) \cap L(a, \delta_1) \cap L(a, \delta_2)) \\ \subset\ & f((D \setminus \{a\}) \cap L(a, \delta_1)) \cap f((D \setminus \{a\}) \cap L(a, \delta_2)) \\ \subset\ & L(A, \varepsilon) \cap L(B, \varepsilon) \end{aligned}$$

što je kontradikcija.

Primeri:

1. Ako je $f : D \to Y$ konstantna funkcija, tj. $f(x) = c$, za svako $x \in D$, tada je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3$, jer za proizvoljno $\varepsilon > 0$, birajući $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$, imamo da je $|(2x + 1) - 3| = |2x - 2| = 2|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$.

U ovom primeru imamo da je funkcija definisana u tački a, tj. $f(1) = 3$, i postoji $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ i ta granična vrednost je jednaka baš vrednosti funkcije u toj tački.

3. Za funkciju $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ je $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3$.

Dakle,

- funkcija je definisana u tački 1, tj. $f(1) = 0$;
- postoji $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$;
- granična vrednost nije jednaka vrednosti funkcije u datoj tački.

4. Funkcija $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ nije definisana u tački 0, a ima graničnu vrednost. Zaista, kako za proizvoljno $\varepsilon > 0$, birajući $\delta = \varepsilon$, imamo

$$|x \sin \frac{1}{x} - 0| = |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| = |x - 0| < \varepsilon,$$

važi da je $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

5. Neka je $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Funkcija nije definisana za $x = 0$. Ne postoji ni $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$. Ako bi A bila granična vrednost funkcije f u tački 0, tada

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})(|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

S obzirom da za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ niz $\{a_n\}$, gde je $a_n = \frac{1}{\alpha+2n\pi}$ teži ka nuli i $f(a_n) = \sin\alpha$, to za svaki član niza $\{a_n\}$ iz intervala $(-\delta,\delta)$ i za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ je $|\sin\alpha - A| < \varepsilon$, što je nemoguće. Dakle, ne postoji $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

6. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Tada je funkcija f definisana za $x = 0$, $f(0) = 1$, ali ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

7. Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

nema graničnu vrednost u tački $O(0,0)$. Ako bi postojao $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A$, tada po definiciji granične vrednosti sledi da

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2)(\boxed{0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta} \Rightarrow |\frac{xy}{x^2+y^2} - A| < \varepsilon).$$

Tada za fiksno $k \in \mathbb{R}$, ako je $y = kx$ važi

$$0 < \sqrt{x^2+k^2x^2} < \delta \Rightarrow |\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} - A| < \varepsilon,$$

odakle dobijamo da je $A = \frac{k}{1+k^2}$. Ako je $k = 1$, tada je $A = \frac{1}{2}$, a ako je $k = 2$, tada je $A = \frac{2}{5}$ itd. što je kontradikcija, jer je granična vrednost jednoznačno određena.

Definicija 11.2 *Ako je $a \in \mathbb{R}^n$ tačka nagomilavanja oblasti definisanosti $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ vektorske funkcije $\vec{r} : D \to X_0$, tada za vektor $\vec{c}$ kažemo da je* **granična vrednost vektorske funkcije** $\vec{r}$ **u tački** a *ako*

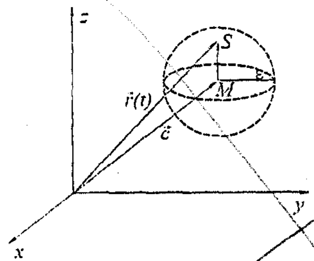
$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\delta \in \mathbb{R}^+)(\forall t \in D\setminus\{a\})(d(a,t) < \delta \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{c}| < \varepsilon).$$

Pišemo da je $\lim\limits_{t\to a}\vec{r}(t) = \vec{c}$.

Iz same definicije granične vrednosti vidimo da je

$$\lim_{t\to a}\vec{r}(t) = \lim_{t\to a} x(t)\vec{i} + \lim_{t\to a} y(t)\vec{j} + \lim_{t\to a} z(t)\vec{k}.$$

N



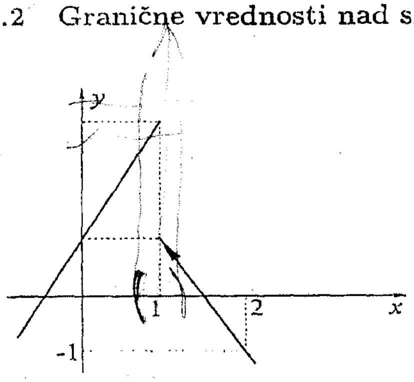
Sl. 11.2

Ako oko vrha M vektora $\vec{c}$ opišemo otvorenu loptu $L(M,\varepsilon)$ poluprečnika ε, to sledi da postoji $\delta \in \mathbb{R}^+$, tako da za svako $t \in L(a,\delta) \setminus \{a\}$, vrh S vektora $\vec{r}(t)$ pripada $L(M,\varepsilon)$, tj. svi vektori $\overline{MS}$ leže u otvorenoj lopti $L(M,\varepsilon)$.

Napomena 11.3 Ako je $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ i ako za svako $t \in D$ sa $\mathcal{R}(t)$ označimo vrh vektora $\vec{r}(t)$, tada važi

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \vec{c} \Leftrightarrow \lim_{t\to a} \mathcal{R}(t) = (c_1, c_2, c_3).$$

11.2 Granične vrednosti nad skupom



Sl. 11.3

8. Za funkciju f datu sa

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 1 \\ -2x+3, & x > 1 \end{cases},$$

vidimo da $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ne postoji. Ovde ima smisla ispitati ponašanje funkcije za $x > 1$ i za $x < 1$, tj. posmatrati funkciju f i sa leve i sa desne strane tačke 1.

Vidimo kada $x \to 1$, pri čemu je $x > 1$, da $f(x) \to 1$, a kada $x \to 1$, pri čemu je $x < 1$, da $f(x) \to 3$.

9. Ako posmatramo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisanu sa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

vidimo da funkcija f nema graničnu vrednost ni u jednoj tački $a \in \mathbb{R}$. Međutim, restrikcija $f_{\mathbb{Q}}$ funkcije f ima graničnu vrednost u svakoj tački $a \in \mathbb{R}$.

Ovi primeri daju nam povod da definišemo graničnu vrednost funkcije f u tački a dok x pripada skupu E, gde je E podskup oblasti definisanosti funkcije f, za koji je a tačka nagomilavanja.

Definicija 11.3 *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) dati metrički prostori i neka je E neprazan podskup oblasti definisanosti D funkcije $f : D \to Y$. Ako restrikcija f_E funkcije f ima graničnu vrednost $A \in Y$ u tački $a \in X$, onda kažemo da funkcija f ima* **graničnu vrednost** A **u tački** a **dok** $x \in E$ *i pišemo da je*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x) = A.$$

Specijalno, ako je $D \subset \mathbb{R} = X$ i $E = (a, \infty) \cap D$ $(E = (-\infty, a) \cap D)$ i ako funkcija f ima graničnu vrednost A u tački a dok $x \in E$, onda kažemo da funkcija f u tački a ima **desnu (levu) graničnu vrednost** A i pišemo da je $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a^+) = A$ $(\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a^-) = A)$. Koriste se i oznake $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a + 0)$ $(\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a - 0))$.

Leva, odnosno desna granična vrednost se jednim imenom zovu **jednostrane granične vrednosti.**

Ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ u tački a ima graničnu vrednost A, tada

- postoji bar jedna jednostrana granična vrednost koja je jednaka broju A, tj. graničnoj vrednosti funkcije f u tački A;

- ako postoje obe jednostrane granične vrednosti, one su jednake graničnoj vrednosti funkcije u tački a, tj.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Ako funkcija f u tački a ima obe jednostrane granične vrednosti, ona će imati graničnu vrednost samo onda ako su jednostrane granične vrednosti jednake, tj. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ postoji ako

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = A$$

i tada je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Kao što smo videli u primeru 8. postoji leva granična vrednost u tački $x = 1$, tj. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1^-) = 3$, kao i desna granična vrednost u tački $x = 1$, tj. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1^+) = 1$, ali one nisu jednake, pa funkcija u tački $x = 1$ nema graničnu vrednost.

10. Ako posmatramo funkciju $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$, vidimo da u tački $x = 0$ funkcija nema desnu graničnu vrednost, jer nije definisana nad intervalom $(0, 1]$.

Međutim ovde je

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

11. Za funkciju $f(x) = \operatorname{arctg}(1+\frac{1}{x})$ je $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ i $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, pa funkcija nema graničnu vrednost u tački 0.

12. Posmatrajmo funkciju $f(x,y)$ iz primera 7. i uzmimo da je $E = \{(x,2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, tada važi

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+4x^2} = \frac{2}{5}.$$

Važi sledeća teorema

Teorema 11.1 *Neka su (X,d_X) i (Y,d_Y) metrički prostori i neka je $a \in X$ tačka nagomilavanja za definicioni skup $D \subset X$ funkcije $f: D \to Y$. Tada važi*

a) Ako funkcija f ima graničnu vrednost $A \in Y$ u tački a i ako je a tačka nagomilavanja za neprazan skup $E \subset D$, tada postoji $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in E}} f(x)$ i važi jednakost $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in E}} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

b) Neka je a tačka nagomilavanja svakog od skupova $E_1,\dots,E_n \subset D$ koji vrše particiju skupa D. Tada ako postoje granične vrednosti $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in E_i}} f(x)$, za svako $i=1,\dots,n$ i pri tome su međusobno jednake, tada postoji $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ i važi jednakost $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in E_i}} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, za $i=1,\dots,n$.

Dokaz. *a)* Kako postoji $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, to je

$$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists\delta\in\mathbb{R}^+)\ f(L(a,\delta)\cap(D\setminus\{a\}))\subset L(A,\varepsilon),$$

tj.

$$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists\delta\in\mathbb{R}^+)\ f(L(a,\delta)\cap(E\setminus\{a\}))\subset f(L(a,\delta)\cap(D\setminus\{a\}))\subset L(A,\varepsilon),$$

pa je $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in E}} f(x) = A$.

b) Neka je $\varepsilon > 0$. Tada, kako je za svako $i = 1, ..., n$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E_i}} f(x) = A$, to postoje δ_i, tako da važi

$$f(L(a, \delta_i) \cap (E_i \setminus \{a\})) \subset L(A, \varepsilon).$$

Ako je $\delta = \min\{\delta_1, ..., \delta_n\}$, tada je $L(a, \delta) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} L(a, \delta_i)$, pa je

$$f(L(a,\delta) \cap (D \setminus \{a\})) = f(L(a,\delta) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i \setminus \{a\}))$$

$$= f(L(a,\delta) \cap \bigcup_{i=1}^{n}(E_i \setminus \{a\})) = f(\bigcup_{i=1}^{n}(L(a,\delta) \cap (E_i \setminus \{a\})))$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} f(L(a,\delta) \cap (E_i \setminus \{a\})) \subset \bigcup_{i=1}^{n} f(L(a,\delta_i) \cap (E_i \setminus \{a\}))$$

$$\subset \bigcup_{i=1}^{n} L(A,\varepsilon) = L(A,\varepsilon),$$

tj. postoji $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, i $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. □

Ako za neko $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uzmemo $E = \{(x, kx) : x \in \mathbb{R}\}$, tada za funkciju f iz primera 7. važi: $\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ x \in E}} f(x,y) = \frac{k}{1+k^2}$.

S obzirom da za svako k ove granične vrednosti nisu jednake, to ne postoji $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$, kao što smo i pre videli.

Definicija 11.4 *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $a \in D$ tačka nagomilavanja za definicioni skup $D \subset X$, realne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$. Tada*

Funkcija $f(x)$ teži ka ∞, tj. $f(x) \to \infty$, kada $x \to a$, ako i samo ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) > K).$$

Funkcija $f(x)$ teži ka $-\infty$, tj. $f(x) \to -\infty$, kada $x \to a$, ako i samo ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) < K).$$

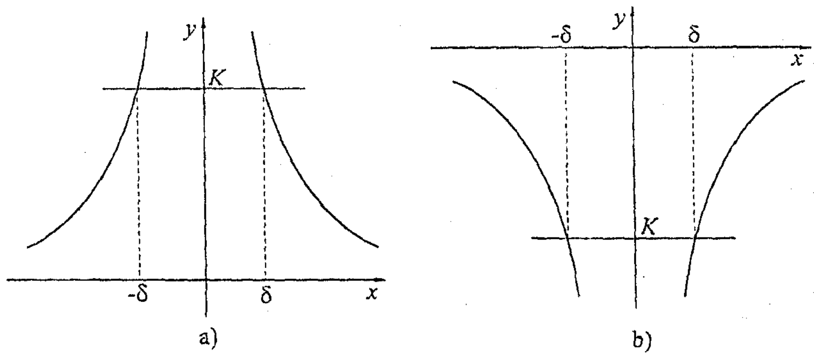
Ponekad se piše da $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, odnosno $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Ako posmatramo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2}$, vidimo da $\frac{1}{x^2} \to \infty$, kada $x \to 0$, jer za svako $K > 0$, postoji $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$, tako da je

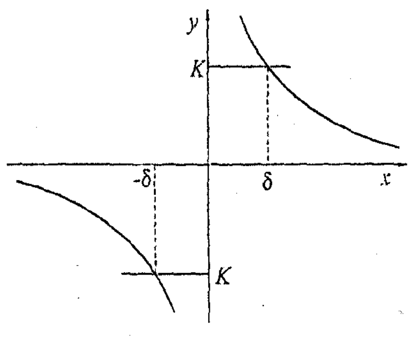
$$\frac{1}{x^2} > K \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{K} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Za funkciju $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, imamo da $f(x) \to -\infty$, kada $x \to 0$, jer za svako $K < 0$, postoji $\delta = \frac{1}{\sqrt{-K}}$, tako da je

$$-\frac{1}{x^2} < K \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > -K \Leftrightarrow x^2 < -\frac{1}{K} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{-K}}.$$



Sl. 11.4



Ako posmatramo funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$, vidimo da $f(x)$ ne teži ni ∞, ni $-\infty$, kada $x \to 0$, tj. ne postoji okolina 0 koja se čitava, izuzevši 0, preslika, iznad (ispod) prave $y = K$, gde je $K > 0$ ($K < 0$), jer sa leve strane tačke $x = 0$ je $f(x) < 0$, a sa desne strane tačke $x = 0$ je $f(x) > 0$. Vidimo da $f(x) \to \infty$, $x \to 0^+$, a $f(x) \to -\infty$, $x \to 0^-$.

Sl. 11.5

Uopšte, ako je $a \in X$ tačka nagomilavanja podskupa E, definicionog skupa $D \subset X$, realne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ i ako restrikcija f_E funkcije f, teži ∞, odnosno $-\infty$, kada $x \to a$, tada kažemo da $f(x) \to \infty$, odnosno $f(x) \to -\infty$, kada $x \to a$, dok $x \in E$.

Specijalno, ako je $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $E = (a, \infty) \cap D \neq \emptyset$, tada $f(x) \to \infty$, kad $x \to a^+$ ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > K),$$

odnosno $f(x) \to -\infty$, kada $x \to a^+$ ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < K).$$

Slično, ako je $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $E = (-\infty, a) \cap D \neq \emptyset$, tada $f(x) \to \infty$, kada $x \to a^-$ ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) > K),$$

odnosno $f(x) \to -\infty$, kada $x \to a^-$ ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) < K).$$

11.3 Ponašanje funkcije $f(x)$ kada $x \to \pm\infty$

Definicija 11.5 *Neka je (Y, d) metrički prostor i neka je $D \subset \mathbb{R}$ definicioni skup funkcije $f : D \to Y$, za koji važi da je $(\forall a \in \mathbb{R})$ $(a, \infty) \cap D \neq \emptyset$. Tada*

1°) *Kažemo da funkcija $f(x)$ ima graničnu vrednost $A \in Y$, kada $x \to \infty$, ako je*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(x) \in L(A, \varepsilon)),$$

odnosno za $Y = \mathbb{R}$, važi

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

i to zapisujemo sa $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

2°) *Ako je $Y = \mathbb{R}$, kažemo da $f(x) \to \infty$, kada $x \to \infty$ ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(x) > K).$$

3°) *Ako je $Y = \mathbb{R}$, kažemo da $f(x) \to -\infty$, kada $x \to \infty$, ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(x) < K).$$

Ponekad se umesto $f(x) \to \infty$, odnosno $f(x) \to -\infty$, kada $x \to \infty$, piše $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, odnosno $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Primer 11.1 Ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$, uzmemo da je $\Delta = \frac{1}{\varepsilon} - 1$, to za $x > 0$, važi

$$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x+1|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x+1| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

pa je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$.

Primer 11.2 Za funkciju $f(x) = (\frac{1}{x}, \frac{x-1}{x^2-1})$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = (0, 0)$.

Definicija 11.6 *Neka je (Y, d) metrički prostor i neka je $D \subset \mathbb{R}$ definicioni skup funkcije $f : D \to Y$, za koji važi $(\forall a \in \mathbb{R})$ $(-\infty, a) \cap D \neq \emptyset$. Tada*

1°) *Kažemo da funkcija $f(x)$ ima graničnu vrednost $A \in Y$ kada $x \to -\infty$, ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow f(x) \in L(A, \varepsilon)),$$

odnosno za $Y = \mathbb{R}$, važi

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$

i to zapisujemo sa $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

2°) *Ako je $Y = \mathbb{R}$, kažemo da $f(x) \to \infty$, kada $x \to -\infty$, ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow f(x) > K).$$

3°) *Ako je $Y = \mathbb{R}$, kažemo da $f(x) \to -\infty$, kada $x \to -\infty$, ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow f(x) < K).$$

Ponekad se umesto $f(x) \to \infty$, odnosno $f(x) \to -\infty$, kada $x \to -\infty$, piše $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, odnosno $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Može se i ovde pokazati da ako postoji granična vrednost, da je ona jednoznačno određena.

Ako posmatramo funkciju $f(x) = \cos x$, vidimo da
1) $f(x)$ ne teži ni ∞, ni $-\infty$, kada $x \to \infty$ jer $-1 \leq f(x) \leq 1$.
2) Ne postoji $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Ako bi postojao $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, tada bi po definiciji granične vrednosti, sledilo da

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R})(x > \Delta \Rightarrow |\cos x - A| < \varepsilon).$$

Ako posmatramo niz $\{a_n\}$ sa opštim članom $a_n = \alpha + 2n\pi$, $\alpha \in \mathbb{R}$ vidimo da $a_n \to \infty$, kada $n \to \infty$, pa u svakom intervalu (a, ∞) su skoro svi članovi datog niza. Kako je $\cos a_n = \cos \alpha$, to bi sledilo da je $A = \cos \alpha$, što je kontradikcija, jer, ako postoji granična vrednost ona je jednoznačno određena.

Ponekad sa $f(x) \to \pm\infty$, kada $x \to a$, označavamo da $f(x) \to \infty$, ili $f(x) \to -\infty$ kada $x \to a$ i često pišemo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Slično, ako $f(x) \to A$, kada $x \to \infty$, ili $x \to -\infty$, često pišemo $f(x) \to A$, $x \to \pm\infty$, odnosno $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = A$.

E. Hajne

11.4 Veza granične vrednosti funkcije i granične vrednosti niza

Važi Hajneova[24] teorema

Teorema 11.2 *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i neka je data funkcija $f : D \to Y$, $D \subset X$. Tada $f(x) \to A \in Y$, $x \to a \in X$ ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$ koji konvergira ka a, sledi da niz $\{f(x_n)\}$, konvergira ka A.*

Dokaz. Pretpostavimo da iz $x \to a$, imamo da $f(x) \to A$. Tada važi:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(A, f(x)) < \varepsilon).$$

Ako niz $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$ teži ka a, tada

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ d_X(a, x_n) < \delta.$$

Tada za sve $n \geq n_0$ važi da je $d_Y(A, f(x_n)) < \varepsilon$, pa sledi da niz $\{f(x_n)\}$ teži ka A.

Dokažimo obrnut stav. Pretpostavimo da $f(x)$ ne teži ka A, kada $x \to a$. Tada

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in D \setminus \{a\})(x_n \in L(a, \frac{1}{n}) \Rightarrow f(x_n) \notin L(A, \varepsilon)).$$

S obzirom da niz $\{x_n\} \in D \setminus \{a\}$, teži ka a to prema pretpostavci sledi da i niz $\{f(x_n)\}$, teži ka A, što je nemoguće po konstrukciji samog niza, jer otvorena lopta $L(A, \varepsilon)$ ne sadrži ni jedan član niza $\{f(x_n)\}$. □

Slično se može dokazati i sledeća teorema

[24] Hajne, E. (Eduard Heine, 1821-1881) - nemački matematičar

Teorema 11.3 *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i neka je data funkcija $f : D \to Y$, $D \subset X$. Tada važi*

a) Ako je $Y = \mathbb{R}$, tada $f(x) \to \pm\infty$, $x \to a$ ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$, koji konvergira ka a, sledi da niz $\{f(x_n)\}$ teži ∞, odnosno $-\infty$, $n \to \infty$.

b) Ako je $X = \mathbb{R}$, tada $f(x) \to A \in Y$, $x \to \pm\infty$ ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\} \subset D$, koji teži ka $\pm\infty$, sledi da niz $\{f(x_n)\}$ konvergira ka A.

c) Ako je $X = Y = \mathbb{R}$, tada $f(x) \to \infty$ $(f(x) \to -\infty)$, $x \to \pm\infty$ ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\} \subset D$ koji teži $\pm\infty$, sledi da niz $\{f(x_n)\}$ teži ∞ $(-\infty)$, $n \to \infty$.

11.5 Računske operacije sa graničnim vrednostima funkcija

Teorema 11.4 *Neka je (X, d_X) metrički prostor i neka je a tačka nagomilavanja za definicioni skup $D \subset X$ funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ i $g : D \to \mathbb{R}$. Tada važi*

a) *Ako je $\lim_{x \to a} f(x) = A$ i $\lim_{x \to a} g(x) = B$, to je*

1°) $\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = A \pm B$,

2°) $\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B$,

3°) $\lim_{x \to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) = c \cdot A$,

4°) *za* $g(x) \neq 0$ *i* $B \neq 0$, $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{1}{B}$,

5°) *za* $g(x) \neq 0$ *i* $B \neq 0$, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}$.

b) *Ako* $f(x) \to \infty$, *kada* $x \to a$ *i* $g(x) \to B$ $(B \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$, *kada* $x \to a$, *tada*

1°) $(f(x) + g(x)) \to \infty$, *kada* $x \to a$,

2°) $(f(x) \cdot g(x)) \to \infty$, *za* $B > 0$, *odnosno* $(f(x) \cdot g(x)) \to -\infty$, *za* $B < 0$.

c) *Ako* $f(x) \to -\infty$, *kada* $x \to a$ *i* $g(x) \to B$ $(B \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$, *kada* $x \to a$, *tada*

1°) $(f(x) + g(x)) \to -\infty$, *kada* $x \to a$,

2°) $(f(x) \cdot g(x)) \to -\infty$, *za* $B > 0$, *odnosno* $(f(x) \cdot g(x)) \to \infty$, *za* $B < 0$.

d) *Ako je* $X = \mathbb{R}$, *tada osobine* a), b) *i* c) *važe i kada* $x \to \infty$, *odnosno* $x \to -\infty$.

Dokaz. Dokaz sledi iz Hajneove teoreme i odgovarajućih osobina nizova. Ovde ćemo ipak, radi ilustracije, dati dokaz da je $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$, ne koristeći Hajneovu teoremu.

S obzirom da je $\lim_{x\to a} f(x) = A$ i $\lim_{x\to a} g(x) = B$, to za proizvoljno $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, postoje $\delta_f, \delta_g \in \mathbb{R}^+$, tako da za sve $x \in D\setminus\{a\}$, važi

$$d_X(a,x) < \delta_f \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$d_X(a,x) < \delta_g \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $\delta_{f+g} = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Tada važi:

$$|(f(x)+g(x)) - (A+B)| \le |f(x)-A| + |g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

za $0 < d_X(a,x) < \delta_{f+g}$, odakle sledi dato tvrđenje. □

Napomena 11.4 U formulaciji teoreme smo pretpostavili da je a tačka nagomilavanja za zajednički definicioni skup D funkcija f i g, jer iz $\lim_{x\to a} f(x) = A$ i $\lim_{x\to a} g(x) = B$, ne sledi uvek da je $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$, što se vidi iz sledećeg primera.

Primer 11.3 Neka su date funkcije f i g sa

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{-x}.$$

Vidi se da je $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$, a $\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))$ ne postoji, jer je 0 izolovana tačka, za definicioni skup funkcije $f+g$.

Napomena 11.5 Tvrđenje teoreme pod a) važi i kada su u pitanju kompleksne funkcije.

Primer 11.4 Neka su date funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \cos^2\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 10, & x = 0 \end{cases}.$$

Njihova granična vrednost u $x = 0$, ne postoji, dok je $\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$.

Teorema 11.5 *Neka je dat metrički prostor (X,d) i neka je a tačka nagomilavanja za definicioni skup $D \subset X$ funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ i $g : D \to \mathbb{R}$. Tada*

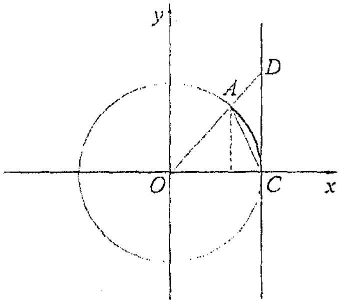
a) *Ako za funkciju $h : D \to \mathbb{R}$, važi $f(x) \le h(x) \le g(x)$ i ako je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A$, to je i $\lim_{x\to a} h(x) = A$.*

b) Slična osobina važi i za slučaj kada je $X = \mathbb{R}$ i kada $x \to \infty$, odnosno $x \to -\infty$.

Dokaz. Sledi iz Hajneove teoreme i slične osobine za nizove. □

Primer 11.5 Na osnovu prethodne teoreme sledi da je

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$



Sl. 11.6

Primer 11.6 Za $x > 0$, sa slike vidimo da je

$$P_{\triangle OCA} < P_{\angle OCA} < P_{\triangle OCD},$$

tj. $\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, odnosno

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

pa je $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Iz parnosti funkcije $\frac{\sin x}{x}$ sledi $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Dakle,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

11.6 Beskonačno male i beskonačno velike veličine

Neka je (X,d) metrički prostor i funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq D \subset X$.

Definicija 11.7 *Za funkciju $f(x)$ kažemo da je* **beskonačno mala veličina** *kada $x \to a$, ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.*

Definicija 11.8 *Za funkciju $f(x)$ kažemo da je* **beskonačno velika veličina** *kada $x \to a$, ako $|f(x)| \to \infty$, kada $x \to a$.*

Očigledno je da je recipročna vrednost beskonačno male veličine, beskonačno velika veličina i obrnuto.

Posmatrajmo dve beskonačno male veličine $f(x)$ i $g(x)$ kada $x \to a$, gde je $g(x) \neq 0$ u nekoj okolini tačke $x = a$.

1) Ako je $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ili što je ekvivalentno sa $|\frac{g(x)}{f(x)}| \to \infty$ kada $x \to a$, onda kažemo da je $f(x)$ **beskonačno mala veličina višeg reda** od $g(x)$ kada $x \to a$, odnosno da je $g(x)$ **beskonačno mala veličina nižeg reda** od $f(x)$,

kada $x \to a$. Kažemo još i da $f(x)$ **brže teži nuli** od $g(x)$ kada $x \to a$, odnosno da $g(x)$ **sporije teži nuli** od $f(x)$, kada $x \to a$.

Na primer, funkcija $f(x) = 1 - \cos x$ brže teži nuli od funkcije $g(x) = x$, kada $x \to 0$, jer je

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = 0.$$

2) Ako je $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$, onda kažemo da su $f(x)$ i $g(x)$ **beskonačno male veličine istog reda** kada $x \to a$.

Specijalno, ako je $C = 1$, tj. ako je $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, onda kažemo da su $f(x)$ i $g(x)$ **ekvivalentne beskonačno male veličine**, kada $x \to a$ i to zapisujemo sa $f(x) \sim g(x)$, kada $x \to a$. Takođe kažemo da se funkcije $f(x)$ i $g(x)$ **isto ponašaju**, kada $x \to a$.

Primer 11.7 Funkcija $f(x) = \sin \alpha x$, $\alpha \neq 0$ i funkcija $g(x) = x$ su beskonačno male veličine istog reda, kada $x \to 0$, jer je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$. Ako je $\alpha = 1$, tada je $\sin x \sim x$, kada $x \to 0$.

3) Ako ne postoji ni $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, ni $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)}$, tada se beskonačno male veličine $f(x)$ i $g(x)$ **ne mogu porediti**, kada $x \to a$, tj. $f(x)$ i $g(x)$ su **neuporedive beskonačno male veličine**, kada $x \to a$.

Na primer, funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = \frac{1}{x(2+\sin x)}$ su neuporedive beskonačno male veličine, kada $x \to \infty$, jer ne postoji ni $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}(2+\sin x)$, ni $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2+\sin x}$.

Posmatrajmo dve beskonačno velike veličine $f(x)$ i $g(x)$, kada $x \to a$, tj. $|f(x)| \to \infty$ i $|g(x)| \to \infty$, kada $x \to a$.

1) Ako je $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, odnosno $|\frac{g(x)}{f(x)}| \to \infty$, kada $x \to a$, gde je $g(x) \neq 0$, tada kažemo da je $g(x)$ **beskonačno velika veličina višeg reda** od $f(x)$, kada $x \to a$, odnosno da je $f(x)$ **beskonačno velika veličina nižeg reda** od $g(x)$, kada $x \to a$.

2) Ako je $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \neq 0$, onda kažemo da su $f(x)$ i $g(x)$ **beskonačno velike veličine istog reda**, kada $x \to a$.

Specijalno, ako je $\alpha = 1$, tj. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, onda kažemo da su $f(x)$ i $g(x)$ **ekvivalentne beskonačno velike veličine**, kada $x \to a$ ili da su $f(x)$ i $g(x)$ **asimptotski jednake**, kada $x \to a$. Tada pišemo da je $f(x) \sim g(x)$, kada $x \to a$.

Na primer, polinomi $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $Q_n(x) = a_n x^n$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, su asimptotski jednaki, kada $x \to \infty$, jer je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = 1$. Kažemo i da se polinom ponaša kao njegov najstariji (vodeći) član kada $x \to \infty$.

3) Ako ne postoji ni $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, ni $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)}$, onda kažemo da se beskonačno velike veličine $f(x)$ i $g(x)$ **ne mogu uporediti**, kada $x \to a$, odnosno da su $f(x)$ i $g(x)$ **neuporedive beskonačno velike veličine**, kada $x \to a$.

Na primer, funkcije $f(x) = x$ i $g(x) = x(2+\sin x)$ su neuporedive beskonačno velike veličine, kada $x \to \infty$, jer ne postoji ni $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2+\sin x}$, ni $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} (2+\sin x)$.

Napomena 11.6 Analogne definicije za beskonačno male i beskonačno velike veličine mogu se dati i kada $x \to a^+$, odnosno kada $x \to a^-$.

Za funkciju f kažemo da je **beskonačno mala (veličina) u odnosu na** funkciju g, kada x teži a i pišemo

$$f = o(g) \quad (x \to a), \tag{7}$$

(čitamo "f je malo o od g kada x teži a") ako postoji otvorena okolina U tačke a takva da je $f(x) = \alpha(x)g(x)$ za sve $x \in U$, gde je α beskonačno mala veličina, kada $x \to a$.

Jasno je da važi

$$\lim_{x\to a} \frac{o(g(x))}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0.$$

Napomena 11.7 Po ovoj definiciji nije neophodno da funkcije f i g budu beskonačno male veličine kada x teži a. Ako je to slučaj, tada je f beskonačno mala veličina višeg reda od g kada x teži a.

Primer 11.8 Važi npr. $x^2 = o(\sin x)$ $(x \to 0)$, $x^3 = o(e^x - 1 - x)$ $(x \to 0)$, itd.

Primetimo da je bitno o kojoj tački a se radi, što pokazuje sledeći primer

Primer 11.9 Neka je $p > q$. Tada je $x^p = o(x^q)$ $(x \to 0)$, tj. x^p je beskonačno mala veličina u odnosu na funkciju x^q kada $x \to 0$. No, važi i $x^q = o(x^p)$ $(x \to +\infty)$, tj. x^p je beskonačno velika veličina u odnosu na funkciju x^q kada $x \to +\infty$

.

Ako postoji otvorena okolina U tačke a i funkcija β koja je ograničena na U, takva da je $f(x) = \beta(x)g(x)$ za sve $x \in U$, i to zapisujemo na sledeći način

$$f = O(g) \quad (x \to a), \tag{8}$$

i čitamo "f je veliko O od g, kada x teži a".

Potreban i dovoljan uslov da je $f = O(g)$ $(x \to a)$ jeste da postoji c, tako da je

$$|O(g(x))| = |f(x)| \leq M|g(x)|$$

tačno za sve x iz neke otvorene okoline U tačke a.

Za funkcije f i g kažemo da se **isto ponašaju** kada x teži a ako je $f = O(g)$ $(x \to a)$ i $g = O(f)$ $(x \to a)$.

Funkcije f i g su istog reda kada $x \to a$ ako i samo ako postoje pozitivne konstante c_1 i c_2 tako da je

$$c_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq c_2|g(x)|, \tag{9}$$

za svako x iz neke otvorene okoline U tačke a.

Napomena 11.8 Za poredjenje beskonačno malih i beskonačno velikih ve;ličina uobičajeno je da se koriste jednostavne funkcije npr oblika $(x-a)^p$, kada $x \to a$.

Važi osobina:

$$f \sim g \ (x \to a) \Leftrightarrow f = g + O(g) \ (x \to a).$$

Neke od osobina funkcija o i O su:

$$f_1 \sim f_2 \Rightarrow o(f_1) = o(f_2),$$

$$o(f) + o(f) = o(f), \ \ o(o(f)) = o(f), \ \ f_1 \cdot o(f_2) = o(f_1 f_2),$$

$$o(cf) = o(f), (c - const.), \ \ o(f + o(f)) = o(f), \ \ o(f) + O(f) = O(f),$$

$$g = o(f) \ \Rightarrow \ g = O(f), \ \ O(f) + O(f) = O(f),$$

kada $x \to a$.

Koristeći osobine funkcija o i O se mogu iskoristiti za nalaženje graničnih vrednosti. Na primer

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p - (1+x)^q}{\ln(1+px) - \ln(1+qx)} = \lim_{x\to 0} \frac{((1+x)^p - 1) - ((1+x)^q - 1)}{\ln(1+px) - \ln(1+qx)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(px + o(x)) - (qx + o(x))}{(px + o(x)) - (qx + o(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{(p-q)x + o(x)}{(p-q)x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(p-q) + \frac{o(x)}{x}}{(p-q) + \frac{o(x)}{x}} = 1.$$

Svi limesi se naravno ne mogu rešiti na ovaj način. Tako limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x + o(x)) - (x + o(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2},$$

ne možemo odrediti jer znamo da je $o(x)$ beskonačno mala veličina reda višeg od x kada x teži 0.

12 Neprekidnost funkcija

12.1 Definicija neprekidnosti funkcije i primeri

Definicija 12.1 *Neka su dati metrički prostori* (X, d_X) , (Y, d_Y) *i funkcija* $f : D \to Y$, $D \subset X$. *Za funkciju* f *kažemo da je* **neprekidna u tački** $a \in D$ *ako*

mora biti definisana u tački a

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in L(f(a), \varepsilon)),$$

odnosno

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon).$$

Ako je $X = Y = \mathbb{R}$, tada neprekidnost funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u tački a možemo zapisati na sledeći način

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Ako je $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$, tada neprekidnost funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u tački $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ možemo zapisati na sledeći način

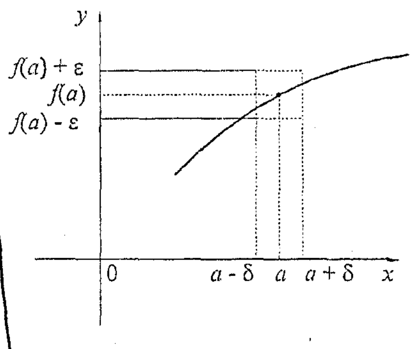
$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon),$$

gde je $d(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$, za $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Zahtevi za neprekidnost u tački a i postojanje granične vrednost u a se razlikuju u sledećim činjenicama:

bitno

- za graničnu vrednost u tački a pretpostavka je da je a tačka nagomilavanja za D, a kod neprekidnosti da $a \in D$, tj. da je funkcija f definisana u tački a;
- kod neprekidnosti se zahteva da funkcija f otvorenu loptu $L(a, \delta(\varepsilon))$ preslika u otvorenu loptu $L(f(a), \varepsilon)$, dok kod granične vrednosti je zahtev da funkcija f otvorenu loptu $L(a, \delta(\varepsilon))$ bez centra a preslika u otvorenu loptu $L(A, \varepsilon)$.

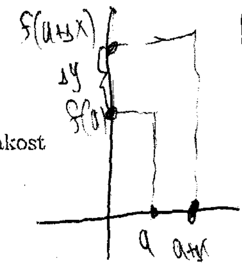


Sl. 12.1

Zaključak je sledeći:

- ako je f neprekidna funkcija u tački a ne mora da postoji $\lim_{x \to a} f(x)$. Zaista, ako je $a \in D$ izolovana tačka za skup D, tada je f automatski neprekidna u tački a, dok u tom slučaju ne postoji $\lim_{x \to a} f(x)$.

- ako postoji $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ bez obzira da li je funkcija f definisana u tački a, funkcija ne mora da bude neprekidna u tački a. Na primer, ako posmatramo funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, i $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 5, & x = 0 \end{cases}$, tada važi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$. Ni funkcija f, ni funkcija g nisu neprekidne u tački 0, jer f nije definisana u tački 0, dok je $g(0) = 5 \neq 1$.



Dakle, da bi funkcija f bila neprekidna u tački a treba da važi:

1. $a \in D$, tj. funkcija f je definisana u tački a;
2. ako je a tačka nagomilavanja za D, tada postoji $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ i važi jednakost
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a);$$
3. ako je $a \in D$ izolovana tačka, tada je f neprekidna u tački a.

Zaključujemo da neprekidnost funkcije $f : D \to Y$ ima smisla ispitivati samo u slučaju kada je $a \in D$ tačka nagomilavanja za definicioni skup D, jer smo videli da ako je $a \in D$ izolovana tačka za definicioni skup D da je funkcija f automatski neprekidna u datoj tački.

Ako je $a \in D \subset \mathbb{R}$ ($a \in D \subset \mathbb{C}$) tačka nagomilavanja za definicioni skup D i ako je $Y = \mathbb{R}$, ($Y = \mathbb{R}$) $x := a + \Delta x \in D$ i $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$, gde su Δx i Δy redom priraštaji nezavisne i zavisne promenljive, tada neprekidnost realne funkcije jedne realne promenljive možemo izraziti na sledeći način:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x = a + \Delta x \in D)(|\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta y| < \varepsilon),$$

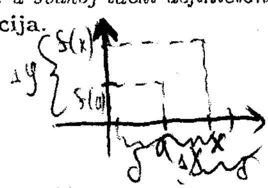
PRIRAŠTAJI NEZAVISNE I ZAVISNE PROMENLJIVE SU MANJI OD δ i ε

odnosno $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ a + \Delta x \in D}} \Delta y = 0$. Dakle, realna (kompleksna) funkcija jedne realne (kompleksne) promenljive je neprekidna u tački a iz domena ako priraštaj funkcije Δy u tački a teži ka nuli kada priraštaj argumenta Δx teži ka nuli.

Ako funkcija f nije neprekidna u tački a, onda kažemo da je funkcija f **prekidna** u tački a, odnosno da funkcija f ima **prekid** u tački a (tačka a je **prekid** date funkcije).

Napomena 12.1 Kako je funkcija u izolovanim tačkama neprekidna, to je realni niz (a i svaki drugi), kao funkcija iz $\mathbb{N}$ u $\mathbb{R}$ neprekidna funkcija.

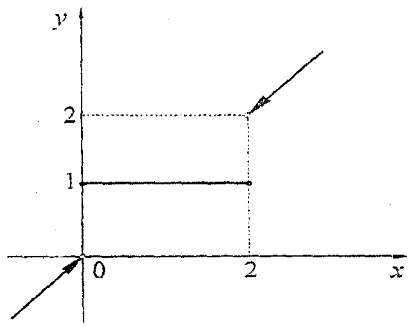
Definicija 12.2 *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i neka je data funkcija $f : D \to Y$, $D \subset X$. Ako je restrikcija f_E funkcije f nad nepraznim skupom $E \subset D$ neprekidna u tački $a \in E$, onda kažemo da je funkcija f* **neprekidna u tački** *a* **dok** *$x \in E$. Ako je f_E neprekidna u svakoj tački skupa E, onda kažemo da je f* **neprekidna nad skupom** *E. Ako je $E = D$, tj. ako je funkcija f neprekidna u svakoj tački definicionog skupa D, onda kažemo da je f* **neprekidna funkcija.**



Primetimo, da ako je funkcija f neprekidna nad skupom E, ona ne mora biti neprekidna u svakoj tački skupa E. Na primer, (videti sl. 12.2) ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$$

vidimo da je ona neprekidna nad zatvorenim intervalom $[0, 2]$, dok su krajnje tačke 0 i 2 prekidi date funkcije.



Sl. 12.2

Ako je $f : D \to Y$, $D \subset \mathbb{R}$ i ako je f neprekidna u tački a dok $x \in E = D \cap [a, \infty)$ ($x \in E = D \cap (-\infty, a]$), tada kažemo da je funkcija f **neprekidna u tački a sa desne (leve) strane.**

Ako postoji $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, tada je funkcija f neprekidna u tački a sa leve strane ako je $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, a ako postoji $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, tada je funkcija f neprekidna u tački a sa desne strane ako je $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Očigledno važi:

1) *Funkcija f jedne realne promenljive je neprekidna u tački a ako i samo ako je neprekidna u tački a i sa leve i sa desne strane.*

2) *Funkcija jedne realne promenljive je neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ ako i samo ako je*
- *neprekidna u svakoj tački otvorenog intervala (a, b);*
- *u tački a je neprekidna sa desne strane;*
- *u tački b je neprekidna sa leve strane.*

Teorema 12.1 *Ako su realne (kompleksne) funkcije f i g neprekidne u tački a, tada su u tački a neprekidne i sledeće funkcije:*

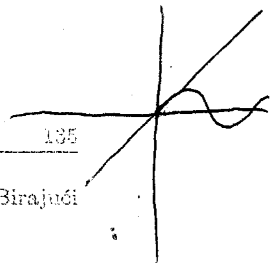
1) $h = f + g$, 2) $h = f \cdot g$,

3) $h = \frac{f}{g}$, *pod uslovom da je $g \neq 0$ u nekoj okolini tačke a.*

Dokaz. Ako je a izolovana tačka za definicioni skup funkcije h, tada je h neprekidna u tački a. Ako je a tačka nagomilavanja za definicioni skup funkcije h, tada dokaz sledi iz osobina granične vrednosti funkcije h u tački a. □

Primeri

1. Konstantna funkcija $f(x) = c$ je neprekidna funkcija, jer je $\Delta y = c - c = 0$, pa je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.



2. Funkcija $f(x) = \sin x$ je neprekidna za svako $x \in (-\infty, \infty)$. Birajući $\delta = \varepsilon$, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, imamo

$$|\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\right| \le 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right| = |\Delta x| < \varepsilon.$$

tj. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

3. Stepena funkcija $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ je neprekidna za svako $x \in (-\infty, \infty)$, jer iz $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = \Delta x(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots(\Delta x)^{n-1})$, sledi da je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

S obzirom da je konstanta neprekidna funkcija, to je svaki polinom $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ neprekidan za svako $x \in (-\infty, \infty)$.

Ako posmatramo racionalnu funkciju $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, sledi da je racionalna funkcija neprekidna u svakoj tački x_0 za koju je $Q_m(x_0) \neq 0$. Tako je npr. funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ neprekidna za svako $x \neq 0$.

4. Za funkciju $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \le 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$, je $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-}(x-1) = 1 = f(2^-) = f(2) \neq 4 = \lim\limits_{x \to 2^+} 2x = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$. Dakle, ne postoji u tački $x = 2$ granična vrednost, pa je funkcija u tački 2 prekidna. Za sve ostale vrednosti od x funkcija je neprekidna. Primetimo da je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački 2 sa leve strane.

5. Za funkciju $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ imamo da važi $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(2x - 3) = -1 \neq 0 = f(1)$, pa je funkcija f u tački 1 prekidna. Za sve ostale vrednosti od x funkcija je neprekidna.

6. Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ nije neprekidna u tački $(0, 0)$, jer ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

7. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data sa $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ima prekid za svaki realan broj. Ona je neprekidna nad $\mathbb{Q}$, kao i nad $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

8. Sabiranje realnih (kompleksnih) brojeva je neprekidna funkcija.

Zaista, zbog:

$$|(x + y) - (a + b)| \le |x - a| + |y - b| \le 2\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

iz $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ sledi neprekidnost sabiranja realnih brojeva.

9. Množenje realnih (kompleksnih) brojeva je neprekidna funkcija.

Kako je:

$$|xy-ab| = |(x-a)(y-b)+a(y-b)+b(x-a)| \le |x-a||y-b|+|a||y-b|+|b||x-a|$$

i

$$|x-a| \le \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}, \quad |y-b| \le \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

to iz $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$, gde je $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}\}$, sledi da je

$$|xy-ab| < \delta^2 + \delta|a| + \delta|b| \le \delta(1+|a|+|b|) \le \frac{\varepsilon\cdot(1+|a|+|b|)}{1+|a|+|b|} = \varepsilon,$$

odakle zaključujemo da je množenje realnih brojeva neprekidna funkcija.

Iz Hajneove teoreme sledi

Teorema 12.2 *Funkcija $f : D \to Y$ je neprekidna u tački $a \in D$ ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\} \subset D$ koji konvergira ka a sledi na niz $\{f(x_n)\} \subset Y$ konvergira ka $f(a)$.*

12.2 Vrste tačaka prekida realnih funkcija jedne realne promenljive

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i a tačka nagomilavanja za definicioni skup $D \subset X$ funkcije $f : D \to Y$. Pretpostavimo da u tački a funkcija ima prekid.

1°) Ako postoji $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, onda kažemo da funkcija f u tački a ima **prividan** ili **otklonljiv prekid**, odnosno da je a prividan (otklonljiv) prekid.

a) Funkcija $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ima u tački 0 prividan prekid (funkcija u tački 0 nije definisana), jer je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Ako posmatramo funkciju $F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, vidimo da je ona neprekidna u tački 0, jer smo je u tački 0, definisali baš sa $F(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

b) Funkcija $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \ne 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$, ima otklonljiv prekid u tački 0, jer je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(2x+1) = 1 \ne f(0) = -1$. Međutim, funkcija $F(x) = 2x+1$ je neprekidna u tački 0.

c) Funkcija $f(x) = e^{-\sqrt{\frac{x}{x+1}}}$ ima prividan prekid u tački -1 (funkcija nije u datoj tački definisana), jer je $\lim\limits_{x\to -1} e^{-\sqrt{\frac{x}{x+1}}} = 0$. Primetimo da u ovom primeru ne postoji desna granična vrednost date funkcije u tački -1, jer funkcija nije definisana za $x \in [-1, 0)$, pa se granična vrednost poklapa sa levom graničnom vrednošću u datoj tački. Funkcija $F(x) = \begin{cases} e^{-\sqrt{\frac{x}{x+1}}}, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0) \\ 0, & x = -1 \end{cases}$, dobijena iz funkcije f je neprekidna u tački -1.

2°) Za $X = \mathbb{R}$, ako postoje leva i desna granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački a, tj. ako postoji $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a^-)$ i $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a^+)$, pri čemu je $f(a^-) \neq f(a^+)$, onda kažemo da funkcija u tački a ima **skok**, odnosno da je a skok date funkcije.

a) Kako je za funkciju $f(x) = \operatorname{arctg}(1 + \frac{1}{x})$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, to data funkcija ima skok u tački 0.

b) Za funkciju $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ 3x - 1, & x > 1 \end{cases}$, je $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3 = f(1)$ i $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$, pa funkcija f u tački 1 ima skok.

I) Ako u tački a funkcija f ima prividan prekid ili skok, onda kažemo da data funkcija f u tački a ima **prekid prve vrste.**

II) Ako je tačka a prekid funkcije koji nije prve vrste, onda kažemo da u tački a funkcija f ima **prekid druge vrste.**

Ako je (Y, d_Y) metrički prostor, tada za funkciju $f : I \to Y$ koja ima konačan broj prekida prve vrste nad intervalom $I \subset \mathbb{R}$, kažemo da je f **neprekidna po delovima** nad intervalom I.

12.3 Neprekidnost i granična vrednost složene funkcije

Teorema 12.3 *Neka su dati metrički prostori* (X, d_X), (Y, d_Y) *i* (Z, d_Z) *kao i funkcije* $g : D \to Y$, $D \subset X$ *i* $f : Y \to Z$.

Ako je g *neprekidna funkcija u tački* a, f *neprekidna funkcija u tački* $g(a)$, *tada je složena funkcija* $h = f \circ g$ *neprekidna funkcija u tački* a.

Dokaz. S obzirom da je f neprekidna funkcija u tački $g(a)$ i g neprekidna funkcija u tački a to važi

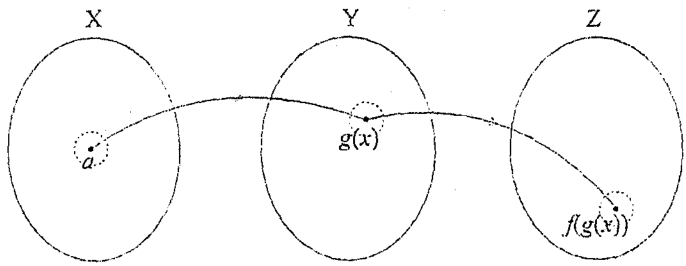
$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall u \in Y)(u \in L(g(a), \delta) \Rightarrow f(u) \in L(f(g(a)), \varepsilon)),$$

$$(\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta_1) \Rightarrow g(x) \in L(g(a), \varepsilon_1)).$$

Tada birajući da je $\varepsilon_1 = \delta$, imamo

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta_1) \Rightarrow f(g(x)) \in L(f(g(a)), \varepsilon)),$$

odakle sledi da je složena funkcija $h = f \circ g$ neprekidna u tački a. □



Sl. 12.3

Posledica 12.1 *Neka su dati metrički prostori* (X, d_X), (Y, d_Y) *i* (Z, d_Z) *kao i funkcije* $g : D \to Y$, $D \subset X$ *i* $f : Y \to Z$.

Ako su funkcije g *i* f *neprekidne, tada je i složena funkcija* $h = f \circ g$ *neprekidna.*

Teorema 12.4 *Neka su dati metrički prostori* (X, d_X), (Y, d_Y) *i* (Z, d_Z) *kao i funkcije* $g : D \to Y$, $D \subset X$ *i* $f : Y \to Z$.

Ako je $\lim_{x \to a} g(x) = \alpha \in Y$ *i* f *neprekidna funkcija u tački* α, *tada je*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(\alpha).$$

Dokaz. Funkcija f je neprekidna u tački α, pa je

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall u \in Y)(u \in L(\alpha, \delta) \Rightarrow f(u) \in L(f(\alpha), \varepsilon)).$$

Kako je $\lim_{x \to a} g(x) = \alpha$, to je

$$(\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a, \delta_1) \Rightarrow g(x) \in L(\alpha, \varepsilon_1)),$$

a odatle uzimajući $\varepsilon_1 = \delta$ sledi da je

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a, \delta_1) \Rightarrow f(g(x)) \in L(f(\alpha), \varepsilon)),$$

tj. $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\alpha)$.

Ako je $\lim_{x \to \infty} g(x) = \alpha$ i $X = \mathbb{R}$, tada važi

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow g(x) \in L(\alpha, \delta)).$$

pa sledi da

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(g(x)) \in L(f(\alpha), \varepsilon)),$$

tj. $\lim_{x \to \infty} f(g(x)) = f(\alpha)$.

Slično, kao i prethodnom slučaju se dokazuje da iz $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \alpha$ i $X = \mathbb{R}$, sledi da je $\lim_{x\to-\infty} f(g(x)) = f(\alpha)$. $\Box$

Pretpostavka da je $f : Y \to Z$ je bitna, jer ako to nije tačno teorema ne mora da važi što se vidi iz sledećeg primera

Primer 12.1 Posmatrajmo funkcije $f(x) = \sqrt{x}$, i $g(x) = -x^2$. Iz neprekidnosti u 0 funkcije $f(x)$ i iz toga da je $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ imamo da je $f(\lim_{x\to 0} g(x)) = f(0) = 0$. Kako je $f(g(x)) = \sqrt{-x^2}$, to je funkcija $f(g(x))$ definisana samo za $x = 0$, pa $\lim_{x\to 0} f(g(x))$ ne postoji.

Primer 12.2 Neka je $u = g(x) = (1+\frac{1}{x})^x$, $y = f(u) = \ln u$. Kako je $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ i f neprekidna funkcija za $u = e$, to je

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = \lim_{x\to\infty} \ln(1+\frac{1}{x})^x = \ln \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = 1,$$

tj. važi

$$\lim_{x\to\infty} \ln(1+\frac{1}{x})^x = 1.$$

Teorema 12.5 *Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) i (Z, d_Z) kao i funkcije $g : D \to Y$, $D \subset X$ i $f : Y \to Z$. Pretpostavimo da*

1) $g(x) \to \alpha \in Y$, *kada* $x \to a$;

2) $f(u) \to \beta$, *kada* $u \to \alpha$;

3) a) *Ako $a \in X$, (za slučaj $X = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, tj. x ne teži $\pm\infty$), onda* $(\exists\delta^* \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in (D \setminus \{a\}) \cap L(a, \delta^*))\ g(x) \neq \alpha$;

   b) *Ako je $X = \mathbb{R}$ i $g(x) \to \alpha$, kada $x \to \infty$, onda* $(\exists\delta^* \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \cap (\delta^*, \infty))\ g(x) \neq \alpha$;

   c) *Ako je $X = \mathbb{R}$ i $g(x) \to \alpha$, kada $x \to -\infty$, onda* $(\exists\delta^* \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D \cap (-\infty, \delta^*))\ g(x) \neq \alpha$.

Tada $f(g(x)) \to \beta$, kada $x \to a$.

Dokaz. Dokaz ćemo dati za opšti slučaj. Ostali slučajevi se slično dokazuju. Kako $f(u) \to \beta$, kada $u \to \alpha$ i $g(x) \to \alpha$ kada $x \to a$, to za proizvoljno $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ važi

$$(\exists\delta_1 \in \mathbb{R}^+)(\forall u \in Y \setminus \{\alpha\})(u \in L(\alpha, \delta_1) \Rightarrow f(u) \in L(\beta, \varepsilon))$$

i

$$(\exists\delta_2 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a, \delta_2) \Rightarrow g(x) \in L(\alpha, \delta_1)).$$

Sada je

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \min\{\delta^*, \delta_2\} > 0)(\forall x \in D\setminus\{a\})(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(g(x)) \in L(\beta, \varepsilon)),$$

pa je $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = \beta$. □

Slično se može dokazati i sledeća teorema

Teorema 12.6 *Neka su dati metrički prostori* (X, d_X) *i* (Z, d_Z) *kao i funkcije* $g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ *i* $f : \mathbb{R} \to Z$. *Pretpostavimo da*

1) $g(x) \to \pm\infty$, *kada* $x \to a$,

2) $f(u) \to \beta$, *kada* $u \to \pm\infty$.

Tada $f(g(x)) \to \beta$, *kada* $x \to a$.

Primer 12.3 Neka je $u = g(x) = \frac{1}{x}$, $y = f(u) = (1 + \frac{1}{u})^u$. Kako $g(x) \to \infty$, kada $x \to 0^+$ i $f(u) \to e$, kada $u \to \infty$, to je

$$\lim_{x \to 0^+} f(g(x)) = \lim_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

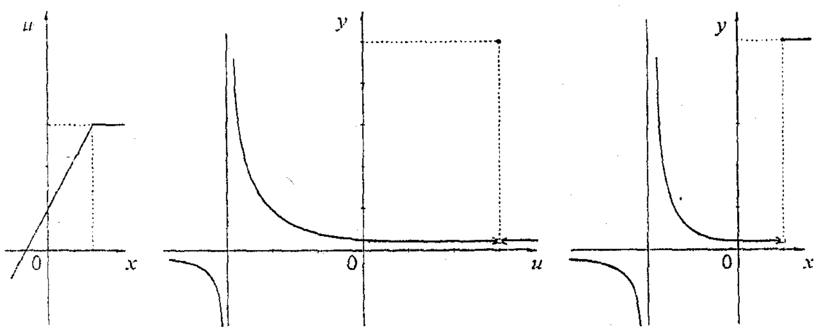
Kako $g(x) \to -\infty$, kada $x \to 0^-$ i $f(u) \to e$, kada $u \to -\infty$, to je

$$\lim_{x \to 0^-} f(g(x)) = \lim_{x \to 0^-} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0^-} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

pa je

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Primer 12.4 Za $u = g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \le 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$ i $y = f(u) = \begin{cases} \frac{1}{u+3}, & u \ne 3 \\ 5, & u = 3 \end{cases}$ imamo da je $f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2x+4}, & x < 1 \\ 5, & x \ge 1 \end{cases}$.



Sl. 12.4

1°) Iz neprekidnosti funkcije g u tački 2 je $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 3$, $(\alpha = 3)$ i $\lim\limits_{u\to 3} f(u) = \frac{1}{6}$, $(\beta = \frac{1}{6})$, ne sledi da je $\lim\limits_{x\to 2} f(g(x)) = \frac{1}{6}$, jer je $\lim\limits_{x\to 2} f(g(x)) = \lim\limits_{x\to 2} f(3) = 5$. Uslov 3) prethodne teoreme nije ispunjen, jer ne postoji okolina tačke 2 tako da je za svako x iz te okoline $g(x) \neq 3$.

2°) $\lim\limits_{x\to 1} f(g(x))$ ne postoji iako je $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 3$, i $\lim\limits_{u\to 3} f(u) = \frac{1}{6}$.

Primer 12.5 Neka su nizovi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ dati sa

$$a_n = \sin \pi\sqrt{n^2+1}, \quad b_n = \sin\pi\sqrt{n^2+n}, \quad c_n = \sin^2 \pi\sqrt{n^2+n}.$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} |\sin\pi\sqrt{n^2+1}| = \lim_{n\to\infty} |\sin\pi(\sqrt{n^2+1} - n + n)| =$$

$$\lim_{n\to\infty} |(-1)^n \sin\pi(\sqrt{n^2+1} - n)| = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$\sin \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0.$$

Ovde smo, na osnovu Hajneove teoreme, mogli promeniti mesta limesa i sinusa, jer je sinus neprekidna funkcija. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, to sledi da je i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Primetimo da $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\pi\sqrt{n^2+1}$ nije jednak $\sin^2 \lim\limits_{n\to\infty} \pi\sqrt{n^2+1}$, jer ne postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \pi\sqrt{n^2+1}$.

$$b_n = \sin\pi\sqrt{n^2+n} = \sin\pi(\sqrt{n^2+n} - n + n) =$$

$$(-1)^n \sin\pi(\sqrt{n^2+n} - n) = (-1)^n \sin\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}.$$

Kako $b_{2k} = \sin\frac{2k\pi}{\sqrt{4k^2+2k}+2k} \to 1$, a $b_{2k-1} = -\sin\frac{(2k-1)\pi}{\sqrt{4k^2-2k+1}+2k-1} \to -1$, to niz $\{b_n\}$ divergira.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} ((-1)^n \sin\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n})^2 =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \sin^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n} = 1.$$

I ovde smo koristili Hajneovu teoremu i neprekidnost funkcije $\sin^2 x$.

12.4 Neprekidnost vektorske funkcije skalarne promenljive. Oblast

Definicija 12.3 *Za vektorsku funkciju $\vec{r} : D \to X_0$, $D \subset \mathbb{R}^n$, kažemo da je* **neprekidna u tački** $a \in D$ *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall t \in D)(d(a,t) < \delta \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{r}(a)| < \varepsilon).$$

Iz same definicije neprekidnosti sledi da je funkcija $\vec{r}$ neprekidna u tački a ako i samo ako su komponente $x : D \to \mathbb{R}$, $y : D \to \mathbb{R}$, $z : D \to \mathbb{R}$ funkcije $\vec{r} : D \to X_0$ neprekidne u tački a.

Kao i kod skalarne funkcije, sledi da je vektorska funkcija $\vec{r}$ neprekidna u tački nagomilavanja $a \in D$ ako i samo ako važi da je $\lim\limits_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$, a ako je $a \in D$ izolovana tačka definicionog skupa D vektorske funkcije $\vec{r}$, tada je $\vec{r}$ automatski neprekidna u datoj tački.

Definicija 12.4 *Ako je $D = I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ i ako je $\vec{r} : I \to X_0$ neprekidna funkcija, tada skup tačaka*

$$L = \{\mathcal{R}(t) : t \in I\}$$

zovemo **kriva** *ili* **luk** *u prostoru, odnosno* **hodograf vektorske funkcije** $\vec{r}$.

Primetimo da je L kriva ako i samo ako je $\mathcal{R} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ neprekidna funkcija.

Luk L je parametarski dat sa $L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$, a u vektorskom obliku sa $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a,b]$.

Ako je $M((x(a), y(a), z(a)) \equiv N(x(b), y(b), z(b))$ za krivu L kažemo da je **zatvorena**, tj. da je luk L zatvoren. Ako sve tačke krive L leže u jednoj ravni, onda kažemo da je L **ravna kriva**.

Definicija 12.5 *Ako je (X,d) metrički prostor,* **spojnicom** (**lukom**) *u prostoru X nazivamo svako neprekidno preslikavanje $s : I \to X$ intervala $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ u prostor X. Ako su tačke $a = s(0)$ i $b = s(1)$ različite, tada kažemo da spojnica s* **povezuje tačke** a *i* b.

Teorema 12.7 *Skup $L \subset \mathbb{R}^3$ je kriva ako i samo ako je spojnica.*

Dokaz. Ako je L spojnica, očigledno je da je L kriva.

Neka je $L = \{\mathcal{R}(t) : t \in [a,b]\}$ kriva u prostoru. Tada je $\mathcal{R} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ neprekidna funkcija. Ako posmatramo funkciju $h : [0,1] \to [a,b]$ zadatu sa $h(x) = (b-a)x + a$, vidimo da za nju važi

- h je bijekcija,

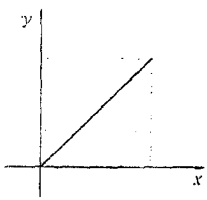
- h je neprekidna funkcija nad $[0,1]$,

- h^{-1} je neprekidna funkcija nad $[a,b]$.

Preslikavanje $f = \mathcal{R} \circ h$ je neprekidno preslikavanje zatvorenog intervala $[0,1]$ na tačke krive L, pa je L spojnica. $\square$

Definicija 12.6 *Za skup $\emptyset \neq A \subset X$ kažemo da je* **povezan** (**lučno povezan**) *u metričkom prostoru (X,d), ako za svake dve različite tačke $a,b \in A$, postoji spojnica $s: I \longrightarrow A$ koja povezuje tačke a i b. Ako je skup X povezan u metričkom prostoru (X,d), tada kažemo da je metrički prostor (X,d)* **povezan**.

Definicija 12.7 *Ako je skup $A \subset X$ istovremeno otvoren i povezan u metričkom prostoru (X,d) i $A_1 \subset A^*$, tada za skup $A \cup A_1$ kažemo da je* **oblast**. *Specijalno, ako je $A_1 = \emptyset$, tada se za A kaže i* **otvorena oblast**, *a ako je $A_1 = A^*$, tada se za $A \cup A_1 = A \cup A^* = \overline{A}$ kaže i* **zatvorena oblast**.



Sl. 12.5

Iz same definicije zatvorene oblasti ne sledi da je svaki neprazan zatvoren skup, zatvorena oblast. Na primer, skup $A = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$ je zatvoren, ali nije zatvorena oblast, jer je $A^0 = \emptyset$.

Definicija 12.8 *Za skup $L \subset E = \mathbb{R}^3$ kažemo da je* **Žordanova**[25] **kriva** *ili* **Žordanov luk sa krajevima** *ako važi:*

1°) *postoji interval $I = [a,b]$ i preslikavanje $\mathcal{R} : I \longrightarrow E$, tako da je $L = \{\mathcal{R}(t) : t \in I\}$;*
2°) *$\mathcal{R}$ je bijektivno preslikavanje intervala I na L;*
3°) *$\mathcal{R}$ je neprekidno preslikavanje.*

Tačke $A = \mathcal{R}(a)$, $B = \mathcal{R}(b)$ zovemo **krajevi krive** *ili luka L.*

Ako umesto 2°) uzmemo da važi

2*) $\mathcal{R}$ je bijekcija skupa $[a,b)$ na L i $\mathcal{R}(a) = \mathcal{R}(b)$,

[25] Žordan, K. (Camil Jordan, 1838-1922) - francuski matematičar

onda kažemo da je L **zatvorena Žordanova kriva** ili **zatvoren Žordanov luk.**

U daljem tekstu pod **Žordanovim lukom** ili krivom L podrazumevamo Žordanov luk sa krajevima ili zatvoren Žordanov luk L.

Ovde ćemo dati bez dokaza dva rezultata o zatvorenim Žordanovim krivama.

K. Žordan

Teorema 12.8 *Ako je* $L_1 = \{M(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$, *tada je kriva* L *zatvorena Žordanova kriva ako i samo ako postoji preslikavanje* $f : L_1 \to L$, *tako da važi*

1) f *je bijektivno preslikavanje skupa* L_1 *na* L;

2) f *je neprekidno preslikavanje;*

3) $f^{-1} : L \to L_1$ *je neprekidno preslikavanje.*

Drugi je klasičan Žordanov rezultat koji je intuitivno jasan ali zahteva složen dokaz.

Teorema 12.9 *Neka je* $L \subset \tau = \mathbb{R}^2$ *ravna zatvorena Žordanova kriva. Tada*

1) $\mathbb{R}^2 \setminus L = \Omega_1 \cup \Omega_2$, *gde su* Ω_1 *i* Ω_2 *dve disjunktne otvorene oblasti;*

2) $L = \Omega_1^* = \Omega_2^*$;

3) *Jedna od oblasti, npr. uzmimo da je to* Ω_1, *je ograničen skup i nju zovemo* **unutrašnjost krive** L, *dok je druga* Ω_2 *neograničen skup i nju zovemo* **spoljašnjost krive** L.

Za ravnu oblast $G \subset \tau = \mathbb{R}^2$ kažemo da je **jednostruko povezana** ako unutrašnjost svake Žordanove krive $L \subset G$ pripada oblasti G.

Pojam zatvorene Žordanove krive L je bitan, jer kao što vidimo u tom slučaju, ako je kriva ravna, možemo govoriti o unutrašnjosti i spoljašnjosti krive L.

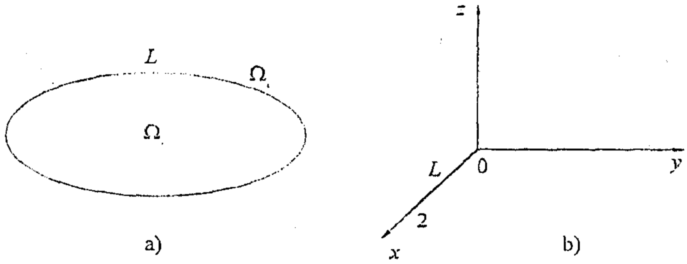
Na primer, ako posmatramo zatvorenu ravnu krivu $L = L_1 \cup L_2$, gde je

$$L_1 = \{(x,y,z) : x = t, y = 0, z = 0, t \in [0,1]\}$$

i

$$L_2 = \{(x,y,z) : x = 2-t, y = 0, z = 0, t \in [1,2]\},$$

tada je kriva L ravna zatvorena kriva, za koju se ne može definisati ni unutrašnjost ni spoljašnjost.



Sl. 12.6

12.5 Osobine neprekidnih funkcija

Teorema 12.10 *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i neka je data funkcija $f : X \to Y$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna*

a) *Funkcija f je neprekidna.*

b) *Inverzna slika svakog otvorenog skupa $U \subset Y$ je otvoren skup.*

c) *Inverzna slika svakog zatvorenog skupa $F \subset Y$ je zatvoren skup.*

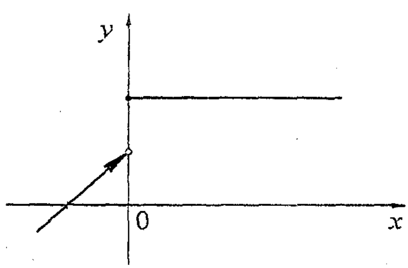
Teorema 12.11 *Neka je (X, d) metrički prostor i $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ funkcija koja je neprekidna u tački $a \in D$.*

Ako je $f(a) > c$ $(f(a) < c)$, tada postoji pozitivan realan broj ε, tako da za sve $x \in L(a, \varepsilon) \cap D$ važi $f(x) > c$ $(f(x) < c)$.

Dokaz. Posmatrajmo slučaj kada je $f(a) > c$. Analogno se dokazuje i kada je $f(a) < c$. Neka je $\varepsilon = f(a) - c > 0$. Kako je f neprekidna funkcija u tački a, to

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon),$$

tj. $c = f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Dakle, $(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) > c)$, što je i trebalo da se dokaže. □



Sl. 12.7

Ako funkcija f ima prekid u tački $a \in D$, teorema ne mora da važi.

Na primer, ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases},$$

vidimo da ne postoji okolina $(-\varepsilon, \varepsilon)$ tačke 0, tako da iz $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ sledi $f(x) > \frac{3}{2}$.

Posledica 12.2 *Ako je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$, neprekidna u tački $a \in D$ i $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), tada postoji otvorena lopta $L(a, \delta)$, tako da za svako $x \in D \cap L(a, \delta)$ sledi da je $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).*

Teorema 12.12 *Ako je funkcija $f : [a, b] \to Y$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, onda je ona nad tim intervalom i ograničena.*

Dokaz. Dokaz ćemo dati za slučaj kada je $Y = \mathbb{R}$. Pretpostavimo da f nije ograničena nad $[a, b]$. Tada

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in [a, b]) \; |f(x_n)| > n. \tag{10}$$

Posmatrajmo niz $\{x_n\}$. S obzirom da su svi članovi niza $\{x_n\}$ iz $[a, b]$, to je dati niz ograničen, pa postoji konvergentan podniz $\{x_{n_k}\}$ datog niza. Neka je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \in [a, b]$. Kako je f neprekidna funkcija nad $[a, b]$, to je $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(\xi)$, odnosno sledi da je niz $\{f(x_{n_k})\}$ konvergentan, što je u suprotnosti sa (10).

Dakle, funkcija f je ograničena nad $[a, b]$. □

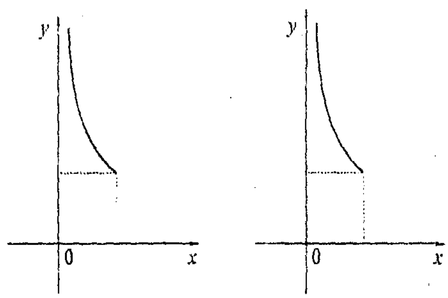
Obe pretpostavke iz prethodne teoreme su bitne.

Ako posmatramo funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$, vidimo da je ona neprekidna nad intervalom $(0, 1]$, ali nad tim intervalom nije ograničena (ne postoji $\sup\limits_{x\in(0,1]} f(x)$, dok je $\inf\limits_{x\in(0,1]} f(x) = 1$).

Ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

vidimo da ona nije ograničena nad zatvorenim intervalom $[0, 1]$ (ima prekid u tački 0).



Sl. 12.8

Definicija 12.9 *Za neprazan skup $A \subset X$ kažemo da je* **kompaktan** *u metričkom prostoru (X, d_X), ako za svaki niz $\{a_n\} \subset A$ postoji tačka nagomilavanja $a \in A$. Metrički prostor (X, d_X) je* **kompaktan** *ako je X kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d_X).*

Zatvoreni interval je kompaktan

Teorema 12.12 važi (za dokaz videti [5]) i kada se zatvoreni interval zameni sa skupom kompaktnim u metričkom prostoru (X, d_X)

Teorema 12.13 *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) proizvoljni metrički prostori. Ako je $f : D \to Y$, $D \subset X$ neprekidna funkcija i ako je skup D kompaktan u metričkom prostoru (X, d_X), tada je f ograničena funkcija.*

Teorema 12.14 *Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna nad $[a, b]$, tada ona bar jednom dostiže svoju najveću i najmanju vrednost (funkcija $f(x)$ ima maksimum i minumum nad intervalom $[a, b]$), tj. postoje realni brojevi $\alpha, \beta \in [a, b]$, takvi da je*

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(\alpha) \quad i \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(\beta).$$

Dokaz. S obzirom da je funkcija f neprekidna nad $[a, b]$, to postoje, prema prethodnoj teoremi $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ i $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. Pretpostavimo da za svako x iz $[a, b]$ važi $f(x) < M$, odnosno $M - f(x) > 0$. Posmatrajmo funkciju $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$. Ova funkcija je neprekidna nad $[a, b]$, pa je i ograničena, tj. postoji $L > 0$, tako da je za svako $x \in [a, b]$, $0 < g(x) < L$. Tada je $\frac{1}{M-f(x)} < L$, tj. $M - f(x) > \frac{1}{L}$, odnosno $f(x) < M - \frac{1}{L}$ što je nemoguće, jer je M najmanje gornje ograničenje funkcije f. Dakle, postoji realan broj $\beta \in [a, b]$ tako da je $f(\beta) = M$, što je i trebalo dokazati.

Slično se dokazuje da postoji realan broj α tako da je $f(\alpha) = m$. □

Ako posmatramo funkciju $f(x) = x$, ona nema nad intervalom $(0, 1)$ ni najveću ni najmanju vrednost. Funkcija f je neprekidna nad tim intervalom. Sem toga f je i ograničena funkcija nad tim intervalom, $m = 0$, $M = 1$. Primetimo da posmatrani interval nije zatvoren.

I teorema 12.14 važi u opštijem slučaju (za dokaz videti [5]), tj. važi sledeće tvrđenje

Teorema 12.15 *Neka je (X, d_X) metrički prostor i $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ neprekidna funkcija nad kompaktnim skupom D. Tada funkcija f dostiže najveću i najmanju vrednost nad skupom D.*

Teorema 12.16 *Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna nad intervalom $[a, b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, tada u intervalu (a, b) postoji bar jedna nula funkcije, tj. postoji tačka $\xi \in (a, b)$, tako da je $f(\xi) = 0$.*

Dokaz. Ako je $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, tada je $\xi = \frac{a+b}{2} \in (a, b)$, pa je teorema dokazana. Ako je $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, tada od podintervala $[a, \frac{a+b}{2}]$ i $[\frac{a+b}{2}, b]$ intervala $[a, b]$ izaberimo onaj, koji ćemo obeležiti sa $[a_1, b_1]$, kod koga funkcija na krajevima intervala ima različit znak. Ponavljajući isti postupak na intervalu $[a_1, b_1]$ dobićemo da je ili $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$ ili $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \neq 0$. Ako je $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$, tada je $\xi = \frac{a_1+b_1}{2} \in (a, b)$, pa je teorema dokazana. Ako je $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \neq 0$, tada od podintervala $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ i $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ intervala $[a_1, b_1]$ izaberimo onaj, koji ćemo obeležiti sa $[a_2, b_2]$, kod koga funkcija na krajevima intervala ima različit znak. Nastavljajući taj proces, dobićemo da

1) Posle n koraka, ako je $f(\frac{a_n+b_n}{2}) = 0$, tada je $\xi = \frac{a_n+b_n}{2}$, pa je teorema dokazana.

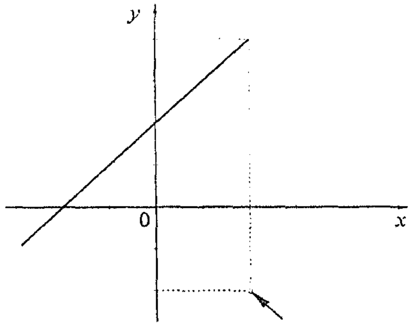
2) Ako je za svako $n \in \mathbb{N}$, $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \neq 0$, tada za niz intervala $\{[a_n, b_n]\}$ važi:
- $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots;$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0;$

pa je dati niz, niz umetnutih intervala. Sledi da postoji jedna i samo jedna zajednička tačka ξ za sve intervale. Dokazaćemo da je $f(\xi) = 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $f(\xi) > 0$ ($f(\xi) < 0$). Primetimo pre svega da je funkcija f definisana u tački $\xi \in (a, b)$, jer je f neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$. Kako je f neprekidna u tački ξ i po pretpostavci je $f(\xi) > 0$ ($f(\xi) < 0$), to postoji pozitivan realan broj δ, tako da za svako x iz skupa $(\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [a, b]$ važi $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$). Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$, to postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $n \geq n_0$, $[a_n, b_n] \subset (\xi - \delta, \xi + \delta)$. Kako je $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, to funkcija f nije uvek pozitivna (negativna) nad intervalom $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ što je kontradikcija.

Dakle, $f(\xi) = 0$. □

Bitna je pretpostavka teoreme da je funkcija f neprekidna nad datim zatvorenim intervalom. Ako funkcija f nije neprekidna nad posmatranim zatvorenim intervalom, tada f ne mora obavezno da ima nulu nad odgovarajućim otvorenim intervalom. Na primer, ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 2 \\ -x, & x > 2 \end{cases},$$



Sl. 12.9

vidimo da funkcija f nema nulu u intervalu $(0, 3)$, iako je $f(0) = 2 > 0$, $f(3) = -3 < 0$, jer funkcija f ima prekid u tački 2.

Teorema 12.17 *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nad $[a, b]$ i ako je $f(a) \neq f(b)$, ona u tom intervalu uzima sve vrednosti između $f(a)$ i $f(b)$.*

Dokaz. Uzmimo da je $f(a) < f(b)$. Slučaj $f(a) > f(b)$ se slično dokazuje. Neka je $f(a) < \eta < f(b)$ proizvoljan realan broj. Pokazaćemo da postoji tačka $\xi \in (a, b)$, tako da je $f(\xi) = \eta$. U tu svrhu posmatrajmo funkciju $F(x) = f(x) - \eta$, $x \in [a, b]$. S obzirom da je F neprekidna funkcija nad $[a, b]$ i da važi $F(a) = f(a) - \eta < 0$ i $F(b) = f(b) - \eta > 0$, to prema prethodnoj teoremi postoji tačka $\xi \in (a, b)$, tako da je $F(\xi) = 0$. Tada je $F(\xi) = f(\xi) - \eta = 0$, tj. $f(\xi) = \eta$ što je i trebalo da se dokaže. □

Ako posmatramo prekidnu funkciju iz prethodnog primera, tada za broj 1 koji se nalazi između brojeva $2 = f(0)$ i $-3 = f(3)$, ne postoji tačka $\xi \in (0, 3)$ tako da je $f(\xi) = 1$.

Teorema 12.18 *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, tada je ili za svako $x \in [a, b]$, $f(x) = c$ ili $f([a, b]) = [c, d]$.*

Dokaz. Neka je $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ i $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Ako je $m = M$, tada je f konstantna funkcija. Neka je $m \neq M$. Tada postoje realni brojevi $\alpha, \beta \in [a, b]$ tako da je $f(\alpha) = m$ i $f(\beta) = M$. Pokažimo da je $f([a, b]) = [m, M]$. Neka je $\alpha_1 = \min\{\alpha, \beta\}$, $\beta_1 = \max\{\alpha, \beta\}$. Funkcija f je neprekidna nad intervalom $[\alpha_1, \beta_1]$, pa ako je $m < \eta < M$, tada postoji $\xi \in [\alpha_1, \beta_1]$ tako da je $f(\xi) = \eta$, a to je i trebalo pokazati. □

Teorema 12.19 *Ako je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ neprekidna strogo monotona funkcija nad (a, b), tada je $f((a, b))$ otvoren interval.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f monotono rastuća funkcija. (Slično se dokazuje i ako je f monotono opadajuća funkcija). Označimo sa $m = \inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$, ako infimum postoji, a ako ne postoji neka je $m = -\infty$. Slično označimo sa $M = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$, ako supremum postoji, a ako ne postoji neka je $M = \infty$. Pokažimo da je $f((a, b)) = (m, M)$.

Očigledno je da je za svako $x \in (a, b)$, $f(x) \neq m$ i $f(x) \neq M$, ako su m i M iz $\mathbb{R}$. Ako je za neko $\alpha \in (a, b)$, $f(\alpha) = m$, tada bi za $a < x_1 < \alpha$, zbog toga što je f monotono rastuća funkcija, bilo $f(x_1) < f(\alpha) = m$ što je nemoguće. Slično se dokazuje da je $f(x) \neq M$.

Pokažimo da za svako $z \in (m, M)$ postoji $x \in (a, b)$, tako da je $f(x) = z$.

Postoji tačka $x_1 \in (a, b)$ sa osobinom da je $f(x_1) < z$. Zaista, ako pretpostavimo da je za svako $x \in (a, b)$, $f(x) \geq z$, to nas dovodi do toga da je $m \geq z$ što je kontradikcija. Slično, postoji tačka $x_2 \in (a, b)$ sa osobinom da je $f(x_2) > z$.

Kako je $f(x_1) < z < f(x_2)$, tada je $x_1 < x_2$, pa kako je f neprekidna i monotono rastuća funkcija, to je

$$f([x_1, x_2]) = [f(x_1), f(x_2)],$$

odakle zaključujemo da postoji tačka $x \in (x_1, x_2)$, tako da je $f(x) = z$. Dakle, $f((a, b)) = (m, M)$. □

Teorema 12.20 *Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna strogo monotona funkcija nad proizvoljnim intervalom realnih brojeva I, tada je inverzna funkcija $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ neprekidna nad $f(I)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f monotono rastuća funkcija nad I. Ako je a unutrašnja tačka intervala I, tada postoji $\varepsilon > 0$, tako da je $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset I$. Sledi da je $f(a) \in (f(a-\varepsilon), f(a+\varepsilon)) \subset f(I)$. Dakle, postoji $\delta > 0$, tako da je $I_1 = (f(a)-\delta, f(a)+\delta) \subset (f(a-\varepsilon), f(a+\varepsilon))$, pa je $f^{-1}(I_1) \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, odakle sledi da je f^{-1} neprekidna funkcija u tački $f(a)$.

Znači, ako je I otvoren interval, onda je funkcija f^{-1} neprekidna nad $f(I)$.

Pretpostavimo da je $I = [a, b)$. Pokažimo da je f^{-1} neprekidna u tački $f(a)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Posmatrajmo interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, za koji je $(f(a), f(a+\varepsilon)) \subset f(I)$. Tada postoji $\delta > 0$, tako da je

$$(f(a), f(a)+\delta) \subset (f(a), f(a+\varepsilon)) \subset f(I),$$

pa za interval

$$I_1 = (f(a)-\delta, f(a)+\delta) \cap f(I) = [f(a), f(a)+\delta)$$

važi $f^{-1}(I_1) \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, odakle sledi da je f^{-1} neprekidna funkcija u tački $f(a)$ nad skupom $f(I)$. □

Slično se dokazuje da i kada je $I = [a, b]$ ili $I = (a, b]$, funkcija f^{-1} je neprekidna funkcija u tački $f(b)$ nad skupom $f(I)$.

Na osnovu poslednje teoreme i osobina neprekidnih funkcija sledi da važi sledeća teorema

Teorema 12.21 *Elementarne funkcije su neprekidne u oblasti definisanosti.*

12.6 Uniformna neprekidnost

Definicija 12.10 *Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) i funkcija $f: D \to Y$, $D \subset X$. Funkcija f je* **uniformno neprekidna nad $\emptyset \neq E \subset D$** *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in E)(d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon).$$

Dakle, možemo reći da je funkcija f uniformno neprekidna nad E ako za svaki pozitivan realan broj ε, postoji pozitivan realan broj δ, koji zavisi samo od ε ali ne i od x, tako da ako je rastojanje tačaka x_1 i x_2 iz E manje od δ, tada je rastojanje slika manje od ε.

Tako se, ukoliko je $X = Y = \mathbb{R}$, za funkciju $f: D \to \mathbb{R}$ može reći da je uniformno neprekidna ako važi

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in D)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Napomena 12.2 Očigledno je, da ako je funkcija f uniformno neprekidna nad skupom E, ona je nad tim skupom i neprekidna. Da obrnuto nije uvek tačno pokazuje sledeći primer.

$f(x)=x^2 \quad (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \quad |x_2^2-x_1^2| = |(x_2-x_1)(x_1+x_2)| <$

Primer 12.6 Funkcija $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ definisana sa $f(x)=\frac{1}{x}$ je nad intervalom $(0,1)$ neprekidna, ali nije i uniformno neprekidna.

$< |x_2 - x_1|$

Da bi to pokazali pretpostavimo suprotno, tj. da je data funkcija nad intervalom $(0,1)$ uniformno neprekidna. Tada za $0<\varepsilon<1$, postoji $\delta>0$, tako da je $|x_2-x_1|<\delta \Rightarrow |\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}|<\varepsilon$. Primetimo da kako $x_1,x_2\in(0,1)$, to je $\delta<1$. Neka je $x_1=\delta\in(0,1)$, $x_2=\frac{\delta}{1+\varepsilon}\in(0,1)$. Tada važi:

$$|x_2-x_1| = |\frac{\delta}{1+\varepsilon}-\delta| = \delta\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \delta \Rightarrow |\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}| = |\frac{1+\varepsilon}{\delta}-\frac{1}{\delta}| = \frac{\varepsilon}{\delta} > \varepsilon,$$

što je suprotno pretpostavci da je funkcija f uniformno neprekidna. Dakle, f nije uniformno neprekidna nad $(0,1)$.

Međutim, funkcija $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ data sa $f(x)=\frac{1}{x}$ je uniformno neprekidna nad $[1,2]$, jer

$$|\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}| = \frac{|x_1-x_2|}{x_2x_1} \le |x_2-x_1| < \varepsilon,$$

pa ako je $|x_2-x_1|<\delta$, gde je $\delta=\varepsilon$, to je i $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$. Kao što vidimo uslovi za uniformnu neprekidnost su jači od uslova za neprekidnost.

Teorema 12.22 *Ako je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ neprekidna nad $[a,b]$, ona je nad tim intervalom i uniformno neprekidna.*

Dokaz. Pokažimo da važi stav:

Stav 12.1 *Za svako $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, postoji konačan broj tačaka $a_0=a<a_1<\ldots<a_{n-1}<a_n=b$, tako da za svake dve tačke x' i x'' iz intervala $[a_{i-1},a_i]$, $i=1,2,\ldots,n$, važi*

$$|f(x')-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pretpostavimo da stav 12.1 nije tačan. Obeležimo sa $[a_1,b_1]$ jedan od intervala $[a,\frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2},b]$ nad kojim 12.1 nije tačan. Sa $[a_2,b_2]$ obeležimo jedan od intervala $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$ nad kojim 12.1 nije tačan. Nastavljajući taj postupak formiramo niz $\{[a_n,b_n]\}$, podintervala intervala $[a,b]$, nad kojim stav 12.1 nije tačan.

Niz $\{[a_n,b_n]\}$ je niz umetnutih intervala, pa sledi da postoji jedna i samo jedna tačka c, zajednička za sve te intervale.

Neka je ε proizvoljan pozitivan broj. S obzirom da je f neprekidna funkcija nad $[a,b]$, to postoji $\delta>0$, da za svako $x\in(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ sledi da je $|f(x)-f(c)|<\frac{\varepsilon}{4}$. Kako za proizvoljne tačke $x',x''\in(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$, važi

$$|f(x')-f(x'')| \le |f(x')-f(c)| + |f(c)-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

i kako postoji interval $[a_n, b_n] \subset (c-\delta, c+\delta)$, to bi sledilo da za svake dve tačke $x', x'' \in [a_n, b_n]$, važi

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

što je u suprotnosti sa izborom niza intervala $\{[a_n, b_n]\}$. Dakle stav 12.1 je tačan.

Dokažimo sada tvrđenje teoreme.

Neka je $\delta = \min\{a_{i+1} - a_i : i = 0, 1, ..., n-1\}$. Pokažimo da za svake dve tačke $x', x'' \in [a, b]$ važi

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Ako je $|x' - x''| < \delta$, tada zbog izbora δ, mora postojati $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ tako da važi jedan od uslova

1) $x', x'' \in [a_i, a_{i+1}]$,

2) $x' \in [a_i, a_{i+1}]$, $x'' \in [a_{i+1}, a_{i+2}]$.

Ako važi 1), tada na osnovu stava 12.1 važi

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ako važi 2), tada na osnovu stava 12.1 važi

$$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - f(a_{i+1})| + |f(a_{i+1}) - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Primer 12.7 Funkcija $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = x$ je nad intervalom $(0, 1)$ neprekidna i uniformno neprekidna.

Indeks

Literatura

[1] D. Adnađević, Z. Kadelburg, *Matematička analiza I*, Naučna knjiga, Beograd, (1989).

[2] I. Kovačević, N. Ralević, L. Vaš, *Uvod u matematičku analizu*, "STYLOS", Novi Sad, (1998).

[3] I. Kovačević, N. Ralević, *Matematička analiza I: granični procesi*, "STYLOS", Novi Sad, (1998).

[4] I. Kovačević, N. Ralević, *Matematička analiza I: uvodni pojmovi i granični procesi*, "Veternik: Expo print", Novi Sad, (2000).

[5] I. Kovačević, N. Ralević, *Funkcionalna analiza*, "STYLOS", Novi Sad, (1997).

[6] S. Mardešić, *Matematička analiza, I deo*, Školska knjiga, Zagreb, (1979)