PRINCIP BIJEKCIJE

1. Među nenegativnim celim brojevima manjim od 10^7 posmatraju se oni čiji zbir cifara je jednak 31 i oni čiji zbir cifara je jednak 32. Kojih brojeva ima više?

Rešenje: Posmatrajmo skupove

$$A = \{a_1a_2...a_7 \mid \sum_{i=1}^{7} a_i = 31,\ 0 \le a_i \le 9\}$$
$$B = \{b_1b_2...b_7 \mid \sum_{i=1}^{7} b_i = 32,\ 0 \le b_i \le 9\}$$

Preslikavanje definisano na sledeći način:

$$f(a_1a_2...a_7) = (9 - a_1)(9 - a_2)...(9 - a_7),$$

gde $a_1a_2...a_7 \in A$. Ovako definisano preslikavanje predstavlja jedno bijektivno preslikavanje skupa A na skup B. Naime, kako je $\sum_{i=1}^{7} a_i = 31$ važi da je $\sum_{i=1}^{7}(9 - a_i) = 7 \cdot 9 - 31 = 32$, odakle je jasno da $(9 - a_1)(9 - a_2)...(9 - a_7) \in B$.

Preslikavanje $f : A \to B$ je injekcija jer iz $f(x_1x_2...x_7) = f(y_1y_2...y_7)$, odnosno iz $(9 - x_1)(9 - x_2)...(9 - x_7) = (9 - y_1)(9 - y_2)...(9 - y_7)$ sledi da je $x_i = y_i$ za $1 \le i \le 7$.

Preslikavanje $f : A \to B$ je sirjekcija jer za svaki $b_1b_2...b_7 \in B$ postoji $(9 - b_1)(9 - b_2)...(9 - b_7) \in A$ čija je slika upravo $b_1b_2...b_7$.

Sada na na osnovu principa bijekcije zaključujemo da skupovi A i B imaju isti broj elemenata.

2. U ravni su date 2023 tačke, od kojih je jedna crvena, a preostalih 2020 su plave. Da li među podskupovima skupa svih tačaka ima više onih koje sadrže crvenu tačku ili onih koji je ne sadrže?

Rešenje: Neka je S skup koji sadrži sve 2023 tačke. Dalje, posmatrajmo skup $\mathcal{A}$ koji se sastoji od svih podskupova skupa S koji sadrže crvenu tačku i skup $\mathcal{B}$ koji se sastoji od svih podskupova skupa S koji ne sadrže crvenu tačku.

Lako se dokazuje da je preslikavanje $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definisano sa

$$f(A) = S \setminus A$$

bijekcija (kako skup A sadrži crvenu tačku skup $S \setminus A$ je sigurno ne sadrži i samim tim pripada skupu $\mathcal{B}$), te je broj podskupova skupa S koji sadrže crvenu tačku jednak broj podskupova koji je ne sadrže.

3.* Posmatrajmo sve nizove dekadnih cifara dužine 6. Da li među njima ima više onih kod kojih je zbir cifara 27 ili onih kod kojih je zbir prve tri cifre jednak zbiru poslednje tri cifre?

Rešenje: Neka je A skup svih nizova kod kojih je zbir cifara 27, a B skup svih nizova kod kojih je zbir prve tri cifre jednak zbiru poslednje tri cifre. Neka je $b_1b_2b_3b_4b_5b_6$ proizvoljan niz iz B. Konstruisaćemo preslikavanje $f : B \to A$ tako da se b_i slika u $9 - b_i$, za $i = 1, 2, 3$, a b_i se identički slika u b_i kada je $i = 4, 5, 6$. Ovako definisano preslikavanje je dobro definisano jer je

$$(9 - b_1) + (9 - b_2) + (9 - b_3) + b_4 + b_5 + b_6 = 27 - (b_1 + b_2 + b_3) + (b_4 + b_5 + b_6) = 27,$$

pa $f(b_1b_2 \dots b_6) \in A$. Jednostavnom proverom se dolazi do zaključka da je preslikavanje f bijekcija, odakle na osnovu principa bijekcije dobijamo da posmatrani skupovi imaju isti broj elemenata.

DIRIHLEOV PRINCIP

4. Dokazati da u grupi od 367 osoba postoje dve osobe koje imaju rođendan istog dana.

Rešenje: Broj dana u godini se razlikuje u zavisnosti od toga da li je godina prestupna ili nije. Godina koja nije prestupna ima 365 dana, dok prestupna godina ima jedan dan više, tj. 366 dana. Podelimo sada posmatrane osobe u 366 grupa, u zavisnosti od toga kog datuma je osoba rođena. Kako u grupi imamo 367 osoba, na osnovu Dirihleovog principa dobijamo da postoje dve osobe koje slave rođendan istog dana.
Napomena: Primetimo da tvrđenje ne bi moralo da važi za grupu od 366 osoba, pošto bi tada sve osobe mogle da imaju rođendan različitog dana u godini.

5. Dat je skup brojeva $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
   (a) Ako se izabere 5 parova različitih brojeva iz skupa A čiji zbir je 14, da li možemo da tvrdimo da će među njima biti dva ista para?
   (b) Ako se izabere 6 parova različitih brojeva iz skupa A čiji zbir je 14, da li možemo da tvrdimo da će među njima biti dva ista para?

.

Rešenje:

(a) Posmatrajmo jedno razbijanje skupa A na podskupove:

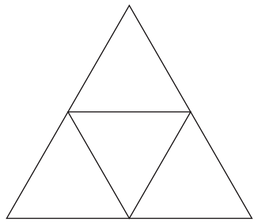
$$A = \{2, 12\} \cup \{3, 11\} \cup \{4, 10\} \cup \{5, 9\} \cup \{6, 8\} \cup \{7\}.$$

Zbir brojeva u svakom od ovih dvočlanih podskupova iznosi 14. Iz tog razloga, jasno je da možemo izabrati 5 različitih parova brojeva iz skupa A čiji je zbir 14.

(b) Postoji 5 parova različitih brojeva iz skupa A čiji je zbir 14, a mi treba da izaberemo 6 takvih parova. Na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da bar dva izabrana para moraju biti ista.

6. U unutrašnjosti jednakostraničnog trougla stranice dužine 2 raspoređeno je 5 tačaka. Dokazati da su bar 2 tačke na rastojanju manjem od 1.

Rešenje: Ukoliko povučemo srednje linije dati trougao ćemo podeliti na 4 manja jednakostranična trougla stranice dužine 1. Sada treba 5 tačaka rasporediti u četiri trougla, pa zbog Dirihleovog principa zaključujemo da se bar 2 tačke moraju nalaziti u istom malom trouglu. Kako se tačke biraju u unutrašnjosti velikog trougla, nemoguće je da budu smeštene na njegovim stranicama, te je rastojanje između uočene dve tačke strogo manje od 1.



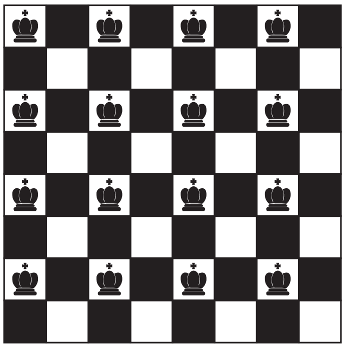
7. Na testiranju je učestvovalo 65 učenika. Učenici su radili 3 kontrolna zadatka i na svakom kontrolnom su dobili jednu od ocena: 2, 3, 4 ili 5. Da li moraju postojati dva učenika sa istim ocenama na svim radovima?

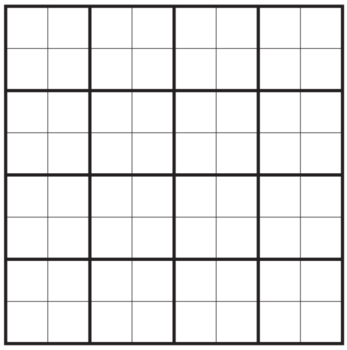
Rešenje: Učenik može dobiti jednu od 4 ocene na svakom kontrolnom, pa postoji $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ mogućnosti da se dobiju ocene na ova tri kontrolna. Kako na testiranju učestvuje 65 učenika, na osnovu Dirihleovog principa imamo da je bar dva učenika dobilo iste ocene na sva tri rada.

II način: Broj mogućnosti da se dobije ocena na prvom kontrolnom je 4. Kako je $65 = 16 \cdot 4 + 1$, na osnovu uopštenog Dirihleovog principa znamo da je bar $16 + 1 = 17$ učenika dobilo istu ocenu na prvom kontrolnom. Posmatrajmo sada učenike za koje znamo da su dobili istu ocenu na prvom kontrolnom. I na drugom kontrolnom se mogu dobiti 4 ocene, pa kako je $17 = 4 \cdot 4 + 1$ dobijamo da je bar 5 učenika dobilo iste ocene na prva dva kontrolna. Za kraj posmatrajmo ovih 5 učenika i pošto je $5 = 1 \cdot 4 + 1$, znamo da će bar 2 učenika morati da dobiju iste ocene na sva tri kontrolna.

8. Koliko se najviše kraljeva može postaviti na šahovsku tablu dimenzije 8×8, tako da se oni međusobno ne napadaju?

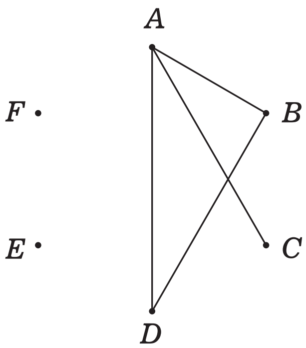
Rešenje: Moguće je postaviti 16 kraljeva i jedan od mogućih razmeštaja figura je prikazan na slici levo (dovoljno je pronaći jedan takav raspored). Pretpostavimo sada da je moguće rasporediti i više od 16 kraljeva. Ako podelimo tablu na 16 delova dimenzije 2×2 (slika desno), onda bi se zbog Dirihleovog principa u jednom delu morala nalaziti bar 2 kralja. Međutim, zbog načina na koji se kralj kreće po šahovskoj tabli ova dva kralja će se uvek napadati, te je maksimalan broj kraljeva koji se mogu rasporediti na šahovsku tablu 16.

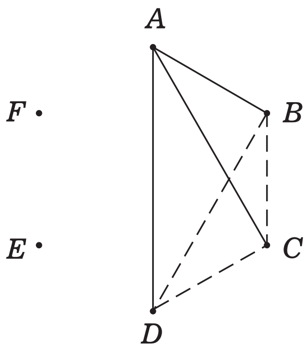




9.* U grupi od šest osoba svake dve se ili poznaju ili ne poznaju. Dokazati da se među njima uvek mogu naći bar 3 osobe tako da se sve tri međusobno poznaju ili međusobno ne poznaju.

Rešenje: Postavimo osobe u temena pravilnog šestougla $ABCDEF$. Ukoliko se dve osobe poznaju obojićemo odgovarajuću duž plavom bojom, a ako se ne poznaju, duž će biti obojena crvenom bojom. Sada je cilj zadatka pronaći trougao koji ima sve tri stranice obojene plavom ili sve tri stranice obojene crvenom bojom (cilj je pronaˇci jednobojni trougao). Posmatrajmo osobu koja odgovara temenu A. Iz temena A izlazi 5 duži koje su obojene sa jednom od 2 boje. Kako je $5 = 2 \cdot 2 + 1$ zbog uopštenog Dirihleovog principa dobijamo da bar $2+1 = 3$ duži moraju biti obojene istom bojom.





Pretpostavimo, bez umanjenja opštosti, da su duži AB, AC i AD obojene plavom bojom. Ako je sada bar jedna od duži BC, BD ili CD takođe plava, na primer duž BD, dobijamo da je $\triangle ABD$ plavi trougao (pogledati levu sliku). U sluchaju da nijedna od ove tri duži nije plava, sve tri duži moraju biti crvene i tada imamo da je $\triangle BCD$ crveni trougao (desna slika).
Napomena: Na slici smo plave duzhi predstavili punom linijom, a crvene isprekidanom.

10. Koliko najmanje karata treba izvući iz standardnog špila sa 52 karte da bi se među izvučenim kartama sigurno nalazile

    (a) četiri karte sa istim znakom;

    (b) bar tri karte sa znakom srca?

Rešenje:

(a) Ukoliko izvučemo po tri karte od svakog znaka, među izvučenih 12 karata neće postojati četiri karte sa istim znakom. Prva naredna karta koju izvučemo će tada sa tri prethodno izvučene karte obezbediti da imamo četiri karte istog znaka. Prema tome, tek kada izvuchemo $3 \cdot 4 + 1 = 13$ karata bićemo sigurni da imamo četiri karte istog znaka. (Sa 12 izvuchenih karata mozhemo imati situaciju da od svakog znaka imamo samo po 3 karte.) Primetimo da u ovom primeru uopšteni Dirihleov princip možemo iskoristi da proverimo da li smo dobro rešili zadatak.

(b) Zamislimo da smo izvukli sve karte sa znakom tref, pik i karo, pre ijedne karte sa znakom herc. Prema tome, minimalan broj karata koji treba izvuči da bi se među izvučenim kartama sigurno nalazila tri herca je $3 \cdot 13 + 3 = 42$. Ovde ne koristimo uopšteni Dirihleov princip, pošto želimo da dokažemo da među izvučenim kartama uvek imamo 3 karte sa znakom srca, a ne 3 karte istog znaka.

11. Dati kombinatornu interpretaciju izračunavanja vrednosti promenljive `s` na kraju izvršavanja koda napisanog u programskom jeziku Java:

```
public class IzracunajS{

   public static void main(String []args){

      int s=0;
      for (int i=1; i<=30; i++){
         s += 1;
      }
      for (int j=1; j<=20; j++){
         for (int k=1; k<=10; k++){
            for (int l=1; l<=5; l++){
               s += 1;
            }
         }
      }
   System.out.println("S="+s);
   }
}
```

Rešenje: Vrednost promenjljive `s` povećava se za 1 prilikom svakog izvršavanja petlje u 6. redu, a zatim pri svakom izvršavanju petlje u 9. redu. Kako su ove petlje nezavisne, prema principu sume, `s` će biti jednako zbiru broja izvršavanja datih petlji.

Petlja u 5. redu se izvršava 30 puta (tako da je pre ulaska u narednu for petlju `s`$= 30$).

Petlja u 9. redu se sastoji od tri ugnježdene petlje i svakom izvršavanju naredbe `s`$+ = 1$ odgovara jedna uređena trojka

$$(j, k, l) \in \{1, \dots, 20\} \times \{1, \dots, 10\} \times \{1, \dots, 5\}.$$

Kako je prema principu proizvoda

$$\begin{aligned}|\{1, \dots, 20\} \times \{1, \dots, 10\} \times \{1, \dots, 5\}| &= |\{1, \dots, 20\}| \cdot |\{1, \dots, 10\}| \cdot |\{1, \dots, 5\}| \\ &= 20 \cdot 10 \cdot 5 = 1000,\end{aligned}$$

na kraju izvršavanja koda `s`$= 30 + 1000 = 1030$.

12. Odrediti koliko ima

   (a) četvorocifrenih brojeva;

   (b) četvorocifrenih brojeva u čijem su dekadnom zapisu sve cifre međusobno različite.

   Napisati kod u programskom jeziku JAVA koji ispisuje sve takve brojeve.

Rešenje:

(a) Prva cifra mora biti različita od nule i nju možemo izabrati na 9 načina, dok svaku od preostale tri cifre možemo odabrati na 10 načina. Primenom principa proizvoda dobijamo da četvorocifrenih brojeva ima $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$.

```
public class Cetvorocifreni{

   public static void main(String []args) {

       int s=0;

       System.out.println("Cetvorocifreni brojevi: ");
       for (int i=1; i<=9; i++){
           for (int j=0; j<=9; j++){
               for (int k=0; k<=9; k++){
                   for (int l=0; l<=9; l++){
                       System.out.println(""+i+j+k+l);
                       s += 1;
                   }
               }
           }
       }

       System.out.println("Cetvorocifrenih brojeva ima: "+s);
   }
}
```

(b) Prvu cifru možemo izabrati na 9 načina. Prilikom izbora druge cifre treba voditi računa da se razlikuje od prve izabrane cifre, pa ponovo imamo 9 mogućih izbora. Treću cifru biramo na 8 (različita od prve dve), a četvrtu na 7 načina. Prema tome, traženih brojeva ima $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$.

U nastavku dajemo dve ideje kako u programsko jeziku JAVA možemo ispisati sve četvorocifrene brojeve koji imaju sve cifre različite.

```
public class RazliciteCifre{

   public static void main(String []args) {

       int s=0;

      System.out.println("Cetvorocifreni brojevi sa razlicitim ciframa:
          ");
       for (int i=1; i<=9; i++){
           for (int j=0; j<=9; j++){
               for (int k=0; k<=9; k++){
                   for (int l=0; l<=9; l++){
                        if (i!=j & i!=k & i!=l & j!=k & j!=l & k!=l){
                          System.out.println(""+i+j+k+l);
                          s += 1;
                        }
                   }
               }
           }
       }
```

```
        System.out.println("Cetvorocifrenih brojeva sa razlicitim ciframa
            ima: "+s);
    }
}
```

Druga ideja:

```
public class RazliciteCifre{

    public static void main(String[] args) {

        int s=0;
        System.out.println("Cetvorocifreni brojevi sa razlicitim ciframa:
            ");

        for (int i=1000; i<=9999; i++){
            int d=i%10;
            int c=(i%100)/10;
            int b=(i%1000)/100;
            int a=i/1000;

            if (a!=b & a!=c & a!=d & b!=c & b!=d & c!=d){
                System.out.println(""+a+b+c+d);
                s += 1;
            }
        }

        System.out.println("Cetvorocifrenih brojeva sa razlicitim ciframa
            ima: "+s);
    }
}
```

13. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^5 u čijem dekadnom zapisu su svake dve susedne cifre međusobno različite?

Rešenje: Razlikujemo slučajeve kada je broj jednocifren, dvocifren, trocifren, četvorocifren i petocifren. Jednocifrenih prirodnih brojeva imamo 9. U slučaju višecifrenih brojeva, prvu cifru biramo na 9 načina, a svaku narednu cifru vodimo računa samo da treba da se razlikuje od prethodno izabrane cifre. Zaključujemo da ćemo za svaku cifaru imati 9 mogućih izbora. Sada je na osnovu principa zbira rešenje

$$9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 = 9(1 + 9 + 9^2 + 9^3 + 9^4) = 9 \cdot \frac{9^5 - 1}{9 - 1} = 66\,429.$$

14. U lift u prizemlju četvorospratnice ušlo je 6 osoba. Na koliko načina one mogu napustiti lift? (Svaka osoba izlazi na jednom od spratova)

Rešenje: Svaka od ovih 6 osoba ima mogućnost da izađe na jednom od 4 sprata, pa je broj načina da napuste lift 4^6.

15. Na koliko načina se m različitih pisama može rasporediti u n poštanskih sandučića.

Rešenje: Svakom pismu pridružujemo jedno od n sandučića. Kako imamo m pisama broj načina da se rasporede u sandučiće je n^m.

16. Koliko ima $m \times n$ matrica sa elementima 0 i 1 koje u svakoj vrsti i svakoj koloni imaju paran broj jedinica?

Rešenje: Posmatrajmo proizvoljnu matricu formata $(m-1) \times (n-1)$ sa elementima iz skupa $\{0,1\}$ i pokažimo da je na jedinstven način možemo dopuniti do matrice formata $m \times n$ koja će zadovoljavati uslove zadatka. Jasno, elementi $a_{i,n}$ za $1 \leq i \leq m-1$, kao i $a_{m,j}$ za $1 \leq j \leq n-1$ su jedinstveno određeni. Ostaje da pokažemo da je i element $a_{m,n}$ tada jedinstveno određen.

Neka je zbir elemenata (broj jedinica) u podmatrici $(m-1) \times (n-1)$ jednak A, suma $\sum_{i=1}^{m-1} a_{i,n} = B$ i suma $\sum_{j=1}^{n-1} a_{m,j} = C$. Zbog uslova zadatka $A + B$ je paran broj, kao i $A + C$, odakle zaključujemo da su B i C iste parnosti. Ovo je dovoljno da znamo je element $a_{m,n}$ jedinstveno određen.

Zaključujemo da je traženo rešenje jednako broju proizvoljnih matrica $(m-1) \times (n-1)$ nad $\{0,1\}$, odnosno $2^{(m-1)\cdot(n-1)}$.

17. Veslački klub ima 30 članova. Na koliko načina se mogu izabrati predsednik, potpredsednik, sekretar i blagajnik?

Rešenje: Za predsednika može biti izabran jedan od 30 članova. Nakon što se izabere predsednik ostaje 29 mogućih kandidata za potpredsednika, odnosno 28 i 27 kandidata za izbor sekretara i blagajnika. Tako da je broj načina na koji se mogu izabrati $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$.

18. Učenici četvrtog razreda svake nedelje idu na izlet. Oni su dobili ponudu za 15 destinacija i treba da odaberu 7 koje će posetiti. Na koliko načina mogu da odaberu koja mesta će posetiti ako se zna da će poslednji izlet biti na Palić?

Rešenje: Palić je već izabran za poslednji izlet, pa je potrebno odabrati prvih šest izleta, koji se biraju od preostalih 14 mesta. Dobijamo da je broj načina za realizaciju planiranih izleta $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 1$.