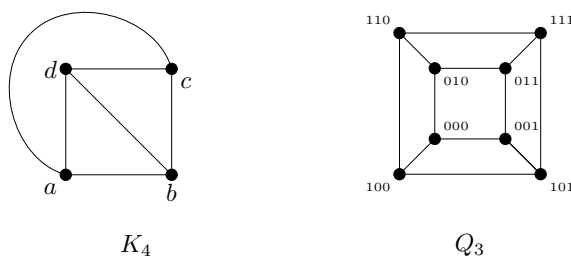


## 3.7 Planarni grafovi

Kao što smo do sada već primetili, jedan isti graf se može nacrtati na različite načine. Ako ga je moguće nacrtati tako da se grane ne seku, onda kažemo da je graf planaran.

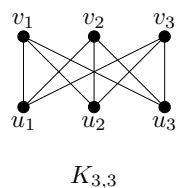
**Definicija 101** Graf je planaran ako se može nacrtati u ravni tako da ne postoje grane koje se seku (osim eventualno zajedničkih čvorova). Za takvu grafičku reprezentaciju grafa reći ćemo da je planarna.

**Primer 22** Grafovi  $K_4$  i  $Q_3$  su planarni. Njihove planarne reprezentacije su date na slici.



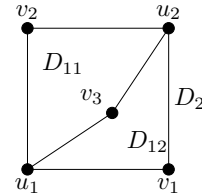
**Primer 23** Kompletan bipartitan graf  $K_{3,3}$  nije planaran. Dokazati!

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $K_{3,3}$  planaran graf.

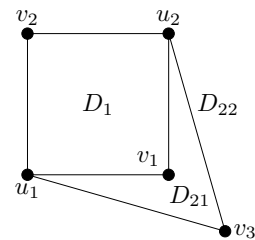


Primetimo da grane  $\{u_1, v_1\}$ ,  $\{v_1, u_2\}$ ,  $\{u_2, v_2\}$ ,  $\{v_2, u_1\}$  kreiraju zatvorenu krivu koja deli ravan na dve oblasti, označićemo ih sa  $D_1$  i  $D_2$ . Imamo dve mogućnosti da nacrtamo čvor  $u_3$ .

- (1)  $u_3 \in D_{11} : \{u_3, v_1\}$  seče rub oblasti  $D_{11}$ ;
- (2)  $u_3 \in D_{12} : \{u_3, v_2\}$  seče rub oblasti  $D_{12}$ ;
- (3)  $u_3 \in D_2 : \{u_3, v_3\}$  seče rub oblasti  $D_2$ .



- (1)  $u_3 \in D_1 : \{u_3, v_3\}$  seče rub oblasti  $D_1$ ;
- (2)  $u_3 \in D_{21} : \{u_3, v_2\}$  seče rub oblasti  $D_{21}$ ;
- (3)  $u_3 \in D_{22} : \{u_3, v_1\}$  seče rub oblasti  $D_{22}$ .



Planarna reprezentacija grafa deli ravan na konačan broj (ograničenih ili neograničenih) oblasti.

$$f = |E| - |V| + 2.$$
$$f_k = |E_k| - |V_k| + 2,$$

Baza  $k = 1$ :  $f_1 = |E_1| - |V_1| + 2 \Leftrightarrow 1 = 1 - 2 + 2$

(i) Ako je  $u, v \in V(G_k)$ , onda je

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k + 1 \\ |V(G_{k+1})| &= |V(G_k)| \\ |E(G_{k+1})| &= |E(G_k)| + 1. \end{aligned}$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{aligned} f_{k+1} = |E_{k+1}| - |V_{k+1}| + 2 &\Leftarrow f_k + 1 = |E(G_k)| + 1 - |V(G_k)| + 2 \\ &\Leftarrow f_k = |E(G_k)| - |V(G_k)| + 2. \end{aligned}$$

(ii) Ako je  $u \in V(G_k)$  i  $v \notin V(G_k)$ , onda je

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k \\ |V(G_{k+1})| &= |V(G_k)| + 1 \\ |E(G_{k+1})| &= |E(G_k)| + 1. \end{aligned}$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{aligned} f_{k+1} = |E_{k+1}| - |V_{k+1}| + 2 &\Leftarrow f_k = |E(G_k)| + 1 - |V(G_k)| - 1 + 2 \\ &\Leftarrow f_k = |E(G_k)| - |V(G_k)| + 2. \end{aligned}$$

□

**Definicija 103** *Stepen oblasti  $D$ , u oznaci  $\text{st}(D)$  je broj grana na rubu te oblasti. Ako se grana pojavljuje dva puta na rubu, ona se računa dva puta.*

Ako graf ima samo dva čvora i jednu granu, onda taj graf određuje samo jednu oblast koja ima stepen dva. U slučaju da postoje bar tri čvora u povezanom grafu, stepen svake oblasti je bar tri.

Pretpostavimo da planarna reprezentacija grafa  $G = (V, E)$  deli ravan na oblasti  $D_1, \dots, D_l$ . Kako se svaka grana računa dva puta u sumi rubova oblasti, sledi

$$\sum_{1 \leq i \leq l} \text{st}(D_i) = 2|E(G)|. \quad (3.2)$$

**Corollary 104** *Neka je  $G = (V, E)$ ,  $|V| \geq 3$ , povezan planaran prost graf i neka je  $f$  broj oblasti na koje on deli ravan. Tada je*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

*Dokaz.* Koristeći 3.3 i činjenicu da je za svak oblast  $\text{st}(D) \geq 3$  dobijamo

$$2|E| = \sum_{1 \leq i \leq l} \text{st}(D_i) \geq 3 \cdot f \Rightarrow f \leq \frac{2}{3}|E|.$$

Iz Ojlerove formule dobijamo, oblast

$$|E| - |V| + 2 \leq \frac{2}{3}|E| \Leftrightarrow |E| \leq 3|V| - 6.$$

□

**Primer 24** *Kompletan graf  $K_5$  nije planaran. Dokazati!*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $K_5$  planaran. Kako je  $|V(K_5)| = 5$  i  $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10$ , na osnovu Posledice 112,

$$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \Leftrightarrow 10 \leq 9$$

što dovodi do kontradikcije.

□

**Corollary 105** *Neka je  $G = (V, E)$ ,  $|V| \geq 3$ , povezan planaran prost graf bez kontura dužine 3. Tada je*

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

*Dokaz.* Ako u grafu ne postoje konture dužine tri, onda je stepen svake oblasti bar četiri. Odatle je

$$2|E| = \sum_{1 \leq i \leq l} \text{st}(D_i) \geq 4 \cdot f \Rightarrow f \leq \frac{1}{2}|E|.$$

Iz Ojlerove formule dobijamo

$$|E| - |V| + 2 \leq \frac{1}{2}|E| \Leftrightarrow |E| \leq 2|V| - 4.$$

**Primer 25** *Kompletan graf  $K_{3,3}$  nije planaran.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $K_{3,3}$  planaran. Kako je  $|V(K_{3,3})| = 6$  i  $|E(K_{3,3})| = 3 \cdot 3 = 9$ , na osnovu Posledice 112,

$$9 \leq 2 \cdot 6 - 4 \Leftrightarrow 9 \leq 8$$

što dovodi do kontradikcije.

□

**Corollary 106** *U svakom povezanom prostom grafu  $G = (V, E)$  postoji čvor stepena manjeg od šest.*

*Dokaz.* Ako graf ima jedan ili dva čvora, tvđenje direktno sledi. Ako graf ima bar tri čvora, pretpostavimo suprotno, da je stepen svakog čvora bar 6, onda je

$$2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq 6|V|$$

Na osnovu Posledice 112 sledi

$$|E| \leq 3|V| - 6 \Leftrightarrow 2|E| \leq 6|V| - 12.$$

Tako smo dobili da je

$$6|V| \leq 2|E| \leq 6|V| - 12 \Leftrightarrow 0 \leq -12,$$

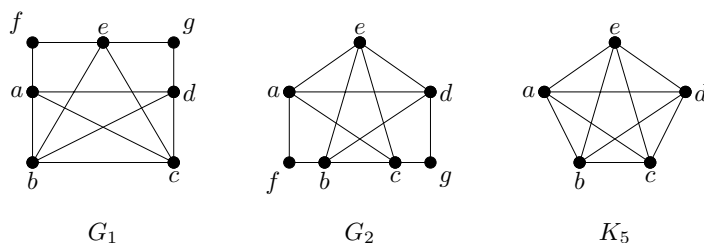
što dovodi do kontradikcije.

Prethodno smo pokazali da grafovi  $K_5$  i  $K_{3,3}$  nisu planarni. Jasno je da graf koji sadrži neki neplanaran graf ne može ni sam biti planaran, zato što bi njegova planarna reprezentacija uključivala planarnu reprezentaciju svakog njegovog pografa. Tako možemo zaključiti da graf koji kao podgraf ima  $K_5$  ili  $K_{3,3}$  ni sam nije planaran. U nastavku ćemo pokazati da slično tvđenje važi čak i ako ti podgrafovi nisu potpuno jednaki  $K_5$  i  $K_{3,3}$ , ali se na neki poseban način mogu na njima svesti.

Ako u prostom planarnom grafu izvršimo deobu proizvoljne grane  $\{u, v\}$  ubacivanjem novog čvora  $w$  i zamenom grane  $\{u, v\}$  granama  $\{u, w\}$  i  $\{w, v\}$ , graf ostaje planaran. Na taj način uvek dodajemo čvor stepena 2.

**Definicija 107** *Grafovi  $G_1 = (V_1, E_1)$  i  $G_2 = (V_2, E_2)$  su homeomorfni ako mogu dobiti od istog graf primenom konačno mnogo elementarnih deoba grana.*

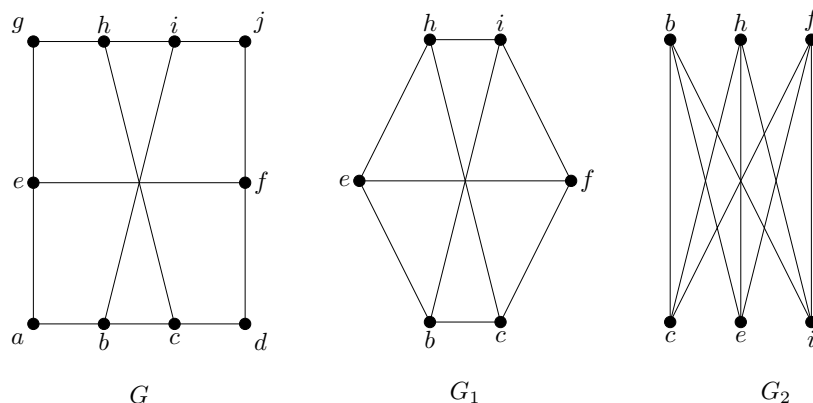
**Primer 26** *Grafovi  $G_1$  i  $G_2$  su homeomorfni, zato što je  $G_1$  dobitan od  $K_5$  deobom grana  $\{a, e\}$  i  $\{e, d\}$ , dok je  $G_2$  dobitan od  $K_5$  deobom grana  $\{a, b\}$  i  $\{c, d\}$ .*



Naredno tvđenje dajemo bez dokaza.

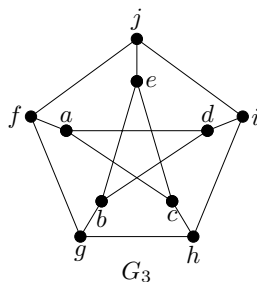
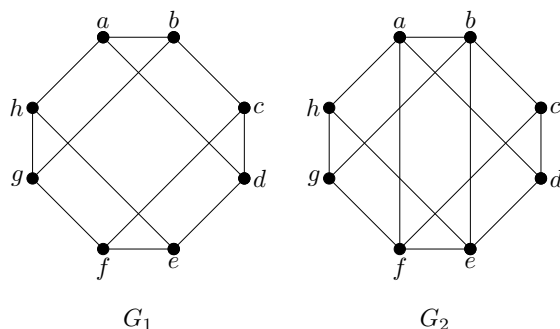
**Teorema 108 (Kuratovski)** Graf  $G = (V, E)$  nije planaran ako sadrži podgraf koji je homeomorfan sa  $K_{3,3}$  ili  $K_5$ .

**Primer 27** Pokazaćemo da graf  $G$  nije planaran, zato što je homeomorfan grafu  $K_{3,3}$ . Graf  $G$  je dobijen od grafa  $G_1$  deobom grana  $\{e, h\}$ ,  $\{i, j\}$ ,  $\{b, e\}$  i  $\{f, c\}$ . Kada dalje posmatramo  $G_1$ , možemo primetiti da skupovi  $\{c, e, i\}$  i  $\{b, f, h\}$  imaju osobinu da par čvorova iz istog skupu nije povezan granom, dok su parovi koji pripadaju različitim skupovima povezani granom. Ako čvorove drugačije rasporedimo onda graf  $G_1$  možemo grafički predstaviti kao  $G_2$ . Sada se vidi da je  $G$  homeomorfan sa  $K_{3,3}$ , odakle zaključujemo da nije planaran.



## 3.7.1 Zadaci za vežbu

1. Neka je  $G$  povezan planaran graf sa  $m$  grana i  $n \geq 4$  čvorova, koji ne sadrži konture dužine manje od 5. Pokazati da je  $m \leq \frac{5}{3}n - \frac{10}{3}$ .
2. Neka je  $G$  povezan planaran graf sa 8 čvorova stepena 3. Na koliko oblasti planarna reprezentacija grafa  $G$  deli ravan?
3. Ispitati da li je  $K_{2,7}$  planaran graf. Ako jeste, dati njegovu planarnu reprezentaciju i odrediti na koliko oblasti deli ravan. Ako nije, obrazložiti.
4. Ispitati da li je  $G_1$  planaran graf. Ako jeste, dati njegovu planarnu reprezentaciju i odrediti na koliko oblasti deli ravan. Ako nije, obrazložiti.
5. Ispitati da li je  $G_2$  planaran graf. Ako jeste, dati njegovu planarnu reprezentaciju i odrediti na koliko oblasti deli ravan. Ako nije, obrazložiti.
6. Pokazati da Petersenov graf  $G_3$  nije planaran.

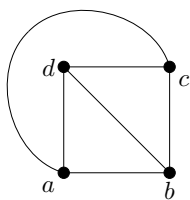
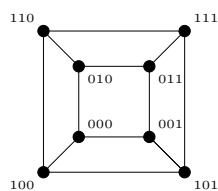


### 3.8 Planarni grafovi

Kao što smo do sada već primetili, jedan isti graf se može nacrtati na različite načine. Ako ga je moguće nacrtati tako da se grane ne seku, onda kažemo da je graf planaran.

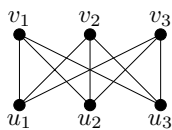
**Definicija 109** Graf je planaran ako se može nacrtati u ravni tako da ne postoje grane koje se seku (osim eventualno zajedničkih čvorova). Za takvu grafičku reprezentaciju grafa reći ćemo da je planarna.

**Primer 28** Grafovi  $K_4$  i  $Q_3$  su planarni. Njihove planarne reprezentacije su date na slici.

 $K_4$  $Q_3$ 

**Primer 29** Kompletan bipartitan graf  $K_{3,3}$  nije planaran. Dokazati!

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $K_{3,3}$  planaran graf.

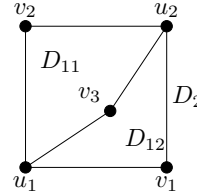
 $K_{3,3}$ 

Primetimo da grane  $\{u_1, v_1\}$ ,  $\{v_1, u_2\}$ ,  $\{u_2, v_2\}$ ,  $\{v_2, u_1\}$  kreiraju zatvorenu krivu koja deli ravan na dve oblasti, označićemo ih sa  $D_1$  i  $D_2$ . Imamo dve mogućnosti da nacrtamo čvor  $u_3$ .



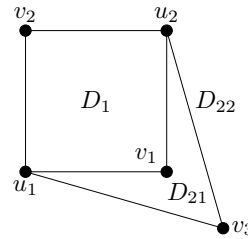
(i) Ako čvor  $v_3$  nacrtamo unutar oblasti  $D_1$ , za  $u_3$  imamo jednu od tri mogućnosti:

- (1)  $u_3 \in D_{11} : \{u_3, v_1\}$  seče rub oblasti  $D_{11}$ ;
- (2)  $u_3 \in D_{12} : \{u_3, v_2\}$  seče rub oblasti  $D_{12}$ ;
- (3)  $u_3 \in D_2 : \{u_3, v_3\}$  seče rub oblasti  $D_2$ .



(ii) Ako čvor  $v_3$  nacrtamo unutar oblasti  $D_2$ , za  $u_3$  imamo jednu od tri mogućnosti:

- (1)  $u_3 \in D_1 : \{u_3, v_3\}$  seče rub oblasti  $D_1$ ;
- (2)  $u_3 \in D_{21} : \{u_3, v_2\}$  seče rub oblasti  $D_{21}$ ;
- (3)  $u_3 \in D_{22} : \{u_3, v_1\}$  seče rub oblasti  $D_{22}$ .



□

Planarna reprezentacija grafa deli ravan na konačan broj (ograničenih ili neograničenih) oblasti.

**Teorema 110 (Ojlerova formula)** Neka je  $G = (V, E)$ ,  $|V| \geq 2$ , povezan planaran prost graf i neka je  $f$  broj oblasti na koje on deli ravan. Tada je

$$f = |E| - |V| + 2.$$

*Dokaz.* Neka je  $|E| = m$ . Posmatrajmo planarnu reprezentaciju grafa. Neka je  $G_1$  graf koji sadrži proizvoljnu granu grafa  $G$  i njoj incidentne čvorove. Ako je  $m \geq 2$ , konstruišimo dalje sukcesivno podgrafove  $G_2, \dots, G_m$  tako što ćemo svakom sledećem grafu dodati granu koja je incidentna sa jednim čvorom prethodnog podgraфа, kao i eventualno novi čvor incidentan sa tom granom. Takva grana sigurno postoji, zato što je graf povezan. Dokazaćemo da za svako  $k \in \{1, \dots, m\}$  važi

$$f_k = |E_k| - |V_k| + 2,$$

primenom matematičke indukcije.

Baza  $k = 1$ :  $f_1 = |E_1| - |V_1| + 2 \Leftrightarrow 1 = 1 - 2 + 2$

Induktivni korak  $T_k \Rightarrow T_{k+1}$ : Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve vrednosti manje od  $k$ . Neka je  $G_{k+1} = G_k + \{u, v\}$ .

(i) Ako je  $u, v \in V(G_k)$ , onda je

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k + 1 \\ |V(G_{k+1})| &= |V(G_k)| \\ |E(G_{k+1})| &= |E(G_k)| + 1. \end{aligned}$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{aligned} f_{k+1} = |E_{k+1}| - |V_{k+1}| + 2 &\Leftarrow f_k + 1 = |E(G_k)| + 1 - |V(G_k)| + 2 \\ &\Leftarrow f_k = |E(G_k)| - |V(G_k)| + 2. \end{aligned}$$

(ii) Ako je  $u \in V(G_k)$  i  $v \notin V(G_k)$ , onda je

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k \\ |V(G_{k+1})| &= |V(G_k)| + 1 \\ |E(G_{k+1})| &= |E(G_k)| + 1. \end{aligned}$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{aligned} f_{k+1} = |E_{k+1}| - |V_{k+1}| + 2 &\Leftarrow f_k = |E(G_k)| + 1 - |V(G_k)| - 1 + 2 \\ &\Leftarrow f_k = |E(G_k)| - |V(G_k)| + 2. \end{aligned}$$

□

**Definicija 111** *Stepen oblasti  $D$ , u oznaci  $\text{st}(D)$  je broj grana na rubu te oblasti. Ako se grana pojavljuje dva puta na rubu, ona se računa dva puta.*

Ako graf ima samo dva čvora i jednu granu, onda taj graf određuje samo jednu oblast koja ima stepen dva. U slučaju da postoje bar tri čvora u povezanom grafu, stepen svake oblasti je bar tri.

Pretpostavimo da planarna reprezentacija grafa  $G = (V, E)$  deli ravan na oblasti  $D_1, \dots, D_l$ . Kako se svaka grana računa dva puta u sumi rubova oblasti, sledi

$$\sum_{1 \leq i \leq l} \text{st}(D_i) = 2|E(G)|. \quad (3.3)$$

**Corollary 112** *Neka je  $G = (V, E)$ ,  $|V| \geq 3$ , povezan planaran prost graf i neka je  $f$  broj oblasti na koje on deli ravan. Tada je*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

*Dokaz.* Koristeći 3.3 i činjenicu da je za svaku oblast  $\text{st}(D) \geq 3$  dobijamo

$$2|E| = \sum_{1 \leq i \leq l} \text{st}(D_i) \geq 3 \cdot f \Rightarrow f \leq \frac{2}{3}|E|.$$

Iz Ojlerove formule dobijamo, oblast

$$|E| - |V| + 2 \leq \frac{2}{3}|E| \Leftrightarrow |E| \leq 3|V| - 6.$$

□

**Primer 30** *Kompletni graf  $K_5$  nije planaran. Dokazati!*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $K_5$  planaran. Kako je  $|V(K_5)| = 5$  i  $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10$ , na osnovu Posledice 112,

$$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \Leftrightarrow 10 \leq 9$$

što dovodi do kontradikcije.

□

**Corollary 113** *Neka je  $G = (V, E)$ ,  $|V| \geq 3$ , povezan planaran prost graf bez kontura dužine 3. Tada je*

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

*Dokaz.* Ako u grafu ne postoje konture dužine tri, onda je stepen svake oblasti bar četiri. Odatle je

$$2|E| = \sum_{1 \leq i \leq l} \text{st}(D_i) \geq 4 \cdot f \Rightarrow f \leq \frac{1}{2}|E|.$$

Iz Ojlerove formule dobijamo

$$|E| - |V| + 2 \leq \frac{1}{2}|E| \Leftrightarrow |E| \leq 2|V| - 4.$$

**Primer 31** *Kompletni graf  $K_{3,3}$  nije planaran.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $K_{3,3}$  planaran. Kako je  $|V(K_{3,3})| = 6$  i  $|E(K_{3,3})| = 3 \cdot 3 = 9$ , na osnovu Posledice 112,

$$9 \leq 2 \cdot 6 - 4 \Leftrightarrow 9 \leq 8$$

što dovodi do kontradikcije.

□

**Corollary 114** *U svakom povezanom prostom grafu  $G = (V, E)$  postoji čvor stepena manjeg od šest.*

*Dokaz.* Ako graf ima jedan ili dva čvora, tvđenje direktno sledi. Ako graf ima bar tri čvora, pretpostavimo suprotno, da je stepen svakog čvora bar 6, onda je

$$2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq 6|V|$$

Na osnovu Posledice 112 sledi

$$|E| \leq 3|V| - 6 \Leftrightarrow 2|E| \leq 6|V| - 12.$$

Tako smo dobili da je

$$6|V| \leq 2|E| \leq 6|V| - 12 \Leftrightarrow 0 \leq -12,$$

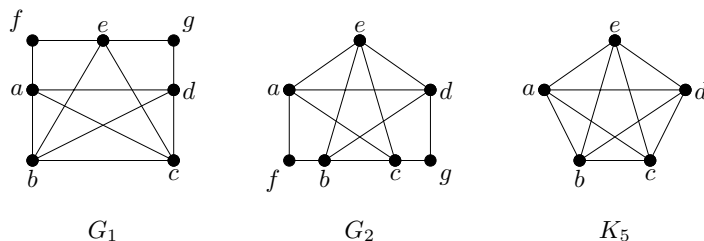
što dovodi do kontradikcije.

Prethodno smo pokazali da grafovi  $K_5$  i  $K_{3,3}$  nisu planarni. Jasno je da graf koji sadrži neki neplanaran graf ne može ni sam biti planaran, zato što bi njegova planarna reprezentacija uključivala planarnu reprezentaciju svakog njegovog pografa. Tako možemo zaključiti da graf koji kao podgraf ima  $K_5$  ili  $K_{3,3}$  ni sam nije planaran. U nastavku ćemo pokazati da slično tvđenje važi čak i ako ti podgrafovi nisu potpuno jednaki  $K_5$  i  $K_{3,3}$ , ali se na neki poseban način mogu na njih svesti.

Ako u prostom planarnom grafu izvršimo deobu proizvoljne grane  $\{u, v\}$  ubacivanjem novog čvora  $w$  i zamenom grane  $\{u, v\}$  granama  $\{u, w\}$  i  $\{w, v\}$ , graf ostaje planaran. Na taj način uvek dodajemo čvor stepena 2.

**Definicija 115** *Grafovi  $G_1 = (V_1, E_1)$  i  $G_2 = (V_2, E_2)$  su homeomorfni ako mogu dobiti od istog graf primenom konačno mnogo elementarnih deoba grana.*

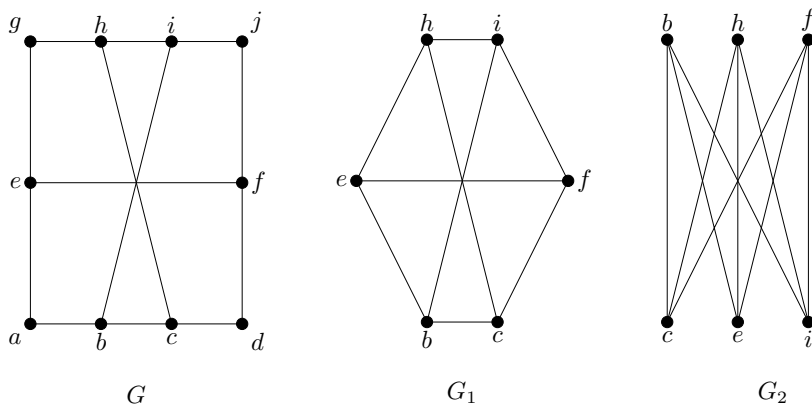
**Primer 32** *Grafovi  $G_1$  i  $G_2$  su homeomorfni, zato što je  $G_1$  dobitan od  $K_5$  deobom grana  $\{a, e\}$  i  $\{e, d\}$ , dok je  $G_2$  dobitan od  $K_5$  deobom grana  $\{a, b\}$  i  $\{c, d\}$ .*



Naredno tvđenje dajemo bez dokaza.

**Teorema 116 (Kuratovski)** Graf  $G = (V, E)$  nije planaran ako sadrži podgraf koji je homeomorfan sa  $K_{3,3}$  ili  $K_5$ .

**Primer 33** Pokazaćemo da graf  $G$  nije planaran, zato što je homeomorfan grafu  $K_{3,3}$ . Graf  $G$  je dobijen od grafa  $G_1$  deobom grana  $\{e, h\}$ ,  $\{i, j\}$ ,  $\{b, e\}$  i  $\{f, c\}$ . Kada dalje posmatramo  $G_1$ , možemo primetiti da skupovi  $\{c, e, i\}$  i  $\{b, f, h\}$  imaju osobinu da par čvorova iz istog skupu nije povezan granom, dok su parovi koji pripadaju različitim skupovima povezani granom. Ako čvorove drugačije rasporedimo onda graf  $G_1$  možemo grafički predstaviti kao  $G_2$ . Sada se vidi da je  $G$  homeomorfan sa  $K_{3,3}$ , odakle zaključujemo da nije planaran.



### 3.8.1 Zadaci za vežbu

1. Neka je  $G$  povezan planaran graf sa  $m$  grana i  $n \geq 4$  čvorova, koji ne sadrži konture dužine manje od 5. Pokazati da je  $m \leq \frac{5}{3}n - \frac{10}{3}$ .
2. Neka je  $G$  povezan planaran graf sa 8 čvorova stepena 3. Na koliko oblasti planarna reprezentacija grafa  $G$  deli ravan?
3. Ispitati da li je  $K_{2,7}$  planaran graf. Ako jeste, dati njegovu planarnu reprezentaciju i odrediti na koliko oblasti deli ravan. Ako nije, obrazložiti.
4. Ispitati da li je  $G_1$  planaran graf. Ako jeste, dati njegovu planarnu reprezentaciju i odrediti na koliko oblasti deli ravan. Ako nije, obrazložiti.
5. Ispitati da li je  $G_2$  planaran graf. Ako jeste, dati njegovu planarnu reprezentaciju i odrediti na koliko oblasti deli ravan. Ako nije, obrazložiti.
6. Pokazati da Petersenov graf  $G_3$  nije planaran.

