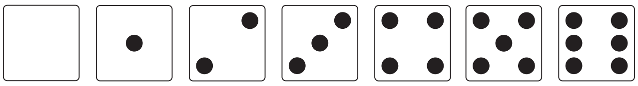
NEUREĐENI IZBORI

1. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1000000 čiji je zbir cifara 7?

Rešenje: Svaki prirodan broj manji od 10^6 možemo zapisati kao $a_1a_2...a_6$, gde je $0 \leq a_i \leq 9$. Dakle, prirodnih brojeva koji zadovoljavaju uslov iz zadatka ima koliko ima i rešenja jednačine $a_1 + a_2 + ... + a_6 = 7$ na skupu nenegativnih celih brojeva, odnosno $\binom{5+7}{7} = \binom{5+7}{5}$.

2. Domina je pločica za igru na koju su nalepljene dve sličice (ne obavezno različite). Ako na raspolaganju imamo 7 vrsta sličica, koliko je različitih domina moguće napraviti pomoću njih?

Rešenje: Standardni paket sadrži domine sa sledećim sličicama:



Neka je sa x_i označen broj sličica na kojima je nacrtano i tačkica na jednoj uočenoj domini, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$. Kako svaka domina ima dve sličice, važi $0 \leq x_i \leq 2$, za svako i. Sada broj domina odgovara broju rešenja jednačine

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$$

u skupu nenegaticnih celih brojeva. Prema tome, broj različitih domina koje možemo napraviti sa datim vrstama sličica je $\binom{2+6}{2} = \binom{8}{2} = 28$.

3. Koliko ima binarnih nizova od n nula i $2n + 2$ jedinica takvih da se između svake dve nule nalaze bar dve jedinice?

Rešenje: Rasporedimo n nula, a zatim $2(n-1)$ jedinica po dve između svake dve nule. Broj načina da rasporedimo preostale 4 jedinice odgovara broju rasporeda 4 kuglice u $n + 1$ kutiju, gde u svakoj kutiji može da bude od 0 do 4 kuglice, tj. traženi broj je $\binom{n+4}{4}$.

4. Iz kompleta koji sadrži 32 razližite karte bira se 8 karata SA/BEZ vraćanja, tako da njihov redosled JESTE/NIJE bitan. Koliko različitih izbora ima?

Rešenje:
Slučaj SA/JESTE (sa vraćanjem, a redosled jeste bitan) odgovara broju 8–permutacija elemenata multiskupa $\overline{P}(32; 8) = 32^8$.

Slučaj SA/NIJE odgovara kombinacijama elemenata multiskupa (32 karte kao 32 kutije razdvojene 31 pregradom i 8 kuglica), $\overline{C}(32; 8) = \binom{31+8}{8} = \binom{39}{8}$.

Slučaj BEZ/JESTE odgovara broju 8–permutacija elemenata skupa sa 32 elementa, tj. $P(32;8) = 32 \cdot 31 \cdot ... \cdot (32 - 8 + 1)$.

Slučaj BEZ/NIJE odgovara kombinacijama elemenata skupa $C(32;8) = \binom{32}{8}$.

5. Koliko celobrojnih rešenja ima jednačina

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 23,$$

pod uslovom da važi $x_1 > 1$, $x_2 > 2$, $x_3 > 3$, $x_4 > 4$ i $x_5 > 5$?

Rešenje: Kako su uslovi $x_i \geq i + 1$, uvodeći nove promenljive $y_i = x_i - i - 1$ dobijamo da za svako y_i važi $y_i \geq 0$, kao i

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 23 - (2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.$$

Dakle, problem se sveo na traženje broja rešenja jednačine $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 3$ na skupu nenegativnih celih brojeva i taj broj iznosi $\binom{4+3}{3}$.

6. Broj studenata koji izlaze na usmeni ispit iz Algebre je 60. Usmeni se može polagati kod jednog od tri profesora. Prva dva profesora moraju ispitati bar 10 studenata, a treći bar 15. Na koliko načina profesori mogu da izvrše podelu posla, ukoliko nam nije bitno koji će student kod koga odgovarati, nego samo broj ispitanih studenata po profesoru?

Rešenje: Neka je x_i broj studenata koje ispita i-ti profesor, $1 \leq i \leq 3$. Tražimo broj rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + x_3 = 60, \quad \text{ako je } x_1 \geq 10,\ x_2 \geq 10,\ x_3 \geq 15.$$

Uvodeći nove promenljive $y_1 = x_1 - 10$, $y_2 = x_2 - 10$ i $y_3 = x_3 - 15$ problem se svodi na određivanje broja rešenja jednačine $y_1 + y_2 + y_3 = 60 - 35 = 25$ na skupu nenegativnih celih brojeva, $y_i \geq 0$. Profesori mogu podeliti posao na $\binom{2+25}{2} = \frac{27 \cdot 26}{2}$ načina.

7. Koliko rešenja u skupu nenegativnih celih brojeva ima nejednačina

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leq n?$$

Rešenje: Jedan način jeste da nađemo brojeve rešenja jednačina

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = i, \quad 0 \leq i \leq n$$

u skupu nenegativnih celih brojeva i sve ih saberemo, tj. $\sum_{i=0}^{n} \binom{i+m-1}{i}$.

Nešto elegantniji način bi bio da nađemo broj svih rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m + y = n$$

u skupu nenegativnih celih brojeva. Jasno, y može uzimati vrednosti od 0 do n, čime preostali zbir $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ uzima respektivno vrednosti od n do 0.

Broj rešenja nejednačine iznosi $\binom{m+n}{n}$.

8. Odrediti broj uređenih petorki $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ sa osobinom

$$3 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq 1.$$

Rešenje: Primetimo da u zadatku nemamo stroge nejednakosti i da se rešenje može interpretirati pomoću kutija i kuglica. Kutije su numerisane redom brojevima 3, 2 i 1, a kuglica imamo 5. Svaki raspored kuglica u kutijama odgovara jednoj uređenoj petorki koja zadovoljava uslove zadatka i obrnuto. Na primer, rasporedu u kome u prvoj kutiji imamo 2 kuglice, drugoj 3, a nijednu u trećoj kutiji odgovara uređena petorka $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (3, 3, 2, 2, 2)$.

Rešenje je $\binom{2+5}{5} = \binom{7}{2} = 21$.

9. Napisati JAVA kod koji generiše sve monotono neopadajuće uređene šestorke elemenata iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$.

Rešenje:

```java
public class neopadajuce6torke{

    public static void main(String []args){
       int s=0;

       for (int i=1; i<=4; i++){
           for (int j=i; j<=4; j++){
               for (int k=j; k<=4; k++){
                   for (int l=k; l<=4; l++){
                       for (int m=l; m<=4; m++){
                           for (int n=m; n<=4; n++){
                               s++;
                               System.out.println(""+i+j+k+l+m+n);
                           } } } } } }

       System.out.println("S= "+s);

    }
}
```

Broj ovakvih šestorki odgovara raspoređivanju 6 kuglica u 4 kutije i iznosi $\binom{6+3}{3} = \binom{9}{3} = 84$.

10. Dati kombinatornu interpretaciju izračunavanja vrednosti promenljive `s` na kraju izvršavanja koda napisanog u programskom jeziku JAVA:

```java
public class IzracunajS{

   public static void main(String[] args) {
       int s=0;

       for (int i=1; i<=20; i++){
           for (int j=1; j<=20; j++){
               for (int k=j; k<=20; k++){
                   for (int l=k; l<=20; l++){
                       if (i != j){
                            s += 1;
                       }
                   }
               }
           }
       }

      System.out.println("S= "+s);
   }
}
```

Rešenje: Brojač i je nezavisan od preostala 3 brojača i uzima vrednosti od 1 do 20. Za brojače j, k i l važi $1 \leq j \leq k \leq l \leq 20$. Promenljiva s broji uređene četvorke (i, j, k, l) kod kojih je $i \neq j$, $1 \leq i \leq 20$ i $1 \leq j \leq k \leq l \leq 20$.

Ideja je da prvo nađemo broj četvorki (i, j, k, l) sa uslovima $1 \leq i \leq 20$ i $1 \leq j \leq k \leq l \leq 20$, dakle bez uslova $i \neq j$. Za traženje broja uređenih trojki (j, k, l) sa uslovom $1 \leq j \leq k \leq l \leq 20$, koristimo ideju rešenja Zadatka 8. Ovakvih trojki ima koliko ima i rasporeda 3 kuglice u 20 kutija, tj. $\binom{19+3}{3} = \binom{22}{3}$, pa je broj četvorki, uzimajući u obzir da i uzima vrednosti od 1 do 20 nezavisno od preostala 3 brojača, jednak $20 \cdot \binom{22}{3}$.

Zatim nalazimo broj cetvorki (i, j, k, l) sa uslovima $1 \leq i \leq 20$ i $1 \leq j \leq k \leq l \leq 20$ kod kojih je $i = j$.

Analiziramo po slučajevima:
Za $i = 1$ tražimo sve trojke (j, k, l) za koje je $j = 1$ i važi $j \leq k \leq l \leq 20$.
Za $i = 2$ tražimo sve trojke (j, k, l) za koje je $j = 2$ i važi $j \leq k \leq l \leq 20$
$\vdots$
Za $i = 20$ tražimo sve trojke (j, k, l) za koje je $j = 20$ i važi $j \leq k \leq l \leq 20$.

Kako u svim trojkama (j, k, l), $1 \leq j \leq k \leq l \leq 20$ promenljiva j uzima vrednosti od 1 do 20, gornji slučajevi su ustvari pokupili sve ove uređene trojke. Ovakvih trojki ima $\binom{22}{3}$.

Dakle, rešenje je $20 \cdot \binom{22}{3} - \binom{22}{3} = 19 \cdot \binom{22}{3}$.

1. Dokazati da je $\displaystyle\sum_{i=0}^{r}\binom{n+i}{i}=\binom{n+r+1}{r}$.

Rešenje: Dokaz dajemo indukcijom po r.

BI: Za $r=0$ jednakost je tačna, jer je $\binom{n+0}{0}=\binom{n+0+1}{0}=1$.

IH: Pretpostavimo da je jednakost tačna za $r=k$, tj. da važi

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{i}=\binom{n+k+1}{k}.$$

IK: Dokažimo da je jednakost tačna za $r=k+1$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}\binom{n+i}{i} &= \sum_{i=1}^{k}\binom{n+i}{i}+\binom{n+k+1}{k+1} && \text{(IH)}\\ &= \binom{n+k+1}{k}+\binom{n+k+1}{k+1} && \text{(Paskalov iden.)}\\ &= \binom{n+k+2}{k+1}.\end{aligned}$$

II način: Treba dokazati da važi:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+r-1}{r-1}+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r+1}{r}.$$

Koristeći Paskalov identitet dobijamo:

$$\begin{aligned}\binom{n+r+1}{r} &= \binom{n+r}{r}+\binom{n+r}{r-1}\\ &= \binom{n+r}{r}+\binom{n+r-1}{r-1}+\binom{n+r-1}{r-2}=\\ &= \binom{n+r}{r}+\binom{n+r-1}{r-1}+\binom{n+r-2}{r-2}+\binom{n+r-2}{r-3}\\ &\ \vdots\\ &= \binom{n+r}{r}+\binom{n+r-1}{r-1}+\cdots+\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{1}\\ &= \binom{n+r}{r}+\binom{n+r-1}{r-1}+\cdots+\binom{n+2}{2}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{0}.\end{aligned}$$

Kako je $\binom{n+1}{0}=1=\binom{n}{0}$ dobijamo da važi

$$\binom{n+r+1}{r}=\binom{n+r}{r}+\binom{n+r-1}{r-1}+\cdots+\binom{n+2}{2}+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{0}.$$

2. Dokazati da je $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \qquad \text{(smena: j=k-1)}\\ &= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n2^{n-1}.\end{aligned}$$

II način: Posmatrajmo razvoj izraza $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

Diferenciranjem razvoja po x dobijamo

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}.$$

Kada uvrstimo $x = 1$ u prethodni izraz dobijamo

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k,$$

čime je pokazano traženo tvrđenje.

3. Dokazati da je $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{n+1}\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} \qquad \text{(smena: j=k+1)}\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}-\binom{n+1}{0}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\cdot(2^{n+1}-1).\end{aligned}$$

4. Dokazati da je $\binom{m}{n}\binom{n}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}$.

Rešenje: **Algebarski dokaz:**

$$\begin{aligned}\binom{m}{n}\binom{n}{k} &= \frac{m!}{n!(m-n)!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{(m-k)!}{(n-k)!(m-n)!}\\ &= \binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}.\end{aligned}$$

Kombinatorni dokaz:

Neka je dat skup M sa m elemenata. Izračunajmo broj načina da formiramo skupove N i K, takve da važi $K \subseteq N \subseteq M$, $|K| = k$ i $|N| = n$. Dva su moguća pristupa rešavanju zavisno od redosleda formiranja ovih skupova.

Možemo prvo formirati skup N na $\binom{m}{n}$ načina, birajući n od m elemenata skupa M. Kako skup K mora biti podskup od N, njega možemo formirati na $\binom{n}{k}$ načina. Dakle, broj načina da formiramo skupove N i K, takve da važi $K \subseteq N \subseteq M$ iznosi $\binom{m}{n}\binom{n}{k}$, što je leva strana jednakosti.

Ukoliko bismo problem rešavali tako što prvo formiramo skup K, birajući k od m elemenata skupa M, a zatim skup K dopunjavali do skupa N dobili bismo desnu stranu jednakosti koju dokazujemo. Naime, broj načina da formiramo skup K je $\binom{m}{k}$, a broj načina da izaberemo još $n-k$ od $m-k$ elemenata za dopunjavanje do skupa N iznosi $\binom{m-k}{n-k}$.

5. Dokazati Vandermondov identitet

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}.$$

Rešenje: Posmatrajmo problem izbora k ljudi iz grupe od m žena i n muškaraca. Kako nemamo nikakav uslov u vezi sa polom osoba koje biramo, broj načina da izaberemo k ljudi iz ove grupe je $\binom{m+n}{k}$, što odgovara desnoj strani jednakosti koju dokazujemo.

S druge strane, sve te izbore možemo grupisati u zavisnosti od broja žena među k izabranih. Izbora u kojima nema žena ima $\binom{m}{0}\binom{n}{k}$, sa jednom ženom $\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}$, itd. Završavamo sa izborima u kojima su sve žene i njih ima $\binom{m}{k}\binom{n}{0}$. Dakle, ovom pristupu odgovara leva strana jednakosti, čime smo pokazali da su leva i desna strana jednakosti iste jer predstavljaju rešenje istog kombinatornog problema.

Napomena: Primetimo da se Vandermondov identitet može zapisati na sledeći način:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

6. Dokazati da je $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Rešenje: U dokazu korisitimo Vandermondov identitet i simetričnost binomnih koeficijenata.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}.$$

7.* Dokazati da je $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{2k}+\cdots = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{2k+1}+\cdots = 2^{n-1}$.

Rešenje: Prvi deo tvrđenja možemo zapisati na sledeći način: dokazati da svaki skup sadrži isti broj podskupova sa parnim i sa neparnim brojem elemenata. Posmatrajmo proizvoljan skup X sa n elemenata i neka je $x \in X$. Neka se u $\mathcal{A}$ nalaze svi podskupovi skupa X koji imaju paran broj elemenata, a u $\mathcal{B}$ svi podskupovi sa neparnim brojem elemenata. Sada za $A \in \mathcal{A}$ definišemo preslikavanje $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ na sledeći način:

$$f(A) = \begin{cases} A \cup \{x\}, & x \notin A \\ A \setminus \{x\}, & x \in A \end{cases}.$$

Ovo preslikavanje je očigledno bijekcija, te vazˇi $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$. Ovime je dokazan prvi deo tvrđenja. Kako je ukupan broj podskupova skupa sa n elemenata 2^n i kako svaki skup ima isti broj podskupova sa parnim i sa neparnim brojem elemenata, trivijalno važi da je broj takvih podskupova 2^{n-1}.

II način: Ako u formulu $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ stavimo $x = 1$ i $x = -1$, dobijamo sledeće identitete $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ i $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$. Ukoliko saberemo dobijene jednakosti dobićemo da važi

$$2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + \cdots + 2\binom{n}{2k} + \cdots = 2^n,$$

odakle je $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{2k} + \cdots = 2^{n-1}$.

Slično, oduzimanjem gornjih jednakosti dobijamo

$$2\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + 2\binom{n}{5} + \cdots + 2\binom{n}{2k+1} + \cdots = 2^n,$$

pa je $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots + \binom{n}{2k+1} + \cdots = 2^{n-1}$.

8. Naći koeficijent uz a^3b^2 u razvoju izraza $(3a-2b)^5$.

Rešenje:

$$(3a-2b)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(3a)^k(-2b)^{5-k}=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}3^k(-2)^{5-k}a^kb^{5-k}.$$

Za $k=3$ dobijamo da je koeficijent uz a^3b^2 jednak $\binom{5}{3}3^3(-2)^{5-3}=1080$.

9. Naći koeficijent uz x^5 u razvoju izraza $(3\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}})^{20}$.

Rešenje:

$$(3\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^{20}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}(3\sqrt{x})^k(\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^{20-k}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\frac{3^k}{2^{20-k}}\cdot x^{\frac{k}{2}-\frac{20-k}{3}}.$$

Eksponent od x je jednak 5 kada je $\frac{k}{2}-\frac{20-k}{3}=5$, odnosno za $k=14$. Koeficijent uz x^5 je $\binom{20}{14}\dfrac{3^{14}}{2^{20-14}}=\binom{20}{14}3^{14}\cdot 2^{-6}$.

10. Zbir binomnih koeficijenata pri razvoju $(1+x)^n+(1+x)^{n+1}$ jednak je 1536. Odrediti koeficijent uz x^6.

Rešenje:

$$(1+x)^n+(1+x)^{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i+\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^j \tag{1}$$

Zbir binomnih koeficijenata dobijamo za $x=1$, pa važi:

$$2^n+2^{n+1}=1536.$$

Rešenje gornje jednačine je $n=9$. Iz (1) sledi da za $i=6$ i $j=6$ dobijamo koeficijent uz x^6, pa je traženi koeficijent $\binom{9}{6}+\binom{10}{6}=294$.

Napomena: Primetimo da smo do traženog koeficijenta mogli doći i na sledeći način.

$$\begin{aligned}(1+x)^n+(1+x)^{n+1}&=(1+(1+x))\ \ (1+x)^n\\&=(x+2)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}\ +\ 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.\end{aligned}$$

Kako je $n=9$, dobijamo da je koeficijent uz x^6 jednak $\binom{9}{5}+2\binom{9}{6}=294$.

11. Naći koeficijent uz $x^2y^3z^2$ u razvoju izraza $(x+y+z)^7$.

Rešenje:

$$(x+y+z)^7 = \sum_{\sum_{i=1}^{3} n_i=7,\ n_i\geq 0} \binom{7}{n_1, n_2, n_3} x^{n_1}\, y^{n_2}\, z^{n_3}.$$

Monom $x^2y^3z^2$ dobijamo za $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, te je koeficijent uz njega $\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2!3!2!}$.

12. Naći koeficijent uz x^{10} u razvoju izraza $(1-x^2+x^3)^{11}$.

Rešenje:

$$(1-x^2+x^3)^{11} = \sum_{\sum_{i=1}^{3} n_i=11,\ n_i\geq 0} \binom{11}{n_1, n_2, n_3} (-x^2)^{n_2}\, (x^3)^{n_3}.$$

Eksponent od x je jednak 10 kada je $2n_2 + 3n_3 = 10$. Kako su n_2 i n_3 nenegativni celi brojevi, rešenja su uređeni parovi $(n_2, n_3) = (5, 0)$ i $(n_2, n_3) = (2, 2)$.

Koeficijent uz x^{10} je: $(-1)^5 \frac{11!}{6!5!0!} + (-1)^2 \frac{11!}{7!2!2!}$.