MATEMATIČKA INDUKCIJA

1. Neka je za prirodan broj $n \geq 1$ data suma S_n prvih n prirodnih brojeva

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i.$$

   (a) Generisati zatvorenu formu $S(n)$ za datu sumu.
   (b) Dokazati da je $S_n = S(n)$.

2. Neka je za prirodan broj $n \geq 1$ data suma S_n prvih n neparnih prirodnih brojeva

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1).$$

   (a) Generisati zatvorenu formu $S(n)$ za datu sumu.
   (b) Dokazati da je $S_n = S(n)$.

3. Neka je za prirodan broj $n \geq 1$ data suma S_n

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}.$$

   (a) Generisati zatvorenu formu $S(n)$ za datu sumu.
   (b) Dokazati da je $S_n = S(n)$.

4. Primenom matematičke indukcije, dokazati da je $5^n + 2^{n+1}$ deljiv sa 3 za svaki prirodan broj n.

5. Dokazati da je $2^n > n^2$ za svaki prirodan broj $n \geq 5$.

6. Neka je U univerzalni skup.
   (a) Dokazati da je $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, gde su $A, B \subseteq U$.
   (b) Dokazati da je $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$, gde je $n \geq 2$ i $A_1, \ldots, A_n \subseteq U$.

7. Neka je niz brojeva $\{a_n\}_{n \geq 1}$ definisan na sledeći način:
   - $a_1 = 5$
   - $a_2 = 13$
   - $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $n \geq 3$.

   Dokazati da je $a_n = 2^n + 3^n$ za svaki prirodan broj n.

8. Neka je Fibonačijev niz brojeva $\{f_n\}_{n \geq 0}$ definisan na sledeći način:
   - $f_0 = 0$
   - $f_1 = 1$
   - $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$.

   Ako je $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, dokazati da je $f_n < \alpha^{n+1}$, za svaki ceo broj $n \geq 0$.

9. Posmatraćemo alfabet koji čine:
   - beskonačan skup iskaznih slova $P = \{p, q, r, \ldots\}$;
   - logičke konstante: $\top$, $\bot$;
   - simboli logičkih veznika: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
   - zagrade: (,).

   Definicija 1 *Skup iskaznih formula je najmanji skup reči datog alfabeta koji zadovoljava sledeće osobine:*
   - *Iskazna slova i logičke konstante su iskazne formule;*

- *Ako su φ i ψ iskazne formule, onda su i*

$$\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \Leftrightarrow \psi)$$

iskazne formule.

Dokazati da svaka iskazna formula sadrži jednak broj levih i desnih zagrada.

10. Neka je S najmanji podskup skupa uređenih parova celih brojeva koji zadovoljava sledeća pravila:

- $(1, -1) \in S$
- Ako $(a, b) \in S$, tada $(a + 2, b + 5) \in S$
- Ako $(a, b) \in S$, tada $(a + 5, b + 2) \in S$.

(a) Nabroj deset elemenata skupa S.

(b) Dokazati da je $a + b$ deljivo sa 7 kada $(a, b) \in S$.

11. Posmatraćemo alfabet koji čine:

- beskonačan skup imena čvorova $V = \{r, \ldots\}$
- beskonačan skup imena stabala $\{T, T_1, T_2, \ldots\}$
- simbol binarnog operatora $\cdot$

Definicija 2 *Skup punih binarnih stabala rekurzivno definišemo sledećim pravilima:*

- *Čvor je puno binarno stablo.*
- *Ako su T_1 i T_2 dva puna binarna stabla, onda je $T_1 \cdot T_2$ puno binarno stablo, koje se sastoji od korena r zajedno sa granama koje povezuju taj koren sa korenima levog T_1 i desnog T_2 podstabla.*

Definicija punog binarnog stabla T može se zapisati i na sledeći način:

$$T ::= r \mid r[T \cdot T]$$

Definicija 3 *Visinu $h(T)$ punog binarnog stabala T rekurzivno definišemo sledećim pravilima:*

- $h(r) = 0$.
- $h(r[T_1 \cdot T_2]) = 1 + max(h(T_1), h(T_2))$.

Definicija 4 *Broj čvorova $n(T)$ punog binarnog stabala T rekurzivno definišemo sledećim pravilima:*

- $n(r) = 1$
- $n(r[T_1 \cdot T_2]) = 1 + n(T_1) + n(T_2)$.

Neka je T puno binarno stablo. Ako je $n(T)$ broj čvorova i $h(T)$ visina stabla T, dokazati da tada važi

(a) $n(T) \geq 2h(T) + 1$;

(b*) $n(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$.

12. Dokazati da funkcija napisana u programskom jeziku JAVA kao rezultat nikada neće vratiti `false`:

```
public class Suma50{

   public static void main(String []args){
     int a=20;
     int b=30;
     System.out.println("Rezultat funkcije je:" +funkcija(a,b));
   }

   public static boolean funkcija(int a, int b) {
       while (a>=0 && b<= 100){
         a += 2;
         b += -2;
```

```
            if (a+b != 50){
                return false;
            }
        }
        return true;
    }
}
```

13. Dokazati da funkcija napisana u programskom jeziku JAVA kao rezultat nikada neće vratiti `false`:

```
public class SumaNeparan{

    public static void main(String []args){
      int a=3;
      int b=4;
      System.out.println("Rezultat funkcije je:
      " +funkcija(a,b));
    }

    public static boolean funkcija(int a, int b) {
        while (a>=0 && b<= 100){
          a += 4;
          b += -2;
          if ((a+b)%2 == 0){
              return false;
          }
        }
        return true;
    }
}
```

14. Dokazati da funkcija napisana u programskom jeziku JAVA kao rezultat nikada neće vratiti `false`:

```
public class Poredi{

    public static void main(String []args){
      int a=3;
      int b=4;
      System.out.println("Rezultat funkcije je:" +funkcija(a,b));
    }

    public static boolean funkcija(int a, int b) {
        while (a>=0 && b<= 100){
          a *= 3;
          b *= 5;
          if (a*a*a <= b*b){
              return false;
          }
        }
        return true;
    }
}
```