PRINCIP UKLJUČENJA-ISKLJUČENJA

1. U razredu ima 30 učenika. Ocenu 5 iz matematike ima njih 15, iz fizike 13, iz hemije 12, iz matematike i fizike 8, iz fizike i hemije 6, iz hemije i matematike 7, i iz sva 3 predmeta 3 učenika.
   (a) Koliko učenika nema peticu ni iz jednog od ovih predmeta?
   (b) Koliko učenika ima peticu iz tačno jednog predmeta?

Rešenje: Označimo sa M, F i H skupove svih učenika sa peticom iz matematike, fizike i hemije, redom.

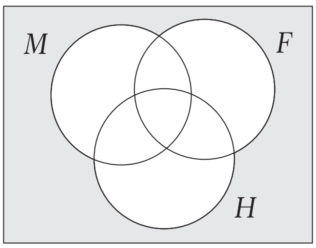
(a) Traženi broj učenika koji nemaju peticu ni iz jednog od ovih predmeta dobijamo kada od ukupnog broja učenika u odeljenju oduzmemo broj učenika koji imaju peticu iz bar jednog od ova tri predmeta, tj. $30 - |M \cup F \cup H|$. Primenjujući princip uključenja-isključenja dobijamo da je taj broj jednak:

$$30 - (|M| + |F| + |H| - |M \cap F| - |M \cap H| - |F \cap H| + |M \cap F \cap H|)$$
$$= 30 - (15 + 13 + 12 - 8 - 7 - 6 + 3) = 30 - 22 = 8.$$

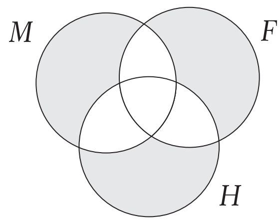
(b) Broj učenika sa peticom iz tačno jednog predmeta ćemo naći kada od broja učenika sa peticom iz **bar jednog** predmeta oduzmemo broj onih koji imaju peticu iz **bar dva** predmeta. Broj učenika sa peticom iz **bar jednog** predmeta smo odredili u zadatku pod (a) i njihov broj je $|M \cup F \cup H| = 22$. Koliko ima učenika sa peticom iz **bar dva** predmeta ćemo izračunati na sledeći način:

$$|M \cap F| + |M \cap H| + |F \cap H| - 2|M \cap F \cap H| = 8 + 7 + 6 - 2 \cdot 3 = 15.$$

Dobijamo da je broj učenika sa peticom iz tačno jednog predmeta $22 - 15 = 7$.

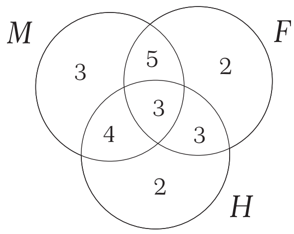


(a)



(b)

Napomena: Primetimo da smo do rešenja zadatka mogli doći i preko Venovog dijagrama. Čitamo sa Venovog dijagrama da je broj učenika koji imaju peticu bar iz jednog od ova tri predmeta $3+5+2+4+3+3+2 = 22$. Ostatak učenika, njih osmoro, nema peticu ni iz jednog od ova tri predmeta. Vidimo dalje da 3 učenika ima peticu samo iz matematike, 2 učenika samo iz fizike i 2 učenika samo iz hemije. Dakle, 7 učenika ima peticu iz tačno jednog predmeta.



2. Koliko ima prirodnih brojeva od 1 do 1000 koji nisu deljivi ni sa 2, ni sa 3, ni sa 5?

Rešenje: Neka su S_2, S_3 i S_5 skupovi svih prirodnih brojeva manjih ili jednakih od 1000 koji su deljivi sa dva, tri i pet, redom. Broj elemenata ovih skupova označićemo sa $N(S_2)$, $N(S_3)$ i $N(S_5)$, respektivno, dok oznaku $N(S_iS_j)$ koristimo za broj elemenata koji pripadaju preseku skupova S_i i S_j. Brojeva koji nisu deljivi ni sa 2, ni sa 3, ni sa 5, u oznaci $N(S_2'S_3'S_5')$, ima

$$\begin{aligned}
N(S_2'S_3'S_5') &= 1000 - |S_2 \cup S_3 \cup S_5| \\
&= 1000 - N(S_2) - N(S_3) - N(S_5) \\
&\quad + N(S_2S_3) + N(S_2S_5) + N(S_3S_5) - N(S_2S_3S_5) \\
&= 1000 - \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor \\
&\quad + \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor \\
&= 1000 - 500 - 333 - 200 + 166 + 100 + 66 - 33 \\
&= 1000 - 734 = 266.
\end{aligned}$$

3. Koliko ima celih brojeva od 1 do 1000 koji su deljivi sa 3, a nisu deljivi ni sa 5, ni sa 7? (domaći)

Rešenje: Neka je S skup celih brojeva od 1 do 1000 koji su deljivi sa 3, i označimo njihov broj sa $N = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$. Označimo dalje sa S_5 i S_7 podskupove skupa S koji sadrže sve brojeve koji su redom deljivi sa pet i sedam. Koristeći oznake uvedene u prethodnom zadatku, dobijamo da brojeva koji nisu deljivi ni sa 5, ni sa 7, u skupu S ima

$$\begin{aligned}
N(S_5'S_7') &= N - N(S_5) - N(S_7) + N(S_5S_7) \\
&= \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor \\
&= 333 - 66 - 47 + 9 = 229.
\end{aligned}$$

4. Dati kombinatornu interpretaciju izračunavanja vrednosti promenljive `s` na kraju izvršavanja koda napisanog u programskom jeziku JAVA:

```java
public class Deljivost{
   public static void main(String[] args) {
      int s=0;
      for (int i=1000; i<=9999; i++){
         int d=i%10;
         int c=(i%100)/10;
         int b=(i%1000)/100;
         int a=i/1000;
```

```
            int o=(a+b+c+d)%3;
            if (o!=0 && d!=0 && d!=5){
                s+=1;
                System.out.println(""+a+b+c+d);
            }
        }
    System.out.println("S= "+s);
    }
}
```

Rešenje: Brojač `i` prolazi kroz skup prirodnih brojeva od 1000 do 9999, tj. kroz skup četvorocifrenih brojeva. Brojevi `a,b,c` i `d` predstavljaju redom cifru hiljada, stotina, desetica i jedinica broja `i`. Vidimo da u zadatku treba izbrojati koliko ima četvorocifrenih brojeva, koji nisu deljivi ni sa 3, ni sa 5. Četvorocifrenih brojeva ima $N = 9 \cdot 10^3 = 9000$. Neka su u skupu S_3 svi četvorocifreni brojevi koji su deljivi sa 3, a u S_5 svi četvorocifreni brojevi koji su deljivi sa 5. Na osnovu principa uključenja–isključenja dobijamo da će na kraju izvršavanja koda promenljiva `s` imati vrednost

$$\begin{aligned} N(S_3'S_5') &= N - N(S_3) - N(S_5) + N(S_3S_5) \\ &= 9000 - \left\lfloor \frac{9000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{9000}{15} \right\rfloor \\ &= 9000 - 3000 - 1800 + 600 = 4800. \end{aligned}$$

5. Koliko ima permutacija cifara 1, 2,...,9 u kojima cifra 1 nije na prvom, a cifra 9 nije na poslednjem mestu?

Rešenje: Označimo sa:

S_1: skup svih permutacija u kojima je cifra 1 na prvom mestu;

S_9: skup svih permutacija u kojima je cifra 9 na poslednjem mestu.

Ukupan broj permutacija cifara 1, 2,..., 9 je $N = 9!$. Na osnovu principa uključenja–isključenja broj permutacija koje zadovoljavaju uslove zadatka jeste broj permutacija koje ne pripadaju uniji skupova S_1 i S_9 i iznosi:

$$N(S_1'S_9') = N - N(S_1) - N(S_9) + N(S_1S_9).$$

Ukoliko se cifra 1 nalazi na prvom mestu u permutaciji, preostalih osam cifara možemo ispermutovati na 8! načina, pa je $N(S_1) = 8!$. Na isti način se dobija da je $N(S_9) = 8!$. Treba još odrediti $N(S_1S_9)$, broj permutacija u preseku skupova S_1 i S_9. Ukoliko je cifra 1 na prvom mestu, a cifra 9 na poslednjem mestu, preostalih sedam cifara se može rasporediti na 7! načina, te je $N(S_1S_9) = 7!$. Traženi broj permutacija iznosi

$$N(S_1'S_9') = 9! - 8! - 8! + 7!.$$

6. Odrediti broj permutacija cifara 1, 2,..., 9 u kojima je bar jedna od cifara 1, 2, 3, 4 "na svom mestu".

Rešenje: Neka su S_i skupovi permutacija cifara 1, 2,..., 9 u kojima je cifra i na i-tom mestu, gde je $i = 1, 2, 3, 4$. U zadatku se traži $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4|$, što je na osnovu principa uključenja–isključenja

$$\begin{aligned}|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| = {} & N(S_1) + N(S_2) + N(S_3) + N(S_4) \\ & - N(S_1S_2) - N(S_1S_3) - N(S_1S_4) - N(S_2S_3) - N(S_2S_4) - N(S_3S_4) \\ & + N(S_1S_2S_3) + N(S_1S_2S_4) + N(S_1S_3S_4) + N(S_2S_3S_4) \\ & - N(S_1S_2S_3S_4).\end{aligned}$$

Na isti način kao što je to urađeno u prethodnom zadatku dobijamo da skupovi S_i, $i = 1, 2, 3, 4$, imaju jednak broj elemenata. Zato uvodimo sledeću oznaku:

$$N(1) = N(S_i) = 8!, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Broj permutacija koje pripadaju preseku bilo koja dva od ovih skupova je isti i za njega uvodimo oznaku:

$$N(2) = N(S_iS_j) = 7!, \quad 1 \leq i < j \leq 4.$$

Analogno, neka je

$$N(3) = N(S_iS_jS_k) = 6!, \quad 1 \leq i < j < k \leq 4,$$

$$N(4) = N(S_1S_2S_3S_4) = 5!.$$

Dobili smo specijalan slučaj formule uključenja–isključenja, pa je rešenje:

$$\begin{aligned}|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| &= \binom{4}{1} \cdot N(1) - \binom{4}{2} \cdot N(2) + \binom{4}{3} \cdot N(3) - \binom{4}{4} \cdot N(4) \\ &= 4 \cdot 8! - 6 \cdot 7! + 4 \cdot 6! - 5!.\end{aligned}$$

7. Naći broj permutacija cifara 1, 2,..., 8 u kojima 2 nije neposredno iza 1, 3 nije neposredno iza 2,..., 8 nije neposredno iza 7.

Rešenje: Označimo sa S_i skup permutacija cifara 1, 2,..., 8 u kome se cifra $i+1$ nalazi neposredno iza cifre i, $i = 1, 2, \ldots, 7$. Ukupan broj permutacija skupa $\{1, 2, ..., 8\}$ je $N = 8!$.

Ukoliko je cifra 2 neposredno (odmah) iza cifre 1, permutacija sadrži blok $\boxed{12}$ i broj takvih permutacija je $N(S_1) = 7!$. Na isti način se dobija da svih sedam skupova imaju isti kardinalni broj, pa je

$$N(1) = N(S_i) = 7!, \quad i = 1, 2, \ldots, 7.$$

Odredimo dalje koliko je, npr. $N(S_1S_3)$. U skupu S_1 su permutacije koje sadrže blok $\boxed{12}$, a u skupu S_3 sve one permutacije koje sadrže blok $\boxed{34}$. Broj načina da se preostale 4 cifre ispermutuju sa ova dva bloka jednak je $N(S_1S_3) = 6!$. Izračunajmo koliko je i $N(S_1S_2)$. Sada permutacija treba da sadrži i blok $\boxed{12}$ i blok $\boxed{23}$, pa permutacija zapravo sadrži blok $\boxed{123}$. Ovaj blok od tri elementa se zajedno sa preostalih 5 cifara može rasporediti na takođe 6! načina, pa je $N(S_1S_2) = N(S_1S_3) = 6!$. Analogno dobijamo da je u preseku svaka dva od ovih sedam skupova isti broj permutacija, te je

$$N(2) = N(S_iS_j) = 6!, \quad 1 \leq i < j \leq 7.$$

Na isti način se dobija da se u preseku po tri skupa nalazi 5! permutacija, tj. da je $N(3) = N(S_iS_jS_k) = 5!, \quad 1 \leq i < j < k \leq 7$. (Posmatrati npr. sledeće tri situacije: permutacije koje sadrže blokove $\boxed{12}$, $\boxed{34}$ i $\boxed{56}$, zatim permutacije koje sadrže blokove $\boxed{123}$ i $\boxed{45}$, i na kraju skup svih permutacija sa blokom $\boxed{1234}$.) Sada je

$$N(4) = 4!,\ N(5) = 3!,\ N(6) = 2!,\ N(7) = 1!.$$

Rešenje zadatka je broj permutacija koje ne pripadaju ni jednom od gore formiranih skupova:

$$\begin{aligned} N(S_1'S_2'\ldots S_7') &= N - \binom{7}{1}N(1) + \binom{7}{2}N(2) - \binom{7}{3}N(3) + \binom{7}{4}N(4) \\ &\quad - \binom{7}{5}N(5) + \binom{7}{6}N(6) - \binom{7}{7}N(7) \\ &= 8! - 7\cdot 7! + 21\cdot 6! - 35\cdot 5! + 35\cdot 4! - 21\cdot 3! + 7\cdot 2! - 1. \end{aligned}$$

8.* Patuljci Uča, Srećko, Kijavko, Pospanko, Stidljivko, Ljutko i Tupko trebaju da urade u rudniku poslove $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ i P_7. Ako se zna da svaki patuljak radi tačno jedan posao i da Pospanko ne može da radi P_2, Stidljivko ne može P_6, Uča ne može P_1 i Ljutko ne može P_3 i P_7, odrediti na koliko načina patuljci mogu da završe poslove u rudniku.

Rešenje: Uvedimo sledeće oznake:

S_1: Pospanko radi posao P_2
S_2: Stidljivko radi posao P_6
S_3: Uča radi posao P_1
S_4: Ljutko radi posao P_3
S_5: Ljutko radi posao P_7

Treba odrediti na koliko načina patuljci mogu obaviti poslove u rudniku tako da nijedan patuljak ne radi posao koji mu je problematičan, tj. tražimo $N(S_1'S_2'S_3'S_4'S_5')$. Ukupan broj načina da patuljci obave poslove u rudniku je 7!. Ukoliko Pospanko radi posao P_2, ostali patuljci trebaju da završe preostalih šest poslova i to mogu uraditi na 6! načina. Isto rešenje se dobija i ako nekog drugog patuljka fiksiramo na neki posao, pa je $N(1) = 6!$. Izračunajmo sada koliko je $N(S_iS_j)$, za $i \neq j$. Ako fiksiramo za dva patuljka koje poslove rade, ostali patuljci će na 5! načina završiti svoje poslove. Problematičan je samo presek skupova S_4 i S_5 pošto Ljutko ne može da radi dva posla istovremeno, pa je $N(S_4S_5) = 0$. Na isti način zaključujemo da je $N(S_iS_jS_k) = 4!$, osim u slučaju kada su u preseku oba skupa S_4 i S_5, pošto je i taj presek prazan skup. Ovakvih preseka imamo $\binom{3}{1}$ (od preostala tri skupa biramo jedan i posmatramo njegov presek sa skupovima S_4 i S_5). Koristeći isti rezon pri zaključivanju, na osnovu principa uključenja–isključenja, dobijamo da je broj načina da se obave poslovi u rudniku

$$\begin{aligned}N(S_1'S_2'S_3'S_4'S_5') &= N - N(S_1) - N(S_2) - N(S_3) - N(S_4) - N(S_5)\\ &+ N(S_1S_2) + N(S_1S_3) + \ldots\\ &- N(S_1S_2S_3) - N(S_1S_2S_4) - \ldots\\ &+ N(S_1S_2S_3S_4) + N(S_1S_2S_3S_5) + \ldots\\ &- N(S_1S_2S_3S_4S_5)\\ &= 7! - \binom{5}{1}6! + \left(\binom{5}{2} - 1\right)5! - \left(\binom{5}{3} - \binom{3}{1}\right)4!\\ &+ \left(\binom{5}{4} - \binom{3}{2}\right)3! - 0.\end{aligned}$$

9. Koliko ima $n-$tocifrenih prirodnih brojeva kod kojih je zbir cifara
(a) 9; (b) 10; (c*) 11?

Rešenje:

(a) Svakom n-tocifrenom prirodnom broju kome je zbir cifara 9 odgovara jedno rešenje jednačine
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 9.$$
Međutim, obrnuto ne važi uvek, pošto ne daju sva rešenja gornje jednačine neki n-tocifreni broj. Tačnije sva rešenja kod kojih je $x_1 = 0$ nisu odgovarajuća i skup takvih rešenja ćemo označiti sa S_1. Znamo da je ukupan broj rešenja date jednačine na skupu nenegativnih celih brojeva $N = \binom{9+n-1}{9}$. Broj reshenja za koja je $x_1 = 0$ ima koliko i rešenja jednačine $x_2 + x_3 \ldots + x_n = 9$, odnosno $N(S_1 = \binom{9+n-2}{9}$. Traženi broj je:
$$N(S_1') = N - N(S_1) = \binom{n+8}{9} - \binom{n+7}{9}.$$

(b) Od svih rešenja jednačine $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 10$ na skupu nenegativnih celih brojeva oduzimamo sva neodgovajuća rešenja. Neka je:

S_1: skup svih rešenja u kojima je $x_1 = 0$;
S_2: skup svih rešenja u kojima je $x_i = 10$, za neko $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Na isti način kao u prvom delu zadatka dabijamo da je $N = \binom{10+n-1}{10}$ i $N(S_1) = \binom{10+n-2}{10}$. Odredimo sada koliko je $N(S_2)$. Ukupan broj rešenja posmatrane jednačine odgovara broju načina da se 10 kuglica rasporedi u n kutija, pa je broj načina da odaberemo kutiju u kojoj će biti svih 10 kuglica $N(S_2) = n$. Slično, ako je $x_1 = 0$, na raspolaganju imamo $n - 1$ kutiju, te je $N(S_1S_2) = n - 1$. Dobijamo da je rešenje:
$$\begin{aligned}N(S_1'S_2') &= N - N(S_1) - N(S_2) + N(S_1S_2)\\ &= \binom{n+9}{10} - \binom{n+8}{10} - n + (n-1).\end{aligned}$$

(c*) Posmatrajmo rešenja jednačine $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 11$. Označimo sa:

S_1: skup svih rešenja u kojima je $x_1 = 0$;
S_2: skup svih rešenja u kojima je $x_i = 10$, za neko $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
S_3: skup svih rešenja u kojima je $x_i = 11$, za neko $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Broj rešenja jednačine $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 11$, kao i broj elemenata u skupovima S_1 i S_3 određujemo na isti način kao u prethodnim delovima zadatka, tj.

$$N = \binom{11+n-1}{11}, \; N(S_1) = \binom{11+n-2}{11}, \; N(S_3) = n.$$

Kardinalni broj skupa S_2, $N(S_2)$, je jednak broju rešenja jednačine u kojima postoji neko $x_i = 10$, a samim tim i neko $x_j = 1$, za $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\; i \neq j$. Na n načina biramo x_i koje će biti jednako 10, te preostaje $n-1$ mogućnosti za izbor još jednog broja koji će biti jednak 1, pa je $N(S_2) = n(n-1)$. Sličnom analizom dobijamo da je $N(S_1S_2) = (n-1)(n-2)$ i $N(S_1S_3) = n-1$. Primetimo da je presek skupova S_2 i S_3 prazan skup, tj. $N(S_2S_3) = 0$, odakle sledi $N(S_1S_2S_3) = 0$. Traženi broj je:

$$\begin{aligned} N(S_1'S_2'S_3') &= N - N(S_1) - N(S_2) - N(S_3) \\ &\quad + N(S_1S_2) + N(S_1S_3) + N(S_2S_3) - N(S_1S_2S_3) \\ &= \binom{n+10}{11} - \binom{n+9}{11} - n(n-1) - n + (n-1)(n-2) + (n-1). \end{aligned}$$

10. Na koliko načina se u vrstu mogu poredati 3 Engleza, 3 Francuza i 3 Nemca, tako da nikoja 3 sunarodnika ne stoje zajedno?

Rešenje: Označimo sa:

S_1: skup svih rasporeda u kojima sva tri Engleza stoje jedan do drugog;

S_2: skup svih rasporeda u kojima sva tri Francuza stoje jedan do drugog;

S_3: skup svih rasporeda u kojima sva tri Nemca stoje jedan do drugog.

Broj načina na koji ovih devet **različitih** ljudi mogu da stanu u vrstu je $N = 9!$. Uvodimo oznaku $N(1) = N(S_1) = N(S_2) = N(S_3)$, jer su kardinalni brojevi ovih skupova isti. Taj broj računamo tako što 3 sunarodnika stavimo u blok, a zatim taj blok zajedno sa 6 preostalih ljudi permutujemo. To možemo uraditi na $7!$ načina. Dodatno treba uračunati i permutacije ta 3 sunarodnika u bloku, što je $3!$. Odnosno, $N(1) = 7! \cdot 3!$.

Oznaku $N(2)$ koristićemo za broj elemenata koji se nalaze u preseku neka dva od ova tri skupa. Kako imamo dva bloka od po 3 sunarodnika, broj koji tražimo jednak je $5! \cdot 3! \cdot 3!$. Broj rasporeda koji se nalaze u preseku sva tri skupa je $N(3) = N(S_1S_2S_3) = 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! = (3!)^4$. Traženo rešenje je

$$\begin{aligned} N(S_1'S_2'S_3') &= N - \binom{3}{1}N(1) + \binom{3}{2}N(2) - \binom{3}{3}N(3) \\ &= 9! - 3 \cdot 7! \cdot 3! + 3 \cdot 5! \cdot (3!)^2 - (3!)^4. \end{aligned}$$

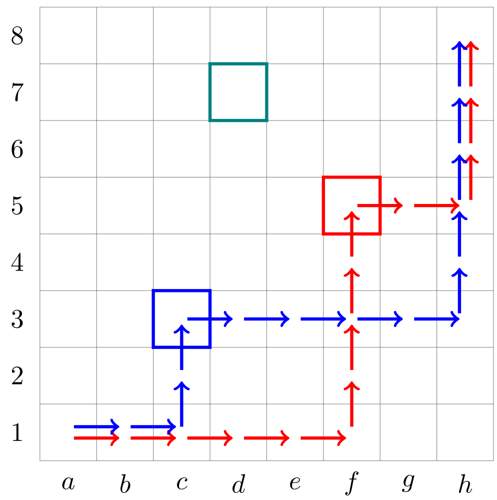
11. Odrediti koliko ima najkraćih puteva koje top može preći kretajući se po šahovskoj tabli od polja $a1$ do polja $h8$ ako

(a) ne sme da pređe preko $c3$;

(b) ne sme da pređe ni preko $c3$, ni preko $f5$;

(c) ne sme da pređe ni preko $c3$, ni preko $d7$, ni preko $f5$. (domaći)

Rešenje: Prvo ćemo odrediti koliko ima najkraćih puteva po kojima top može da se kreće se po šahovskoj tabli od polja $a1$ do polja $h8$. Pošto nam trebaju najkraći putevi, top može da se kreće samo nagore i nadesno. Svaki od ovih najkraćih puteva sadrži 14 koraka, od toga 7 koraka nagore i 7 koraka nadesno, pa je ukupan broj najkraćih puteva od jednog do drugog ćoška šahovske table $N = \binom{14}{7}$.



(a) Označimo sa S_{c3} skup svih najkraćih puteva koji prelaze preko polja $c3$. Treba odrediti $N(S'_{c3}) = N - N(S_{c3})$. Od polja $a1$ do polja $c3$ imamo puteve od 4 koraka, 2 na gore i 2 na desno, odnosno $\binom{4}{2}$ najkraćih puteva. Slično, od polja $c3$ do $h8$ možemo doći na $\binom{10}{5}$ načina, pa je $N(S_{c3}) = \binom{4}{2}\binom{10}{5}$. Sledi da je broj najkraćih puteva koji ne prelaze preko polja $c3$ jednak

$$N(S'_{c3}) = N - N(S_{c3}) = \binom{14}{7} - \binom{4}{2}\binom{10}{5}.$$

(b) Neka je sada S_{f5} skup svih najkraćih puteva koji prelaze preko polja $f5$. Potrebno je odrediti $N(S'_{c3}S'_{f5})$. Svi najkraći putevi od $a1$ do $f5$ sadrže 5 koraka nadesno i 4 koraka nagore, pa tih puteva ima $\binom{5+4}{4}$. Dalje, od f_5 do $h8$ možemo doći na $\binom{3+2}{3}$ načina. Zaključujemo da je $N(S_{f5}) = \binom{9}{4}\binom{5}{3}$. Odredimo sada broj svih najkraćih puteva koje prelaze i preko $c3$ i preko $f5$, tj. broj $N(S_{c3}S_{f5})$. Prebrojimo po segmentima koliko ima načina da se dođe od $a1$ do $c3$, zatim od $c3$ do $f5$ i na kraju od $f5$ do $h8$, pa je $N(S_{c3}S_{f5}) = \binom{4}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{3}$. Koristeći princip uključenja–isključenja dobijamo da je broj najkraćih puteva koji ne prelaze ni preko polja $c3$, ni preko polja $f5$:

$$\begin{aligned} N(S'_{c3}S'_{f5}) &= N - N(S_{c3}) - N(S_{f5}) + N(S_{c3}S_{f5}) \\ &= \binom{14}{7} - \binom{4}{2}\binom{10}{5} - \binom{9}{4}\binom{5}{3} + \binom{4}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{3}. \end{aligned}$$

(c) Uvodimo i treći skup S_{d7}, skup svih najkraćih puteva koji prelaze preko polja $d7$. Analogno kao u prethodnim primerima tražimo $N(S'_{c3}S'_{f5}S'_{d7})$. Primetimo da je nemoguće da top istovremeno pređe preko polja $f5$ i $d7$ i da je $N(S_{f5}S_{d7}) = 0$, a samim tim je i $N(S_{c3}S_{f5}S_{d7})=0$. Traženi broj najkraćih puteva je:

$$\begin{aligned}N(S'_{c3}S'_{f5}S'_{d7}) &= N-N(S_{c3})-N(S_{f5})-N(S_{f5})\\ &\quad +N(S_{c3}S_{f5})+N(S_{c3}S_{d7})+N(S_{f5}S_{d7})-N(S_{c3}S_{f5}S_{d7})\\ &= \binom{14}{7}-\binom{4}{2}\binom{10}{5}-\binom{9}{4}\binom{5}{3}-\binom{9}{6}\binom{5}{1}\\ &\quad +\binom{4}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{3}+\binom{4}{2}\binom{5}{4}\binom{5}{1}.\end{aligned}$$

12. Odrediti broj celobrojnih rešenja jednačine $x_1+x_2+x_3=15$, ako je $0\le x_1\le 5$, $0\le x_2\le 6,\ \ 0\le x_3\le 7$.

Rešenje: Jedno rešenje jednačine $x_1+x_2+x_3=15$ u skupu nenegativnih celih brojeva je $x_1=6,\ x_2=7$ i $x_3=2$. Međutim to rešenje ne ispunjava prva dva uslova. Ideja je da od broja svih rešenja jednačine u skupu nenegativnih celih brojeva, kojih ima $N=\binom{15+2}{2}=\binom{17}{2}$, oduzmemo broj svih "loših" rešenja. Označimo sa:

S_1: skup svih rešenja jednačine u kojima je $x_1\ge 6$;
S_2: skup svih rešenja jednačine u kojima je $x_2\ge 7$;
S_3: skup svih rešenja jednačine u kojima je $x_3\ge 8$.

Za nalaženje $N(S_1)$ uvodimo novu promenljivu $y_1=x_1-6$, čime se problem svodi na problem nalaženja broja nenegativnih celobrojnih rešenja jednačine $y_1+x_2+x_3=15-6=9$. Dakle, $N(S_1)=\binom{9+2}{2}=\binom{11}{2}$. Na sličan način dobijamo da je $N(S_2)=\binom{8+2}{2}=\binom{10}{2}$ i $N(S_3)=\binom{7+2}{2}=\binom{9}{2}$.

Broj rešenja koja pripadaju preseku skupova S_1 i S_2, $N(S_1S_2)$, dobijamo uvodeći dve nove promenljive $y_1=x_1-6$ i $y_2=x_2-7$. Tražimo broj rešenja jednačine $y_1+y_2+x_3=15-6-7=2$ u skupu nenegativnih celih brojeva i dobijamo $N(S_1S_2)=\binom{2+2}{2}=\binom{4}{2}$. Slično dolazimo do $N(S_1S_3)=\binom{3}{2}$, $N(S_2S_3)=\binom{2}{2}$ i $N(S_1S_2S_3)=0$. Broj rešenja jednačine koja ispunjavaju tražene uslove je

$$\begin{aligned}N(S'_1S'_2S'_3) &= N-N(S_1)-N(S_2)-N(S_3)\\ &\quad +N(S_1S_2)+N(S_1S_3)+N(S_2S_3)-N(S_1S_2S_3)\\ &= \binom{17}{2}-\binom{11}{2}-\binom{10}{2}-\binom{9}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}\\ &= 10\end{aligned}$$

II način: Uvodeći nove promenljive $y_1=5-x_1$, $y_2=6-x_2$, $y_3=7-x_3$ problem se svodi na nalaženje broja celobrojnih rešenja jednačine

$$y_1+y_2+y_3=18-(x_1+x_2+x_3)=3,$$

u kojima je zadovoljeno $0\le y_1\le 5$, $0\le y_2\le 6$ i $0\le y_3\le 7$. Kako su sva tri uslova uvek ispunjena, sva rešenja gornje jednačine su dozvoljena i njihov broj je $\binom{2+3}{2}=10$.

Napomena: Prvi način na koji smo rešili zadatak je univerzalni postupak za rešavanje ovakvog tipa zadataka, dok se drugi način može iskoristiti samo za rešavanje pogodno izabranih primera. Drugi način se koristi u zadacima kod kojih se nakon uvođenja smene dobija jednačina čija su sva rešenja odgovarajuća, ili eventualno treba isključiti samo nekoliko rešenja.

13. Odrediti broj celobrojnih rešenja jednačine $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, ako je $2 \leq x_1 \leq 5$, $0 \leq x_2 \leq 6,\ 3 \leq x_3 \leq 7$.

Rešenje: Zadati problem treba svesti na problem koji ima oblik kao problem u zadatku 12. Smenom $y_1 = x_1 - 2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3 - 3$ dobijamo nove promenljive za koje važi $0 \leq y_1 \leq 3$, $0 \leq y_2 \leq 6$ i $0 \leq y_3 \leq 4$ i

$$y_1 + y_2 + y_3 = (x_1 + x_2 + x_3) - 5 = 10.$$

Za domaći rešiti novodobijeni problem na oba načina prikazana u rešenju prethodnog zadatka.