

Zadatak 1 Odrediti nepoznate koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$ polinoma

$$p(x) = x^5 - 5x^4 + ax^3 + 16x^2 + bx + c$$

ako je $x = 2$ njegov trostruki koren.

Rešenje:

Prvi način:

Ako je $x = 2$ trostruki koren polinoma $p(x)$, to znači da je $p(x)$ deljiv polinomom $(x - 2)^3$.

Pri deljenju polinoma $p(x)$ sa $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ dobijamo

$$\begin{array}{r} (x^5 - 5x^4 + ax^3 + 16x^2 + bx + c) : (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = x^2 + x + a - 6 \\ -(x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2) \\ \hline x^4 + (a - 12)x^3 + 24x^2 + bx + c \\ -(x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x) \\ \hline (a - 6)x^3 + 12x^2 + (b + 8)x + c \\ - ((a - 6)x^3 - 6(a - 6)x^2 + 12(a - 6)x - 8(a - 6)) \\ \hline (6a - 24)x^2 + (-12a + b + 80)x + 8a + b - 48 \end{array}$$

Pošto ostatak mora biti jednak 0, to nam daje sistem

$$\begin{array}{rcl} 6a & = & 24 \\ -12a + b & = & -80 \\ 8a + c & = & 48 \end{array} \Leftrightarrow (a, b, c) = (4, -32, 16).$$

Drugi način:

Do nepoznatih koeficijenata polinoma $p(x)$ možemo doći i pomoću Hornerove šeme

x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0	α	r
1	-5	a	16	b	c		
		1	-3	$a - 6$	$2a + 4$	2	$8a + 2b + c + 16$
			1	-1	$a - 8$	2	$12a + b - 16$
				1	$a - 6$	2	$6a - 24$

Oдавde dobijamo sistem

$$\begin{array}{rcl} 8a + 2b + c & = & -16 \\ 12a + b & = & 16 \\ 6a & = & 24 \end{array} \Leftrightarrow (a, b, c) = (4, -32, 16).$$

Treći način:

Iz činjenice da je $x = 2$ trostruki koren polinoma $p(x)$ sledi $p(2) = p'(2) = p''(2) = 0$. Prvi i drugi izvod polinoma $p(x)$ su

$$\begin{aligned} p'(x) &= 5x^4 - 20x^3 + 3ax^2 + 32x + b \\ p''(x) &= 20x^3 - 60x^2 + 6ax + 32. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x = 2$ u polinome $p(x)$, $p'(x)$ i $p''(x)$ dobijamo sistem

$$\begin{array}{rcl} 8a + 2b + c & = & -16 \\ 12a + b & = & 16 \\ 12a & = & 48 \end{array} \Leftrightarrow (a, b, c) = (4, -32, 16).$$

□

Zadatak 2 Odrediti koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$ tako da -2 bude tačno dvostruki koren polinoma $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x + c$ nad poljem \mathbb{R} .

Rešenje: Kako bi -2 bio tačno dvostruki koren polinoma $p(x)$ mora da važi $p(-2) = p'(-2) = 0$ i $p''(-2) \neq 0$. Pošto je

$$p'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx - 4 \quad \text{i} \quad p''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b,$$

imamo

$$p(-2) = 16 - 8a + 4b + 8 + c = 0$$

$$p'(-2) = -32 + 12a - 4b - 4 = 0$$

$$p''(-2) = 48 - 12a + 2b \neq 0.$$

Iz sistema

$$8a - 4b - c = 24 \quad \wedge \quad 12a - 4b = 36$$

dobijamo

$$b = 3a - 9 \quad \wedge \quad c = -4a + 12,$$

dok iz uslova $12a - 2b \neq 48$ sledi da je $a \neq 5$.

Otuda je

$$(a, b, c) \in \{(\alpha, 3\alpha - 9, -4\alpha + 12) \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{5\}\}.$$

□

Primeri sa testa:

- Ako su P i Q polinomi, $P + Q \neq 0$ i $dg(P) = 2$ i $dg(Q) = 2$, tada je $dg(PQ) \in \{ \quad \}$ i $dg(P+Q) \in \{ \quad \}$
- Neka su $P = (a_0, a_1, \dots, a_4)$ i $Q = (b_0, b_1, \dots, b_3)$ polinomi. Tada je $dg(P+Q) = \underline{\quad}$ i $dg(PQ) = \underline{\quad}$
- Ako je $P(x) = ax^3 + bx + c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada za stepen $dg(P)$ polinoma P važi: **1)** $dg(P) = 3$, **2)** $dg(P) \in \{1, 3\}$, **3)** $dg(P) \in \{0, 3\}$, **4)** $dg(P) \in \{0, 1, 3\}$, **5)** $dg(P) \in \{0, 1, 2, 3\}$.
- Za polinome $p(x) = (x+1)^3 x^3 (x-2)^6$ i $q(x) = x^5 (x+1)^4 (x-5)^2 (x+2)^3$ nad poljem realnih brojeva izračunati: $NZD(p, q) =$
- NZD za polinome $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ i $x^2 - i$:
1) ne postoji **2)** je linearni polinom **3)** je konstantni polinom
- Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ i $w \in \mathbb{C}$ koeficijenti polinoma $P(x) = x^2 + ax + b$ i $Q(x) = x^2 + w$. Ako je broj $2 - 3i$ zajednički koren polinoma P i Q , tada preostali koreni polinoma P i Q su redom $\alpha_1 = \underline{\quad}$ i $\alpha' = \underline{\quad}$, dok je $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$ i $w = \underline{\quad}$.
- Neka je $\{i, -i\}$ skup nekih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada skup svih vrednosti za a, b i c je $a \in \quad b \in \quad c \in \quad$.
- Ako je p polinom stepena 4 nad nekim poljem F i ako ima tačno jedan koren u tom polju, tada je p : **1)** uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** nekada svodljiv, a nekada nesvodljiv **4)** ništa od prethodnog **5)** uvek normalizovan
- Polinom stepena 2 nad poljem \mathbb{R} je:
1) uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** ništa od prethodnog.
- Ako je p polinom stepena 3 nad poljem \mathbb{R} , tada je p nad poljem \mathbb{R} :
1) uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** ništa od prethodnog.
- Ako je p polinom stepena 3 nad poljem \mathbb{Q} , tada je p nad poljem \mathbb{Q} :
1) uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** ništa od prethodnog.

- Nesvodljiv polinom nad poljem \mathbb{R} može biti stepena 0 1 2 3 4
Nesvodljiv polinom nad poljem \mathbb{C} može biti stepena 0 1 2 3 4
- Odrediti sve vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{Q}$ za koje je polinom $p(x) = ax + b$ nesvodljiv nad poljem \mathbb{Q} :
- Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^2 + t + 1$ nesvodljiv nad njima.
 $\mathbb{Q} \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{C} \quad \mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{Z}_3 \quad \mathbb{Z}_5$
- Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^4 + t^2 + 1$ svodljiv nad njima.
 $\mathbb{Q} \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{C} \quad \mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{Z}_3 \quad \mathbb{Z}_5$
- Neka je P polinom nad poljem F takav da je $dg(P) \geq 1$. Tada:
 - 1) ako polinom P ima koren u F , tada je on svodljiv nad F ;
 - 2) ako polinom P ima koren u F , tada je on nesvodljiv nad F ;
 - 3) ako je polinom P svodljiv nad F , tada on ima koren u F ;
 - 4) ako je $dg(P) = 3$, tada je polinom P svodljiv nad F ;
 - 5) ako je $dg(P) > 1$, tada je polinom P svodljiv nad F akko ima koren u F ;
 - 6) ako je $dg(P) > 1$ i polinom P ima koren u F , tada je on svodljiv nad F ;
 - 7) ako je polinom P jednak proizvodu dva polinoma, onda je on svodljiv;
 - 8) ako je polinom P jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0, onda je on svodljiv.
- Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(e^{-i\alpha}) = 0$ i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, tada je:
 - 1) $x - e^{-i\alpha} \mid f(x)$
 - 2) $x - e^{i\alpha} \mid f(x)$
 - 3) $x - e^{i|\alpha|} \mid f(x)$
 - 4) $x^2 - 2x \cos \alpha + 1 \mid f(x)$
 - 5) $x^2 - x \cos \alpha + 1 \mid f(x)$
 - 6) $x^2 + x \cos \alpha + 1 \mid f(x)$
 - 7) $x^2 - x \cos \alpha + \alpha^2 \mid f(x)$
- Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(e^{-i\alpha}) = 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, tada je:
 - 1) $x - e^{-i\alpha} \mid f(x)$
 - 2) $x - e^{i\alpha} \mid f(x)$
 - 3) $x - e^{i|\alpha|} \mid f(x)$
 - 4) $x^2 - 2x \cos \alpha + 1 \mid f(x)$
 - 5) $x^2 - x \cos \alpha + 1 \mid f(x)$
 - 6) $x^2 + x \cos \alpha + 1 \mid f(x)$
 - 7) $x^2 - x \cos \alpha + \alpha^2 \mid f(x)$
- Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(e^{-i\frac{\pi}{6}}) = 0$. Zaokružiti tačno:
 - 1) $x - e^{-i\frac{\pi}{6}} \mid f(x)$
 - 2) $x + e^{i\frac{\pi}{6}} \mid f(x)$
 - 3) $x - e^{i\frac{\pi}{6}} \mid f(x)$
 - 4) $x^2 - x\sqrt{3} + 1 \mid f(x)$
 - 5) $x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 \mid f(x)$
 - 6) $x^2 + x\sqrt{3} + 1 \mid f(x)$
 - 7) $x^2 - x + 1 \mid f(x)$
- Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(a + ib) = 0$, $b \neq 0$. Zaokružiti tačno:
 - 1) $x - a + ib \mid f(x)$
 - 2) $x - a - ib \mid f(x)$
 - 3) $x - e^{ia} \mid f(x)$
 - 4) $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \mid f(x)$
 - 5) $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 \mid f(x)$
 - 6) $x^2 - ax + a^2 + b^2 \mid f(x)$
 - 7) $x - e^{-ia} \mid f(x)$