

NEODREĐENI INTEGRAL

20. april 2023.

Primitivna funkcija i neodređeni integral

- $f(x)$ definisana nad intervalom I , tj. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$
- ako za funkciju $f(x)$ postoji funkcija $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, koja ima izvod $F'(x)$ nad intervalom I , takva da je

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I$$

tada je $F(x)$ **primitivna funkcija** funkcije $f(x)$ nad intervalom I

- ona nije jednoznačno određena, svaka funkcija $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ je takođe primitivna funkcija jer je

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Veza između dve primitivne funkcije $F(x)$ i $G(x)$ funkcije $f(x)$:

Teorema

Ako su $F(x)$ i $G(x)$ dve primitivne funkcije za $f(x)$ nad nekim intervalom I onda se one nad tim intervalom razlikuju za konstantu, tj. nad intervalom I je $F(x) - G(x) = C$.

Definicija

Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom I naziva se **neodređeni integral funkcije $f(x)$** nad datim I i označava se sa

$$\int f(x)dx.$$

- $f(x)$ je **podintegralna funkcija**
- $f(x)dx$ je **podintegralni izraz**
- \int je **znak integrala**
- ako je $F(x)$ jedna primitivna funkcija tada je

$$\int f(x)dx = F(x) + C = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$$

Da li za svaku funkciju postoji primitivna funkcija?

Teorema

Ako je funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna nad intervalom I tada postoji primitivna funkcija $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ nad intervalom I , tj. postoji neodređeni integral funkcije $f(x)$ nad datim intervalom I .

- funkcija $f(x)$ ne mora da bude neprekidna da bi za nju postojao neodređeni integral; funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

za $x = 0$ ima prekid druge vrste, a jedna njena primitivna funkcija je

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Ako funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ u nekoj tački intervala $[a, b]$ ima prekid druge vrste, da li za nju uvek postoji primitivna funkcija nad posmatranim intervalom?

Primer

*Proveriti da li **Dirihleova funkcija** $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ima primitivnu funkciju nad proizvoljnim intervalom I .*

NE. Ako bi nad proizvoljnim zatvorenim intervalom $[a, b]$ postojala funkcija $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, koja ima izvod nad I , pri čemu je $F'(x) = \chi(x)$, tada važi $F'(x) = 1$, za $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$,
 $F'(x) = 0$, za $x \in [a, b] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$,

a ne postoji $\xi \in [a, b]$ sa osobinom da je (na primer) $F'(\xi) = \frac{1}{2}$ (Darbuova teorema), što znači da $F(x)$ nije primitivna funkcija funkcije $\chi(x)$ nad $[a, b]$.

- ako funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ima prekid prve vrste u $c \in I$ tada za nju ne postoji primitivna funkcija $F(x)$ nad intervalom I (ako funkcija $f(x)$ ima izvod u svakoj tački intervala I , tada taj izvod ne može imati prekide prve vrste)
- ako neodređeni integral date funkcije postoji, on se ne može uvek izraziti u konačnom obliku (preko konačnog broja elementarnih funkcija) - neki primeri:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx \quad \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

Osobine neodređenog integrala

$$1. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

$$2. d \int f(x) dx = f(x) dx$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$\text{specijalno: } \int F'(f(x))f'(x)dx = \int dF(f(x)) = F(f(x)) + C$$

$$4. \int a f(x) dx = a \int f(x) dx, a \in \mathbb{R}$$

$$5. \int (f_1(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

$$6. \text{ Ako je } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ tada je}$$

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, a \neq 0$$

Tako je, na osnovu osobine 3.

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx = \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + C.$$

- Tablica neodređenih integrala
- ukoliko nije drugačije naglašeno, traženje neodređenog integrala podrazumeva nalaženje datog integrala nad svim intervalima iz oblasti definisanosti date funkcije

Tablica integrala

$\int dx = x + c$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + c_1, a \neq 0$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c, a \neq 0$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + c, a \neq 0$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + c, a \neq 0$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c = -\arccos \frac{x}{a} + c_1, a > 0$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + c$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c, a > 0$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$	$\int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \ln \left x + \sqrt{x^2 + A} \right + c$

Smena promenljive

Teorema

Neka surjekcija $\varphi : I_1 \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ ima neprekidan izvod različit od nule nad intervalom I_1 i neka za funkciju $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ postoji neodređeni integral nad intervalom I . Tada važi

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt;$$

(posle integracije desne strane se stavi $t = \varphi^{-1}(x)$, $x \in I$.)

Dokaz. Jednakost važi jer su izvodi obe strane jednaki:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x),$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= \frac{d}{dt} \left(\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right) \frac{dt}{dx} \\ &= f(\varphi(t)) \varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x), \end{aligned}$$

a zbog stalnosti znaka $\varphi'(t)$ je funkcija $\varphi(t)$ strogo monotona, pa ima inverznu funkciju $\varphi^{-1}(x)$.

- Često je pogodnije smenu promenljivih umesto u obliku

$$x = \varphi(t)$$

pisati u obliku

$$t = \psi(x), \quad dt = \psi'(x) \, dx.$$

Recimo,

$$\begin{aligned} \int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx &= \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\psi(x)| + C, \\ \int \frac{\psi'(x)}{2\sqrt{\psi(x)}} dx &= \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{\psi(x)} + C. \end{aligned}$$

Primer

Da li se u integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}, x > 2$, može uvesti smena $x = \arcsin t$?

Parcijalna integracija

Teorema

Neka su $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije $u'(x)v(x)$. Tada postoji primitivna funkcija funkcije $u(x)v'(x)$ i važi jednakost

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Dokaz. Polazeći od jednakosti $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ dobija se

$$\int (u(x)v(x))' dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx,$$

odakle je

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

(konstantu je dovoljno staviti sa jedne strane jednakosti)

Napomena

- $\int P_n(x)e^{ax} dx$, $n \geq 1$ rešava se sa n parcijalnih integracija, uzimajući

$$u = P_n(x), \quad e^{ax} dx = dv$$

- $\int P_n(x) \sin ax dx$ ($\int P_n(x) \cos ax dx$), $n \geq 1$ rešava se sa n parcijalnih integracija, uzimajući

$$u = P_n(x), \quad \sin ax dx = dv, (\cos ax dx = dv)$$

- $\int P_n(x) \ln^m x dx$, $n \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ rešava se sa m parcijalnih integracija, uzimajući

$$u = \ln^m x, \quad P_n(x) dx = dv$$

Primer

Odrediti neodređeni integral $I(x)$ funkcije $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x < 2 \\ 2 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$

$I(x)$ postoji nad \mathbb{R} ($f(x)$ je neprekidna funkcija). Kako je

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$\int 2 dx = 2x + C_2,$$

to da bi $I(x)$ bila neprekidna funkcija mora da važi

$$2 + C_1 = 4 + C_2, \text{ tj. } C_1 = C_2 + 2$$

$$\text{pa je } I(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 2 + C & , \quad x < 2 \\ 2x + C & , \quad x \geq 2 \end{cases}.$$

Integrali racionalnih funkcija

Racionalna funkcija je $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

- ako je $\deg P(x) < \deg Q(x)$ - **prava racionalna funkcija**
- ako je $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ - **neprava racionalna funkcija**

Svaka neprava racionalna funkcija može se napisati u obliku

$$R(x) = T(x) + \frac{R_1(x)}{Q(x)}, \quad \deg R_1(x) < \deg Q(x)$$

- $P(x)$ je deljiv polinomom $x - a$ ako i samo ako je $P(a) = 0$
- Svaki polinom stepena $n \geq 1$ ima tačno n nula, \mathbb{R} ili \mathbb{C}
- Ako su a_1, \dots, a_m različite nule polinoma

$P(x) = c_n x^n + \dots c_1 x + c_0$, $n \geq 1$ onda je

$$P(x) = c_n (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}, \quad k_1 + \dots + k_m = n.$$

- Ako je kompleksan broj $z = \alpha + i\beta$ koren reda k polinoma $P(x)$ tada je i $\bar{z} = \alpha - i\beta$ takođe koren reda k polinoma $P(x)$.

Teorema

Neka je $P(x)$ polinom stepena manjeg od n , a $Q(x)$ polinom stepena n takav da je

$$Q(x) = c_n(x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_p)^{k_p} (x^2 + b_1x + c_1)^{l_1} \dots (x^2 + b_qx + c_q)^{l_q} = n,$$

gde je $k_1 + \dots + k_p + 2(l_1 + \dots + l_q)$, $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, $b_j^2 - 4c_j < 0$,

$i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$. Tada se polinom $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ može napisati u obliku

$$R(x) = \left(\frac{A_{11}}{x - a_1} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} \right) + \dots + \left(\frac{A_{p1}}{x - a_p} + \dots + \frac{A_{pk_p}}{(x - a_p)^{k_p}} \right)$$

$$+ \left(\frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + b_1x + c_1} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + b_1x + c_1)^{l_1}} \right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{B_{q1}x + C_{q1}}{x^2 + b_qx + c_q} + \dots + \frac{B_{ql_q}x + C_{ql_q}}{(x^2 + b_qx + c_q)^{l_q}} \right)$$

$\frac{A}{(x-a)^k}$ i $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}$, $b^2 - 4c < 0$, se nazivaju **prosti** ili **parcijalni razlomci**.

Biće rađeni na vežbama:

- Integrali prostih razlomaka
- Integrali nekih iracionalnih funkcija
 - $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ (tri Ojlerove smene),
 - $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, a \neq 0,$
 - $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}, n \in \mathbb{N}, a \neq 0,$
 - $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{r_k}\right) dx, aq - bp \neq 0, r_1, \dots, r_k \in \mathbb{Q},$
 - $\int x^m (a + bx^n)^p dx, m, n, p \in \mathbb{Q}, n, p \neq 0, a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0,$
- Integrali trigonometrijskih funkcija
 - $\int R(\sin x, \cos x) dx,$
 - $\int \sin^m x \cos^n x dx,$
 - $\int \sin mx \sin nxdx, \quad \int \sin mx \cos nxdx, \quad \int \cos mx \cos nxdx,$
- Integrali nekih eksponencijalnih funkcija
 - $\int R(e^x) dx,$
 - $\int (P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x) dx$