

Linearne transformacije

Definicija 1 Neka su $V_1 = (V_1, F, +_1, \cdot_1)$ i $V_2 = (V_2, F, +_2, \cdot_2)$ vektorski prostori nad istim poljem $F = (F, +, \cdot)$. Funkcija $f : V_1 \rightarrow V_2$ je **linearna transformacija** (homomorfizam) iz vektorskog prostora V_1 u vektorski prostor V_2 ako za sve vektore $x, y \in V_1$ i svaki skalar $\alpha \in F$ važi

$$(LT1) \quad f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y),$$

$$(LT2) \quad f(\alpha \cdot_1 x) = \alpha \cdot_2 f(x).$$

Teorema 1 Neka su $V_1 = (V_1, F, +_1, \cdot_1)$ i $V_2 = (V_2, F, +_2, \cdot_2)$ vektorski prostori nad istim poljem $F = (F, +, \cdot)$. Funkcija $f : V_1 \rightarrow V_2$ je linearna transformacija iz vektorskog prostora V_1 u vektorski prostor V_2 ako za svaka dva vektora $x, y \in V_1$ i svaka dva skalara $\alpha, \beta \in F$ važi

$$(LT) \quad f(\alpha \cdot_1 x +_1 \beta \cdot_1 y) = \alpha \cdot_2 f(x) +_2 \beta \cdot_2 f(y).$$

Teorema 2 Svaka linearna transformacija $f : V_1 \rightarrow V_2$ preslikava nula-vektor prostora $V_1 = (V_1, F, +, \cdot)$ u nula-vektor prostora $V_2 = (V_2, F, +, \cdot)$.

Odnosno, ako je f linearna transformacija, tada je $f(0) = 0$.

Definicija 2

- (a) **Jezgro linearne transformacije** $f : V_1 \rightarrow V_2$, u oznaci $\text{Ker}(f)$, je skup svih vektora iz V_1 koji se preslikavaju u nula-vektor prostora V_2 , odnosno

$$\text{Ker}(f) = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0\}.$$

- (b) **Slika linearne transformacije** $f : V_1 \rightarrow V_2$, u oznaci $\text{Img}(f)$, je skup svih vektora prostora V_2 koji se dobijaju preslikavanjem vektora prostora V_1 , odnosno

$$\text{Img}(f) = \{y \in V_2 \mid \exists x \in V_1, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in V_1\}.$$

Teorema 3 Za linearnu transformaciju $f : V_1 \rightarrow V_2$ važi da je njeno jezgro vektorski prostor, odnosno, $(\text{Ker}(f), F, +_1, \cdot_1)$ je potprostor prostora $V_1 = (V_1, F, +_1, \cdot_1)$.

Teorema 4 Za linearnu transformaciju $f : V_1 \rightarrow V_2$ važi da je skup njenih slika vektorski prostor, odnosno, $(\text{Img}(f), F, +_2, \cdot_2)$ je potprostor prostora $V_2 = (V_2, F, +_2, \cdot_2)$.

Svaka linearna transformacija $f : F^n \rightarrow F^m$ se može jednoznačno identifikovati sa njoj odgovarajućom matricom $M_f = [\alpha_{ij}]_{m \times n}$ nad poljem F , takvom da za sve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^n$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in F^m$ važi

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad M_f \cdot [x] = [y]$$

gde su $[x] = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ i $[y] = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ matrice-kolone koje odgovaraju vektorima x i y .

Teorema 5 Neka su V_1, V_2 i V_3 vektorski prostori nad istim poljem, i neka su funkcije $f : V_1 \rightarrow V_2$ i $g : V_2 \rightarrow V_3$ linearne transformacije. Tada je i $h = g \circ f : V_1 \rightarrow V_3$ linearna transformacija, i pri tome, ako su M_f i M_g matrice linearnih transformacija f i g redom, tada je $M_h = M_g \cdot M_f$ matrica linearne transformacije h .

Definicija 3 Linearna transformacija f je **regulama** ako i samo ako je ona bijektivna, tj. ako i samo ako je izomorfizam.

Definicija 4 Linearna transformacija f je regularna ako i samo ako je njena matrica M_f kvadratna i regularna, odnosno $\det M_f \neq 0$.

- Linearna transformacija je izomorfizam ako i samo ako bazu preslikava na bazu.
- Linearna transformacija $f : V_1 \rightarrow V_2$ određena je slikama bilo koje baze iz V_1 .
- Skup svih linearnih preslikavanja prostora V_1 u V_2 označavamo sa $\text{Hom}(V_1, V_2)$.

Zadatak 1 Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x, y) = (4x - 5y, 2x + 7y)$. Proveriti po definiciji da li je f linearna transformacija.

Rešenje: Funkcija f je linearna transformacija ako za svaka dva vektora $a, b \in \mathbb{R}^2$ i svaka dva skalara $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važi $f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$. Neka su $a = (x, y)$ i $b = (u, v)$ iz \mathbb{R}^2 . Tada je

$$\begin{aligned} f(\alpha a + \beta b) &= f(\alpha(x, y) + \beta(u, v)) = f((\alpha x, \alpha y) + (\beta u, \beta v)) = f(\alpha x + \beta u, \alpha y + \beta v) = \\ &= (4(\alpha x + \beta u) - 5(\alpha y + \beta v), 2(\alpha x + \beta u) + 7(\alpha y + \beta v)) = \\ &= (4\alpha x - 5\alpha y + 4\beta u - 5\beta v, 2\alpha x + 7\alpha y + 2\beta u + 7\beta v) = \\ &= (4\alpha x - 5\alpha y, 2\alpha x + 7\alpha y) + (4\beta u - 5\beta v, 2\beta u + 7\beta v) = \\ &= \alpha(4x - 5y, 2x + 7y) + \beta(4u - 5v, 2u + 7v) = \alpha f(x, y) + \beta f(u, v) = \alpha f(a) + \beta f(b). \end{aligned}$$

□

Zadatak 2 Neka su $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ funkcije definisane na sledeći način: $f(x, y, z) = (2, -3, 1) \times (x, y, z) + (x, y, z) \times (3, 0, -1)$, g je projekcija tačke prostora \mathbb{R}^3 na xOy ravan (prostor \mathbb{R}^2) i $h(x, y) = (2x - 6y, x + y, 3x + 5y)$. Dokazati da je funkcija $T = h \circ g \circ f$ linearna transformacija, i odrediti njenu matricu.

Rešenje: Za funkciju $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ imamo

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (2, -3, 1) \times (x, y, z) + (x, y, z) \times (3, 0, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= (-y - 3z, x - 2z, 3x + 2y) + (-y, x + 3z, -3y) = (-2y - 3z, 2x + z, 3x - y). \end{aligned}$$

Funkcija $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je $g(x, y, z) = (x, y)$.

Dokaz da je funkcija T linearna transformacija (i da odredimo njenu matricu) možemo uraditi na dva načina:

- 1. način: Funkcija $T = h \circ g \circ f$ je kompozicija linearnih transformacija, pa je i ona linearna transformacija i jednaka je:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (h \circ g \circ f)(x, y, z) = h(g(-2y - 3z, 2x + z, 3x - y)) = h(-2y - 3z, 2x + z) = \\ &= (2(-2y - 3z) - 6(2x + z), -2y - 3z + 2x + z, 3(-2y - 3z) + 5(2x + z)) = \\ &= (-12x - 4y - 12z, 2x - 2y - 2z, 10x - 6y - 4z), \end{aligned}$$

$$\text{a njena matrica je } M_T = \begin{bmatrix} -12 & -4 & -12 \\ 2 & -2 & -2 \\ 10 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

- 2. način: Matrice linearnih transformacija f , g i h su redom

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } M_h = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu teoreme 5 funkcija T je linearna transformacija, i njena matrica je

$$\begin{aligned} M_T = M_h \cdot M_g \cdot M_f &= \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -4 & -12 \\ 2 & -2 & -2 \\ 10 & -6 & -4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

te je $T(x, y, z) = (-12x - 4y - 12z, 2x - 2y - 2z, 10x - 6y - 4z)$.

□

Zadatak 3 Dati su sledeći skupovi vektora $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ i $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, gde su vektori $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (1, 2, -1)$, $a_3 = (-1, -1, -1)$, $b_1 = (1, 2, -3)$, $b_2 = (2, 1, 4)$ i $b_3 = (1, 1, 1)$.

- Dokazati da su A i B baze prostora \mathbb{R}^3 .
- Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ koji u bazi A ima reprezentaciju $x_A = (-2, 2, 1)_A$ predstaviti u bazi B .
- Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ koji u standardnoj bazi ima reprezentaciju $x_E = (-4, 12, 8)_E$ predstaviti u bazi A .

Rešenje:

- Neka je matrica $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ i matrica $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Determinanta matrice A je $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4$, a matrice B je

$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2$. Pošto je $\det(A) \neq 0$, sledi da su vektori a_1, a_2 i a_3 linearno nezavisni, što znači da čine bazu 3-dimenzionalnog vektorskog prostora \mathbb{R}^3 . Analogno važi i za skup B .

- Za vektor x važi

$$A \cdot x_A = B \cdot x_B = E \cdot x_E.$$

Prvo ćemo vektor x predstaviti u standardnoj bazi $E = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$x = (-2, 2, 1)_A = -2a_1 + 2a_2 + a_3 = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1, -1, -9)_E$$

Iz reprezentacije vektora x u standardnoj bazi dobijemo vektor x u bazi B :

$$x = (\alpha, \beta, \gamma)_B = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + 2\beta + \gamma \\ 2\alpha + \beta + \gamma \\ -3\alpha + 4\beta + \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Oдавде se dobija sistem:

$$\begin{array}{rrcr} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & -1 \\ 2\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & -1 \\ -3\alpha & + & 4\beta & + & \gamma & = & -9 \end{array}$$

Rešenje je: $\alpha = 4, \beta = 4, \gamma = -13$, odnosno $x = (4, 4, -13)_B$.

* Zadatak možemo rešiti i preko matrica. Kako je $B \cdot x_B = A \cdot x_A$, sledi da je $x_B = B^{-1} \cdot A \cdot x_A$.

(c) Iz reprezentacije vektora x u standardnoj bazi dobijemo vektor x u bazi A :

$$x = (\alpha, \beta, \gamma)_A = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta - \gamma \\ 2\alpha + 2\beta - \gamma \\ 3\alpha - \beta - \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Oдавде se dobija sistem:

$$\begin{array}{rrcr} \alpha & + & \beta & - & \gamma & = & -4 \\ 2\alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 12 \\ 3\alpha & - & \beta & - & \gamma & = & 8 \end{array}$$

Rešenje je: $\alpha = 11, \beta = 5, \gamma = 20$, odnosno $x = (11, 5, 20)_A$.

* Zadatak možemo rešiti i preko matrica. Kako je $A \cdot x_A = E \cdot x_E$, sledi da je $x_A = A^{-1} \cdot x_E$.

□

Zadatak 4 Za sledeće funkcije ispitati, odnosno diskutovati po parametrima kada su linearne transformacije, i u slučajevima kada jesu, naći njihove matrice i odrediti (diskutovati) rang tih matrica.

- (a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (ax + y^b, bx - z)$.
- (b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = ax + bxy + cy$.
- (c) $j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, j(x, y, z) = (a^x + \cos(b)yz^c, \alpha x + \beta y + \gamma z)$.
- (d) $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, h(x, y) = (x^{\cos \alpha} - \beta^y, \gamma, \alpha^2 x + \beta^2 y)$.

Rešenje:

- (a) Da bi f bila linearna transformacija, svaka komponenta slike mora biti oblika $t_1 x + t_2 y + t_3 z$ za neke $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$. Izraz $ax + y^b$ je traženog oblika ako i samo ako je $b = 1$, a za a nema ograničenja. Izraz $bx - z$ je za svako b traženog oblika.

Dakle, f je linearna transformacija ako i samo ako je $b = 1$. U tom slučaju je $f(x, y, z) = (ax + y, x - z)$, i matrica ove linearne transformacije je $M_f = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Matrica M_f je ranga 2 za svako $a \in \mathbb{R}$.

- (b) Mora biti $b = 0$, što je i jedini uslov da g bude linearna transformacija. U tom slučaju je funkcija $g(x, y) = ax + cy$, i odgovarajuća matrica je $M_g = \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix}$. Prema tome je

$$\text{rang}(M_g) = \begin{cases} 0 & , \quad a = c = 0 \\ 1 & , \quad a \neq 0 \vee c \neq 0 \end{cases}.$$

- (c) Analizirajući redom komponente slike $(a^x + \cos(b)yz^c, \alpha x + \beta y + \gamma z)$, zaključujemo da kod prve komponente mora biti $a = 0$, i s druge strane mora biti ili $\cos(b) = 0$ ili $c = 0$, kod druge komponente $\alpha x + \beta y + \gamma z$ nema ograničenja za α, β i γ .

Prema tome, zaključujemo da je funkcija j linearna transformacija ako i samo ako je $a = 0 \wedge (b \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \vee c = 0)$.

- (c.1) U slučaju $a = 0 \wedge b \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ je $j(x, y, z) = (0, \alpha x + \beta y + \gamma z)$,

$$M_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}, \text{rang}(M_j) = \begin{cases} 0 & , \quad \alpha = \beta = \gamma = 0 \\ 1 & , \quad \alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0 \vee \gamma \neq 0 \end{cases}.$$

- (c.2) U slučaju $a = 0 \wedge c = 0$ je $j(x, y, z) = (\cos(b)y, \alpha x + \beta y + \gamma z)$,

$$M_j = \begin{bmatrix} 0 & \cos(b) & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}, \text{rang}(M_j) = \begin{cases} 0 & , \quad \alpha = \beta = \gamma = 0 \wedge b \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ 2 & , \quad b \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \wedge (\alpha \neq 0 \vee \gamma \neq 0) \\ 1 & , \quad \text{inače} \end{cases}.$$

- (d) Analizirajući redom komponente slike $(x^{\cos \alpha} - \beta^y, \gamma, \alpha^2 x + \beta^2 y)$, zaključujemo da kod prve komponente mora biti $\cos \alpha = 1$ i $\beta = 0$ (odnosno $\alpha \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ i $\beta = 0$) ili $\cos \alpha = 0$ i $\beta = 1$ (odnosno $\alpha \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ i $\beta = 1$), kod druge komponente $\gamma = 0$, a kod treće komponente $\alpha^2 x + \beta^2 y$ nema ograničenja za α i β .

Dakle, h je linearna transformacija ako i samo ako je $(\alpha \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \wedge \beta = 0 \wedge \gamma = 0) \vee (\alpha \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \wedge \beta = 1 \wedge \gamma = 0)$.

- (d.1) U slučaju $\alpha \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \wedge \beta = 0 \wedge \gamma = 0$ je $h(x, y) = (x, 0, (2k\pi)^2 x)$, i

$$\text{odgovarajuća matrica je } M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ (2k\pi)^2 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Pri tome je } \text{rang}(M_h) = 1.$$

- (d.2) U slučaju $\alpha \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \wedge \beta = 1 \wedge \gamma = 0$ je $h(x, y) = (0, 0, (\frac{\pi}{2} + k\pi)^2 x + y)$,

$$\text{i odgovarajuća matrica je } M_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ (\frac{\pi}{2} + k\pi)^2 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Pri tome je } \text{rang}(M_h) = 1.$$

□

Zadatak 5 Neka je $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ravanska simetrija u odnosu na ravan α , $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ projekcija na ravan α , gde je $\alpha : x + y + z = 0$. Da li su f i g linearne transformacije i ako jesu, naći matrice M_f i M_g i proveriti da li su funkcije f i g izomorfizmi.

Rešenje: Funkcije f i g možemo zapisati: $f(M) = M'$ i $g(M) = S$. Tako da treba da nađemo tačke M' i S .

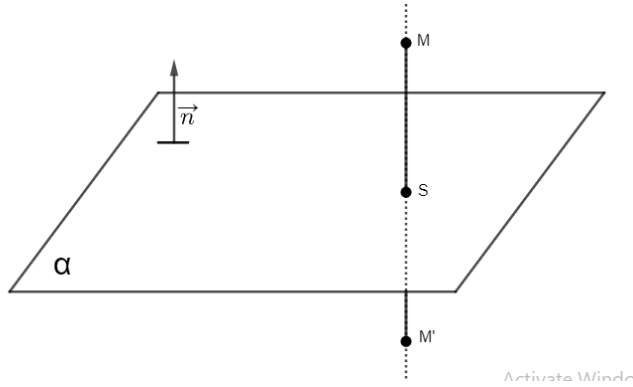
Tačka S je projekcija tačke M na ravan α :

$$\vec{r}_S = \vec{r}_M + \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_M) \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \cdot \vec{n},$$

gde je $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ tačka ravni α i $\vec{n} = (1, 1, 1)$ normala ravni α .

Tačka M' je simetrična tačka tački M u odnosu na ravan α , tako da je S sredina duži $\overline{MM'}$:

$$\vec{r}_S = \frac{\vec{r}_M + \vec{r}_{M'}}{2}, \text{ odnosno } \vec{r}_{M'} = 2\vec{r}_S - \vec{r}_M.$$



$$\begin{aligned} \vec{r}_S &= \vec{r}_M - \frac{\vec{r}_M \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \cdot \vec{n} = (x, y, z) - \frac{(x, y, z) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} \cdot (1, 1, 1) \\ &= (x, y, z) - \frac{x + y + z}{3} \cdot (1, 1, 1) = (x, y, z) - \frac{1}{3} \cdot (x + y + z, x + y + z, x + y + z) \\ &= \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right) \end{aligned}$$

Tako da je funkcija g jednaka:

$$g(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right).$$

Odgovarajuća matrica je

$$M_g = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Linearna transformacija g nije izomorfizam, jer je $\det(M_g) = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{r}_{M'} &= 2\vec{r}_S - \vec{r}_M = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right) - (x, y, z) \\ &= \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z\right) \end{aligned}$$

Tako da je funkcija f jednaka:

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z\right).$$

Odgovarajuća matrica je

$$M_f = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Linearna transformacija f jeste izomorfizam, jer je $\det(M_f) = -1 \neq 0$. □

Zadatak 6 Neka je $\vec{r}_Q = (a, a, b)$ i $\vec{n} = (0, 1, 0)$, gde su $a, b \in \mathbb{R}$, i neka je $f_{a,b} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ translacija za vektor \vec{r}_Q , a $g_{a,b} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ projekcija na ravan $\alpha : \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_Q) = 0$ i $h_{a,b} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $h(\vec{v}) = (\vec{r}_Q \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n}$, gde je $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Za koje a i b su $f_{a,b}$, $g_{a,b}$ i $h_{a,b}$ linearne transformacije i u tom slučaju odrediti njihove matrice i rangove.

Rešenje: Funkcija $f_{a,b}$ je

$$f_{a,b}(x, y, z) = (x, y, z) + (a, a, b) = (x + a, y + a, z + b),$$

i $f_{a,b}$ je linearna transformacija za $a = 0$ i $b = 0$, odnosno $f(x, y, z) = (x, y, z)$. Odgovarajuća

matrica je $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pri tome je $\text{rang}(M_f) = 3$.

Funkcija $g_{a,b}$ je

$$g_{a,b}(x, y, z) = (x, y, z) + \frac{((a, a, b) - (x, y, z)) \cdot (0, 1, 0)}{(0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0)} \cdot (0, 1, 0) = (x, y, z) + (a - y) \cdot (0, 1, 0) = (x, a, z),$$

i $g_{a,b}$ je linearna transformacija za $a = 0$, odnosno $g(x, y, z) = (x, 0, z)$. Odgovarajuća matrica je

$$M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Pri tome je } \text{rang}(M_g) = 2.$$

Funkcija $h_{a,b}$ je

$$h_{a,b}(x, y, z) = ((a, a, b) \cdot (x, y, z)) \cdot (0, 1, 0) = (ax + ay + bz) \cdot (0, 1, 0) = (0, ax + ay + bz, 0),$$

i $h_{a,b}$ je linearna transformacija za svako $a, b \in \mathbb{R}$. Odgovarajuća matrica je $M_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Pri tome je $\text{rang}(M_h) = \begin{cases} 0 & , \quad a = b = 0 \\ 1 & , \quad a \neq 0 \vee b \neq 0 \end{cases}$. □

Zadatak 7 Neka je $\vec{n} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ i neka funkcije f , g i h preslikavaju prostor slobodnih vektora V u samog sebe, a definisane su sa:

$$f(\vec{x}) = (\vec{x} \times \vec{n}) \times \vec{n}, \quad g(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad i \quad h(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \cdot f(\vec{x}) + \frac{1}{|\vec{n}|^2} \cdot g(\vec{x}).$$

(a) Dokazati da su f , g i h linearne transformacije.

(b) Napisati redom matrice A, B i C linearnih transformacija f , g i h .

(c) Naći rangove matrica A, B i C . Izračunati h^{-1} i ispitati da li je $C^2 = I$.

(d) Odrediti dimenzije vektorskih prostora $f(V)$, $g(V)$ i $h(V)$.

Rešenje:

(a) Kako je

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= ((x, y, z) \times (2, -2, 1)) \times (2, -2, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \times (2, -2, 1) = \\ &= (y + 2z, 2z - x, -2x - 2y) \times (2, -2, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y + 2z & 2z - x & -2x - 2y \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (-5x - 4y + 2z, -4x - 5y - 2z, 2x - 2y - 8z), \end{aligned}$$

sledi da funkcija $f(x, y, z)$ jeste linearna transformacija. Kako je

$$g(x, y, z) = ((x, y, z) \cdot (2, -2, 1)) \cdot (2, -2, 1) = (2x - 2y + z) \cdot (2, -2, 1) = \\ = (4x - 4y + 2z, -4x + 4y - 2z, 2x - 2y + z),$$

sledi da funkcija $g(x, y, z)$ jeste linearna transformacija. Funkcija $h(x, y, z)$ je linearna kombinacija linearnih transformacija, tako da je i sama linearna transformacija.

(b) Matrice linearnih transformacija $f(x, y, z)$ i $g(x, y, z)$ su redom $A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -4 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$ i

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Matrica linearne transformacije } h(x, y, z) \text{ je } C = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \cdot (A + B), \text{ gde}$$

$$\text{je } |\vec{n}|^2 = (\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2})^2 = 9. \text{ Tako da je } C = \frac{1}{9} \cdot (A + B) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{bmatrix}.$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -4 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -8 \end{bmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -9 & -9 & 0 \\ -18 & -18 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

(1) Prvu vrstu dodajemo drugoj vrsti i prvu vrstu množimo sa 4 i dodajemo trećoj vrsti.

(2) Drugu vrstu množimo sa -2 i dodajemo trećoj vrsti.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \text{rang}(B) = 1$$

(3) Kako su sve vrste međusobno proporcionalne, sledi da je $\text{rang}(B) = 1$.

$$C = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{bmatrix} \stackrel{(4)}{\sim} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -8 & 4 \\ 0 & 63 & -36 \\ 0 & -36 & 9 \end{bmatrix} \stackrel{(5)}{\sim} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 0 & -81 & -36 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(C) = 3$$

(4) Prvu vrstu množimo sa -8 i dodajemo drugoj vrsti i prvu vrstu množimo sa 4 i dodajemo trećoj vrsti.

(5) Treću kolonu množimo sa 4 i dodajemo drugoj koloni.

Izračunamo C^2 :

$$C^2 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{bmatrix} = \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Kako je $C^2 = I$ sledi da je $C^{-1} = C$, što ujedno znači i da je $h^{-1} = h$.

(d) $\dim(f(V)) = 2$,

$\dim(g(V)) = 1$,

$\dim(h(V)) = 3$.

□

Zadatak 8 Neka je $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linearna transformacija vektorskog prostora uređenih trojki u samog sebe za koju važi $f(1, 0, 1) = (5, -4, -3)$, $f(1, -1, 0) = (1, -1, 0)$ i $f(1, 1, 1) = (7, -5, -5)$.

(a) Napisati vektore $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$ kao linearne kombinacije vektora $(1, 0, 1)$, $(1, -1, 0)$ i $(1, 1, 1)$.

- (b) Odrediti vektore $f(1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0)$ i $f(0, 0, 1)$.
- (c) Odrediti linearnu transformaciju $f(x, y, z)$.
- (d) Napisati matricu M linearne transformacije f u standardnoj bazi i naći njen rang.
- (e) Naći M^{-1} i f^{-1} (ako postoje).

Rešenje:

(a) (1) Vektor $(1, 0, 0)$:

$$(1, 0, 0) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, -1, 0) + \gamma(1, 1, 1)$$

Odavde se dobija sistem:

$$\begin{array}{rrcr} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ & & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & & & & + & \gamma & = & 0 \end{array}$$

Rešenje je: $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 1$.

(2) Vektor $(0, 1, 0)$:

$$(0, 1, 0) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, -1, 0) + \gamma(1, 1, 1)$$

Odavde se dobija sistem:

$$\begin{array}{rrcr} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ & & - & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ \alpha & & & & + & \gamma & = & 0 \end{array}$$

Rešenje je: $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 1$.

(3) Vektor $(0, 0, 1)$:

$$(0, 0, 1) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, -1, 0) + \gamma(1, 1, 1)$$

Odavde se dobija sistem:

$$\begin{array}{rrcr} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ & & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & & & & + & \gamma & = & 1 \end{array}$$

Rešenje je: $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = -1$.

$$\begin{aligned} (b) \quad f(1, 0, 0) &= f(-(1, 0, 1) + (1, -1, 0) + (1, 1, 1)) = -f(1, 0, 1) + f(1, -1, 0) + f(1, 1, 1) \\ &= -(5, -4, -3) + (1, -1, 0) + (7, -5, -5) = (3, -2, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0, 1, 0) &= f(-(1, 0, 1) + (1, 1, 1)) = -f(1, 0, 1) + f(1, 1, 1) \\ &= -(5, -4, -3) + (7, -5, -5) = (2, -1, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0, 0, 1) &= f(2(1, 0, 1) - (1, -1, 0) - (1, 1, 1)) = 2f(1, 0, 1) - f(1, -1, 0) - f(1, 1, 1) \\ &= 2(5, -4, -3) - (1, -1, 0) - (7, -5, -5) = (2, -2, -1) \end{aligned}$$

(c) Linearnu transformaciju $f(x, y, z)$ možemo naći na dva načina.

$$\begin{aligned} 1. \text{način: } f(x, y, z) &= f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) = xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\ &= x(3, -2, -2) + y(2, -1, -2) + z(2, -2, -1) \\ &= (3x + 2y + 2z, -2x - y - 2z, -2x - 2y - z) \end{aligned}$$

2. način: Neka su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -4 & -1 & -5 \\ -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$. Matricu linearne transformacije $f(x, y, z)$ možemo naći na sledeći način: $M \cdot A = B$, odnosno $M = B \cdot A^{-1}$.

$$M = B \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -4 & -1 & -5 \\ -3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$(d) \quad M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(M) = 3$$

(1) Treću vrstu množimo sa -2 i dodajemo drugoj vrsti i treću vrstu množimo sa 2 i dodajemo prvoj vrsti.

(2) Prvu kolonu množimo sa -2 i dodajemo drugoj koloni.

(e) Prvo izračunamo $\det(M)$:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Kako $\det(M)$ nije 0, za matricu M postoji inverz:

$$M^{-1} = -1 \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = M$$

Kako je $M^{-1} = M$ sledi da je i $f^{-1} = f$.

□

Tvrđenje 1 Neka je M matrica linearne transformacije $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Tada linearna transformacija f je:

1. *sirjektivna (epimorfizam) akko je $n \geq m$ i $\text{rang} M = m$,*
2. *injektivna (monomorfizam) akko je $n \leq m$ i $\text{rang} M = n$,*
3. *bijektivna (izomorfizam) akko je $n = m$ i $\text{rang} M = n$.*

Primer 1 Primeri sa testa:

- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $f(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 5y)$ je:
1) sirjektivna 2) injektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog.
- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $f(x, y) = (x - y, -x + y, -5x + 5y)$ je:
6) sirjektivna 7) injektivna 8) bijektivna 9) izomorfizam 10) ništa od prethodnog.
- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z)$ je:
11) sirjektivna 12) injektivna 13) bijektivna 14) izomorfizam 15) ništa od prethodnog.
- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x, y, z) = (x - y - z, -2x + 2y + 2z)$ je:
16) sirjektivna 17) injektivna 18) bijektivna 19) izomorfizam 20) ništa od prethodnog.
- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x, y) = (x - y, -2x + y)$ je:
21) sirjektivna 22) injektivna 23) bijektivna 24) izomorfizam 25) ništa od prethodnog.
- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$ je:
26) sirjektivna 27) injektivna 28) bijektivna 29) izomorfizam 30) ništa od prethodnog.
- Postoji linearna transformacija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ za koju važi da je:
31) sirjektivna 32) injektivna 33) bijektivna 34) izomorfizam 35) ništa od prethodnog.

- Napisati bar jednu, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ za koju važi da:
36) je injektivna $f(x) =$ **37)** nije injektivna $f(x) =$
38) je surjektivna $f(x) =$ **39)** nije surjektivna $f(x) =$
- Napisati bar jednu, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ za koju važi da:
40) je injektivna $f(x, y) =$ **41)** nije injektivna $f(x, y) =$
42) je surjektivna $f(x, y) =$ **43)** nije surjektivna $f(x, y) =$
- Napisati bar jednu, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ za koju važi da:
44) je injektivna $f(x, y, z) =$ **45)** nije injektivna $f(x, y, z) =$
46) je surjektivna $f(x, y, z) =$ **47)** nije surjektivna $f(x, y, z) =$