VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Blesi Andrija, Dedei Jovana, Dragi ore, Janjo Aleksandar, Mievi Irena, Ostoji Tijana, Prokić Aleksandar, Tošić Stefan, Vuković Manojlo

Katedra za matematiku
Fakultet tehničkih nauka

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe I.5

1.1. Granične vrednosti funkcija

Neka je $D \subset \mathbb{R}$ i $f : D \mapsto \mathbb{R}$ realna funkcija jedne promenljive, i neka je x_0 tačka nagomilavanja za oblast definisanosti D.

Za funkciju $y = f(x)$ se kaže da ima graničnu vrednost $A \in \mathbb{R}$ u tački a akko za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (koje zavisi od ε) takvo da za svako $x \in D \backslash \{x_0\}$ važi da iz $|x - x_0| < \delta$ sledi $|f(x) - A| < \varepsilon$, tj. akko važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \backslash \{x_0\}) \quad \Big(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\Big).$$

Tada pišemo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Osnovne osobine

Ako je x_0 tačka nagomilavanja za zajedničku oblast definisanosti funkcija $f(x)$ i $g(x)$ (tj. za presek njihovih domena), i ako je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq \pm\infty$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \neq \pm\infty$, tada je:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \Big(f(x) \pm g(x)\Big) = \Big(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\Big) \pm \Big(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\Big) = A \pm B,$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} \Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = \Big(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\Big) \cdot \Big(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\Big) = A \cdot B,$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \cdot A, \quad$ za svako $c \in \mathbb{R}$,

4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}, \quad$ gde $g(x) \neq 0$, za $x \in O(x_0)$ i $B \neq 0$.

Ako funkcija u x_0 ima i levu i desnu graničnu vrednost, onda ona u toj tački ima graničnu vrednost akko su leva i desna granična vrednost jednake, tj. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ postoji akko

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

Neke korisne (tablične) granične vrednosti

1. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e,$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1,$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(x + 1)}{x} = \log_a e,$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1.$

Sve napomene koje smo dali pri traženju graničnih vrednosti nizova važe i pri traženju graničnih vrednosti funkcija.

Zadatak 1.1. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}$.

Rešenje. Lako se pokazuje da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}=3\lim_{3x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}=3\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=3.$$

Zadatak 1.2. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin(ax)}$, $a\neq 0$, $b\in\mathbb{R}$.

Rešenje. Lako se pokazuje da je gornji izraz jednak sa

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin(ax)}{bx}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{bx}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}\cdot\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}}=\frac{b}{a}.$$

Zadatak 1.3. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}$, $a\in\mathbb{R}$.

Rešenje. Na osnovu izraza za razliku sinusa, sledi da je

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}=\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)=\cos\left(\frac{a+a}{2}\right)=\cos(a).$$

Zadatak 1.4. Proveriti da li postoji sledeća granična vrednost: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}$.

Rešenje. Primetimo da je, sa jedne strane

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}=\text{“}\frac{2^+}{2^+-2}\text{”}=\text{“}\frac{2^+}{0^+}\text{”}=+\infty,$$

zato što izraz iznad razlomačke crte teži dvojci, a ispod razlomačke crte teži nuli (sa desne strane, što znači da se $x-2$ može posmatrati kao pozitivna vrednost blizu nule). Sa druge strane, tačno je da

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x-2}=\text{“}\frac{2^-}{2^--2}\text{”}=\text{“}\frac{2^-}{0^-}\text{”}=-\infty,$$

baš zato što izraz ispod razlomačke crte teži nuli (sa leve strane, što znači da se $x-2$ može posmatrati kao negativna vrednost blizu nule).

Budući da se levi i desni limes ne poklapaju (nisu jednaki), kažemo da funkcija nema graničnu vrednost u $x=2$.

Zadatak 1.5. Proveriti da li postoji sledeća granična vrednost: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\exp\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Rešenje. Primetimo da je, sa jedne strane

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\exp\left(\frac{1}{x}\right)}=\text{“}\frac{1}{1+\exp\left(\frac{1}{0^+}\right)}\text{”}=\text{“}\frac{1}{1+\exp(+\infty)}\text{”}=\text{“}\frac{1}{+\infty}\text{”}=0.$$

Sa druge strane, tačno je da je

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+\exp\left(\frac{1}{x}\right)} = \text{“}\frac{1}{1+\exp\left(\frac{1}{0^-}\right)}\text{”} = \text{“}\frac{1}{1+\exp\left(-\infty\right)}\text{”} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Budući da se levi i desni limes ne poklapaju (nisu jednaki), kažemo da funkcija nema graničnu vrednost u tački $x = 0$.

Zadatak 1.6. Proveriti da li postoji sledeća granična vrednost: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$.

Rešenje. Podsetimo se da je, po definiciji

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0 \\ 1-x, & x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}.$$

što implicira da su levi i desni limesi nejednaki

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{1-x} = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{|x-1|},$$

zato što je $(x-1)$ proizvoljno mala negativna vrednost ako $x \to 1^-$ i proizvoljno mala pozitivna vrednost ako $x \to 1^+$. Budući da se levi i desni limes ne poklapaju (nisu jednaki), kažemo da funkcija nema graničnu vrednost u $x = 1$.

Zadatak 1.7. Proveriti da li postoji sledeća granična vrednost: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin(x)|}{x}$.

Rešenje. Podsetimo se da je, po definiciji

$$|\sin(x)| = \begin{cases} \sin(x), & \sin(x) \geq 0 \\ -\sin(x), & \sin(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sin(x), & \text{za dovoljno malo } x \geq 0 \\ -\sin(x), & \text{za dovoljno malo } x < 0 \end{cases}.$$

što implicira da su levi i desni limesi nejednaki

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\sin(x)|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin(x)}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin(x)|}{x}.$$

Budući da se levi i desni limes ne poklapaju (nisu jednaki), kažemo da funkcija nema graničnu vrednost u $x = 0$.

Zadatak 1.8. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

Rešenje. Primetimo da bismo direktnim uvrštavanjem broja 1 umesto x dobili izraz oblika “0/0”. To nam daje da je broj 1 koren oba polinoma u razlomku, te je dalje

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x-2)}{(x^3+x^2+x-3)}.$$

(Izvršene faktorizacije se mogu dobiti ili prostim deljenjem posmatranih polinoma sa $(x-1)$ ili Hornerovom šemom.)

Direktnim uvrštavanjem broja 1 umesto x u poslednjem izrazu opet dobijamo izraz oblika "0/0", te je, sličnim postupkom kao gore, poslednji izraz

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)}{(x^3+x^2+x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x^2+2x+3)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Naglasimo da funkcija $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ nije definisana u tački $x=1$ (za potvrdu naći oblast definisanosti!), ali da ima graničnu vrednost u toj tački.

Zadatak 1.9. Naći graničnu vrednost $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

Rešenje. Ovaj zadatak ćemo rešiti uvođenjem smene $t=\sqrt[12]{x}$. To znači da je $x=t^{12}$, te da ćemo umesto $\sqrt[3]{x}$ pisati t^4, a umesto $\sqrt[4]{x}$ pisati t^3. Vrlo je bitno primetiti da kad x teži broju 1, onda $t=\sqrt[12]{x}$ teži $\sqrt[12]{1}$, tj. broju 1. Dakle,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^4-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{(t+1)(t^2+1)}{t^2+t+1}=\frac{4}{3}.$$

Naglasimo da funkcija $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ nije ista kao funkcija $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$ (uporediti grafike), one samo imaju iste granične vrednosti u jedinici.

Zadatak 1.10. Naći graničnu vrednost $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6}$.

Rešenje. Kad x teži 2, i kvadratni koren i kubni koren u brojiocu teže ka 3. Zato, nakon dodavanja i oduzimanja broja 3, vidimo da je

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+3-3}{x^2-5x+6}=\underbrace{\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-5x+6}}_{a}-\underbrace{\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+15}-3}{x^2-5x+6}}_{b}.$$

Izračunavanjem limesa dobijamo:

$$\begin{aligned}a&=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-5x+6}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x^2-5x+6)(\sqrt{x^2+5}+3)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}=-4\cdot\frac{1}{6}=-\frac{2}{3},\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+15}-3}{x^2-5x+6}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+15}\right)^2+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+15}\right)^2+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3+x^2+15)-27}{(x^2-5x+6)\left(\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+15}\right)^2+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9\right)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-12}{x^2-5x+6}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+15}\right)^2+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+3x+6)}{(x-2)(x-3)}\cdot\frac{1}{(9+3\cdot 3+9)}=\frac{1}{27}\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x+6}{x-3}=-\frac{16}{27},\end{aligned}$$

pa je konačno

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6}=\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{16}{27}\right)=-\frac{2}{27}.$$

Zadatak 1.11. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\dfrac{x}{x^2-4}}$.

Rešenje. Pre svega treba primetiti da bismo direktnim uvrštavanjem $x=2$ u gornji izraz dobili neodređeni izraz oblika "1^∞", zato nastavljamo

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x^2-3}{x+3}-1\right)^{\dfrac{x}{x^2-4}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{(2x^2-3)-(x+3)}{x+3}\right)^{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\dfrac{x}{x^2-4}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\dfrac{x+3}{2x^2-x-6}\dfrac{2x^2-x-6}{x+3}\dfrac{x}{x^2-4}}$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x+3}\frac{x}{x^2-4}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 2}\frac{x}{x+3}\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x^2-4}\right)$$

$$=\exp\left(\frac{2}{5}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(x+2)}\right)=\exp\left(\frac{2}{5}\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{x+2}\right)=\exp\left(\frac{7}{10}\right)=\sqrt[10]{e^7}.$$

Zadatak 1.12. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln(x)-1}{x-e}$.

Rešenje. Primetimo da se gornji izraz može napisati i kao

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-\ln(e)}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\left(\frac{x}{e}\right)}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{1}{x-e}\ln\left(\frac{x}{e}\right)=\lim_{x\to e}\ln\left(\left(\frac{x}{e}\right)^{\dfrac{1}{x-e}}\right).$$

Pošto je funkcija $\ln(x)$ neprekidna funkcija, imamo da je limes gornjeg logaritma jednak logaritmu limesa, pa dobijamo

$$\lim_{x\to e}\ln\left(\left(\frac{x}{e}\right)^{\dfrac{1}{x-e}}\right)=\ln\left(\lim_{x\to e}\left(\frac{x}{e}\right)^{\dfrac{1}{x-e}}\right)=\ln\left(\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x}{e}-1\right)^{\dfrac{1}{x-e}}\right)$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x-e}{e}\right)^{\dfrac{e}{x-e}\dfrac{x-e}{e}\dfrac{1}{x-e}}\right)=\ln\left(\exp\left(\lim_{x\to e}\frac{x-e}{e}\frac{1}{x-e}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to e}\frac{x-e}{e}\frac{1}{x-e}=\frac{1}{e}.$$

Zadatak 1.13. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Rešenje. Zapišimo gornji limes kao

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Na osnovu osobine da je granična vrednost limesa jednaka proizvodu graničnih vrednosti dobijamo

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\lim_{x\to 1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

Budući da je $\cos(\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, sledi da je i $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)$, što se može zapisati i kao $\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)$. Konačno

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}}=\frac{2}{\pi},$$

nakon smene oblika $t=\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)$, i koristeći osobinu o graničnoj vrednosti količnika.

Zadatak 1.14. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^3}$.

Rešenje. Sređivanjem gornjeg izraza može se videti da je:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^3}\cdot\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\operatorname{tg}(x))-(1-\sin(x))}{x^3\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3},$$

gde je korišćena osobina o limesu proizvoda. Gornji limes se može zapisati kao

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(x)}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))\sin(x)}{x^3\cos(x)},$$

odakle je jasno da se on može predstaviti i kao proizvod tri limesa

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))\sin(x)}{x^3\cos(x)}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\right),$$

zato što su sve granične vrednosti konačne. Za prvu i treću graničnu vrednost je to očigledno, a za drugu treba primetiti da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{2}{4}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2},$$

koristeći osobinu limesa proizvoda i neprekidnost kvadratne funkcije. Zato je konačno

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^3} = \frac{1}{2}\left(1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\right) = \frac{1}{4}.$$

Zadatak 1.15. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\operatorname{tg}^2(x)}$.

Rešenje. Oduzimanjem i dodavanjem jedinice, može se videti da je

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin(x)-1)^{\operatorname{tg}^2(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin(x)-1)^{\frac{1}{\sin(x)-1}(\sin(x)-1)\operatorname{tg}^2(x)}$$
$$= \exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin(x)-1)\operatorname{tg}^2(x)\right) = \exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(x)-1)\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)$$
$$= \exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)-1}{\cos^2(x)}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\right) = \exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)-1}{1-\sin^2(x)}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\right)$$
$$= \exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)-1}{1-\sin^2(x)}\right) = \exp\left(-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin(x)}{1-\sin^2(x)}\right) = \exp\left(-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)}\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{1+1}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Zadatak 1.16. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, za $a>0$.

Rešenje. Ovaj limes se često navodi i kao tablični, ali se može rešiti i svođenjem na tablični limes sa početka poglavlja, i to uvođenjem smene $t = a^x - 1$, na osnovu koje je $x = \log_a(t+1)$. Primetimo da kad x teži 0, t teži vrednosti a^0-1, tj. broju 0. Zato je

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\dfrac{\ln(t+1)}{\ln(a)}} = \frac{\ln(a)}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t+1)}{t}} = \ln(a),$$

gde je korišćen tablični limes $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

1.2. Zadaci za samostalni rad

Zadatak 1.17. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\operatorname{tg}(x))}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2(x)}}$.

Zadatak 1.18. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right)^{1/(x-1)^3}$.

2. Vežbe I.6

2.1. Granične vrednosti funkcija (Neprekidnost funkcije)

Neka je D oblast definisanosti neke realne funkcije $f : D \mapsto \mathbb{R}$, i neka je x_0 proizvoljna tačka iz D. Za funkciju $f(x)$ kazemo da je *neprekidna u tački* $x_0 \in D$ akko važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad \Big(|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\Big).$$

Posledično, da bi funkcija bila neprekidna u x_0, treba da važi:

1. funkcija je definisana u x_0, tj. $x_0 \in D$,
2. ako je x_0 tačka nagomilavanja za D, tada postoji $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ i važi
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$
3. ako je $x_0 \in D$ izolovana tačka, tada je funkcija $f(x)$ po definiciji neprekidna u toj tački.

Ako su realne funkcije f i g neprekidne u tački x_0, tada su u tački x_0 neprekidne i sledeće funkcije:

a) $h = f + g$, b) $h = f \cdot g$, c) $h = f/g$, gde $g \neq 0$ u nekoj okolini x_0.

Ako funkcija $f(x)$ nije neprekidna u tački x_0, onda kažemo da je ona *prekidna u tački* x_0, odnosno da *ima prekid u tački* x_0.

Vrste prekida

Ako je $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, funkcija je neprekidna sa leve strane.

Ako je $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, funkcija je neprekidna sa desne strane.

Funkcija $f(x)$ je neprekidna u tački x_0 akko je neprekidna sa leve i sa desne strane (važe obe jednakosti gore).

Funkcija ima *prividan prekid* u tački x_0 koja je tačka nagomilavanja za oblast D ako:

1. tačka x_0 nije u D, a postoji granična vrednost funkcije u toj tački, ili
2. tačka x_0 jeste u D, postoji granična vrednost funkcije u toj tački, i granična vrednost se ne poklapa sa vrednosti funkcije u tački.

Funkcija ima *skok* u tački x_0 koja je tačka nagomilavanja za oblast $D \subset \mathbb{R}$ ako postoje leva i desna granična vrednosti, koje nisu jednake:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Prividan prekid ili skok se još zovu *prekidi prve vrste. Prekid druge vrste* je prekid koji nije prve vrste, tj. onaj za koji $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ ili $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (ili oba) ne postoje ili nisu konačne vrednosti.

Zadatak 2.1. Neka je funkcija $f(x)$ data sa

$$f(x) = \begin{cases} (e+x)^{\sin(x)}, & x \geq 0 \\ \sin(x) + A, & x < 0 \end{cases}.$$

Odrediti realnu vrednost A tako da funkcija $f(x)$ bude neprekidna.

Rešenje. A se određuje iz uslova da je $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$. Kako je

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} (\sin(x) + A) = A, \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} (e+x)^{\sin(x)} = e^0 = 1, \\ f(0) &= (e+0)^0 = 1, \end{aligned}$$

vidimo da su sve tri vrednosti jednake ako važi da je $A = 1$.

Napomenimo da je funkcija neprekidna u svim tačkama različitim od nule, nezavisno od A, zato što je u tim tačkama predstavljena kao kompozicija neprekidnih funkcija. Zato je $f(x)$ za $A = 1$ ne samo neprekidna u 0, već i neprekidna (nad celim $\mathbb{R}$).

Zadatak 2.2. Neka je funkcija $f(x)$ data sa

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)e^{1/x}, & x < 0 \\ A, & x = 0 \\ \frac{-1}{1+\ln(x)}, & x > 0,\ x \neq \frac{1}{e} \end{cases}.$$

Odrediti realnu vrednost A tako da funkcija $f(x)$ bude neprekidna u $x = 0$.

Rešenje. Primetimo da su levi i desni limesi u $x = 0$ jednaki

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+2)e^{1/x} = 0 = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{1+\ln(x)} = \lim_{x \to 0^+} f(x),$$

a da je $f(0) = A$. Iz uslova jednakosti $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ sledi da je nužno $A = 0$. Za ovu vrednost je funkcija neprekidna u $x = 0$.

Zadatak 2.3. Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}.$$

Da li je moguće odrediti realnu vrednost A tako da je $f(x)$ neprekidna?

Rešenje. Funkcija je neprekidna u svim tačkama $x \neq 0$, budući da je kompozicija funkcija neprekidnih na $\mathbb{R} \backslash \{0\}$. Posmatrajmo zato neprekidnost u $x = 0$.

Kako su levi i desni limes u $x=0$ dati sa

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = (\text{“arctg}\,(-\infty)\text{”}) = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = (\text{“arctg}\,(\infty)\text{”}) = \frac{\pi}{2},$$

sledi da ni za jednu vrednost ova funkcija neće biti neprekidna u $x=0$. Funkcija $f(x)$ ima skok u tački $x=0$.

Zadatak 2.4. Neka je funkcija $f(x)$ data sa

$$f(x) = \begin{cases} (\sin^2(2x)+1)^{\frac{\cos^3(x)}{x^2}}, & x<0 \\ A, & x=0 \\ e^{-1/x}+B^2, & x>0 \end{cases}\cdot$$

Odrediti konstante A i B tako da funkcija $f(x)$ bude neprekidna u $x=0$.

Rešenje. Sa jedne strane, važi da je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} (\sin^2(2x)+1)^{\frac{\cos^3(x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0^-} (1+\sin^2(2x))^{\frac{1}{\sin^2(2x)}\sin^2(2x)\frac{\cos^3(x)}{x^2}} \\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2(2x)\cos^3(x)}{x^2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0^-} \cos^3(x) \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2(2x)}{x^2}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2(2x)}{\frac{1}{4}\,4x^2}\right) = \exp\left(4 \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2\right) = \exp(4) = e^4,\end{aligned}$$

dok je desna granična vrednost jednaka

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x}+B^2 = 0+B^2 = B^2.$$

To znači da je

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \quad \Leftrightarrow \quad e^4 = B^2 = A,$$

odnosno, da je funkcija neprekidna u $x=0$ ako je $A=e^4$ i $B=\pm e^2$.

Zadatak 2.5. U tački $x=3$, ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x\le 3 \\ (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}}, & x>3 \end{cases}.$$

Rešenje. Lako je videti da je

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = 6+1 = 7,$$

ali desna granična vrednost ne postoji

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} = \lim_{x\to 3^+} (1+(x-3))^{\frac{1}{x-3}\frac{1}{x-3}} = \exp\left(\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}\right) = +\infty.$$

Funkcija $f(x)$, dakle, u tački $x=3$ ima prekid druge vrste.

Zadatak 2.6. Odrediti parametre A i B tako da funkcija $f(x)$ bude neprekidna u svim tačkama oblasti $(0,\pi)$, ako je

$$f(x)=\begin{cases}(\sin(x))^{\operatorname{tg}^2(x)}, & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ A, & x=\frac{\pi}{2}\\ Ae+\frac{B}{x}, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

Rešenje. Kako je

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sin(x))^{\operatorname{tg}^2(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\sqrt{1-\cos^2(x)}\right)^{\operatorname{tg}^2(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\cos^2(x))^{\frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\cos^2(x))^{\frac{-1}{\cos^2(x)}(-\cos^2(x))\frac{1}{2}\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}=\exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-\sin^2(x)}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}},$$

a pošto mora da važi $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)$, imamo da je $A=\frac{1}{\sqrt{e}}$. Dalje, iz

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(Ae+\frac{B}{x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}e+\frac{B}{x}\right)=\sqrt{e}+\frac{2B}{\pi},$$

i pošto mora da važi $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x)$, vrednost B dobijamo izjednačavanjem

$$\sqrt{e}+\frac{2B}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{e}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{2B}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{e}}-\sqrt{e}\quad\Leftrightarrow\quad B=\frac{\pi}{2}\frac{(1-e)\sqrt{e}}{e}.$$

Za ovako odabrane vrednosti A i B funkcija je neprekidna.

2.2. Zadaci za samostalni rad

Zadatak 2.7. Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

Zadatak 2.8. Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) & |x|<1\\ x, & |x|\geq 1\end{cases}.$$

Zadatak 2.9. Ispitati za koje $A,B\in\mathbb{R}$ je funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}$, ako je

$$f(x)=\begin{cases}B+\frac{\sin(x)-x}{x}, & x\in(-\infty,0)\\ A, & x\in[0,1]\\ \operatorname{arctg}\left(\frac{2-2\sqrt{x}}{1-x}\right), & x\in(1,\infty)\end{cases}.$$

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.