VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Blesić Andrija, Dedeić Jovana, Dragić Đorđe, Janjoš Aleksandar, Miščević Irena, Ostojić Tijana, Prokić Aleksandar, Tošić Stefan, Vuković Manojlo

Katedra za matematiku
Fakultet tehničkih nauka

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe IV.3

1.1. Diferencijalne jednačine višeg reda

Diferencijalna jednačina višeg reda je jednačina oblika

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

gde je $y = y(x)$ i $n > 1$. Red jednačine je red najvišeg izvoda nepoznate funkcije koji se javlja u datoj jednačini, tj. red je n.

1.1.1. Snižavanje reda diferencijalne jednačine

Postoje diferencijalne jednačine višeg reda kojima se rešenje može odrediti pomoću rešenja odgovarajućih diferencijalnih jednačina nižeg reda. Ovaj postupak se naziva snižavanje reda diferencijalne jednačine.

a) Jednačina oblika
$$y^{(n)} = f(x)$$
rešava se direktnom integracijom.

Zadatak 1.1. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y'' \sin^4 x = \sin 2x.$$

Rešenje. Pre svega datu jednačinu napisaćemo u obliku

$$y'' = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x},$$

a sređivanjem desne strane dobijamo

$$y'' = 2\frac{\cos x}{\sin^3 x}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} y' &= 2\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = [t = \sin x, dt = \cos x dx] = 2\int \frac{dt}{t^3} \\ &= -\frac{1}{t^2} + c_1 = -\frac{1}{\sin^2 x} + c_1, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} y &= \int \left(-\frac{1}{\sin^2 x} + c_1\right) dx = -\int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int c_1 dx \\ &= \operatorname{ctg} x + c_1 x + c_2. \end{aligned}$$

b) Diferencijalna jednačina oblika

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leq k < n,$$

je jednačina koja ne sadrži y i rešava se smenom $y^{(k)} = z$, gde je z funkcija koja zavisi od x tj. $z = z(x)$. Primetimo, za smenu uzimamo k-ti izvod funkcije y - najmanji izvod koji se pojavljuje u jednačini.

Zadatak 1.2. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$xy''' + y'' = x^2.$$

Rešenje. Kako je y'' najmanji izvod koji se pojavljuje u jednačini smena je $z = y''$, iz čega imamo da je $y''' = z'$, pa jednačina postaje

$$xz' + z = x^2.$$

Ako prethodnu jednačinu podelimo sa x dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$z' + \frac{1}{x} z = x$$

koju rešavamo smenom $z = u \cdot v$. Iz $z' = u'v + uv'$ imamo

$$vu' + uv' + \frac{1}{x} uv = x,$$
$$vu' + u\underbrace{(v' + \frac{1}{x} v)}_{=0} = x,$$

pa je $v' + \dfrac{v}{x} = 0$ ako je $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x}$ tj. $v = \dfrac{1}{x}$. Za takvo v jednačina postaje

$$\frac{1}{x} u' = x,$$

odnosno, $u' = x^2$ tj. $du = x^2 dx$. Konačno,

$$u = \frac{x^3}{3} + c_1,$$

tj. z je dato sa $z = uv = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{c_1}{x}$. Jednačina

$$y'' = z = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}$$

se rešava direktnom integracijom, pa je

$$\begin{aligned} y' = \int y'' dx &= \int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{9} + c_1 \ln|x| + c_2, \end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned} y = \int y' dx &= \int \left(\frac{x^3}{9} + c_1 \ln|x| + c_2 \right) dx \\ &= \frac{x^4}{36} + c_1 (x \ln|x| - x) + c_2 x + c_3. \end{aligned}$$

c) Diferencijalna jednačina oblika

$$F(y, y', ..., y^{(n)}), \quad n \geq 1$$

je jednačina koja ne sadrži x i rešava se smenom $y' = z$, gde je z funkcija koja zavisi od y tj. $z = z(y)$. Za razliku od prethodnog slučaja gde je z bila funkcija od x sada je funkcija od y pa se izvodi viseg reda računaju

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{dz}{dy}}_{z'}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = z'z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d(z'z)}{dy}\frac{dy}{dx} = (zz'' + (z')^2)z$$
$$= z^2z'' + z(z')^2,$$

analognim postupkom tražimo i ostale izvode višeg reda. Napomenimo da je $\frac{d(z'z)}{dy} = (z'z)'_y$, a primenom pravila za izvod proizvoda dobijamo $(z'z)'_y = zz'' + (z')^2$ što objašnjava treću jednakost pri računanju y'''.

Zadatak 1.3. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$3yy'' - 5(y')^2 = 0.$$

Rešenje. Primenom smene $y' = z$ i korišćenjem izraza za y'' jednačina postaje

$$3yzz' - 5z^2 = 0,$$

odnosno, ako je $z \neq 0$,

$$3yz' - 5z = 0,$$

što je jednačina koja razdvaja promenljive pa imamo da je

$$z' = \frac{5z}{3y}.$$

Rešenje date jednačine je $z = c_1\sqrt[3]{y^5}$, a vraćanjem smene $y' = z$ dobijamo jednačinu

$$y' = c_1 y^{\frac{5}{3}},$$

tj.

$$y^{-\frac{5}{3}}dy = c_1 dx.$$

Kako je $\int y^{-\frac{5}{3}}dy = -\frac{3}{2}y^{-\frac{2}{3}} + C$, rešenje jednačine je

$$\sqrt[3]{y^2}(c_1x + c_2) = -\frac{3}{2}.$$

Primetimo da ako je $z = 0$, tada je $y = c$, što je obuhvaćeno prethodnim rešenjem za $c_1 = 0$.

1.1.2. Linearna diferencijalna jednačina

Linearna diferencijalna jednačina je oblika

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

gde su funkcije $a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ i $f(x)$ definisane i neprekidne nad nekim intervalom I i $a_n(x) \neq 0$ za $x \in I$.

Linearna diferencijalna jednačina se naziva homogena linearna diferencijalna jednačina ako je $f(x) = 0$.

Homogeni deo linearne jednačine

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

je

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Neka je y_p partikularno rešenje jednačine

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

a y_h opšte rešenje homogenog dela jednačine, tada je $y = y_h + y_p$ opšte rešenje jednačine jer imamo da je

$$\begin{aligned}
&a_n(x)(y_h + y_p)^{(n)} + a_{n-1}(x)(y_h + y_p)^{(n-1)} + ... + a_1(x)(y_h + y_p)' + a_0(x)(y_h + y_p)\\
&\quad = a_n(x)y_h^{(n)} + a_{n-1}(x)y_h^{(n-1)} + ... + a_1(x)y_h' + a_0(x)y_h +\\
&\quad + a_n(x)y_p^{(n)} + a_{n-1}(x)y_p^{(n-1)} + ... + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p\\
&\quad = 0 + f(x) = f(x).
\end{aligned}$$

Svaku linearnu diferencijalnu jednačinu oblika

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

možemo zapisati, ako prethodnu jednačinu podelimo sa $a_n(x) \neq 0$, kao

$$y^{(n)} + \widetilde{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + \widetilde{a}_1(x)y' + \widetilde{a}_0(x)y = \widetilde{f}(x),$$

gde je $\widetilde{a_i}(x) = \dfrac{a_i(x)}{a_n(x)}$ za $i = 0, 1, ..., n-1$ i $\widetilde{f}(x) = \dfrac{f(x)}{a_n(x)}$.
Za $n = 1$ dobijamo linearnu jednačinu prvog reda

$$y' + a_0(x)y = f(x)$$

sa kojom smo se upoznali ranije.

1.1.3. Linearna diferencijalna jednačina drugog reda

U nastavku se bavimo rešavanjem diferencijalnih jednačina drugog reda tj. jednačinama oblika

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

Ako je poznato jedno partikularno rešenje $y_1(x)$ homogene linearne diferencijalne jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

tada se smenom $y = zy_1$, gde je $z = z(x)$, dobija jednačina koja dopušta snižavanje reda diferencijalne jednačine, pa dobijamo diferencijalnu jednačinu prvog reda koju znamo da rešimo.

Ako znamo dva partikularna rešenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

tada je funkcija $y_3 = y_2(x) - y_1(x)$ jedno partikularno rešenje homogenog dela jednačine, tj. jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

pa se taj deo rešava smenom $y_h = y_3 z$. Opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine je tada

$$y(x) = y_h(x) + y_1(x)$$

ili

$$y(x) = y_h(x) + y_2(x).$$

Zadatak 1.4. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 0$$

ako se zna da je njeno partikularno rešenje oblika e^x.

Rešenje. Uvođenjem smene $y = zy_1$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} y' &= (z' + z)e^x, \\ y'' &= (z' + z + z'' + z')e^x \end{aligned}$$

i jednačina postaje

$$(z'' + 2z' + z)e^x + \frac{x}{1-x}(z' + z)e^x - \frac{1}{1-x}ze^x = 0.$$

Sređivanjem jednačine po redu izvoda dobijamo

$$z'' + (2 + \frac{x}{1-x})z' + \underbrace{(1 + \frac{x}{1-x} - \frac{1}{1-x})}_{=0} z = 0,$$

tj.

$$z'' + (2 + \frac{x}{1-x})z' = 0,$$

što predstavlja jednačinu koja ne sadrži z pa je smena $z' = u$. Tada je $z'' = u'$ i dobijamo jednačinu koja razdvaja promenljive jer je

$$\begin{aligned} u' &= -(2 + \frac{x}{1-x})u = -\frac{2-2x+x}{1-x}u \\ &= -\frac{2-x}{1-x}u = -\frac{1+1-x}{1-x}u = (\frac{1}{x-1} - 1)u. \end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= (\frac{1}{x-1} - 1)dx, \text{ tj.} \\ \int \frac{du}{u} &= \int (\frac{1}{x-1} - 1)dx, \end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned} \ln|u| &= \ln|x-1| - x + c, \text{ tj.} \\ u &= e^{c_1 - x + \ln|x-1|}, \end{aligned}$$

pa je

$$u = c_1(x-1)e^{-x},$$

gde je $c_1 = e^c$. Vraćanjem smene $z' = u$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} z &= \int z' dx = c_1 \int (x-1)e^{-x}dx = c_1 \int xe^{-x}dx - c_1 \int e^{-x}dx \\ &= \left[\begin{array}{cc} u = x & dv = e^{-x}dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{array} \right] = c_1(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx) + c_1 e^{-x} \\ &= c_1(-xe^{-x} - e^{-x}) + c_1 e^{-x} + c_2 = -c_1(x \cdot e^{-x} + e^{-x} - e^{-x}) + c_2 \\ &= -c_1 xe^{-x} + c_2. \end{aligned}$$

Konačno, kako je $y = ze^x$ imamo da je opšte rešenje početne diferencijalne jednačine

$$y = (-c_1 x \cdot e^{-x} + c_2) \cdot e^x = -c_1 x + c_2 e^x.$$

Zadatak 1.5. Naći opšte rešenje jednačine

$$(1 - x^2)y'' + 2y = 2$$

ako su $y_1 = 1$ i $y_2 = x^2$ njena dva partikularna rešenja.

Rešenje. Prvo rešavamo homogeni deo jednačine, tj.

$$(1 - x^2)y'' + 2y = 0.$$

Partikularno rešenje prethodne jednačine je $y_3 = y_2 - y_1 = x^2 - 1$, pa uvodimo smenu $y_h = z(x^2 - 1)$ i dobijamo da je

$$\begin{aligned} y_h' &= z'(x^2 - 1) + 2xz, \\ y_h'' &= z''(x^2 - 1) + 2xz' + 2z + 2xz' = (x^2 - 1)z'' + 4xz' + 2z. \end{aligned}$$

Tada je

$$(1-x^2)\big((x^2-1)z''+4xz'+2z\big)+2(x^2-1)z=0,$$

a sređivanjem izraza po redu izvoda dobijamo

$$(x^2-1)^2z''+4x(x^2-1)z'+2\underbrace{(x^2-1-x^2+1)}_{=0}z=0,$$

tj.

$$(x^2-1)^2z''+4x(x^2-1)z'=0.$$

Smenom $z'=u$, za koju je $z''=u'$, spuštamo red diferencijalne jednačine i dobijamo jednačinu koja razdvaja promenljive

$$u'=-\frac{4x}{x^2-1}u.$$

Kako je

$$\frac{du}{u}=-\frac{4x}{x^2-1}dx,$$
$$\int\frac{du}{u}=-2\int\frac{2xdx}{x^2-1},$$

dobijamo

$$\begin{aligned}\ln|u|&=-2\ln|x^2-1|+c\\&=\ln\left|\frac{c_1}{(x^2-1)^2}\right|,\end{aligned}$$

gde je $c=\ln|c_1|$, tj.

$$u=\frac{c_1}{(x^2-1)^2}.$$

Vraćanjem smene $z'=u$ dobijamo

$$\begin{aligned}z&=\int\frac{c_1}{(x^2-1)^2}dx=-c_1\int\frac{x^2-1-x^2}{(x^2-1)^2}dx=-c_1\int\frac{dx}{x^2-1}+c_1\int\frac{x^2dx}{(x^2-1)^2}\\&=\left[\begin{array}{cc}u=x & dv=\dfrac{xdx}{(x^2-1)^2}\\ du=dx & v=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-1}\end{array}\right]=c_1\left(-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-1}\right)\\&=c_1\left(-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{x}{2(x^2-1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)+c_2\\&=-\frac{c_1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{c_1}{2}\frac{x}{x^2-1}+c_2,\end{aligned}$$

tj.

$$z=c_3(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{2x}{x^2-1})+c_2,$$

gde je $c_3 = -\frac{c_1}{4}$. Dakle, rešenje homogenog dela je

$$\begin{aligned} y_h &= (x^2-1)z \\ &= c_3(x^2-1)(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{2x}{x^2-1}) + c_2(x^2-1), \end{aligned}$$

a opšte rešenje početne diferencijalne jednačine je

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_1 \\ &= c_3(x^2-1)(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{2x}{x^2-1}) + c_2(x^2-1) + 1. \end{aligned}$$

Zadatak 1.6. Naći opšte rešenje jednačine

$$(3x^3+x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$$

ako su $y_1 = ax + b$ i $y_2 = Ax^2 + Bx + C$ njena dva partikularna rešenja.

Rešenje. Pošto su y_1 i y_2 rešenja date jednačine, nepoznate koeficijente ćemo odrediti ubacivanjem y_1 i y_2 u jednačinu.
Za $y_1 = ax + b$ je $y_1' = a$ i $y_1'' = 0$, pa je

$$2a - 6x(ax+b) = 4 - 12x^2,$$

a sređivanjem po stepenima od x dobijamo

$$-6ax^2 - 6bx + 2a = 4 - 12x^2.$$

Rešavanjem sistema

$$\begin{array}{rrl} -6a & & = -12, \\ & -6b & = 0, \\ 2a & & = 4 \end{array}$$

dobijamo da je $a = 2$ i $b = 0$, odnosno $y_1 = 2x$.
Za $y_2 = Ax^2 + Bx + C$ je $y_2' = 2Ax + B$ i $y_2'' = 2A$, pa je

$$(3x^3+x)2A + 2(2Ax+B) - 6x(Ax^2+Bx+C) = 4 - 12x^2,$$

a sređivanjem po stepenima od x dobijamo

$$-6Bx^2 + (6A - 6C)x + 2B = 4 - 12x^2.$$

Sistem

$$\begin{array}{rrrl} & -6B & & = -12, \\ 6A & & -6C & = 0, \\ & 2B & & = 4 \end{array}$$

je neodređen i jedno njegovo rešenje je $A = C = 1$ i $B = 2$. Dakle, $y_2 = x^2 + 2x + 1$. Sada kada smo našli eksplicitan oblik od y_1 i y_2 možemo rešiti homogeni deo diferenicijalne jednačine, tj. jednačinu

$$(3x^3+x)y'' + 2y' - 6xy = 0.$$

Kako je jedno rešenje homogenog dela oblika $y_3 = y_2 - y_1 = x^2 + 1$, uvodimo smenu $y_h = z(x^2 + 1)$ i dobijamo da je

$$\begin{aligned} y_h' &= z'(x^2+1) + 2xz, \\ y_h'' &= z''(x^2+1) + 2xz' + 2z + 2xz' = (x^2+1)z'' + 4xz' + 2z. \end{aligned}$$

Ubacivanjem u jednačinu dobijamo

$$(3x^3+x)(x^2+1)z''+(3x^3+x)4xz'+2(3x^3+x)z+2(x^2+1)z'+4xz-6x(x^2+1)z = 0,$$

a sređivanjem po redu izvoda od z imamo

$$x(3x^2+1)(x^2+1)z'' + (12x^4+6x^2+2)z' + \underbrace{(6x^3+6x-6x^3-6x)}_{=0} z = 0,$$

tj.

$$x(3x^2+1)(x^2+1)z'' + (12x^4+6x^2+2)z' = 0.$$

Ako uvedemo smenu $u = z'$, za koju je $z'' = u'$, dobijamo

$$x(3x^2+1)(x^2+1)u' + (12x^4+6x^2+2)u = 0,$$

što predstavlja jednačinu koja razdvaja promenljive, pa je

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= -\frac{12x^4+6x^2+2}{x(3x^4+4x^2+1)}dx = -2\frac{3x^4+4x^2+1-x^2+3x^4}{x(3x^4+4x^2+1)}dx \\ &= -2\frac{dx}{x} + 2\frac{x-3x^3}{3x^4+4x^2+1}dx = -2\frac{dx}{x} + \frac{2x-6x^3}{(x^2+1)(3x^2+1)}dx \\ &= -2\frac{dx}{x} - \frac{4x}{x^2+1}dx + \frac{6x}{3x^2+1}dx. \end{aligned}$$

Poslednja jednakost je dobijena rastavljanjem razlomka $\dfrac{2x-6x^3}{(x^2+1)(3x^2+1)}$ na parcijalne razlomke, tj.

$$\frac{2x-6x^3}{(x^2+1)(3x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{3x^2+1}.$$

Iz

$$\frac{du}{u} = -2\frac{dx}{x} - 2\frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{6x}{3x^2+1}dx,$$

dobijamo

$$\ln|u| = -2\ln|x| - 2\ln\left|x^2+1\right| + \ln\left|3x^2+1\right| + c,$$

pa je

$$u = c_1\frac{3x^2+1}{x^2(x^2+1)^2},$$

gde je $c = \ln c_1$.
Vraćanjem smene $u = z'$, dobijamo

$$\begin{aligned}
z &= c_1 \int \frac{3x^2+1}{x^2(x^2+1)^2}dx = c_1 \int \frac{x^2+1+2x^2}{x^2(x^2+1)^2}dx \\
&= c_1 \int \frac{1}{x^2(x^2+1)}dx + c_1 \int \frac{2}{(x^2+1)^2}dx \\
&= c_1 \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(x^2+1)}dx + 2c_1 \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx \\
&= c_1 \int \frac{dx}{x^2} - c_1 \int \frac{dx}{x^2+1} + 2c_1 \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx}_{=I_1} \\
&= c_1 \int \frac{dx}{x^2} - c_1 \int \frac{dx}{x^2+1} + 2c_1 \frac{x}{2(x^2+1)} + 2c_1 \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1}dx \\
&= -c_1 \frac{1}{x} + c_1 \frac{x}{x^2+1} + c_2 \\
&= -c_1 \frac{1}{x(x^2+1)} + c_2 = c_3 \frac{1}{x(x^2+1)} + c_2, \text{ za } c_3 = -c_1,
\end{aligned}$$

jer je

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}dx \\
&= \int \frac{1}{x^2+1}dx - \underbrace{\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx}_{=I_2} \\
&= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1}dx,
\end{aligned}$$

zbog toga što je

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}xdx = \left[\begin{array}{cc} u = x & dv = \dfrac{xdx}{(x^2+1)^2} \\ du = dx & v = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} \end{array} \right] \\
&= \frac{-x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1}dx.
\end{aligned}$$

Konačno, rešenje homogenog dela je

$$\begin{aligned}
y_h &= z(x^2+1) \\
&= \frac{c_3}{x} + c_2(x^2+1),
\end{aligned}$$

a opšte rešenje jednačine je

$$\begin{aligned}
y &= y_h + y_1 \\
&= \frac{c_3}{x} + c_2(x^2+1) + 2x.
\end{aligned}$$

1.2. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1.7. Naći rešenje diferencijalne jednačine

$$xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$$

Zadatak 1.8. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$xy'' + 2y' - xy = 0,$$

ako je $y_1 = \frac{e^x}{x}$ partikularno rešenje.

Zadatak 1.9. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 6x,$$

ako su $y_1 = x$ i $y_2 = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ njena dva partikularna rešenja.

2. Vežbe IV.4

2.1. Jednačina sa konstantnim koeficijentima

Linearna diferencijalna jednačina je

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

i u ovom delu se bavimo jednačinama u slučaju da je $a_i(x) = a_i$, odnosno, kada su koeficijenti uz $y^{(i)}$ konstante, tj. jednačinama oblika

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Prvo ćemo posmatrati slučaj kada je $f(x) = 0$, tj posmatraćemo homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima, odnosno jednačine oblika

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Jednačina

$$a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + ... + a_1 r + a_0 = 0$$

se naziva karakteristična jednačina diferencijalne jednačine. Primetimo, karakterističnu jednačinu smo dobili iz diferencijalne jednačine tako što smo zamenili $y^{(i)}$ sa r^i. Karakteristična jednačina difrencijalne jednačine n-tog reda je polinom n-tog stepena, pa postoji n korena karakteristične jednačine, neka su to $r_1, r_2, ..., r_n$.

Takođe, imamo da za svako $k \in 1, 2, ...n$ važi da je $y = e^{r_k x}$ rešenje diferencijalne jednačine, jer je $y^{(i)} = r_k^i e^{r_k x}$, pa kad ubacimo u jednačinu imamo

$$a_n r_k^n e^{r_k x} + a_{n-1} r_k^{n-1} e^{r_k x} + ... + a_1 r_k e^{r_k x} + a_0 e^{r_k x} = 0.$$

Kada podelimo jednačinu sa $y = e^{r_k x}$ dobijamo karakterističnu jednačinu tj.

$$a_n r_k^n + a_{n-1} r_k^{n-1} + ... + a_1 r_k + a_0 = 0.$$

Fundamentalni skup rešenja zavisi od prirode korena karakteristične jednačine, pa razlikujemo:

a) Ako su svi koreni karakteristične jednačine realni i različiti tada je fundamentalni skup rešenja

$$\Phi = \{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, ..., e^{r_n x}\},$$

a opšte rešenje jednačine je

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i x}.$$

Zadatak 2.1. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^3 - 3r^2 + 2r = 0,$$

čija su rešenja $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 2$, pa je fundamentalni skup $\Phi = \{e^{0x}, e^{1x}, e^{2x}\}$, a opšte rešenje je

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}.$$

b) Ako je r_i realan koren karakteristične jednačine višestrukosti $m > 1$, tada u fundamentalni skup rešenja ulaze i sledećih m funkcija

$$e^{r_i x}, xe^{r_i x}, x^2 e^{r_i x}, ..., x^{m-1} e^{r_i x}.$$

Zadatak 2.2. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y^{iv} - 2y''' + 2y' - 1 = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^4 - 2r^3 + 2r - 1 = 0.$$

čija su rešenja $r_1 = -1, r_2 = r_3 = r_4 = 1$, pa je fundamentalni skup $\Phi = \{e^{-x}, e^x, xe^x, x^2 e^x\}$, a opšte rešenje je

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 x^2 e^x.$$

c) Neka je koren $r_j = \alpha_j + \beta_j i$ kompleksan koren karakteristične jednačine, tada je i $\overline{r_j} = \alpha_j - \beta_j i$ takođe koren. Za $y_j = e^{r_j x}$ imamo

$$\begin{aligned} y_j &= e^{r_j x} = e^{(\alpha_j + \beta_j i)x} = e^{\alpha_j x} e^{\beta_j x i} \\ &= e^{\alpha_j x} (\cos \beta_j x + i \sin \beta_j x) \\ &= \underbrace{e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x}_{Re\{y_j\}} + i \underbrace{e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x}_{Im\{y_j\}}. \end{aligned}$$

Nas interesuju samo realna rešenja, pa zbog toga u fundamentalni skup rešenja ulaze $Re\{y_j\}$ i $Im\{y_j\}$. Primetimo da je $Re\{e^{\overline{r_j} x}\} = Re\{y_j\}$ i $Im\{e^{\overline{r_j} x}\} = Im\{y_j\}$, pa je dovoljno samo jedan od konjugovano kompleksnog para korena.

Zadatak 2.3. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y''' - y = 0$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^3 - 1 = 0.$$

čija su rešenja $r_1 = 1, r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, r_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, pa je fundamentalni skup $\Phi = \{e^x, e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\}$, a opšte rešenje je

$$y = c_1e^x + c_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

d) Ako je $r_j = \alpha_j + \beta_j i$ koren karakteristične jednačine višestrukosti $m > 1$, tada u fundamentalni skup rešenja ulaze i sledećih $2m$ funkcija

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, & xe^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, & ..., & x^{m-1}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, \\ e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, & xe^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, & ..., & x^{m-1}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x. \end{array}$$

Zadatak 2.4. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y^v - y^{iv} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^5 - r^4 + 2r^3 - 2r^2 + r - 1 = 0$$

čija su rešenja $r_1 = 1, r_2 = r_3 = i, r_3 = r_4 = -i$, pa je fundamentalni skup $\Phi = \{e^x, \cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x\}$, a opšte rešenje je

$$y = c_1e^x + c_2\cos x + c_3x\cos x + c_4\sin x + c_5x\sin x.$$

U slučaju kada je $f(x) \neq 0$, prvo rešavamo homogeni deo diferencijalne jednačine, a zatim jedno partikularno rešenje početne diferencijalne jednačine tražimo jednom od sledećih metoda:

- Metod jednakih koeficijenata,
- Metod varijacije konstanti.

2.1.1. Metod jednakih koeficijenata

Ako je

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right),$$

gde je $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi stepena m i n, jednačina ima jedno partikularno rešenje oblika

$$y_p = x^r e^{\alpha x}\left(T_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x\right),$$

gde su $T_k(x)$ i $R_k(x)$ nepoznati polinomi stepena $k = \max\{m, n\}$, a r je višestrukost korena $\alpha + \beta i$ karakteristične jendačine. Ako $\alpha + \beta i$ nije rešenje karakteristične jednačine, uzima se da je $r = 0$.

Specijalno, za $\beta = 0$ izraz

$$e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right),$$

ne zavisi od $Q_n(x)$, u tom slučaju uzimamo da je $Q_n(x) = 0$, tj $n = 0$ i $k = m$.

Zadatak 2.5. Naći ono rešenje $y(x)$ jednačine

$$y''' - \frac{7}{2}y'' + 2y' + 2y = e^{-\frac{1}{2}x}$$

koje zadovoljava uslove $y(0) = 1$ i $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Rešenje. Prvo rešavamo homogeni deo diferencijalne jednačine, tj. jednačinu

$$y''' - \frac{7}{2}y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^3 - \frac{7}{2}r^2 + 2r + 2 = 0,$$

čija su rešenja $r_1 = r_2 = 2, r_3 = -\frac{1}{2}$, pa je rešenje homogenog dela

$$y_h = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{-\frac{1}{2}x}$$

Kako je

$$e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right)$$

za $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 0$, $P_m(x) = 1$, $k = 0$ i $\alpha + \beta i = -\frac{1}{2} + 0i = -\frac{1}{2}$ je jednostruki koren karakteristične jednačine pa imamo da je $r = 1$, te sledi da je partikularno rešenje oblika

$$y_p = Axe^{-\frac{1}{2}x}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
y_p' &= A(1 - \frac{x}{2})e^{-\frac{1}{2}x},\\
y_p'' &= A(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4})e^{-\frac{1}{2}x} = A(\frac{x}{4} - 1)e^{-\frac{1}{2}x},\\
y_p''' &= A(\frac{1}{4} - \frac{x}{8} + \frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}x} = A(\frac{3}{4} - \frac{x}{8})e^{-\frac{1}{2}x}
\end{aligned}$$

Ubacivanjem y_p u početnu jednačinu dobijamo

$$A(\frac{3}{4} - \frac{x}{8})e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{7}{2}A(\frac{x}{4} - 1)e^{-\frac{1}{2}x} + 2A(1 - \frac{x}{2})e^{-\frac{1}{2}x} + 2Axe^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x},$$

a sređivanjem po stepenima od x imamo

$$(-\frac{A}{8} - \frac{7}{8}A + 2A - A)x + (\frac{3}{4} + \frac{7}{2} + 2)A = 1,$$

što važi za $A = \frac{4}{25}$. Dakle,

$$y_p = \frac{4}{25}xe^{-\frac{1}{2}x}.$$

Opšte rešenje diferencijalne je $y = y_h + y_p$, tj.

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{4}{25} x e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Iz uslova $y(0) = 1$ dobijamo da je

$$c_1 + c_3 = 1,$$

a iz uslova $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ zaključujemo da mora da važi da je $c_1 = 0$ i $c_2 = 0$ jer

$$\lim_{x\to\infty} e^{2x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} x e^{2x} = +\infty.$$

Konačno, rešenje koje ispunjava uslove je

$$y = (\frac{4}{25}x + 1)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Zadatak 2.6. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x.$$

Rešenje. Prvo rešavamo homogeni deo diferencijalne jednačine, tj. jednačinu

$$y''' + y'' = 0.$$

Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^3 + r^2 = 0,$$

čija su rešenja $r_1 = r_2 = 0, r_3 = -1$, pa je rešenje homogenog dela

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}.$$

Pošto je

$$x^2 + 1 + 3xe^2 \neq e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right)$$

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i za sve polinome $P_m(x)$ i $Q_n(x)$, moramo da tražimo partikularno rešenje posebno za jednačinu

$$y''' + y'' = x^2 + 1,$$

a posebno za jednačinu

$$y''' + y'' = 3xe^x.$$

Primetimo da ako je y_1 rešenje jednačine $y''' + y'' = x^2 + 1$, a y_2 rešenje jednačine $y''' + y'' = 3xe^2$, tada je $y_p = y_1 + y_2$ rešenje početne jednačine, jer je

$$\begin{aligned} y_p''' + y_p'' &= (y_1 + y_2)''' + (y_1 + y_2)'' = y_1''' + y_1'' + y_2''' + y_2'' \\ &= x^2 + 1 + 3xe^x. \end{aligned}$$

Kako je
$$x^2+1=e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x\right),$$
za $\alpha=0,\beta=0,P_m(x)=x^2+1$, $k=2$ i $\alpha+\beta i=0+0i=0$ je dvostruki koren karakteristične jednačine, te imamo da je $r=2$ i dobijamo da je partikularno rešenje y_{p_1} jednačine
$$y'''+y''=x^2+1,$$
oblika
$$y_{p_1}=x^2(Ax^2+Bx+C)=Ax^4+Bx^3+Cx^2.$$
Tada je
$$\begin{aligned}
y'_{p_1}&=4Ax^3+3Bx^2+2Cx,\\
y''_{p_1}&=12Ax^2+6Bx+2C,\\
y'''_{p_1}&=24Ax+6B,
\end{aligned}$$
a ubacivanjem dobijenih vrednosti u jednačinu $y'''+y''=x^2+1$, dobijamo
$$24Ax+6B+12Ax^2+6Bx+2C=x^2+1$$
i sređivanjem po stepenima od x
$$12Ax^2+(24A+6B)x+6B+2C=x^2+1.$$
Rešenje sistema
$$\begin{array}{llll}
12A & & & =1,\\
24A & +6B & & =0,\\
 & 6B & +2C & =1,
\end{array}$$
je $A=\frac{1}{12},B=-\frac{1}{3}$ i $C=\frac{3}{2}$, pa je
$$y_{p_1}=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2.$$
Analogno, imamo da je
$$3xe^x=e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x\right),$$
za $\alpha=1,\beta=0,P_m(x)=3x$, $k=1$ i $\alpha+\beta i=1+0i=1$ nije koren karakteristične jednačine i imamo da je $r=0$, pa je partikularno rešenje y_{p_1} jednačine
$$y'''+y''=3xe^x,$$
oblika
$$y_{p_2}=(Ax+B)e^x.$$
Ubacivanjem
$$\begin{aligned}
y'_{p_2}&=Ae^x+(Ax+B)e^x,\\
y''_{p_2}&=Ae^x+Ae^x+(Ax+B)e^x,\\
y'''_{p_2}&=2Ae^x+Ae^x+(Ax+B)e^x,
\end{aligned}$$

u jednačinu $y''' + y'' = 3xe^2$, dobijamo

$$(3A + Ax + B) \cdot e^x + (2A + Ax + B) \cdot e^x = 3xe^x,$$

a sređivanjem po stepenima od x i upoređivanjem koeficijenata dobijamo da su $A = \frac{3}{2}$ i $B = -\frac{15}{4}$ rešenja sistema

$$\begin{array}{lll} 2A & & = 3, \\ 5A & +2B & = 0, \end{array}$$

pa je

$$y_{p_2} = (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4})e^x.$$

Konačno,

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4})e^x,$$

a opšte rešenje je

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4})e^x. \end{aligned}$$

2.1.2. Metod varijacije konstanti

Ako je poznat fundamentalni skup rešenja $\Phi = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, homogenog dela diferencijalne jednačine tada se partikularno rešenje može naći po formuli

$$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + ... + C_n(x)y_n,$$

gde su funkcije $C_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$ određenje iz sistema jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc} C_1'(x)y_1 & + & C_2'(x)y_2 & + & ... & + & C_n'(x)y_n & = & 0, \\ C_1'(x)y_1' & + & C_2'(x)y_2' & + & ... & + & C_n'(x)y_n' & = & 0, \\ \vdots & & & & & & & & \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} & + & C_2'(x)y_2^{(n-1)} & + & ... & + & C_n'(x)y_n^{(n-1)} & = & f(x). \end{array}$$

Ako se pri traženju funkcija $C_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$ iz $C_i'(x) = g(x)$ kod neodređenog integrala $C_i(x) = \int C_i'(x)dx = \int g(x)dx$ ne uzme konstanta tada se dobija partikularno rešenje.

Zadatak 2.7. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Rešenje. Prvo rešavamo homogeni deo, tj jednačinu

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

čija je karakteristična jednačina

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Rešenja karakteristične jednačine su $r_1 = r_2 = 1$, pa je rešenje homogenog dela

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x.$$

Sistem

$$\begin{array}{ccccc} c_1'(x)e^x & + & c_2'(x)xe^x & = & 0 \\ c_1'(x)e^x & + & c_2'(x)(x+1)e^x & = & \dfrac{e^x}{x}, \end{array}$$

rešavamo tako što prvu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo drugoj, pa je

$$\begin{aligned} c_2'(x) &= \frac{1}{x}, \\ c_2(x) &= \int \frac{dx}{x} = \ln|x|. \end{aligned}$$

Iz prve jednačine određujemo $c_1(x)$ jer je

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= -xc_2'(x) = -x\frac{1}{x} = -1, \\ c_1(x) &= -\int dx = -x. \end{aligned}$$

Dakle, partikularno rešenje je

$$y_p = -xe^x + xe^x \ln|x|,$$

a opšte rešenje diferencijalne jednačine je

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1 e^x + c_2 x e^x + -xe^x + xe^x \ln|x|. \end{aligned}$$

2.2. Ojlerova diferencijalna jednačina

Specijalan tip linearne diferencijalne jednačine je Ojlerova diferencijalna jednačina čiji je oblik

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + ... + A_1(ax+b)y' + A_0 y = f(x),$$

gde su $a, b, A_{n-1}, A_{n-2}, ..., A_0$ konstante i razmatramo sledeće slučajeve:

- Ako je $ax+b>0$, $a\neq 0$, uvođenjem smene $ax+b=e^t$ dobijamo da je $t=\ln(ax+b)$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{a}e^t$ i

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t\frac{a}{e^t} = ae^{-t}y'_t,\\
y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = a(e^{-t}y''_t - e^{-t}y'_t)\frac{a}{e^t} = a^2e^{-2t}(y''_t - y'_t),\\
y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt}\frac{dt}{dx} = a^2(-2e^{-2t}(y''_t - y'_t) + e^{-2t}(y'''_t - y''_t))\frac{a}{e^t}\\
&= a^3e^{-3t}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t),
\end{aligned}
$$

  itd., datu jednačinu svodimo na jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

- Ako je $ax+b<0$, $a\neq 0$, uvodimo smenu $ax+b=-e^t$ i analognim postupkom dobijamo jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

- Ako je $a=0$, $b\neq 0$ data jednačina je jednačina sa konstantim koeficijentima.

- Za $a=0$ i $b=0$ dobija se $A_0y=f(x)$, a to nije diferencijalna jednačina.

Zadatak 2.8. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(1+x)^3y''' + (1+x)y' - y = (1+x)^2$$

za $x>-1$.

Rešenje. Jednačina je Ojlerova diferencijalna jednačina pa se rešava smenom $x+1=e^t$ i tada je

$$
\begin{aligned}
y' &= e^{-t}y'_t,\\
y'' &= (y''_t - y'_t)e^{-2t},\\
y''' &= (y'''_t - 3y''_t + 2y'_t)e^{-3t}.
\end{aligned}
$$

Dakle, jednačina

$$
\begin{aligned}
e^{3t}e^{-3t}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t) + e^te^{-t}y'_t - y &= e^{2t},\\
y'''_t - 3y''_t + 3y'_t - y &= e^{2t}
\end{aligned}
$$

je jednačina sa konstantim koeficijentima.

Prvo rešavamo homogeni deo jednačine, tj. jednačinu

$$y'''_t - 3y''_t + 3y'_t - y = 0,$$

čija karakteristična jednačina

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0,$$

ima korene $r_1=r_2=r_3=1$. Dakle, rešenje homogenog dela je

$$y_h = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t.$$

Partikularno rešenje dobijamo metodom jednakih koeficijenata jer je

$$e^{2t} = e^{\alpha t}\left(P_m(t)\cos\beta t + Q_n(t)\sin\beta t\right)$$

za $\alpha = 2, \beta = 0$ i $P_m(t) = 1$. Kako $\alpha + \beta i = 2 + 0i = 2$ nije rešenje jednačine imamo da je $r = 0$. Partikularno rešenje je oblika $y_p = Ae^{2t}$, pa je

$$\begin{aligned} y_p' &= 2Ae^{2t}, \\ y_p'' &= 4Ae^{2t}, \\ y_p''' &= 8Ae^{2t} \end{aligned}$$

i ubacivanjem u jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} 8Ae^{2t} - 12Ae^{2t} + 6Ae^{2t} - Ae^{2t} &= e^{2t}, \\ (8A - 12A + 6A - A)e^{2t} &= e^{2t}, \end{aligned}$$

tj. $A = 1$. Konačno, rešenje jednačine je

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + e^{2t}. \end{aligned}$$

Vraćanjem smene $x + 1 = e^t$ dobijamo

$$y = c_1(1+x) + c_2(1+x)\cdot\ln(1+x) + c_3(1+x)\cdot\ln^2(1+x) + (1+x)^2.$$

2.3. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 2.9. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + y' = e^{2x}\left(\sin(-2017x)\cos(2018x) + \cos(-2017x)\sin(2018x)\right).$$

Zadatak 2.10. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y''' + y = \frac{(1-\sin^2 x)\operatorname{tg} x}{\cos x}.$$

Zadatak 2.11. Naći opšte rešenje jednačine

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2 + 1,$$

za $x > 0$.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladmir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladmir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.