DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA

18. maj 2023.

I) $\boxed{y^{(n)}(x) = f(x)}$, $f(x)$ neprekidna funkcija nad (a, b)

$$
\begin{aligned}
y^{(n-1)}(x) &= \int f(x)\,dx = f_1(x) + c_1 \\
y^{(n-2)}(x) &= \int (f_1(x) + c_1)\,dx = f_2(x) + c_1 x + c_2 \\
&\vdots \\
y(x) &= f_n(x) + \frac{c_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{c_{n-1} x}{1!} + c_n
\end{aligned}
$$

Snižavanje reda diferencijalne jednačine

Primer

Rešiti početni problem $y^{IV} = \sin x$, $y(0) = y''(0) = 1$, $y'(0) = y'''(0) = 0$

$$y''' = \int y^{IV}(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x + c_1,$$
$$y'' = \int y'''(x)dx = \int(-\cos x + c_1)dx = -\sin x + c_1 x + c_2,$$
$$y' = \int y''(x)dx = \int(-\sin x + c_1 x + c_2)dx = \cos x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3,$$
$$y = \int y'(x)dx = \int(\cos x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3)dx =$$
$$\sin x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4,$$

$$\begin{array}{lcl}
y'''(0) = -1 + c_1 = 0 & \Rightarrow & c_1 = 1 \\
y''(0) = c_2 = 1 & \Rightarrow & c_2 = 1 \\
y'(0) = 1 + c_3 = 0 & \Rightarrow & c_3 = -1 \\
y(0) = c_4 = 1 & \Rightarrow & c_4 = 1
\end{array}$$

$$\Rightarrow y = \sin x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x + 1$$

III) $\boxed{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0,\ 1 \leq k < n}$

smena: $\quad y^{(k)}(x) = z(x)$

dobijamo jednačinu reda $n-k$ oblika

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

IV) $\boxed{F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,\ n \geq 2}$

smena: $\quad y' = z(y)$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z'(y)y'(x) = z'\,z \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d(zz')}{dx} = \frac{dz}{dx}z' + z\frac{dz'}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}z' + z\frac{dz'}{dy}\frac{dy}{dx} \\ &= zz'^2 + z^2z'' \end{aligned}$$

dobijamo jednačinu reda $n-1$ oblika

$$H(y, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Snižavanje reda diferencijalne jednačine

- Ako znamo jedno rešenje $y_1(x)$ diferencijalne jednačine
$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$
tada se jednačina
$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$
rešava smenom
$$y = z(x)y_1(x),$$
gde je $z(x)$ nepoznata funkcija.

$$y = zy_1 \Rightarrow \begin{array}{rcl} y' & = & z'y_1 + zy_1' \\ y'' & = & z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'' \end{array}$$

pa da bi y bilo rešenje $z(x)$ mora da zadovoljava jednačinu
$$y_1z'' + (2y_1' + a_1(x)y_1)z' + (\underbrace{y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1}_{0})z = f(x)$$
koja ne sadrži z, pa joj se smenom $z' = p, z'' = p'$ snižava red.

Snižavanje reda diferencijalne jednačine

- Ako znamo dva rešenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ diferencijalne jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

tj. ako je

$$y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x) = f(x),$$
$$y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x) = f(x),$$

oduzimanjem ove dve jednakosti dobija se

$$(y_2(x) - y_1(x))'' + a_1(x)(y_2(x) - y_1(x))' + a_2(x)(y_2(x) - y_1(x)) = 0,$$

tj. funkcija $h(x) = y_2(x) - y_1(x)$ je jedno rešenje jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

Ona se rešava smenom

$$y = z(x)(y_2(x) - y_1(x)).$$

Linearna jednačina $n-$tog reda, $n \geq 2$

Opšti oblik: $g_0(x)y^{(n)} + g_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + g_n(x)y = h(x).$
Pretpostavke:

- $h(x), g_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$ definisane i neprekidne nad otvorenim intervalom I
- $g_0(x) \neq 0, x \in I$

$$
\begin{aligned}
L_n[y] &= f(x) \\
L_n[y] &= y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y \\
a_i(x) &= \frac{g_i(x)}{g_0(x)}, i = 1, 2, \ldots, n, \quad f(x) = \frac{h(x)}{g_0(x)}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)}$$

- $f(x) = 0, x \in I$ - homogena diferencijalna jednačina,
u suprotnom je to nehomogena diferencijalna jednačina

Linearna jednačina $n-$tog reda, $n \geq 2$

1) problem egzistencije rešenja
2) problem jednoznačnosti rešenja
3) problem pronalaženja rešenja (efektivnog rešavanja)

Teorema

Ako su $a_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$ i $f(x)$ neprekidne funkcije nad intervalom I, $x_0 \in I$ proizvoljna tačka, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ proizvoljni brojevi, tada postoji jedinstveno rešenje $y(x)$ diferencijalne jednačine $L_n[y] = f(x)$ koje zadovoljava početni uslov

$$y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

i definisano je nad datim intervalom I.

Homogena linearna jednačina $L_n[y] = 0$

Lema

Operator $L_n[\ ]$ je linearan, tj. važi

$$L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2], \qquad L_n[cy] = cL_n[y],$$

gde je c proizvoljna konstanta.

Teorema

(PRINCIP SUPERPOZICIJE) Ako su $y_i(x), i = 1, 2, \dots, m$ rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine tada je rešenje i

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i(x), \quad \text{gde su } c_i \text{ proizvoljne konstante.}$$

Dokaz. $L_n\left[\sum_{i=1}^{m} c_i y_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{m} c_i L_n[y_i(x)] = 0.$

- opšte rešenje: $m = n$, c_i se mogu izabrati tako da je zadovoljen svaki početni uslov
- partikularno rešenje - dobijeno izborom konstanti c_i, $i = 1, 2, \dots, n$

Homogena linearna jednačina

Definicija

Funkcije $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, *su linearno zavisne nad intervalom* I *ako postoje brojevi* c_i *koji nisu svi jednaki nuli, da je*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0, \qquad \text{za svako } x \in I.$$

Funkcije koje nisu linearno zavisne su linearno nezavisne.

Definicija

Ako su funkcije $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x) \in C^{n-1}(I)$, $n \geq 2$, *tada je*

$$W(x) = W(y_1, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

determinanta Vronskog od $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *nad* I.

Homogena linearna jednačina

Lema

Neka su funkcije $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ $(n-1)$ *puta neprekidno diferencijabilne nad intervalom* I. *Ako su funkcije* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *linearno zavisne nad intervalom* I, *tada je* $W(x) = 0$ *za svako* $x \in I$.

Dokaz. Ako su funkcije $y_1, y_2, \dots, y_n$ linearno zavisne nad intervalom I, tada postoje konstante $c_1, c_2, \dots, c_n$ koje nisu sve istovremeno jednake nuli, tako da je

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0, \text{ za svako } x \in I.$$

Ako je na primer $c_n \neq 0$, tada je

$$y_n = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_{n-1} y_{n-1}, \quad \alpha_i = -\frac{c_i}{c_n}, i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Sledi da je poslednja kolona u $W(x)$ linearna kombinacija prethodnih kolona, pa je $W(x) = 0$.

Homogena linearna jednačina

Lema

Ako su rešenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *homogene linearne jednačine* $L_n[y] = 0$ *linearno nezavisna, tada je* $W(x) \neq 0$, *za svako* $x \in I$.

Teorema

Potreban i dovoljan uslov da $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *budu linearno nezavisna rešenja homogene linearne jednačine* $L_n[y] = 0$ *nad nekim intervalom* I *je da bude*

$$W(x) \equiv W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0, \text{ za svako } x \in I.$$

Dakle, za skup rešenja $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ jednačine $L_n[y] = 0$ je ili $W(x) = 0$ za svako $x \in I$ ili $W(x) \neq 0$ za svako $x \in I$.

Homogena linearna jednačina

Primer

Ispitati linearnu zavisnost funkcija $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ nad $\mathbb{R}$. Naći $W(x)$.

Iz $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$ sledi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, jer:

$$\begin{aligned} x = 1 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ x = -1 \quad &\Rightarrow \quad -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

tako da su funkcije $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ linearno nezavisne nad $\mathbb{R}$. Kako je

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2,$$

sledi da je $W(0) = 0$, $W(x) \neq 0$, za svako $x \neq 0$.

Homogena linearna jednačina

Primer

Da li funkcije $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ mogu biti rešenja nad skupom $\mathbb{R}$ neke homogene linearne jednačine oblika $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, gde su $a_1(x)$ i $a_2(x)$ neprekidne funkcije za svako $x \in \mathbb{R}$? Formirati homogenu linearnu jednačinu čija su rešenja $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$.

$y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ su linearno nezavisne nad $\mathbb{R}$. Ne mogu da budu rešenja homogene linearne jednačine $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ nad $\mathbb{R}$, jer je $W(0) = 0$. Ako su $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ rešenja neke linearne jednačine, tada je rešenje te jednačine i funkcija $y(x) = c_1x + c_2x^2$, gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & c_1x + c_2x^2 \\ y'(x) & = & c_1 + 2c_2x \\ y''(x) & = & 2c_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} c_2 & = & \frac{y''(x)}{2} \\ c_1 & = & y'(x) - xy''(x) \end{array}$$

$\Rightarrow y(x) = xy'(x) - x^2y''(x) + \frac{x^2}{2}y''(x)$, pa je tražena jednačina $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Homogena linearna jednačina

Definicija

Svaki skup od n, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ linearno nezavisnih rešenja jednačine $L_n[y] = 0$ je **fundamentalni skup rešenja** *jednačine $L_n[y] = 0$.*

Teorema

Postoji fundamentalni skup rešenja jednačine $L_n[y] = 0$ nad intervalom I.

Dokaz. Neka je x_0 proizvoljna tačka iz intervala I i $y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ rešenja jednačine $L_n[y] = 0$ koja zadovoljavaju početni uslov

$$\begin{array}{llll}
y_1(x_0) = 1, & y_1'(x_0) = 0, & \ldots, & y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, \\
y_2(x_0) = 0, & y_2'(x_0) = 1, & \ldots, & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
y_n(x_0) = 0, & y_n'(x_0) = 0, & \ldots, & y_n^{(n-1)}(x_0) = 1.
\end{array}$$

(postoje na osnovu teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti)

Homogena linearna jednačina

Rešenja $y_i(x)$ su linearno nezavisna nad intervalom I, jer da su linearno zavisna, sledilo bi da je $W(x) = 0$ za svako $x \in I$, pa i za $x = x_0$.

Za x_0 imamo da je

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

što je kontradikcija. $\square$

Homogena linearna jednačina

Teorema

(FORMULA LJUVILA-ABELA) Neka je $x_0 \in I$ proizvoljna tačka, a $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$. Tada je za svako $x \in I$

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}.$$

- Ako je $a_1 = c$, tada je $W(x) = W(x_0)e^{-c(x-x_0)}$, te za $c = 0$ važi $W(x) = W(x_0)$, za svako $x \in I$.

Posledica

Rešenja $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$ su linearno nezavisna nad intervalom I ako je $W(x_0) \neq 0$ za neku tačku $x_0 \in I$.

Homogena linearna jednačina

Teorema

Ako je $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ *fundamentalni skup rešenja homogene linearne jednačine* $L_n[y] = 0$ *nad intervalom* I*, tada je opšte rešenje te jednačine nad intervalom* I *dato sa*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

gde su $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *proizvoljni realni brojevi.*

Dokaz. Neka su su $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ proizvoljni realni brojevi i neka je $h(x)$ rešenje jednačine $L_n[y] = 0$ koje zadovoljava početni uslov

$$h(x_0) = \alpha_0, h'(x_0) = \alpha_1, \ldots, h^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}, \quad x_0 \in I.$$

Pokažimo da se u rešenju

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

konstante $c_1, c_2, \ldots, c_n$ mogu odrediti tako da i $y(x)$ zadovoljava isti početni uslov.

Uvrštavajući početni uslov u
$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$
dobijamo sistem S algebarskih jednačina

$$\begin{array}{lclclcl}
c_1y_1(x_0) & + & c_2y_2(x_0) & + \cdots + & c_ny_n(x_0) & = & \alpha_0 \\
c_1y_1'(x_0) & + & c_2y_2'(x_0) & + \cdots + & c_ny_n'(x_0) & = & \alpha_1 \\
\\
c_1y_1^{(n-1)}(x_0) & + & c_2y_2^{(n-1)}(x_0) & + \cdots + & c_ny_n^{(n-1)}(x_0) & = & \alpha_{n-1}
\end{array}$$

Determinanta ovog sistema je $D_S = W(x_0) \neq 0$ jer su rešenja $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ linearno nezavisna, pa je sistem određen.
Znači, rešenje
$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x),$$
gde je $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ rešenje sistema S zadovoljava isti početni uslov kao i rešenje $h(x)$.
Zbog jednoznačnosti rešenja početnog problema je
$y(x) = h(x), x \in I$. $\square$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$\boxed{L_n[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_0 y = 0,\ a_i \in \mathbb{R}}$$

Ako je $y = e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$ tada je $y^{(i)} = k^i e^{kx}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pa je

$$L_n[e^{kx}] = e^{kx}(\underbrace{k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n}_{P_n(k)})$$

pa je

$$L_n[e^{kx}] = 0 \Leftrightarrow k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

- $P_n(k)$ - karakterističan polinom
- $k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0$ - karakteristična jednačina

Rešenja diferencijalne jednačine su za svako $x \in (-\infty, \infty)$ funkcije

$$y_i = e^{k_i x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Lema

Ako je $y(x) = u(x) + iv(x)$ kompleksno rešenje linearne jednačine $L_n[y] = 0$ tada su $u(x)$ i $v(x)$ dva realna rešenja te jednačine.

Dokaz. $L_n[u(x) + iv(x)] = L_n[u(x)] + iL_n[v(x)] = 0$
$$\Rightarrow L_n[u(x)] = L_n[v(x)] = 0.$$

- Koreni karakteristične jednačine su realni i jednostruki

Karakteristična jednačina ima $1 < m \leq n$ različitih realnih korena k_i, $i = 1, \dots, m$; realna rešenja su $y_i = e^{k_i x}$, $i = 1, \dots, m$; linearno su nezavisna (čine fundamentalni skup rešenja) ako je $m = n$, jer je

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \dots & e^{k_m x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \dots & k_m e^{k_m x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{m-1} e^{k_1 x} & k_2^{m-1} e^{k_2 x} & \dots & k_m^{m-1} e^{k_m x} \end{vmatrix} \\ &= e^{(k_1 + k_2 + \dots + k_m)x} V, \end{aligned}$$

gde je

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{m-1} & k_2^{m-1} & \dots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le m} (k_i - k_j) \neq 0,$$

jer je $k_i \neq k_j$ za $i \neq j$.

Opšte rešenje za $m = n$ dato je sa:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{k_i x}.$$

- Koreni karakteristične jednačine su kompleksni i jednostruki

$k_j = \alpha_j + i\,\beta_j$, $\beta_j \neq 0$, tada su rešenja

$$
\begin{aligned}
y_{j_1} &= \mathrm{Re}(e^{(\alpha_j + i\,\beta_j)x}) = e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x \\
y_{j_2} &= \mathrm{Im}(e^{(\alpha_j + i\,\beta_j)x}) = e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x
\end{aligned}
$$

Lako se proverava da su ova dva rešenja linearno nezavisna.

Iako je $\overline{k_j} = \alpha_j - i\,\beta_j$ takođe koren karakteristične jednačine, nema dodatnih rešenja!

- Koreni karakteristične jednačine su realni i višestruki

k_i koren višestrukosti $m > 1$, tada su rešenja jednačine funkcije

$$y_{i_1}(x) = e^{k_i x},\ y_{i_2}(x) = xe^{k_i x},\ \dots,\ y_{i_m}(x) = x^{m-1}e^{k_i x}$$

i linearno su nezavisna:

Kako je

$$P_n(k_i) = P_n'(k_i) = \cdots = P_n^{(m-1)}(k_i) = 0, \quad P_n^{(m)}(k_i) \neq 0$$

i kako je $L_n[e^{kx}] = e^{kx}P_n(k)$ to se diferenciranjem po k dobija

$$\begin{aligned} L_n[xe^{kx}] &= xe^{kx}P_n(k) + e^{kx}P_n'(k) \\ &= e^{kx}(xP_n(k) + P_n'(k)) \end{aligned}$$

pa se iz $L_n[xe^{kx}] = e^{kx}(xP_n(k) + P_n'(k))$ stavljajući $k = k_i$ dobija $L_n[xe^{k_i x}] = 0$, tj da je i $xe^{k_i x}$ rešenje. Slično, diferenciranjem $(m-1)$ puta po k dobijamo da su rešenja i funkcije

$$y_{i_1}(x) = e^{k_i x},\ y_{i_2}(x) = xe^{k_i x}, \dots, y_{i_m}(x) = x^{m-1}e^{k_i x}.$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

- Koreni karakteristične jednačine su kompleksni i višestruki

$k_j = \alpha_j + i\,\beta_j$, $\beta_j \neq 0$ koren višestrukosti $m > 1$, tada su $2m$ realnih (linearno nezavisnih) rešenja jednačine funkcije

$$\begin{aligned}
y_{j_1} &= e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x,\\
y_{j_2} &= x e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x,\\
&\;\;\vdots\\
y_{j_m} &= x^{m-1} e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x,\\
y_{j_{m+1}} &= e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x,\\
y_{j_{m+2}} &= x e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x,\\
&\;\;\vdots\\
y_{j_{2m}} &= x^{m-1} e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x.
\end{aligned}$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$
\begin{aligned}
k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\
k_4 &= -1, \\
k_5 &= 3 + i, \\
k_6 &= 3 - i, \\
k_7 = k_8 = k_9 &= 2 + i, \\
k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2 - i.
\end{aligned}
$$

$y(x) = e^x(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + c_4 e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + e^{2x}(c_7 \cos x + c_8 x \cos x + c_9 x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11} x \sin x + c_{12} x^2 \sin x)$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$
\begin{aligned}
k_1 = k_2 = k_3 &= 1,\\
k_4 &= -1,\\
k_5 &= 3+i,\\
k_6 &= 3-i,\\
k_7 = k_8 = k_9 &= 2+i,\\
k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2-i.
\end{aligned}
$$

$$y(x) = e^{x}(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5\cos x + c_6\sin x) + e^{2x}(c_7\cos x + c_8x\cos x + c_9x^{x}\cos x + c_{10}\sin x + c_{11}x\sin x + c_{12}x^2\sin x)$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$
\begin{aligned}
k_1 = k_2 = k_3 &= 1,\\
k_4 &= -1,\\
k_5 &= 3+i,\\
k_6 &= 3-i,\\
k_7 = k_8 = k_9 &= 2+i,\\
k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2-i.
\end{aligned}
$$

$$y(x) = e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5\cos x + c_6\sin x) + e^{2x}(c_7\cos x + c_8x\cos x + c_9x^x\cos x + c_{10}\sin x + c_{11}x\sin x + c_{12}x^2\sin x)$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\ k_4 &= -1, \\ k_5 &= 3+i, \\ k_6 &= 3-i, \\ k_7 = k_8 = k_9 &= 2+i, \\ k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2-i. \end{aligned}$$

$$y(x) = e^x(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + c_4 e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + e^{2x}(c_7 \cos x + c_8 x \cos x + c_9 x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11} x \sin x + c_{12} x^2 \sin x)$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$
\begin{aligned}
k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\
k_4 &= -1, \\
k_5 &= 3 + i, \\
k_6 &= 3 - i, \\
k_7 = k_8 = k_9 &= 2 + i, \\
k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2 - i.
\end{aligned}
$$

$$
y(x) = e^x(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + c_4 e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + \\
e^{2x}(c_7 \cos x + c_8 x \cos x + c_9 x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11} x \sin x + c_{12} x^2 \sin x)
$$

Nehomogena linearna jednačina

Teorema

Neka je $y_p(x)$ neko (partikularno) rešenje jednačine

$$L_n[y] = f(x)$$

i $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine $L_n[y] = 0$.
Tada je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

opšte rešenje jednačine $L_n[y] = f(x)$.

Dokaz. $y(x)$ je rešenje jednačine $L_n[y] = f(x)$ jer iz linearnosti operatora $L_n[\ ]$ sledi

$$\begin{aligned} L_n[y(x)] &= L_n[y_h(x) + y_p(x)] = L_n[y_h(x)] + L_n[y_p(x)] \\ &= 0 + f(x) = f(x) \end{aligned}$$

Nehomogena linearna jednačina

Pokažimo da ono sadrži svako rešenje koje zadovoljava početni uslov

$$y^{(i)}(x_0) = \alpha_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

(tj. svako partikularno rešenje), gde su α_i proizvoljni realni brojevi, $x_0 \in I$ proizvoljna tačka i $y^{(0)}(x) = y(x)$:

Neka je $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja jednačine $L_n[y] = 0$. Tada je njeno opšte rešenje

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x).$$

Neka su $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ proizvoljni brojevi i $h(x)$ rešenje jednačine $L_n[y] = f(x)$ koje u proizvoljnoj tački x_0 zadovoljava početni uslov

$$h(x_0) = \alpha_0, h'(x_0) = \alpha_1, \ldots, h^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

Pokazaćemo da se u rešenju $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x)$ konstante mogu odrediti tako da i funkcija $y(x)$ zadovoljava isti početni uslov.

Nehomogena linearna jednačina

Uvrštavajući početni uslov u jednačinu $L_n[y] = f(x)$ dobijamo sistem S algebarskih jednačina

$$\begin{array}{llll}
c_1 y_1(x_0) & +c_2 y_2(x_0) & +\cdots + c_n y_n(x_0) & = \alpha_0 - y_p(x_0) \\
c_1 y_1'(x_0) & +c_2 y_2'(x_0) & +\cdots + c_n y_n'(x_0) & = \alpha_1 - y_p'(x_0) \\
 & & & \vdots \\
c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & +c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & +\cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = \alpha_{n-1} - y_p^{(n-1)}(x_0)
\end{array}$$

Determinanta sistema S je $D_S = W(x_0) \neq 0$, pa je sistem određen.

Dakle, rešenje $g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x)$, gde je $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ rešenje sistema S zadovoljava isti početni uslov kao i $h(x)$.

Zbog jednoznačnosti rešenja početnog problema je $g(x) = h(x)$ za svako $x \in I$. $\square$

Metod varijacije konstanti

Teorema

Neka je $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *fundamentalni skup rešenja jednačine* $L_n[y] = 0$ *nad intervalom* I. *Tada je partikularno rešenje* $y_p(x)$ *nehomogene jednačine* $L_n[y] = f(x)$ *koje zadovoljava početni uslov* $y_p^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)} = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, *dato sa*

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s) ds,$$

gde je $x_0 \in I$ *proizvoljna tačka, a* $W_i(s)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *je determinanta koja se dobija kada se iz determinante Wronskog funkcija* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ i*-ta kolona zameni sa* $col(0, 0, \ldots, 1)$ *dok su ostale kolone iste kao kod* $W(x)$.

Dokaz. Neka je $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja. Potrebno je odrediti funkcije $c_1(x), \dots, c_n(x)$ tako da je

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

partikularno rešenje nad intervalom I jednačine $L_n[y] = f(x)$. Diferenciranjem obe strane i ako za prvi uslov za funkcije $c_i(x)$ uzmemo

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \cdots + c_n'(x)y_n(x) = 0$$

dobijamo

$$y_p'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + \cdots + c_n(x)y_n'(x)$$

Ponovnim diferenciranjem poslednje jednakosti i ako za drugi uslov za funkcije $c_i(x)$ uzmemo

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \cdots + c_n'(x)y_n'(x) = 0$$

dobijamo

$$y_p''(x) = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + \cdots + c_n(x)y_n''(x).$$

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo

$$c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0,$$

$$y_p^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x).$$

Sada je

$$\begin{aligned} y_p^{(n)}(x) &= c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) \\ &\quad + c_1(x)y_1^{(n)}(x) + c_2(x)y_2^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Kako funkcija

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

treba da bude rešenje jednačine $L_n[y] = f(x)$, zamenom $y_p(x), y_p'(x), \ldots, y_p^{(n)}(x)$ u tu jednačinu i vodeći računa da je $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja jednačine $L_n[y] = 0$, dobijamo

$$L_n[y_p(x)] \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \underbrace{L_n[y_i(x)]}_{0} + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x),$$

odnosno

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Metod varijacije konstanti

Determinanta linearnog (algebarskog) sistema

$$
\begin{aligned}
c_1'(x)y_1(x) &+ c_2'(x)y_2(x) &+\cdots+ & \; c_n'(x)y_n(x) &= 0\\
c_1'(x)y_1'(x) &+ c_2'(x)y_2'(x) &+\cdots+ & \; c_n'(x)y_n'(x) &= 0\\
\vdots\\
c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) &+ c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) &+\cdots+ & \; c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= f(x)
\end{aligned}
$$

je $W(x) \neq 0$ jer su rešenja $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ jednačine $L_n[y] = 0$ po pretpostavci linearno nezavisna. Rešavanjem po $c_i'(x)$ dobija se

$$c_i'(x) = \frac{D_{C_i}}{D} = \frac{W_i(x)f(x)}{W(x)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Metod varijacije konstanti

Integracijom nad intervalom (x_0, x) za $x > x_0$ (tj. (x, x_0) za $x < x_0$) sledi da je

$$c_i(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\frac{W_i(s)}{W(s)}f(s)ds, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

čijom zamenom u obrazac za $y_p(x)$ dobijamo da je partikularno rešenje

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)}f(s)ds.$$

$\square$

Na primer, za $n = 2$ sistem za određivanje funkcija c_i glasi

$$
\begin{array}{rcrcl}
c_1'(x)y_1(x) & + & c_2'(x)y_2(x) & = & 0 \\
c_1'(x)y_1'(x) & + & c_2'(x)y_2'(x) & = & f(x),
\end{array}
$$

dok je za $n = 3$ odgovarajući sistem

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
c_1'(x)y_1(x) & + & c_2'(x)y_2(x) & + & c_3'(x)y_3(x) & = & 0 \\
c_1'(x)y_1'(x) & + & c_2'(x)y_2'(x) & + & c_3'(x)y_3'(x) & = & 0 \\
c_1'(x)y_1''(x) & + & c_2'(x)y_2''(x) & + & c_3'(x)y_3''(x) & = & f(x)
\end{array}
$$

Metod varijacije konstanti

Primer

Naći opšte rešenje jednačine $y''' - y'' = e^x$.

$$y''' - y'' = 0 \;\Rightarrow\; k^3 - k^2 = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = k_2 = 0, k_3 = 1$$
$$\Rightarrow\; y_h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x$$

Metodom varijacije konstanti dobijamo sistem

$$\begin{array}{ccccccc} c_1'(x) & + & c_2'(x)x & + & c_3'(x)e^x & = & 0 \\ & & c_2'(x) & + & c_3'(x)e^x & = & 0 \\ & & & & c_3'(x)e^x & = & e^x \end{array}$$

čijim rešavanjem i integracijom rešenja dobijamo

$$\begin{array}{lcl} c_3'(x) = 1 & \Rightarrow & c_3(x) = x + C_3 \\ c_2'(x) = -c_3'(x)e^x = -e^x & \Rightarrow & c_2(x) = -e^x + C_2 \\ c_1'(x) = -c_2'(x)x - c_3'(x)e^x = (x-1)e^x & \Rightarrow & c_1(x) = (x-2)e^x + C_1 \end{array}$$

Jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine je

$$y_p(x) = (x-2)e^x$$

pa je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + (x-2)e^x.$$

Metod jednakih koeficijenata

Ako je jednačina linearna sa konstantnim koeficijentima oblika

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)}$$

gde je funkcija $f(x)$ specijalnog oblika

$$f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x),$$

partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^r e^{\alpha x}(T_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x)$$

pri čemu je

- $k = \max\{n, m\}$, $\quad n = \deg P(x)$, $\quad m = \deg Q(x)$, ako su oba polinoma različita od nula polinoma (ako je P(x) nula polinom onda je $k = m$, a ako je $Q(x)$ nula polinom onda je $k = n$)
- r je višestrukost $\alpha + i\beta$ kao korena karakteristične jednačine odgovarajuće homogene jednačine

Metod jednakih koeficijenata

Korisna je činjenica: ako je

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$$

i ako je

$$y_1(x) \text{ partikularno rešenje jednačine } L_n[y] = f_1(x) \text{ nad } I,$$

$$y_2(x) \text{ partikularno rešenje jednačine } L_n[y] = f_2(x) \text{ nad } I,$$

tada je

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

nad intervalom I partikularno rešenje jednačine

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$$

Metod jednakih koeficijenata

Primer

Odrediti opšte rešenja jednačine $y''' - y'' = e^x + \sin x + x$.

Rešenje. Opšte rešenje homogenog dela jednačine je

$$y_h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x.$$

Jedno partikularno rešenje jednačine $y''' - y'' = e^x$ je

$$y_{p_1}(x) = xe^x.$$

Jedno partikularno rešenje jednačine $y''' - y'' = \sin x$ je

$$y_{p_2}(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

Jedno partikularno rešenje jednačine $y''' - y'' = x$ je

$$y_{p_3}(x) = -\frac{1}{6}x^2(x+3).$$

Opšte rešenje je

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + xe^x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) - \frac{1}{6}x^2(x+3).$$

Ojlerova jednačina

Ojlerova jednačina je oblika

$$\boxed{(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x)}$$

gde su a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ konstante i smenom

$$ax+b = e^t, ax+b > 0 \quad (ax+b = -e^t, ax+b < 0)$$

svodi se na jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^3y''' + x^2y'' + 3xy - 8y = 0.$$

Za $x > 0$ smenom

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad y'_x = y'_t t'_x = \frac{1}{x} y'_t,$$

$$y''_x = -\frac{1}{x^2} y'_t + \frac{1}{x^2} y''_t = \frac{1}{x^2}(y''_t - y'_t)$$

$$y'''_x = -\frac{2}{x^3}(y''_t - y'_t) + \frac{1}{x^3}(y'''_t - y''_t) = \frac{1}{x^3}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t)$$

dobija se linearna diferencijalna jednačina $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$. čija karakteristična jednačina $r^3 - 2r^2 + 4r - 8$ ima korene $r_1 = 2$, $r_2 = 2i$, $r_3 = -2i$ pa je njen fundamentalni skup rešenja $\{e^{2t}, \sin 2t, \cos 2t\}$ tako da je fundamentalni skup rešenja Ojlerove jednačine $\{x^2, \sin(2\ln|x|), \cos(2\ln|x|)\}$, $x \neq 0$ pa je opšte rešenje $\quad y = c_1x^2 + c_2\sin(2\ln|x|) + c_3\cos(2\ln|x|)$.