1 MATEMATIČKA INDUKCIJA

1. Neka je za prirodan broj $n \geq 1$ data suma S_n prvih n prirodnih brojeva

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i$$

   (a) Generisati zatvorenu formu $S(n)$ za datu sumu.

   (b) Dokazati da je $S_n = S(n)$.

Rešenje.

(a) Zbir prvih n prirodnih brojeva možemo zapisati u proizvoljnom redosledu sabiraka. Posmatraćemo datu sumu preko dva uređenja sabiraka:

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\ S_n & = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1. \end{array}$$

Sabirajući ove jednakosti dobijamo

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)}_{n} \text{ sabiraka}$$

Odatle zaključujemo da je očekivana zatvorena forma tražene sume

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) Dokažimo sada indukcijom da je

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

za svaki prirodan broj $n \geq 1$.

BI: Za $n = 1$ jednakost je tačna, jer je $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$.

IH: Pretpostavimo da je jednakost tačna za $n = k$, tj. da važi

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}.$$

IK: Dokažimo da je jednakost tačna za $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= (k+1) + \sum_{i=1}^{k} i \\ &= (k+1) + \frac{k(k+1)}{2} && \text{(IH)} \\ &= (k+1)\left(1 + \frac{k}{2}\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

2. Neka je za prirodan broj $n \geq 1$ data suma S_n na sledeći način:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(2i-1).$$

   (a) Generisati zatvorenu formu $S(n)$ za datu sumu.
   (b) Dokazati da je $S_n = S(n)$.

Rešenje.

(a) Primenićemo istu ideju kao u prethodnom zadatku.

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_n & = & 1 & + & 3 & + & \dots & + & (2n-3) & + & (2n-1) \\ S_n & = & (2n-1) & + & (2n-3) & + & \dots & + & 3 & + & 1 \end{array}$$

Saberimo gornje jednakosti i primetimo da sa desne strane dobijamo sumu n parova brojeva, gde je zbir svakog para $2n$:

$$1+(2n-1)=2n; 3+(2n-3)=2n; \dots ; (2n-1)+1=2n.$$

Odatle je

$$2S_n = \underbrace{2n+2n+\dots+2n+2n}_{n \text{ sabiraka}} \text{ tj. } 2S_n = 2n^2$$

Odatle zaključujemo da je očekivana zatvorena forma

$$S(n) = n^2.$$

(b) Dokažimo sada indukcijom da je

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

za svako $n \geq 1$.

BI: Za $n = 1$ jednakost je tačna, jer je $2 \cdot 1 - 1 = 1$.

IH: Pretpostavimo da je jednakost tačna za $n = k$, tj. da važi

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2.$$

IK: Dokažimo da je jednakost tačna za $n = k+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= (2\cdot(k+1)-1) + \sum_{i=1}^{k}(2i-1) \\ &= (2k+1)+k^2 && \text{(IH)} \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

3. Neka je za prirodan broj $n \geq 1$ data suma
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}.$$
(a) Generisati zatvorenu formu $S(n)$ za datu sumu.
(b) Dokazati da je $S_n = S(n)$.

Rešenje.

(a) Opšti član date sume može se zapisati na sledeći način:
$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}.$$
Odatle je
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$
odnosno očekujemo da je zatvorena forma oblika $S(n) = \frac{n}{n+1}$.

(b) Dokažimo indukcijom da je
$$S_n = \frac{n}{n+1}$$
za svako $n \geq 1$.

BI: Za $n = 1$ jednakost je tačna, jer je $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$.

IH: Pretpostavimo da je jednakost tačna za $n = k$, tj. da važi
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$$
.

IK: Dokažimo da je jednakost tačna za $n = k + 1$:
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} \\ &= \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} + \frac{k}{k+1} \qquad \text{(IH)} \\ &= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+1)} \\ &= \frac{k+1}{k+2}\end{aligned}$$

4. Primenom matematičke indukcije, dokazati da je

$$5^n + 2^{n+1}$$

deljiv sa 3 za svaki prirodan broj $n \geq 1$.

Rešenje.

BI: Za $n = 1$ tvrđenje je tačno, jer je $5^1 + 2^{1+1} = 9$.

IH: Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za $n = k$, tj. da je broj $5^k + 2^{k+1}$ deljiv sa 3.

IK: Dokažimo da je tvrđenje tačno za $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 5^{k+1} + 2^{k+2} &= 5 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^{k+1} \\ &= 5 \cdot 5^k + 5 \cdot 2^{k+1} - 3 \cdot 2^{k+1} \\ &= 5\left(5^k + 2^{k+1}\right) - 3 \cdot 2^{k+1} \end{aligned}$$

Drugi sabirak je očigledno deljiv sa 3, dok deljivost prvog sabirka sa 3 sledi na osnovu induktivne pretpostavke.

5. Primenom matematičke indukcije, dokazati da je $2^n > n^2$ za svaki prirodan broj $n \geq 5$.

Rešenje.

BI: Za $n = 5$ tvrđenje je tačno, jer je $2^5 > 5^2 \Leftrightarrow 32 > 25$.

IH: Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za $n = k$, tj. da je

$$2^k > k^2 \text{ tj. } 2^k - k^2 > 0.$$

IK: Dokažimo da je tvrđenje tačno za $n = k + 1$. Posmatrajmo razliku

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - (k+1)^2 &= 2 \cdot 2^k - k^2 - 2k - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 2k^2 + k^2 - 2k - 1 \\ &= 2 \cdot (2^k - k^2) + k^2 - 2k - 1. \end{aligned}$$

Na osnovu induktivne pretpostavke, $2 \cdot (2^k - k^2) > 0$. Kvadratna nejednačina $k^2 - 2k - 1 > 0$ nad poljem realnih brojeva ima rešenje

$$k \in (-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, \infty),$$

odakle direktno sledi da je ona tačna za svaki prirodan broj $k \geq 3$. Kako je tvrđenje potrebno dokazati za $n \geq 5$, ovim je dokaz završen.

6. Neka je U univerzalni skup.

(a) Dokazati da je $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, gde su $A, B \subseteq U$.

(b) Dokazati da je $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$, gde je $n \geq 2$ i $A_1, \ldots, A_n \subseteq U$.

Rešenje.

(a) Koristeći definicije komplementa, unije i preseka skupova

$$\begin{array}{rcc} \overline{A} & = & \{x \in U : x \notin A\} = \{x \in U : \neg(x \in A)\} \\ A \cup B & = & \{x \in U : x \in A \vee x \in B\} \\ A \cap B & = & \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}, \end{array}$$

kao i de Morganovog zakona

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q.$$

dobijamo

$$\begin{array}{rcl} x \in \overline{A \cup B} & \Leftrightarrow & x \notin A \cup B \\ & \Leftrightarrow & \neg\,(x \in A \cup B) \\ & \Leftrightarrow & \neg(x \in A \vee x \in B) \\ & \Leftrightarrow & \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \\ & \Leftrightarrow & x \notin A \wedge x \notin B \\ & \Leftrightarrow & x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{array}$$

(b) BI: Za $n = 2$ imamo $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$, što je dokazano pod (a).
IH: Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za $n = k$, tj.

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} = \bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}$$

IK: Dokažimo da je tvrđenje tačno za $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} \overline{\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i} &= \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} \cap \overline{A_{k+1}} \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}\right) \cap \overline{A_{k+1}} = \bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i} \end{aligned}$$

REKURZIVNE DEFINICIJE I STROGA INDUKCIJA

7. Neka je niz brojeva $\{a_n\}_{n \geq 1}$ definisan na sledeći način:

   - $a_1 = 5$
   - $a_2 = 13$
   - $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $n \geq 3$.

   Dokazati da je $a_n = 2^n + 3^n$ za svaki prirodan broj $n \geq 1$.

Rešenje.

Dokažimo koristeći strogu indukciju da je niz definisan u zadatku:

$$a_n = 2^n + 3^n \qquad (*)$$

BI: Zamenjivanjem vrednosti $n = 1$ u $(*)$ dobijamo $a_1 = 2^1 + 3^1 = 5$, dok za $n = 2$ imamo $a_2 = 2^2 + 3^2 = 13$, što se slaže sa početnim uslovima iz zadatka.

IH: Pretpostavimo da je tvrđenje $(*)$ tačno za sve prirodne brojeve n sa osobinom $n \leq k$ i $k \geq 2$.

IK: Dokažimo da tvrđenje važi za $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 5a_k - 6a_{k-1} \quad \text{(rekurzivna definicija niza } a_n\text{)} \\
&= 5(2^k + 3^k) - 6(2^{k-1} + 3^{k-1}) \quad \text{(iz IH } (*) \text{ važi za sve } n \leq k\text{)} \\
&= 5 \cdot 2^k - 3 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k - 2 \cdot 3^k \\
&= 2 \cdot 2^k + 3 \cdot 3^k \\
&= 2^{k+1} + 3^{k+1}
\end{aligned}$$

8. Neka je Fibonačijev niz brojeva $\{f_n\}_{n \geq 0}$ definisan na sledeći način:
   - $f_0 = 0$
   - $f_1 = 1$
   - $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$.

   Ako je $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, dokazati da je $f_n < \alpha^{n+1}$, za svaki ceo broj $n \geq 0$.

Rešenje.

BI: Za $n = 0$ imamo:

$$\alpha^1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0 = f_0.$$

Za $n = 1$ važi:

$$\alpha^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{2} = 3 + \sqrt{5} > 1 = f_1.$$

Odatle zaključujemo da tvrđenje važi u baznim slučajevima.

IH: Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve cele brojeve n za koje je $0 \leq n \leq k$ i $k \geq 1$.

IK: Dokažimo da tvrđenje važi za $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} \\
&< \alpha^{k+1} + \alpha^k \quad \text{(iz IH)} \\
&= \alpha^k(\alpha + 1) = \alpha^k \cdot \alpha^2 = \alpha^{k+2}
\end{aligned}$$

Prethodno smo koristili osobinu $\alpha + 1 = \alpha^2$, koju izvodimo u nastavku:

$$\begin{aligned}
\alpha + 1 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\
\alpha^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

REKURZIVNE DEFINICIJE I STRUKTURNA INDUKCIJA

Posmatraćemo alfabet koji čine:

- beskonačan skup iskaznih slova $P = \{p, q, r, \ldots\}$;
- logičke konstante: $\top$, $\bot$;
- simboli logičkih veznika: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- zagrade: (,).

Definicija 1 *Skup iskaznih formula je najmanji skup reči datog alfabeta koji zadovoljava sledeće osobine:*

- *Iskazna slova i logičke konstante su iskazne formule;*
- *Ako su φ i ψ iskazne formule, onda su i*

$$\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \Leftrightarrow \psi)$$

  iskazne formule.

Prethodna definicija može se kraće zapisati na sledeći način:

$$\varphi ::= p \mid \top \mid \bot \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \Rightarrow \varphi) \mid (\varphi \Leftrightarrow \varphi)$$

9. Dokazati da svaka iskazna formula sadrži jednak broj levih i desnih zagrada.

Rešenje.

BI: Iskazna slova i logičke konstante nemaju ni levih ni desnih zagrada, tako da je tvrđenje tačno.

IH: Pretpostavimo da su φ i ψ iskazne formule koje sadrže jednak broj levih (l_φ, l_ψ, respektivno za φ i ψ) i desnih zagrada (d_φ, d_ψ).

RK: Pokažimo sada da i formule

$$\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \Leftrightarrow \psi)$$

imaju jednak broj levih i desnih zagrada. Analiziraćemo slučajeve.

(a) $\neg\varphi$ ima isti broj zagrada kao i φ, pa je na osnovu IH broj levih i desnih zagrada isti.

(b) $(\varphi\wedge\psi), (\varphi\vee\psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \Leftrightarrow \psi)$ imaju $l_\psi + l_\varphi + 1$ levih zagrada i $d_\psi + d_\varphi + 1$ desnih zagrada. Kako je na osnovu IH $l_\psi = d_\psi$ i $l_\varphi = d_\varphi$ tvrđenje je tačno.

10. Neka je S najmanji podskup skupa uređenih parova celih brojeva koji zadovoljava sledeća pravila:

- $(1, -1) \in S$
- Ako $(a, b) \in S$, tada $(a + 2, b + 5) \in S$
- Ako $(a, b) \in S$, tada $(a + 5, b + 2) \in S$.

(a) Nabroj deset elemenata skupa S.

(b) Dokazati da je $a + b$ deljivo sa 7 kada $(a, b) \in S$.

Rešenje.

(a) $(1,-1),(3,4),(6,1),(5,9),(8,6),(11,3),(7,14),(10,11),(13,8),(16,5),$

(b) Dokaz ćemo izvesti indukcijom po pravilima.

BI: Za $(1,-1) \in S$ važi $1-1$ je deljivo sa 7.

IK: Analiziraćemo slučajeve prema poslednjem primenjenom pravilu.

- Neka je $(a+2, b+5) \in S$ izvedeno koristeći pretpostavku $(a,b) \in S$. Prema induktivnoj pretpostavci, tada je $a+b$ deljivo sa 7. Dalje onda zaključujemo da je $a+2+b+5 = a+b+7$ deljivo sa 7.
- Neka je $(a+5, b+2) \in S$ izvedeno koristeći pretpostavku $(a,b) \in S$. Prema induktivnoj pretpostavci, tada je $a+b$ deljivo sa 7. Dalje onda zaključujemo da je $a+5+b+2 = a+b+7$ deljivo sa 7.

U nastavku ćemo posmatrati alfabet koji čine:

- beskonačan skup imena čvorova $V = \{r, \ldots\}$
- beskonačan skup imena stabala $\{T, T_1, T_2, \ldots\}$
- simbol binarnog operatora $\cdot$

Definicija 2 *Skup punih binarnih stabala rekurzivno definišemo sledećim pravilima:*

- *Čvor je puno binarno stablo.*
- *Ako su T_1 i T_2 dva puna binarna stabla, onda je $T_1 \cdot T_2$ puno binarno stablo, koje se sastoji od korena r zajedno sa granama koje povezuju taj koren sa korenima levog T_1 i desnog T_2 podstabla.*

Definicija punog binarnog stabla T može se zapisati i na sledeći način:

$$T ::= r \mid r[T \cdot T]$$

Definicija 3 *Visinu $h(T)$ punog binarnog stabala T rekurzivno definišemo sledećim pravilima:*

- $h(r) = 0.$
- $h(r[T_1 \cdot T_2]) = 1 + max(h(T_1), h(T_2)).$

Definicija 4 *Broj čvorova $n(T)$ punog binarnog stabala T rekurzivno definišemo sledećim pravilima:*

- $n(r) = 1$
- $n(r[T_1 \cdot T_2]) = 1 + n(T_1) + n(T_2).$

11. Neka je T puno binarno stablo. Ako je $n(T)$ broj čvorova i $h(T)$ visina stabla T, dokazati da tada važi

(a) $n(T) \geq 2h(T) + 1;$

(b*) $n(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1.$

Rešenje: Dokaze izvodimo po strukturi stabla T.

(a) BI: Za puno binarno stablo koje se sastoji od samo jednog čvora $T = r$ tvrđenje važi, jer je $n(r) = 1$, $h(r) = 0$, odnosno $n(r) \geq 2h(r) + 1$.

IH: Neka tvrđenje važi za dva puna binarna stabla T_1 i T_2 tj.

$$n(T_1) \geq 2h(T_1) + 1 \text{ i } n(T_2) \geq 2h(T_2) + 1.$$

IK: Za stablo $T = T_1 \cdot T_2$ sada važi:

$$\begin{aligned} n(T) &= 1 + n(T_1) + n(T_2) \\ &\geq 1 + 2h(T_1) + 1 + 2h(T_2) + 1 \\ &\geq 1 + 2(h(T_1) + h(T_2)) + 2 \\ &\geq 1 + 2\max(h(T_1), h(T_2)) + 2 \\ &= 1 + 2(\max(h(T_1), h(T_2)) + 1) \\ &= 1 + 2h(T) \end{aligned}$$

Treba primetiti da je

$$\max(h(T_1), h(T_2)) = \begin{cases} h(T_1) & , h(T_1) \geq h(T_2) \\ h(T_2) & , h(T_1) < h(T_2) \end{cases},$$

odakle direktno sledi

$$\max(h(T_1), h(T_2)) \leq h(T_1) + h(T_2).$$

(b*) BI: Ukoliko puno binarno stablo ima samo jedan čvor, tj. $T = r$, onda je $n(r) = 1$ i $h(r) = 0$, pa važi $n(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$.

IH: Pretpostavimo da tvrđenje važi za dva puna binarna stabla T_1 i T_2, tj.

$$n(T_1) \leq 2^{h(T_1)+1} - 1 \text{ i } n(T_2) \leq 2^{h(T_2)+1} - 1.$$

IK: Dokažimo tvrđenje za puno binarno stablo $T = T_1 \cdot T_2$. Ispunjeno je:

$$\begin{aligned} n(T) &= 1 + n(T_1) + n(T_2) \\ &\leq 1 + (2^{h(T_1)+1} - 1) + (2^{h(T_2)+1} - 1) \\ &= 2^{h(T_1)+1} + 2^{h(T_2)+1} - 1 \\ &\leq 2\max(2^{h(T_1)+1}, 2^{h(T_2)+1}) - 1 \\ &= 2 \cdot 2^{\max(h(T_1), h(T_2))+1} - 1 \\ &= 2 \cdot 2^{h(T)} - 1 \\ &= 2^{h(T)+1} - 1 \end{aligned}$$

KOREKTNOST ALGORITMA

12. Dokazati da funkcija napisana u programskom jeziku JAVA kao rezultat nikada neće vratiti `false`:

```
public class Suma50{

    public static void main(String []args){
      int a=20;
      int b=30;
      System.out.println("Rezultat funkcije je:" +funkcija(a,b));
    }

    public static boolean funkcija(int a, int b) {
        while (a>=0 && b<= 100){
          a += 2;
          b += -2;
          if (a+b != 50){
              return false;
          }
        }
        return true;
    }
}
```

Rešenje: Treba primetiti da će funkcija na kraju izvršavanja programa dati vrednost `false` jedino ako se u nekom izvršavanju `while` petlje pojave vrednosti a i b za koje je uslov $a + b \neq 50$ koji se nalazi unutar `if` naredbe tačan.

Neka je n nenegativan ceo broj koji označava koliko puta je izvršena `while` petlja i neka su sa a_n i b_n vrednosti promenljivih a i b nakon n-tog izvršavanja `while` petlje. Dokazaćemo matematičkom indukcijom po broju n izvršavanja `while` petlje da važi

$$a_n + b_n = 50, \text{ za svako } n \geq 1.$$

BI: Početne vrednosti za promenljive a i b su $a_0 = 20$ i $b_0 = 30$. Tokom prve iteracije `while` petlje te vrednosti postaju $a_1 = 20 + 2 = 22$ i $b_1 = 30 - 2 = 28$, a njihov zbir ostaje $a_1 + b_1 = 50$.

IH: Pretpostavimo da nakon $n = k$ izvršavanja `while` petlje zbir promenljivih iznosi 50, tj. $a_k + b_k = 50$.

IK: Dokažimo da tvrđenje ostaje tačno i nakon $n = k + 1$ iteracija `while` petlje. Promenljive u $(k + 1)$. izvršavanju `while` petlje uzimaju vrednosti $a_{k+1} = a_k + 2$ i $b_{k+1} = b_k - 2$. Njihov zbir

$$a_{k+1} + b_{k+1} = a_k + 2 + b_k - 2 = a_k + b_k$$

ostaje nepromenjen. Na osnovu induktivne pretpostavke ta suma je jednaka 50, čime je dokaz završen.

13. Dokazati da funkcija napisana u programskom jeziku JAVA kao rezultat nikada neće vratiti `false`:

```
public class SumaNeparan{

   public static void main(String []args){
     int a=3;
     int b=4;
     System.out.println("Rezultat funkcije je:
     " +funkcija(a,b));
   }

   public static boolean funkcija(int a, int b) {
       while (a>=0 && b<= 100){
         a += 4;
         b += -2;
         if ((a+b)%2 == 0){
             return false;
         }
       }
       return true;
   }
}
```

Rešenje: Funkcija na kraju izvršavanja programa daje vrednost `false` jedino ako je u nekom izvršavanju `while` petlje zbir vrednosti a i b paran broj.

Neka je n nenegativan ceo broj koji označava koliko puta je izvršena `while` petlja i neka su sa a_n i b_n vrednosti promenljivih a i b nakon n-tog izvršavanja `while` petlje. Dokazaćemo matematičkom indukcijom po broju n izvršavanja `while` petlje da važi

$$a_n + b_n \text{ je neparan broj za svako } n \geq 1.$$

BI: Početne vrednosti za promenljive a i b su $a_0 = 3$ i $b_0 = 4$. Tokom prve iteracije `while` petlje te vrednosti postaju $a_1 = 3+4 = 7$ i $b_1 = 4-2 = 2$. Kako je njihov zbir, $a_1 + b_1 = 9$, neparan broj tvrđenje je tačno u baznom slučaju.

IH: Pretpostavimo da je nakon $n = k$ izvršavanja `while` petlje zbir promenljivih neparan broj.

IK: Dokažimo da tvrđenje ostaje tačno i nakon $n = k+1$ iteracija `while` petlje. Promenljive u $(k+1)$. izvršavanju uzimaju vrednosti $a_{k+1} = a_k+4$ i $b_{k+1} = b_k-2$. Njihov zbir

$$a_{k+1} + b_{k+1} = a_k + 4 + b + k - 2 = a_k + b_k + 2$$

ima istu parnost kao i a_k+b_k, pa na osnovu induktivne pretpostavke zaključujemo da je taj zbir neparan broj.

14. Dokazati da funkcija napisana u programskom jeziku JAVA kao rezultat nikada neće vratiti `false`:

```
public class Poredi{

   public static void main(String []args){
     int a=3;
     int b=4;
     System.out.println("Rezultat funkcije je:" +funkcija(a,b));
   }

   public static boolean funkcija(int a, int b) {
       while (a>=0 && b<= 100){
         a *= 3;
         b *= 5;
         if (a*a*a <= b*b){
             return false;
         }
       }
       return true;
   }
}
```

Rešenje: Funkcija na kraju izvršavanja programa daje vrednost `false` jedino ako je u nekom izvršavanju `while` petlje ispunjeno $a^3 \leq b^2$.

Neka je n nenegativan ceo broj koji označava koliko puta je izvršena `while` petlja i neka su sa a_n i b_n vrednosti promenljivih a i b nakon n-tog izvršavanja `while` petlje.

Dokazaćemo matematičkom indukcijom po broju n izvršavanja `while` petlje da važi

$$a_n^3 > b_n^2 \text{ za svako } n \geq 1.$$

BI: Početne vrednosti za promenljive a i b su $a_0 = 3$ i $b_0 = 4$. Tokom prve iteracije `while` petlje te vrednosti postaju $a_1 = 3 \cdot 3 = 9$ i $b_1 = 4 \cdot 5 = 20$. Kako je $(3^2)^3 > (4 \cdot 5)^2$, trvđenje je tačno u baznom slučaju.

IH: Pretpostavimo da nakon $n = k$ izvršavanja `while` petlje za promenljive a i b važi $a_k^3 > b_k^2$.

IK: Dokažimo da tvrđenje ostaje tačno i nakon $n = k + 1$ iteracija `while` petlje. Promenljive u $(k+1)$. izvršavanju uzimaju vrednosti $a_{k+1} = a_k \cdot 3$ i $b_{k+1} = b_k \cdot 5$. Upoređujući vrednosti $a_{k+1}^3 = (a_k \cdot 3)^3 = 27a_k^3$ i $b_{k+1}^2 = (b_k \cdot 5)^2 = 25b_k^2$, uz korišćenje induktivne pretpostavke, dolazimo do zaključka:

$$a_{k+1}^3 = 27a_k^3 > 27b_k^2 > 25b_k^2 = b_{k+1}^2.$$