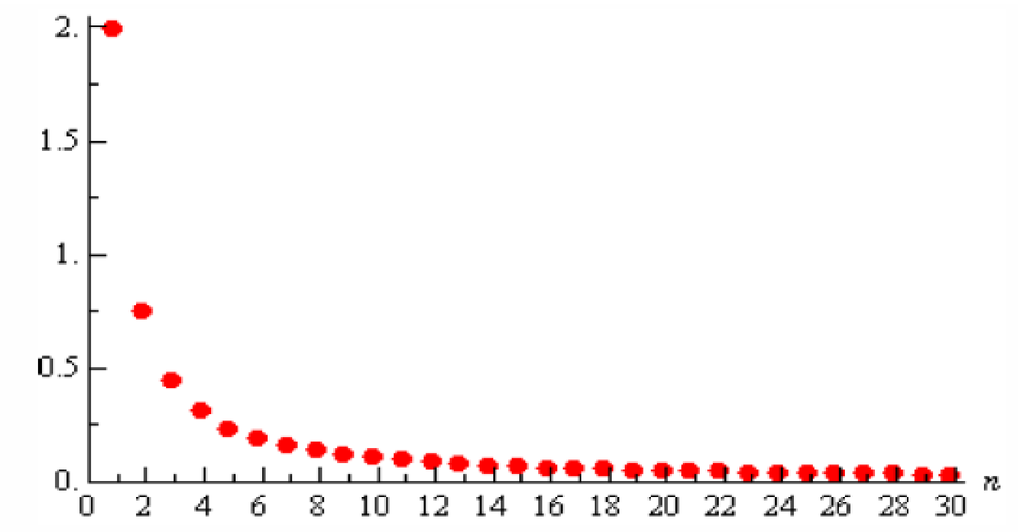
Granična vrednost niza, granična vrednost funkcije, neprekidnost funkcije

Brojni nizovi

Primer 5.1. *Navesti nekoliko članova niza* $\left\{\frac{n+1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *i predstaviti ovaj niz grafički.*

Rešenje: Opšti član ovog niza je $a_n = \frac{n+1}{n^2}$. Prvi član niza, a_1 dobijamo uzimajući da je $n = 1$, drugi izračunavamo uvrštavajući u izraz za opšti član $n = 2$, itd. Tako dobijamo da su članovi niza

$$2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \ldots .$$



Definicija 5.1. *(Realan) Brojni niz je svako preslikavanje (funkcija)* $a : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$.

Dakle, za opšti član a_n niza a važi da je $a_n \equiv a(n)$. Zapis a_n je kraći i koristi se umesto uobičajenog zapisa za vrednost funkcije u tački, $a(n)$.

Primer 5.2. *Napisati nekoliko članova niza* $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right\}_{n=0}^{\infty}$.

Rešenje: Zbog karakterističnog faktora $(-1)^{n+1}$, elementi ovog niza redom naizmenično menjaju predznak. Niz sa takvom osobinom se zove *alternativni niz.* Nekoliko prvih članova datog niza su:

$$a_0 = a(0) = -1, \quad a_1 = a(1) = \frac{1}{2}, \quad a_2 = a(2) = -\frac{1}{4}, \quad a_3 = a(3) = \frac{1}{8}, \quad a_4 = a(4) = -\frac{1}{16}, \quad a_5 = a(5) = \frac{1}{32}, \ldots$$

Definicija 5.2. *Realan brojni niz* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je*

- *monotono rastući ako je za svako* $n \in \mathbb{N}$ *zadovoljeno* $a_n < a_{n+1}$;
- *monotono opadajući ako je za svako* $n \in \mathbb{N}$ *zadovoljeno* $a_n > a_{n+1}$;
- *ograničen odozdo ako postoji konstanta* $M \in \mathbb{R}$ *takva da je za svako* $n \in \mathbb{N}$ *zadovoljeno* $a_n \geq M$; *(konstanta* M *se zove donje ograničenje niza);*
- *ograničen odozgo ako postoji konstanta* $P \in \mathbb{R}$ *takva da je za svako* $n \in \mathbb{N}$ *zadovoljeno* $a_n \leq P$; *(konstanta* P *se zove gornje ograničenje niza);*
- *ograničen ako je ograničen i odozdo, i odozgo.*

Primer 5.3. *Ispitati monotonost i ograničenost nizova:*

a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

b) $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$;

c) $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$;

d) $\{n^2-10n-24\}_{n=1}^{\infty}$;

a) Ovaj niz je monotono rastući, što možemo utvrditi posmatrajući

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0.$$

Niz je i ograničen, jer za sve njegove članove a_n važi $0<a_n<1$.

b) Ovaj niz uzima, naizmenično, vrednosti 1 i (-1). Već na osnovu ponašanja njegova prva tri elementa može se utvrditi da nije monoton. Niz je ograničen; 1 i (-1) su mu, redom, gornje i donje ograničenje.

c) S obzirom da za svaki prirodan broj n važi da je $n^2<(n+1)^2$, ovaj niz je monotono rastući i ograničen odozdo. Donje ograničenje (svakog monotono rastućeg) niza je njegov prvi član, $a_1=a(1)=1$. Gornje ograničenje ne postoji, jer je n^2 veće od svake konstante, za dovoljno veliko n.

d) Ovaj niz nije monoton. Ispitivanje monotonosti ovog niza najjednostavnije je uraditi posmatrajući odgovarajuću ekstenziju - realnu neprekidnu funkciju $f(x)=x^2-10x-24$. Ova kvadratna funkcija ima minimum za $x=5$; za argumente manje od 5 funkcija opada, a za argumente veće od 5 funkcija raste. To važi i za posmatrani niz: on je opadajući za prvih pet članova (-33, -40, -45, -48, -49) , a zatim je rastući.

Ograničen je odozdo: njegovo donje ograničenje je, na primer, $a_5=a(5)=-49$. Niz nije ograničen odozgo.

Granična vrednost niza

Definicija 5.3. *Broj $L \in \mathbb{R}$ je granična vrednost niza $\{a_n\}$, što zapisujemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, akko*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)\ .$$

Specifičnost niza kao funkcije je ta što sve vrednosti (i argumenta i same funkcije) možemo da nabrojimo (navedemo redom). Imajući to na umu, možemo "pročitati" definiciju granične vrednosti niza na sledeći način:

Broj L je granična vrednost niza $\{a_n\}$ ako se u svakoj, proizvoljno maloj, ε-okolini tačke L nalaze skoro svi članovi niza, odnosno - svi nakon člana sa indeksom n_0.

Intuitivno, što je manje odabrano ε, očekujemo da bude veći indeks n_0 nakon kog su svi članovi niza na rastojanju manjem od ε od granične vrednosti L. Značajno je uočiti da je broj n_0 konačan, i jednak je broju elemenata niza koji ostaju van uočene (proizvoljne) ε-okoline granične vrednosti L. Iz ovoga sledi jedan veoma koristan način da "pročitamo" Definiciju 5.3:

Broj L je granična vrednost niza $\{a_n\}$ akko *van* svake ε-okoline broja L postoji *samo konačno mnogo* članova niza $\{a_n\}$.

Definicija 5.4. *Niz je konvergentan akko ima konačnu graničnu vrednost.*

Ukoliko niz ima graničnu vrednost, ona je jedinstvena.

- Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

  Konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrednost i ta granična vrednost je jedina tačka nagomilavanja tog niza.

  Konvergentan niz je ograničen.

- Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, tada važi:

  1. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$;
  2. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;
  3. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, ako je $b \neq 0$ i ako za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $b_n \neq 0$;
  4. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}$, gde je k neparan broj, ili je k paran broj i za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $a_n \geq 0$;
  5. $\lim_{n\to\infty} (a_n)^k = (\lim_{n\to\infty} a_n)^k$, gde je $k \in \mathbf{N}$.

- Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ i postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ sa osobinom da za svako $n \geq n_0$ važi $a_n \leq b_n$, onda sledi $a \leq b$.

- Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$ i postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ sa osobinom da za svako $n \geq n_0$ važi $a_n \leq c_n \leq b_n$, onda sledi $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.

- U zadacima se često koriste sledeće granične vrednosti:

  1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = \begin{cases} 0, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases}$;
  2. $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \\ \text{ne postoji}, & q \leq -1 \end{cases}$;
  3. $\lim_{n\to\infty} n^b q^n = 0$, $|q| < 1$, $b \in \mathbf{R}$;
  4. Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, onda važi $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.
  5. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{n!} = 0$, $a \in \mathbf{R}$;
  6. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$;
  7. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
  8. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$;
  9. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, $a \in \mathbf{R}$.

Aritmetički i geometrijski niz

- Brojni niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ se naziva **aritmetički niz** ako postoji realan broj d sa osobinom da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $a_{n+1} = a_n + d$. Njegov opšti član je oblika

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

  Suma prvih n članova aritmetičkog niza izračunava se po formuli

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\,d, \tag{8.1}$$

  gde je a_1 prvi član, a d razlika dva uzastopna člana.

- Brojni niz $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ se naziva **geometrijski niz** ako postoji realan broj q sa osobinom da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $b_{n+1} = b_n q$. Njegov opšti član je oblika

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

  Suma prvih n članova geometrijskog niza je data sa

$$S_n = \begin{cases} b_1\,\dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ nb_1, & q = 1 \end{cases} \tag{8.2}$$

  gde je b_1 prvi član niza, a q količnik dva uzastopna člana.

Zadaci-nizovi

1. **Odrediti sumu prvih n članova niza**

a) $a_n = n$. **b)** **parnih brojeva.**

c) **neparnih brojeva.** **d)** $b_n = \dfrac{1}{2^n}$.

Rešenje:

a) Suma prvih n članova aritmetičkog niza izračunava se po formuli ($\boxed{8.1}$). U posmatranom slučaju je $a_1 = 1$ i $d = 1$, tako da imamo

$$S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

što je poznata formula za izračunavanje zbira prvih n prirodnih brojeva.

b) Suma prvih n parnih brojeva može se izračunati kao suma aritmetičkog niza čiji je prvi član $a_1 = 2$, a razlika $d = 2$. Koristeći ($\boxed{8.1}$), imamo

$$S_n = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2 + n = n(n+1).$$

c) Za izračunavanje sume prvih n članova niza neparnih brojeva koristićemo ponovo ($\boxed{8.1}$) sa $a_1 = 1$ i $d = 2$. Tada sledi

$$S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2.$$

d) Suma prvih n članova geometrijskog niza izračunava se po formuli (8.2). U posmatranom slučaju je $a_1 = \frac{1}{2}$ i $q = \frac{1}{2}$, tako da sledi

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

2. **Ispitati konvergenciju niza čiji je opšti član**

a) $a_n = \frac{1}{n}$. **b)** $a_n = (-1)^n$. **c)** $a_n = n$.

Rešenje:

a) Posmatrani niz je ograničen, jer postoji $M = 1$ sa osobinom da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $\left|\frac{1}{n}\right| \le M$. Dati niz je monotono opadajući,jer za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $n < n + 1$, tj. $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Znači, niz čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$ je konvergentan.
b) Niz $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ je divergentan jer ima dve tačke nagomilavanja. To su $a_{2k} = 1$ i $a_{2k+1} = -1$.
c) Za svaki pozitivan realan broj M postoji prirodan broj n (npr. $n = [M] + 1$) koji je veći od njega, što znači da niz $\{n\}_{n \in \mathbf{N}}$ nije ograničen, a samim tim nije ni konvergentan. Prema definiciji je

$$\lim_{n \to \infty} n = \infty.$$

3. **Koristeći definiciju granične vrednosti niza, pokazati da je**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3}.$$

Rešenje:

Neka je ε proizvoljan pozitivan realan broj. Treba pokazati da postoji prirodan broj n_0 sa osobinom da za svako $n \geq n_0$ važi $\left|\frac{n}{3n+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{n}{3n+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{3n-3n-1}{3(3n+1)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{9n+3} < \varepsilon.$$

Za svako $n \in \mathbf{N}$ je $9n+3 > 9n$, tj. $\frac{1}{9n+3} < \frac{1}{9n}$. Nejednakost $\frac{1}{9n} < \varepsilon$ će važiti za svako $n \in \mathbf{N}$ koje zadovoljava uslov $9n > \frac{1}{\varepsilon}$, tj. $n > \frac{1}{9\varepsilon}$.
Znači ako za n_0 uzmemo npr. najmanji prirodan broj koji je veći od $\frac{1}{9\varepsilon}$, odnosno $n_0 = [\frac{1}{9\varepsilon}] + 1$, onda za svako $n \geq n_0$ važi $\left|\frac{n}{3n-1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$.

(*Napomena:* Za n_0 se može uzeti bilo koji prirodan broj koji je veći od $\frac{1}{9\varepsilon}$.
Sa $[x]$ se označava **ceo deo od** x.)

4. **Odrediti** **a)** $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+4}{3n^3+5n^2+1}$. **b)** $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+3n+5}{3n^3+5n^2+1}$.

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^7-3n^4+8n^2-10}{6n^6-1}$.

Rešenje:

Graničnu vrednost niza, čiji opšti član ima oblik količnika polinoma stepena k i polinoma stepena m, računaćemo tako što ćemo brojilac i imenilac podeliti sa n^l, gde je $l = max\{k, m\}$, a zatim primeniti osobine konvergentnih nizova i nizova koji divergiraju u plus ili minus beskonačno. Na drugi način zadatak se može rešiti izdvajanjem ispred zagrade, u brojiocu n^k, a u imeniocu n^m.

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2-3n+4}{n^3}}{\frac{3n^3+5n^2+1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}\right)} = 0.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n^3+3n+5}{n^3}}{\frac{3n^3+5n^2+1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{4}{3}.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^7 - 3n^4 + 8n^2 - 10}{6n^6 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7(1 - \frac{3}{n^3} - \frac{8}{n^5} - \frac{10}{n^7})}{n^6(6 - \frac{1}{n^6})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{1 - \frac{3}{n^3} - \frac{8}{n^5} - \frac{10}{n^7}}{6 - \frac{1}{n^6}} \right) = \infty.$$

5. **Odrediti** a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n} - 6n}{3n+1}$. b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^2+n}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

Rešenje:

Ideja primenjena u prethodnom zadatku može se primeniti i u opštijim slučajevima:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n} - 6n)\ /:n}{(3n+1)\ /:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - 6}{3 + \frac{1}{n}} = -2.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6(1+\frac{1}{n^6})}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\right)^2}{n^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^2}{n^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}}}=4.$$

6. **Odrediti** **a)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$.

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-\sqrt[3]{n^3-2}\right)$.

7. **Odrediti** $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n-5^n}$.

Rešenje:

Kako za $q=\frac{3}{5}<1$ geometrijski niz $\{(\frac{3}{5})^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ima graničnu vrednost 0, dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n-5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1\right)}{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right)}=$$

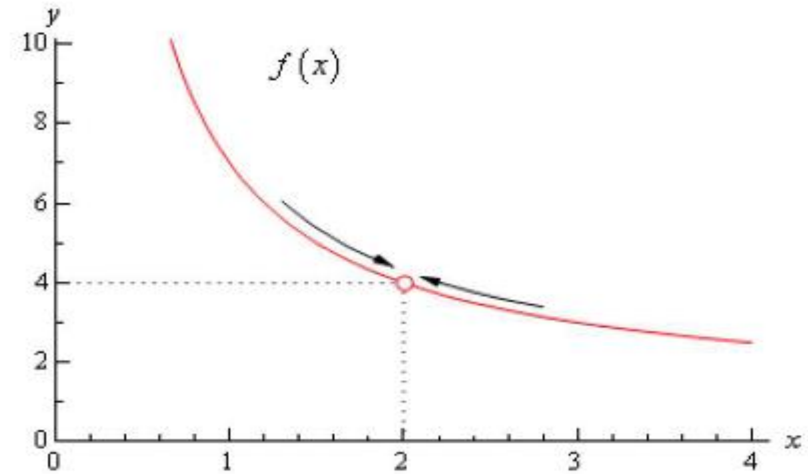
$$=5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}=-5.$$

Granična vrednost funkcije

Primer 1.1.

Odrediti $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 2x}$.

Rešenje:



Slika 1: Grafik funkcije $f(x) = \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x}$ u okolini tačke $x = 2$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.5	3.4	1.5	5.0
2.1	3.857142857	1.9	4.157894737
2.01	3.985074627	1.99	4.015075377
2.001	3.998500750	1.999	4.001500750
2.0001	3.999850007	1.9999	4.000150008
2.00001	3.999985000	1.99999	4.000015000

Na osnovu navedenih vrednosti sa priličnom sigurnošću zaključujemo da je

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x^2-2x}=4,$$

što ćemo izračunati na sledeći način.

Tražena granična vrednost je $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+6)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+6}{x}=4$.

Tačka a je tačka nagomilavanja skupa $D \subseteq \mathbf{R}$ ako se u svakoj ε-okolini tačke a nalazi bar jedan elemenat skupa D, koji je različit od a. Drugim rečima, a je tačka nagomilavanja skupa D ako za svako $\varepsilon>0$ skup $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap D$ sadrži beskonačno mnogo elemenata skupa D.

Neka je $D \subseteq \mathbf{R}$ domen realne funkcije $f(x)$.

Definicija 1.1. *Broj L je granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački a, koja je tačka nagomilavanja skupa D, akko*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D \setminus \{a\})(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)\,.$$

Definicija 1.2. *Broj L_1 je leva granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački a akko*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in (a-\delta, a) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_1| < \varepsilon)\,.$$

Ovo zapisujemo $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$.

Definicija 1.3. *Broj L_2 je desna granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački a, akko*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in (a, a+\delta) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_2| < \varepsilon)\,.$$

Ovo zapisujemo $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$.

- Neka postoji realan broj a takav da domen funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ sadrži interval $(a, +\infty)$. Broj A je **granična vrednost funkcije f u plus beskonačnosti** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $M > a$ (M zavisi od ε), tako da za $x > M$ važi $|f(x) - A| < \varepsilon$.
  U tom slučaju pišemo: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

  Analogno se definiše: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

- Neka je x_0 tačka nagomilavanja domena funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Ako za svako $K > 0$, postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od K), tako da za svako $x \in D$ sa osobinom $0 < |x - x_0| < \delta$, važi $f(x) > K$, onda kažemo da f **teži ka plus beskonačnosti kada $x \to x_0$**.
  U tom slučaju pišemo: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
  Analogno se definiše: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

  Često u zadacima umesto $+\infty$ pišemo ∞.

- Neka je x_0 tačka nagomilavanja zajedničkog domena $D \subseteq \mathbf{R}$ funkcija $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ i $g : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Pretpostavimo da postoje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$. Tada važe jednakosti:

  1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,
  2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$,
  3. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, ako je $B \neq 0$ i za svako $x \in D$ je $g(x) \neq 0$.

  Jednakosti važe i ako se x_0 zameni sa ∞ ili $-\infty$.

Primer 1.2.

Odrediti

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{4}{x-2}$, (b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{4}{x-2}$, (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} arctgx$,

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} arctgx$, (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x$, (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x$.

Rešenje:

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{4}{x-2} = +\infty$, (b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{4}{x-2} = -\infty$,

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$, (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2}$,

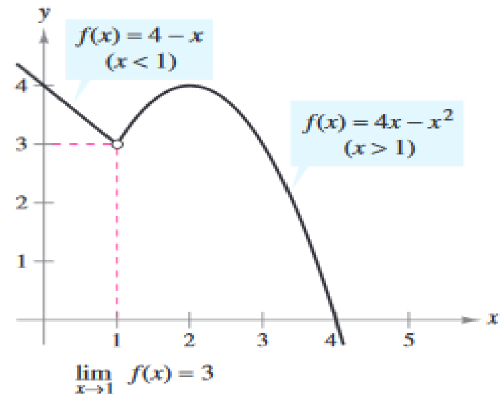
(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$, (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$.

Primer 1.3.

Odrediti graničnu vrednost funkcije *f(x)* u tački *x*=1, definisane sa:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x < 1 \\ 4x - x^2, & x > 1 \end{cases}$$

Rešenje: Domen funkcije je $D = \mathbf{R} \backslash \{1\}$.
Sa slike na kojoj je predstavljen grafik funkcije *f(x)* lako se uočava da je tražena granična vrednost 3.



Važno je uočiti da funkcija ima graničnu vrednost u tački a akko ima i levu i desnu graničnu vrednost u toj tački, i ako su one jednake. Drugim rečima,

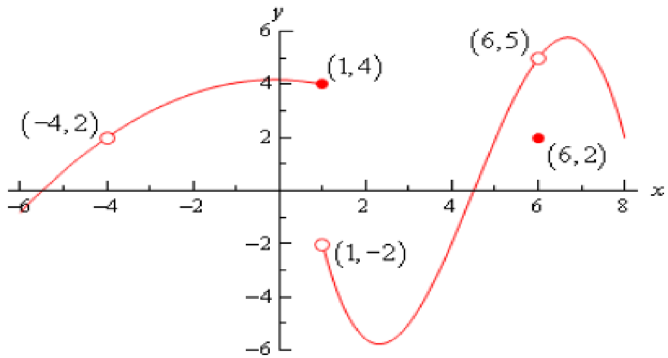
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = L \, .$$

Jednostrane granične vrednosti posmatramo i u situacijama kad funkcija nije definisana i levo i desno od posmatrane tačke. Tako je, na primer $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, a $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ ne postoji, jer je domen funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ skup nenegativnih realnih brojeva ($\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$).

Zaključimo sva navedena razmatranja još jednim ilustrativnim primerom:

Primer 1.4.

Za funkciju *f(x)* predstavljenu na slici



odrediti

$(a)\ f(-4)$	$(b)\ \lim\limits_{x\to-4^-} f(x)$	$(c)\ \lim\limits_{x\to-4^+} f(x)$	$(d)\ \lim\limits_{x\to-4} f(x)$
$(e)\ f(1)$	$(f)\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)$	$(g)\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$	$(h)\ \lim\limits_{x\to1} f(x)$
$(i)\ f(6)$	$(j)\ \lim\limits_{x\to6^-} f(x)$	$(k)\ \lim\limits_{x\to6^+} f(x)$	$(l)\ \lim\limits_{x\to6} f(x)$

.

Rešenje: S obzirom da su svi odgovori direktno čitljivi sa grafika, bez upuštanja u objašnjenja i diskusiju navodimo odgovore na postavljena pitanja:

$(a)\ f(-4)$ ne postoji	$(b)\ \lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = 2$	$(c)\ \lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = 2$	$(d)\ \lim\limits_{x\to-4} f(x) = 2$
$(e)\ f(1) = 4$	$(f)\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 4$	$(g)\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -2$	$(h)\ \lim\limits_{x\to1} f(x)$ ne postoji
$(i)\ f(6) = 2$	$(j)\ \lim\limits_{x\to6^-} f(x) = 5$	$(k)\ \lim\limits_{x\to6^+} f(x) = 5$	$(l)\ \lim\limits_{x\to6} f(x) = 5.$

- Navodimo neke granične vrednosti koje se često koriste:

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ +\infty, & \alpha < 0 \end{cases},$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1,$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,\ \alpha\in\mathbf{R}.$

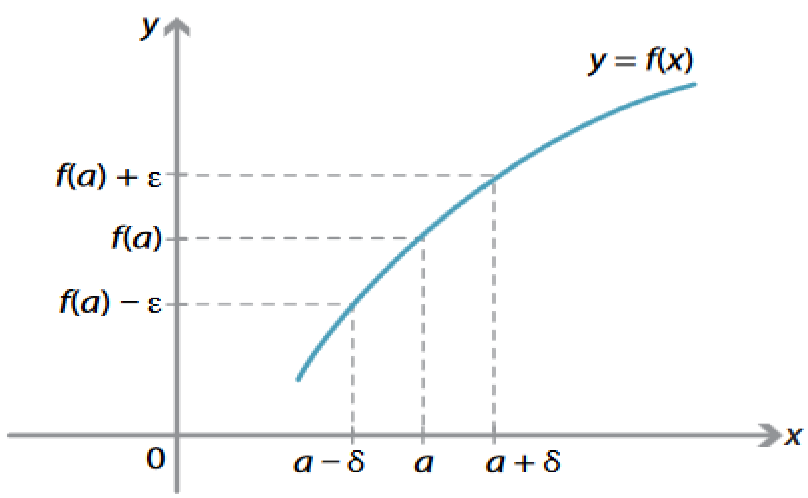
Neprekidnost funkcije

Neformalno rečeno, funkcija $f(x)$ je neprekidna ako se njen grafik može nacrtati bez podizanja olovke sa papira. Sad kad smo sigurni da ideja neprekidnosti, kada je reč o funkcijama, nije drugačija od našeg intuitivnog shvatanja pojma neprekidnosti (recimo, linije), možemo pokušati da ovaj pojam formalno, i precizno, definišemo.

Počećemo sa pojmom *neprekidnosti funkcije u tački.*

Definicija 4.1. *Funkcija $f : D \mapsto \mathbb{R}$ je neprekidna u tački $a \in D$ akko*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in D)\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,.$$



Definicija 4.2. *Funkcija $f : D \mapsto \mathbb{R}$ je neprekidna u tački $a \in D$ akko*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\,.$$

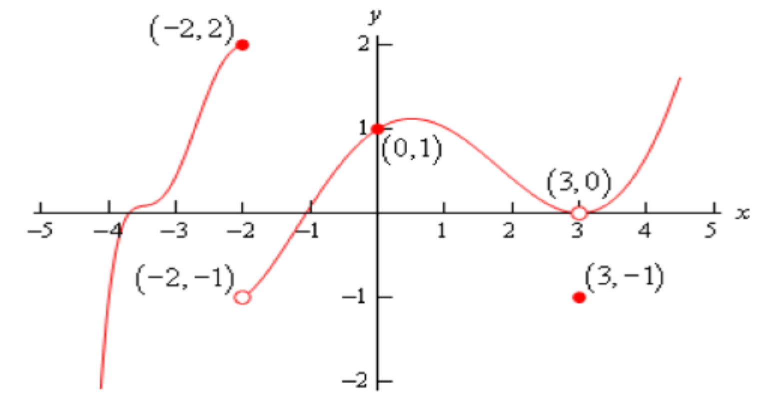
Ova definicija podrazumeva da, za neprekidnu funkciju $f(x)$, $f(a)$ postoji, kao i da postoji granična vrednost funkcije u tački a (to je jasno iz postavljenog uslova jednakosti leve i desne granične vrednosti). Konačno, granična vrednost i vrednost u tački a moraju biti jednake.

Ukoliko funkcija nije neprekidna u nekoj tački, to može biti posledica nekoliko razloga: bilo koje od tri vrednosti koje se posmatraju u Definiciji 4.2 (vrednost funkcije, leva i desna granična vrednost) mogu da ne postoje, ili bilo koja od jednakosti među njima može da ne bude zadovoljena. U vezi sa tim razlikujemo i vrste prekida.

- Ukoliko $\lim_{x\to a} f(x)$ postoji, ali nije jednak sa $f(a)$ (ili $f(a)$ ne postoji), prekid je *otklonjiv*. Funkcija se može dodefinisati, ili redefinisati, i postaće neprekidna.
- Ukoliko $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$, pri čemu obe vrednosti postoje i konačne su, funkcija f u tački a ima *skok*. U ovom slučaju prekid je neotklonjiv. Skok i otklonjivi prekid spadaju u grupu *prekida prve vrste*.
- Ukoliko leva ili desna granična vrednost funkcije u tački a ne postoje, ili nisu konačne, funkcija ima *prekid druge vrste*. (Prekidi druge vrste su neotklonjivi.)

Primer 4.1.

Ispitati neprekidnost funkcije *f(x)* prikazane na slici



u tačkama (a) x= -2, (b) x=0, (c) x=3.

Rešenje:

(a) Sa grafika čitamo da je $f(-2) = 2$, kao i da je

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -1 \neq 2 = \lim_{x \to -2^-} f(x)\ .$$

Odatle zaključujemo da data funkcija ima *skok* u tački $x = -2$.

(b) Kako je

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1 ,$$

data funkcija je neprekidna u tački $x = 0$.

(c) Vidimo da je $f(3) = -1$, i da je

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 0 \neq 3 .$$

Zaključujemo da posmatrana funkcija u tački $x = 3$ ima *otklonjivi prekid*. Da bi postala neprekidna treba je redefinisati, odnosno treba definisati $f(3) = 0$.

Neprekidne funkcije i njihove osobine

Funkcija je neprekidna nad skupom ukoliko je neprekidna u svakoj tački posmatranog skupa. Ukoliko je funkcija neprekidna nad svojim domenom, kažemo da je funkcija neprekidna.

Svaka elementarna funkcija je neprekidna.

Neke važne osobine neprekidnih funkcija su:

- Zbir, razlika, proizvod i količnik neprekidnih funkcija su neprekidne funkcije.
- Inverzna funkcija neprekidne funkcije je neprekidna.
- Kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.

Teorema 4.1. *Pretpostvimo da je, za funkcije f i g, $f(g(x))$ definisano na intervalu koji sadrži tačku a. Ako za g važi da je $\lim_{x\to a} g(x) = L$ i ako je f neprekidna u tački L, onda je*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(L)\,.$$

Ovo obično "čitamo" kao mogućnost da limes i neprekidna funkcija zamene redosled. Ovu osobinu smo već koristili kod izračunavanja graničnih vrednosti.

Primer 4.2. *Izračunati* $\lim_{x\to 0} e^{\sin x}$.

Rešenje: S obzirom da je eksponencijalna funkcija $f(x) = e^x$ neprekidna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$, a da je $\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$ (i ovo je takođe posledica neprekidnosti funkcije $\sin x$), na osnovu prethodnog tvrđenja je

$$\lim_{x\to 0} e^{\sin x} = e^{\lim_{x\to 0} \sin x} = e^0 = 1\,.$$

- Funkcija f koja je neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ dostiže svoju najmanju i svoju najveću vrednost nad tim intervalom.

- Funkcija koja je neprekidna nad zatvorenim intervalom je nad tim intervalom i ograničena.

- Funkcija koja je neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ uzima nad tim intervalom sve vrednosti između $f(a)$ i $f(b)$ (uz pretpostavku da važi $f(a) \neq f(b)$).

- Ako je funkcija f neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$, i ako je $f(a)\cdot f(b) < 0$, onda postoji bar jedna nula funkcije f na intervalu $[a,b]$.

Zadaci-granična vrednost i neprekidnost

1. **Pokazati po definiciji da je**

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = 5.$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{x^2-2x} = -2.$

Rešenje:

a) Primetimo da je $x_0 = 2$ tačka nagomilavanja domena funkcije $\frac{x^2+x-6}{x-2}$. Po definiciji granične vrednosti potrebno je, za unapred zadato $\varepsilon > 0$, pronaći $\delta > 0$ tako da za svako $x \in \mathbf{R}\backslash\{2\}$ koje zadovoljava uslov $0 < |x-2| < \delta$, važi $\left|5 - \frac{x^2+x-6}{x-2}\right| < \varepsilon$.

Kako je

$$\left|5 - \frac{x^2+x-6}{x-2}\right| = \left|\frac{5x-10-x^2-x+6}{x-2}\right| = \left|-\frac{(x-2)^2}{x-2}\right| =$$

$$= |x-2|,$$

za dato ε, biramo $\delta = \varepsilon$, pa iz $|x-2| < \delta$ sledi

$$\left|5 - \frac{x^2+x-6}{x-2}\right| < \varepsilon.$$

b) Primetimo da, bez ograničenja opštosti, uvek možemo smatrati da je $\varepsilon < 1$. Neka je, dakle, dato $0 < \varepsilon < 1$. Tada, birajući $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, dobijamo

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left|-2 - \frac{4-x^2}{x^2-2x}\right| = \left|2 - \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}\right| =$$

$$= \left|\frac{x-2}{x}\right| = \frac{|x-2|}{x} < \frac{|x-2|}{1} < \delta < \varepsilon,$$

jer, za $\varepsilon < 1$ i $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ iz $0 < |x-2| < \delta$ sledi $x > \frac{3}{2} > 1$.

2. **Odrediti graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2+2x-1}{2x^2-x+1}$. **b)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$. **c)** $\lim\limits_{x\to 0} 2^x$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \arccos x$.

Rešenje:

Ako je funkcija f definisana u okolini tačke x_0 i neprekidna u x_0, onda važi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Kako su sve elementarne funkcije neprekidne, ovu činjenicu ćemo koristiti u narednim zadacima.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2-x+1} = \dfrac{3\cdot 0+2\cdot 0-1}{2\cdot 0-0+1} = -1.$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi}.$

c) $\lim\limits_{x\to 0} 2^x = 2^0 = 1.$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \arccos x = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}.$

3. Odrediti graničnu vrednost

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+3x^2+2x+3}{5x^4+2x^2+x+3}.$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^4+2x^2+x+5}{5x^3+x^2+x+3}.$

4. Izračunati graničnu vrednost

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-4x}{x^2-x-12}.$ b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-13x-10}{4x^2-14x-30}.$

5. Izračunati graničnu vrednost

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x-3}.$

6. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$.   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{bx}{\sin ax}$, $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$.

7. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0} (1+4x)^{\frac{3}{x}}$.   b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3x^2+x-1}{x-1}\right)^{\frac{2x+1}{3x^2}}$.

8. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\sqrt{x})$.   b) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{x-4}$.   c) $\lim\limits_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{x}}$.

d) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{1}{x-4}$.   e) $\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}}$.   f) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}}{1-x^2}$.

9. Odrediti skup $A \subseteq \mathbf{R}$ na kome je funkcija f neprekidna, ako je

a) $f(x) = x^5 + 3x$. **b)** $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$. **c)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$.

d) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. **e)** $f(x) = |x|$.

Rešenje:

a) Pošto je funkcija f polinom, ona je definisana i neprekidna nad $\mathbf{R}$, dakle $A = \mathbf{R}$.

b) Funkcija f nije definisana u $x = 1$. Pošto je f racionalna funkcija, ona je neprekidna nad definicionim skupom, dakle $A = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

c) Ova funkcija je neprekidna za svako x za koje važi $2 - x > 0$, tj. $x < 2$. Dakle $A = (-\infty, 2)$.

d) f je racionalna funkcija definisana nad $\mathbf{R}$, dakle $A = \mathbf{R}$.

e) Kako je

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

jedina tačka u kojoj je moguć prekid je $x = 0$. Ispitajmo neprekidnost u $x = 0$. Pošto je

$$\lim_{x \to 0+} |x| = \lim_{x \to 0+} x = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 0-} |x| = \lim_{x \to 0-} (-x) = 0,$$

kao i $|0| = 0$, sledi da je funkcija $|x|$ neprekidna u $x = 0$, odnosno za svako $x \in \mathbf{R}$. Tako je $A = \mathbf{R}$.

10. **Odrediti parametre A i B tako da funkcija f bude neprekidna u svim tačkama definisanosti, ako je**

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} Ax - 1, & x \leq 1 \\ 3x^2 + 1, & x > 1. \end{cases}$$

Materijal se, u najvećoj meri, zasniva na sledećim izvorima:

- Matematička analiza 1, N. Sladoje, http://imft.ftn.uns.ac.rs/math/uploads/Courses/skripta
- Zbirka zadataka iz Matematike 1, T. Grbić i drugi, Novi Sad, 2007 (biblioteka FTN)
- Matematička analiza 1, I deo, I. Kovačevic, N. Ralević, Novi Sad, 2007 (biblioteka FTN)
- Matematika 1, I deo, J. Nikić, L. Čomić, Novi Sad, 2002 (biblioteka FTN)