METRIČKI PROSTORI

Ilija Kovačević, Slavica Medić

21. februar 2023.

Definicija

Metrika *ili* **rastojanje** *na nepraznom skupu* X *je svako preslikavanje* $d : X^2 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *za koje važi*

(M_1**)** $d(x, y) \geq 0$,
(M_2**)** $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(M_3**)** $d(x, y) = d(y, x)$,
(M_4**)** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(nejednakost trougla)*

Metrički prostor *je uređen par* (X, d) *skupa* X *i metrike* d *na* X.

Za skup X *kažemo da je* **nosač metričkog prostora** (X, d).

- Realan broj $d(x, y)$ je **rastojanje elemenata** (tačaka) $x, y \in X$.

- Metrički prostor (X, d) ćemo nekada kraće označavati istim slovom kao i njegov nosač X.

- U metričkom prostoru (X, d) važi tzv. **nejednakost mnogougla**:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Primer

$(\mathbb{R}^n, d)$ *je metrički prostor, gde je metrika* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definisana sa*

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

za $x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

• *Za metriku* d *kažemo da je* **euklidska**, *a prostor* $(\mathbb{R}^n, d)$, *koji ćemo kraće obeležavati sa* $\mathbb{R}^n$, $n-$**dimenzionalni euklidski prostor**.

• *Metrika* d *je uopštenje metrika iz* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ *i* $\mathbb{R}^3$.

Primer

Ako je $X \neq \emptyset$ proizvoljan skup, tada je preslikavanje $d : X^2 \to \mathbb{R}$ definisano sa

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

metrika.

- *Za (X, d) kažemo da je* **diskretan metrički prostor**.

Potprostor metričkog prostora

Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $\emptyset \neq Y \subset X$. Sa d_Y obeležimo restrikciju preslikavanja d nad skupom Y, tj. neka je

$$d_Y(x, y) = d(x, y),\ x, y \in Y.$$

Očigledno d_Y je metrika na skupu Y, tj. (Y, d_Y) je metrički prostor. Kažemo da je (Y, d_Y) **potprostor prostora** (X, d).

Metriku d_Y najčešće označavamo takođe sa d, pa je reč o potprostoru (Y, d) prostora (X, d).

Ograničenost

Definicija

Za neprazan skup $A \subset X$ *metričkog prostora* (X, d) *kažemo da je* **ograničen** *ako je skup* $\{d(a, b) : a, b \in A\}$ *ograničen u skupu* $\mathbb{R}$.

Prazan skup je ograničen skup (po definiciji).

Definicija

Ako je (X, d) *metrički prostor i ako je neprazan skup* $A \subset X$ *ograničen, tada postoji realan broj* $d(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$ *koji zovemo* **dijametar skupa** A.

Po definiciji uzimamo da je $d(\emptyset) = 0$.

Definicija

Za preslikavanje $f : D \to X$ *skupa* D *u metrički prostor* X *kažemo da je* **ograničeno nad skupom** $A \subset D$ *ako je* $f(A) \subset X$ *ograničen skup u* X.

Ako je $A = D$, *tada je preslikavanje* f **ograničeno**.

Ograničeno preslikavanje

$$f : N_1 \to X,$$

gde je N_1 *proizvoljan beskonačan podskup skupa prirodnih brojeva je* **ograničen niz**.

Definicija

Neka je $(Y, \preceq)$ totalno uređen skup. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je **ograničena sa gornje (donje) strane** *nad nepraznim podskupom A od X ako je skup njenih vrednosti $f(A)$ ograničen sa gornje (donje) strane u odnosu na relaciju $\preceq$, tj. ako postoji $\mu \in \mathbb{R}$ tako da za sve $x \in X$ važi da je $f(x) \preceq \mu$ $(\mu \preceq f(x))$.*

Reći ćemo da je funkcija f ograničena sa gornje (donje) strane sa μ, a broj μ zvaćemo **gornjim (donjim) ograničenjem** *ili* **gornjom (donjom) granicom funkcije** f.

Funkcija f je **ograničena** *ako je ograničena i sa gornje i sa donje strane.*
Potreban i dovoljan uslov da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ ograničena, je da postoji $\nu \in \mathbb{R}^+$, tako da za svako $x \in X$ važi $|f(x)| \leq \nu$.

Definicija

Neka je (X, d) *metrički prostor,* $a \in X$ *i* $r \in \mathbb{R}^+$. *Za skup*

$$L(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

kažemo da je **otvorena lopta** *u metričkom prostoru* (X, d) *sa centrom u tački* a *poluprečnika* r.

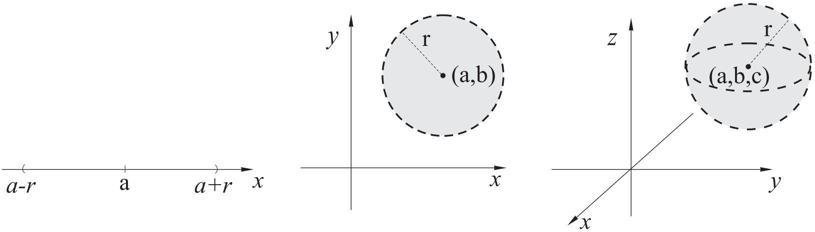
- Kako je $d(a, a) = 0 < r$, jasno je da otvorena lopta $L(a, r)$ sadrži svoj centar.

- Ako je $r_1 \leq r_2$, očigledno je $L(a, r_1) \subset L(a, r_2)$.

a) $\mathbb{R}: \quad L(a, r) = (a - r, a + r),$

b) $\mathbb{R}^2: \quad L((a, b), r) = \{(x, y) : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r\},$

c) $\mathbb{R}^3: \quad L((a, b, c), r) = \{(x, y, z) : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < r\}.$



a) b) c)

Tvrđenje

Ako je $L(a, r)$ otvorena lopta u metričkom prostoru (X, d), tada za svaku tačku $b \in L(a, r)$, postoji $s \in \mathbb{R}^+$ tako da je $L(b, s) \subset L(a, r)$.

Dokaz. Kako $b \in L(a, r)$, to je $d(a, b) < r$, pa možemo uzeti da je

$$s = r - d(a, b) > 0.$$

Odatle sledi da je za svaku tačku $x \in L(b, s)$

$$d(a, x) \leq d(a, b) + d(b, x) < r,$$

što dokazuje da je

$$L(b, s) \subset L(a, r).$$

□

Definicija

Za neprazan skup $U \subset X$ kažemo da je **otvoren** *u metričkom prostoru (X, d) ako*

$$(\forall x \in U)(\exists r \in \mathbb{R}^+)\ L(x, r) \subset U.$$

Uzimamo da je $\emptyset$ po definiciji otvoren.

- Otvorena lopta jeste otvoren skup u metričkom prostoru.
- Za neprazan skup $U \subset X$ koji je otvoren u metričkom prostoru (X, d) za svaku tačku $x \in U$, postoji $r_x \in \mathbb{R}^+$, tako da je $x \in L(x, r_x) \subset U$, pa je

$$U = \bigcup \{L(x, r_x) : x \in U\},$$

tj. sledi da je svaki neprazan otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) unija neke familije otvorenih lopti iz (X, d).

Familiju τ svih otvorenih skupova metričkog prostora (X, d) zovemo topološka struktura ili **topologija metričkog prostora** (X, d).

- Jasno je da je $\emptyset \in \tau$ i da je $X \in \tau$.
- Unija svake familije elemenata iz τ je ponovo elemenat iz τ.
- Presek konačno mnogo elemenata iz τ je elemenat iz τ.

Definicija

Za podskup A metričkog prostora X kažemo da je **zatvoren** *ako je $C_X(A) = X \setminus A$ otvoren skup.*

Očigledno je da su $\emptyset$ i skup X i zatvoreni skupovi.

Definicija

Neka je X dati metrički prostor i a tačka u X.
Za skup $V \subset X$ kažemo da je **okolina tačke** *a u metričkom prostoru X, ako postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tako da $L(a, \varepsilon) \subset V$.*

Ako je V otvoren skup kažemo da je V **otvorena okolina tačke** *a.*

*Otvorenu loptu $L(a, \varepsilon)$ zovemo $\varepsilon-$***okolina** *tačke a.*

ε - pozitivan, proizvoljno mali, unapred dat!

• Okolina tačke a u prostoru X je neki podskup od X koji sadrži ne samo tačku a već i neku otvorenu loptu sa centrom u tački a.

• Skup X okolina svake svoje tačke u prostoru X.

• *Neprazan skup $U \subset X$ je otvoren ako i samo ako je U okolina svake svoje tačke.*

• Za proizvoljnu tačku a u prostoru (X, d) familiju svih okolina tačke a u X nazivamo **sistem okolina tačke** a u prostoru X, u oznaci $\mathcal{V}(a)$.

Tvrđenje

Ako je (X, d) metrički prostor, za svake dve različite tačke a i b, postoje disjunktne otvorene okoline $L(a, \varepsilon)$ i $L(b, \varepsilon)$, tj. svake dve različite tačke mogu se odvojiti disjunktnim otvorenim okolinama.

Dokaz. Kako je $a \neq b$, to možemo uzeti da je $\varepsilon = \frac{1}{2}d(a, b) > 0$. Dokažimo da je $L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon) = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj.

$$L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon) \neq \emptyset,$$

odnosno da postoji

$$z \in L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon).$$

Tada $z \in L(a, \varepsilon)$, tj. $d(a, z) < \varepsilon$ i $z \in L(b, \varepsilon)$, tj. $d(b, z) < \varepsilon$, pa je

$$0 < d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(a, b),$$

što je kontradikcija, jer je $d(a, b) > 0$. $\square$

Napomena

Ako je U okolina tačke a, tada postoji $n \in \mathbb{N}$ *tako da važi* $L(a, \frac{1}{n}) \subset U$.

Zaista, ako je U okolina tačke a, tada postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *tako da je*

$$a \in L(a, \varepsilon) \subset U.$$

No kako postoji $n \in \mathbb{N}$, *tako da je*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

to je

$$L\left(a, \frac{1}{n}\right) \subset L(a, \varepsilon) \subset U.$$

Definicija

Neka je A podskup metričkog prostora X. Za tačku $a \in X$ kažemo da je **unutrašnja tačka** *skupa A, ako postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tako da je $L(a, \varepsilon) \subset A$.*

Skup A° svih unutrašnjih tačaka zovemo **unutrašnjost skupa** *A.*

Važe tvrđenja:

- $\emptyset^\circ = \emptyset$, $X^\circ = X$
- *Skup A° je najveći otvoren skup sadržan u A.*
- *Skup A je otvoren ako i samo ako je $A^\circ = A$.*

Definicija

Za tačku $a \in X$ kažemo da je **spoljašnja tačka** *podskupa A metričkog prostora X ako postoji okolina tačke a koja ne sadrži nijednu tačku skupa A.*

Skup svih spoljašnjih tačaka zovemo **spoljašnjost skupa** *A.*

Očigledno važi tvrđenje

- Ako je a spoljašnja tačka skupa A, tada je a unutrašnja tačka skupa $X \setminus A$. Dakle, spoljašnjost skupa A je skup $(X \setminus A)^{\circ}$.

Definicija

Za tačku $a \in X$ kažemo da je **rubna tačka** *skupa $A \subset X$ ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(L(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge L(a,\varepsilon) \cap C_X(A) \neq \emptyset)$$

(*svaka $\varepsilon-$okolina tačke a ima neprazan presek i sa skupom A i sa njegovim komplementom*).

Skup A^* svih rubnih tačaka skupa A nazivamo **rubom skupa** *A.*

Važe tvrđenja:

- $A^* = (X \setminus A)^*$
- $X = A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ \cup A^*$

Definicija

Tačka $a \in X$ *je* **adherentna tačka** *skupa* $A \subset X$ *ako svaka* $\varepsilon-$*okolina tačke* a *ima neprazan presek sa skupom* A, *tj.*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\ L(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Skup $\overline{A}$ *svih adherentnih tačaka zovemo* **adherencija** *ili* **zatvorenje skupa** A.

Važe tvrđenja:

- $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X} = X$
- *Skup* $\overline{A}$ *je najmanji zatvoren skup koji sadrži skup* A.
- *Skup* A *je zatvoren ako i samo ako je* $A = \overline{A}$.
- $A^* = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

Definicija

Za tačku $a \in X$ kažemo da je **tačka nagomilavanja** *skupa $A \subset X$ ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\ L(a, \varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

(*svaka $\varepsilon-$okolina tačke a ima neprazan presek sa skupom $A \setminus \{a\}$*).

• Skup svih tačaka nagomilavanja skupa A obeležavamo sa A'.

• Svaka tačka nagomilavanja skupa A je adherentna tačka datog skupa, tj. važi da je $A' \subset \overline{A}$.

• Svaka tačka skupa ne mora biti tačka nagomilavanja datog skupa, pa odatle sledi da svaka adherentna tačka ne mora da bude i tačka nagomilavanja datog skupa. Na primer, ako je $A = (0, 1) \cup \{3, 4\}$, tada je $A' = [0, 1]$, $\overline{A} = [0, 1] \cup \{3, 4\}$. Dakle, $3 \in \overline{A}$, ali $3 \notin A'$.

• Očigledno važi da je $\overline{A} = A \cup A'$.

Definicija

Za tačku $a \in A$ *kažemo da je* **izolovana tačka** *skupa* $A \subset X$ *ako*

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\ L(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$$

(*postoji* $\varepsilon-$*okolina tačke a koja sadrži samo tačku a iz skupa* A).

Primer

Za skup $A = (1, 2] \cup \{3\}$ *je*

$A^\circ = (1, 2)$,

$\overline{A} = [1, 2] \cup \{3\}$,

$A' = [1, 2]$,

$A^* = \{1, 2, 3\}$.

Tačka 3 je izolovana tačka skupa A.

Za skup $B = \{1, 2, 3\}$ *je*

$B^\circ = \emptyset$,

$\overline{B} = B = B^*$,

$B' = \emptyset$.

Sve tačke skupa B su izolovane tačke.