Вежбе 11

-Ојлерови графови-

Граф G је Ојлеров $\iff$ $\exists$ затворена стаза W таква да је $E(W)=E(G)$

Ојлерова контура (Ојлерова тура) = затворена стаза која садржи све гране графа G

Граф G је полуојлеров $\iff$ $\exists$ стаза W таква да је $E(W)=E(G)$ ← Ојлеров пут

Јасно је да је сваки Ојлеров граф и полуојлеров. Зато ћемо под полуојлеровим графовима подразумевати само графове који садрже стазу на којој се налазе све гране графа, али није могуће вратити се на крају у почетни чвор.

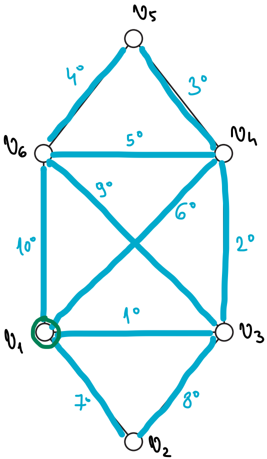
Директно из дефиниције добијамо да сваки Ојлеров граф мора бити ПОВЕЗАН.

Т: Повезан граф је Ојлеров АККО су сви чворови парног степена.

Т: Повезан граф је полуојлеров АККО су највише два чвора непарног степена.

ТАЧНО ДВА

1. Који од графова на слици су Ојлерови, а који полуојлерови?

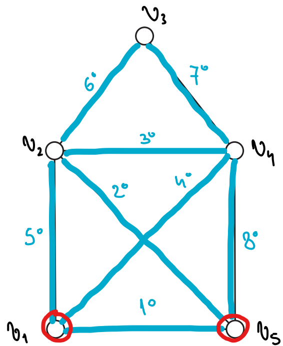


Сви чворови су парног степена

⇒ Ојлеров граф

Ојлерова контура:

$v_1 v_3 v_4 v_5 v_6 v_4 v_1 v_2 v_3 v_6 v_1$



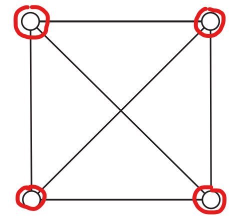
2 чвора степена 3

⇒ полуојлеров граф

Ојлеров пут

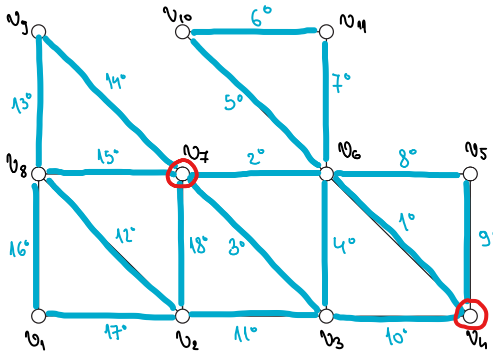
$v_1 v_5 v_2 v_4 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$

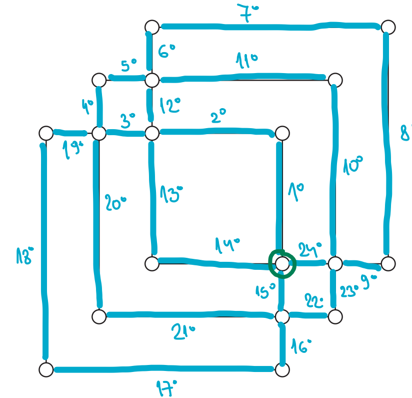
Почињемо у једном непарном чвору, а завршавамо у другом



Сва 4 чвора су степена 3

⇒ Граф није ни Ојлеров, ни полуојлеров





Чворови v_4 и v_7 имају непаран степен

$\Rightarrow$ полуојлеров граф

Нека су прве 4 гране на Ојлеровом путу

v_4v_6, v_6v_7, v_7v_3 и v_3v_6

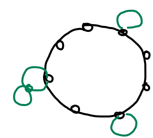
Сада за 5. грану не можемо бирати грану v_6v_5.

Бирамо грану v_6v_{10}. Даље водимо рачуна да мост у подграфу који чине преостале гране узимамо само ако је то једини избор.

Сви чворови су парног степена

$\Rightarrow$ Ојлеров граф

Флеријев алгоритам



2. За које n су следећи графови Ојлерови (полуојлерови)

а) комплетан граф K_n, $n \geq 3$

K_n је $(n-1)$-регуларан граф

$\forall v \in V(K_n) \quad d(v) = n-1$

- n непарно $\Rightarrow$ $n-1$ парно

$\Rightarrow$ Ојлеров граф

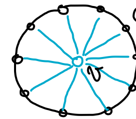
- n парно $\Rightarrow$ $n-1$ непарно

Граф има $n \geq 4$ чворова непарног степена

$\Rightarrow$ Граф није ни Ојлеров, ни полуојлеров

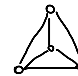
* K_2 је једини полуојлеров комплетан граф

б) точак W_n, $n \geq 4$



C_{n-1}

Најмањи точак



$W_4 \cong K_4$

$V(W_n) = V(C_{n-1}) \cup \{v\}$

$E(W_n) = E(C_{n-1}) \cup \{uv \mid u \in V(C_{n-1})\}$

Сви чворови са контуре имају степен 3

$\Rightarrow$ Точак није Ојлеров граф

Увек имамо бар 3 чворова степена 3, па точак није ни полуојлеров.

в) комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$ $(m, n \geq 1)$? (домаћи)

3. Да ли постоји регуларан Ојлеров граф са парним бројем чворова и непарним бројем грана?

ПОСТОЈИ → ПРИМЕР

НЕ ПОСТОЈИ → ДОКАЗ

Претпоставимо да је G граф који испуњава тражене услове

регуларан: $d(v)=r, \forall v\in V$

Ојлеров: $d(v)=r=2k$

e - број грана

паран број чворова: $|V|=2n$

Основна теорема теорије графова:

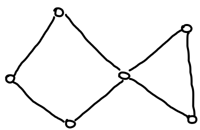
$$2e=\sum_{v\in V} d(v)=\sum_{v\in V} 2k=2n\cdot 2k=4kn$$

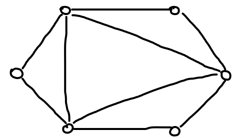
$e=2kn$ паран број $\lightning$ (Претпоставили смо да је број грана непаран)

$\Rightarrow$ Не постоји граф који задовољава све услове задатка.

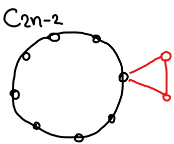
4. Да ли постоји Ојлеров граф са парним бројем чворова и непарним бројем грана?

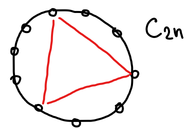
Дајемо пример 2 различита графа са 6 чворова који испуњавају услове.





Примери оваквих графова са уопштеним бројем чворова $2n$ би били:





5. Ако стабло T има бар један чвор степена 2 тада његов комплемент $\overline{T}$ није Ојлеров.

Разликујемо 2 случаја

1° n парно

Нека је u чвор степена 2 стабла T, $d_T(u)=2$

Сада је $d_{\overline{T}}(u) = n-1-d_T(u) = n-1-2 = n-3$ непарно

$\overline{T}$ има чвор непарног степена $\Rightarrow$ $\overline{T}$ није Ојлеров

2° n непарно

T је стабло $\Rightarrow$ T има бар 2 висећа чвора v и w

Сада је $d_{\overline{T}}(v) = n-1-d_T(v) = n-1-1 = n-2$ непарно

У овом случају имамо бар 2 чвора непарног степена у $\overline{T}$, па $\overline{T}$ није Ојлеров

-Хамилтонови графови-

Граф G је **Хамилтонов** $\iff \exists$ контура C таква да је $V(C)=V(G)$

Хамилтонова контура = покривајућа контура графа

Граф G је **полухамилтонов** $\iff \exists$ пут P такав да је $V(P)=V(G)$ $\leftarrow$ Хамилтонов пут

Очигледно је сваки Хамилтонов граф и полухамилтонов (избришемо једну грану са контуре)

Отворен проблем: проналажење потребног и довољног услова да је граф Хамилтонов

Потребни услови:

Тривијални услови да граф буде Хамилтонов: G је повезан, $\delta(G)\geq 2$

T: Ако је G Хамилтонов граф, тада за сваки скуп $S\neq\emptyset$, $S\subseteq V(G)$ важи $\omega(G-S)\leq|S|$

(полухамилтонов: $\omega(G-S)\leq|S|+1$)

Довољни услови:

T: (ОРЕ) Ако је у графу G са n чворова $(n\geq 3)$ испуњено да за свака 2 несуседна чвора u и v важи $d(u)+d(v)\geq n$, тада је G Хамилтонов граф. (полухамилтонов: $d(u)+d(v)\geq n-1$)

T: (ДИРАК) Ако је у графу G са n чворова $(n\geq 3)$ испуњено $d(v)\geq\frac{n}{2}$, $\forall v\in V$, онда је G Хамилтонов.

(полухамилтонов: $d(v)\geq\frac{n-1}{2}$)

Рецепт

Јесте Хамилтонов

1° Пронаћемо тражену Хамилтонову контуру

2° Оре / Дирак

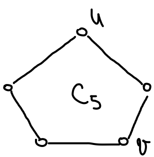
Није Хамилтонов

1° Свођењем на контрадикцију

2° Избацивање чворова (контрапозиција потребног услова)

Орева и Диракова теорема су довољни услови, али нису и потребни услови.

Граф C_5 је Хамилтонов граф.



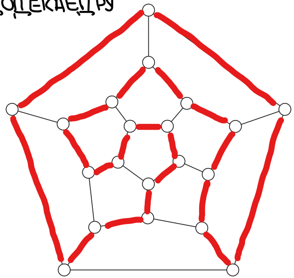
Чворови u и v су несуседни чворове за које важи

$$d(u)+d(v) = 2+2 = 4 < 5 = |V(C_5)|$$

Видимо да постоје графови који су Хамилтонови, за које не важи Орев или Дираков услов.

1. Који од графова на слици су Хамилтонови, а који полухамилтонови?

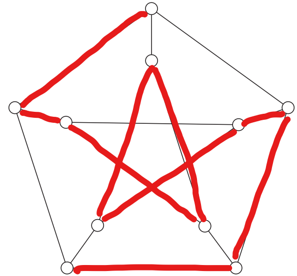
Граф који одговара додекаедру



Хамилтонов граф

На слици је дат пример једне Хамилтонове контуре

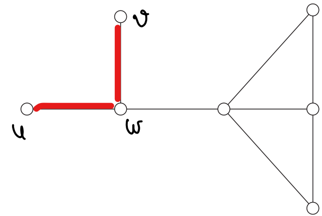
Петерсенов граф



Петерсенов граф није Хамилтонов !

(За доказ погледати додатну литературу)

Јесте полухамилтонов



Чворови u и v су степена 1

⇒ Сигурно није Хамилтонов

Због грана uw и vw које би морале бити на Хамилтоновом путу, у чвору w смо већ искористили 2 гране, па граф није ни полухамилтонов

Игра на додекаедру „Пут око света“

2. Доказати да бипартитан граф чије су класе различите кардиналности није Хамилтонов.

$G(X,Y)$ бипартитан граф, $|X| \neq |Y|$

Претпоставимо да граф има Хамилтонову контуру $C = v_1 v_2 v_3 \dots v_n v_1$

Нека је б.у.о. $v_1 \in X$. Чвор v_2 је сусед чвора v_1 у бипартитном графу, па $v_2 \in Y$.

Сада је $v_3 \in X, v_4 \in Y, \dots, v_n \in Y$ ($v_1 \in X$ је сусед чвора v_n)

Добијамо да је $|X| = |Y|$ ↯ (услов $|X| \neq |Y|$)

$\Rightarrow G(X,Y), |X| \neq |Y|$ не садржи Хамилтонову контуру

II начин:

$|X| \neq |Y| \Rightarrow |X| < |Y|$ или $|X| > |Y|$

Нека је, б.у.о., $|X| < |Y|$.

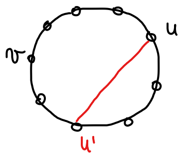
Брисањем свих чворова класе X, добијамо граф са $|Y|$ изолованих чворова. Избрисали смо $|X|$ чворова, а добили граф са $|Y|$ компоненти повезаности. Како је $|Y| = \omega(G-X) > |X|$, закључујемо да граф није Хамилтонов.

3. Два несуседна чвора графа G су степена 3, док су сви остали чворови степена највише 2. Доказати да G није Хамилтонов граф.

Нека су u и v несуседни чворови степена 3.

Претпоставимо да је C Хамилтонова контура графа G.

$\Rightarrow$ На контури C су сви чворови графа G, укључујући чворове u и v.



$d(u)=3 \Rightarrow \exists\, u' \in V(C)$, $u' \neq v$ који је сусед чвора u, тј. $uu' \in E(G)$

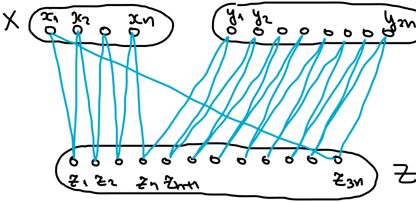
Посматрајмо сада чвор u'

$d(u') \geq 3$ ↯ (сви чворови сем u и v су степена ≤ 2)

$\Rightarrow$ G није Хамилтонов граф

4. Доказати да је за $n \geq 1$ граф $K_{n,2n,3n}$ Хамилтонов, док $K_{n,2n,3n+1}$ није Хамилтонов.

комплетан 3-партитан граф $K_{n,2n,3n}$



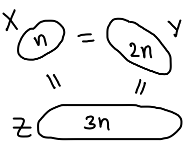
Хамилтонова контура:

$x_1 z_1 x_2 z_2 x_3 z_3 \dots x_n z_n y_1 z_{n+1} y_2 z_{n+2} y_3 z_{n+3} \dots y_{2n} z_{3n} x_1$

II начин:

$|V(K_{n,2n,3n})| = n+2n+3n = 6n$

$$d(v) = \begin{cases} 2n+3n, & v \in X \\ n+3n, & v \in Y \\ n+2n, & v \in Z \end{cases} = \begin{cases} 5n, & v \in X \\ 4n, & v \in Y \\ 3n, & v \in Z \end{cases}$$



Несуседни чворови у графу $K_{n,2n,3n}$ су чворови који се налазе у истој класи.

Нека су u и v несуседни чворови

$$d(u)+d(v) = \begin{cases} 5n+5n, & u,v \in X \\ 4n+4n, & u,v \in Y \\ 3n+3n, & u,v \in Z \end{cases} = \begin{cases} 10n, & u,v \in X \\ 8n, & u,v \in Y \\ 6n, & u,v \in Z \end{cases} \geq 6n = |V(K_{n,2n,3n})|$$

Испуњен је услов Орове теореме, па је граф $K_{n,2n,3n}$ Хамилтонов.

Показаћемо да $K_{n,2n,3n+1}$ није Хамилтонов.

Уколико би $K_{n,2n,3n+1}$ био Хамилтонов, граф би имао Хамилтонову контуру C на којој су сви чворови графа. То међутим није могуће, пошто је $|Z| = 3n+1$, а $|X \cup Y| = 3n$.

(Комплетан бипартитан граф $K_{3n,3n+1}$ је покривајући подграф графа $K_{n,2n,3n+1}$. Знамо да граф $K_{3n,3n+1}$ није Хамилтонов, па ни $K_{n,2n,3n+1}$ не може бити Хамилтонов)

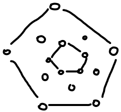
II начин:

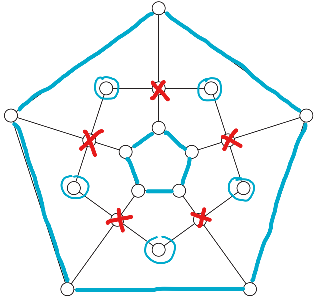
Уклонимо $3n$ чворова из $X \cup Y$. Избацивањем скупа чворова $X \cup Y$, добијамо граф са $3n+1$ изолованих чворова класе Z. Како је

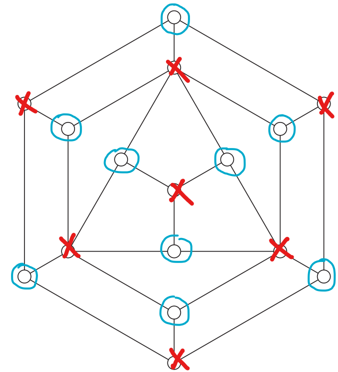
$$3n+1 = \omega(K_{n,2n,3n+1} - X \cup Y) > |X \cup Y| = 3n,$$

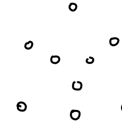
знамо да граф $K_{n,2n,3n+1}$ није Хамилтонов.

5. Доказати да следећи графови нису полухамилтонови.









Уколико уклонимо 5 чворова степена 4, добијамо граф са 7 компоненти повезаности (велика и мала контура + 5 изолованих чворова)

$|S| = 5$

$\omega(G-S) = 7$ $\quad 7 = \omega(G-S) > |S|+1 = 5+1 = 6$

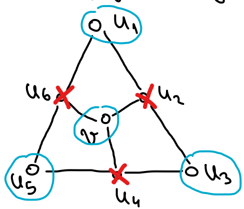
За уочени скуп S са 5 чворова степена 4 не важи услов $\omega(G-S) \leq |S|+1$, па граф није полухамилтонов (па није ни хамилтонов)

Уколико уклонимо 7 означених чворова, добијамо граф са 9 изолованих чворова

$9 = \omega(G-S) > |S|+1 = 7+1 = 8$

$\Rightarrow$ граф није полухамилтонов

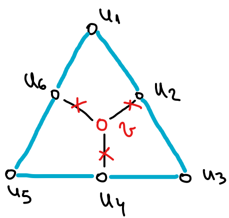
Посматрајмо следећи граф



Брисањем скупа чворова $S=\{u_2,u_4,u_6\}$, добијамо граф са 4 компоненте повезаности (изоловани чворови v, u_1, u_3, u_5)

Добили смо већи број компоненти повезаности од броја избачених чворова, па граф није Хамилтонов.

II начин:



Уколико граф садржи Хамилтонову контуру, на њој се налазе обе гране у чворовима степена 2.

$d(u_1)=2 \Rightarrow$ гране u_1u_2 и u_1u_6 су на Хамилтоновој контури

Аналогно због чворова u_3 и u_5 на Хамилтоновој контури су и гране: u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5 и u_5u_6

Затворили смо контуру, али нисмо покупили чвор v

(Гране vu_2, vu_4 и vu_6 нису на располагању, пошто смо у сваком од чворова u_2, u_4 и u_6 већ искористили по 2 гране)

* SV, IN: Обавезно погледати решење задатка 9.10. из збирке!

6. Нека је G граф са $n \geq 3$ чворова и бар $\binom{n-1}{2} + 2$ грана. Доказати да је G Хамилтонов.

Уместо да докажемо да је граф Хамилтонов, показаћемо да важи услов Орове теореме, тј. да за свака два несуседна чвора x и y важи $d(x)+d(y) \geq n$.

Претпоставимо супротно, да постоје несуседни чворови u и v за које важи $d(u)+d(v) < n$.

Посматрајмо граф $G-u-v$

$$|E(G-u-v)| \underset{\substack{u,v \text{ несуседни} \\ \text{чворови}}}{=} |E(G)| - d(u) - d(v) = \underbrace{|E(G)|}_{\geq \binom{n-1}{2}+2} - \underbrace{(d(u)+d(v))}_{<n} > \binom{n-1}{2} + 2 - n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-2)$$

$$= (n-2)\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) = \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \binom{n-2}{2}$$

Граф $G-u-v$ има $n-2$ чворова, па је $|E(G-u-v)| \leq \binom{n-2}{2}$ ↯ (Добили смо $|E(G-u-v)| > \binom{n-2}{2}$)

Сада на основу Орове теореме знамо да је граф Хамилтонов.

7. Да ли постоји граф са 8 чворова и 23 гране који није Хамилтонов?

Ставимо $n=8$ у претходном задатку

$$e \geq \binom{n-1}{2}+2 = \binom{8-1}{2}+2 = \binom{7}{2}+2 = 21+2 = 23$$

На основу задатка 6. знамо да сваки граф који има 8 чворова и најмање 23 гране мора бити Хамилтонов.

$\Rightarrow$ Не постоји граф који има 8 чворова и 23 гране који није Хамилтонов.

8. Доказати да је k-регуларан граф са $2k-1$ чворова Хамилтонов. (домаћи)