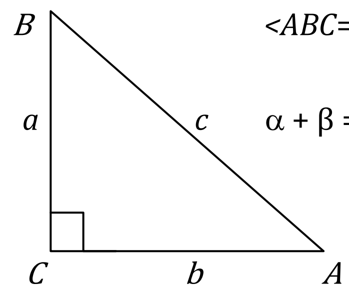
Trigonometrija

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{naspramna\ \ kateta}{hipotenuza} = \frac{a}{c}} \quad \left(\sin\alpha = \cos\beta = \cos(90°\text{-}\alpha)\right)$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{nalegla\ \ kateta}{hipotenuza} = \frac{b}{c}} \quad \left(\cos\alpha = \sin\beta = \sin(90°\text{-}\alpha)\right)$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{naspramna\ \ kateta}{nalegla\ \ kateta} = \frac{a}{b}} \quad \left(\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}(90°\text{-}\alpha\,)\right)$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{nalegla\ \ kateta}{naspramna\ \ kateta} = \frac{b}{a}} \quad \left(\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90°\text{-}\alpha\,)\right)$$



$<CAB=\alpha$

$<ABC=\beta$

$\alpha + \beta = 90°$

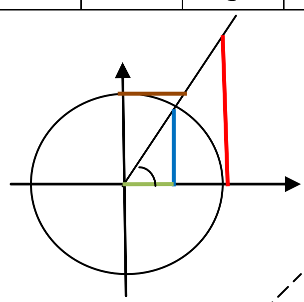
Osnovne trigonometrijske formule:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad \boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \qquad \boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \qquad \boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1}$$

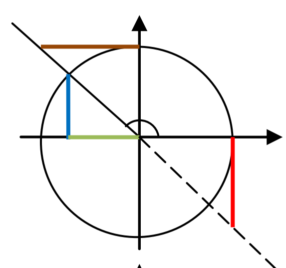
Vrednosti trigonometrijskih funkcija za neke važne uglove:

α (stepeni)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
α (radijani)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\mp\infty$	0
ctgα	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$	0	$\pm\infty$

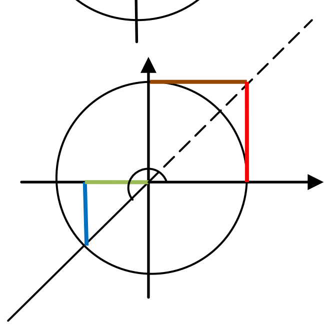
Prvi kvadrant:
sinα >0
cosα >0
tgα >0
ctgα >0



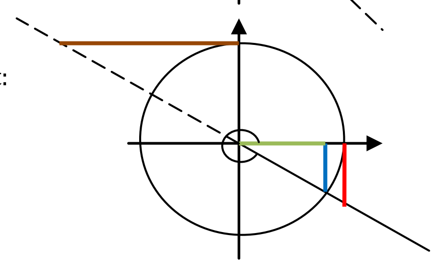
Drugi kvadrant:
sinα >0
cosα <0
tgα<0
ctgα <0



Treći kvadrant:
sinα <0
cosα <0
tgα >0
ctgα >0



Četvrti kvadrant:
sinα <0
cosα >0
tgα <0
ctgα <0



Parnost i neparnost trigonometrijskih funkcija:

$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}$ $\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$ $\boxed{\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha}$ $\boxed{\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha}$

Periodičnost trigonometrijskih funkcija, $k \in Z$:

$\boxed{\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha}$ $\boxed{\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha}$ $\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha}$ $\boxed{\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg}\alpha}$

Izražavanje jedne trigonometrijske funkcije pomoću druge za uglove u prvom kvadrantu,

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$:

$$\boxed{\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}} \qquad \boxed{\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}} \qquad \boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}$$

Adicione formule:

$$\boxed{\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta} \qquad \boxed{\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} \qquad \boxed{\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}}$$

Trigonometrijski identiteti za dvostruki ugao:

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\beta} \quad \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \quad \boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}} \quad \boxed{\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}}$$

Trigonometrijski identiteti za polovinu ugla:

$$\boxed{\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \boxed{\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \boxed{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad \boxed{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

Zbir i razlika trigonometrijskih funkcija:

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad \boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad \boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}} \quad \boxed{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}} \quad \boxed{\operatorname{ctg}\alpha \mp \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}}$$

Proizvod trigonometrijskih funkcija:

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]} \qquad \boxed{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]}$$

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]}$$

Primer 1. Ako je $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ i $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, odrediti sinα, tgα i ctgα.

Rešenje: Iz uslova $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ sledi da je $\sin\alpha>0$, koristeći osnovne trigonometrijske formule dobijamo

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$, $\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$, $\quad$ a $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{3}{4}$.

Primer 2. Ako je za $\alpha=60°$ i $\beta=120°$, izračunati $\frac{\sin^2(\alpha+\beta)-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha-\sin^2\beta}$.

Rešenje: $\frac{\sin^2(\alpha+\beta)-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha-\sin^2\beta}=\frac{\sin^2 180°-\cos^2 60°-\cos^2 120°}{\sin 180°-\sin^2 60°-\sin^2 120°}=\frac{0^2-(\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{2})^2}{0-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{-\frac{2}{4}}{-\frac{6}{4}}=\frac{1}{3}$.

Primer 3. Izračunati sin15° i cos15°.

Rešenje: Primenom formule $\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$, za $\alpha=45°$ i $\beta=30°$, dobijamo

$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin45°\cos30°-\cos45°\sin30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Slično, primenom formule $\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$ dobijamo

$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos45°\cos30°+\sin45°\sin30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Primer 4. Izračunati $\mathrm{tg}\frac{544\pi}{3}$ i $\mathrm{ctg}\frac{544\pi}{3}$.

Rešenje: Trigonometrijske funkcija tgx definisana za svako $x\in\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi|\ k\in\boldsymbol{Z}\}$ je periodična funkcija sa periodom $\omega=\pi$, kao i funkcija ctg x definisana za svako $x\in\mathbf{R}\backslash\{k\pi|\ k\in\boldsymbol{Z}\}$, zato je

$\mathrm{tg}\frac{544\pi}{3}=\mathrm{tg}(161\pi+\frac{\pi}{3})=\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, a $\mathrm{ctg}\frac{544\pi}{3}=\mathrm{ctg}(161\pi+\frac{\pi}{3})=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Primer 5. Izračunati $\sin\frac{29\pi}{4}$ i $\cos\frac{29\pi}{4}$.

Rešenje: Trigonometrijske funkcije sinx i cosx, definisane za svako $x\in\mathbf{R}$, su periodične sa periodom $\omega=2\pi$, zato je

$\sin\frac{29\pi}{4}=\sin(6\pi+\frac{3\pi}{4})=\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, a $\cos\frac{29\pi}{4}=\cos(6\pi+\frac{3\pi}{4})=\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Primer 6. Izračunati $\sin\frac{7\pi}{12}$ i $\cos\frac{7\pi}{12}$.

Rešenje: Primenom adicione formule $\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$, za $\alpha=\frac{\pi}{3}$ i $\beta=\frac{\pi}{4}$ dobijamo

$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Analogno, primenom formule $\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$, dobijamo

$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Uz poznavanje osnovnih trigonometrijskih formula, u sledećim primerima pokazaćemo da poslednje četiri grupe formula koje predstavljaju trigonometrijske identitete vezane za dvostruke uglove, polovine uglova, zbir, razliku, kao i proizvod trigonometrijskih funkcija **NIJE NEOPHODNO PAMTITI**, već ih možemo jednostavno izvesti primenom dve formule iz grupe adicionih formula, prve koja se odnose na određivanje sinusa zbira, odnosno razlike uglova i druge koja se odnosi na određivanje kosinusa zbira, odnosno razlike uglova.

Primer 7. Primenom adicionih formula dokazati $\mathrm{ctg}\,2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}$.

Rešenje: Kako je $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, primenom adicionih formula $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ i $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, za $\alpha=\beta$, dobijamo $\boxed{\sin2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha}$, $\boxed{\cos2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$, a odatle je

$\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}=\frac{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-1}{2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$, i konačno sledi $\boxed{\mathrm{ctg}\,2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}}$.

Primer 8. Koristeći adicione formule dokazati trigonometrijske identitete

$\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{2}$ i $\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1+\cos\varphi}{2}$, a zatim izračunati $\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}$.

Rešenje: Koristeći osnovnu trigonometrijsku formulu $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ i adicionu formulu

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, za $\alpha=\beta=\frac{\varphi}{2}$, dobijamo

$\cos\varphi=\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)=\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}=1-\sin^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}=1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, a odatle je $\boxed{\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{2}}$.

Dalje, $\cos\varphi=\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}=\cos^2\frac{\varphi}{2}-1+\cos^2\frac{\varphi}{2}=2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1$, a odatle dobijamo $\boxed{\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1+\cos\varphi}{2}}$.

Sada ćemo izračunati $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ koristeći prethodno dokazane trigonometrijske identitete. Kako je

$\boxed{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$, za $\varphi=\frac{\pi}{6}$ važi $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}=(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$.

Dalje je $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}>0$, te konačno dobijamo $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}$.

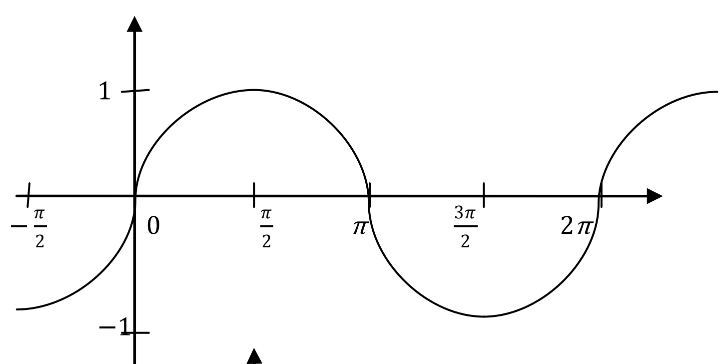
Primer 8. Koristeći adicione formule dokazati trigonometrijski identitet $\sin\varphi+\sin\psi=2\cdot\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$.
Rešenje: Iz poznatih formula za određivanje sinusa zbira uglova i sinusa razlike uglova,
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ i $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$, uvođenjem smene $\varphi=\alpha+\beta$ i $\psi=\alpha-\beta$, dobijamo

$\sin\varphi=\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}+\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}$ i $\sin\psi=\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}-\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}$.

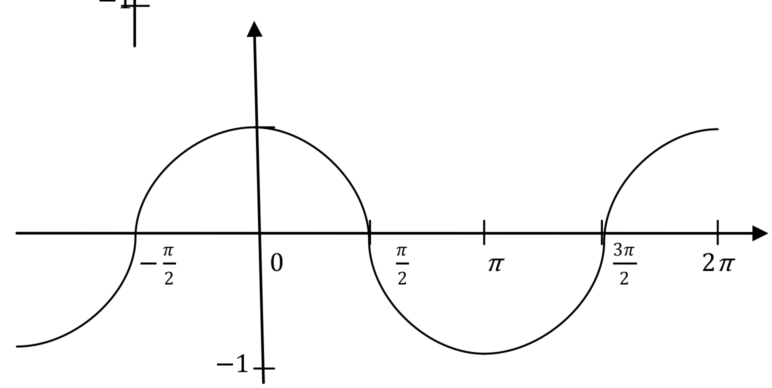
Sabiranjem prethodne dve jednačine, konačno dobijamo $\boxed{\sin\varphi+\sin\psi=2\cdot\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}$.

Primer 9. Pomoću adicionih formula dokazati identitet $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$.
Rešenje: Kosinus razlike uglova i kosinus zbira uglova su redom
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ i $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.
Oduzimanjem prethodne dve jednačine dobijamo
$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$, a odatle je $\boxed{\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]}$.

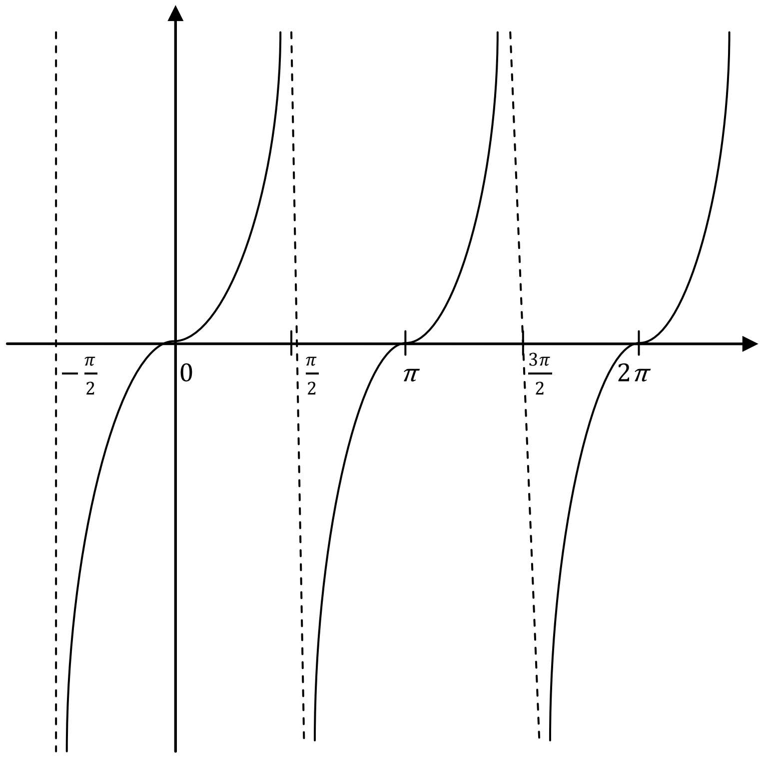
Primer 10. Skicirati grafike trigonometrijskih funkcija $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=\cos x$, $f_3(x)=\operatorname{tg}x$, $f_4(x)=\operatorname{ctg}x$, kao i funkcija $f_5(x)=\arcsin x$, $f_6(x)=\arccos x$, $f_7(x)=\operatorname{arctg}x$ i $f_8(x)=\operatorname{arcctg}x$.



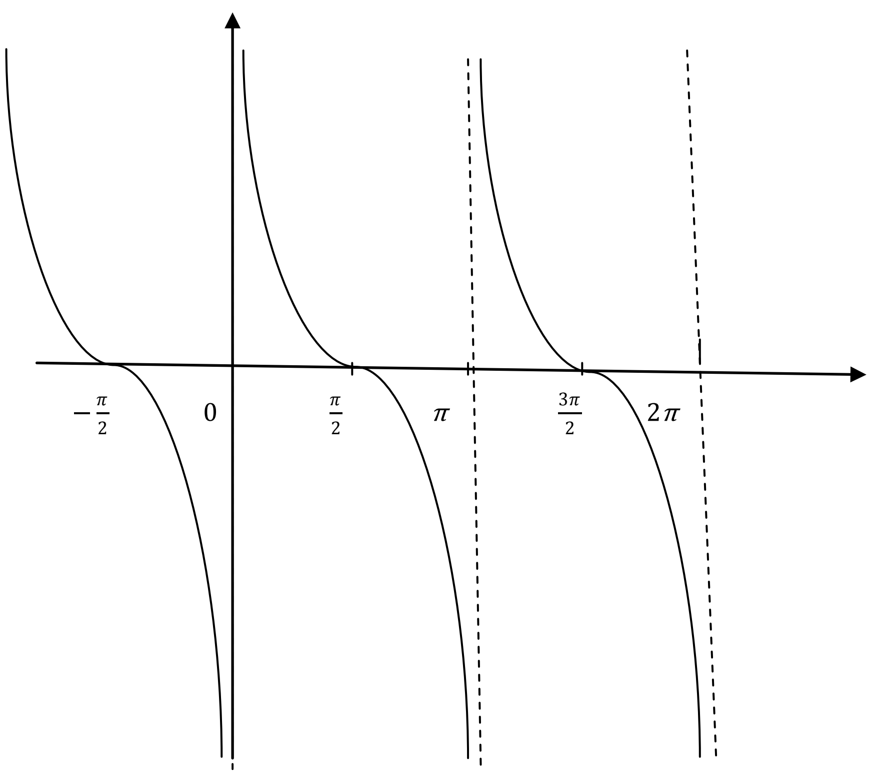
$f_1(x)=\sin x$
$D_{f_1}=\mathbf{R}$
$R_{f_1}=[-1,1]$
$\omega=2\pi$



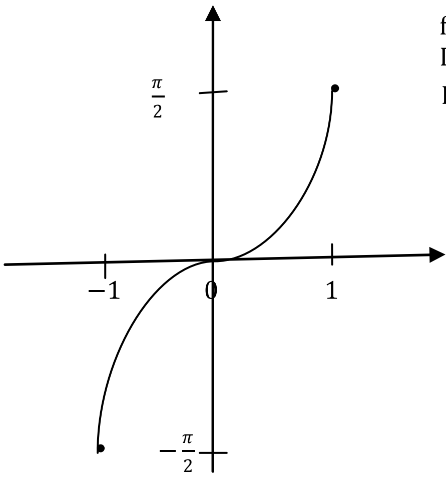
$f_2(x)=\cos x$
$D_{f_2}=\mathbf{R}$
$R_{f_2}=[-1,1]$
$\omega=2\pi$



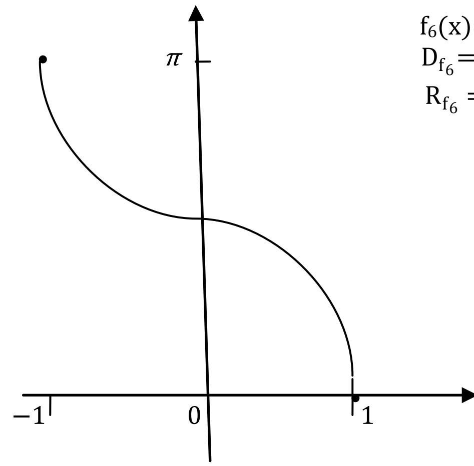
$f_3(x)=\text{tg}x$
$D_{f_3}=\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\boldsymbol{Z}\}$
$R_{f_3}=\mathbf{R}$
$\omega=\pi$



$f_4(x)=\text{ctg}x$
$D_{f_4}=\mathbf{R}\backslash\{k\pi \mid k\in\boldsymbol{Z}\}$
$R_{f_4}=\mathbf{R}$
$\omega=\pi$

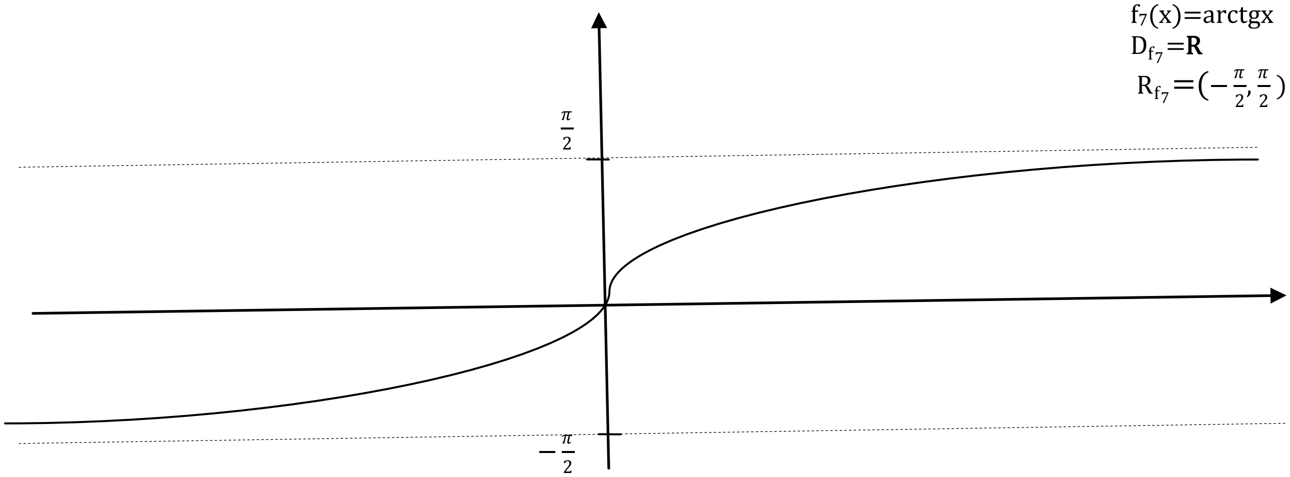


$f_5(x)$=arcsinx
$D_{f_5}=[-1,1]$
$R_{f_5}=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

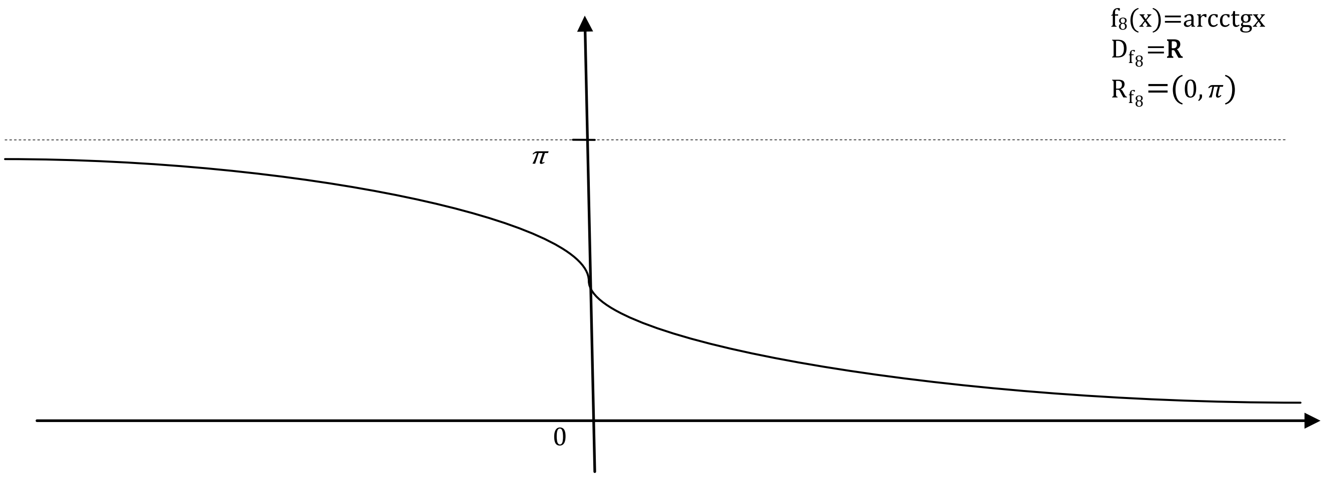


$f_6(x)$= arccosx
$D_{f_6}=[-1,1]$
$R_{f_6}=[0,\pi]$

$f_7(x)$=arctgx
$D_{f_7}=\mathbf{R}$
$R_{f_7}=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$



$f_8(x)$=arcctgx
$D_{f_8}=\mathbf{R}$
$R_{f_8}=(0,\pi)$



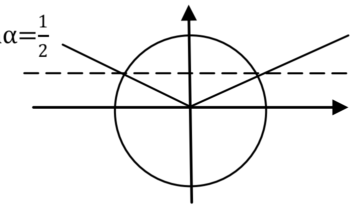
Primer 11. Rešiti jednačinu $\cos 2x=0$.

Rešenje: Na osnovu prethodnog primera, sa drugog grafika vidimo da je $\cos 2x=0$ za $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in \mathbf{Z}$.

Dakle, rešenje jednačine je $x\in\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \mid k\in \mathbf{Z}\}$.

Primer 12. Rešiti jednačinu $\sin 2x=\frac{1}{2}$.

Rešenje: Sa slike



na kojoj je predstavljena trigonometrijska kružnica poluprečnika 1 i označeni su kraci dva ugla pozitivne orijentacije, radijanske mere $\frac{\pi}{6}$, odnosno $\frac{5\pi}{6}$, se lako uočava da ako je jednačina $\sin 2x=\frac{1}{2}$ zadovoljena, tada je $2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in \mathbf{Z}$, ili je $2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in \mathbf{Z}$. Dakle, rešenje jednačine je $x\in\{\frac{\pi}{12}+k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}\cup\{\frac{5\pi}{12}+k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}$.

Primer 13. Odrediti sve korene jednačine $\cos^4x-\sin^4x=\sin 4x$ koji pripadaju intervalu $(0,\frac{\pi}{2})$.

Rešenje: Koristeći osnovnu trigonometrijsku formlu i formule za kosinus i sinus dvostrukog ugla dobijamo

$$\cos^4x-\sin^4x=\sin 4x \Leftrightarrow (\cos^2x-\sin^2x)(\cos^2x+\sin^2x)=2\sin 2x\cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x=2\sin 2x\cos 2x.$$

Poslednja jednačina je ekvivalentna sa $\cos 2x\,(1-2\sin 2x)=0$, koja je zadovoljena ako je $\cos 2x=0 \vee \sin 2x=\frac{1}{2}$.

Rešenje prve jednačine je $x\in\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \mid k\in \mathbf{Z}\}$, dok je rešenje druge jednačine $x\in\{\frac{\pi}{12}+k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}\cup\{\frac{5\pi}{12}+k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}$, a odatle konačno dobijamo rešenja (korene) koja pripadaju intervalu $(0,\frac{\pi}{2})$, a to su $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{12}$ i $x_3=\frac{5\pi}{12}$.

Primer 14. Rešiti jednačinu $4\sin^2\frac{3x+\pi}{6}=3$.

Rešenje: Rešavanjem odgovarajuće kvadratne jednačine dobijamo $4\sin^2\frac{3x+\pi}{6}=3 \Leftrightarrow \sin\frac{3x+\pi}{6}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin\frac{3x+\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (\frac{3x+\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in \mathbf{Z} \vee \frac{3x+\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow (x=\frac{\pi}{3}+4k\pi,\ k\in \mathbf{Z} \vee x=\pi+4k\pi,\ k\in \mathbf{Z})$,

$\sin\frac{3x+\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (\frac{3x+\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in \mathbf{Z} \vee \frac{3x+\pi}{6}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow (x=-\pi+4k\pi,\ k\in \mathbf{Z} \vee x=-\frac{5\pi}{3}+4k\pi,\ k\in \mathbf{Z})$. Kako važi $-\pi+4k\pi=\pi+(4k-2)\pi$, kao i $-\frac{5\pi}{3}+4k\pi=\frac{\pi}{3}+(4k-2)\pi$, rešenje polazne jednačine je $x\in\{\frac{\pi}{3}+2k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}\cup\{\pi+2k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}$.

Primer 15. Rešiti jednačinu $\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}x$.

Rešenje: Uvrštavanjem $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$ u polaznu jednačinu dobijamo $\operatorname{tg}^2x=1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}x=\pm 1$.

$\operatorname{tg}x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$, $\operatorname{tg}x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, te je rešenje polazne jednačine $x\in\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \mid k\in \mathbf{Z}\}$.

Primer 16. Rešiti jednačinu $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)+1=0$.

Rešenje: $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)+1=0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)=-1 \Leftrightarrow \frac{5\pi}{12}-x=\frac{3\pi}{4}-k\pi, k\in \mathbf{Z}$.

Rešenje jednačine je $x\in\{-\frac{\pi}{3}+k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}$.

Primer 17. Rešiti jednačinu $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2$.

Rešenje:

$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=1 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x=1 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{3}+x)=1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$.

Rešenje jednačine je $x\in\{\frac{\pi}{6}+2k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}$.

Primer 18. Rešiti jednačinu $2\cos^2x-1=\sin 3x$.

Rešenje: $2\cos^2x-1=\sin 3x \Leftrightarrow \cos 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right) \Leftrightarrow \cos 2x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=0 \Leftrightarrow -2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\sin\frac{5x-\frac{\pi}{2}}{2}=0$.

Poslednja jednačina je zadovoljena ako je $\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}=0 \vee \sin\frac{5x-\frac{\pi}{2}}{2}=0$, tj., ako je $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=-k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$ ili $\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}=k\pi$, $k\in \mathbf{Z}$. Rešenje polazne jednačine je $x\in\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}\cup\{\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} \mid k\in \mathbf{Z}\}$.

Primer 19. Rešiti jednačinu $4\sin\frac{x}{2} + \cos x = 3$.

Rešenje: $4\sin\frac{x}{2} + \cos x = 3 \Leftrightarrow 4\sin\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 3 \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right)^2 = 0$.

Poslednja jednačina je zadovoljena ako je $\sin\frac{x}{2} = 1$, tj., ako je $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Rešenje jednačine je $x = (4k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Primer 20. Rešiti nejednačinu $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

Rešenje: Sa slike iz Primera 12, lako se uočava da je nejednačina zadovoljena za sve $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$. Dodavanjem $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, levoj i desnoj granici ovog intervala dobijamo beskonačno mnogo intervala čija unija predstavlja skup rešenja nejednačine jer je funkcija $\sin x$ periodična sa periodom $\omega = 2\pi$.

Dakle, rešenje nejednačine je $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi]$.

Zadaci za samostalni rad:

1. Izračunati $\sin 75°$ i $\cos 75°$. $[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}]$
2. Izračunati $\mathrm{tg}\,\frac{1023\pi}{4}$ i $\mathrm{ctg}\,\frac{1023\pi}{4}$. $[-1, -1]$
3. Dokazati trigonometrijski identitet $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.
4. Ako je $\sin(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x+y < \frac{\pi}{2}$, izračunati vrednost izraza $(1 + \mathrm{tg}x)(1 + \mathrm{tg}y)$. $[2]$
5. Rešiti jednačinu $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(\pi - x) - 2$. $[x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}]$
6. Rešiti jednačinu $2\sin^2 2x = 1$. $[x = \frac{(2k+1)\pi}{8},\ k \in \mathbf{Z}]$
7. Rešiti jednačinu $\left(\frac{\cos x + 1}{\sin x}\right)^2 = \frac{1}{3}$. $[x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}]$
8. Rešiti jednačinu $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$. $[x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}]$