Вежбе 6
-Рекурентне релације-

Рекурентна релација реда k

$$f_{n+k} = F(n, f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k-1})$$

$n \in \mathbb{N}_0$

$f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k}$ узастопни чланови неког низа

Линеарна хомогена р.р. са константним коефицијентима

$$c_k f_{n+k} + c_{k-1} f_{n+k-1} + \dots + c_2 f_{n+2} + c_1 f_{n+1} + c_0 f_n = 0$$

$c_i = const, \ \forall i = 0, 1, \dots, k$

1. Наћи општа решења рекурентних релација

а) $f_{n+2} - 7f_{n+1} + 12f_n = 0,\ n \geq 0$

Уместо f_n увртимо t^n 2. реда

$t^{n+2} - 7t^{n+1} + 12t^n = 0 \ / : t^n$

$\boxed{t^2 - 7t + 12 = 0}$ КАРАКТЕРИСТИЧНА ЈЕДНАЧИНА

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$t_1 = 3 \quad t_2 = 4$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ

$$f_n = A \cdot t_1^n + B \cdot t_2^n = A \cdot 3^n + B \cdot 4^n$$

б) $f_n + 3f_{n-1} - 10f_{n-2} = 0,\ n \geq 2$

$f_n \Rightarrow t^n$ 2. реда

$t^n + 3t^{n-1} - 10t^{n-2} = 0 \ / : t^{n-2}$

$t^2 + 3t - 10 = 0$ карактеристична ј-на

$(t+5)(t-2) = 0$

$t_1 = -5 \quad t_2 = 2$

опште решење

$$f_n = A \cdot (-5)^n + B \cdot 2^n$$

в) $f_{n+2} - 4f_{n+1} + 13f_n = 0, \ n \geq 0$

$f_n \to t^n$ 2. реда

$t^{n+2} - 4t^{n+1} + 13t^n = 0 \quad / :t^n$

$t^2 - 4t + 13 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

$t_1 = 2 - 3i \quad t_2 = 2 + 3i$

$f_n = A(2-3i)^n + B(2+3i)^n$

г) $f_{n+2} + 6f_{n+1} + 9f_n = 0, \ n \geq 0$

карактеристична ј-на 2. реда

$t^2 + 6t + 9 = 0$

$(t+3)^2 = 0$

$t_1 = t_2 = -3$

$$f_n = A \cdot (-3)^n + B \cdot (-3)^n = (A+B) \cdot (-3)^n = C \cdot (-3)^n$$

НЕ МОЖЕ ОВАКО!

У ОПШТЕМ РЕШЕЊУ РЕКУРЕНТНЕ РЕЛАЦИЈЕ 2. РЕДА МОРАМО ИМАТИ 2 РАЗЛИЧИТЕ КОНСТАНТЕ

$$f_n = A \cdot (-3)^n + B \cdot n \cdot (-3)^n = (A + Bn)(-3)^n$$

д) $f_{n+3} + 3f_{n+2} + 3f_{n+1} + f_n = 0,\ n \geq 0$

карактеристична ј-на 3. реда

$t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$

$(t+1)^3 = 0$

$t_1 = t_2 = t_3 = -1$

опште решење

$f_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot n \cdot (-1)^n + C \cdot n^2 \cdot (-1)^n$

$= (A + Bn + Cn^2)(-1)^n$

ђ) $f_{n+4} + 4f_n = 0,\ n \geq 0$

$f_n \to t^n$ 4. реда

$t^{n+4} + 4t^n = 0$

$t^4 + 4 = 0$ карактеристична ј-на

смена $x = t^2$

$x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4$ $x = \pm 2i$

$x = -2i$ $x = 2i$

$t = \pm\sqrt{-2i}$ $t = \pm\sqrt{2i}$

опште решење

$f_n = A(-\sqrt{-2i})^n + B(\sqrt{-2i})^n$

$+ C(-\sqrt{2i})^n + D(\sqrt{2i})^n$

2. Решити рекурентне релације

a) $f_n = 5f_{n-1} - 6f_{n-2}$, $n \geq 2$ ако је $f_0 = 1$ и $f_1 = 1$

$f_n - 5f_{n-1} + 6f_{n-2} = 0$

карактеристична ј-на

$t^2 - 5t + 6 = 0$

$(t-2)(t-3) = 0$

$t_1 = 2 \quad t_2 = 3$

општe решење

$$\boxed{f_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n}$$

$1 = f_0 = A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0 \quad (n=0)$

$1 = f_1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 \quad (n=1)$

Добијамо систем $\quad A + B = 1$

$\quad 2A + 3B = 1$

$2(A+B) + B = 1 \qquad A = 1 - B$

$2 \cdot 1 + B = 1 \qquad = 2$

$\Rightarrow B = -1$

Решење рекурентне релације

$f_n = 2 \cdot 2^n + (-1) \cdot 3^n = 2^{n+1} - 3^n$

б) $f_n = 6f_{n-1} - 9f_{n-2},\ n \geq 2$ ако je $f_0 = f_1 = 2$

$f_n - 6f_{n-1} + 9f_{n-2} = 0$

карактеристична ј-на

$t^2 - 6t + 9 = 0$

$(t-3)^2 = 0$

$t_1 = t_2 = 3$

опште решење

$f_n = (A + Bn) \cdot 3^n$

$2 = f_0 = (A + B \cdot 0) \cdot 3^0$

$2 = f_1 = (A + B \cdot 1) \cdot 3^1$

Добијамо $A = 2$

$3A + 3B = 2$

$3 \cdot 2 + 3B = 2 \Rightarrow B = -\frac{4}{3}$

Решење р.р.

$$f_n = \left(2 - \frac{4}{3} \cdot n\right) \cdot 3^n$$

$$= 2 \cdot 3^n - 4 \cdot n \cdot 3^{n-1}$$

в) $f_n = 5f_{n-1} - 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + 8f_{n-4}$, $n \geq 4$ ако је $f_0 = 1, f_1 = 8, f_2 = 12$ и $f_3 = 38$

4. реда

$f_n - 5f_{n-1} + 6f_{n-2} + 4f_{n-3} - 8f_{n-4} = 0$

$t^4 - 5t^3 + 6t^2 + 4t - 8 = 0$

Потенцијалне нуле су $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

ХОРНЕРОВА ШЕМА

	1	-5	6	4	-8	
1	1	-4	2	6	-2	✗
-1	1	-6	12	-8	0	✓
-1	1	-7	19	-27		✗
2	1	-4	4	0		✓

$t^4 - 5t^3 + 6t^2 + 4t - 8 = (t+1)(t^3 - 6t^2 + 12t - 8)$

$= (t+1)(t-2)(\underbrace{t^2 - 4t + 4}_{(t-2)^2}) = (t+1)(t-2)^3$

$t_1 = -1 \quad t_2 = t_3 = t_4 = 2$

опште решење

$f_n = A\cdot(-1)^n + B\cdot 2^n + C\cdot n\cdot 2^n + D\cdot n^2\cdot 2^n$

$1 = f_0 = A\cdot(-1)^0 + B\cdot 2^0 + C\cdot 0\cdot 2^0 + D\cdot 0^2\cdot 2^0$

$8 = f_1 = A\cdot(-1)^1 + B\cdot 2^1 + C\cdot 1\cdot 2^1 + D\cdot 1^2\cdot 2^1$

$12 = f_2 = A\cdot(-1)^2 + B\cdot 2^2 + C\cdot 2\cdot 2^2 + D\cdot 2^2\cdot 2^2$

$38 = f_3 = A\cdot(-1)^3 + B\cdot 2^3 + C\cdot 3\cdot 2^3 + D\cdot 3^2\cdot 2^3$

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -A + 2B + 2C + 2D &= 8 \\ A + 4B + 8C + 16D &= 12 \\ -A + 8B + 24C + 72D &= 38 \end{aligned}$$

Решавањем система добијамо

$A = -2 \quad B = 3$

$C = -\frac{1}{4} \quad D = \frac{1}{4}$

Решење р.р.

$f_n = (-2)(-1)^n + \left(3 - \frac{n}{4} + \frac{n^2}{4}\right)\cdot 2^n$

г) $f_{n+3} = 4f_{n+2} - f_{n+1} - 6f_n$, $n \geq 0$ ако је $f_0 = 1, f_1 = 2$ и $f_2 = 4$.

3. Решити систем рекурентних релација

$$f_{n+1} = 2f_n - g_n \quad (1)$$
$$g_{n+1} = f_n + 4g_n \quad (2)$$

уз почетне услове $f_0 = 2, g_0 = 1$.

(1): $g_n = 2f_n - f_{n+1}$

(2): $\underbrace{2f_{n+1} - f_{n+2}}_{g_{n+1}} = f_n + 4\underbrace{(2f_n - f_{n+1})}_{g_n}$

Добијамо р.р. $f_{n+2} - 6f_{n+1} + 9f_n = 0$

$t^2 - 6t + 9 = 0$

$(t-3)^2 = 0 \qquad t_1 = t_2 = 3$

$f_n = (A + Bn)\cdot 3^n$

Знамо $f_0 = 2$, а из (1) имамо

$f_1 = 2f_0 - g_0 = 4 - 1 = 3$

$2 = f_0 = A$

$3 = f_1 = 3A + 3B \implies B = -1$

Добијамо $\boxed{f_n = (2-n)\cdot 3^n}$

Сада g_n можемо одредити на следећи начин

$g_n = 2f_n - f_{n+1} = 2\cdot(2-n)\cdot 3^n - (2-(n+1))\cdot 3^{n+1}$

$= 3^n(4 - 2n - 3(1-n)) = 3^n(4 - 2n - 3 + 3n)$

$= \boxed{(1+n)\cdot 3^n}$

4. Наћи опште решење једначине $a_{n+2}^2 = 5a_{n+1}^2 - 4a_n^2,\ n \geq 0.$ НЕЛИНЕАРНА р.р.

Уводимо смену $b_n = a_n^2$

Добијамо р.р. $b_{n+2} = 5b_{n+1} - 4b_n$

$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 4b_n = 0$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t-1)(t-4) = 0$

$b_n = A \cdot 1^n + B \cdot 4^n = A + B \cdot 4^n$

На крају враћамо смену

$b_n = a_n^2 \Rightarrow a_n = \pm\sqrt{b_n} = \pm\sqrt{A + B \cdot 4^n}$

5. Ако се зна да су сви чланови низа a_n почев од a_2 различити решити

а) $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^3}{a_n^2}$, $n \geq 0$, ако је $a_0 = 1$ и $a_1 = 2$ НЕЛИНЕАРНА р.р.

ПОДСЕТНИК

$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$

$\log x \cdot y = \log x + \log y$

$\log x^k = k \log x$

$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^3}{a_n^2} \quad / \log_2$

$\log_2 a_{n+2} = \log_2 \frac{a_{n+1}^3}{a_n^2}$

$\log_2 a_{n+2} = \log_2 a_{n+1}^3 - \log_2 a_n^2$

$\log_2 a_{n+2} = 3\log_2 a_{n+1} - 2\log_2 a_n$

смена $b_n = \log_2 a_n$

Добијамо р.р. $b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n$

$t^2 - 3t + 2 = 0 \iff (t-1)(t-2) = 0$

$b_n = A + B \cdot 2^n$

$b_0 = \log_2 a_0 = \log_2 1 = 0$

$b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$ ⇐ због овога смо изабрали да основа логаритма буде 2

Добијамо систем

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A + 2B &= 1 \end{aligned} \iff \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

Сада је $b_n = -1 + 2^n$

$b_n = \log_2 a_n \Rightarrow \boxed{a_n = 2^{b_n} = 2^{2^n - 1}}$

*Услов да су сви чланови низа почев од a_2 различити обезбеђује да уведена смена буде добро дефинисана

б) $a_n = a_{n-1} a_{n-2}^2$, $n \geq 2$, ако је $a_0 = a_1 = 2$.

6. Наћи општу формулу за следећи низ $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = \boxed{2^n}$, $n \geq 0$, где је $a_0 = a_1 = 0$.

НЕХОМОГЕНА р.р.

Решење рекурентне релације је $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

1° ХОМОГЕНА р.р.

$a_{n+2}^{(h)} - 4a_{n+1}^{(h)} + 4a_n^{(h)} = 0$

карактеристична ј-на

$t^2 - 4t + 4 = 0$

$(t-2)^2 = 0$

$a_n^{(h)} = (A + Bn) \cdot 2^n$

2° Тражимо једно ПАРТИКУЛАРНО решење $a_n^{(p)}$ нехомогене р.р.

$a_n^{(p)} = C \cdot 2^n$

$2^n = a_{n+2}^{(p)} - 4a_{n+1}^{(p)} + 4a_n^{(p)} = C \cdot 2^{n+2} - 4 \cdot C \cdot 2^{n+1} + 4 \cdot C \cdot 2^n$

$= 2^n \cdot C \cdot (4 - 8 + 4) = 0$ знамо $2^n \neq 0, \forall n$

НЕ МОЖЕ ОВАКО!

Проблем је што већ имамо $A \cdot 2^n$ у хомогеном делу решења, као и $B \cdot n \cdot 2^n$.

Зато узимамо $a_n^{(p)} = C \cdot n^2 \cdot 2^n$

$2^n = a_{n+2}^{(p)} - 4a_{n+1}^{(p)} + 4a_n^{(p)} = C \cdot (n+2)^2 \cdot 2^{n+2} - 4 \cdot C \cdot (n+1)^2 \cdot 2^{n+1} + 4 \cdot C \cdot n^2 \cdot 2^n$

$= C \cdot 2^n \cdot (4(n^2 + 4n + 4) - 8(n^2 + 2n + 1) + 4n^2)$

$= C \cdot 2^n (\cancel{4n^2} + \cancel{16n} + 16 - \cancel{8n^2} - \cancel{16n} - 8 + \cancel{4n^2}) = 8C \cdot 2^n$

Сада је $8C = 1$, па је $C = \frac{1}{8}$

$a_n^{(p)} = \frac{1}{8} \cdot n^2 \cdot 2^n$

$0 = a_0 = a_0^{(h)} + a_0^{(p)} = A \cdot 2^0 + B \cdot 0 \cdot 2^0 + \frac{1}{8} \cdot 0^2 \cdot 2^0 \Rightarrow A = 0$

$0 = a_1 = a_1^{(h)} + a_1^{(p)} = A \cdot 2^1 + B \cdot 1 \cdot 2^1 + \frac{1}{8} \cdot 1^2 \cdot 2^1 \Rightarrow 2B + \frac{1}{4} = 0$

$B = -\frac{1}{8}$

решење р.р.

$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = -\frac{1}{8} n 2^n + \frac{1}{8} n^2 2^n$

$= (n^2 - n) 2^{n-3}$

Напомене:

1. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n$

$a_n^{(h)} = (A + Bn) \cdot 2^n$

$a_n^{(p)} = C \cdot 3^n$ Сада немамо већ овај облик решења у хомогеном делу

2. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 5$

Хомогена р.р. је $a_{n+2}^{(h)} - 4a_{n+2}^{(h)} + 4a_n^{(h)} = 0$, и њена карактеристична ј-на је $t^2 - 4t + 4 = 0$

Партикуларно решење је $a_n^{(p)} = C \cdot 1^n$

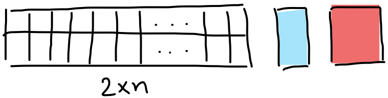
3. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n + 4^n$

Решење тражимо у облику $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)}$, где је

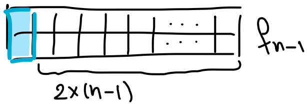
$a_n^{(p_1)}$ решење р.р. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n$

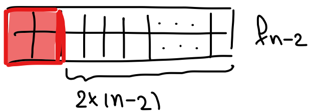
$a_n^{(p_2)}$ решење р.р. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 4^n$

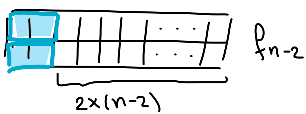
7. Правоугаоник величине $2 \times n$ издељен је на $2n$ једнаких квадрата. На располагању имамо домине правоугаоног облика 2×1 и 2×2. На колико начина се цео правоугаоник $2 \times n$ може прекрити са овим доминама?



Нека је f_n број начина да се датим доминама прекрије правоугаоник димензије $2 \times n$

1°


2°


3°


Сада је $f_n = \overset{1^\circ}{f_{n-1}} + \overset{2^\circ}{f_{n-2}} + \overset{3^\circ}{f_{n-2}}$, тј. $\boxed{f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2}}$

Добили смо р.р. 2. реда ⇒ требају нам прва 2 члана низа

$f_0 = 1$ (пошто немамо шта да прекријемо, рачунамо да имамо један начин да не употребимо ниједну домину)

$f_1 = 1$ 

(Уместо f_0 и f_1, можемо наћи f_1 и f_2

$f_2 = 3$ )

За домаћи решити добијену р.р. када је $f_0 = 1$ и $f_1 = 1$

8. Колико има речи дужине n над азбуком $A = \{1, 2, 3\}$ у којима се не појављује подреч 11?

f_n - број тражених речи дужине n

1° $1\,\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3}\,\boxed{\;n-2\;}$ $\quad 2 \cdot f_{n-2}$

2° $2\,\boxed{\;n-1\;}$ $\quad f_{n-1}$

3° $3\,\boxed{\;n-1\;}$ $\quad f_{n-1}$

Добијамо рекурентну релацију

$$f_n = 2f_{n-2} + 2f_{n-1}$$

Почетни услови:

$f_0 = 1$ (празна реч)

$f_1 = 3$ (речи 1,2,3)

$\left(f_2 = 3^2 - 1 = 8 \qquad \begin{matrix} \cancel{11} & 21 & 31 \\ 12 & 22 & 32 \\ 13 & 23 & 33 \end{matrix} \right)$

За домаћи решити добијену р.р.

9.* Колико има речи дужине n над азбуком $\{0, 1, 2\}$ које садрже паран број нула?

f_n – број речи дужине n које садрже ПАРАН број нула

g_n – број речи дужине n које садрже НЕПАРАН број нула

1° 1 $\boxed{\quad n-1 \quad}$ f_{n-1}

2° 2 $\boxed{\quad n-1 \quad}$ f_{n-1}

3° 0 $\boxed{\quad n-1 \quad}$ g_{n-1}

Добијамо $f_n = 2f_{n-1} + g_{n-1}$. Ако сада посматрамо речи дужине n са непарним бројем нула, слично као малопре добијамо да је

$$g_n = 2g_{n-1} + f_{n-1}$$

Систем

$f_n = 2f_{n-1} + g_{n-1}$ (1)

$g_n = 2g_{n-1} + f_{n-1}$ (2)

Почетни услови:

$f_0 = 1,\ g_0 = 0$

(празна реч има 0 нула, па има паран број нула)

(1): $g_{n-1} = f_n - 2f_{n-1}$

(2): $(f_{n+1} - 2f_n) = 2(f_n - 2f_{n-1}) + f_{n-1}$

$f_{n+1} - 4f_n + 3f_{n-1} = 0$ линеарна, хомогена, са к.к. 2. реда $(n \geq 1)$

$t^2 - 4t + 3 = 0 \iff (t-1)(t-3) = 0$

$f_n = A + B \cdot 3^n$

Из (1) је $f_1 = 2f_0 + g_0 = 2$

$$\begin{aligned} 1 = f_0 &= A + B \\ 2 = f_1 &= A + 3B \end{aligned} \iff \begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2} \\ B &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f_n = \frac{1}{2}(1 + 3^n)$$

Једначину $f_n = 2f_{n-1} + g_{n-1}$ добијамо исто као малопре.

Другу неопходну једначину можемо одредити на следећи начин. Укупан број речи дужине n над азбуком $\{0,1,2\}$ је 3^n. Како свака реч дужине n има или паран или непаран број нула, важи $f_n + g_n = 3^n$

$$f_n = 2f_{n-1} + g_{n-1}$$

$$f_n + g_n = 3^n \Rightarrow g_n = 3^n - f_n$$

$$f_n = 2f_{n-1} + 3^{n-1} - f_{n-1} = f_{n-1} + 3^{n-1}$$

Добијамо нехомогену р.р. 1. реда $f_n - f_{n-1} = 3^{n-1}$, $n \geq 0$, која је еквивалентна рекурентној релацији $f_{n+1} - f_n = 3^n$, $n \geq 1$

хомогени део:

$$f_{n+1}^{(h)} - f_n^{(h)} = 0$$

$$t - 1 = 0$$

$$f_n^{(h)} = A \cdot 1^n = A$$

једно партикуларно решење:

$$f_n^{(p)} = B \cdot 3^n$$

$$B \cdot 3^{n+1} - B \cdot 3^n = 3^n$$

$$3B - B = 1$$

$$2B = 1 \qquad B = \frac{1}{2}$$

$$1 = f_0 = f_0^{(h)} + f_0^{(p)} = A + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

решење: $f_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^n = \frac{1}{2}(1 + 3^n)$