

DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA JEDNE PROMENLJIVE - II deo

30. mart 2023.

Osnovne teoreme diferencijalnog računa

Rolova teorema

Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, ima izvod nad otvorenim intervalom (a, b) i ako je $f(a) = f(b)$, tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je $f'(\xi) = 0$.

Geometrijski smisao: Postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je tangenta krive $y = f(x)$ u tački $A(\xi, f(\xi))$ paralelna sa x -osom.

Mehanička interpretacija: Tačka se kreće po pravoj, u trenutku t se nalazi u tački sa koordinatom $x(t)$.

Neka je $x = x(t)$ neprekidna za $t \in [\alpha, \beta]$ i diferencijabilna za $t \in (\alpha, \beta)$. Ako je $x(\alpha) = x(\beta)$ (tj. položaj tačke u trenutku $t = \alpha$ poklapa se sa položajem tačke u trenutku $t = \beta$), tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ u kojoj je brzina jednaka nuli.

Dokaz Rolove t. Nепrekidna funkcija nad zatvorenim intervalom dostiže bar jednom najmanju vrednost m i najveću vrednost M .

- Ako je $m = M$, $f(x)$ je konstantna na celom intervalu, pa je $f'(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$.

- Neka je $m < M$.

Pp. da je $M > f(a) = f(b)$ (ukoliko je $M = f(a)$ tada je $m < f(a)$).

Tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$, takva da je $f(\xi) = M$.

Dokazaćemo da je $f'(\xi) = 0$. Važi

$$f(\xi + \Delta x) \leq f(\xi), \text{ za } \xi + \Delta x \in [a, b], \quad \text{tj.}$$

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0, \Delta x > 0 \text{ i } \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0, \Delta x < 0.$$

Za tačku ξ , po pretpostavci postoji $f'(\xi)$, pa je $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$. Iz $f'_+(\xi) \leq 0$, $f'_-(\xi) \geq 0$ i $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$ sledi da je $f'(\xi) = 0$.

Lagranžova teorema - teorema o srednjoj vrednosti

Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, ima izvod nad otvorenim intervalom (a, b) , tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Geometrijski smisao: Postoji tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je tangenta u $C(\xi, f(\xi))$ paralelna pravoj kroz $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$.

Mehanička interpretacija: Kod pravolinijskog kretanja tačke po zakonu $x = x(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ gde je funkcija $x(t)$ neprekidna za $t \in [\alpha, \beta]$ i diferencijabilna nad (α, β) postoji tačka $\xi \in (\alpha, \beta)$ u kojoj je trenutna brzina jednaka srednjoj brzini u posmatranom intervalu.

- Ako stavimo

$$\frac{\xi - a}{b - a} = \theta,$$

tada je $\xi = a + \theta(b - a)$, $0 < \theta < 1$, pa se tvrđenje

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

može zapisati u obliku

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), \quad 0 < \theta < 1,$$

a uzimajući $a = x$ i $b = x + h$ dobija se

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Posledice Rolove i Lagranžove teoreme

Posledica

Rolov metod za razdvajanje korena funkcije *Ako za funkciju*

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *važi:*

- a) $f(x)$ *je neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$,
- b) $f(x)$ *je diferencijabilna nad intervalom* (a, b) *i pri tome je* $f'(x) \neq 0$ *za* $x \in (a, b)$,
- c) $f(a) \cdot f(b) < 0$

tada postoji samo jedna nula funkcije nad intervalom (a, b) .

Posledica

Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *diferencijabilna nad intervalom* (a, b) *i ako su* $c_1, c_2 \in (a, b)$, $c_1 < c_2$ *dve uzastopne nule prvog izvoda, tada nad intervalom* (c_1, c_2) *funkcija* $f(x)$ *ima najviše jednu nulu.*

Primer

Pokazati da jednačina $x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$ nad intervalom $(-1, 1)$ ima tačno jedno rešenje.

Rešenje. Posmatrajmo funkciju $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{2}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = -1$$

$$f(-1) = -1 + 3 + \frac{1}{2} > 0, \quad f(1) = 1 - 3 + \frac{1}{2} < 0$$

pa na osnovu prethodne teoreme nad intervalom $(-1, 1)$ funkcija $f(x)$ ima tačno jednu nulu.

Posledica

Ako za funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ važi:

- a) $f(x)$ je neprekidna nad $[a, b]$,
- b) $f(x)$ je diferencijabilna nad intervalom (a, b) i pri tome je $f'(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$,

tada je funkcija $f(x)$ konstantna funkcija nad $[a, b]$.

Posledica

Ako funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju jednake izvode: $f'(x) = g'(x)$, $x \in I$, tada se one razlikuju za konstantu nad intervalom I .

Primer

Pokazati da je $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$.

Rešenje. *Posmatrajmo funkciju $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.*

Ona je neprekidna nad $[-1, 1]$.

Diferencijabilna je nad $(-1, 1)$ i pri tome je

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad x \in (-1, 1)$$

pa je funkcija $f(x)$ konstantna funkcija nad intervalom $[-1, 1]$, tj.

$f(x) = c$, $x \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} c &= ? \\ \arcsin 0 + \arccos 0 &= 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = c. \end{aligned}$$

Posledica

Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna nad $[a, b]$ i diferencijabilna nad (a, b) . Ako postoji

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \quad \left(\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) \right),$$

tada postoji i $f'_+(a)$ ($f'_-(b)$) i važi jednakost

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = f'_+(a) \quad \left(\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = f'_-(b) \right).$$

Posledica

Ako funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ima izvod nad intervalom I , tada izvod $f'(x)$ ne može imati prekide prve vrste nad tim intervalom.

Da izvod može imati prekide druge vrste pokazuje sledeći primer.

Primer

Pokazati da za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

prvi izvod $f'(x)$ ima prekid druge vrste u tački $x = 0$.

Rešenje. Kako je $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, za $x \neq 0$ i

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0,$$

s obzirom da granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ ne postoje, to funkcija $f'(x)$ ima u tački $x = 0$ prekid druge vrste.

Darbuova teorema

Ako funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ima izvod nad intervalom $[a, b]$ i ako je $f'(a) \neq f'(b)$, onda $f'(x)$ uzima sve međuvrednosti između $f'(a)$ i $f'(b)$.

Košijeva teorema

Ako su funkcije $f(x), g(x)$ neprekidne nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, imaju izvode nad (a, b) i za svako $x \in (a, b)$ je $g'(x) \neq 0$, tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$, takva da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dokaz Košijeve teoreme

Dokaz. Primetimo da je $g(b) - g(a) \neq 0$, jer bi inače funkcija $g(x)$ ispunjavala uslove Rolove teoreme, pa bi postojala tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je $g'(\xi) = 0$, što je suprotno uslovu da je $g'(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$.
Funkcija

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

je neprekidna nad intervalom $[a, b]$, ima izvod u svakoj tački $x \in (a, b)$ i $h(a) = h(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$.

Prema Rolovoj teoremi postoji $\xi \in (a, b)$, takvo da je

$$h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0.$$

Sledi da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

što je i trebalo dokazati. □

Dokaz Lagranžove teoreme.

Lagranžova teorema je specijalan slučaj Košijeve. Naime, stavljajući u Košijevu teoremu $g(x) = x$, dobija se:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

- $\frac{f(x)}{g(x)}$ ima neodređeni oblik „ $\frac{0}{0}$ ” kada $x \rightarrow a$ ako važi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

- $\frac{f(x)}{g(x)}$ ima neodređeni oblik „ $\frac{\infty}{\infty}$ ” kada $x \rightarrow a$ ako važi

$$f(x) \rightarrow \pm\infty, \quad g(x) \rightarrow \pm\infty, \quad x \rightarrow a$$

Lopitalova teorema

Neka su funkcije $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne nad (a, b) ,
 $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$ i neka je $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$
 ($\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$). Tada:

1. Ako postoji $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, $\left(\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B \right)$ tada postoji

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\left(\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \right)$ i važi jednakost

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \quad \left(\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B \right).$$

2. Ako $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow a^+$ ($x \rightarrow b^-$), tada i $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \pm\infty$, kada
 $x \rightarrow a^+$ ($x \rightarrow b^-$).

Dokaz Loptalove teoreme

Dokaz (dela 1. kada $x \rightarrow a^+$). Za funkcije

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in (a, b) \\ 0 & , \quad x = a \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x \in (a, b) \\ 0 & , \quad x = a \end{cases}$$

važi da su neprekidne nad $[a, b)$,
diferencijabilne nad (a, b) ($F'(x) = f'(x)$, $G'(x) = g'(x) \neq 0$),
pa za svako $x \in (a, b)$ zadovoljavaju uslove Košijeve teoreme nad intervalom $[a, x]$.

Sledi da postoji $\xi \in (a, x)$ tako da je

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Kako je $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta \in \mathbb{R}^+$, tako da

$$a < x < a + \delta < b \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon.$$

Primena Košijeve teoreme na intervalu $[a, x]$ za neko $\xi \in (a, x)$ daje jednakost $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ te na osnovu

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \varepsilon$$

pa zaključujemo

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Za slučaj da je $a = -\infty$ uvodimo smenu $t = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

Teorema

Neka su funkcije $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne nad (a, b) , i $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$ i neka $f(x) \rightarrow \pm\infty$ i $g(x) \rightarrow \pm\infty$ kada $x \rightarrow a^+$ ($f(x) \rightarrow \pm\infty$ i $g(x) \rightarrow \pm\infty$ kada $x \rightarrow b^-$). Tada:

1. Ako postoji $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, $\left(\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B \right)$ tada postoji

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \left(\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \right) \text{ i važi jednakost}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \quad \left(\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B \right).$$

2. Ako $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \pm\infty$, kada $x \rightarrow a^+$ (kada $x \rightarrow b^-$), tada i

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \pm\infty, \text{ kada } x \rightarrow a^+ \text{ (kada } x \rightarrow b^-).$$

Primer

Odrediti $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$.

Rešenje. Ovde ne možemo da koristimo Lopitalovo pravilo, jer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$$

ne postoji, dok je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

- Dakle, Lopitalova pravila daju dovoljne, ali ne i potrebne uslove za postojanje granične vrednosti.

I ostali neodređeni izrazi oblika $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ mogu se određivati koristeći Lopitalova pravila.

Primer

Odrediti:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x,$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right),$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x.$

Tejlороva teorema

Neka su funkcija $f(x)$ i svi njeni izvodi do $(n-1)$ -vog reda neprekidni nad $[A, B]$ i neka $f(x)$ ima n -ti izvod nad (A, B) .

Neka je $a \in [A, B]$ proizvoljna tačka. Tada:

za svako $b \in [A, B]$, $b \neq a$, postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$, $b > a$ (tj. postoji bar jedna tačka $\xi \in (b, a)$, $a > b$), takva da je

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n, \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (b-a)^i + R_n, \end{aligned}$$

$$R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Za $b = a + h$ Tejlorova formula je oblika

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

$$R_n(x) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Za $b = x$ Tejlorova formula je oblika

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)), \quad 0 < \theta < 1.$$

Kada je funkcija $f(x)$ predstavljena kao

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + R_n(x)$$

kažemo da je razvijena po Tejlorovoj formuli u tački a .

- $T_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$ Tejlorov polinom
- $R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)), 0 < \theta < 1$ ostatak ili greška

U specijalnom slučaju za $a = 0$ imamo Maklorenovu formulu

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

- $M_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$ Maklorenov polinom
- $R_n(x)$ ostatak ili greška aproksimacije funkcije Maklorenovim polinomom

Primer

Napisati Maklorenove formule za funkcije:

a) $f(x) = e^x$,

b) $f(x) = \sin x$,

c) $f(x) = \cos x$,

d) $f(x) = \ln(1 + x)$,

e) $f(x) = (1 + x)^\alpha$.

Rešenje. a) Kako je $f(x) = f'(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$
i $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = e^0 = 1$, $f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x}$,
to Maklorenova formula za funkciju $f(x) = e^x$ glasi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primer

Napisati polinom $P(x) = 1 + x - 3x^2 + 4x^3$ po stepenima od $x - 1$.

Rešenje. Kako je

$$P(x) = P(1) + \frac{x-1}{1!}P'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}P''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!}P'''(1),$$

i pri tome

$$\begin{array}{ll} P(1) = 3, & \\ P'(x) = 1 - 6x + 12x^2 & \Rightarrow P'(1) = 7, \\ P''(x) = -6 + 24x & \Rightarrow P''(1) = 18, \\ P'''(x) = 24 & \Rightarrow P'''(1) = 24, \end{array}$$

to je $P(x) = 3 + 7(x-1) + 9(x-1)^2 + 4(x-1)^3$.

Napomena u vezi definicije izvoda

Pri definiciji izvoda funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, pretpostavka je da je $x \in D^\circ$.

Mogli smo definisati i izvod u tački $x \in D$, ali uz pretpostavku da je x tačka nagomilavanja skupa D , jer graničnu vrednost

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, x + \Delta x \in D} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

možemo tražiti bez obzira da li je funkcija definisana u nekoj okolini tačke x .

Na primer, tada bi funkcija $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{Q}$, imala „izvod” u svakoj tački $x \in \mathbb{Q}$, dok ona izvod, onako kako smo ga definisali, nema ni u jednoj tački $x \in \mathbb{Q}$.

Česta je situacija da funkcija $f(x)$ u tački a ima otklonjiv prekid, tj. postoji $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, pri čemu ili funkcija $f(x)$ nije definisana u tački a , ili ako je definisana $A \neq f(a)$. Tada funkcija nema izvod u tački a (morala bi da bude neprekidna u a).

Mogli bismo definisati

$$\overline{f'}(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - A}{\Delta x},$$

ako ta granična vrednost postoji i nazvati je **nepravi** ili **kvazi izvod**.

Ako postoji $f'(a)$, tada postoji i $\overline{f'}(a)$ i važi jednakost $f'(a) = \overline{f'}(a)$.

Funkcija u tački a može da ima nepravi izvod, a da nema izvod:

Za funkciju $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ne postoji $f'(0)$, dok je

$$\begin{aligned}\overline{f'}(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x - \Delta x}{(\Delta x)^2} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\sin \Delta x}{2} = 0.\end{aligned}$$

$\overline{f'}(0)$ je u stvari izvod funkcije

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

u nuli, tj. $F'(0) = \overline{f'}(0) = 0$.

Ista je situacija kod jednostranih izvoda. Pretpostavimo da je funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definisana nad intervalom (a, b) i da postoji

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+), \left(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b^-) \right).$$

Ako postoji

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a^+)}{\Delta x}, \quad \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(b + \Delta x) - f(b^-)}{\Delta x}, \right)$$

onda tu graničnu vrednost možemo nazvati **nepravi desni (nepravi levi)** izvod u tački a (b) i obeležiti ga $\overline{f'_+}(a)$ ($\overline{f'_-}(b)$).

Ne interesuje nas da li je funkcija definisana u datim tačkama, niti, ako je definisana, da li je neprekidna sa desne (leve) strane.

Nepravi desni i nepravi levi izvod jednim imenom zovemo **jednostrani nepravi izvodi**.

Ako funkcija u tački ima desni (levi) izvod, onda ona ima u toj tački desni (levi) nepravi (levi nepravi) izvod i oni su jednaki.

Obrnuto nije tačno: Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \quad x < 0 \\ \frac{\cos x - 1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

nije definisana u nuli, pa nema u nuli ni desni ni levi izvod.

Kako je

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

to je

$$\overline{f'}(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0^-)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 0.$$

Slično, kako je

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = 0,$$

to je

$$\overline{f'}_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0^+)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{1}{2}.$$

Ispitivanje funkcija (Monotonost)

Definicija

Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ je nad intervalom $I \subset \mathbb{R}$

1. **monotono rastuća** ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in I$ važi
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$
2. **monotono opadajuća** ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in I$ važi
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$
3. **monotono nerastuća** ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in I$ važi
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$
4. **monotono neopadajuća** ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in I$ važi
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

U svakom od navedenih slučajeva funkcija je monotona, u slučajevima 1 i 2 je strogo monotona.

Teorema

*Neka funkcija $f(x)$ ima izvod **nad intervalom I** . Ako je $f(x)$ monotono neopadajuća funkcija nad intervalom I tada je $f'(x) \geq 0$, za $x \in I$, a ako je monotono nerastuća funkcija nad intervalom I tada je $f'(x) \leq 0$, za $x \in I$.*

Dokaz (za monotono neopadajuću funkciju). Za proizvoljno $x \in I$, s obzirom da je $f(x)$ monotono neopadajuća funkcija je

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0, \quad x + \Delta x \in I,$$

odakle sledi da je

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Teorema

*Neka funkcija $f(x)$ ima prvi izvod **nad intervalom I** . Ako je $f'(x) > 0$, funkcija $f(x)$ je monotonno rastuća nad intervalom I , a ako je $f'(x) < 0$, funkcija $f(x)$ je monotonno opadajuća nad intervalom I .*

Dokaz. Neka je $[x_1, x_2] \subset I$ proizvoljan podinterval intervala I . Funkcija $f(x)$ nad intervalom $[x_1, x_2]$ zadovoljava sve uslove Lagranžove teoreme, pa postoji tačka $\xi \in (x_1, x_2)$ takva da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Ako je $f'(x) > 0$, tada je i $f'(\xi) > 0$, pa je

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Dokaz je sličan kada je $f'(x) < 0$.

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke a . Funkcija je **rastuća u tački** a , ako postoji okolina tačke a u kojoj za svako x iz te okoline važi $f(x) > f(a)$ za $x > a$; $f(x) < f(a)$ za $x < a$. Funkcija je **opadajuća u tački** a , ako postoji okolina tačke a u kojoj za svako x iz te okoline važi $f(x) < f(a)$ za $x > a$; $f(x) > f(a)$ za $x < a$.

Teorema

Ako je funkcija $f(x)$ rastuća (opadajuća) **u tački** a i ako postoji $f'(a)$, tada je $f'(a) \geq 0$, ($f'(a) \leq 0$).

Teorema

Pretpostavimo da funkcija $f(x)$ **u tački** a ima izvod $f'(a) \neq 0$. Ako je $f'(a) > 0$, funkcija $f(x)$ je rastuća u tački a , a ako je $f'(a) < 0$ ona je u tački a opadajuća.

Primer

Pokazati da funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ nije monotona ni u jednoj okolini nule. Da li je ova funkcija rastuća u nuli?

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, pa je funkcija rastuća u nuli.

Funkcija nije monotona ni u jednoj okolini nule: ako posmatramo nizove sa opštim članovima

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \quad c_n = -\frac{1}{2n\pi}, \quad d_n = -\frac{1}{(2n+1)\pi},$$

možemo primetiti da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0,$$

$$f'(a_n) = f'(c_n) = -\frac{1}{2}, \quad f'(b_n) = f'(d_n) = \frac{3}{2},$$

pa ne postoji okolina nule u kojoj je prvi izvod stalnog znaka.

Dovoljan uslov za monotonost:

Teorema

Neka funkcija $f(x)$ ima prvi izvod u okolini tačke a i neka je $f'(x)$ neprekidna funkcija u tački a . Ako je $f'(a) > 0$, funkcija $f(x)$ je monotono rastuća u nekoj okolini tačke a , a ako je $f'(a) < 0$, funkcija $f(x)$ je monotono opadajuća u nekoj okolini tačke a .

Darbuova teorema

Ako funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ima izvod nad intervalom $[a, b]$ i ako je $f'(a) \neq f'(b)$, onda $f'(x)$ uzima sve međuvrednosti između $f'(a)$ i $f'(b)$.

- funkcija $f'(x)$ ne mora biti neprekidna nad $[a, b]$, $f'(x)$ može imati prekid druge vrste

Dokaz. Neka je $f'(a) > f'(b)$ i $f'(a) > C > f'(b)$.

Posmatrajmo funkciju $g(x) = f(x) - Cx$.

$g'(x) = f'(x) - C$, pa je

$$g'(a) = f'(a) - C > 0 > f'(b) - C = g'(b).$$

$g(x)$ je neprekidna nad $[a, b]$, pa nad njim dostiže svoju najveću vrednost, tj. postoji $\xi \in [a, b]$ da je $g(\xi) = \max_{x \in [a, b]} g(x)$.

Štaviše, $\xi \neq a$ jer je $g'(a) > 0$ ($g(x)$ je rastuća u a) i $\xi \neq b$, jer je $g'(b) < 0$.

Dakle, $\xi \in (a, b)$.

Kako je tu ekstrem, mora biti $g'(\xi) = 0$, tj. $f'(\xi) = C$.

Ispitivanje funkcija (Ekstremne vrednosti funkcija)

Definicija

Ako je realna funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke $a \in \mathbb{R}$, tada kažemo da funkcija $f(x)$ u tački a ima **lokalni minimum** ako postoji $\delta > 0$ takvo da

$$x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) > f(a),$$

a **lokalni maksimum** ako postoji $\delta > 0$ takvo da

$$x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) < f(a).$$

- tačka a je tada **lokalna ekstremna vrednost** i to je najmanja ili najveća vrednost funkcije u nekoj okolini tačke a .
- ako je za $x = a + \Delta x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ priraštaj funkcije $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) > 0$ tada funkcija u tački a ima lokalni minimum, a ako je $\Delta y < 0$ ima lokalni maksimum

Teorema

Ako funkcija $f(x)$ ima u tački a ekstremnu vrednost i ako postoji $f'(a)$ tada je $f'(a) = 0$.

- uslov je potreban, ne i dovoljan (primer funkcije x^3)
- **stacionarne tačke** - tačke u kojima je $f'(x) = 0$
- funkcija može imati ekstremnu vrednost u $x = a$, a da $f'(a)$ ne postoji (primer funkcije $|x|$)
- **kritične tačke**

Teorema

Ako je funkcija u tački a neprekidna i postoji $\delta > 0$ takvo da za $x \in (a - \delta, a)$ je $f'(x) > 0$, ($f'(x) < 0$), a za $x \in (a, a + \delta)$ je $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) onda funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost i to maksimum (minimum).

Dokaz (za maksimum).

Ako za $x \in (a - \delta, a)$ važi $f'(x) > 0$, funkcija je monotono rastuća nad $(a - \delta, a)$.

Ako za $x \in (a, a + \delta)$ važi $f'(x) < 0$, funkcija je monotono opadajuća nad $(a, a + \delta)$.

Ako bi postojala neka tačka $x_1 \in (a - \delta, a)$ takva da je $f(x_1) \geq f(a)$, sledilo bi da postoji tačka $\xi \in (x_1, a)$ takva da je

$$0 \geq f(a) - f(x_1) = f'(\xi)(a - x_1).$$

Moralo bi biti $f'(\xi) \leq 0$. Kontradikcija.

Slično se pokazuje da ne postoji tačka $x_1 \in (a, a + \delta)$ takva da je $f(x_1) \geq f(a)$.

Teorema

Neka je $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ i $f^{(n)}(a) \neq 0, n \geq 2$. Ako je n paran broj, funkcija $f(x)$ ima u tački a ekstremnu vrednost i to:

- *maksimum ako je $f^{(n)}(a) < 0$ odnosno,*
- *minimum ako je $f^{(n)}(a) > 0$.*

Ako je n neparan broj funkcija $f(x)$ nema ekstremnu vrednost u tački a . U tom slučaju ako je $f^{(n)}(a) > 0$ funkcija je u tački a rastuća a ako je $f^{(n)}(a) < 0$ funkcija je u tački a opadajuća.

Dokaz (za slučaj $f^{(n)}(a) > 0$): Iz Tejlorove formule

$$f(a + \Delta x) = f(a) + \frac{\Delta x}{1} f'(a) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a + \theta \Delta x),$$

$$0 < \theta < 1$$

i uslova teoreme sledi

$$f(a + \Delta x) - f(a) = \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a + \theta \Delta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

Ako je $f^{(n)}(a) > 0$ tada je $f^{(n-1)}(x)$ rastuća funkcija u tački a , pa je

$$f^{(n-1)}(a + \theta \Delta x) > f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \Delta x > 0,$$

$$f^{(n-1)}(a + \theta \Delta x) < f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \Delta x < 0.$$

Ako je n parno, izraz

$$\frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a + \theta \Delta x),$$

(a onda i priraštaj funkcije) je za svako dovoljno malo Δx pozitivan, tj. funkcija u tački a ima minimum.

Ako je n neparno, izraz

$$\frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a + \theta \Delta x),$$

nije stalnog znaka (pozitivan je za $\Delta x > 0$, a negativan za $\Delta x < 0$) i ekstremne vrednosti u a nema.

Primer

Proveriti da li funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2 (2 + \sin \frac{1}{x}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ ima ekstremnu vrednost u tački $x = 0$.

Rešenje. Kako je

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} ,$$

$$f''(x) = 4 + 2 \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}, x \neq 0,$$

to je $f'(0) = 0$, pa je $x = 0$ stacionarna tačka. $f''(0)$ ne postoji. Pokažimo da ne postoji $\delta > 0$ takvo da je u intervalu $(-\delta, 0)$, odnosno u intervalu $(0, \delta)$ prvi izvod istog znaka.

Ako posmatramo nizove se opštim članovima

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \quad c_n = -\frac{1}{2n\pi}, \quad d_n = -\frac{1}{(2n+1)\pi},$$

vidimo da važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0.$$

Dakle, u svakoj okolini nule su skoro svi članovi posmatranih nizova.
Kako je

$$f'(a_n) = \frac{2}{n\pi} - 1 < 0, \quad f'(b_n) = \frac{4}{(2n+1)\pi} + 1 > 0,$$

$$f'(c_n) = -\frac{2}{n\pi} - 1 < 0, \quad f'(d_n) = -\frac{4}{(2n+1)\pi} + 1 > 0,$$

sledi da za svako $\delta > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za svako $n \geq n_0$

$$a_n, b_n \in (0, \delta) \quad \wedge \quad c_n, d_n \in (-\delta, 0).$$

Dakle, sledi da za svako $\delta > 0$ u intervalima $(-\delta, 0)$ i $(0, \delta)$ postoje tačke u kojima je prvi izvod pozitivan i tačke u kojima je prvi izvod negativan.

Dakle, **prvi izvod ne menja znak prolazeći kroz tačku $x = 0$.**

Na osnovu do sada utvrđenih kriterijuma ne možemo reći da li funkcija u tački nula ima ekstremnu vrednost ili ne.

Kako je $f(0) = 0$ i $f(x) > 0$ za svako $x \neq 0$, sledi da **funkcija $f(x)$ u tački nula ima minimum.**

Ispitivanje funkcija (Tangenta i normala krive)

Videli smo već da ako funkcija $f(x)$ ima izvod u tački a , jednačina tangente u tački $A(a, f(a))$ je

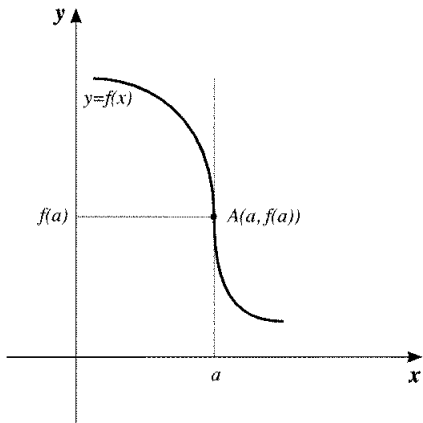
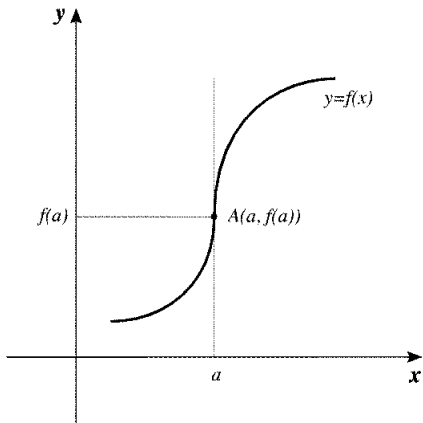
$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

a jednačina normale u tački $A(a, f(a))$ je

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a),$$

ako je $f'(a) \neq 0$, odnosno normala je $x = a$ ako je $f'(a) = 0$.

- Tangenta funkcije u tački $A(a, f(a))$ može da bude paralelna sa y -osom, ako $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \infty$ ili $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow -\infty$ kada $\Delta x \rightarrow 0$:



U ovim slučajevima tangenta u tački $A(a, f(a))$ je prava $x = a$, a normala je prava $y = f(a)$.

- Može da se desi da ne postoji $f'(a)$, ali postoji $f'_+(a)$ ili $f'_-(a)$:

Ako postoji $f'_+(a)$, prava

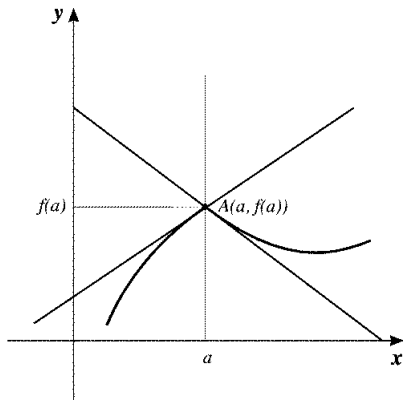
$$y - f(a) = f'_+(a)(x - a)$$

je tangenta na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$ (desna tangenta).

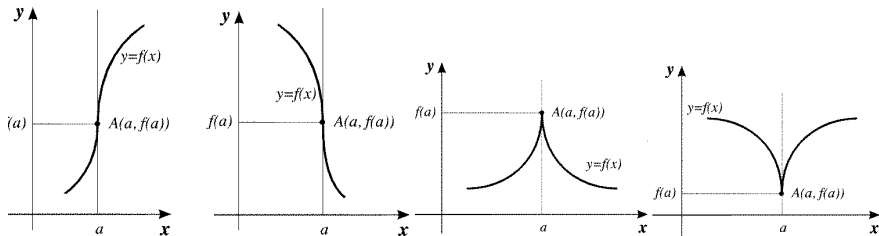
Ako postoji $f'_-(a)$, prava

$$y - f(a) = f'_-(a)(x - a)$$

je tangenta na levu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$ (leva tangenta)



- ako $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \infty$ ili $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow -\infty$ kada $\Delta x \rightarrow 0^+$ prava $x = a$ je tangenta na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$,
- ako $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \infty$ ili $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow -\infty$ kada $\Delta x \rightarrow 0^-$ prava $x = a$ je tangenta na levu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$,
- ako je prava $x = a$ tangenta i na levu i na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$, prava $x = a$ je tangenta funkcije u tački $A(a, f(a))$.



- Ako ne postoji $f'_+(a)$, a postoji nepravi desni izvod $\bar{f}'_+(a)$ u tački a , prava

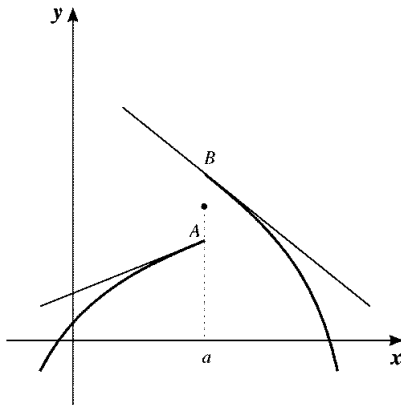
$$y - f(a^+) = \bar{f}'_+(a)(x - a)$$

je tangenta na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a^+))$.

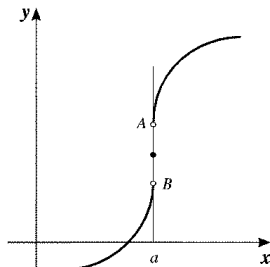
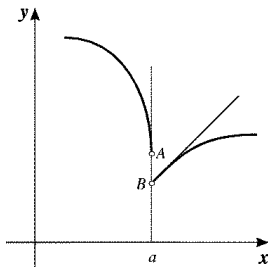
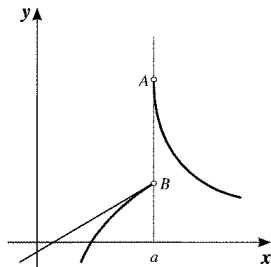
- Ako ne postoji $f'_-(a)$, a postoji nepravi levi izvod $\bar{f}'_-(a)$ u tački a , prava

$$y - f(a^-) = \bar{f}'_-(a)(x - a)$$

je tangenta na levu granu funkcije u tački $A(a, f(a^-))$.



- ako $\frac{f(a + \Delta x) - f(a^+)}{\Delta x} \rightarrow \pm\infty$, kada $\Delta x \rightarrow 0^+$, prava $x = a$ je tangenta na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a^+))$
- ako $\frac{f(a + \Delta x) - f(a^-)}{\Delta x} \rightarrow \pm\infty$, kada $\Delta x \rightarrow 0^-$, prava $x = a$ je tangenta na levu granu funkcije u tački $B(a, f(a^-))$



Pretpostavimo da funkcija ima izvod u tački a i da je $f'(a) \neq 0$.

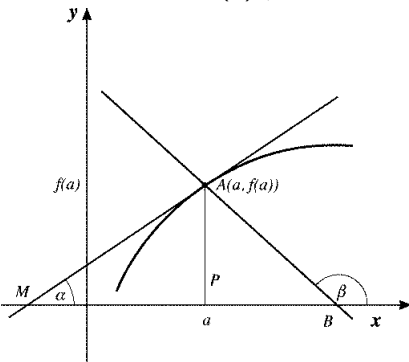
- deo tangente od tačke A do preseka sa x -osom naziva se **dužina tangente**, T , a dužina njene projekcije na x -osu naziva se **subtangenta**, S_T .

- deo normale od tačke A do preseka sa x -osom naziva se **dužina normale**, N , a dužina njene projekcije na x -osu naziva se **subnormala**, S_N .

Iz $|f'(a)| = |\operatorname{tg} \alpha| = \frac{|f(a)|}{S_T} = \frac{S_N}{|f(a)|}$ sledi

$$S_T = \left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right|, \quad T = \sqrt{f^2(a) + S_T^2}$$

$$S_N = |f(a)f'(a)|, \quad N = \sqrt{f^2(a) + S_N^2}$$



Ispitivanje funkcija (Konveksnost, konkavnost, pt)

Definicija

Funkcija $f(x)$ definisana nad intervalom I je **konveksna** nad I ako za proizvoljne dve tačke $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ za svako $x, x_1 < x < x_2$ važi

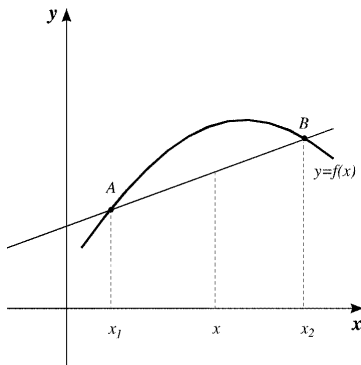
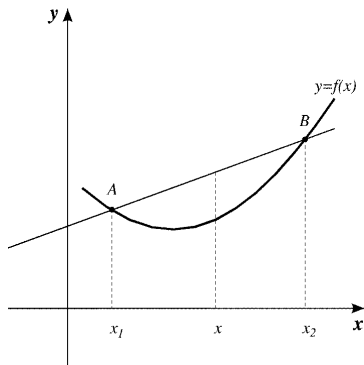
$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2).$$

Ako je

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

funkcija je **konkavna**.

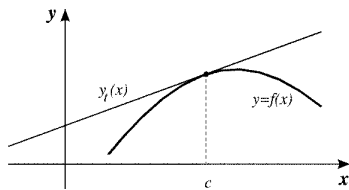
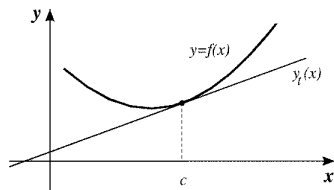
Geometrijska interpretacija: Ako postavimo sečicu kroz tačke $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$, $x_1 < x_2$ grafik funkcije je uvek ispod sečice nad intervalom (x_1, x_2) u slučaju konveksnosti, odnosno iznad sečice u slučaju konkavne funkcije nad (x_1, x_2) .



Ako postoji izvod funkcije $f(x)$ nad intervalom I tada konveksnost i konkavnost može da se definiše na dva (ekvivalentna) načina:

Definicija 1

Funkcija $f(x)$ je konveksna nad I ako za svako $c \in I$ i $x \in I \setminus \{c\}$ $f(x) > y_t(x)$, gde je $y_t = f(c) + f'(c)(x - c)$ jednačina tangente na krivu u tački $C(c, f(c))$ (u slučaju konkavnosti je $f(x) < y_t(x)$.)



Definicija 2

Funkcija $f(x)$ je konveksna (konkavna) nad I ako je $f'(x)$ monotonno rastuća (opadajuća) funkcija nad I .

Teorema

Ako funkcija ima izvod nad intervalom I , tada su Definicija 1 i Definicija 2 konveksnosti (konkavnosti) ekvivalentne.

Dokaz. Pokažimo da Definicija 1 \Rightarrow Definicija 2, za slučaj konveksnosti: Neka je funkcija $f(x)$ konveksna nad intervalom I u smislu Definicije 1. Neka su x_1 i x_2 , $x_1 < x_2$ proizvoljne tačke iz intervala I . Neka su

$$y_t^1 = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1),$$

$$y_t^2 = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2),$$

tangente na datu funkciju u tačkama $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$. Tada važi

$$f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$f(x_1) > f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobija se

$$f(x_2) + f(x_1) > f(x_1) + f(x_2) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$

tj.

$$(f'(x_2) - f'(x_1))(x_2 - x_1) > 0,$$

odakle sledi

$$f'(x_2) > f'(x_1),$$

pa je $f'(x)$ monotonno rastuća funkcija nad intervalom I .



Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke a i neka je u tački a diferencijabilna. Funkcija $f(x)$ je **konveksna (konkavna)** u tački a ako postoji okolina $(a - \delta, a + \delta)$ tačke a , takva da je

$$f(x) \geq y_t(x) \quad (f(x) \leq y_t(x)),$$

za svako $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, gde je

$$y_t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

jednačina tangente na datu funkciju u tački $A(a, f(a))$.

Teorema

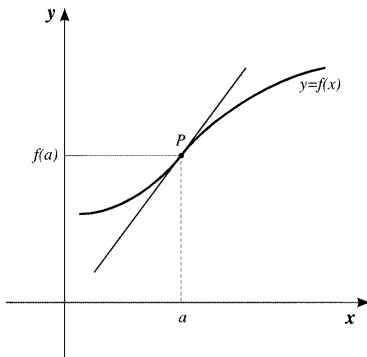
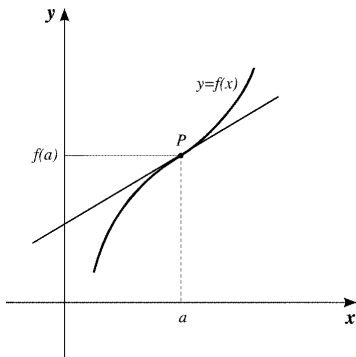
Ako je $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) nad intervalom I , tada je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I . Ako postoji $f''(x)$ nad I i ako je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna) nad I , tada je $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) nad I .

Dokaz. Ako je $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), tada je $f'(x)$ monotono rastuća (opadajuća) funkcija, pa je $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I .

Ako je je $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I , tada je $f'(x)$ monotono rastuća (opadajuća) funkcija nad intervalom I , pa je $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) nad intervalom I .

Definicija

Za tačku $P(a, f(a))$ se kaže da je **prevojna tačka** funkcije $f(x)$ ako postoji okolina $(a - \delta, a + \delta)$ tačke a , takva da je funkcija $f(x)$ nad intervalom $(a - \delta, a)$ konkavna, a nad intervalom $(a, a + \delta)$ konveksna ili obrnuto.



Teorema

Ako je $P(a, f(a))$ prevojna tačka funkcije $f(x)$ i ako postoji $f''(a)$, tada je $f''(a) = 0$.

Dokaz. $f'(x)$ ima ekstremnu vrednost u tački a !

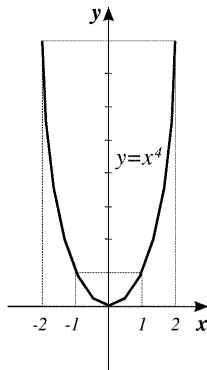
Obrnuto ne mora da važi! Funkcija $f(x) = x^4$ ima drugi izvod

$$f''(x) = 12x^2$$

za koji je

$$f''(0) = 0,$$

a tačka $O(0,0)$ nije prevojna tačka.



Za funkciju $f(x) = (x-1)^3$ je $A(1,0)$ prevojna tačka, jer je

$$f''(x) = 6(x-1)$$

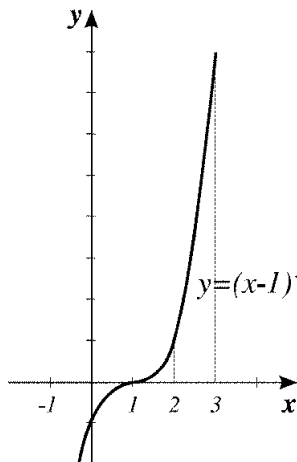
pa je

$$f''(x) > 0 \text{ za } x > 1$$

$$f''(x) < 0 \text{ za } x < 1,$$

a

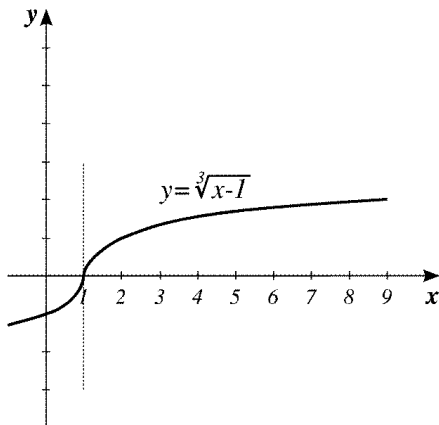
$$f''(1) = 0.$$



Tačka a može da bude prevojna tačka funkcije a da u tački a ne postoji drugi izvod:

Ako u tački a drugi izvod $f''(x)$ menja znak (bez obzira da li postoji $f''(a)$) i ako je funkcija $f(x)$ definisana u tački a , tada je $P(a, f(a))$ prevojna tačka date funkcije.

Primer je funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ za koju je $P(1,0)$ prevojna tačka, $f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$ menja znak prolazeći kroz nju, a $f''(1)$ ne postoji.



Teorema

Ako je $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$), funkcija $f(x)$ je konveksna (konkavna) u tački a .

Ako je $f''(a) > 0$, ne postoji uvek okolina tačke a nad kojom je funkcija konveksna!

Ako $f''(x)$ postoji u nekoj okolini tačke a i ako je neprekidan u a , onda iz $f''(a) > 0$ sledi da postoji okolina tačke a nad kojom je funkcija konveksna.

Teorema

Ako postoji $\delta > 0$ takvo da je u intervalu $(a - \delta, a)$ funkcija ispod (iznad) tangente funkcije $f(x)$ u tački $A(a, f(a))$, a u intervalu $(a, a + \delta)$ funkcija iznad (ispod) tangente funkcije $f(x)$ u tački $A(a, f(a))$ i ako postoji $f''(a)$, tada je $f''(a) = 0$.

Može se desiti da je u intervalu $(a - \delta, a)$ funkcija ispod (iznad) tangente, a u intervalu $(a, a + \delta)$ funkcija iznad (ispod) tangente funkcije $f(x)$ u tački $A(a, f(a))$, a tačka $A(a, f(a))$ nije prevojna!

Primer

Ispitati da li je tačka $O(0, 0)$ prevojna tačka funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x^3(2 + \sin \frac{1}{x^2}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} ,$$

$f''(x) = 12x + 6x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} \cos \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} \sin \frac{1}{x^2}$, za $x \neq 0$, a $f''(0)$ ne postoji. Posmatraju se nizovi s opštim članovima

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}, \quad c_n = -\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, \quad d_n = -\frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}} .$$

Teorema

Neka je $f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$, $n \geq 3$.

Ako je n neparan, tada je $P(a, f(a))$ prevojna tačka funkcije $f(x)$.

Ako je n paran, tada je funkcija u okolini tačke $x = a$ konveksna za $f^{(n)}(a) > 0$, a konkavna za $f^{(n)}(a) < 0$.

Dokaz. (za prevojnu tačku) Neka je $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Kako je $f^{(2k+1)}(a) = (f'')^{(2k-1)}(a) \neq 0$, to sledi da je $f''(x)$ rastuća funkcija u tački $x = a$ za $(f'')^{(2k-1)}(a) > 0$, a opadajuća funkcija za $(f'')^{(2k-1)}(a) < 0$. Sledi da postoji $\delta > 0$ tako da je $f''(x) < f''(a) = 0$ ($f''(x) > f''(a) = 0$), za $x \in (a - \delta, a)$, a $f''(x) > f''(a) = 0$ ($f''(x) < f''(a) = 0$), za $x \in (a, a + \delta)$.

Dakle, nad intervalom $(a - \delta, a)$ je funkcija konkavna (konveksna), a nad intervalom $(a, a + \delta)$ konveksna (konkavna), pa je $A(a, f(a))$ prevojna.

Ispitivanje funkcija (Asimptote funkcija)

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana nad intervalom (a, ∞) ($(-\infty, a)$), $a \in \mathbb{R}$. Funkcija $\phi(x)$ je **asimptota funkcije** $f(x)$ kada $x \rightarrow \infty$, ako je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - \phi(x)] = 0.$$

Slično, funkcija $\phi(x)$ je asimptota funkcije $f(x)$ kada $x \rightarrow -\infty$, ako je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \phi(x)] = 0.$$

- $f(x)$ se **asimptotski ponaša** kao $\phi(x)$, kad $x \rightarrow \infty$ (tj. $x \rightarrow \infty$), što pišemo $f(x) \sim \phi(x)$
- **Geometrijski smisao**: postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je razlika ordinata krivih $y = f(x)$ i $y = \phi(x)$ proizvoljno mala za $x > b$ ($x < b$).

Ako je asimptota funkcije prava $\phi(x) = mx + n$, tada funkcija $y = f(x)$ ima

- za $m \neq 0$ ima **kosu** asimptotu $\phi(x) = mx + n$,
- za $m = 0$ ima **horizontalnu** asimptotu $\phi(x) = n$.

Po definiciji je, za $x \rightarrow \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$ ili

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x} \right] = 0$, pa je

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx].$$

Definicija

*Funkcija $y = f(x)$ ima **vertikalnu asimptotu** u tački nagomilavanja $x = a$ definicionog skupa, ako funkcija bar sa jedne strane tačke a teži ∞ odnosno $-\infty$. Za pravu $x = a$ kažemo da je vertikalna asimptota funkcije $f(x)$.*

Ispitivanje toka funkcije

- Obavezna grupa zahteva
 - određivanje oblasti definisanosti
 - određivanje nula funkcije
 - određivanje intervala monotonosti i ekstremnih vrednosti
 - određivanje intervala konveksnosti, konkavnosti i prevojnih tačaka
 - određivanje asimptota funkcije i ispitivanje položaja grafika u odnosu na asimptote
 - tangente funkcije u tačkama gde ne postoji $f'(x)$ i njegovo ponašanje u tim tačkama
 - skiciranje grafika funkcije
- Neobavezna grupa zahteva
 - znak funkcije
 - parnost i neparnost funkcije
 - periodičnost funkcije