

Bulove algebre

Definicija 1 Uređena šestorka $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$, gde su $+$ i \cdot binarne operacije skupa B , $'$ unarna operacija skupa B , a 0 i 1 dva različita elementa skupa B , je **Bulova algebra** ako važe sledeće aksiome:

[BA1] komutativnost: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$,

[BA2] distributivnost: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$,

[BA3] neutralni elementi: $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$,

[BA4] inverzni elementi: $a + a' = 1$, $a \cdot a' = 0$.

★ Svaka konačna Bulova algebra ima 2^n elemenata, za neko $n \in \mathbb{N}$.

Primeri Bulovih algebri:

Primer 1 Uređena šestorka $\mathcal{I} = (I, \vee, \wedge, \neg, \perp, \top)$ je Bulova algebra, gde je $I = \{\perp, \top\}$, i gde su \vee, \wedge i \neg poznate operacije iskaznog računa - disjunkcija, konjunkcija i negacija:

\vee	\perp	\top
\perp	\perp	\top
\top	\top	\top

\wedge	\perp	\top
\perp	\perp	\perp
\top	\perp	\top

\neg	\perp	\top
\perp	\top	\perp
\top	\perp	\top

Šestorku \mathcal{I} nazivamo **Bulovom algebrom iskaznog računa**.

Lako se proverava da je \mathcal{I} zaista Bulova algebra:

[BA1] Logičke operacije \vee i \wedge su komutativne što sledi iz odgovarajućih tautologija

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p) \quad i \quad (p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p).$$

[BA2] Operacije \vee i \wedge su distributivne jedna prema drugoj što sledi iz tautologija

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \quad i \quad (p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)).$$

[BA3] Aksiome $a + 0 = a$ i $a \cdot 1 = a$ su zadovoljene što sledi iz odgovarajućih tautologija

$$(p \vee \perp) \Leftrightarrow p \quad i \quad (p \wedge \top) \Leftrightarrow p.$$

[BA4] Ispunjenost aksioma $a + a' = 1$ i $a \cdot a' = 0$ sledi iz tautologija

$$(p \vee \neg p) \Leftrightarrow \top \quad i \quad (p \wedge \neg p) \Leftrightarrow \perp.$$

Takođe, sve ove osobine se mogu dokazati i direktnom proverom. ▲

Primer 2 Neka je A proizvoljan neprazan skup. Uređena šestorka $\mathcal{P}(A) = (P(A), \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A)$, gde je $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ partitivni skup (skup svih podskupova) skupa A , operacije \cup i \cap predstavljaju uniju i presek skupova, a $\overline{}$ je komplement ($\overline{X} = A \setminus X$), jeste Bulova algebra (zovemo je **Bulova algebra skupova**).

[BA1] Operacije \cup i \cap su komutativne, tj. za sve $X, Y \in P(A)$ važi $X \cup Y = Y \cup X$ i $X \cap Y = Y \cap X$.

[BA2] Operacije \cup i \cap su distributivne jedna prema drugoj, odnosno za sve $X, Y, Z \in P(A)$ je $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ i $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

[BA3] Za svako $X \in P(A)$ važi $X \cup \emptyset = X$ i $X \cap A = X$.

[BA4] Za svako $X \in P(A)$ važi $X \cup \bar{X} = A$ i $X \cap \bar{X} = \emptyset$. ▲

Primer 3 Uređena šestorka $\mathcal{D}_{30} = (D_{30}, \text{NZS}, \text{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30)$ gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ skup delitelja broja 30, NZS je najmanji zajednički sadržalac, a NZD je najveći zajednički delilac dva broja, jeste Bulova algebra i zovemo je **Bulova algebra delitelja broja 30**.

Kako je $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, svaki element skupa $x \in D_{30}$ možemo predstaviti u obliku $x = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$ za neke $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$, a operacije NZS, NZD i $\frac{30}{x}$ u obliku

$$\text{NZS}(2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}, 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}) = 2^{\max\{\alpha_1, \alpha_2\}} \cdot 3^{\max\{\beta_1, \beta_2\}} \cdot 5^{\max\{\gamma_1, \gamma_2\}},$$

$$\text{NZD}(2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}, 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}) = 2^{\min\{\alpha_1, \alpha_2\}} \cdot 3^{\min\{\beta_1, \beta_2\}} \cdot 5^{\min\{\gamma_1, \gamma_2\}},$$

$$\frac{30}{2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma} = \frac{2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1}{2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma} = 2^{1-\alpha} \cdot 3^{1-\beta} \cdot 5^{1-\gamma},$$

gde su operacije max, min i $1-t$ skupa $\{0, 1\}$ definisane Keplijevim tablicama:

max	0	1	min	0	1		1-t
0	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0

i to su praktično redom logičke operacije \vee , \wedge i \neg , gde je \perp označeno kao 0, a \top kao 1.

[BA1] Komutativnost operacije NZS sledi iz komutativnosti operacije max, odnosno iz komutativnosti logičke disjunkcije. Analogno komutativnost operacije NZD sledi iz komutativnosti operacije min, odnosno iz komutativnosti logičke konjunkcije.

[BA2] Ako operacije max i min posmatramo kao logičke operacije \vee i \wedge , koristeći distributivnost operacije \wedge prema operaciji \vee i obratno, dobijamo distributivnost operacije NZD prema NZS i obratno.

[BA3] Za proizvoljno $x \in D_{30}$ jednakosti $\text{NZS}(x, 1) = x$ i $\text{NZD}(x, 30) = x$ su očigledne, ali ih možemo dokazati i primenom tautologija $(p \vee \perp) \Leftrightarrow p$ i $(p \wedge \top) \Leftrightarrow p$.

[BA4] Posmatrajmo proizvoljno $x \in D_{30}$. Jednakosti $\text{NZS}(x, \frac{30}{x}) = 30$ i $\text{NZD}(x, \frac{30}{x}) = 1$ se lako proveravaju direktno, ali ih možemo dokazati i primenom tautologija $(p \vee \neg p) \Leftrightarrow \top$ i $(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow \perp$. ▲

Zadatak 1 Ispitati da li je $\mathcal{D}_{12} = (D_{12}, \text{NZS}, \text{NZD}, \frac{12}{x}, 1, 12)$ Bulova algebra, gde je D_{12} skup delilaca broja 12.

Rešenje: Kako je $12 = 2^2 \cdot 3$, to je $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

[BA1] Komutativnost operacija NZD i NZS je očigledna.

[BA2] Uzajamna distributivnost operacija NZD i NZS se proverava kao u primeru 3.

[BA3] Za svako $x \in D_{12}$ očigledno važi $\text{NZD}(x, 1) = 1$ i $\text{NZS}(x, 12) = 12$.

[BA4] Aksiome $\text{NZS}(x, \frac{12}{x}) = 12$ i $\text{NZD}(x, \frac{12}{x}) = 1$ međutim nisu zadovoljene, jer je npr.
 $\text{NZS}(2, \frac{12}{2}) = \text{NZS}(2, 6) = 6 \neq 12$ i $\text{NZD}(2, \frac{12}{2}) = \text{NZD}(2, 6) = 2 \neq 1$.

Prema tome, \mathcal{D}_{12} nije Bulova algebra. □

[?] Zašto \mathcal{D}_{30} jeste, a \mathcal{D}_{12} nije Bulova algebra? Videli smo da aksioma [BA4] ne važi u \mathcal{D}_{12} jer je npr. $\text{NZS}(2, \frac{12}{2}) = 6 \neq 12$ i $\text{NZD}(2, \frac{12}{2}) = 2 \neq 1$. Problem je u tome što najveći zajednički delilac brojeva 2 i 6 nije 1 nego 2. Ovaj uslov je precizno formulisao u narednom tvrđenju.

Tvrđenje 1 Neka je $n \geq 2$ prirodan broj, i neka je D_n skup svih delitelja broja n . Uređena šestorka $\mathcal{D}_n = (D_n, \text{NZS}, \text{NZD}, \frac{n}{x}, 1, n)$ je Bulova algebra ako i samo ako je $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$, gde su p_1, p_2, \dots, p_r međusobno različiti prosti brojevi (tj. u faktORIZACIJI broja n se svaki prost faktor pojavljuje najviše jednom).

Osnovne teoreme Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

[BT1] idempotentnost: $a + a = a, \quad a \cdot a = a,$

Dokaz: $a \stackrel{[\text{BA3}]}{=} a \cdot 1 \stackrel{[\text{BA4}]}{=} a \cdot (a + a') \stackrel{[\text{BA2}]}{=} a \cdot a + a \cdot a' \stackrel{[\text{BA4}]}{=} a \cdot a + 0 \stackrel{[\text{BA3}]}{=} a \cdot a.$

[BT2] ograničenost: $a + 1 = 1, \quad a \cdot 0 = 0,$

[BT3] apsorbcija: $a + a \cdot b = a, \quad a \cdot (a + b) = a,$

[BT4] $a + a' \cdot b = a + b, \quad a \cdot (a' + b) = a \cdot b,$

[BT5] asocijativnost: $(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$

[BT6] jedinstvenost komplementa: $(a + x = 1 \wedge a \cdot x = 0) \Rightarrow x = a',$

[BT7] involucija: $(a')' = a,$

[BT8] $0' = 1 \wedge 1' = 0,$

[BT9] De Morganovi zakoni: $(a + b)' = a' \cdot b' \wedge (a \cdot b)' = a' + b'.$

★ Primetimo da se aksiome i teoreme javljaju u *dualnim* parovima. Naime, ako u nekoj aksiomi ili teoremi svako $+$ zamenimo sa \cdot , svako \cdot sa $+$, 0 sa 1 i 1 sa 0 , dobijamo dualnu aksiomu, odnosno teoremu. Ovo pravilo se naziva **princip dualnosti**. Stoga, ako dokažemo neko tvrđenje, na osnovu principa dualnosti mora da važi i dualno tvrđenje koje se dobija gorepomenutim zamenama.

Definicija 2 Podalgebra Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ je svaka Bulova algebra $\mathcal{C} = (C, +, \cdot, ', 0, 1)$, gde je $C \subseteq B$, a operacije iz \mathcal{C} su restrikcije operacija iz \mathcal{B} .

Teorema 1 Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Bulova algebra i $C \subseteq B$. Tada je $\mathcal{C} = (C, +, \cdot, ', 0, 1)$ podalgebra Bulove algebre \mathcal{B} ako i samo ako za svako a i b iz skupa C važi:

$$a + b \in C, \quad ab \in C \quad \text{i} \quad a' \in C.$$

★ Konstante 0 i 1 iz podalgebre su iste kao konstante 0 i 1 u samoj Bulovoj algebri \mathcal{B} . Svaka Bulova algebra ima kao podalgebre tzv. trivijalne podalgebre $(\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$ i samu sebe.

Zadatak 2 Naći sve podalgebre Bulovih algebri \mathcal{D}_{30} i $\mathcal{P}(A)$, za $A = \{a, b, c\}$.

Rešenje: Skupovi $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ i $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$ imaju po 8 elemenata, pa posmatramo samo njihove podskupove koji imaju 2, 4 ili 8 elemenata i sadrže odgovarajuće konstante.

- Podalgebre od \mathcal{D}_{30} su:

$$\mathcal{B}_1 = (\{1, 30\}, \text{NZS}, \text{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30),$$

$$\mathcal{B}_2 = (\{1, 30, 2, 15\}, \text{NZS}, \text{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30),$$

$$\mathcal{B}_3 = (\{1, 30, 3, 10\}, \text{NZS}, \text{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30),$$

$$\mathcal{B}_4 = (\{1, 30, 5, 6\}, \text{NZS}, \text{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30),$$

$$\mathcal{B}_5 = \mathcal{D}_{30}.$$

- Podalgebre od $\mathcal{P}(A)$ su:

$$C_1 = (\{\emptyset, A\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A),$$

$$C_2 = (\{\emptyset, A, \{a\}, \{b, c\}\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A),$$

$$C_3 = (\{\emptyset, A, \{b\}, \{a, c\}\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A),$$

$$C_4 = (\{\emptyset, A, \{c\}, \{a, b\}\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A),$$

$$C_5 = (P(A), \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A).$$

□

Definicija 3 U Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ definiše se binarna relacija \preceq :

$$(\forall x \in B)(\forall y \in B) \quad x \preceq y \Leftrightarrow x + y = y.$$

Zadatak 3 Dokazati da su u svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ sledeći iskazi ekvivalentni:

$$(a) \quad xy = x, \quad (b) \quad x + y = y, \quad (c) \quad x' + y = 1, \quad (d) \quad xy' = 0.$$

Rešenje: Ako bismo dokazivali ekvivalentnost svaka dva iskaza, bilo bi potrebno dokazati 12 implikacije. Međutim, zbog tranzitivnosti implikacije, dovoljno je dokazati samo

$$(a) \Rightarrow (b) \quad \wedge \quad (b) \Rightarrow (c) \quad \wedge \quad (c) \Rightarrow (d) \quad \wedge \quad (d) \Rightarrow (a).$$

(a \Rightarrow b) Neka je $xy = x$. Sledi

$$x + y = xy + y \stackrel{[BA1]}{=} y + yx \stackrel{[BT3]}{=} y.$$

(b \Rightarrow c) Neka je $x + y = y$. Sledi

$$x' + y = x' + (x + y) \stackrel{[BT5]}{=} (x' + x) + y \stackrel{[BA1], [BA4]}{=} 1 + y \stackrel{[BA1], [BT2]}{=} 1.$$

(c \Rightarrow d) Neka je $x' + y = 1$. Sledi

$$0 \stackrel{[BT8]}{=} 1' = (x' + y)' \stackrel{[BT9]}{=} (x')'y' \stackrel{[BT7]}{=} xy'.$$

(d \Rightarrow a) Neka je $xy' = 0$. Sledi

$$xy \stackrel{[BA3]}{=} xy + 0 = xy + xy' \stackrel{[BA2]}{=} x(y + y') \stackrel{[BA4]}{=} x \cdot 1 \stackrel{[BA3]}{=} x.$$

□

★ U prethodnom zadatku su zapravo date četiri ekvivalentne definicije relacije \preceq .

Zadatak 4 Pokazati da je relacija \preceq u Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ relacija poretka.

Rešenje:

R Na osnovu definicije relacije \preceq imamo $a \preceq a \Leftrightarrow a + a = a$, a desna strana je tačna zbog idempotentnosti.

A Koristeći definiciju relacije \preceq i komutativnost operacije $+$ dobijamo:

$$a \preceq b \wedge b \preceq a \Leftrightarrow a + b = b \wedge b + a = a \Rightarrow a = b.$$

T Koristeći definiciju relacije \preceq i asocijativnost operacije $+$ dobijamo:

$$\begin{aligned} a \preceq b \wedge b \preceq c &\Leftrightarrow a + b = b \wedge b + c = c \\ &\Rightarrow a + c = a + (b + c) = (a + b) + c = b + c = c \\ &\Rightarrow a \preceq c. \end{aligned}$$

□

Zadatak 5 Interpretirati binarnu relaciju \preceq u modelima iskazne algebre, algebre skupova i algebre delitelja.

Rešenje:

- U iskaznoj algebri $\mathcal{I} = (I, \vee, \wedge, \neg, \perp, \top)$ važi $p \preceq q \Leftrightarrow (p \vee q \Leftrightarrow q)$, pa imamo

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$
\top	\top	\top	\top	\top
\top	\perp	\top	\perp	\perp
\perp	\top	\top	\top	\top
\perp	\perp	\perp	\top	\top

Prema tome, relaciju \preceq možemo interpretirati kao implikaciju. Haseov dijagram uređenog skupa (I, \Rightarrow) je

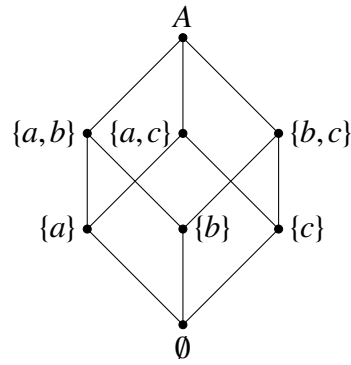


- U algebri skupova $\mathcal{P}(A) = (P(A), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, A)$ za sve $X, Y \in P(A)$ važi

$$X \preceq Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y,$$

te je u ovoj Bulovoj algebri relacija \preceq u stvari dobro poznata skupovna relacija \subseteq .

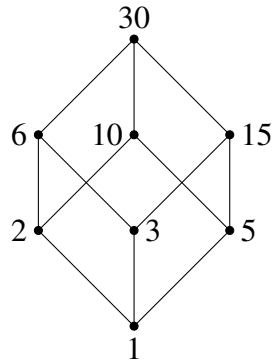
Na primer, za $A = \{a, b, c\}$ Haseov dijagram uređenog skupa $(P(A), \subseteq)$ je



- U algebri delitelja $\mathcal{D}_n = (D_n, \text{NZS}, \text{NZD}, \frac{n}{x}, 1, n)$ za sve $x, y \in D_n$ važi

$$x \preceq y \Leftrightarrow \text{NZS}(x, y) = y \Leftrightarrow x \mid y,$$

te je u ovoj Bulovoj algebri relacija \preceq u stvari dobro poznata relacija „deli”. Na primer, za $n = 30$ Haseov dijagram uređenog skupa (D_{30}, \mid)



□

Zadatak 6 Dokazati da u svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ za sve $a, b \in B$ važi

$$a \preceq a + b \quad i \quad ab \preceq a.$$

Rešenje: Tvrđenje dokazujemo koristeći aksiome i teoreme Bulove algebre, kao i definiciju relacije poretka $x \preceq y \stackrel{[*]}{\Leftrightarrow} x + y = y$.

$$a + (a + b) \stackrel{[\text{BT6}]}{=} (a + a) + b \stackrel{[\text{BT1}]}{=} a + b \stackrel{[*]}{\Leftrightarrow} a \preceq a + b,$$

$$ab + a \stackrel{[\text{BA1}]}{=} a + ab \stackrel{[\text{BT3}]}{=} a \stackrel{[*]}{\Leftrightarrow} ab \preceq a.$$

□

Zadatak 7 Zaokružiti brojeve ispred iskaza koji su tačni u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$.

- | | | |
|--|---|---------------------------|
| 1. $xx = x + x$ | 11. $x + 1 = x$ | 21. $x + xy = x \cdot 0'$ |
| 2. $xy = x + y$ | 12. $1 \cdot 0 = 1'$ | 22. $(x + xy)' = x'$ |
| 3. $xy = (x + y)'$ | 13. $x + y = (xy)'$ | 23. $xy = x$ |
| 4. $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ | 14. $xy = (x' + y')'$ | 24. $x + 1 = 0'$ |
| 5. $(x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow xy = 0$ | 15. $x + y = x'y'$ | 25. $x \leq 1$ |
| 6. $x = xy + xy'$ | 16. $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ | 26. $x \leq x'$ |
| 7. $(\forall x \in B)(\exists y \in B)(x + y = 1 \wedge xy = 0)$ | 17. $x = y \Rightarrow x' = y'$ | 27. $xy \leq x + y$ |
| 8. $(\forall x \in B)(\forall y \in B)(x + y = 1 \wedge xy = 0)$ | 18. $x' = y' \Rightarrow x = y$ | 28. $x' + x' = x'$ |
| 9. $y = x' \Rightarrow x + y = 1$ | 19. $f(x) = x' \Rightarrow f : B \xrightarrow[na]{1-1} B$ | 29. $x + x' = x$ |
| 10. $x + y = 1 \Rightarrow y = x'$ | 20. $x + yz = (x + y)(z + x)$ | 30. $x + x' = (xx')'$ |

Rešenje:

1. DA: teorema [BT1].
2. NE: $x = 1, y = 0 \rightsquigarrow 1 \cdot 0 \stackrel{[BT2]}{=} 0 \neq 1 \stackrel{[BT2]}{=} 1 + 0$.
3. NE: $x = y = 0 \rightsquigarrow (0 + 0)' \stackrel{[BA3]}{=} 0' \stackrel{[BT8]}{=} 1 \neq 0 \stackrel{[BT2]}{=} 0 \cdot 0$.
4. NE: ako je $x \in B \setminus \{0, 1\}$, onda je i $x' \in B \setminus \{0, 1\}$, a $xx' = 0$. Tvđenje važi kada je $B = \{0, 1\}$.
5. DA: teorema [BT2].
6. DA: $xy + xy' \stackrel{[BA2]}{=} x(y + y') \stackrel{[BA4]}{=} x \cdot 1 \stackrel{[BA3]}{=} x$.
7. DA: aksioma [BA4].
8. NE: $x = y = 1 \rightsquigarrow 1 \cdot 1 \stackrel{[BA3]}{=} 1 \neq 0$.
9. DA: aksioma [BA4].
10. NE: $x = y = 1 \rightsquigarrow 1 + 1 = 1$, ali $1 \neq 1'$.
11. NE: $x = 0 \rightsquigarrow 0 + 1 \stackrel{[BT2]}{=} 1 \neq 0$.
12. DA: $1 \cdot 0 \stackrel{[BT2]}{=} 0 \stackrel{[BT8]}{=} 1'$.
13. NE: $x = y = 0 \rightsquigarrow (0 \cdot 0)' \stackrel{[BT2]}{=} 0' \stackrel{[BT8]}{=} 1 \neq 0 \stackrel{[BA3]}{=} 0 + 0$.
14. DA: $(x' + y')' \stackrel{[BT9]}{=} (x')'(y')' \stackrel{[BT7]}{=} xy$.
15. NE: $x = y = 1 \rightsquigarrow 1' \cdot 1' \stackrel{[BT8]}{=} 0 \cdot 0 \stackrel{[BT2]}{=} 0 \neq 1 \stackrel{[BT2]}{=} 1 + 1$.
16. DA: $xy = 1 \Rightarrow x = 1 \wedge y = 1 \Rightarrow x = 1$.
17. DA: ' je unarna operacija skupa B , tj. funkcija koja slika B u B .
18. DA: $x' = y' \stackrel{(17)}{\Rightarrow} (x')' = (y')' \stackrel{[BT7]}{\Rightarrow} x = y$.
19. DA: injektivna je zbog (18), a surjektivna zbog teoreme [BT7].
20. DA: aksioma [BA2] (uz primenu aksiome [BA1]).
21. DA: $x + xy \stackrel{[BT3]}{=} x \stackrel{[BA3]}{=} x \cdot 1 \stackrel{[BT8]}{=} x \cdot 0'$.
22. DA: $x + xy \stackrel{[BT3]}{=} x \stackrel{(17)}{\Rightarrow} (x + xy)' = x'$.
23. NE: $x = 1, y = 0 \rightsquigarrow 1 \cdot 0 \stackrel{[BT2]}{=} 0 \neq 1$.
24. DA: $x + 1 \stackrel{[BT2]}{=} 1 \stackrel{[BT8]}{=} 0'$.
25. DA: $x + 1 \stackrel{[BT2]}{=} 1$.
26. NE: ne važi $x + x' = x'$ pošto $x \in B \setminus \{0\} \rightsquigarrow x + x' \stackrel{[BA4]}{=} 1 \stackrel{[BT8]}{=} 0' \neq x'$.

27. DA: na osnovu zadatka 6 imamo $xy \preceq x$ i $x \preceq x+y$, pa zbog tranzitivnosti relacije \preceq važi $xy \preceq x+y$. Može i direktno, $xy + (x+y) \stackrel{[BT4]}{=} (xy+x) + y \stackrel{[BA1],[BT3]}{=} x+y$.

28. DA: teorema [BT1].

29. NE: $x \in B \setminus \{1\} \leadsto x+x' \stackrel{[BA4]}{=} 1 \neq x$.

30. DA: $(xx')' \stackrel{[BT9]}{=} x' + (x')' \stackrel{[BT7]}{=} x' + x \stackrel{[BA1]}{=} x+x'$. □

Definicija 4 Neka su $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ i $\mathcal{C} = (C, \oplus, \odot, \overline{}, 0^*, 1^*)$ Bulove algebre. Funkcija $\varphi : B \rightarrow C$ je **homomorfizam** iz Bulove algebre \mathcal{B} u Bulovu algebru \mathcal{C} ako za sve $x, y \in B$ važi

$$(H1) \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y),$$

$$(H2) \quad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y),$$

$$(H3) \quad \varphi(x') = \overline{\varphi(x)}.$$

Ako je funkcija φ još i bijektivna, tada je ona **izomorfizam**, i u tom slučaju pišemo $\mathcal{B} \simeq \mathcal{C}$.

★ Homomorfizam $\varphi : B \rightarrow C$ slika konstante Bulove algebre \mathcal{B} u odgovarajuće konstante Bulove algebre \mathcal{C} , tj. za proizvoljno $x \in B$ važi

$$\varphi(0) \stackrel{[BA4]}{=} \varphi(x \cdot x') \stackrel{(H2)}{=} \varphi(x) \odot \varphi(x') \stackrel{(H3)}{=} \varphi(x) \odot \overline{\varphi(x)} \stackrel{[BA4]}{=} 0^*.$$

Dualno se pokazuje $\varphi(1) = 1^*$.

★ Za Bulovu algebru \mathcal{B} kažemo da je izomorfna sa Bulovom algebrom \mathcal{C} ako postoji izomorfizam $\varphi : B \rightarrow C$. Relacija „je izomorfna sa” u skupu Bulovih algebri je relacija ekvivalencije.

Zadatak 8 Neka je $A = \{2, 3, 5\}$. Dokazati da su Bulove algebre iz primera 2 i 3 ($\mathcal{P}(A)$ i \mathcal{D}_{30}) izomorfne.

Rešenje: Imamo $P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, A\}$ i $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Posmatrajmo funkciju $\varphi : P(A) \rightarrow D_{30}$ definisanu sa $\forall X \subseteq A$, $\varphi(X) = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, gde je

$$\alpha = \begin{cases} 1 & , \quad 2 \in X \\ 0 & , \quad 2 \notin X \end{cases}, \quad \beta = \begin{cases} 1 & , \quad 3 \in X \\ 0 & , \quad 3 \notin X \end{cases}, \quad \gamma = \begin{cases} 1 & , \quad 5 \in X \\ 0 & , \quad 5 \notin X \end{cases},$$

odnosno

$$\varphi = \begin{pmatrix} \emptyset & \{2\} & \{3\} & \{5\} & \{2, 3\} & \{2, 5\} & \{3, 5\} & A \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 10 & 15 & 30 \end{pmatrix}.$$

Funkcija φ je očigledno dobro definisana i bijektivna.

Za proizvoljne $X, Y \in P(A)$ postoje $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \{0, 1\}$ tako da

$$\varphi(X) = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \quad \text{i} \quad \varphi(Y) = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$$

pa važi

$$\begin{aligned} \text{NZS}(\varphi(X), \varphi(Y)) &= \text{NZS}(2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}, 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}) \\ &= 2^{\max\{\alpha_1, \alpha_2\}} \cdot 3^{\max\{\beta_1, \beta_2\}} \cdot 5^{\max\{\gamma_1, \gamma_2\}} \end{aligned}$$

gde je

$$\max\{\alpha_1, \alpha_2\} = 1 \Leftrightarrow (\alpha_1 = 1 \vee \alpha_2 = 1) \Leftrightarrow (2 \in X \vee 2 \in Y) \Leftrightarrow 2 \in X \cup Y,$$

i analogno

$$\max\{\beta_1, \beta_2\} = 1 \Leftrightarrow 3 \in X \cup Y, \quad \max\{\gamma_1, \gamma_2\} = 1 \Leftrightarrow 5 \in X \cup Y,$$

te je

$$\text{NZS}(\varphi(X), \varphi(Y)) = 2^{\max\{\alpha_1, \alpha_2\}} \cdot 3^{\max\{\beta_1, \beta_2\}} \cdot 5^{\max\{\gamma_1, \gamma_2\}} = \varphi(X \cup Y).$$

Slično se dokazuje da je za sve $X, Y \in P(A)$

$$\varphi(X \cap Y) = \text{NZD}(\varphi(X), \varphi(Y)) \quad \text{i} \quad \varphi(\overline{X}) = \frac{30}{\varphi(X)}.$$

Prema tome, funkcija φ je izomorfizam.

□

Bulovi izrazi

Definicija 5 1) Konstante i promenljive su Bulovi izrazi.

2) Ako su A i B Bulovi izrazi, tada su i $(A + B)$, $(A \cdot B)$ i A' Bulovi izrazi.

3) Bulovi izrazi mogu se dobiti samo konačnom primenom pravila 1) i 2).

Definicija 6 Značajni Bulovi izrazi.

Monom je promenljiva ili njena negacija.

Primeri: $x, y, z, u, x_1, y_1, x', y', \dots$

Elementarna konjunkcija (EK) je proizvod monoma.

Primeri: $x, xy, xy'z, x_1y_1u', 1, \dots$

Elementarna disjunkcija (ED) je zbir monoma.

Primeri: $x, x + y', x' + y + z', 0, \dots$

Disjunktivna normalna forma (DNF) je zbir elementarnih konjunkcija.

Primeri: $x + y, xy', x'y + z + xz', xyz + y'u + x'z'u', \dots$

Konjunktivna normalna forma (KNF) je proizvod elementarnih disjunkcija.

Primeri: $x' + y, (x + y)(x' + z), (x + y')(y' + z)(x' + y' + z), \dots$

Savršena disjunktivna normalna forma (SDNF) je zbir elementarnih konjunkcija takvih da svaka od njih sadrži sve promenljive koje se pojavljuju u izrazu.

Savršena konjunktivna normalna forma (SKNF) je proizvod elementarnih disjunkcija takvih da svaka od njih sadrži sve promenljive koje se pojavljuju u izrazu.

★ Bulov izraz može da ima više DNF i KNF, dok su oblici SDNF i SKNF jedinstveno određeni u odnosu na zadani skup promenljivih koji se pojavljuju u izrazu.

Zadatak 9 Svesti na DNF, KNF, SDNF i SKNF Bulov izraz $I = (x(yz)')'$.

Rešenje: Odredimo najpre DNF i SDNF datog izraza:

$$\begin{aligned}
 I &= (x(yz)')' \stackrel{[BT9]}{=} x' + ((yz)')' \stackrel{[BT7]}{=} \underbrace{x' + yz}_{\text{DNF}} \\
 &\stackrel{[BA3], [BA4]}{=} x'(y + y')(z + z') + (x + x')yz \\
 &\stackrel{[BA2]}{=} x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' + xyz + x'yz \\
 &\stackrel{[BT1]}{=} \underbrace{x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' + xyz}_{\text{SDNF}}
 \end{aligned}$$

Sada ćemo izraz I svesti na KNF i SKNF:

$$\begin{aligned}
 I &= (x(yz)')' \stackrel{[BT9],[BT7]}{=} x' + yz \stackrel{[BA2]}{=} \underbrace{(x' + y)(x' + z)}_{\text{KNF}} \\
 &\stackrel{[BA3],[BA4]}{=} (x' + y + zz')(x' + yy' + z) \\
 &\stackrel{[BA2]}{=} (x' + y + z)(x' + y + z')(x' + y + z)(x' + y' + z) \\
 &\stackrel{[BT1]}{=} \underbrace{(x' + y + z)(x' + y + z')(x' + y' + z)}_{\text{SKNF}}
 \end{aligned}$$

□

Zadatak 10 Bulov izraz $I = (y + zu')' + (z + xu)' + z(x + z')$ svesti na SDNF.

Rešenje: Koristeći odgovarajuće aksiome i teoreme Bulove algebre transformišemo dati izraz:

$$\begin{aligned}
 I &= (y + zu')' + (z + xu)' + z(x + z') \\
 &= y'(zu')' + z'(xu)' + zx + zz' \\
 &= y'(z' + u) + z'(x' + u') + zx \\
 &= y'z' + y'u + z'x' + z'u' + zx \\
 &= (x + x')y'z'(u + u') + (x + x')y'(z + z')u + x'(y + y')z'(u + u') \\
 &\quad + (x + x')(y + y')z'u' + x(y + y')z(u + u') \\
 &= xy'z'u + xy'z'u' + x'y'z'u + x'y'z'u' + xy'zu + \textcolor{red}{xy'z'u} + x'y'zu + \textcolor{red}{x'y'z'u} \\
 &\quad + x'yz'u + x'yz'u' + \textcolor{red}{x'y'z'u} + \textcolor{red}{x'y'z'u'} + xyz'u' + \textcolor{red}{xy'z'u'} + \textcolor{red}{x'yz'u'} + \textcolor{red}{x'y'z'u'} \\
 &\quad + xyzu + xyzu' + \textcolor{red}{xy'zu} + xy'zu' \\
 &= xy'z'u + xy'z'u' + x'y'z'u + x'y'z'u' + xy'zu + x'y'zu \\
 &\quad + x'yz'u + x'yz'u' + xyz'u' + xyzu + xyzu' + xy'zu'
 \end{aligned}$$

□

★ Svaki Bulov izraz jednoznačno određuje Bulovu funkciju, a jednoj Bulovoj funkciji odgovara beskonačno mnogo ekvivalentnih Bulovih izraza. Međutim, svakoj Bulovoj funkciji odgovaraju jedinstvene SDNF i SKNF.

Ako je $f(x_1, \dots, x_n)$ Bulova funkcija definisana na dvoelementnoj Bulovoj algebri $(\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$, tada se jedinstvene SDNF i SKNF mogu konstruisati na sledeći način:

$$\text{SDNF: } f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n},$$

$$\text{SKNF: } f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n} (f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + x_1^{\neg \alpha_1} + \dots + x_n^{\neg \alpha_n}),$$

$$\text{gde je } x^\alpha = \begin{cases} x & , \alpha = 1 \\ x' & , \alpha = 0 \end{cases}.$$

Zadatak 11 Bulove funkcije date tablicom predstaviti preko SDNF i SKNF:

(a)	x	y	$f(x,y)$	(b)	x	y	$f(x,y)$	(c)	x	y	z	$f(x,y,z)$
	0	0	0		0	0	1		0	0	0	0
	0	1	1		0	1	0		0	0	1	1
	1	0	1		1	0	0		0	1	0	1
	1	1	0		1	1	0		0	1	1	0
									1	0	0	1
									1	0	1	0
									1	1	0	0
									1	1	1	1

Rešenje:

$$(a) \text{ SDNF : } f(x,y) = f(0,0) \cdot x^0 \cdot y^0 + f(0,1) \cdot x^0 \cdot y^1 + f(1,0) \cdot x^1 \cdot y^0 + f(1,1) \cdot x^1 \cdot y^1 \\ = \underbrace{0 \cdot x' \cdot y'}_0 + 1 \cdot x' \cdot y + 1 \cdot x \cdot y' + \underbrace{0 \cdot x \cdot y}_0 = x'y + xy';$$

$$\text{SKNF : } f(x,y) = (f(0,0) + x^1 + y^1)(f(0,1) + x^1 + y^0)(f(1,0) + x^0 + y^1)(f(1,1) + x^0 + y^0) \\ = (0 + x + y) \underbrace{(1 + x + y')}_1 \underbrace{(1 + x' + y)}_1 (0 + x' + y') = (x + y)(x' + y');$$

$$(b) \text{ SDNF : } f(x,y) = x'y';$$

$$\text{SKNF : } f(x,y) = (x + y')(x' + y)(x' + y');$$

$$(c) \text{ SDNF : } f(x,y,z) = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz;$$

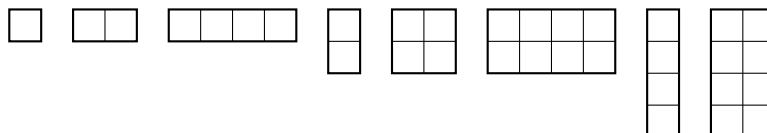
$$\text{SKNF : } f(x,y,z) = (x + y + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z);$$

□

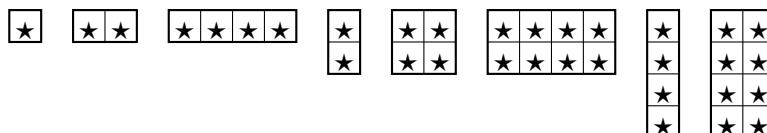
★ Kada određujemo SDNF posmatramo samo valuacije za koje je vrednost funkcije 1, a za SKNF su nam potrebne one valuacije za koje je vrednost funkcije 0. Otuda je zbir elementarnih konjunkcija u SDNF i elementarnih disjunkcija u SKNF jednak sa 2^n , gde je n broj promenljivih.

Minimizacija Bulovih izraza (Karnoove karte)

Osnovni četvorouglovi:



Osnovni označeni četvorouglovi:



★ Maksimalni obeleženi osnovni četvorougao je osnovni obeleženi četvorougao koji se ne sadrži ni u jednom drugom osnovnom obeleženom četvorouglu.

Postupak za određivanje **minimalne disjunktivne normalne forme** (MDNF)

- Odrediti SDNF za datu Bulovu funkciju;
- Za svaku EK iz SDNF označiti odgovarajuće polje u tablici;
- Naći sve maksimalne osnovne označene četvorouglove (tj. proste implikante);
- MDNF je zbir minimalnog broja prostih implikanti čiji maksimalni osnovni označeni četvorouglovi pokrivaju sva obeležena polja u tablici.

Zadatak 12 Naći sve proste implikante i minimalne DNF Bulovih funkcija datih svojom tablicom vrednosti ili odgovarajućim Bulovim izrazom:

(a)	x	0	0	1	1	,
	y	0	1	0	1	
	$f(x,y)$	1	1	1	0	

(b) $f(x,y) = xy' + x'y$,

(c) $f(x,y,z) = (x' + z)' + (x + (z'(y + z)))'$,

(d) $f(x,y,z,u) = xyz'u + xyz'u' + xyz'u + xy'zu + xy'z'u + xy'z'u' +$
 $+ x'yzu + x'yz'u + x'yz'u' + x'yz'u + x'y'zu + x'y'z'u$,

(e)	x	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	,
	y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
	z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

(f) $f(x,y,z,u) = xyz'u + xy'zu + x'yz'u' + xy'z'u' + x'yz'u' + xyz'u' +$
 $+ xy'zu' + xy'z'u + x'yz'u + x'yz'u + x'y'zu + x'y'z'u$.

Rešenje:

(a) SDNF : $f(x,y) = x'y' + x'y + xy'$,

Proste implikante: x' , y' ,

MDNF : $\Phi = x' + y'$

(Primetimo da obe proste implikante ulaze u MDNF.)

	x	x'
y		★
y'	★	★

(b) SDNF : $f(x,y) = xy' + x'y$,

Proste implikante: xy' , $x'y$,

MDNF : $\Phi = xy' + x'y$

(Primetimo da je f već bila data u obliku MDNF.)

	x	x'
y		★
y'	★	

(c) Primenom aksioma i teorema Bulove algebre nalazimo SDNF funkcije f :

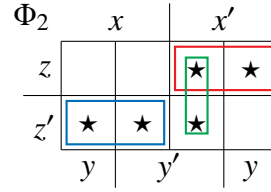
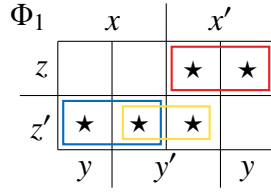
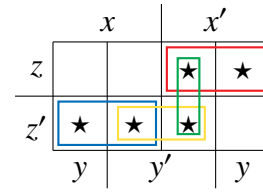
$$\begin{aligned}
 f(x,y,z) &= (x' + z)' + (x + (z'(y + z)))' = (x')'z' + x'(z'(y + z))' \\
 &= xz' + x'((z')' + (y + z)') = xz' + x'(z + y'z') \\
 &= xz' + x'z + x'y'z' = x(y + y')z' + x'(y + y')z + x'y'z' \\
 &= xyz' + xy'z' + x'yz + x'y'z + x'y'z'
 \end{aligned}$$

SDNF : $f(x,y,z) = xyz' + xy'z' + x'yz + x'y'z + x'y'z'$,

Proste implikante: $x'z$, xz' , $y'z'$, $x'y'$,

MDNF : $\Phi_1 = x'z + xz' + y'z'$,

$\Phi_2 = x'z + xz' + x'y'$.

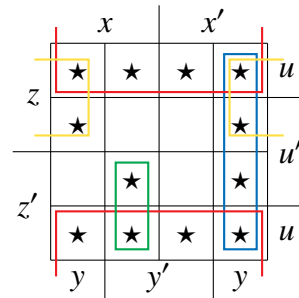


(d) SDNF : $f(x,y,z,u) = xyz'u + xyz'u' + xyz'u + xy'zu + xy'z'u + xy'z'u' + x'yzu + x'yz'u + x'yz'u' + x'y'zu + x'y'z'u + x'y'z'u'$,

Proste implikante: u , $x'y$, yz , $xy'z'$,

MDNF : $\Phi = u + x'y + yz + xy'z'$

(Uočimo da je ovde MDNF zbir svih prostih implikanti).

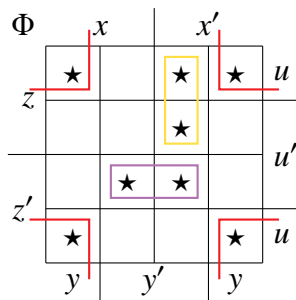
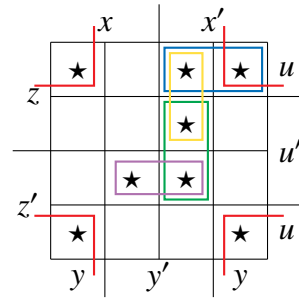


(e) SDNF : $f(x,y,z,u) = xyz'u + xyz'u' + xy'z'u' + x'yzu + x'y'zu + x'y'zu' + x'y'zu' + x'y'z'u' + x'y'z'u'$,

Proste implikante: yu , $x'zu$, $x'y'z$, $x'y'z'u'$, $y'z'u'$,

MDNF : $\Phi = yu + y'z'u' + x'y'z$

(Uočimo da neke proste implikante ne učestvuju u MDNF).



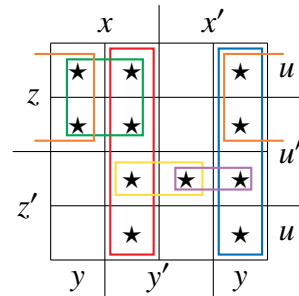
(f) Proste implikante: xy' , $x'y$, xz , yz , $y'z'u'$, $x'z'u'$,

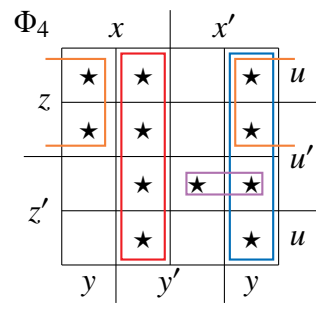
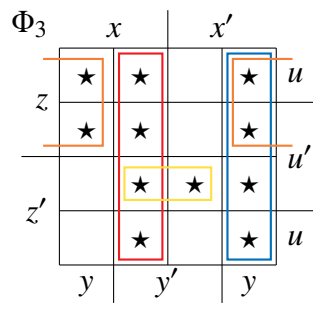
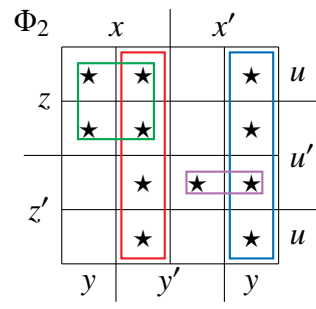
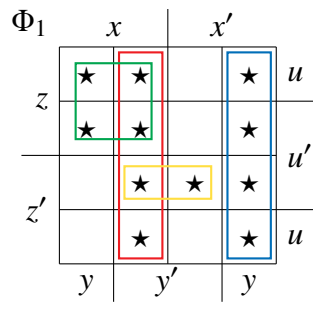
MDNF : $\Phi_1 = xy' + x'y + xz + y'z'u'$,

$\Phi_2 = xy' + x'y + xz + x'z'u'$,

$\Phi_3 = xy' + x'y + yz + y'z'u'$,

$\Phi_4 = xy' + x'y + yz + x'z'u'$.





□