VEŽBE IZ ALGEBRE

Arsić Dunja, Čolić Oravec Jelena,
Erić Mirjana, Janjoš Aleksandar, Kiss Maria,
Matić Zagorka, Prokić dr Ivan

Katedra za matematiku
Fakultet tehničkih nauka

Novi Sad,
2020.

Relacije

Definicija 1. ***Binarna relacija*** ρ *skupa A je bilo koji skup uređenih parova čije su koordinate iz A, tj. bilo koji podskup od A^2.*

Neka je $\rho \subseteq A^2$. Relacija ρ je:

(R) *refleksivna* ako i samo ako $(\forall x \in A)\ (x,x) \in \rho$

(S) *simetrična* ako i samo ako $(\forall x,y \in A)\ (x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho$

(A) *antisimetrična* ako i samo ako $(\forall x,y \in A)\Big((x,y) \in \rho \wedge (y,x) \in \rho\Big) \Rightarrow x = y$
ako i samo ako $(\forall x,y \in A)\Big((x,y) \in \rho \wedge x \neq y\Big) \Rightarrow (y,x) \notin \rho$

(T) *tranzitivna* ako i samo ako $(\forall x,y,z \in A)\Big((x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho\Big) \Rightarrow (x,z) \in \rho$

(F) *funkcija* ako i samo ako $(\forall x,y,z \in A)\Big((x,y) \in \rho \wedge (x,z) \in \rho\Big) \Rightarrow y = z$

U geometrijskoj interpretaciji $\rho \subseteq \mathbb{R}^2$ je:

- *refleksivna* ako i samo je prava $y = x$ podskup grafika od ρ;
- *simetrična* ako i samo ako je grafik od ρ osno simetričan u odnosu na pravu $y = x$;
- *antisimetrična* ako i samo ako ne postoji par tačaka koje pripadaju grafiku od ρ i simetrične su u odnosu na pravu $y = x$;
- *funkcija* ako i samo ako prave paralelne sa y-osom seku grafik od ρ u najviše jednoj tački.

★ Za tranzitivnost ne postoji geometrijska interpretacija što se tiče relacija na skupu realnih brojeva.

Primer 1. *Za svaki neprazan skup A važi da su $\emptyset \subseteq A^2$ i $A^2 \subseteq A^2$ binarne relacije (prazna i puna relacija).*

Primer 2. *Poznate relacije u geomeriji su paralelnost, ortogonalnost, podudarnost, sličnost.*

Zadatak 1. *Ispitati koje osobine imaju sledeće relacije skupa $A = \{1,2,3,4,5\}$:*

$\rho_1 = \{(1,1),(1,2),(3,4),(2,3)\}$,	R	S	$\underline{A}$	T	F
$\rho_2 = \{(1,1),(2,2)\}$,	R	$\underline{S}$	$\underline{A}$	$\underline{T}$	$\underline{F}$
$\rho_3 = \{(4,5),(3,4),(5,3),(4,3),(3,3),(4,4)\}$,	R	S	A	T	F
$\rho_4 = \emptyset$,	R	$\underline{S}$	$\underline{A}$	$\underline{T}$	$\underline{F}$
$\rho_5 = A^2$.	$\underline{R}$	$\underline{S}$	A	$\underline{T}$	F

Rešenje: Podvučena slova označavaju svojstvo koje dotična relacija ima.

Relacija ρ_1 nije refleksivna jer npr. $(2,2) \notin \rho_1$. Nije ni simetrična jer npr. $(1,2) \in \rho_1$ i $(2,1) \notin \rho_1$. Jeste antisimetrična jer za sve $(x,y) \in \rho_1$ sa $x \neq y$ redom utvrđujemo da $(y,x) \notin \rho_1$. Nije tranzitivna jer npr. $(1,2) \in \rho_1$, $(2,3) \in \rho_1$ i $(1,3) \notin \rho_1$. Na kraju, ρ_1 nije ni funkcija jer za 1 imamo $(1,2) \in \rho_1$ i $(1,1) \in \rho_1$.

Relacija ρ_2 nije refleksivna jer npr. $(3,3) \notin \rho_2$. Preostale četiri osobine sigurno ima jer u relaciji nema parova $(x,y) \in \rho_2$ takvih da je $x \neq y$, te ne može da postoji ni jedna smetnja za te četiri osobine.

Relacija ρ_3 nije refleksivna jer npr. $(1,1) \notin \rho_3$. Nije simetrična jer npr. $(4,5) \in \rho_3$ i $(5,4) \notin \rho_3$, nije antisimetrična jer sadrži parove $(4,3) \in \rho_3$ i $(3,4) \in \rho_3$, nije tranzitivna jer $(3,4) \in \rho_3$, $(4,5) \in \rho_3$, ali $(3,5) \notin \rho_3$, a takođe nije ni funkcija jer imamo $(4,5) \in \rho_3$ i $(4,4) \in \rho_3$

Za relaciju ρ_4 ne važi samo refleksivnost, pošto praznom skupu ne pripada niti jedan uređen par, pa ni parovi oblika (x,x). Činjenica da je iskaz $(x,y) \in \emptyset$ uvek netačan nam u definicijama ostalih osobina daje tačne implikacije, pa ρ_4 jeste simetrična, antisimetrična, tranzitivna i funkcija.

Relacija ρ_5 jeste refleksivna jer sadrži sve uređene parove elemenata iz A, pa i sve parove oblika (x,x). Jeste i simetrična i tranzitivna, ali nije antisimetrična jer npr. $(1,2) \in \rho_5$ i $(2,1) \in \rho_5$, a takođe nije ni funkcija jer npr. imamo $(1,1) \in \rho_5$ i $(1,2) \in \rho_5$. □

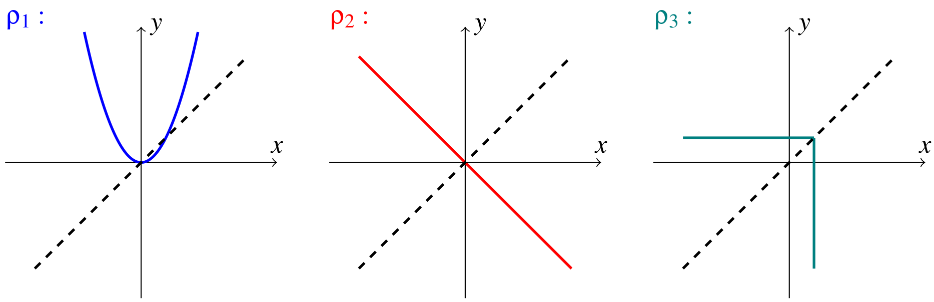
Zadatak 2. *Ispitati koje osobine imaju sledeće relacije skupa* $\mathbb{R}$:

$\rho_1 = \{(x,x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$,	R	S	$\underline{A}$	T	$\underline{F}$
$\rho_2 = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,	R	$\underline{S}$	A	T	$\underline{F}$
$\rho_3 = \{(x,y) \mid max\{x,y\} = 1,\ x,y \in \mathbb{R}\}$,	R	$\underline{S}$	A	T	F
$\rho_4 = \{(x,2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,	R	S	$\underline{A}$	T	$\underline{F}$
$\rho_5 = \{(x,y) \mid x \cdot y > 0,\ x,y \in \mathbb{R}\}$,	R	$\underline{S}$	A	$\underline{T}$	F
$\rho_6 = \{(x,y) \mid x+y = 1,\ x,y \in \mathbb{R}\}$,	R	$\underline{S}$	A	T	$\underline{F}$
$\rho_7 = \mathbb{N}^2$,	R	$\underline{S}$	A	$\underline{T}$	F
$\rho_8 = \rho_5 \cup \{(0,0)\}$.	$\underline{R}$	$\underline{S}$	A	$\underline{T}$	F

Rešenje: Podvučena slova označavaju svojstvo koje dotična relacija ima. Osobine ovih relacija možemo ispitivati posmatrajući njihove grafike i geometrijske interpretacije. Isprekidanom linijom označavaćemo ključnu pravu $x = y$.

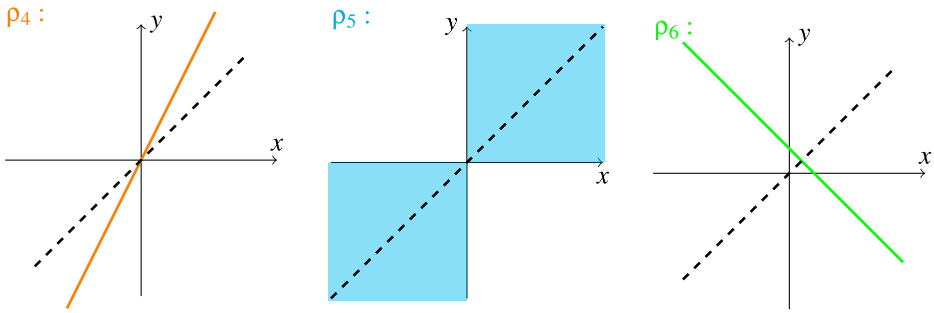
Relacija ρ_1 predstavlja kvadratnu funkciju. Nije refleksivna, pošto vidimo da seče pravu $x = y$ u samo dve tačke $(0,0)$ i $(1,1)$, što znači da beskonačno mnogo tačaka oblika (x,x), $x \in \mathbb{R}$ ne pripada relaciji ρ_1, na primer $(2,2) \notin \rho_1$. Na grafiku kvadratne funkcije vidimo da on nije simetričan u odnosu na pravu $x = y$, pa automatski zaključujemo da relacija nije simetrična, ali jeste antisimetrična. Osobina funkcije je zadovoljena, pošto iz definicije relacije vidimo da se radi o kvadratnoj funkciji, i nema pravih paralelnih y-osi koje seku grafik u više od jedne tačke.Što se tiče tranzitivnosti zbog uređenih parova $(2,4)$, $(4,16) \in \rho_1$ i par $(2,16)$ bi trebalo da bude element relacije ρ_1, ali to nije slučaj, pa relacija nije tranzitivna.

Relacija ρ_2 je prava $y = -x$. Ona nije refleksivna, pošto pravu $x = y$ seče samo u tački $(0,0)$. Dalje, grafik joj je u potpunosti simetričan u odnosu na pravu $y = x$ (svaka tačka $(x,-x)$ sa grafika ρ_2 ima svog simetričnog para $(-x,x)$ koji pripada ρ_2), pa je simetričnost zadovoljena, a antisimetričnost nije. Tranzitivnost nije zadovoljena, jer imamo $(1,-1),(-1,1) \in \rho_2$, ali $(1,1) \notin \rho_2$. Relacija ρ_2 jeste funkcija, kao što smo istakli, radi se o pravoj, odnosno linearnoj funkciji, $y = -x$.



Relacija ρ_3 sadrzi delove dve prave. Prvi deo jeste prava $y = 1$ za sve $x \in (-\infty, 1]$, odnosno sve tačke oblika $(x, 1)$, $x \in (-\infty, 1]$, a njen drugi deo jeste prava $x = 1$ za sve $y \in (-\infty, 1]$, odnosno sve tačke oblika $(1, y)$, $y \in (-\infty, 1]$. Kako su ovi delovi pravih $x = 1$ i $y = 1$ simetrični jedan drugome (upravo, ako (x, y) pripada $x = 1$, onda (y, x) pripada $y = 1$ i obratno) ρ_3 je simetrična, ali nije antisimetrična relacija. Jedina zajednička tačka sa pravom $y = x$ je $(1, 1)$, pa nije refleksivna. Kako $(0, 1), (1, 0) \in \rho_3$, a $(0, 0) \notin \rho_3$ relacija nije tranzitivna. Relacija ρ_3 nije ni funkcija, jer sadrži deo prave $x = 1$, a to je prava paralelna y-osi.

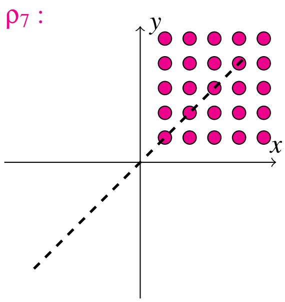
Relacija ρ_4 je linearna funkcija, prava $y = 2x$. Pošto pravu $y = x$ seče u samo jednoj tački nije refleksivna. Antisimetrična je, pošto je grafik svake linearne funkcije sa pozitivnim vodećim članom antisimetričan u odnosu na pravu $y = x$, ali ρ_4 nije simetrična. Nije ni tranzitivna, jer $(1, 2), (2, 4) \in \rho_4$, ali $(1, 4) \notin \rho_4$. Jasno, ρ_4 jeste funkcija.

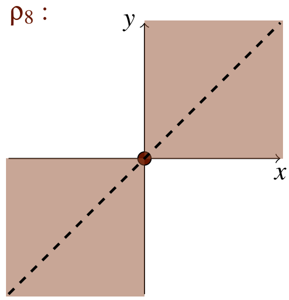


Relacija ρ_5 obuhvata sve tačke prvog i trećeg kvadranta, kao što je pokazano na grafiku, pošto su to tačke sa koordinatama istog znaka, čiji je proizvod pozitivan. Prvi i treći kvadrant sadrže sve tačke prave $y = x$ osim koordinatnog početka, pa ρ_5 nije refleksivna. Kako prava $y = x$ simetrično deli prvi i treći kvadrant, iz grafičkog prikaza vrlo jasno vidimo da je ρ_5 simetrična, ali nije antisimetrična. Tranzitivnost trivijalno važi, jer ako $(x, y), (y, z) \in \rho_5$ tada su x, y i z realni brojevi istog znaka, pa $(x, z) \in \rho_5$. Očigledno ρ_5 nije funkcija, jer bilo koja prava paralelna y-osi, osim nje same, seče prvi ili treći kvadrant u beskonačno mnogo tačaka.

Relacija ρ_6 je još jedna linearna funkcija, prava $y = 1 - x$, ali kao i ρ_2 ima negativan vodeći član. Njen grafik ispunjava iste uslove, pa osobine refleksivnosti, simetričnosti, antisimetričnosti i funkcije nije potrebno detaljnije objašnjavati. Što se tranzitivnosti tiče, ρ_6 je ne zadovoljava jer $(1, 0), (0, 1) \in \rho_6$, ali $(1, 1) \notin \rho_6$.

Grafik relacije ρ_7 obuhvata sve tačke čije su koordinate prirodni brojevi. Ipak, pošto radimo sa relacijama na skupu realnih brojeva, ρ_7 ne sadrži celu pravu $y = x$, npr. $(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin \rho_7$. Grafik relacije ρ_7 je u potpunosti simetričan u odnosu na pravu $y = x$, pa je relacija simetrična i nije antisimetrična. Nije funkcija jer bilo koja prava $x = n$ za $n \in \mathbb{N}$ sadrži beskonačno mnogo tačaka relacije ρ_7. Relacija ρ_7 zadovoljava tranzitivnost jer ako $(x, y), (y, z) \in \rho_7$ sledi da su x, y i z prirodni brojevi, pa je očigledno da $(x, z) \in \rho_7$.





Relacija ρ_8 ima isti grafik kao i relacija ρ_5 uz dodatak koordinatnog početka. Dodavanjem koordinatnog početka relaciji ρ_8 cela prava $y = x$ joj pripada, pa je ρ_8 refleksivna. Pored toga, pošto je koordinatni početak tačka prave $y = x$ njegovim dodavanjem ne narušavamo niti jednu preostalu osobinu relacije ρ_5, pa je ρ_8 simetrična i tranzitivna, a nije antisimetrična i funkcija. □

Relacija ekvivalencije

Definicija 2. *Za relaciju $\rho \subseteq A^2$ kažemo da je* ***relacija ekvivalencije*** *ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna (RST).*

★ Relacija ekvivalencije ρ definisana na skupu A vrši particiju (razbijanje) skupa A, tj. jednoznačno određuje neke neprazne podskupove skupa A od kojih su svaka 2 disjunktna, a njihova unija je ceo skup A. Ovi podskupovi se nazivaju ***klase ekvivalencije***, a jednoj klasi pripadaju svi oni elementi koji su međusobno u relaciji. Skup svih klasa ekvivalencije relacije ρ na skupu A naziva se ***faktor skup*** i označava se sa A/ρ.

Zadatak 3. *Dokazati da je $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$ relacija ekvivalencije skupa $A = \{1,2,3,4,5\}$ i napisati particiju koja joj odgovara.*

Rešenje: Relacija ρ je refleksivna pošto imamo sve uređene parove oblika (x,x), $x \in A$. Simetričnost je zadovoljena je imamo dva para simetričnih uređenih parova $(3,4),(4,3)$ i $(1,2),(2,1)$. Tranzitivnost se jednostavno dokazuje direktnom proverom.

Ako sa C_x označimo klasu ekvivalencije koja sadrži $x \in A$, onda imamo

$$C_1 = C_2 = \{1,2\}, \quad C_3 = C_4 = \{3,4\} \quad \text{i} \quad C_5 = \{5\}.$$

Prema tome, particija koja odgovara relaciji ρ je

$$A/\rho = \{C_1, C_3, C_5\} = \Big\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\Big\}.$$

□

Zadatak 4. *Za particiju $A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{4,5\}, A_3 = \{6\}$ skupa $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ napisati relaciju ekvivalencije $\rho \subseteq A$ čiji je faktor skup $A/\rho = \{A_1, A_2, A_3\}$.*

Rešenje: Elementi koji pripadaju jednoj klasi ekvivalencije su svi međusobno u relaciji, te je stoga tražena relacija ekvivalencije

$$\rho = A_1^2 \cup A_2^2 \cup A_3^2,$$

odnosno

$$\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3)(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(4,4),(5,5),(4,5),(5,4),(6,6)\}.$$

□

Zadatak 5. *Napisati sve relacije ekvivalencije na skupu $A = \{1,2,3\}$.*

Rešenje: Da bismo odredili sve relacije ekvivalencije na skupu A potrebno je naći sve particije ovog skupa, koje će predstavljati faktor skupove za tražene relacije.

Moguće particije skupa A su:

$$\Big\{\{1\},\{2\},\{3\}\Big\},\ \Big\{\{1,2\},\{3\}\Big\},\ \Big\{\{1,3\},\{2\}\Big\},\ \Big\{\{2,3\},\{1\}\Big\},\ \Big\{\{1,2,3\}\Big\},$$

a odgovarajuće relacije nalazimo kao u prethodnom zadatku. □

Relacija poretka

Definicija 3. *Za relaciju $\rho \subseteq A^2$ kažemo da je **relacija poretka** ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna (RAT). Uređeni par (A,ρ) naziva se **parcijalno uređen skup**.*

Zadatak 6. *Na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$ data je binarna relacija*

$$\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,4),(5,5)\}.$$

Dokazati da je ρ relacija poretka, nacrtati Haseov dijagram uređenog skupa (A,ρ) i odrediti minimalni, maksimalni, najmanji i najveći element.

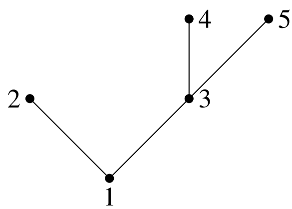
Rešenje: Jednostavno se direktnom proverom dokazuje da je ρ relacija poretka na skupu A.

MIN: 1

MAX: $2,4,5$

Najmanji: 1

Najveći: /



□

★ Relacija $\leq$ (manje ili jednako) je relacija poretka na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ jer

(R) $(\forall a \in \mathbb{N})\ a \leq a$

(A) $(\forall a, b \in \mathbb{N})\ a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$

(T) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N})\ a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$

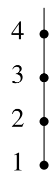
Zadatak 7. *Nacrtati Haseov dijagram parcijalno uređenog skupa* $(\mathbb{N}, \leq)$ *i naći minimalne, maksimalne, najmanji i najveći element.*

Rešenje: MIN: 1

MAX: /

Najmanji: 1

Najveći: /



□

★ Relacija $|$ (deli) je takođe jedna relacija poretka na skupu $\mathbb{N}$, definisana sa

$$m|n \ \Leftrightarrow \ (\exists k \in \mathbb{N})\ n = k \cdot m.$$

Uzmimo proizvoljne $a, b, c \in \mathbb{N}$:

(R) $a|a$ jer je $a \cdot 1 = a$

(A) Neka $a|b$ i $b|a$. Tada po definiciji relacije $|$ postoje $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da $b = k \cdot a$ i $a = l \cdot b$, odakle zaključujemo da je $b = k \cdot l \cdot b$, pa je iz $k \cdot l = 1$ jasno da kao prirodni brojevi i k i l moraju biti 1, što daje $a = b$.

(T) Neka $a|b$ i $b|c$. Tada po definiciji relacije $|$ postoje $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da $b = k \cdot a$ i $c = l \cdot b$, odakle je $c = l \cdot k \cdot a$, pa za $n = k \cdot l$ imamo da $c = n \cdot a$, odnosno da $a|c$.

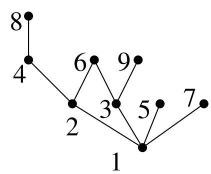
Zadatak 8. *Nacrtati Haseov dijagram parcijalno uređenog skupa* $(\mathbb{N}, |)$ *i naći minimalne, maksimalne, najmanji i najveći element.*

Rešenje: MIN: 1

MAX: /

Najmanji: 1

Najveći: /



★ Relacija $\subseteq$ (podskup) je relacija poretka na partitivnom skupu nekog skupa $A \neq \emptyset$ jer

(R) $(\forall X \in P(A))\ X \subseteq X$

(A) $(\forall X,Y \in P(A))\ X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$

(T) $(\forall X,Y,Z \in P(A))\ X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$

□

Zadatak 9. *Za skup $A = \{1,2,3\}$ odrediti minimalni, maksimalni, najmanji i najveći element, i nacrtati Haseov Dijagram sledećih parcijalno uređenih skupova*

a) $(P(A), \subseteq)$

b) $(P(A) \setminus \{A\}, \subseteq)$

c) $(P(A) \setminus \{\emptyset, A, \{1,2\}, \{1,3\}\}, \subseteq)$

Rešenje:

a) Za troelementni skup A njegov partitivni skup je

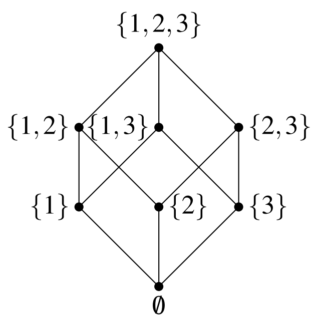
$$P(A) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}.$$

MIN: $\emptyset$

MAX: $\{1,2,3\} = A$

Najmanji: $\emptyset$

Najveći: $\{1,2,3\} = A$



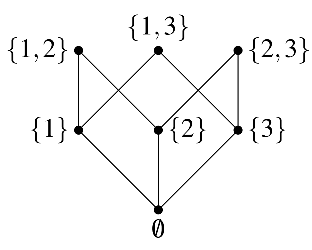
b) $P(A) \setminus \{A\} = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\Big\}.$

MIN: $\emptyset$

MAX: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

Najmanji: $\emptyset$

Najveći: /



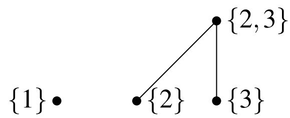
c) $P(A) \setminus \Big\{\emptyset, A, \{1,2\}, \{1,3\}\Big\} = \Big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\Big\}$.

MIN: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

MAX: $\{1\}, \{2,3\}$

Najmanji: /

Najveći: /



$\square$

Zadatak 10. *Za relaciju $|$ i sledeće podskupove A skupa $\mathbb{N}$ nacrtati Haseov dijagram i odrediti najveći, najmanji, maksimale i minimalne elemente:*

a) $A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$

b) $A = D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ *(delitelji broja 42)*

c) $A = D_{42} \setminus \{1\}$

d) $A = D_{42} \setminus \{1, 42\}$

e) $A = \mathbb{N}_{100} = \{n \in \mathbb{N} | \ n \leq 100\}$

f) $A = \mathbb{N}_{100} \setminus \{1\}$

g) $A = \mathbb{N}_{2^n} = \{2^n | \ n \in \mathbb{N}\}$

h) $A = \mathbb{N}_{2^n} \cup \{5, 10\}$

Rešenje:

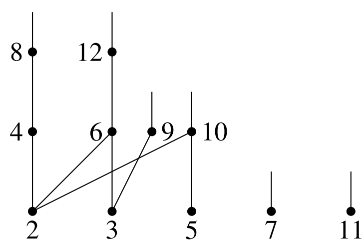
a) $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$

MIN: svi prosti brojevi

MAX: /

Najmanji: /

Najveći: /



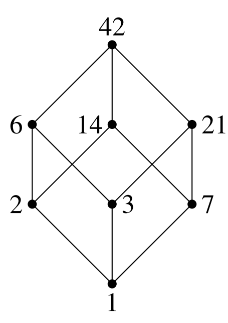
b) $(D_{42}, |)$

MIN: 1

MAX: 42

Najmanji: 1

Najveći: 42



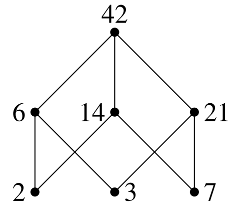
c) $(D_{42} \setminus \{1\}, |)$

MIN: $2, 3, 7$

MAX: 42

Najmanji: /

Najveći: 42



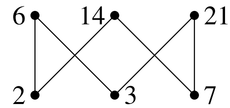
d) $(D_{42} \setminus \{1, 42\}, |)$

MIN: $2, 3, 7$

MAX: $6, 7, 21$

Najmanji: /

Najveći: /



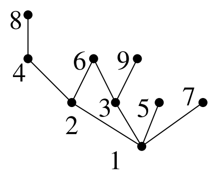
e) $(\mathbb{N}_{100}, |)$

MIN: 1

MAX: $51, 52, 53, ..., 100$

Najmanji: 1

Najveći: /



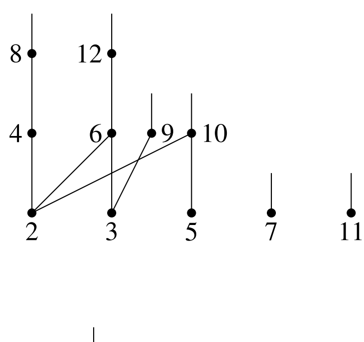
f) $(\mathbb{N}_{100} \setminus \{1\}, |)$

MIN: svi prosti brojevi < 100.

MAX: $51, 52, 53, ..., 100$

Najmanji: /

Najveći: /



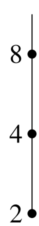
g) $(\mathbb{N}_{2^n}, |)$

MIN: 2

MAX: /

Najmanji: 2

Najveći: /



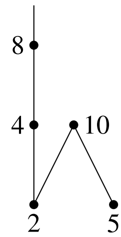
h) $(\mathbb{N}_{2^n} \cup \{5, 10\}, |)$

MIN: $2, 5$

MAX: 10

Najmanji: /

Najveći: /



$\square$