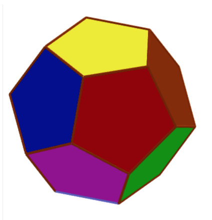
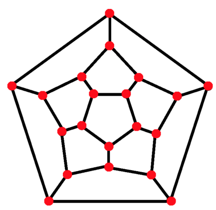
3.6 Hamiltonov graf

Prirodno se postavlja pitanje da li se može formirati šetnja kroz graf koja prolazi kroz svaki čvor grafa tačno jednom. Odgovor je pozitivan i takva šenja se naziva Hamiltonov put, odnosno Hamiltonova kontura u slučaju kada su prvi i poslednji čvor jednaki.

Ikozijanska igra. Hamiltonov graf dobio je ime prema irskom matematičaru Vilijamu Hamiltonu. On je 1957. godine kreirao igru pod nazivom Ikozijanska igra, koja se igra na regularnom dodekaedru, što je jedno od 5 Platonovih regularnih tela koje se sastoji od 12 jednakostraničnih petouglova. Svakom od 20 temena je pridruženo ime jednog grada i svi gradovi su međusobno različiti. Cilj igre je kreirati šetnju od čvora do čvora grafa, duž ivica tela, tako da se svaki grad poseti tačno jednom i na kraju se vrati u polazni grad.

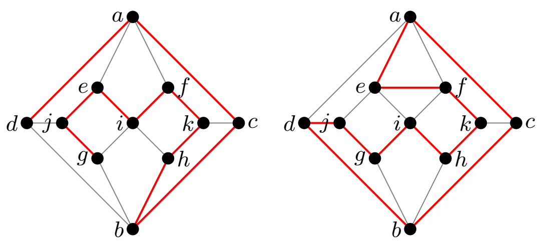




Formalna definicija Hamiltonovog puta i Hamiltonove konture data je sledećom definicijom.

Definicija 92 *Neka je G graf. Hamiltonov put u G je put koji sadrži sve čvorove tog grafa. Hamiltonova kontura je Hamiltonov put koji je ujedno i kontura.*

Primer 14 *Hamiltonov put u grafu G_1 je $dacbhkfiejg$, dok je $dacbhkfiejg$ Hamiltonova kontura u grafu G_2.*



G_1 G_2

Definicija 93 *Graf je Hamiltonov ako sadrži Hamiltonovu konturu. Graf je polu Hamiltonov ako sadrži Hamitonov put.*

U prethodnom primeru, graf G_1 je polu Hamiltonov, a garf G_2 je Hamiltonov.

Primer 15 *Kompletan graf K_n je Hamiltonov graf za svako $n \geq 3$. Dokazati!*

Dokaz. Neka su čvorovi grafa $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $n \geq 3$. Jedna Hamiltonova kontura je

$$v_1\, v_2 \quad \ldots v_n\, v_1.$$

□

Za postojanje Hamiltonove konture u grafu jošuvek ne postoji tvrđenje koje obuhvata i potrebne i dovoljne uslove. Postoji veliki broj tvrđenja koje daju različite potrebne odnosno dovoljne uslove za postojanje Hamiltonove konture. Neke od njih ćemo razmotriti u nastavku.

3.6.1 Dovoljni uslovi

Izabrali smo dva tvrđenja koja daju dovoljne uslove za postojanje Hamiltonove konture. Ako su zadovoljeni dovoljni uslovi, onda možemo tvrditi da je graf Hamiltonov:

$$\boxed{\text{HAMILTONOV GRAF}} \Leftarrow \boxed{\text{DOVOLJNI USLOVI}}$$

Ako dovoljni uslovi nisu zadovoljeni, to ne znači da graf nije Hamiltonov.

Izdvajamo tvrđenje Diraka iz 1952. godine i tvrđenje Orea iz 1960. godine. Oba tvrđenja razmatraju stepene čvorova u grafu. Da bismo dokazali tvrđenje Diraka, uvodimo prvo jednu pomoćnu lemu.

Lema 94 *Neka je G prost graf sa n, $n \geq 3$, čvorova u kojem postoje nesusedni čvorovi $u, v \in V(G)$ sa osobinom*

$$d_G(u) + d_G(v) \geq n.$$

Tada je G Hamiltonov ako i samo ako je $G + \{u, v\}$ Hamiltonov.

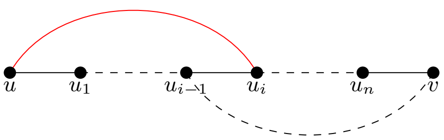
Dokaz. (⇒) Ako je G Hamiltonov onda je i $G + \{u, v\}$ Hamiltonov, zato što je Hamiltonova kontura u G istovremeno i Hamiltonova kontura u $G + \{u, v\}$.

($\Leftarrow$) Ako je C Hamiltonova kontura u $G+\{u,v\}$, a nije Hamiltonova kontura u G, onda su u i v susedni čvorovi u toj konturi. Tada postoji Hamiltonov uv-put u G:

$$uu_1\dots u_{i-1}u_i\dots u_nv.$$

Ako postoji grana uu_i onda ne postoji grana $u_{i-1}v$. Ako bi postojala ta grana, onda bi postojala Hamiltonova kontura u G:

$$uu_1\dots u_{i-1}vu_n\dots u_iu$$



To znači da svaka grana koja izlazi iz čvora u isključuje jednu granu koja izlazi iz čvora v. U tom slučaju važi sledeće:

$$d_G(v)\le n-1-d_G(u)\Leftrightarrow d_G(u)+d_G(v)\le n-1\Leftrightarrow d_G(u)+d_G(v)<n$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom. $\square$

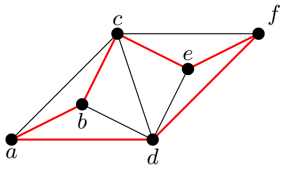
Teorema 95 (Ore) *Ako je G graf sa n, $n\ge 3$, čvorova sa osobinom*

$$d_G(u)+d_G(v)\ge n$$

za svaki par nesusednih čvorova $u,v\in V(G)$, onda G ima Hamiltonovu konturu.

Dokaz. Ako je G kompletan graf, tvrđenje sledi direktno. U suprotnom, pretpostavimo da je je $E(K_n)\backslash E(G)=\{e_1,\dots,e_l\}$. Primetimo da se dodavanjem grana grafu G ne može promeniti uslov da je zbir stepena nesusednih čvorova bar n. Uzastopnom primenom prethodne leme, u l koraka zaključujemo da G ima Hamiltonovu konturu ako i samo ako kompletan graf K_n ima Hamiltonovu konturu. $\square$

Primer 16 *Graf G na slici je Hamiltonov zato što je suma stepena čvorova bar 6, a toliki je i broj čvorova u grafu.*



Crvenom bojom je označena jedna Hamiltionova kontura grafa.

Sličan oblik tvrđenja možemo dokazati za polu Hamiltonov graf.

Teorema 96 *Ako je G graf sa n, $n \geq 3$, čvorova sa osobinom*

$$d_G(u) + d_G(v) \geq n - 1$$

za svaki par nesusednih čvorova $u, v \in V(G)$, onda je G polu Hamiltonov graf.

Kao direktnu posledicu Oreovog tvrđenja dokazujemo tvrđenje Diraka.

Teorema 97 (Dirac) *Ako je G graf sa n, $n \geq 3$, čvorova i $d_G(v) \geq \frac{n}{2}$ za svako $v \in V(G)$, onda je G Hamiltonov graf.*

Dokaz. Na osnovu tvrđenja Orea, možemo zaključiti da za svaki par čvorova važi

$$d_G(u) + d_G(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

odakle sledi da je G Hamiltonov graf. □

Primer 17 *Kompletna bipartitan graf $K_{n,n}$, $n \geq 2$ ima Hamiltonovu konturu, zato što je stepen svakog čvora n, a to je polovina od ukupnog broja od $2n$ čvorova.*

Sličvo dokazujemo posledicu Teoreme 96.

Teorema 98 *Ako je G graf sa n, $n \geq 3$, čvorova i $d_G(v) \geq \frac{n-1}{2}$ za svako $v \in V(G)$, onda je G polu Hamiltonov graf.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 96, možemo zaključiti da za svaki par čvorova važi

$$d_G(u) + d_G(v) \geq \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = n - 1$$

odakle sledi da je G polu Hamiltonov graf. □

Primer 18 *Primer 14 pokazuje da postoje polu Hamiltonov i Hamiltonov graf koji ne ispunjavaju,m dovoljne uslove Orea ili Diraca. U grafu G_1 postoje nesusednii čvorovi (npr. g i h) čiji zbir stepena je 6, što je manje od $n-1=10$. Takođe, postoji čvor (npr. g) stepena 3, što je opet manje od $\frac{n-1}{2}=5$. Slično, u grafu G_2 zbir stepena čvorova g i h je 6, a to je manje od $n=11$, dok je stepen čvora g jednak 3, što je opet manje od $\frac{n}{2}=5.5$.*

3.6.2 Potrebni uslovi

Tvrđenja koja dajemo u oovom delu obuhavataju potrebne uslove da graf bude Hamiltonov ili polu Hamiltonov.

$$\boxed{\text{HAMILTONOV GRAF}} \Rightarrow \boxed{\text{POTREBNI USLOVI}}$$

Ako su ispunjeni protrebni uslovi, to ne znači da je graf Hamiltonov. Ovakva tvrđenja se najčeše koriste u kontrapozitivnom obliku tj. ako se pokaže da ne važe potrebni uslovi, onda se može tvrditi da graf nije Hamiltonov.

Teorema 99 *Ako je G Hamiltonov graf, onda za svako $U \subset V(G)$ sa osobinom $U \neq \emptyset$ važi*

$$\omega(G - U) \leq |U|.$$

Dokaz. Ako je G Hamiltonov graf, onda postoji Hamiltonova kontura oblika

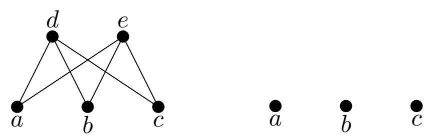
$$C = u_1 u_2 \ldots u_n u_1.$$

Za proizvoljno $U \subseteq V(G)$ za koje je $|U| = l$, broj komponenti povezanosti u $C - U$ ne može biti veći od l. Pored toga, $G - U$ ne može imati više komponenti povezanosti nego $C - U$. Odatle zaključujemo sledeće:

$$\omega(G - U) \leq \omega(C - U) \leq l = |U|.$$

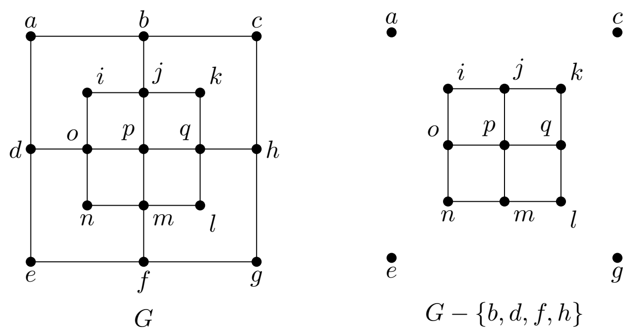
□

Primer 19 *Graf $K_{2,3}$ nije Hamiltonov, zato što brisanjem čvorova d i e dobijamo graf sa tri komponente povezanosti (tj. ostaje više komponenti povezanosti nego što smo skinuli čvorova).*



$K_{3,2}$ $\qquad$ $K_{3,2} - \{d, e\}$

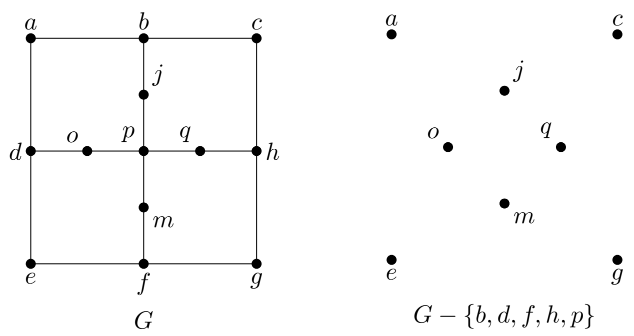
Primer 20 *Graf na slici nije Hamiltonov, zato što oduzimanjem skupa čvorova $U = \{b, d, f, h\}$ dobijamo graf sa 5 komponenti povezanosti.*



Teorema 100 *Ako je G polu Hamiltonov graf, onda za svako $U \subset V(G)$ sa osobinom $U \neq \emptyset$ važi*

$$\omega(G - U) \leq |U| + 1.$$

Primer 21 *Graf na slici nije polu Hamiltonov, zato što oduzimanjem skupa čvorova $U = \{b, d, f, h, p\}$ dobijamo graf sa 8 komponenti povezanosti.*



3.6.3 Zadaci za vežbu

1. **Odrediti broj Hamiltonovih kontura u kompletnom grafu K_n.**

   Ako konturi posmatramo kao podgraf grafa K_n (a ne kao niz čvorova), onda je broj različitih Hamiltonovh kontura jednak

   $$\frac{(n-1)!}{2}$$

2. **Ispitati da li graf G_1 ima Hamiltonovu konturu.**

   Graf G_1 nema Hamiltonovu konturu zato što važi

   $$\omega\left(G_1 - \{b, d, f, h\}\right) = 5 > 4 = |\{b, d, f, h\}|,$$

   što je u Hamiltonovom grafu nemoguće.

3. **Ispitati da li graf G_2 ima Hamiltonov put.**

   Graf G_2 nema Hamiltonov put zato što važi

   $$\omega\left(G_2 - \{b, d, f, h\}\right) = 6 > 4 = |\{b, d, f, h\}|,$$

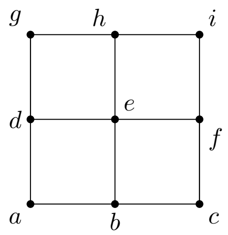
   što je u polu Hamiltonovom grafu nemoguće.

4. Konstruisati graf koji je Ojlerov, a nije Hamiltonov. Obrazložiti odgovor!

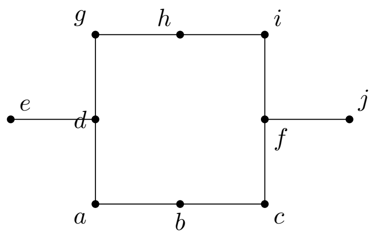
5. Konstruisati graf koji je Hamiltonov a nije Ojlerov. Obrazložiti odgovor!

6. Konstruisati graf koji je i Hamiltonov i Ojlerov. Obrazložiti odgovor!

7. Konstruisati graf koji nije ni Hamiltonov ni Ojlerov. Obrazložiti odgovor!



G_1



G_2