VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Blesić Andrija, Dedeić Jovana, Dragić Đorđe, Janjoš Aleksandar, Miščević Irena, Ostojić Tijana, Prokić Aleksandar, Tošić Stefan, Vuković Manojlo

Katedra za matematiku
Fakultet tehničkih nauka

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe II.7

1.1. Uslovni ekstremi

Neka je data funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ definisana na skupu $D \subset \mathbb{R}^2$ i neka je data funkcija $\varphi : D \to \mathbb{R}$. Neka je skup B dat sa $B = \{(x, y) \in D : \varphi(x, y) = 0\}$ i pretpostavimo da je $B \neq \emptyset$. Kažemo da je skup B određen uslovom ili vezom $\varphi(x, y) = 0$.

Kažemo da funkcija $z = f(x, y)$ u tački $A(x, y) \in B$ ima uslovni (vezani) lokalni maksimum (odnosno uslovni (vezani) lokalni minimum) pri uslovu

$$\varphi(x, y) = 0,$$

ako postoji broj $\varepsilon > 0$, takav da za svako $X \in (B \setminus \{A\}) \cap L(A,\ \varepsilon)$ važi

$$f(X) < f(A) \quad (\text{odnosno } f(X) > f(A)),$$

tj. $(\exists \varepsilon > 0), (\forall X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\})),\ f(X) < f(A),\ (\text{odnosno } f(X) > f(A))$.

Uslovni lokalni maksimum, odnosno uslovni lokalni minimum, jednim imenom zovemo *uslovni* ili *vezani ekstremi.* Jednačina $\varphi(x, y) = 0$ zove se *jednačina veze.*

Dakle, u nalaženju uslovnog ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ promenljive x i y se ne mogu više smatrati kao nezavisne promenljive jer su one povezane relacijom $\varphi(x, y) = 0$.

Postupak nalaženja tačaka koje mogu biti uslovni ekstremi funkcije $z = f(x, y)$ pod uslovom da je $\varphi(x, y) = 0$ je predstavljen kroz sledeće korake.

1. **Formiramo Lagranžovu funkciju**

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

2. **Tražimo stacionarne tačke** tako što izjednačimo prve parcijalne izvode $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ i $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ funkcije $F(x, y, \lambda)$ sa nulom.
Dobijamo sistem od tri jednačine

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \varphi(x, y) = 0,
\end{aligned}$$

pomoću kojih određujemo vrednosti λ i koordinate x i y potencijalnih tačaka ekstrema. Neka tačka $A(x_0, y_0)$ zadovoljava dati sistem za λ_0.

3. **Diferenciramo uslov** $\varphi(x, y) = 0$, odakle dobijamo vezu dx i dy.

4. **Totalni diferencijal drugog reda**

Pitanje postojanja i prirode uslovnih ekstrema se rešava pomoću znaka drugog totalnog diferencijala Lagranžove funkcije

$$d^2F(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2,$$

za skup vrednosti x_0, y_0, λ_0 pod uslovom $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0$, $(dx, dy) \neq (0,\ 0)$.
Dalje,

- ako je $d^2F(x_0, y_0) < 0$, tada u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x,y)$ ima uslovni maksimum,
- a ako je $d^2F(x_0, y_0) > 0$, tada u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x,y)$ uslovni minimum.

Analogno tražimo i ekstreme funkcije $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pod uslovom da je $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, gde je $1 \leq m < n$. Lagranžova funkcija u ovom slučaju ima sledeći oblik

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = {} & f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ & + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n). \end{aligned}$$

Zadatak 1.1. Naći ekstreme funkcije $z(x,y) = y^2 - x^2 + 5$ pod uslovom $y + 2x - 16 = 0$.
Rešenje.
Lagranžova funkcija: $F(x,\ y,\ \lambda) = y^2 - x^2 + 5 + \lambda(y + 2x - 16)$
Stacionarne tačke:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x} = -2x + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow x = \lambda,\\
&\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\lambda}{2},\\
&\frac{\partial F}{\partial \lambda} = y + 2x - 16 = 0 \Leftrightarrow -\frac{\lambda}{2} + 2\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow 3\lambda - 32 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

Stacionarna tačka je tačka $A(\frac{32}{3}, -\frac{16}{3})$.
Diferenciranje uslova: Diferenciranjem uslova dobija se $dy + 2dx = 0$, odnosno $dy = -2dx$.
Totalni diferencijal drugog reda:
Uvrštavanjem parcijalnih izvoda drugog reda u totalni diferencijal drugog reda dobijamo

$$\begin{aligned}
d^2F(A) &= -2dx^2 + 2dy^2\\
&= -2dx^2 + 8dx^2\\
&= 6dx^2 > 0,
\end{aligned}$$

odakle sledi da funkcija $z(x,y)$ ima uslovni minimum u tački A i on iznosi $-\frac{241}{3}$.

Zadatak 1.2. Proveriti da li funkcija $u(x,y,z) = xy + yz$ u tački $A(1,\ 1,\ 1)$ ima uslovni ekstrem ako je $x^2 + y^2 = 2$ i $y + z = 2$.
Rešenje.
Lagranžova funkcija: $F(x,\ y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + yz + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(y + z - 2)$
Stacionarne tačke:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda_1 x = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial y} = x + z + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial z} = y + \lambda_2 = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 - 2 = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = y + z - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Date jednačine su zadovoljene za $x = y = z = 1$ ako je $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ i $\lambda_2 = -1$, pa je stacionarna tačka tačka $A(1,1,1)$.
Diferenciranje uslova: Diferenciranjem prvog uslova $y + z = 2$ dobija se $dy + dz = 0$, odnosno $dz = -dy$. Diferenciranjem drugog uslova $x^2 + y^2 = 2$

dobija se $2xdx + 2ydy = 0$, odnosno $dx + dy = 0$. Odavde je $dx = -dy$.
Totalni diferencijal drugog reda:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda_1 = -1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda_1 = -1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

Uvrštavanjem parcijalnih izvoda drugog reda u totalni diferencijal drugog reda dobijamo

$$\begin{aligned} d^2F(A) &= -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz \\ &= -(dx - dy)^2 + 2dydz \\ &= -(2dy)^2 - 2dy^2 \\ &= -4dy^2 - 2dy^2 \\ &= -6dy^2 < 0, \end{aligned}$$

odakle sledi da funkcija $u(x, y, z)$ ima uslovni maksimum u tački A i on iznosi 2.

Zadatak 1.3. Broj 27 predstaviti kao proizvod tri broja tako da je zbir ta tri broja minimalan.
Rešenje.
Funkcija koju treba da minimiziramo je $u(x, y, z) = x + y + z$ pod uslovom da je $xyz = 27$.
Lagranžova funkcija: $F(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(xyz - 27)$
Stacionarne tačke:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 1 + \lambda yz = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 1 + \lambda xz = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 1 + \lambda xy = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= xyz - 27 = 0. \end{aligned}$$

Ako iz prve jednačine izrazimo $\lambda = -\frac{1}{yz}$ i uvrstimo u drugu i treću jednačinu dobijamo da je $x = y = z$, pa je $x^3 = 27$, tj. $x = y = z = 3$ za $\lambda = -\frac{1}{9}$. Dakle, stacionarna tačka je $A(3, 3, 3)$ za $\lambda = -\frac{1}{9}$.
Diferenciranje uslova: $yzdx + xzdy + xydz = 0$, a uvrštavanjem vrednosti za A dobijamo da je $dx = -dy - dz$.
Totalni diferencijal drugog reda: Za parcijalne izvode drugog reda dobija-

mo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \lambda z, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \lambda y,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \lambda x,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

pa je totalni diferencijal drugog reda u tački A

$$\begin{aligned} d^2F(A) &= -\frac{2}{3}dxdy - \frac{2}{3}dxdz - \frac{2}{3}dydz = \\ &= -\frac{2}{3}\left(-dy^2 - dydz - dz^2\right) \\ &= \frac{1}{3}\left((dy+dz)^2 + dy^2 + dz^2\right) > 0. \end{aligned}$$

Dakle, u tački A funkcija dostiže uslovni minimum $u(3,3,3) = 9$, tj. broj 27 treba predstaviti kao $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$.

Zadatak 1.4. Neka su x, y i z stranice kvadra čija površina iznosi $24cm^2$. Odrediti za koje x, y i z će zapremina kvadra biti maksimalna.
Rešenje.
Treba odrediti maksimalnu zapreminu kvadra čija površina omotača iznosi $24cm^2$, tj. treba maksimizirati funkciju $V(x,y,z) = xyz$ pod uslovom $2xy + 2xz + 2yz = 24$, odnosno $xy + xz + yz - 12 = 0$.
Lagranžova funkcija: $F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - 12)$
Stacionarne tačke:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= yz + \lambda y + \lambda z = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= xz + \lambda x + \lambda z = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= xy + \lambda x + \lambda y = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= xy + xz + yz - 12 = 0. \end{aligned}$$

Rešenje datog sistema jednačina je tačka $A(2,2,2)$ koja se dobija za $\lambda = -1$.
Diferenciranje uslova: Totalni diferencijal prvog reda uslova je $(y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz = 0$, tj. u tački A imamo da je $4dx + 4dy + 4dz = 0$, pa je $dx = -dy - dz$.

Totalni diferencijal drugog reda: Za parcijalne izvode drugog reda dobijamo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = z + \lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = y + \lambda,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = x + \lambda,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

pa važi $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(A) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}(A) = 1.$

Uvrštavanjem parcijalnih izvoda drugog reda u totalni diferencijal drugog reda dobijamo

$$\begin{aligned} d^2F(A) &= 2dxdy + 2dxdz + 2dydz \\ &= 2(-dy - dz)dy + 2dxdz + 2dydz \\ &= -dy^2 - dz^2 - (dy + dz)^2 < 0, \end{aligned}$$

pa u tački $A(2, 2, 2)$ funkcija dostiže maksimum. Dakle, kvadar čija je površina omotača $24cm^2$ ima maksimalnu zapreminu ukoliko su njegove stranice $x = y = z = 2$ i ona iznosi $V = 8cm^3$.

1.2. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1.5. Od svih pravouglih paralelopipeda zapremine $V = 27$ naći onaj koji ima najmanju prostornu dijagonalu.

Zadatak 1.6. Pokazati da su tačke $A(2, 2, 2)$ i $B(-2, -2, -2)$ tačke ekstrema funkcije $f(x, y, z) = xyz$ pod uslovom $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

2. Vežbe III.1

2.1. INTEGRALNI RAČUN

Ako za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$, $x \in I$, postoji funkcija $F : I \to \mathbb{R}$, koja ima izvod $F'(x)$ nad intervalom I i pri tom važi

$$F'(x) = f(x), x \in I,$$

onda kažemo da je $F(x)$ *primitivna funkcija* funkcije $f(x)$ nad intervalom I.

Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom I naziva se *neodređeni integral* funkcije $f(x)$ i označava se sa $\int f(x)dx$.

U ovoj definiciji $f(x)$ se naziva podintegralna funkcija, $f(x)dx$ podintegralni izraz, $\int$ znak integrala, a postupak nalaženja neodređenog integrala naziva se integracija.

Ako je $F(x)$ jedna primitivna funkcija funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom, onda je skup svih primitivnih funkcija, tj. $\int f(x)dx$ nad tim intervalom oblika

$$\{F(x) + c : \ c \in \mathbb{R}\},$$

što kraće pišemo

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c.}$$

Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna nad intervalom I tada postoji primitivna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ nad intervalom I, tj. postoji neodređeni integral funkcije $f(x)$ nad datim intervalom.

- **Osobine neodređenog integrala**

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,

2. $\int f'(x)dx = f(x) + c$,

3. $d\int f(x)dx = f(x)dx$,

4. $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$, $a = const.$,

5. $\int (f_1(x) + \ldots + f_n(x))\, dx = \int f_1(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx.$

2.2. Tablica integrala

$\int dx = x + c$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\int \frac{dx}{x} = \ln \mid x \mid + c$
$\int e^x dx = e^x + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + c_1,\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + c,\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{a+x}{a-x} \right\| + c,\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + c,\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c = -\arccos \frac{x}{a} + c_1,\ a > 0$
$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c,\ a > 0$
$\int \sqrt{x^2+A}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2} \ln \left\| x + \sqrt{x^2+A} \right\| + c$

Podrazumeva se da date jednakosti važe nad onim intervalima nad kojima su podintegralne funkcije neprekidne.

2.3. Integracija pomoću smene

Neka sirjekcija $\varphi : I_1 \to I \subset \mathbb{R}$ ima neprekidan izvod različit od nule nad intervalom I_1 i neka za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ postoji neodređeni integral nad intervalom I. Tada važi

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,}$$

(pri tom se podrazumeva da se posle integracije desne strane stavi $t = \varphi^{-1}(x)$).

Zadatak 2.1. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx$.

Rešenje.

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\ t = \ln x,\ dt = \tfrac{dx}{x}\ \right] = \int t\ dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c.$$

Zadatak 2.2. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{4 + x^2}\, dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{4 + x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{1 + (\frac{x}{2})^2}\, dx = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \\ 2dt = \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2} dx \end{array}\right] \\ &= \frac{1}{2}\int t dt = \frac{t^2}{4} + c = \frac{1}{4}(\operatorname{arctg} \frac{x}{2})^2 + c. \end{aligned}$$

Zadatak 2.3. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(1 + x^2) + 1}{1 + x^2}\, dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(1 + x^2) + 1}{1 + x^2}\, dx = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}\, dx + \int \frac{x\ln(1 + x^2)}{1 + x^2}\, dx + \int \frac{dx}{1 + x^2} \\ &= \left[\begin{array}{ll} t = \operatorname{arctg} x & t_1 = \ln(1 + x^2) \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} & \frac{1}{2}dt_1 = \frac{xdx}{1+x^2} \end{array}\right] \\ &= \int e^t dt + \frac{1}{2}\int t_1 dt_1 + \int \frac{dx}{1 + x^2} = e^t + \frac{{t_1}^2}{4} + \operatorname{arctg} x + c \\ &= e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{1}{4}\left[\ \ln(1 + x^2)\ \right]^2 + \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

Zadatak 2.4. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$.

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx = \left[\begin{array}{c} \sqrt{1+\ln x} = t \Rightarrow 1+\ln x = t^2 \\ \frac{dx}{x} = 2tdt \end{array}\right] \\
&= \int \frac{t^2-1}{t} 2tdt = 2\int t^2 dt - 2\int dt \\
&= 2\frac{t^3}{3} - 2t + c = \frac{2}{3}(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x} - 2\sqrt{1+\ln x} + c \\
&= \frac{2\sqrt{1+\ln x}}{3}(\ln x - 2) + c.
\end{aligned}
$$

2.4. Parcijalna integracija

Neka su $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije $u'(x)v(x)$. Tada postoji primitivna funkcija funkcije $u(x)v'(x)$ i pri tom važi jednakost

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Zadatak 2.5. Izračunati $I = \displaystyle\int \ln x dx$.

Rešenje.

$$I = \int \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + c.$$

Zadatak 2.6. Izračunati $I = \displaystyle\int x^5 e^{-x^2} dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int x^5 e^{-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} -x^2 = t \\ xdx = -\frac{1}{2}dt \end{array} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int t^2 e^t dt = \left[\begin{array}{l} u = t^2 \Rightarrow du = 2tdt \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{array} \right] \\ &= -\frac{1}{2}(t^2 e^t - 2 \int te^t dt) = -\frac{1}{2}t^2 e^t + \int te^t dt \ = \left[\begin{array}{l} u_1 = t \Rightarrow du_1 = dt \\ dv_1 = e^t dt \Rightarrow v_1 = e^t \end{array} \right] \\ &= -\frac{1}{2}t^2 e^t + te^t - \int e^t dt = -\frac{1}{2}t^2 e^t + te^t - e^t = -e^{-x^2}(1 + x^2 + \frac{x^4}{2}) + c. \end{aligned}$$

Zadatak 2.7. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2} \, dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \ - \frac{1}{a^2} \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} xdx \\ &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \underbrace{\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} xdx}_{I_2} \end{aligned}$$

Sada ćemo uvesti smenu kako bismo našli rešenje integrala I_2. Integral rešavamo parcijalnom integracijom na sledeći način
$u = x \Rightarrow du = dx$,

$$\begin{aligned} dv &= \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^2} \Rightarrow v = \int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^2} = \left[\begin{array}{l} t = x^2 + a^2 \\ \frac{1}{2}dt = xdx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt \\ &= -\frac{1}{2} t^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + a^2}, \end{aligned}$$

pa je

$$I_2=\int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}xdx=-\frac{x}{2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{x}{2(x^2+a^2)}+c.$$

Traženi integral je

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^3}arctg\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2a}arctg\frac{x}{a}-\frac{x}{2(x^2+a^2)}\right)+c\\&=\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+c.\end{aligned}$$

Zadatak 2.8. Izračunati $I=\displaystyle\int \cos^2(\ln x)dx.$
Rešenje.

$$\begin{aligned}I&=\int \cos^2(\ln x)dx=\left[\begin{array}{c} u=\cos^2(\ln x)\Rightarrow du=2\cos(\ln x)\cdot(-\sin(\ln x))\cdot\frac{dx}{x}\\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{array}\right]\\&=x\cos^2(\ln x)+2\int \cos(\ln x)\sin(\ln x)dx=x\cos^2(\ln x)+\int \sin(2\ln x)dx,\end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili trigonometrisjku formulu $\sin 2x=2\sin x\cos x$. Dalje, neka je

$$\begin{aligned}I_1&=\int \sin(2\ln x)\;dx=\left[\begin{array}{cc} u=\sin(2\ln x) & dv=dx\\ du=\frac{2}{x}\cos(2\ln x)dx & v=x\end{array}\right]\\&=x\sin(2\ln x)-2\int \cos(2\ln x)dx=\left[\begin{array}{cc} u_1=\cos(2\ln x) & dv_1=dx\\ du_1=-\sin(2\ln x)\frac{2dx}{x} & v_1=x\end{array}\right]\\&=x\sin(2\ln x)-2x\cos(2\ln x)-4\underbrace{\int \sin(2\ln x)\;dx}_{I_1},\end{aligned}$$

pa dobijamo da je

$$I_1=\frac{1}{5}(x\sin(2\ln x)-2x\cos(2\ln x))+c.$$

Konačno rešenje je

$$I=\int \cos^2(\ln x)dx=x\cos^2(\ln x)+\frac{1}{5}(x\sin(2\ln x)-2x\cos(2\ln x))+c.$$

Napomena:

1. Integrale oblika $\int P_n(x)\sin(ax)dx$ i $\int P_n(x)\cos(ax)dx$, gde je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stepena, rešavamo parcijalnom integracijom

$$[u = P_n(x), dv = \sin(ax)dx] \text{ odnosno } [u = P_n(x), dv = \cos(ax)dx]$$

i potrebno je uraditi n puta parcijalnu integraciju.

2. Integral oblika $\int P_n(x)\ln^m x dx$, gde je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stepena i $m \in \mathbb{N}$, rešavamo parcijalnom integracijom

$$[u = \ln^m x, dv = P_n(x)dx]$$

i potrebno je uraditi m puta parcijalnu integraciju.

3. Integral oblika $\int P_n(x)e^{ax}dx$, gde je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stepena i $a \in \mathbb{R}$, rešavamo parcijalnom integracijom

$$[u = P_n(x)x, dv = e^{ax}dx]$$

i potrebno je uraditi n puta parcijalnu integraciju.

2.5. Integrali sa kvadratnim trinomom

I Integrali oblika $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ $(a \neq 0,\ b^2-4ac<0)$ rešavaju se na sledeći način u zavisnosti od m

a) $m = 0$

$$ax^2+bx+c = a\left[(x+k)^2+l\right],\ k,l = const.$$

$$\int \frac{n}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{n}{a}\int \frac{dx}{(x+k)^2+l};$$

b) $m \neq 0$

$$\begin{aligned}\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx &= \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+n-\frac{mb}{2a}}{ax^2+bx+c}dx\\ &= \frac{m}{2a}\underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx}_{[t=ax^2+bx+c\Rightarrow dt=2ax+b]} + \underbrace{\int \frac{n-\frac{mb}{2a}}{ax^2+bx+c}dx.}_{a)}\end{aligned}$$

Primetimo da je prva jednakost dobijena na osnovu ideje da se u brojiocu dobije izvod imenioca, kako bi se nakon toga uvela odgovarajuća smena.

Zadatak 2.9. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \begin{bmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{bmatrix}\\ &= \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+c.\end{aligned}$$

Zadatak 2.10. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-2+6}{x^2-4x+5}\,dx\\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-4x+5}\\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \begin{bmatrix} x^2-4x+5=t & x-2=t_1 \\ (2x-4)dx=dt & dx=dt_1 \end{bmatrix}\\ &= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} + 4\int \frac{dt_1}{t_1^2+1} = \frac{3}{2}\ln|\,t\,| + 4\operatorname{arctg} t_1 + c\\ &= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right| + 4\operatorname{arctg}(x-2)+c.\end{aligned}$$

II Integrali oblika $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ $(a \neq 0,\ b^2-4ac<0)$ rešavaju se na sličan način kao integrali oblika I.

III Integrali oblika $\int \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ ($m \neq 0$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$) se pomoću smene $mx + n = \frac{1}{t}$ svode na integrale oblika II.

Zadatak 2.11. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$.

Rešenje.

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = \begin{bmatrix} x+1 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{-1}{t^2}dt \\ x = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t} \end{bmatrix}$$
$$= -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{(1-t)^2}{t^2} + 2\frac{1-t}{t}}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{(1-t)^2+2t-2t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= -\arcsin\frac{1}{x+1} + c.$$

IV Integrali oblika $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$ ($a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$) svode se na integrale oblika $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ i $\int \sqrt{x^2 + A}\, dx$.

Zadatak 2.12. Izračunati $I = \displaystyle\int \sqrt{x - x^2}\, dx$.

Rešenje.

$$I = \int \sqrt{x-x^2}\, dx = \left[x - x^2 = -(x^2 - x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2\right]$$
$$= \int \sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}\, dx = \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{bmatrix}$$
$$= \int \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - t^2}dt = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - t^2} + \frac{\frac{1}{4}}{2}\arcsin\frac{t}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= \frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2} + \frac{1}{8}\arcsin(2x-1) + c.$$

2.6. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 2.13. Izračunati $I = \int \frac{dx}{7x^2-8}$.

Zadatak 2.14. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{x - \sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\, dx$.

Zadatak 2.15. Izračunati $I = \displaystyle\int (x^2+1) \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}dx$.

Zadatak 2.16. Izračunati $I = \displaystyle\int \arcsin x\, \ln x\, dx$.

Zadatak 2.17. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{3x^2 - x + 1}$.

Zadatak 2.18. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$.

Zadatak 2.19. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}$.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladmir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladmir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.