

FUNKCIJE VIŠE REALNIH PROMENLJIVIH

5. maj 2022.

Funkcije n realnih promenljivih

Posmatramo realne funkcije n realnih promenljivih, tj.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1$$

Vrednost funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ u tački $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ zapisuje se kao

- $n > 3 \quad z = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- $n = 3, \quad u = f(X) = f(x, y, z),$
- $n = 2, \quad z = f(X) = f(x, y)$

Parcijalni izvodi

Neka $M(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$

- ako $M \in D$ nije izolovana tačka oblasti definisanosti D tada je

$$\Delta z = f(N) - f(M) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

$N(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$, $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ **totalni priraštaj** funkcije $z = f(x, y)$

- ako $D_1 = D \cap \{(v, y) : v \in \mathbb{R}\}$ nije jednočlan skup tada

$$\Delta_x z = f(M_{x+\Delta x}) - f(M) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

$M_{x+\Delta x}(x + \Delta x, y) \in D_1$, $\Delta x \neq 0$ je **parcijalni priraštaj po promenljivoj x** u tački M ,

- ako $D_2 = D \cap \{(x, v) : v \in \mathbb{R}\}$ nije jednočlan skup tada

$$\Delta_y z = f(M_{y+\Delta y}) - f(M) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

$M_{y+\Delta y}(x, y + \Delta y) \in D_2$, $\Delta y \neq 0$ je **parcijalni priraštaj po promenljivoj y** u tački M .

Neka $M(x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x_1, \dots, x_n)$

- ako $M \in D$ nije izolovana tačka oblasti definisanosti D funkcije $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tada je

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(N) - f(M) \\ &= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

$N(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \in D$, $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ **totalni priraštaj** funkcije $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

- ako $D_i = D \cap \{(x_1, \dots, x_{i-1}, \nu, x_{i+1}, \dots, x_n) : \nu \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$ nije jednočlan skup tada

$$\begin{aligned}\Delta_{x_i} z &= f(M_{x_i + \Delta x_i}) - f(M) \\ &= f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

$M_{x_i + \Delta x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in D_i$, $\Delta x_i \neq 0$ je **parcijalni priraštaj po promenljivoj x_i** u tački M .

Za svako $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, posmatrajmo restrikciju $f_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije f nad skupom D_i .

Definicija

Ako funkcija $f_i(x_i)$, $x_i \in D_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ima izvod u tački $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D^\circ$ onda taj izvod funkcije $f_i(x_i)$ zovemo **parcijalni izvod** funkcije $f(x_1, \dots, x_n)$ u tački M po promenljivoj x_i . Označavamo ga sa

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) \text{ ili } z_{x_i}(M)$$

i važi

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_i} &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i} \\ &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \end{aligned}$$

Ako funkcija $f_i(x_i)$, $x_i \in D_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ima desni (levi) izvod u tački $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, onda taj izvod funkcije $f_i(x_i)$ zovemo desni (levi) parcijalni izvod funkcije $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ u tački M po promenljivoj x_i i obeležavamo ga sa

$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M) \text{ ili } z_{x_i}^+(M) \quad \left(\frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M) \text{ ili } z_{x_i}^-(M) \right).$$

U tom slučaju je

- **desni parcijalni izvod funkcije** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ po promenljivoj x_i

$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0^+} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}$$

- **levi parcijalni izvod funkcije** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ po promenljivoj x_i je

$$\frac{\partial^- z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0^-} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}$$

*Funkcija ima parcijalni izvod po promenljivoj x_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ u tački M (unutrašnja!) **ako i samo ako** ima i levi i desni parcijalni izvod po promenljivoj x_i i ako su oni jednaki.*

Funkcija $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ima parcijalni izvod po x_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ nad $E \subset D$, pri čemu je skup E unija neke **otvorene oblasti** E_1 i dela njenog ruba ako

1. postoji $\frac{\partial z}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ po prethodnoj definiciji;
2. za rubnu tačku $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ ako ne postoji $\frac{\partial z}{\partial x_i}(M)$, tada:

a) ako postoji $\varepsilon_i > 0$ sa osobinom da je

$$L_{\varepsilon_i} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\} \subset E$$

postoji

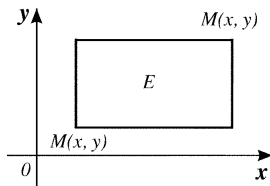
$$\frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M).$$

Ako je za svako $\varepsilon_i > 0$

$$D_{\varepsilon_i} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\} \not\subset E,$$

tada je

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M).$$



b) ako postoji $\varepsilon_i > 0$ sa osobinom da je

$$D_{\varepsilon_i} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\} \subset E$$

postoji

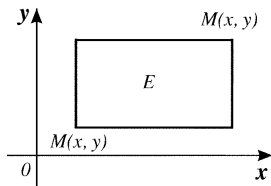
$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M).$$

Ako je za svako $\varepsilon_i > 0$

$$L_{\varepsilon_i} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\} \not\subset E,$$

tada je

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M).$$



c) ako za svako $\varepsilon_i > 0$

$$L_{\varepsilon_i} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\} \not\subset E$$

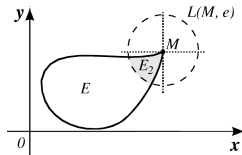
$$D_{\varepsilon_i} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\} \not\subset E,$$

tada ako postoji

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(N), \text{ za svako } N \in L(M, \varepsilon) \cap E_1 = E_2 \neq \emptyset, \text{ za neko } \varepsilon > 0,$$

uzimamo po definiciji da je

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \lim_{\substack{N \rightarrow M \\ N \in E_2}} \frac{\partial z}{\partial x_i}(N), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



Napomena

Za funkciju $z = f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + y & , \quad x > 0, y \geq 0 \\ y & , \quad x = 0, y \geq 0 \end{cases}$

postoji

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) &= \frac{\partial^+ z}{\partial x}(0, 1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 1) - f(0, 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x} + 1 - 1}{\Delta x} = 0, \end{aligned}$$

a kako je $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \quad x > 0, y > 0,$

ne postoji $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 1) \\ x > 0, y > 0}} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y).$

Primer

Naći parcijalne izvode funkcije $z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}$.

Funkcija $z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}$ je definisana za $x^2 + y^2 \leq 1$.

Za svaku tačku $M(x, y)$ za koju je $x^2 + y^2 < 1$ (M je unutrašnja tačka oblasti definisanosti) je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3x\sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3y\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

U rubnoj tački $M(x, y)$ za koju je $x^2 + y^2 = 1$, $x \neq 0$, $y \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(M) &= \frac{\partial^- z}{\partial x}(M) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{(1 - (x + \Delta x)^2 - (1 - x^2))^3} - 0}{\Delta x} = 0, \text{ za } x > 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(M) &= \frac{\partial^+ z}{\partial x}(M) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(1 - (x + \Delta x)^2 - (1 - x^2))^3} - 0}{\Delta x} = 0, \text{ za } x < 0.\end{aligned}$$

U tačkama $M(0, 1)$ i $N(0, -1)$ je

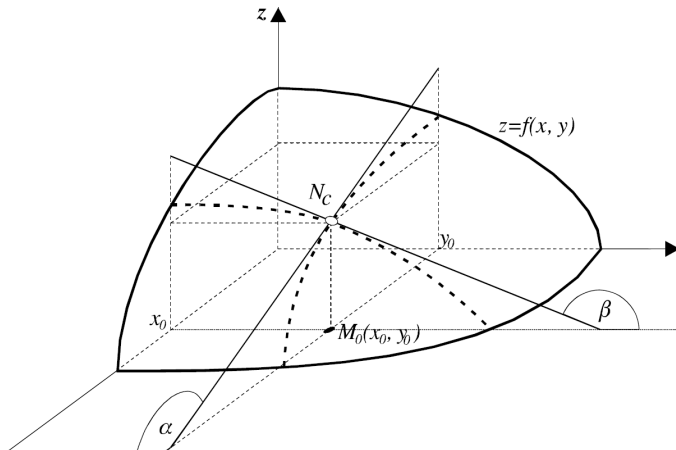
$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 1) \\ x^2 + y^2 < 1}} -3x\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(N) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, -1) \\ x^2 + y^2 < 1}} -3x\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0.$$

Slično se računaju parcijalni izvodi po y u rubnim tačkama.

Geometrijska interpretacija parcijalnih izvoda

- Površ \mathcal{S} zadata jednačinom $z = f(x, y)$
- nad skupom D funkcija je neprekidna i ima parcijalne izvode
- $M_0(x_0, y_0) \in D$, odgovara tački $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathcal{S}$



Pri traženju parcijalnog izvoda $\frac{\partial z}{\partial x}$ u tački M_0 posmatra se funkcija $z = f(x, y)$ kao funkcija jedne promenljive x , a y se tretira kao konstanta $y = y_0$, to jest $z = f(x, y_0) = f_1(x)$. Funkcijom $z = f_1(x)$ definisana je kriva L dobijena presekom površi S i ravni $y = y_0$.

$$f_1'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0),$$

je koeficijent pravca tangente u tački N_0 krive L dobijene presekom ravni $y = y_0$ i površi $z = f(x, y)$.

Slično, funkcijom $z = f_2(y) = f(x_0, y)$ definisana je kriva L_1 dobijena presekom površi S i ravni $x = x_0$, pa je

$$f_2'(y_0) = \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)$$

koeficijent pravca tangente u tački N_0 krive L_1 dobijene presekom ravni $x = x_0$ i površi $z = f(x, y)$.

Diferencijabilnost

Definicija

Neka je $M(x_1, \dots, x_n)$ unutrašnja tačka oblasti $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ na kojoj je definisana funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n) = f(X)$, $X \in D$. Funkcija $f(x_1, \dots, x_n)$ je **diferencijabilna u tački M** ako se njen totalni priraštaj

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n),$$

gde $N(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) \in D$, $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \neq (0, \dots, 0)$

koji odgovara priraštajima $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ promenljivih x_1, \dots, x_n može napisati u obliku

$$\Delta z = D_1 \Delta x_1 + \dots + D_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n,$$

pri čemu D_i ne zavise od Δx_i i $\lim_{(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \alpha_j = 0$.

Linearni deo priraštaja je **totalni diferencijal funkcije** z u tački M , u oznaci $dz(M) = df(M) = D_1 \Delta x_1 + \dots + D_n \Delta x_n$.

Na primer, za funkciju $z = x^2 + y^2$ imamo da je

$$\begin{aligned}\Delta z &= (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 - y^2 \\ &= \underbrace{2x}_{D_1} \Delta x + \underbrace{2y}_{D_2} \Delta y + \underbrace{\Delta x}_{\alpha_1} \Delta x + \underbrace{\Delta y}_{\alpha_2} \Delta y.\end{aligned}$$

Teorema

Neka je funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ diferencijabilna u tački M . Tada

a) funkcija f je neprekidna u tački M ,

b) postoje parcijalni izvodi $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$

i važi jednakost $D_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}(M), \dots, D_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}(M)$.

Dokaz.

a) $\lim_{(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \Delta z = \lim_{(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \sum_{i=1}^n (D_i + \alpha_i) \Delta x_i = 0$, pa je funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ neprekidna u tački M .

b) Pokažimo npr. da je $D_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}(M)$ (ostalo analogno).

Iz diferencijabilnosti funkcije z u tački M je za $\Delta x_1 \neq 0$,
 $\Delta x_2 = \Delta x_3 = \dots = \Delta x_n = 0$,

$$\Delta_{x_1} z = D_1 \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1.$$

Sledi da je

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} z}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{(D_1 + \alpha_1) \Delta x_1}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} (D_1 + \alpha_1) = D_1.$$

Odavde sledi da $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ postoji u tački M i da je $\frac{\partial z}{\partial x_1}(M) = D_1$. □

Kako je $dz = dx_i = \Delta x_i$ za funkciju $z = x_i$, $i = 1, \dots, n$, to totalni diferencijal možemo zapisati u obliku

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n.$$

Ako sa

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2} \neq 0$$

označimo rastojanje tačaka

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{i} \quad N(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n)$$

tada izraz

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_n \Delta x_n$$

možemo zapisati u obliku

$$\omega \rho, \text{ gde je } \omega = \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{\rho} + \dots + \alpha_n \frac{\Delta x_n}{\rho}.$$

Kako je

$$\left| \frac{\Delta x_i}{\rho} \right| \leq 1 \quad \text{za svako} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

i kako je

$$\lim_{(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \alpha_i = 0,$$

sledi da je

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \omega = 0.$$

Iz tog razloga, da je funkcija $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diferencijabilna možemo zapisati i u obliku

$$\Delta z = D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + \dots + D_n \Delta x_n + \omega \rho,$$

gde D_1, D_2, \dots, D_n ne zavise od $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, a $\lim_{\rho \rightarrow 0} \omega = 0$.

Suprotan smer prethodne teoreme ne važi uvek - neprekidnost funkcije u tački M i postojanje njenih parcijalnih izvoda u ovoj tački ne garantuje diferencijabilnost funkcije u toj tački.

Primer

Funkcija

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

je neprekidna u tački $O(0, 0)$, ima parcijalne izvode u tački $O(0, 0)$, a nije diferencijabilna u tački $O(0, 0)$.

Iz

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

i

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon = \delta$$

sledi da je

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon,$$

pa je funkcija $f(x, y)$ neprekidna u tački $O(0, 0)$.

Funkcija ima parcijalne izvode u tački $O(0,0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta x)^2 \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{(0)^2 \cdot \Delta y}{(0)^2 + (\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 0$$

Ona nije diferencijabilna u toj tački. Ako bi bila, njen priraštaj bi mogao da se napiše u obliku

$$\Delta z = \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} - 0 = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \omega \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

pri čemu je $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \omega = 0$, što nije tačno, jer za $\Delta x = \Delta y > 0$ imamo

$$\omega(\Delta x, \Delta x) = \frac{(\Delta x)^3}{(2(\Delta x)^2)\Delta x\sqrt{2}},$$

pa je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \omega(\Delta x, \Delta x) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

što je kontradikcija.

Teorema

Ako funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ ima parcijalne izvode u nekoj δ -okolini tačke M i ako su ti izvodi neprekidni u samoj tački M , tada je funkcija diferencijabilna u M .

Neprekidnost parcijalnih izvoda nije potreban uslov za diferencijabilnost:

Primer

Funkcija

$$z = f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

je diferencijabilna u tački $O(0, 0)$, a oba parcijalna izvoda imaju prekid u tački $O(0, 0)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, \text{ za } (x, y) \neq (0, 0),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, \text{ za } (x, y) \neq (0, 0),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\Delta y)^2 \sin \frac{1}{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 0,$$

$$\begin{aligned}\Delta z = z(\Delta x, \Delta y) &= 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y \\ &+ \left(\Delta x \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right) \Delta x \\ &+ \left(\Delta y \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right) \Delta y,\end{aligned}$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \alpha = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \Delta x \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0,$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \beta = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \Delta y \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0,$$

pa je funkcija diferencijabilna u $O(0,0)$.

$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial z}{\partial x}$ i $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial z}{\partial y}$ ne postoje, pa su oba parcijalna izvoda prekidna u $O(0,0)$

$$\left(a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0 \right) \rightarrow (0,0), n \rightarrow \infty; \frac{\partial z}{\partial x}(a_n) \rightarrow -\infty, n \rightarrow \infty \right)$$

- funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ je **diferencijabilna nad skupom $A \subset D^\circ$** ako je diferencijabilna u svakoj tački skupa A
- ako funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode u tački $M \subset D^\circ$ onda kažemo da je ona **neprekidno diferencijabilna u tački M**
- ako funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode u svim tačkama skupa $A \subset D^\circ$ onda kažemo da je ona **neprekidno diferencijabilna nad skupom A**
- za dovoljno male priraštaje $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ važi da je $\Delta z \approx dz$

Izvod složene funkcije

Neka je dato n funkcija

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, \dots, x_m), \\ &\vdots \\ u_n &= \varphi_n(x_1, \dots, x_m), \end{aligned}$$

koje preslikavaju skup $D_1 \subset \mathbb{R}^m$ na skup $D \subset \mathbb{R}$.

Neka je $z = f(u_1, \dots, u_n)$ definisana nad D^n . Tada je funkcija

$$z = f(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m))$$

složena funkcija od funkcija

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \text{ i } f,$$

pri čemu je oblast definisanosti ove funkcije skup $D_1 \subset \mathbb{R}^m$.

Teorema

Neka funkcije $u_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_m)$, $i = 1, \dots, n$ imaju parcijalne izvode po svim promenljivama x_1, \dots, x_m u tački $M(x_1, \dots, x_m)$.

Ako je funkcija $z = f(u_1, \dots, u_n)$ diferencijabilna u tački

$$N(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)),$$

tada složena funkcija $z = f(u_1, \dots, u_n)$ ima sve parcijalne izvode po promenljivama x_i u tački M pri čemu važe jednakosti

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= \frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ &\vdots \\ \frac{\partial z}{\partial x_m} &= \frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_m} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_m}. \end{aligned}$$

Dokaz. (za slučaj $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$)

Kako je funkcija z diferencijabilna u tački M , to je

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + \alpha \Delta u + \beta \Delta v, \quad \lim_{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0,0)} \alpha = \lim_{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0,0)} \beta = 0.$$

Za $\Delta y = 0$ i $\Delta x \neq 0$, iz diferencijabilnosti funkcije f sledi

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Za $\Delta x \rightarrow 0$ je i $(\Delta_x u, \Delta_x v) \rightarrow (0, 0)$, pa je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta = 0.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) \\&= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}$$

Slično se pokazuje da je

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Izvod vektorske funkcije skalarne promenljive

Definicija

Ako za vektorsku funkciju

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in D^\circ$$

postoji

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

onda kažemo da vektorska funkcija $\vec{r}(t)$ ima **izvod u tački** t koji se obeležava sa $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ ili sa $\dot{\vec{r}}(t)$, tj.

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Očigledno je $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$,

pa važe slična pravila kao kod izvoda realne funkcije jedne realne promenljive:

$$a) \frac{d}{dt} (\lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2) = \lambda_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \lambda_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt},$$

$$b) \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \vec{r}_2 + \frac{d\vec{r}_2}{dt} \cdot \vec{r}_1,$$

$$c) \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_2}{dt},$$

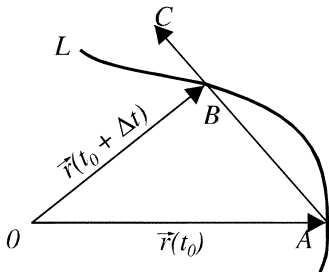
$$d) \frac{d}{dt} (\vec{r}(u(t))) = \frac{d\vec{r}}{du} \frac{du}{dt},$$

$$e) \frac{d}{dt} (u\vec{r}) = u \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{du}{dt} \vec{r}.$$

pri čemu izvodi sa desne strane postoje po pretpostavci.

Geometrijska interpretacija izvoda:

Pretpostavimo da je $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0 \neq 0$.



Tada je $\Delta \vec{r}(t) = \overrightarrow{AB}$.

A je vrh vektora $\vec{r}(t_0)$,

B je vrh vektora $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$,

pa je $\frac{\Delta \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \overrightarrow{AC}$.

Granična vrednost

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}_0$$

je vektor koji leži na pravoj koja prolazi kroz tačku A koju ćemo definisati kao **tangenta krive L** u tački A.

Tangenta krive L u tački A je prava

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}, \quad \dot{r}_0 \neq 0,$$

a ravan

$$\dot{x}_0(x - x_0) = \dot{y}_0(y - y_0) = \dot{z}_0(z - z_0),$$

koja je normalna na p zovemo **normalna ravan krive L** .

(stavljeno je da je $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0$)

Vektor $\vec{\dot{r}}$ ima smer tamo kuda skalar raste.

Intenzitet vektora $\frac{d\vec{r}}{dt}$ zavisi od izbora parametra t .

Ako uzmemo da je $t = \alpha\tau$, $\alpha \neq 0$, prema d) je tada

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right| \left| \frac{1}{\alpha} \right|,$$

pa možemo izabrati parametar tako da taj intenzitet bude jednak 1. Obeležićemo tu vrednost parametra sa s .

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2} = 1.$$

Sledi da je $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$, tj. $s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.

Dakle, s je dužina luka krive L od neke fiksne tačke M . Prema geometrijskoj interpretaciji izvoda sledi da je $\dot{\vec{r}}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \vec{t}_0$, ort tangente na krivu L u posmatranoj tački sa smerom porasta skalara t .

Za jedinični vektor $\vec{c} = \vec{c}(t)$ je $\vec{c} \cdot \vec{c} = 1$, odakle sledi da je

$$\frac{d\vec{c}}{dt} \cdot \vec{c} + \frac{d\vec{c}}{dt} \cdot \vec{c} = 0.$$

Dakle, izvod jediničnog vektora \vec{c} normalan je na vektor \vec{c} . Za $\vec{r} = r\vec{r}_0$ (\vec{r}_0 je ort) je

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0 + r\frac{d\vec{r}_0}{dt}.$$

Ako je \vec{r}_0 konstantan vektor, tada vektor

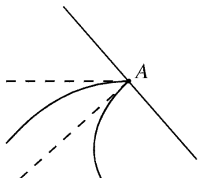
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0$$

ima pravac jediničnog vektora, a ako je \vec{r} konstantnog intenziteta, tada vektor

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\vec{r}_0}{dt}$$

ima pravac koji je normalan na vektor \vec{r}_0 .

Mehanička interpretacija jednostranih izvoda:



Ako materijalna tačka tokom kretanja udari u prepreku, odbija se i nastavlja kretanje. U trenutku t_0 sudara sa preprekom, funkcija \vec{r} nema izvod, ali postoje **desni i levi izvod u tački t_0** :

$$\dot{\vec{r}}_+(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \quad \dot{\vec{r}}_-(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^-} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Oni daju brzinu tačke pre i posle udara u prepreku. Odgovaraju im desna i leva tangenta na krivu L u tački udara A :

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_{0+}} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_{0+}} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_{0+}}, \quad \frac{x - x_0}{\dot{x}_{0-}} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_{0-}} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_{0-}}.$$

Tangentna ravan i normala površi

Neka je površ S data jednačinom $F(x, y, z) = 0$.

- $M(x, y, z)$ je **regularna(nesingularna) tačka površi S** ako postoje sva tri parcijalna izvoda $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ u tački M koji su neprekidni u tački M i

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \neq (0, 0, 0)$$

- Ako tačka $M(x, y, z)$ nije regularna tačka površi S , onda za nju kažemo da je **singularna tačka površi S** .

Neka je skup L tačaka površi S (u daljem tekstu kriva L u parametarskom obliku) dat sa

$$L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), & t \in [\alpha, \beta] \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

- φ, ψ, ω imaju neprekidne izводе za svako $t \in [\alpha, \beta]$
- $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t) \neq 0$, za svako $t \in [\alpha, \beta]$

Tada vektor

$$\vec{r}_0 = \dot{\vec{r}}_0(t_0) = \dot{x}(t_0)\vec{i} + \dot{y}(t_0)\vec{j} + \dot{z}(t_0)\vec{k}$$

leži na tangenti krive L u tački $P(x_0, y_0, z_0)$.

Tangenta krive L u tački P je **tangenta površi S** u tački P .

Jednačina površi je $F(x, y, z) = 0$ tj. $F(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) = 0$ jer L leži na S . Diferenciranjem po t dobijamo

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}}_{\vec{n} \cdot \dot{\vec{r}}} = 0,$$

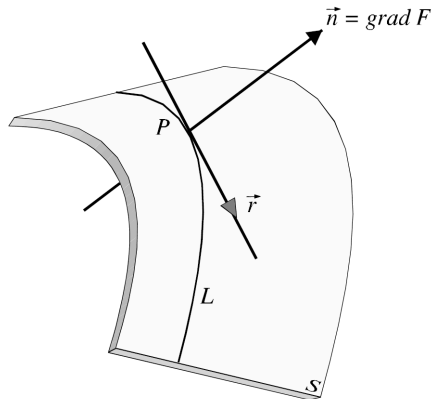
pri čemu je

- $\vec{n} = \text{grad}F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$, ne zavisi od oblika krive, jedino od koordinata tačke P i funkcije $F(x, y, z)$,
- $\dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$ leži na tangenti krive L u tački P

Kako je P regularna tačka površi S , to je

$$|\text{grad}F| = |\vec{n}| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \neq 0.$$

Iz $\vec{n} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$ sledi da su vektori $\dot{\vec{r}}$ i \vec{n} ortogonalni. Ovo znači da je vektor $\dot{\vec{r}}$, koji leži na tangenti krive L u tački P , normalan na vektor \vec{n} u tački P .



Ovo se može primeniti na bilo koju krivu L koja leži na površi S i prolazi kroz tačku P .

Definicija

Ravan formirana od svih tangenti površi S kroz datu regularnu tačku $P \in S$ je **tangentna ravan** površi S u tački P .

Vektor

$$\vec{n}(P) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P) \right)$$

je vektor normale tangentne ravni površi $F(x, y, z) = 0$ u tački P .

Jednačina tangentne ravni u regularnoj tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$ je

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ako je površ S data jednačinom $z = f(x, y)$, možemo da je napišemo kao $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, pa je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1,$$

pa je jednačina tangentne ravni u tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = z - z_0.$$

Geometrijska interpretacija totalnog diferencijala

Zamenom $x - x_0 = \Delta x$ i $y - y_0 = \Delta y$, prethodna jednačina tangentne ravni se svodi na

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy. \end{aligned}$$

Desna strana gornje jednakosti je totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$, u tački $M_0(x_0, y_0)$ ravni xy , pa je

$$z - z_0 = dz.$$

Sledi da je vrednost totalnog diferencijala funkcije $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ koji odgovara priraštajima Δx i Δy jednak priraštaju po aplikati z tangentne ravni u tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dobijenog pri pomeranju iz tačke $M_0(x_0, y_0)$ u tačku $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Definicija

Prava koja prolazi kroz tačku $P_0(x_0, y_0, z_0)$ površi $F(x, y, z) = 0$ i koja je normalna na tangentnu ravan površi u tački P_0 je **normala površi u tački P_0** i data je jednačinom

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}.$$

Ako je površ S zadata jednačinom $z = f(x, y)$, jednačina normale površi u tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$ postaje

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Parcijalni izvodi višeg reda

Neka $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, postoji $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ za neko $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ u svim tačkama nepraznog podskupa $D_1 \subset D$.

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ je realna funkcija definisana nad skupom D_1 , tj. $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, pa se može postaviti pitanje postojanja parcijalnog izvoda te funkcije po promenljivoj x_j u nekoj tački $M \in D_1$.

Definicija

Ako postoji parcijalni izvod $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (M)$ tada je to *drugi parcijalni izvod ili parcijalni izvod drugog reda funkcije $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ u tački M po promenljivama x_i, x_j (tim redom!) i označavamo ga sa*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (M).$$

- za $i = j$ je $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(M)$
- za $i \neq j$ je $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$ **mešoviti** parcijalni izvod
- u opštem slučaju $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M)$ mogu imati različite vrednosti

Primer

$$\text{Funkcija } z = f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ima mešovite parcijalne izvode u svim tačkama, pri čemu oni nisu jednaki u koordinatnom početku, tj. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Teorema

Ako postoje drugi mešoviti parcijalni izvodi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ u nekoj δ -okolini tačke $M(x_1, \dots, x_n)$ i ako su oni neprekidni u datoj tački M , onda su oni i jednaki u toj tački, tj. važi jednakost

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M).$$

Parcijalni izvodi **višeg reda** definišu se induktivno:

- parcijalni izvod **reda m** ili **m -tog reda** funkcije $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ u tački $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ po promenljivama $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ (tim redom!) označava se sa

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(M),$$

pri čemu neki od indeksa mogu biti jednaki.

Redosled traženja parcijalnih izvoda u opštem slučaju utiče na njegovu vrednost. U slučaju da su izvodi neprekidne funkcije u nekoj tački, na osnovu prethodne teoreme, redosled više nije bitan.

$C^m(D, \mathbb{R})$ je skup svih funkcija takvih da su svi parcijalni izvodi m -tog reda neprekidni nad skupom D .

Posledica

Za $f \in C^m(D, \mathbb{R})$ se vrednost izraza $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(M)$ ne menja pri proizvoljnoj permutaciji indeksa i_1, i_2, \dots, i_m .

Funkcije klase $C^m(D, \mathbb{R})$, gde je D otvorena oblast su **m puta neprekidno diferencijabilne**. Za m -ti parcijalni izvod takve funkcije korišćićemo oznaku

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

gde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha_i \leq m$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$.

Totalni diferencijal višeg reda

Za diferencijabilnu funkciju $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nad skupom D je **totalni diferencijal prvog reda** (prvi totalni diferencijal) funkcije

$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ u tački $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ koji odgovara priraštajima dx_1, dx_2, \dots, dx_n promenljivih x_1, x_2, \dots, x_n dat formulom

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n,$$

gde su $dx_i = \Delta x_i$, $i = \{1, 2, \dots, n\}$ proizvoljni priraštaji nezavisnih promenljivih, tj. proizvoljni brojevi nezavisni od x_i , $i = \{1, 2, \dots, n\}$.

- x_1, x_2, \dots, x_n možemo da menjamo tako da pri tome dx_1, dx_2, \dots, dx_n ostanu konstantni
- za date dx_1, dx_2, \dots, dx_n totalni diferencijal dz je funkcija od x_1, x_2, \dots, x_n koja takođe može da bude diferencijabilna

Definicija

Totalni diferencijal $d(dz)$ u tački $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ koji odgovara priraštajima nezavisnih promenljivih dx_1, \dots, dx_n se zove **drugi totalni diferencijal (totalni diferencijal drugog reda) funkcije $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ u tački M** , u oznaci d^2z .

Ako funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u otvorenoj oblasti D , tada je totalni diferencijal dz funkcije $z = f(x, y)$ diferencijabilna funkcija pa u D postoji d^2z . Kako su dx i dy konstantni, sledi

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \end{aligned}$$

Ako sa d označimo $d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$, tada se može pisati

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) z, \quad d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z$$

Opštije,

ako funkcija $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u otvorenoj oblasti D , tada je totalni diferencijal dz funkcije $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diferencijabilna funkcija pa u D postoji $d^2 z$. Kako su dx_1, dx_2, \dots, dx_n konstantni, sledi

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n \right) \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} dx_n^2 + \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n \right) \end{aligned}$$

Ako sa d označimo

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n,$$

prethodna formula se može zapisati kao

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 z,$$

a prvi totalni diferencijal možemo zapisati u obliku

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) z.$$

- totalni diferencijal m -tog reda ili m -ti totalni diferencijal, $m \geq 3$, definišu se induktivno
- za m -ti totalni diferencijal, $m \geq 2$, kažemo da je totalni diferencijal višeg reda ili viši totalni diferencijal

Teorema

Ako funkcija $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^m(D, \mathbb{R})$, D je otvorena oblast, tada postoji totalni diferencijal $d^m z$ m -tog reda koji je dat obrascem

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m z.$$

Lokalni ekstremi

Definicija

Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ definisana na nekoj okolini $L(A, \varepsilon)$ tačke $A \in D$ (sledi da je $A \in D^\circ$).

- Ako je za svaku tačku $X \in L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}$ ispunjeno

$$f(X) < f(A),$$

tada funkcija f u tački A ima **lokalni maksimum** jednak $f(A)$.

- Ako je za svaku tačku $X \in L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}$ ispunjeno

$$f(X) > f(A),$$

tada funkcija f u tački A ima **lokalni minimum** jednak $f(A)$.

Drugim rečima, funkcija $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ u tački

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D^\circ$$

ima lokalni ekstrem ako za svako $i \in \{1, \dots, n\}$ postoje $\delta_i > 0$ takvi da je

$$\text{za svako } |\Delta x_i| < \delta_i, \quad (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) \neq (0, 0, \dots, 0),$$

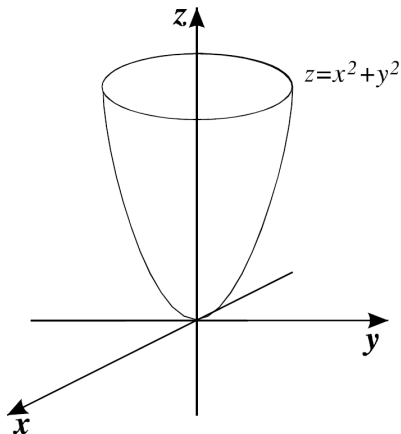
$$B(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) \in D$$

priraštaj funkcije

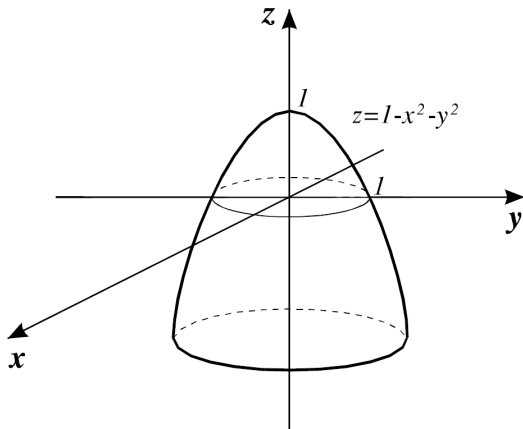
$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$$

u tački A ili pozitivan (lokalni minimum) ili negativan (lokalni maksimum) (o rubnim ekstremima biće reči kasnije).

Funkcija $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ u tački $O(0, 0)$ ima lokalni minimum:



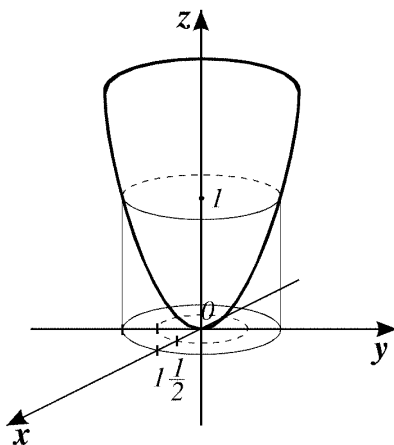
Funkcija $z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ u tački $O(0, 0)$ ima lokalni maksimum:



Funkcija

$$z = f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & , \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1 & , \quad x = y = 0 \end{cases}$$

u tački $O(0, 0)$ ima lokalni maksimum:



Potreban uslov za postojanje lokalnog ekstrema:

Teorema

Neka funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ u tački $A(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D^\circ$ ima sve parcijalne izvode prvog reda i neka u toj tački ima lokalni ekstrem. Tada je

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) = 0.$$

Specijalno, ako je $f(X)$, $X \in D$ diferencijabilna funkcija u nekoj okolini tačke $A \in D^\circ$, onda je

$$df(A) = 0, \quad (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, 0, \dots, 0).$$

Dokaz. Neka je $L(A, \varepsilon)$ otvorena lopta u kojoj je definisana funkcija $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i u kojoj važi da je

$$f(x) < f(A) \quad (f(x) > f(A)) \text{ za sve } x \in L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}.$$

Za proizvoljno $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ posmatrajmo funkciju

$$f_i : (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

definisanu sa

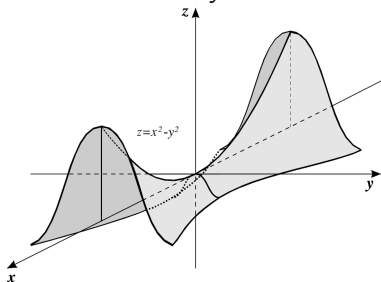
$$f_i(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n), \text{ za } x_i \in (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon).$$

Ta funkcija jedne promenljive ima lokalni ekstrem u tački a_i , pa je

$$f'_i(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0.$$

Navedeni uslov nije i dovoljan za postojanje ekstrema:

Funkcija $z = x^2 - y^2$ ima izvode $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, koji su jednaki nuli za $x = y = 0$.



Kako je $f(0,0) = 0$,

$\Delta z(0,0) = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0,0) = (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2$, to je

$$\begin{cases} \Delta f > 0 & , \quad \Delta x \neq 0, \Delta y = 0 \\ \Delta f < 0 & , \quad \Delta x = 0, \Delta y \neq 0 \end{cases}$$

pa ova funkcija nema lokalni ekstrem u tački $O(0,0)$.

- **stacionarne tačke** - unutrašnje tačke oblasti definisanosti diferencijabilne funkcije $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ u kojima su svi parcijalni izvodi prvog reda jednaki nuli

Dovoljni uslovi za postojanje lokalnog ekstrema (2 teoreme):

Teorema

Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ otvorena oblast i neka $A(a_1, \dots, a_n) \in D$, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, pri čemu je A stacionarna tačka funkcije $f(x_1, \dots, x_n)$, tj. $df(A) = 0$ za $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Tada

- 1. Ako je $d^2f(A) < 0$ za $(dx_1, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0)$, funkcija f u tački A ima lokalni maksimum.*
- 2. Ako je $d^2f(A) > 0$ za $(dx_1, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0)$, funkcija f u tački A ima lokalni minimum.*
- 3. Ako $d^2f(A)$ menja znak za $(dx_1, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0)$, funkcija f u tački A nema lokalni ekstrem.*

Teorema

Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ otvorena oblast i neka $A(a, b) \in D$, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ i

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Označimo sa $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$. Tada:

1. Ako je $r > 0$ ($t > 0$) i $rt - s^2 > 0$, funkcija $f(x, y)$ u tački $A(a, b)$ ima lokalni minimum.
2. Ako je $r < 0$ ($t < 0$) i $rt - s^2 > 0$, funkcija $f(x, y)$ u tački $A(a, b)$ ima lokalni maksimum.
3. Ako je $rt - s^2 < 0$, $f(x, y)$ u tački $A(a, b)$ nema lokalni ekstrem.
4. Ako je $rt - s^2 = 0$, potrebna su dalja ispitivanja (posmatra se znak priraštaja funkcije u tački $A(a, b)$).

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

Iz $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y = 0$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y = 0$ dobijamo stacionarne tačke $A(x, -x)$, tj. sve tačke prave $y = -x$ su stacionarne tačke. Kako je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

to je uvek

$$rt - s^2 = 4 - 4 = 0$$

ili

$$d^2 f(A) = 2(dx + dy)^2 \geq 0,$$

pa na osnovu ovih kriterijuma ne možemo zaključiti da li data funkcija u tačkama $A(x, -x)$ ima lokalni ekstrem.

U svakoj okolini tačke $A(x, -x)$ ima i drugih tačaka

$$B(y, -y), \text{ pri čemu je } A \neq B,$$

pri čemu važi da je

$$f(B) - f(A) = 0.$$

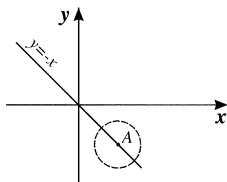
Dalje, za sve tačke

$$X(x, y), \text{ gde je } x \neq y$$

je

$$f(x, y) - f(0, 0) = (x + y)^2 > 0,$$

pa zaključujemo da je $f(X) - f(A) \geq 0$, za tačke $X \in L(A, \varepsilon)$, pa zaključujemo da funkcija ni u jednoj tački $A(x, -x)$ nema lokalni ekstrem.

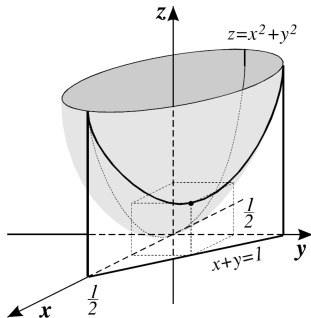


Vezani (uslovni) ekstremi

Kod određivanja ekstremnih vrednosti funkcija više promenljivih promenljive mogu biti vezane nekim dodatnim relacijama (ne mogu slobodno da se menjaju u oblasti definisanosti funkcije).

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ pod uslovom da je $x + y = 1$.



Iz date veze sledi da je $y = 1 - x$, pa je u odgovarajućim tačkama

$$f(x, y) = f(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}.$$

Funkcija $f(x, 1 - x)$ ima minimum za $x = \frac{1}{2}$ (pa i $y = \frac{1}{2}$).

Minimalna vrednost je $\frac{1}{2}$.

Sama funkcija $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ u svakoj okolini tačke $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ ima i manjih vrednosti od $\frac{1}{2}$.

Inače, njena najmanja vrednost je 0.

Ograničimo razmatranja na funkciju dve promenljive, $z = f(x, y)$. Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, definisana na $D \subset \mathbb{R}^2$ i $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$. Neka je

$$B = \{(x, y) \in D : \varphi(x, y) = 0\}$$

neprazan skup određen uslovom ili vezom $\varphi(x, y) = 0$.

Definicija

Funkcija $z = f(x, y)$ u tački nagomilavanja $A(x, y) \in B$ skupa B ima *uslovni (vezani) lokalni maksimum (uslovni (vezani) lokalni minimum) pri uslovu $\varphi(x, y) = 0$, ako*

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\})) \quad f(X) < f(A) \quad (f(X) > f(A)).$$

Uslovni lokalni minimum odnosno uslovni lokalni maksimum jednim imenom zovemo *uslovni ili vezani ekstremi* a jednačina $\varphi(x, y) = 0$ zove se *jednačina veze*.

Ako je jednačina krive $L : \varphi(x, y) = 0$, problem određivanja uslovnih ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ na krivoj L može se formulisati kao: **odrediti uslovne ekstreme funkcije $z = f(x, y)$ nad skupom D , pod uslovom $\varphi(x, y) = 0$.**

Lagranžov metod za određivanje uslovnog ekstrema:

Neka je $M_0 = (x_0, y_0)$ potencijalna tačka uslovnog ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ sa jednačinom veze $\varphi(x, y) = 0$.

Pp. da funkcije $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ imaju neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u nekoj okolini tačke $M_0(x_0, y_0)$ i da je bar jedan od parcijalnih izvoda

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0)$$

različit od 0 (neka je npr. $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0) \neq 0$.)

Iz $\varphi(x, y) = 0$ sledi da je $y = \psi(x)$, pa je $z = f(x, \psi(x)) = h(x)$ funkcija jedne promenljive. Potreban uslov da funkcija

$$z = f(x, \psi(x))$$

u tački $M(x_0, \psi(x_0))$ ima ekstremnu vrednost je da je $\frac{dz}{dx}(M_0) = 0$. Sledi da je

$$dz(M_0) = df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)dy = 0. \quad (1)$$

Iz jednačine veze se dobija

$$d\varphi(M_0) = \varphi_x(M_0)dx + \varphi_y(M_0)dy = 0. \quad (2)$$

Množenjem jednakosti (2) sa λ i dodavanjem jednakosti (1) dobijamo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \right) dy = 0.$$

Iz $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ izrazimo λ :

$$\lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Dakle, jednakosti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

daju potrebne uslove za nevezane ekstreme u tački $M_0(x_0, y_0)$ funkcije

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \quad \textbf{(LAGRANŽOVA FUNKCIJA)}.$$

Dakle, uslovni ekstrem funkcije $f(x, y)$, ako je $\varphi(x, y) = 0$, je obavezno stacionarna tačka Lagranžove funkcije

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

pa se tačke koje mogu biti uslovni ekstremi funkcije $f(x, y)$, ako je $\varphi(x, y) = 0$, dobijaju tako što se formira Lagranžova funkcija i njeni prvi parcijalni izvodi

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}$$

izjednače sa nulom. Dobijamo sistem od tri jednačine

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

čijim rešavanjem određujemo λ , x i y mogućih tačaka ekstrema.

Postojanje i prirodu uslovnih ekstrema određujemo pomoću znaka drugog totalnog diferencijala Lagranžove funkcije

$$d^2F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2,$$

za skup vrednosti x_0, y_0, λ dobijenih iz prikazanog sistema jednačina pod uslovom $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$, za $(dx, dy) \neq (0, 0)$.

- $d^2F(x_0, y_0) < 0$ u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x, y)$ ima uslovni maksimum
- $d^2F(x_0, y_0) > 0$ u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x, y)$ ima uslovni minimum
- $d^2F(x_0, y_0)$ u tački (x_0, y_0) menja znak funkcija $f(x, y)$ nema uslovni ekstrem

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ pod uslovom da je $x + y = 1$.

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1),$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + \lambda = 0, \\ x + y - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}, \lambda = -1.$$

Kako je $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$ i $dx + dy = 0$, to je

$$\begin{aligned} d^2 F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= 2dx^2 + 2dy^2 \\ &= 2dx^2 + 2(-dx)^2 = 4dx^2 > 0, (dx, dx) \neq (0, 0), \end{aligned}$$

pa funkcija u tački $A \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ ima uslovni minimum pod uslovom $x + y = 1$.

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y) = xy$ pod uslovom da je $y - x = 0$.

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(y - x),$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = y - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda = 0, \\ y - x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = y = 0, \lambda = 0.$$

Kako je $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$ i $dy - dx = 0$, to je

$d^2F(0,0) = dx^2 > 0$, za $dx \neq 0$. Kako je $d^2F(0,0) > 0$, to funkcija u tački $O(0,0)$ ima uslovni lokalni minimum. Primetimo da je $rt - s^2(0,0) = -1 < 0$, dakle **funkcija može imati uslovni ekstrem i ako je $rt - s^2 < 0$.**

Neka je data funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, definisana na skupu $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ i funkcije $\varphi_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, za fiksirano $m \in \mathbb{N}$, $m < n$. Neka je

$$B = \{X \in D : \varphi_i(X) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

neprazan skup određen sa $\varphi_1(X) = 0, \varphi_2(X) = 0, \dots, \varphi_m(X) = 0$.

Definicija

Funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ u tački nagomilavanja $A(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B$ skupa B ima **uslovni (vezani) lokalni maksimum (uslovni (vezani) lokalni minimum)** pri uslovima

$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ ako

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\})) \quad f(X) < f(A) \quad (f(X) > f(A)).$$

Uslovni lokalni minimum odnosno uslovni lokalni maksimum jednim imenom zovemo **uslovni ili vezani ekstremi**.

Ako tražimo uslovne ekstreme funkcije $z = f(x_1, \dots, x_n)$, pod uslovima

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

gde je $1 \leq m < n$, formiramo **Lagranžovu funkciju**:

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1, \dots, x_n),$$

uz pretpostavku da funkcije $f(x_1, \dots, x_n)$ i $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$ imaju neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u nekoj okolini potencijalne tačke uslovnog ekstrema $M(a_1, \dots, a_n)$.

Dalje, pretpostavimo da u toj okolini funkcionalna matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ima rang m . Izjednačavanjem sa nulom svih parcijalnih izvoda prvog reda funkcije $F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ i uzimajući u obzir jednačine veze, dobijamo sistem od $n + m$ jednačina:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}$$

čijim rešavanjem nalazimo $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ i koordinate x_1, x_2, \dots, x_n mogućih ekstrema.

Postojanje i prirodu uslovnih ekstrema određujemo pomoću znaka drugog diferencijala Lagranžove funkcije. Ako je u dobijenim tačkama

- $d^2F < 0$, $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, funkcija $f(x, y)$ ima uslovni maksimum
- $d^2F > 0$ $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, funkcija $f(x, y)$ ima uslovni minimum
- d^2F menja znak funkcija $f(x, y)$ nema uslovni ekstrem

Između dx_1, dx_2, \dots, dx_n postoje veze

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} dx_n &= 0.\end{aligned}$$

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ pod uslovom da je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > b > c > 0$.

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + 2\lambda \frac{x}{a^2} = 2x \left(1 + \frac{\lambda}{a^2} \right) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \lambda = -a^2, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + 2\lambda \frac{y}{b^2} = 2y \left(1 + \frac{\lambda}{b^2} \right) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee \lambda = -b^2, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2z + 2\lambda \frac{z}{c^2} = 2z \left(1 + \frac{\lambda}{c^2} \right) = 0 \Rightarrow z = 0 \vee \lambda = -c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$A(a, 0, 0), \quad B(-a, 0, 0) \quad (\lambda = -a^2)$$

$$C(0, b, 0), \quad D(0, -b, 0) \quad (\lambda = -b^2)$$

$$E(0, 0, c), \quad H(0, 0, -c) \quad (\lambda = -c^2)$$

Kako je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{b^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{c^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0,$$

to je

$$d^2 F = 2 \left(\left(1 + \frac{\lambda}{a^2} \right) dx^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{b^2} \right) dy^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{c^2} \right) dz^2 \right).$$

Za tačke A i B je

$$d^2 F(A) = d^2 F(B) = 2 \left(\left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) dy^2 + \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) dz^2 \right).$$

Diferenciranjem jednačine veze dobijamo

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz = 0,$$

odakle uvrštavanjem koordinata tačaka A i B dobijamo $\pm \frac{2a}{a^2}dx = 0$,

odakle je $dx = 0$.

S obzirom da je $(dx, dy, dz) \neq (0, 0, 0)$, bar jedan od diferencijala dy ili dz mora biti različit od nule.

Kako je

$$1 - \frac{a^2}{b^2} < 0 \quad \text{i} \quad 1 - \frac{a^2}{c^2} < 0$$

sledi da je

$$d^2F(A) = d^2F(B) < 0,$$

pa funkcija u tačkama A i B ima uslovni maksimum.

Za tačke C i D je

$$d^2F(C) = d^2F(D) = 2 \left(\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) dx^2 + \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) dz^2 \right).$$

Iz $\pm \frac{2b}{c^2} dy = 0$ sledi da je $dy = 0$. S obzirom da je $(dx, dy, dz) \neq (0, 0, 0)$, bar jedan od diferencijala dx ili dz mora biti različit od nule. Ako je $dx = 0$ tada je

$$d^2F(C) = d^2F(D) = 2 \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) dz^2 < 0,$$

a ako je $dz = 0$ tada je

$$d^2F(C) = d^2F(D) = 2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) dx^2 > 0,$$

pa kako d^2F menja znak u tačkama C i D , funkcija u tačkama C i D nema uslovni ekstrem.

Za tačke E i H je

$$d^2F(E) = d^2F(H) = 2 \left(\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) dx^2 + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) dy^2 \right).$$

Iz $\pm \frac{2c}{c^2} dy = 0$ sledi da je $dz = 0$. Kako je

$$1 - \frac{c^2}{a^2} > 0 \quad \text{i} \quad 1 - \frac{c^2}{b^2} > 0$$

sledi da je

$$d^2F(E) = d^2F(H) > 0,$$

pa funkcija u tačkama A i B ima uslovni minimum.