

Nevenka Adžić

Zbirka zadataka
iz
Teorije redova

Novi Sad, 2011.

Naziv udžbenika: Zbirka zadataka iz Teorije redova

Autor:

dr Nevenka Adžić,
redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu

Izdavač:

Centar za matematiku i statistiku
Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu

Autor zadržava sva prava. Bez pismene saglasnosti autora nije dozvoljeno reprodukovanje (fotokopiranje, fotografisanje, magnetni upis ili umnožavanje na bilo koji način) ili ponovno objavljivanje sadržaja (u celini ili delovima) ove knjige.

Sadržaj

1	Brojni redovi	5
1.1	Osnovni pojmovi	5
1.2	Redovi sa pozitivnim članovima	8
1.3	Alternativni redovi	12
2	Redovi funkcija	14
2.1	Osnovni pojmovi	14
2.2	Stepeni redovi	15
2.3	Razvoj funkcije u red	19
2.4	Sumiranje redova	21
3	Provere znanja I deo	24
3.1	Provera znanja iz Teorije redova I deo - 1	24
3.2	Provera znanja iz Teorije redova I deo - 2	25
3.3	Provera znanja iz Teorije redova I deo - 3	26
3.4	Provera znanja iz Teorije redova I deo - 4	27
3.5	Provera znanja iz Teorije redova I deo - 5	28
3.6	Provera znanja iz Teorije redova I deo - 6	29
4	Provere znanja II deo	30
4.1	Provera znanja iz Teorije redova II deo - 1	30
4.2	Provera znanja iz Teorije redova II deo - 2	31
4.3	Provera znanja iz Teorije redova II deo - 3	32
4.4	Provera znanja iz Teorije redova II deo - 4	33
4.5	Provera znanja iz Teorije redova II deo - 5	34
4.6	Provera znanja iz Teorije redova II deo - 6	35
5	Zadaci sa kolokvijuma	36
5.1	Kolokvijum iz Teorije redova 1	36
5.2	Kolokvijum iz Teorije redova 2	37
5.3	Kolokvijum iz Teorije redova 3	38
5.4	Kolokvijum iz Teorije redova 4	39
5.5	Kolokvijum iz Teorije redova 5	40
5.6	Kolokvijum iz Teorije redova 6	41
5.7	Kolokvijum iz Teorije redova 7	42
5.8	Kolokvijum iz Teorije redova 8	43
6	Zadaci sa pismenih ispita	44
6.1	Pismeni iz Teorije redova 1	44
6.2	Pismeni iz Teorije redova 2	45

1 Brojni redovi

1.1 Osnovni pojmovi

1. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2}$ napisati i izračunati peti član reda i treći član niza parcijalnih suma.

Rešenje:

$$a_4 = \sin 2\pi = 0, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = \sin 0 + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi = 0 + 1 + 0 = 1.$$

2. Za red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n}$ napisati i izračunati deseti član reda i peti član niza parcijalnih suma.

3. Za red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ napisati i izračunati sedmi član reda i četvrti član niza parcijalnih suma.

4. Za red $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n-4}$ napisati i izračunati treći član reda i drugi član niza parcijalnih suma.

5. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ napisati i izračunati prva tri člana niza parcijalnih suma.

Rešenje:

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}.$$

6. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}$ napisati i izračunati prvih pet članova niza parcijalnih suma.

7. Za red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n - 2}$ napisati i izračunati prva četiri člana niza parcijalnih suma.

8. Za red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n-1}$ napisati i izračunati prva tri člana niza parcijalnih suma.

9. Pokazati da red $\sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{5}$ divergira.

Rešenje:

Kako $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{n\pi}{5}$ ne postoji, to dati red divergira.

10. Pokazati da red $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2$ divergira.

11. Pokazati da red $\sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{4}$ divergira.

12. Pokazati da red $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ divergira.

13. Pokazati da red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 - 2n}$ divergira.

Rešenje:

Kako $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{5n^2 - 2n} = \frac{1}{5} \neq 0$, to dati red divergira.

14. Pokazati da red $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{4-2n}$ divergira.

15. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 3n}{n^2}$ divergira.

16. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ divergira.

17. Odrediti opšti član reda i sumu reda ako je $s_n = \frac{n}{n+1}$.

Rešenje:

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

18. Odrediti treći član niza parcijalnih suma, opšti član reda i sumu reda ako je $s_n = \frac{4^n - 3^n}{4^{n-1}}$.

19. Odrediti peti član reda i sumu reda ako je $s_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 1}$.

20. Odrediti opšti član reda i sumu reda ako je $s_n = \frac{1}{(n-1)n}$.

21. Izračunati sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$.

Rešenje:

Radi se o geometriskom redu sa $q = -\frac{1}{2}$ pa je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}.$$

22. Izračunati sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$.

23. Izračunati sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n-1}}$.

24. Izračunati sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{5^{n+2}}$.

1.2 Redovi sa pozitivnim članovima

1. Pomoću uporednog kriterijuma I vrste ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n}}.$$

Rešenje:

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+2n}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}, \text{ a red } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \left(\alpha = \frac{3}{2} > 1\right) \text{ konvergira pa i red}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n}} \text{ konvergira.}$$

2. Pomoću uporednog kriterijuma I vrste ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n + 5}.$$

3. Pomoću uporednog kriterijuma I vrste ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-5}{\sqrt[3]{n^7+n^4}}.$$

4. Pomoću uporednog kriterijuma I vrste ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2^n-1)}.$$

5. Pomoću uporednog kriterijuma I vrste ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3-2n}}.$$

Rešenje:

$$\frac{n}{\sqrt{n^3-2n}} > \frac{n}{\sqrt{n^3}}, \text{ a red } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right) \text{ divergira pa i zadati red}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n}} \text{ divergira.}$$

6. Pomoću uporednog kriterijuma I vrste ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n+1}{2^n-2}.$$

7. Pomoću uporednog kriterijuma I vrste ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+5}{\sqrt[3]{n^7-n^4}}.$$

8. Pomoću uporednog kriterijuma I vrste ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{2^n-1}.$$

1.2 Redovi sa pozitivnim članovima

9. Pomoću uporednog kriterijuma II vrste ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^4-3n}}.$$

Rešenje:

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n^4-3n}} \sim \frac{2n}{\sqrt{n^4}} = 2\frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ a red } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ divergira } (\alpha = \frac{1}{2} < 1) \text{ pa i dati red divergira.}$$

10. Pomoću uporednog kriterijuma II vrste ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-\sqrt{n}}{\sqrt{n^5+3n^2}}.$$

11. Pomoću uporednog kriterijuma II vrste ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3n+1}{\sqrt[3]{n^9-3n^5+2}}.$$

12. Pomoću uporednog kriterijuma II vrste ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n}{n^2+5^n}.$$

13. Pomoću Dalamberovog kriterijuma pokazati da red
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$
- konvergira.

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5} < 1.$$

14. Pomoću Dalamberovog kriterijuma pokazati da red
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!}$
- konvergira.

15. Pomoću Dalamberovog kriterijuma pokazati da red
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n3^n}{2^n}$
- divergira.

16. Pomoću Dalamberovog kriterijuma pokazati da red
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{(n-1)5^n}$
- konvergira.

17. Pomoću Košijevog korenskog kriterijuma pokazati da red
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{2^n}$
- divergira.

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 3^n}{2^n}} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^2 = \frac{3}{2} \cdot 1^2 = \frac{3}{2} > 1.$$

18. Pomoću Košijevog korenskog kriterijuma pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 2^n}{5^n}$ konvergira.

19. Pomoću Košijevog korenskog kriterijuma pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{2^n}$ divergira.

20. Pomoću Košijevog korenskog kriterijuma pokazati da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2} \text{ divergira.}$$

21. Pomoću integralnog kriterijuma dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira.

Rešenje:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T \frac{dx}{x^2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{T} + 1\right) = 1.$$

22. Pomoću integralnog kriterijuma dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$ konvergira.

23. Pomoću integralnog kriterijuma dokazati da red $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$ konvergira.

24. Pomoću integralnog kriterijuma dokazati da red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ konvergira.

25. Pomoću integralnog kriterijuma pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergira.

Rešenje:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}, \quad \ln x = t, \quad \frac{dx}{x} = dt \text{ pa je}$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_0^{\infty} = \ln(+\infty) - \ln 0 = +\infty - (-\infty) = +\infty.$$

26. Pomoću integralnog kriterijuma dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ divergira.

27. Pomoću integralnog kriterijuma dokazati da red $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ divergira.

28. Pomoću integralnog kriterijuma dokazati da red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n \ln^2 n}$ divergira.

1.3 Alternativni redovi

1. Dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ apsolutno konvergira.

Rešenje:

S obzirom da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira jer je $\alpha = 2 > 1$, to dati red apsolutno konvergira.

2. Dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^5 - 3n^2 + 2}}$ apsolutno konvergira.

3. Dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2 + 2n}}$ apsolutno divergira.

4. Dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2 + 5)}{n^3\sqrt{n + 4n^2}}$ apsolutno konvergira.

5. Ispitati apsolutnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$.

Rešenje:

$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2^n} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ predstavlja geometrijski red sa $q = \frac{1}{2}$.

Kako je $0 < q < 1$, ovaj geometrijski red konvergira, pa dati red apsolutno konvergira.

6. Ispitati apsolutnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$.

7. Ispitati apsolutnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2^n}$.

8. Ispitati apsolutnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$.

9. Pokazati da red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ uslovno konvergira.

Rešenje:

Kako je $a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1}$ i

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, to po Lajbnicovom kriterijumu dati red konvergira.

1.3 Alternativni redovi

10. Pokazati da red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ uslovno konvergira.

11. Pokazati da red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)2^{n-1}}$ uslovno konvergira.

12. Pokazati da red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ uslovno konvergira.

2 Redovi funkcija

2.1 Osnovni pojmovi

1. Dokazati da red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ uniformno konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.

Rešenje:

$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \wedge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira pa po Vajers trasovom kriterijumu dati red uniformno konvergira.

2. Dokazati da red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3 + 2n}$ uniformno konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.

3. Dokazati da red funkcija $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^3 n\pi x}{\sqrt{n^3 + 5}}$ uniformno konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.

4. Dokazati da red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+2)x + 1}{n^5}$ uniformno konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.

5. Pokazati da red $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos^3 nx}{n\sqrt{n-2}}$ uniformno konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.

$$\left| \frac{\cos^3 nx}{n\sqrt{n-2}} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n-2}}$$

$\frac{1}{n\sqrt{n-2}} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}} \wedge \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konvergira ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$) pa dati red uniformno konvergira (Vajers trasov kriterijum).

6. Pokazati da red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2 - 1}$ uniformno konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.

7. Pokazati da red $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{|\cos(n-1)x|}}{(n^2 - 4)\sqrt{n}}$ uniformno konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.

8. Pokazati da red $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos^2 n^2 x}{(n-1)(n-2)}$ uniformno konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.

2.2 Stepeni redovi

1. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$, odrediti interval konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (2x - 1)^n.$$

Rešenje:

S obzirom da je poluprečnik konvergencije datog reda $R = \frac{1}{2}$, to je $-\frac{1}{2} < 2x - 1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 2x < \frac{3}{2}$ pa je $I = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

2. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$, odrediti interval konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x + 5)^n.$$

3. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 4$, odrediti interval konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \frac{3}{4})^n.$$

4. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, odrediti interval konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (3x + 1)^n.$$

5. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2}$, šta je interval konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x + 1)^n?$$

Rešenje:

S obzirom da je poluprečnik konvergencije datog reda $R = 2$, to je $I = (-1 - 2, -1 + 2) = (-3, 1)$.

6. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3}{2}$, šta je interval konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (3x + 1)^n?$$

7. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2$, šta je interval konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \frac{1}{2})^n?$$

8. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, šta je interval konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (2x - \sqrt{2})^n?$$

9. Izvršiti naznačene operacije sa redovima

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)x^n - 5 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)x^n - 5 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (10n+5)x^n = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} (k-3)x^k - \sum_{n=2}^{\infty} (10n+5)x^n - 5 - 15x = \sum_{n=2}^{\infty} (n-3-10n-5)x^n - 5 - 15x = \\ &= - \sum_{n=2}^{\infty} (9n+8)x^n - 5 - 15x. \end{aligned}$$

10. Izvršiti naznačene operacije sa redovima

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (3n-1)x^n + 3x \sum_{n=2}^{\infty} nx^n.$$

11. Izvršiti naznačene operacije sa redovima

$$(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^n + x^3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n-1}.$$

12. Izvršiti naznačene operacije sa redovima

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

13. Ako je
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2}$
- , naći izvod reda
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$
- i pomoću D'Alambertovog kriterijuma pokazati da je poluprečnik konvergencije dobijenog reda
- $R_1 = 2$
- .

Rešenje:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-1)^{n-1}$$

Poluprečnik konvergencije datog reda je $R = 2$, a poluprečnik konvergencije dobijenog reda je

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 \cdot R = 2.$$

14. Ako je
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 3$
- , naći izvod reda
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(2x+5)^n$
- i pomoću D'Alambertovog kriterijuma pokazati da je poluprečnik konvergencije dobijenog reda
- $R_1 = \frac{1}{3}$
- .

15. Ako je
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{5}{3}$
- , naći izvod reda
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \frac{2}{5})^n$
- i pomoću D'Alambertovog kriterijuma odrediti poluprečnik i interval konvergencije dobijenog reda.

16. Ako je
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- , naći izvod reda
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x + \sqrt{3})^n$
- i pomoću D'Alambertovog kriterijuma odrediti poluprečnik konvergencije dobijenog reda.

17. Ako je
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$
- , naći integral reda
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$
- i pomoću Košijevog kriterijuma pokazati da je poluprečnik konvergencije dobijenog reda
- $R_1 = \frac{1}{2}$
- i odrediti interval konvergencije.

Rešenje:

Poluprečnik konvergencije datog reda je $R = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n(x+2)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x+2)^{n+1}}{n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x+2)^{n+1}. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{n+1} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{R} \text{ pa je}$$

$$R_1 = R = \frac{1}{2}.$$

Interval konvergencije je $I = (-2 - \frac{1}{2}, -2 + \frac{1}{2}) = (-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$.

18. Ako je
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{5}$
- , naći integral reda
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-5)^n$
- i pomoću Košijevog kriterijuma odrediti poluprečnik konvergencije dobijenog reda.

19. Ako je
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{5}$
- , naći integral reda
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x + 2\sqrt{5})^n$
- i pomoću Košijevog kriterijuma odrediti poluprečnik konvergencije dobijenog reda.

20. Ako je
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$
- , naći integral reda
- $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x+1)^n$
- i pomoću Košijevog kriterijuma odrediti interval konvergencije dobijenog reda.

21. Izvršiti naznačene operacije sa redovima

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' - x \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \right) dx.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' - x \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k - \sum_{k=2}^{\infty} x^k = \\ & = \sum_{k=2}^{\infty} kx^k + 1 + 2x. \end{aligned}$$

22. Izvršiti naznačene operacije sa redovima

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' + (x^2 + 2) \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)x^n.$$

23. Izvršiti naznačene operacije sa redovima

$$2x \left(\sum_{n=0}^{\infty} nx^n \right)' + \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 1)x^n \right) dx.$$

24. Izvršiti naznačene operacije sa redovima

$$(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \right) dx.$$

2.3 Razvoj funkcije u red

1. Razviti u stepeni red funkciju $g(x) = e^{2x}$ i odrediti za koje vrednosti x dobijeni razvoj važi.

Rešenje:

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Razviti u stepeni red funkciju $g(x) = \sin \frac{x}{5}$ i odrediti za koje vrednosti x dobijeni razvoj važi.

3. Razviti u stepeni red funkciju $g(x) = \ln(1+4x)$ i odrediti za koje vrednosti x dobijeni razvoj važi.

4. Razviti u stepeni red funkciju $g(x) = \frac{1}{1-5x}$ i odrediti za koje vrednosti x dobijeni razvoj važi.

5. Napisati Maclaurinov red za funkciju $g(x) = \cos x^2$.

Rešenje:

$$g(x) = \cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Napisati Maclaurinov red za funkciju $g(x) = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

7. Napisati Maclaurinov red za funkciju $g(x) = \frac{1}{1-x^3}$.

8. Napisati Maclaurinov red za funkciju $g(x) = e^{x^2} + e^{-x^2}$.

9. Napisati Taylorov red za funkciju $g(x) = e^x$ u tački $a = 1$.

Rešenje:

Kako je $g^{(n)}(x) = e^x$, to je

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (x-1)^n = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n.$$

10. Napisati Taylorov red za funkciju $g(x) = \sin x$ u tački $a = \frac{\pi}{2}$.

11. Napisati Taylorov red za funkciju $g(x) = e^{2x}$ u tački $a = \frac{1}{4}$.

12. Napisati Taylorov red za funkciju $g(x) = \cos x$ u tački $a = \pi$.

13. Razviti u stepeni red funkciju $g(x) = x^2 \ln(1-2x)$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.

Rešenje:

$$g(x) = x^2 \ln(1-2x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-2x)^n}{n} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}(2x)^n}{n} =$$

$$= -x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+2}}{n}.$$

Razvoj važi za $|2x| < 1$, tj. $|x| < \frac{1}{2}$.

14. Razviti u stepeni red funkciju $g(x) = \frac{x}{1-3x}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
15. Razviti u stepeni red funkciju $g(x) = x^3 e^{-x}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
16. Razviti u stepeni red funkciju $g(x) = x \ln(1+x) - \frac{x^2}{1+x}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.

2.4 Sumiranje redova

1. Odrediti interval konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{n} x^n$.

Rešenje:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n^2 - 3n + 5)}{n(2(n+1)^2 - 3(n+1) + 5)} = 1.$$

Kako za $x = \pm 1$ dobijamo brojne redove kod kojih opšti član ne teži nuli, to zadati red konvergira za $|x| < 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{n} x^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n x^n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} x^n + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} =$$

$$= 2x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} x^n + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \int x^{n-1} dx =$$

$$= 2x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' - 3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 \right) + 5 \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) dx =$$

$$= 2x \left(\frac{1}{1-x} \right)' - 3 \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) + 5 \int \frac{dx}{1-x} =$$

$$= \frac{-2x}{(1-x)^2} - \frac{3}{1-x} + 3 - 5 \ln(1-x).$$

2. Odrediti interval konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n-1} x^n$.

3. Odrediti interval konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 4}{n} x^{n-1}$.

4. Odrediti interval konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n+1} x^n$.

5. Odrediti interval konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - n - 2}$.

Rešenje:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - n - 3}{n^2 - n - 2} = 1.$$

Za $x = \pm 1$ dobijamo brojne redove koji apsolutno konvergiraju ($\alpha = 2$) pa zadati red konvergira za $|x| \leq 1$.

Kako je $\frac{1}{n^2 - n - 2} = \frac{1}{(n+1)(n-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n+1}$, to je

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - n - 2} = \frac{1}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2} - \frac{1}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3x} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^2}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} = \frac{1}{3x} \sum_{n=3}^{\infty} \int x^n dx - \frac{x^2}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \int x^{n-3} dx = \\
&= \frac{1}{3x} \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 - x - x^2 \right) dx - \frac{x^2}{3} \int \sum_{k=0}^{\infty} x^k dx = \\
&= \frac{1}{3x} \int \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 \right) dx - \frac{x^2}{3} \int \frac{dx}{1-x} = \\
&= \frac{1}{3x} \left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) - \frac{x^2}{3} \ln(1-x) = \\
&= \frac{1-x^3}{3x} \ln(1-x) - \frac{1}{3} - \frac{x}{6} - \frac{x^2}{9}.
\end{aligned}$$

6. Odrediti interval konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-4}$.

7. Odrediti interval konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+5n+6}$.

8. Odrediti interval konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2-1}$.

9. Odrediti interval konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+(-1)^n)x^n}{n!}$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+(-1)^n)(n+1)!}{(n+1+(-1)^{n+1})n!} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+(-1)^n)(n+1)}{n+1+(-1)^{n+1}} = +\infty
\end{aligned}$$

Dakle, dati red konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+(-1)^n)x^n}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = xe^x + e^{-x}.
\end{aligned}$$

10. Odrediti interval konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{(n-1)!}$.

11. Odrediti interval konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-2}}{n!}$.

12. Odrediti interval konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+(-2)^n)x^n}{n!}$.

13. Koristeći sumu reda sumu stepenog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3}{n} x^n$ izračunati sumu

reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3}{2^n}$.

Rešenje:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n^2-3)}{n((n+1)^2-3(n+1))} = 1.$$

Kako za $x = \pm 1$ dobijamo brojne redove kod kojih opšti član ne teži nuli, to zadati red konvergira za $|x| < 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3}{n} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \int x^{n-1} dx = \\
&= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' - 3 \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) dx = \\
&= x \left(\frac{1}{1-x} \right)' - \int \frac{dx}{1-x} = \frac{-x}{(1-x)^2} - 3 \ln(1-x).
\end{aligned}$$

Posmatrani brojni red dobijamo kada u zadati stepeni red uvrstimo $x = \frac{1}{2}$, pa je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3}{2^n} = \frac{-\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} - 3 \ln(1-\frac{1}{2}) = -2 + 3 \ln 2.$$

14. Koristeći sumu reda sumu stepenog reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$ izračunati sumu

reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n(n^2-1)}$.

15. Koristeći sumu reda sumu stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$ izračunati sumu

reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)3^{n+2}}{n \cdot 5^n}$.

16. Koristeći sumu reda sumu stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-3}{n!} x^n$ izračunati sumu

reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-3)2^n}{n!}$.

3 Provere znanja I deo

3.1 Provera znanja iz Teorije redova I deo - 1

1. Za red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1}$ napisati četvrti član reda i pokazati da dati red divergira.
2. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$ izračunati treći član niza parcijalnih suma i sumu datog reda.
3. Koristeći uporedni kriterijum ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-3}{n^3-1}$
4. Pomoću Caycheyevog kriterijuma pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n n}{5^n}$ divergira.
5. Pomoću Dalamberovog kriterijuma pokazati da red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ konvergira.
6. Pokazati da red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-1}$ uslovno konvergira.

3.2 Provera znanja iz Teorije redova I deo - 2

1. Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = -1$, dokazati da ostatak posmatranog brojnog reda teži nuli.
2. Za red $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-1}{2-n}$ napisati drugi član niza parcijalnih suma i pokazati da dati red divergira.
3. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}$ izračunati treći član reda i sumu datog reda.
4. Koristeći uporedni kriterijum ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5-5n^2+1}}{n^4}$
5. Pomoću Košijevog kriterijuma ispitati da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n^3}{2^n}$ konvergira.
6. Pomoću Dalamberovog kriterijuma ispitati da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n-1}}{(n+1)!}$ konvergira.
7. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+5}$.

3.3 Provera znanja iz Teorije redova I deo - 3

1. Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = -4$, dokazati da opšti član posmatranog brojnog reda teži nuli.
2. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ izračunati drugi član reda i sumu datog reda.
3. Za red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{1-n}$ napisati treći član niza parcijalnih suma i pokazati da dati red divergira.
4. Koristeći uporedni kriterijum ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 - 5n^2 + 1}}{n^2}$
5. Pomoću Dalamberovog kriterijuma ispitati da li red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{(n-1)!}$ konvergira.
6. Pomoću Košijevog kriterijuma ispitati da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^5}{5^n}$ konvergira.
7. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$.

3.4 Provera znanja iz Teorije redova I deo - 4

1. Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = -4$, dokazati da ostatak posmatranog brojnog reda teži nuli.
2. Za red $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-2}{2-4n}$ napisati treći član niza parcijalnih suma i pokazati da dati red divergira.
3. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ izračunati četvrti član reda i sumu datog reda.
4. Koristeći uporedni kriterijum ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^7 - 5n^3 + 1}}{n^4}$
5. Pomoću Košijevog kriterijuma ispitati da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^3}{5^n}$ konvergira.
6. Pomoću Dalamberovog kriterijuma ispitati da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(n+1)!}$ konvergira.
7. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+4}$.

3.5 Provera znanja iz Teorije redova I deo – 5

1. Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = -1$, dokazati da opšti član posmatranog brojnog reda teži nuli.
2. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$ izračunati treći član reda i sumu datog reda.
3. Za red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{1-3n}$ napisati četvrti član niza parcijalnih suma i pokazati da dati red divergira.
4. Koristeći uporedni kriterijum ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5 - 5n^2 + 1}}{n^3}$.
5. Pomoću Dalamberovog kriterijuma ispitati da li red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n-2)!}$ konvergira.
6. Pomoću Košijevog kriterijuma ispitati da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^5}{7^n}$ konvergira.
7. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-3}$.

3.6 Provera znanja iz Teorije redova I deo – 6

1. Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = -3$, dokazati da ostatak posmatranog brojnog reda teži nuli.
2. Za red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{1-3n}$ napisati drugi član niza parcijalnih suma i pokazati da dati red divergira.
3. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ izračunati peti član reda i sumu datog reda.
4. Koristeći uporedni kriterijum ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5 - 5n^2 + 1}}{n^6}$.
5. Pomoću Košijevog kriterijuma ispitati da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n \cdot n^3}{3^n}$ konvergira.
6. Pomoću Dalamberovog kriterijuma ispitati da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{(n+2)!}$ konvergira.
7. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+5}$.

4 Provere znanja II deo

4.1 Provera znanja iz Teorije redova II deo - 1

1. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{n^2 + 1}$ uniformno konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.
2. Odrediti oblast konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$.
3. Izvršiti naznačene operacije s redovima $2 \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)x^{n-2} - 5 \sum_{n=0}^{\infty} (2-n)x^n$
4. Razviti u red funkciju $x^2 \ln(1+4x)$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
5. Naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n} x^n$, $|x| < 1$.

4.2 Provera znanja iz Teorije redova II deo - 2

1. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 3$ dokazati da je poluprečnik konvergencije izvoda stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jednak $\frac{1}{3}$.
2. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(2nx)}{n^3 + 3x^2}$ uniformno konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.
3. Razviti u red funkciju $f(x) = \frac{2x^4}{1 + \frac{x}{4}}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
4. Naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3}{n} x^n$, $|x| < 1$.

4.3 Provera znanja iz Teorije redova II deo - 3

1. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 3$ dokazati da je poluprečnik konvergencije integrala stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jednak 3.
2. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos(3nx)}{n^6 + 2x^2}$ uniformno konvergira za svako $x \in R$.
3. Razviti u red funkciju $f(x) = \frac{3x^4}{1 + \frac{x}{2}}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
4. Naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - 4n^2}{n} x^n, \quad |x| < 1.$

4.4 Provera znanja iz Teorije redova II deo - 4

1. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 4$ dokazati da je poluprečnik konvergencije izvoda stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jednak $\frac{1}{4}$.
2. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(4nx)}{n^4 + 4x^4}$ uniformno konvergira za svako $x \in R$.
3. Razviti u red funkciju $f(x) = \frac{3x^3}{1 + \frac{x}{3}}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
4. Naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2}{n} x^n, \quad |x| < 1.$

4.5 Provera znanja iz Teorije redova II deo - 5

1. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2$ dokazati da je poluprečnik konvergencije integrala stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jednak $\frac{1}{2}$.
2. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \sin(2nx)}{n^5 + 5x^2}$ uniformno konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.
3. Razviti u red funkciju $f(x) = \frac{2x^2}{1 + \frac{x}{2}}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
4. Naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 - 4n^2}{n} x^n$, $|x| < 1$.

4.6 Provera znanja iz Teorije redova II deo - 6

1. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 2$ dokazati da je poluprečnik konvergencije integrala stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jednak 2.
2. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos(3nx)}{n^5 + 5x^4}$ uniformno konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.
3. Razviti u red funkciju $f(x) = \frac{5x^2}{1 + \frac{x}{5}}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
4. Naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 + 5}{n} x^n$, $|x| < 1$.

5 Zadaci sa kolokvijuma

5.1 Kolokvijum iz Teorije redova 1

1. Za red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n-2}$ napisati peti član reda, treći član niza parcijalnih suma i pokazati da dati red divergira.
2. Pomoću Dalamberovog kriterijuma ispitati da li red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n-1}$ konvergira.
3. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.
4. Izvršiti naznačene operacije s redovima $2 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^n - 5 \sum_{n=0}^{\infty} (2-n)x^n$
5. Razviti u red funkciju $f(x) = \frac{x}{1+5x}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
6. Naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{n} x^n$, $|x| < 1$.

5.2 Kolokvijum iz Teorije redova 2

1. Za red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2n}{3n}$ napisati šesti član reda, treći član niza parcijalnih suma i pokazati da dati red divergira.
2. Pomoću Caycheyevog kriterijuma pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ konvergira.
3. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$.
4. Izvršiti naznačene operacije s redovima $3 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (1-n)x^n$
5. Razviti u red funkciju $f(x) = \frac{x^2}{1-3x}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
6. Naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{n} x^n$, $|x| < 1$.

5.3 Kolokvijum iz Teorije redova 3

1. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}$ izračunati treći član reda i sumu datog reda.
2. Za red $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-1}{n-2}$ napisati treći član niza parcijalnih suma i pokazati da dati red divergira.
3. Pomoću Košijevog kriterijuma ispitati da li red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergira.
4. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+5}$.
5. Razviti u red funkciju $f(x) = x^2 \ln(1-2x) + \frac{3}{1-3x}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
6. Odrediti oblast konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n} x^n$.

5.4 Kolokvijum iz Teorije redova 4

1. Za red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ napisati peti član reda, treći član niza parcijalnih suma i odrediti sumu datog reda.
2. Pomoću Košijevog kriterijuma ispitati da li red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n-1}$ konvergira.
3. Pomoću Dalamberovog kriterijuma ispitati da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ konvergira.
4. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$.
5. Izvršiti naznačene operacije s redovima $2 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^n - 5 \sum_{n=0}^{\infty} (2-n)x^n$.
6. Razviti u red funkciju $x^2 e^{2x}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
7. Naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n} x^{n-1}$, $|x| < 1$.

5.5 Kolokvijum iz Teorije redova 5

1. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3^n}$ napisati treći član niza parcijalnih suma i izračunati sumu reda.
2. Ispitati da li red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$ konvergira pomoću
 - a) Košijevog kriterijuma
 - b) Dalamberovog kriterijuma
3. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \sin(nx)}{x^4 + n^3}$ uniformno konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.
4. Razviti u red funkciju $f(x) = \frac{3x^2}{1+3x}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
5. Odrediti oblast konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} n(2x+1)^n$.

5.6 Kolokvijum iz Teorije redova 6

1. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{5^n}$ napisati drugi član niza parcijalnih suma i izračunati sumu reda.
2. Ispitati da li red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ konvergira pomoću
 - a) Dalamberovog kriterijuma
 - b) Košijevog kriterijuma
3. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3} \cos(nx)}{x^2 + n^5}$ uniformno konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.
4. Razviti u red funkciju $f(x) = \frac{2x^3}{1+2x}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
5. Odrediti oblast konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} n(2x-1)^n$.

5.7 Kolokvijum iz Teorije redova 7

1. (2 boda) Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{5^n}$ napisati treći član reda i izračunati sumu reda.
2. (3 boda) Ispitati da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5 - 2n + 3}}{n^2}$ konvergira
3. (3 boda) Ispitati da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+2}}$ konvergira
4. (4 boda) Razviti u red funkciju $f(x) = \frac{x^3}{1-2x}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
5. (8 boda) Odrediti oblast konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} n(2x+1)^n$.

5.8 Kolokvijum iz Teorije redova 8

1. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n}$ napisati drugi član reda i izračunati sumu reda.
2. Ispitati da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 2n + 3}}{n^2}$ konvergira
3. Ispitati da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n}$ konvergira
4. Razviti u red funkciju $f(x) = \frac{x^2}{1-4x}$ i odrediti za koje x dobijeni razvoj važi.
5. Odrediti oblast konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} n(3x-1)^n$.

6 Zadaci sa pismenih ispita

6.1 Pismeni iz Teorije redova 1

1. Ako je n -ta parcijalna suma red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ data izrazom $s_n = \left(\frac{n-3}{n+1}\right)^n$, odrediti treći član reda, izračunati sumu datog reda i odrediti $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
2. Ispitati da li red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\pi \sqrt[3]{n^3 + 3n^2}}{\sqrt{n^5 - 2}}$ konvergira
3. Razviti u red funkciju $f(x) = (x+1) \ln(1 - \frac{x}{2})$, odrediti za koje x dobijeni razvoj važi i pomoću dobijenog rezultata izračunati $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n(n-1) \cdot 4^n}$.
4. Odrediti oblast konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+2n+3} (3x-2)^n$.

6.2 Pismeni iz Teorije redova 2

1. Za red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{5^{n+2}}$ napisati treći član niza parcijalnih suma, pokazati na osnovu Košijevog i Dalamberovog kriterijuma da dati red konvergira i izračunati njegovu sumu.
2. Ispitati da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5 - 2n + 3} - 3n^2}{\sqrt[3]{n^9 - 5n^6 + 5}}$ konvergira
3. Razviti u red funkciju $f(x) = x^3 \ln(1 - 5x)$, odrediti za koje x dobijeni razvoj važi i pomoću dobijenog rezultata izračunati $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.
4. Odrediti oblast konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} (2x + 1)^n$.