Simpleks metod

Anja Buljević
Aleksandra Mitrović
Smilja Stokanović

2. novembar 2022.

1 Uvodna razmatranja.

Algoritam za simpleks metod je sledeći:

1. Napraviti simpleks tabelu i popuniti je na osnovu zadatog kriterijuma optimalnosti i ograničenja.

2. Ukoliko tražimo ***minimum***, cilj je da u poslednjoj vrsti dobijemo sve negativne vrednosti, pa iz te vrste uzimamo najveći pozitivan element. Ukoliko pak tražimo ***maksimum***, cilj je da u poslednjoj vrsti dobijemo sve pozitivne vrednosti, pa iz te vrste uzimamo najnegativniji element. Kolona u kojoj se nalazi izabrani element se naziva **pivot kolonom**.

3. „Slobodnu" kolonu podelimo sa pivot kolonom i kao **pivot vrstu** uzimamo onu koja daje najmanji pozitivni količnik.

4. Element koji se nalazi na preseku pivot vrste i pivot kolone se naziva **pivot**.

5. Elementi u novoj simpleks tabeli se računaju po sledećim obrascima:

$$e_p^{k+1} = \frac{1}{e_p^k}$$
$$e_v^{k+1} = \frac{e_v^k}{e_p^k}$$
$$e_k^{k+1} = -\frac{e_k^k}{e_p^k}$$
$$e^{k+1} = e^k - \frac{e_v^k e_k^k}{e_p^k},$$

   gde je sa e_p označen pivot element, e_v predstavlja elemente u pivot vrsti, e_k predstavlja elemente u pivot koloni, dok e predstavlja ostale elemente. Stepen k označava elemente iz trenutne simpleks tabele, a $k+1$ označava elemente za sledeću simpleks tabelu.

6. Postupak se iterativno ponavlja dok ne dođemo do kraja algoritma. Sa algoritmom stajemo kada:
   - u poslednjoj vrsti simpleks tabele ne postoji pozitivan element (ukoliko tražimo minimum)/ne postoji negativan element (ukoliko tražimo maksimum)
   - nijedan količnik dobijen deljenjem slobodne i pivot kolone nema pozitivnu vrednost.

2 *Zadaci.*

1. Primenom simpleks metode odrediti minimum funkcije

$$f(\underline{x}) = -2x_1 + 3x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rešenje.
Kriterijum optimalnosti zapisujemo u obliku tako da sa desne strane jednakosti bude nula

$$f(\underline{x}) + 2x_1 - 3x_2 = 0.$$

Ograničenja tipa nejednakosti[1] transformišemo u ograničenja tipa jednakosti dodavanjem dodatne promenljive:

[1] Prirodna (zdravorazumska) ograničenja ($x_i \geq 0$) ne transformišemo u ograničenja tipa jednakosti.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 6. \end{aligned}$$

Sada formiramo prvu simpleks tabelu.

Svetlo sivom bojom je označena pivot vrsta, tamno sivom pivot kolona, dok je žutom bojom označen pivot element.

		x_1	x_2	
x_3	4	1	1	4
x_4	6	1	-1	6
f	0	2	-3	

Tabela 1: Prva simpleks tabela za zadatak 1.

		x_3	x_2	
x_1	4	1	1	
x_4	2	-1	-2	
f	-8	-2	-5	

Tabela 2: Druga simpleks tabela za zadatak 1.

Svi elementi u poslednjoj vrsti su negativni, pa to predstavlja kraj algoritma. Dobijene vrednosti su:

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = x_3 = 0$$
$$x_4 = 2$$
$$f_{min} = -8.$$

2. Radionica proizvodi klupe, stolove i stolice. Proizvodnja zahteva drvo kao sirovinu i postoje dve vrste obrade: fina i gruba. U datom trenutku radionica raspolaže sa 48 jedinica drveta, 20 sati fine obrade i 8 sati grube obrade. Klupa košta 60$, sto košta 30$, a stolica 20$. Može se prodati najviše 5 stolica. Koliko treba proizvesti klupa, stolova i stolica kako bi prihod radionice bio maksimalan? Neophodni podaci su prikazani u tabeli 3.

	Klupa	Sto	Stolica
jedinice drveta	8	6	1
fina obrada	4h	2h	1.5h
gruba obrada	2h	1.5h	0.5h

Tabela 3: Neophodni podaci za zadatak 2.

Rešenje.
Naš zadatak je da odredimo koliko klupa, stolova i stolica treba proizvesti kako bi dobit bila najveća, pa je kriterijum optimalnosti

$$f(\underline{x}) = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3.$$

Ograničenja su

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + x_3 &\leq 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 &\leq 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 &\leq 8 \\ x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ograničenja tipa nejednakosti transformišemo u ograničenja tipa jednakosti dodavanjem dodatne promenljive:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 &= 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_5 &= 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + x_6 &= 8 \\ x_3 + x_7 &= 5 \end{aligned}$$

Sada formiramo prvu simpleks tabelu.

		x_1	x_2	x_3	
x_4	48	8	6	1	6
x_5	20	4	2	1.5	5
x_6	8	2	1.5	0.5	4
x_7	5	0	0	1	$+\infty$
f	0	-60	-30	-20	

Tabela 4: Prva simpleks tabela za zadatak 2.

		x_6	x_2	x_3	
x_4	16	-4	0	-1	-16
x_5	4	-2	-1	0.5	8
x_1	4	0.5	0.75	0.25	16
x_7	5	0	0	1	5
f	240	30	15	-5	

Tabela 5: Druga simpleks tabela za zadatak 2.

		x_6	x_2	x_7	
x_4	21	-4	0	-1	
x_5	1.5	-2	-1	-0.5	
x_1	$\frac{11}{4}$	0.5	0.75	-0.25	
x_3	5	0	0	1	
f	265	30	15	5	

Tabela 6: Treća simpleks tabela za zadatak 2.

Svi elementi u poslednjoj vrsti su pozitivni, pa to predstavlja kraj algoritma jer tražimo maksimum. Dobijene vrednosti[2] su:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{11}{4} \\
x_2 &= x_6 = x_7 = 0 \\
x_3 &= 5 \\
x_4 &= 21 \\
x_5 &= \frac{3}{2} \\
f_{max} &= 265.
\end{aligned}
$$

[2] Da li su dobijene vrednosti odgovarajuće (fizički izvodljive)?

3. Primenom simpleks metode odrediti minimum funkcije

$$f(\underline{x}) = x_1 + 4x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &- \text{bez ograničenja} \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rešenje.
Kriterijum optimalnosti zapisujemo u obliku

$$f(\underline{x}) - x_1 - 4x_2 = 0.$$

Ograničenja tipa nejednakosti transformišemo u ograničenja tipa jednakosti :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 &= x_5 - x_6 \end{aligned}$$

Pošto smo x_1 izrazili preko novih promenljivih x_5 i x_6, to trebamo da uvrstimo u ostala ograničenja, kao i kriterijum optimalnosti, pa dobijamo

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) - x_5 + x_6 - 4x_2 &= 0 \\ x_5 - x_6 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_5 + x_6 + x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

		x_2	x_5	x_6	
x_3	3	1	1	-1	-3
x_4	4	1	-1	1	1
f	0	-4	-1	1	

Svetlo sivom bojom je označena pivot vrsta, tamno sivom pivot kolona, dok je žutom bojom označen pivot element.

Tabela 7: Prva simpleks tabela za zadatak 3.

Ovo predstavlja kraj algoritma jer ne postoji pozitivna vred-

		x_2	x_5	x_4	
x_3	4	2	0	1	
x_6	1	1	-1	1	
f	-1	-5	0	-1	

Tabela 8: Druga simpleks tabela za zadatak 3.

nost. Dobijene vrednosti su:

$$x_2 = x_5 = x_4 = 0$$
$$x_3 = 4$$
$$x_6 = 1$$
$$x_1 = x_5 - x_6 = -1$$
$$f_{min} = -1.$$

4. Primenom simpleks metode odrediti maksimum funkcije

$$f(\underline{x}) = 2x_1 - x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 - 4x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rešenje.
Kriterijum optimalnosti zapisujemo u obliku

$$f(\underline{x}) - 2x_1 + x_2 = 0.$$

Ograničenja tipa nejednakosti transformišemo u ograničenja tipa jednakosti :

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 6 \end{aligned}$$

Svetlo sivom bojom je označena pivot vrsta, tamno sivom pivot kolona, dok je žutom bojom označen pivot element.

		x_1	x_2	
x_3	2	-3	2	$-\frac{2}{3}$
x_4	3	2	-4	$\frac{3}{2}$
x_5	6	1	1	-6
f	0	-2	1	

Tabela 9: Prva simpleks tabela za zadatak 4.

Tabela 10: Druga simpleks tabela za zadatak 4.

		x_4	x_2	
x_3	$\frac{13}{2}$	$\frac{3}{2}$	-4	$-\frac{13}{8}$
x_1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{3}{4}$
x_5	$\frac{9}{2}$	-$\frac{1}{2}$	3	$\frac{3}{2}$
f	3	1	-3	

Tabela 11: Treća simpleks tabela za zadatak 4.

		x_4	x_5	
x_3	$\frac{25}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{3}$	
x_1	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	
x_2	$\frac{3}{2}$	-$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	
f	$\frac{15}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	

Svi elementi u poslednjoj vrsti su pozitivni, pa to predstavlja kraj algoritma jer tražimo maksimum. Dobijene vrednosti su:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{9}{2} \\ x_2 &= \frac{3}{2} \\ x_3 &= \frac{25}{2} \\ x_4 &= x_5 = 0 \\ f_{max} &= \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

5. Kompanija je obezbedila budzet od maksimalnih 600.000$ za oglašavanje određenog proizvoda na nacionalnom nivou. Svaki minut oglašavanja na televiziji košta 60.000$, dok svako oglašavanje na jednoj stranici u novinama košta 15.000$. Očekuje se da će reklamu na televiziji videti 15 miliona gledaoca, a da će svaku novinsku reklamu videti 3 miliona čitaoca. Odeljenje za istraživanje tržišta savetuje kompaniju da najviše 90% budžeta uloži u oglašavanje na televiziji. Kako treba rasporediti budžet oglašavanja da bi se povećala ukupna vidljivost oglasa (publika)? Pri takvoj raspodeli budžeta, koliko publike se očekuje da će videti oglas?

Rešenje.
Kriterijum optimalnosti je

$$f(\underline{x}) = 150000000x_1 + 3000000x_2,$$

a ograničenja su

$$\begin{aligned} 60000x_1 + 15000x_2 &\leq 600000 \\ 60000x_1 &\leq 0.9 * 600000 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kriterijum optimalnosti zapisujemo u obliku

$$f(\underline{x}) - 150000000x_1 - 3000000x_2 = 0.$$

Ograničenja tipa nejednakosti transformišemo u ograničenja tipa jednakosti :

$$\begin{aligned} 60000x_1 + 15000x_2 + x_3 &= 600000 \\ 60000x_1 + x_4 &= 540000 \end{aligned}$$

Sada formiramo simpleks tabelu.

		x_1	x_2	
x_3	600000	60000	15000	10
x_4	540000	60000	0	9
f	0	-15 000 0000	- 3 000 000	

Svetlo sivom bojom je označena pivot vrsta, tamno sivom pivot kolona, dok je žutom bojom označen pivot element.

Tabela 12: Prva simpleks tabela za zadatak 5.

		x_4	x_2	
x_3	60000	-1	15000	4
x_1	9	$\frac{1}{60000}$	0	∞
f	135000000	250	- 3 000 000	

Tabela 13: Druga simpleks tabela za zadatak 5.

Tabela 14: Treća simpleks tabela za zadatak 5.

		x_4	x_3	
x_2	4	$-\frac{1}{15000}$	$\frac{1}{15000}$	
x_1	9	$\frac{1}{60000}$	0	
f	147000000	50	200	

Svi elementi u poslednjoj vrsti su pozitivni, pa to predstavlja kraj algoritma jer tražimo maksimum. Dobijene vrednosti su:

$$x_1 = 9$$
$$x_2 = 4$$
$$x_3 = x_4 = 0$$
$$f_{max} = 147000000.$$