VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Blesić Andrija, Dedeić Jovana, Dragić Đorđe, Janjoš Aleksandar, Mišćević Irena, Ostojić Tijana, Prokić Aleksandar, Tošić Stefan, Vuković Manojlo

Katedra za matematiku
Fakultet tehničkih nauka

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe IV.1.

1.1. Diferencijalne jednačine prvog reda 1–5

Jednačina oblika $F(x, y, y') = 0$ ili ako može da se reši po y', oblika $y' = f(x, y)$, naziva se diferencijalna jednačina prvog reda.

1. $F(x, y, y') = 0$ opšti ili implicitni oblik diferencijalne jednačine

2. $y' = f(x, y)$ normalni ili eksplicitni oblik diferencijalne jednačine

Razlikujemo tri rešenja diferencijalne jednačine:

1. **Opšte rešenje** diferencijalne jednačine oblika $F(x, y, y') = 0$ je funkcija $y = y(x, c)$ koja zavisi od $c \in \mathbb{R}$ a za koju važi:

   - zadovoljava diferencijalnu jednačinu $F(x, y(x, c), y'(x, c)) = 0$
   - za svaki početni uslov $(x, y) = (x_0, y_0)$ iz oblasti rešenja D, može se jednoznačno odrediti konstanta $c = c_0$, takva da $y = y(x, c_0)$ zadovoljava početnu jednačinu, tj. $y_0 = y(x_0, c_0)$. Geometrijski ovo znači da tražimo ono rešenje koje prolazi kroz tačku (x_0, y_0).

2. **Partikularno rešenje** diferencijalne jednačine je ona funkcija koja se dobija iz opšteg rešenja za $c = c_0$.

3. **Singularno rešenje** je ono rešenje diferencijalne jednačine $F(x, y, y') = 0$ koje se ne može dobiti iz opšteg ni za jedno $c = c_0$.

U nastavku se bavimo rešavanjem raznih tipova diferencijalnih jednačina prvog reda.

1.1.1. Jednačine koje razdvajaju promenljive

Diferencijalna jednačina ovog tipa je oblika $y' = F(x, y)$ čija se desna strana može zapisati u obliku proizvoda dve neprekidne funkcije od kojih jedna zavisi samo od x, a druga samo od y, tj., $y' = f(x)g(y)$. Sada imamo,

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,\ g(y) \neq 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Zadatak 1.1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y(x^2 - 1)y' = -x(y^2 - 1).$$

Rešenje: Koristeći jednakost $y' = \dfrac{dy}{dx}$, imamo da je

$$y(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} = -x(y^2 - 1) \Leftrightarrow \frac{ydy}{y^2 - 1} = -\frac{xdx}{x^2 - 1}.$$

Uzimajući integral leve i desne strane jednakosti dobijamo,

$$\int \frac{ydy}{y^2 - 1} = -\int \frac{xdx}{x^2 - 1} \Leftrightarrow \int \frac{2ydy}{y^2 - 1} = -\int \frac{2xdx}{x^2 - 1}.$$

Oba integrala rešavamo smenom, $t = y^2-1$, odnosno $s = x^2-1$, redom. Odavde imamo $dt = 2ydy$, i $ds = 2xdx$, te dobijamo

$$\int \frac{dt}{t} = -\int \frac{ds}{s} \Rightarrow \ln|t| = -\ln|s| + c_1.$$

Sada, vraćanjem smena, i jednostavnim manipulacijama logaritmom, imamo

$$\begin{aligned} \ln|y^2-1| &= -\ln|x^2-1| + c_1, \\ \ln|y^2-1| + \ln|x^2-1| &= c_1, \\ \ln(|x^2-1||y^2-1|) &= c_1, \\ |x^2-1||y^2-1| &= e^{c_1}. \end{aligned}$$

Primetimo da je e^{c_1} opet neka druga (pozitivna) konstanta, te je možemo označiti sa c_2. Najzad, opšte rešenje početne jednačine je funkcija,

$$|x^2-1||y^2-1| = c_2.$$

Zadatak 1.2. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = xy - y$.
Rešenje:

$$y' = y(x-1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y(x-1) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = (x-1)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (x-1)dx.$$

Kada rešimo dobijene tablične integrale imamo,

$$\begin{aligned} \ln|y| &= \frac{x^2}{2} - x + c, \\ |y| &= \exp(\frac{x^2}{2} - x + c) = c_1 \exp(\frac{x^2}{2} - x). \end{aligned}$$

gde je $c_1 = \exp(c)$.

Zadatak 1.3. Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$(1+e^x)yy' = e^x,$$

koje zadovoljava uslov $y(0) = 1$.
Rešenje: Kao i u prethodnim primerima, ideja je da prvo grupišemo sve funkcije po x kod dx, i sve funkcije po y kod dy. Stoga,

$$(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x \Leftrightarrow ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx \Rightarrow \int ydy = \underbrace{\int \frac{e^x}{1+e^x}dx}_{t=1+e^x}.$$

Levi integral je tablični, dok se desni rešava smenom $t = 1+e^x$, odakle imamo $dt = e^x dx$, te dobijamo,

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} &= \ln|1+e^x| + c \\ y^2 &= 2(\ln(1+e^x) + \ln c_1) \Rightarrow y = \sqrt{2\ln c_1(1+e^x)}. \end{aligned}$$

Primetimo dve stvari, naime apsolutna vrednost pod logaritmom se izgubila jer je funkcija $1+e^x$ pozitivna na celom svom domenu. Konstantu $c \in \mathbb{R}$ smo zapisali kao $\ln c_1$, jer setimo se da je kodomen svake logaritamske funkcije, pa i ln, ceo skup realnih brojeva, pa ova smena zaista može biti uspostavljena za neko $c_1 > 0$.
Kako je $y(0) = 1$, imamo

$$y(0) = \sqrt{2\ln(2c_1)} = 1 \Leftrightarrow 2\ln(2c_1) = 1 \Leftrightarrow \ln(2c_1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2c_1 = \sqrt{e} \Leftrightarrow c_1 = \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Znači partikularno rešenje date diferencijalne jednačine sa početnim uslovom $y(0) = 1$, je funkcija $y = \sqrt{2\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{2}(1+e^x)\right)}$.

1.1.2. Homogena diferencijalna jednačina

Svaka homogena diferencijalna jednačina se može svesti na jednačinu oblika $y' = f(\frac{y}{x})$, gde je f neprekidna funkcija na nekom intervalu (a,b). Ovakve jednačine rešavaju se smenom $u = \frac{y}{x}$, gde je funkcija u funkcija od promenljive x, tj. $u = u(x)$.
Smenu uvodimo na sledeći način, $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = u(x)x \Rightarrow y' = u'x + u$, te se na ovaj način, videćemo kroz zadatke, svaka homogena jednačina svodi na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.

Zadatak 1.4. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(x-y)ydx - x^2dy = 0$.
Rešenje: Jednostavnim manipulacijama date jednačine imamo,

$$(x-y)ydx = x^2dy \Leftrightarrow (x-y)y = x^2\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \Leftrightarrow y' = \underbrace{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}_{f(\frac{y}{x})}.$$

Primetimo da smo nakon par iteracija došli do diferencijalne jednačine oblika $y' = f(\frac{y}{x})$. Uvodimo smenu $u = \frac{y}{x}$, odakle dobijamo kao što je objašnjeno u uvodu, $y' = u'x + u$. Stoga,

$$u'x + u = u - u^2 \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = -u^2 \Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = -\int \frac{dx}{x}.$$

Rešavanjem dobijenih (tabličnih) integrala imamo,

$$\frac{u^{-1}}{-1} = -\ln|x| + c \Leftrightarrow u = \frac{1}{\ln|c_1x|}.$$

Vraćanjem smene $u = \frac{y}{x}$, dobijamo rešenje početne jednačine, funkciju,

$$y = \frac{x}{\ln|c_1x|}.$$

1.1.3. Jednačine koje se svode na homogene

Diferencijalna jednačina oblika $y' = f\Big(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big)$ gde su $a_i,\ b_i,\ c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, i f neprekidna funkcija, može se svesti na homogenu jednačinu, a ona opet na jednačinu koja razdvaja promenljive.
Primetimo da imamo dva slučaja,

1. Ako je $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, uvodimo smenu $a_1x + b_1y + c_1 = t$ ili $a_2x + b_2y + c_2 = t$, i na taj način svodimo našu jednačinu na jednačinu koja razdvaja promenljive.

2. Ako je pak $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, uvodimo smenu $x = X + \alpha$ i $y = Y + \beta$, gde su α i β brojevi koji zadovoljavaju sistem jednačina

$$\begin{array}{ccccccc} a_1\alpha & + & b_1\beta & + & c_1 & = & 0 \\ a_2\alpha & + & b_2\beta & + & c_2 & = & 0, \end{array}$$

a Y je funkcija od X.
Time dobijamo homogenu diferencijalnu jednačinu,

$$Y' = f\Big(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\Big) = f\left(\frac{a_1 + b_1\dfrac{Y}{X}}{a_2 + b_2\dfrac{Y}{X}}\right) = g\Big(\frac{Y}{X}\Big).$$

Zadatak 1.5. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0.$$

Rešenje: Vidimo da je,

$$y' = \frac{x - y - 1}{x - y - 2}.$$

Koristeći oznake uvedene gore, vidimo da je $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $a_2 = 1$, i $b_2 = -1$. Stoga važi da je,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

te imamo prvi slučaj, od dva koja smo gore prepoznali. Da bismo rešili jednačinu, možemo uvesti smenu $x - y - 1 = t$ ili $x - y - 2 = t$, sasvim je svejedno. Izaberimo na primer drugu. Tada je $x - y - 2 = t$, a $x - y - 1 = t + 1$, te diferenciranjem leve i desne strane smene, po x, dobijamo $1 - y' = t'$, tj. $y' = 1 - t'$. Kad ubacimo dobijene jednakosti u našu jednačinu dobijamo,

$$1 - t' = \frac{t + 1}{t},$$

što je vidimo vrlo jednostavna jednačina koja razdvaja promenljive. U nastavku imamo,

$$t' = 1 - \frac{t + 1}{t} = \frac{t - t - 1}{t} \Leftrightarrow t' = -\frac{1}{t}.$$

Sada treba da se setimo da je $t = t(x)$, i da važi $t' = \dfrac{dt}{dx}$, te imamo,

$$\begin{aligned}
&\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t} \Leftrightarrow tdt = -dx \Rightarrow \int tdt = -\int dx, \\
&\frac{t^2}{2} = -x + c, \\
&t^2 = 2(c - x).
\end{aligned}$$

Kada vratimo smenu $t = x - y - 2$, dobijamo opšte rešenje početne diferencijalne jednačine, funkciju,

$$(x - y - 2)^2 = 2(c - x).$$

Zadatak 1.6. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' = \dfrac{x + y - 5}{x - y + 1}$.

Rešenje: Još jednom, koristeći već uvedene oznake, imamo $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $a_2 = 1$, i $b_2 = -1$. Stoga važi da je determinanta,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

te imamo sada drugi slučaj, koji kaže da treba da uvedemo smenu,

$$\begin{aligned}
x &= X + \alpha, \\
y &= Y + \beta,
\end{aligned}$$

gde su α i β brojevi koji zadovoljavaju sistem jednačina,

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha & + & \beta & - & 5 & = & 0 \\
\alpha & - & \beta & + & 1 & = & 0
\end{array},$$

koje kada se reši dobijemo $\alpha = 2$ i $\beta = 3$.

Zaključujemo, smene su $x = X + 2$, i $y = Y + 3$, i važi $y' = Y'$. Uvrštavanjem dobijenih jednakosti u početnu jednačinu dobijamo,

$$Y' = \frac{X + Y}{X - Y} = \frac{1 + \dfrac{Y}{X}}{1 - \dfrac{Y}{X}},$$

što je homogena diferencijalna jednačina i rešavamo je smenom $U = \dfrac{Y}{X}$, odakle diferenciranjem imamo da je $Y' = U'X + U$. Sada,

$$U'X + U = \frac{1 + U}{1 - U} \Leftrightarrow U'X = \frac{1 + U - U + U^2}{1 - U} = \frac{1 + U^2}{1 - U}.$$

Primetimo, funkcija U zavisi od X, tj. $U = U(X)$, odnosno $U' = \dfrac{dU}{dX}$, te imamo,

$$\frac{dU}{dX}X = \frac{1 + U^2}{1 - U} \Leftrightarrow \frac{1 - U}{1 + U^2}dU = \frac{dX}{X}.$$

Kada integralimo levu i desnu stranu dobijamo,

$$\int \frac{1}{1+U^2}dU - \underbrace{\int \frac{U}{1+U^2}dU}_{t=1+U^2} = \int \frac{dX}{X}.$$

Prvi integral sa leve strane kao i integral sa desne strane jednakosti jesu tablični, a drugi na levoj strani se da rešiti smenom $1+U^2=t$. Time dobijamo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} U - \frac{1}{2}\ln|1+U^2| &= \ln|X| + c,\\
\operatorname{arctg} U &= \ln|X| + \frac{1}{2}\ln(1+U^2) + \ln c_1, \quad c_1 > 0,\\
\operatorname{arctg} U &= \ln c_1|X|\sqrt{1+U^2},\\
\exp(\operatorname{arctg} U) &= c_1|X|\sqrt{1+U^2}.
\end{aligned}$$

Vraćanjem smene, jedne pa druge, $U = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{y-3}{x-2}$, dobijamo opšte rešenje početne diferencijalne jednačine, funkciju,

$$\exp(\operatorname{arctg}\frac{y-3}{x-2}) = c_1|x-2|\sqrt{1+\Big(\frac{y-3}{x-2}\Big)^2}.$$

Primetimo da smo rešenje dobili u implicitnom obliku, tj. kao vezu između nezavisne promenljive x i zavisne promenljive y.

1.1.4. Linearna diferencijalna jednačina

To je diferencijalna jednačina oblika $y' + f(x)y = g(x)$, gde su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne funkcije nad nekim otvorenim intervalom I. Rešenje ove jednačine dato je sa

$$y = \exp\Big(-\int f(x)dx\Big)\Big[c - \int g(x)\exp\Big(\int f(x)dx\Big)dx\Big].$$

Dato rešenje dobijamo tako što uvedemo smenu $y = uv$, gde su $u = u(x)$ i $v = v(x)$, funkcije od x. Tada važi $y' = u'v + uv'$, primenom pravila za izvod proizvoda, pa ubacivanjem ove dve jednakosti u početnu jednačinu dobijamo,

$$\begin{aligned}
u'v + uv' + f(x)uv &= g(x)\\
u'v + u\underbrace{(v' + f(x)v)}_{=0} &= g(x).
\end{aligned}$$

Da bismo našli funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ koje zadovoljavaju dobijenu jednačinu, primetimo da možemo da biramo v tako da je zadovoljeno $v' + f(x)v = 0$. Odatle važi,

$$\frac{dv}{dx} + f(x)v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -f(x)dx \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int f(x)dx.$$

Kada rešimo levi integral, dobijamo,

$$\ln|v| = -\int f(x)dx \Rightarrow v = \pm\exp(-\int f(x)dx).$$

Kako je neophodno naći jedno v koje zadovoljava jednakost, u zavisnosti od zadatka možemo izabrati + ili -. Dobivši funkciju v, potrebno je još rešiti diferencijalnu jednačinu $u'v = g(x)$, te imamo,

$$\frac{du}{dx}v = g(x) \Leftrightarrow du = \frac{g(x)}{v(x)}dx \Rightarrow \int du = \int \frac{g(x)}{v(x)}dx,$$

odakle jasno sledi rešenje dato na početku.

Zadatak 1.7. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.
Rešenje: Kao što smo rekli, uvodimo smenu $y = uv$, odakle sledi $y' = u'v + uv'$. Uvrštavanjem u jednačinu dobijamo,

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3$$
$$u'v + u\underbrace{(v' - \frac{2}{x+1}v)}_{=0} = (x+1)^3.$$

Prvo rešavamo jednačinu $v' - \frac{2}{x+1}v = 0$, pa kako je $v = v(x)$ sledi,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x+1}v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2}{x+1}dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln|v| = \ln|x+1|^2 \Leftrightarrow |v| = (x+1)^2.$$

Kako i $v = (x+1)^2$ i $v = -(x+1)^2$ zadovoljavaju gornju jednakost, imamo pravo da izaberemo jedno v, neka to bude na primer $(x+1)^2$.
Sada pošto smo pronašli v, prelazimo na drugi deo zadatka, tj. treba još rešiti jednačinu $u'v = (x+1)^3$, te važi

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3 \Leftrightarrow u' = x+1 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = x+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow du = (x+1)dx \Rightarrow \int du = \int (x+1)dx.$$

Sada je očigledno $u = \frac{x^2}{2} + x + c$, pa kako je $y = uv$, sledi da je rešenje početne diferencijalne jednačine funkcija,

$$y = (x+1)^2(\frac{x^2}{2} + x + c).$$

1.1.5. Bernulijeva diferencijalna jednačina

Bernulijeva jednačina je oblika $y' + f(x)y = g(x)y^m,\ m \in \mathbb{R},\ y > 0$. Primetimo, za $m = 0$ dobijamo linearnu jednačinu, dok za $m = 1$ imamo jednačinu koja razdvaja promenljive. Postoje dva pristupa rešavanju ove jednačine:

1. Direktno, uvođenjem smene $y = uv$.
2. Uvedemo pomoćnu smenu $z = y^{1-m}$, i tako svedemo našu jednačinu na linearnu, koju znamo kako da rešimo. Opišimo taj postupak.

$$y' + f(x)y = g(x)y^m \Leftrightarrow \frac{y'}{y^m} + f(x)y^{1-m} = g(x).$$

Sada kao što smo rekli, uvodimo smenu $z = y^{1-m}$, odakle na osnovu izvoda složene funkcije sledi

$$z' = (1-m)y^{-m}y' = (1-m)\frac{y'}{y^m} \Leftrightarrow \frac{y'}{y^m} = \frac{z'}{1-m}.$$

Zamenom dobijenog u jednačinu dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu,

$$\frac{z'}{1-m} + f(x)z = g(x) \Leftrightarrow z' + f(x)(1-m)z = g(x)(1-m).$$

Zadatak 1.8. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' + y = y^2 \ln x$.
Rešenje: Deljenjem jednačine sa x dobijamo,

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2,$$

što je vidimo Bernulijva jednačina za $m = 2$. Rešavaćemo je smenom $y = uv$, a za domaći, pokušati na drugi način!
Implementirajući smenu u jednačinu dobijamo,

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{\ln x}{x}u^2v^2,$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' + \frac{1}{x}v\right)}_{=0} = \frac{\ln x}{x}u^2v^2.$$

Kao i kod linearnih jednačina, i ovde sada pre svega treba da pronađemo funkciju v koja zadovoljava jednakost $v' + \frac{1}{x}v = 0$. Sada imamo,

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|v| = -\ln|x| \Leftrightarrow \ln|v| = \ln\frac{1}{|x|} \Leftrightarrow |v| = \frac{1}{|x|}.$$

Uzmimo da je $v = \frac{1}{x}$, ali primetimo da smo mogli i $v = -\frac{1}{x}$. U nastavku se fokusiramo na jednačinu $u'v = \frac{\ln x}{x}u^2v^2$. Kada skratimo v u jednačini, dobijamo,

$$u' = \frac{\ln x}{x}u^2v \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\ln x}{x}u^2\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{\ln x}{x^2}dx \Leftrightarrow \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c.$$

Napomenimo da je integral po x rešen parcijalnom integracijom.
Vidimo da je $\frac{1}{u} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c$, odnosno $u = \frac{x}{\ln x + x + cx}$. Sledi, krajnje rešenje je funkcija $y = uv = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\ln x + x + cx} = \frac{1}{\ln x + x + cx}$.

Zadatak 1.9. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$.
Rešenje: Ovaj zadatak rešavamo tako što zamenimo uloge promenljivim x i y. Naime, promenljivu x ćemo posmatrati kao zavisnu, a y kao nezavisnu! Primetimo, u tom slučaju imamo, $x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$, što implicira,

$$
\begin{aligned}
(2x^2 y \ln y - x)\frac{1}{x'} &= y, \\
x' &= \frac{2x^2 y \ln y - x}{y}, \\
x' + \frac{1}{y}x &= 2x^2 \ln y.
\end{aligned}
$$

Vidimo da je dobijena jednačina zapravo Bernulijeva, za $m = 2$. Rešićemo je smenom $x = uv$, vodeći računa da su sada $u = u(y)$ i $v = v(y)$, jer je sada y nezavisna promenljiva. To dalje daje,

$$
\begin{aligned}
u'v + uv' + \frac{1}{y}uv &= 2u^2 v^2 \ln y, \\
u'v + u\underbrace{(v' + \frac{1}{y}v)}_{=0} &= 2u^2 v^2 \ln y.
\end{aligned}
$$

Još jednom, prvo tražimo v tako da $v' + \frac{1}{y}v = 0$, ali je sada $v' = \frac{dv}{dy}$, pa imamo,

$$
v' = -\frac{1}{y}v \Leftrightarrow \frac{dv}{dy} = -\frac{1}{y}v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow
$$
$$
\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \ln|v| = -\ln|y| \Leftrightarrow |v| = \frac{1}{|y|} \Rightarrow v = \pm\frac{1}{y}.
$$

Biramo $v = \frac{1}{y}$. Kako smo izračunali u, prelazimo na drugu jednačinu $u'v = 2u^2 v^2 \ln y$. Kada skratimo v, dobijamo,

$$
u' = 2u^2 v \ln y \Leftrightarrow \frac{du}{dy} = \frac{2\ln y}{y}u^2 \Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{2\ln y}{y}dy \Rightarrow
$$
$$
\Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{2\ln y}{y}dy \Leftrightarrow \frac{u^{-1}}{-1} = (\ln y)^2 + c \Leftrightarrow \frac{1}{u} = -(\ln y)^2 - c.
$$

Konačno, vidimo da je $u = -\frac{1}{\ln^2 y + c}$, pa je rešenje početne jednačine dato sa $x = uv$, odnosno $x = \frac{1}{y} \cdot \frac{-1}{\ln^2 y + c}$.

1.1.6. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1.10. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \dfrac{-x - xy}{y + xy}$.

Zadatak 1.11. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

Zadatak 1.12. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0.$$

Zadatak 1.13. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $dy = \dfrac{x^3 + y}{x}dx$.

Zadatak 1.14. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' \sin x + y \cos x = \sin^2 x$.

Zadatak 1.15. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.

2. Vežbe IV.2

2.1. Diferencijalne jednačine prvog reda 6–10

2.1.1. Jednačina totalnog diferencijala

Jednačina $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ je jednačina totalnog diferencijala ako postoji funkcija $F(x,y)$ takva da je leva strana jednačine totalni diferencijal funkcije $F(x,y)$, tj. da je

1. $dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, odnosno,
2. $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x,y),\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$.

Ako takva funkcija $F(x,y)$ postoji, tada iz $dF(x,y) = 0$, sledi da je $F(x,y) = c$, i to je rešenje ove diferencijalne jednačine u implicitnom obliku. Da bi takva funkcija postojala, u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti G potrebno je i dovoljno da $P,\ Q,\ P_y,\ Q_x$ budu neprekidne, i da važi $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, $(x,y) \in G$, $(x_0,y_0) \in G$.

Zadatak 2.1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(y - 3x^2)dx + (x - 4y)dy = 0.$$

Rešenje: Vidimo, $P(x,y) = y - 3x^2$, a $Q(x,y) = x - 4y$.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1,\\ &\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 1. \end{aligned}\right\} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Sledi da imamo jednačinu totalnog diferencijala, jer su $P,\ Q,\ P_y,\ Q_x$ neprekidne funkcije (jer su polinomi po obe promenljive) na $\mathbb{R}^2$, i $\mathbb{R}^2$ je jednostruko povezana oblast, te postoji funkcija $F(x,y)$, tako da važi $\dfrac{\partial F}{\partial x} = F_x = y - 3x^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = F_y = x - 4y$. Sada imamo,

$$F(x,y) = \int (y - 3x^2)dx = yx - x^3 + \phi(y).$$

Primetimo ovde dve stvari, pre svega da kada integralimo funkciju $y - 3x^2$ po x, promenljivu y posmatramo kao konstantu. Sa druge strane, kada smo rešili integral umesto konstante c kao do sada, dodali smo neku funkciju ϕ koja vidimo zavisi od y. Razlog tome je što funkcija $F(x,y)$ zavisi od dve promenljive, pa kako smo imali integral po x, prirodno je da dodamo funkciju po y, jer je njen izvod po x jednak nuli. Jasno, da smo integralili po y, dodali bismo funkciju po x, tj. $\psi(x)$.

U nastavku koristimo drugi uslov, a to je $F_y = x - 4y$. Tako da važi,

$$\begin{aligned} F_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(yx - x^3 + \phi(y)) = x + \phi'(y)\\ F_y(x,y) &= x - 4y. \end{aligned}$$

Odakle izjednačavanjem desnih strana jednakosti dobijamo,

$$\phi'(y) = -4y \Leftrightarrow \frac{d\phi}{dy} = -4y \Leftrightarrow d\phi = -4ydy \Rightarrow \int d\phi = -\int 4ydy,$$

te je vidimo $\phi(y) = -2y^2 + c$. Konačno, $F(x,y) = yx - x^3 - 2y^2 + c$, pa je krajnje rešenje (u implicitnom obliku) dato sa $-2y^2 + xy - x^3 + c = 0$.

2.1.2. Jednačine koje dopuštaju integracioni množitelj

U prethodnom slučaju uslov od koga smo zavisili bio je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Šta ako on ne važi? Postavlja se pitanje može li se nekako naša jednačina tada "popraviti", pa da ipak imamo jednakost. Drugim rečima, pitamo se da li postoji funkcija $h(x,y) \neq 0$, koju nazivamo integracioni množitelj, tako da jednačina,

$$h(x,y)P(x,y)dx + h(x,y)Q(x,y)dy = 0,$$

bude jednačina totalnog diferencijala.

Zadatak 2.2. Pokazati da diferencijalna jednačina $xdx + ydy + xdy - ydx = 0$ ima integracioni množitelj oblika $h = h(x^2 + y^2)$ i naći njeno opšte rešenje.
Rešenje: Primetimo da je naša jednačina jednaka,

$$(x - y)dx + (x + y)dy = 0.$$

Očito, vidimo da ona nije jednačina totalnog diferencijala. Množenjem jednačine sa nekom funkcijom $h = h(x,y)$ dobijamo,

$$\underbrace{h(x,y)(x-y)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{h(x,y)(x+y)}_{Q(x,y)}dy = 0.$$

Treba da za nove $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ važi $P_y = Q_x$. Kako je $h(x,y) = h(x^2 + y^2)$, sledi da je $h_x = h'(x^2+y^2)2x$, a $h_y = h'(x^2+y^2)2y$, te imamo,

$$\begin{aligned} P_y &= h'(x^2+y^2)2y(x-y) + h(x^2+y^2)(-1), \\ Q_x &= h'(x^2+y^2)2x(x+y) + h(x^2+y^2). \end{aligned}$$

Izjednačimo desne strane ovih jednakosti, jer želimo da naša jednačina bude jednačina totalnog diferencijala.

$$\begin{aligned} 2h'(x^2+y^2)(xy-y^2) - h(x^2+y^2) &= 2h'(x^2+y^2)(xy+x^2) + h(x^2+y^2) \\ 2(x^2+y^2)h'(x^2+y^2) &= -2h(x^2+y^2). \end{aligned}$$

Uvedimo smenu, $t = x^2 + y^2$, jednostavnosti radi, time dobijamo,

$$th'(t) = -h(t) \Leftrightarrow \frac{dh}{h} = -\frac{dt}{t} \Leftrightarrow \ln|h| = -\ln|t| \Rightarrow h(t) = t^{-1}.$$

Te imamo da je $h(x^2+y^2) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Sada naša jednačina dobija oblik,

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy = 0,$$

i mi znamo da je ona sigurno jednačina totalnog diferencijala na svakoj jednostuko povezanoj oblasti koja ne sadrži koordinatni početak ($(x,y) = (0,0)$ je ekvivalentno sa $x^2+y^2=0$). Sledi, postoji funkcija $F(x,y)$ tako da važi,

$$F_x = \frac{x-y}{x^2+y^2} \text{ i } F_y = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

Stoga je,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int \frac{x-y}{x^2+y^2}dx \\
&= \underbrace{\int \frac{x}{x^2+y^2}dx}_{\text{smena } t=x^2+y^2} - y\underbrace{\int \frac{1}{x^2+y^2}dx}_{\text{tablični integral}} \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - y\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \phi(y) \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \phi(y).
\end{aligned}$$

Sa druge strane imamo,

$$\begin{aligned}
F_y &= \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\frac{x}{y^2} + \phi'(y) \\
F_y &= \frac{x+y}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Kada izjednačimo desne strane, nakon skraćivanja istih funkcija, dobijamo $\phi'(y) = 0$, odakle opet sledi da je $\phi(y) = c$.

Najzad, $F(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + c$, pa je rešenje jednačine (u implicitnom obliku) dato sa,

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + c = 0,\ y \neq 0.$$

Treba napomenuti da zbog $y \neq 0$ dobijeno rešenje treba posmatrati na jednostruko povezanim oblastima gornje poluravni $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$, ili donje poluravni $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y < 0\}$.

2.1.3. Kleroova jednačina

To je jednačina oblika $y = xy' + f(y')$, gde f ima neprekidan drugi izvod razlicit od 0 na nekom intervalu (a,b). Neka je $y' = p$, pri čemu je p funkcija od x. Tada $y = xp + f(p)$, $y' = p + xp' + f'(p)p'$, $p'(x + f'(p)) = 0$. Odavde sledi da je $p' = 0$ ili $x + f(p') = 0$.

1. $p' = 0 \Leftrightarrow p = c \Rightarrow y = cx + f(c)$, i ova familija pravih (koja zavisi od parametra c) je opste resenje Kleroove diferencijalne jednačine.

2. $x + f'(p) = 0 \Leftrightarrow x = -f'(p) \Rightarrow p = g(x) \Rightarrow y = xg(x) + f(g(x))$ je singularno rešenje, koje je obvojnica familije pravih pod 1., tj. tangenta na singularno rešenje u svakoj tački je jedna od pravih iz opšteg rešenja.

Zadatak 2.3. Uvodeći smenu $y = \frac{1}{z}$, $z = z(x)$ rešiti jednačinu $(y')^3 - y^4(y + xy') = 0$.

Rešenje: Kako je smena $y = \frac{1}{z}$, sledi $y' = -\frac{1}{z^2}z'$. Ubacimo ove jednakosti u našu jednačinu,

$$-\frac{1}{z^6}(z')^3 - \frac{1}{z^4}\Big(\frac{1}{z} - \frac{x}{z^2}z'\Big) = 0 \Leftrightarrow -(z')^3 - z + xz' = 0,$$

dobijamo Kleroovu jednačinu,

$$z = xz' - (z')^3.$$

Uvodimo smenu $z' = p$, te dobijamo $z = xp - p^3$, odakle diferenciranjem imamo $z' = p + xp' - 3p^2p'$. Kad skratimo z' i p, dobijamo $p'(x - 3p^2) = 0$.

1. $p' = 0 \Leftrightarrow p = c \Rightarrow z = cx - c^3 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = cx - c^3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{cx - c^3}$, $c \neq 0$.

2. $x - 3p^2 = 0 \Leftrightarrow p^2 = \frac{x}{3} \Leftrightarrow p = \pm\sqrt{\frac{x}{3}} \Leftrightarrow z = \pm x\sqrt{\frac{x}{3}} - \Big(\pm\sqrt{\frac{x}{3}}\Big)^3$, odakle imamo $\frac{1}{y} = \pm x\sqrt{\frac{x}{3}} \mp \Big(\sqrt{\frac{x}{3}}\Big)^3$, tj. $y = \Big(\pm x\sqrt{\frac{x}{3}} \mp \Big(\sqrt{\frac{x}{3}}\Big)^3\Big)^{-1}$ što predstavlja singularno rešenje.

Ovde smo rešenje dobili ekplicitno, ali u opštem slučaju dobijamo ga u parametarskom obliku, što bi u ovom zadatku izgledalo ovako:

$$\begin{aligned} &x = 3p^2, \\ &\frac{1}{y} = z = xp - p^3 = 3p^3 - p^3 = 2p^3 \Rightarrow y = \frac{1}{2p^3}. \end{aligned}$$

2.1.4. Uvođenje parametra

U nekim slučajevima može se odrediti rešenje jednačine $F(x, y, y') = 0$, a da se ne odredi y' kao funkcija od x i y. Postupak se sastoji u uvođenju parametra i posebno je važan za slučajeve jednačina koje se ne mogu rešiti po y'.
Dakle, uzmimo da je parametar $p = y'$. Time dobijamo dve jednačine $F(x, y, y') = 0$ i $dy = pdx$. Ako je F diferencijabilna, imamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial p}dp = 0.$$

Ukoliko u ovu jednačinu ubacimo $dy = pdx$, dobijamo

$$(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y})dx + \frac{\partial F}{\partial p}dp = 0,$$

dok ukoliko u istu ubacimo $dx = \dfrac{dy}{p}$, dobijamo

$$(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y})dy + p\frac{\partial F}{\partial p}dp = 0.$$

Sada, ako je moguće, iz $F(x, y, p) = 0$ i jedne od poslednje dve jednačine odredi se $x = x(p)$ ili $y = y(p)$. Ako smo odredili $x = x(p)$ tada je $y(p) = \int px'(p)dp + c$, dok ako smo odredili $y = y(p)$ tada je $x(p) = \int \frac{y'(p)}{p}dp + c$.

Zadatak 2.4. Rešiti diferencijalnu jednačinu $(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.
Rešenje: Uvedimo parametar $y' = p$, odakle važi $dy = pdx$. Time naša jednačina postaje,

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0 \Leftrightarrow 4ypx = p^3 + 8y^2,$$

pa je,

$$x = \frac{p^3 + 8y^2}{4yp} = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p},\ p \neq 0,\ y \neq 0.$$

Posle diferenciranja imamo,

$$dx = \Big(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2}\Big)dp + \Big(-\frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p}\Big)dy,$$

a kako iz $y' = p$ takođe sledi $dx = \dfrac{1}{p}dy$, imamo

$$\frac{1}{p}dy = \Big(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2}\Big)dp + \Big(-\frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p}\Big)dy,$$
$$\frac{p^3 - 4y^2}{2yp^2}dp = \Big(\frac{p^2}{4y^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p}\Big)dy = \frac{p^3 - 4y^2}{4y^2p}dy.$$

Odnosno,

$$\frac{p^3 - 4y^2}{2yp} \cdot \frac{dp}{p} = \frac{p^3 - 4y^2}{2yp} \cdot \frac{dy}{2y} \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{2y} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 2\frac{dp}{p}.$$

Kada integralimo dobijenu jednakost, imamo

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dp}{p} \Leftrightarrow \ln|y| = 2\ln|p| + c = 2\ln|p| + \ln|c_1| = \ln|p^2c_1|,$$

odakle, $y = c_1p^2$. Sada, ubacimo dobijeni identitet za y u jednakost za x, te imamo

$$x = \frac{p^2}{4c_1p^2} + \frac{2c_1p^2}{p} = \frac{1}{4c_1} + 2c_1p = c_2 + c_3p,\ \text{gde je } c_2 = \frac{1}{4c_1},\ c_3 = 2c_1.$$

Time smo dobili rešenje u parametarskom obliku, $x = c_2 + c_3p$, $y = c_1p^2$. Kada izrazimo p, sledi

$$p = \frac{1}{c_3}(x - c_2) \Rightarrow y = \frac{c_1}{c_3^2}(x - c_2)^2 = c_4(x - c_2)^2,\ \text{gde je } c_4 = \frac{c_1}{c_3^2},$$

sto je rešenje u eksplicitnom obliku, ali treba znati da nije moguće uvek izraziti y preko x.

2.1.5. Lagranžova jednačina

To je jednačina oblika $y = xf(y') + g(y')$ (primetimo da je Kleroova jednačina specijalan slučaj Lagranžove), i rešavamo je smenom $y' = p$, gde je $p = p(x)$ funkcija od x i zato imamo $dy = pdx$. Diferenciranjem početne jednačine po x dobijamo

$$y' = f(y') + xf'(y')y'' + g'(y')y'',$$

te zamenom $y' = p$, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= f(p) + xf'(p)\frac{dy'}{dx} + g'(p)\frac{dy'}{dx},\\
\frac{dy}{dx} &= f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx},\\
dy &= f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp.
\end{aligned}$$

Koristeći $dy = pdx$, sledi

$$\begin{aligned}
pdx - f(p)dx &= xf'(p)dp + g'(p)dp,\\
(p - f(p))dx &= (xf'(p) + g'(p))dp.
\end{aligned}$$

U nastavku razlikujemo dva slučaja.

1. $p - f(p) \neq 0$, tada imamo,

   $$\frac{dx}{dp} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}x + \frac{g'(p)}{p - g(p)}.$$

   Odakle vidimo da imamo linearnu diferencijalnu jednačinu,

   $$x' - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x = \frac{g'(p)}{p - g(p)}.$$

   Ako je njeno rešenje $x = x(p)$, onda je rešenje Lagranžove jednačine dato u parametarskom obliku, $x = x(p)$, $y = x(p)f(p) + g(p)$.

2. $p - f(p) = 0$, za neko p_1 onda važi $y = xf(p_1) + g(p_1)$, što predstavlja singularno rešenje.

Zadatak 2.5. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y = 2xy' + (y')^2$.
Rešenje: Koristeći oznake uvedene gore, sledi $f(y') = 2y'$, a $g(y') = (y')^2$. Uvodimo smenu $y' = p$, odakle imamo $dy = pdx$, pa naša jednačina dobija oblik,

$$y = 2xp + p^2.$$

Diferenciranjem po x, imamo

$$\begin{aligned}
y' &= 2p + 2xp' + 2pp',\\
\frac{dy}{dx} &= 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}.
\end{aligned}$$

Množenjem jednačine sa dx, i zamenom $dy = pdx$, dobijamo

$$\begin{aligned} dy &= 2pdx + 2xdp + 2pdp, \\ pdx &= 2pdx + 2xdp + 2pdp, \\ (p-2p)dx &= (2x-2p)dp, \\ -pdx &= 2(x+p)dp. \end{aligned}$$

Razlikujemo dva slučaja:

1. $p \neq 0$, i imamo linearnu diferencijalnu jednačinu,

   $$x' = -\frac{2}{p}x - 2 \Leftrightarrow x' + \frac{2}{p}x = -2.$$

   Dobijenu jednačinu rešavamo smenom $x = uv$, gde su $u = u(p)$ i $v = v(p)$. Kad ubacimo smenu, imamo

   $$u'v + uv' + \frac{2}{p}uv = 2 \Leftrightarrow u'v + u\underbrace{\left(v' + \frac{2}{p}v\right)}_{=0} = -2.$$

   Kada zagradu izjednačimo sa nulom, dobijamo,

   $$v' = -\frac{2}{p} \Leftrightarrow \frac{dv}{dp} = -\frac{2}{p} \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -2\frac{dp}{p} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dp}{p}.$$

   Odakle imamo,

   $$\ln|v| = -2\ln|p| \Rightarrow v = \frac{1}{p^2}.$$

   Još je ostalo pronaći funkciju u, koju dobijamo iz jednačine $u'v = -2$,

   $$u'\frac{1}{p^2} = -2 \Leftrightarrow du = -2p^2dp \Leftrightarrow u = -\frac{2}{3}p^3 + c.$$

   Sledi, $x = \frac{1}{p^2}(-\frac{2}{3}p^3 + c) = -\frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}$, pa je $y = 2\Big(-\frac{2}{3}p^2 + \frac{c}{p}\Big) + p^2 = \frac{2c}{p} - \frac{p^2}{c}$. Opšte rešenje smo dobili u parametarskom obliku, x i y su izraženi preko parametra p.

2. $p = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = 0$ singularno rešenje.

2.1.6. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 2.6. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 dx + \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 dy = 0.$$

Zadatak 2.7. Pokazati da diferencijalna jednačina

$$(5x^2 + 2xy + 3y^3)dx + 3(x^2 + xy^2 + 2y^3)dy = 0,$$

ima integracioni množitelj oblika $h = h(x + y)$ i naći njeno opšte rešenje.

Zadatak 2.8. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y = xy' + \dfrac{a}{y'},\ a \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.9. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y = -\dfrac{y'}{2}(2x + y')$.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.