

Muzajnoljst Beograd

UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Nevenka Adžić
Aleksandar Nikolić

TEORIJA REDOVA
sa primerima

NOVI SAD

2 0 0 7

Predgovor uz drugo izdanje

U istoriji matematike teorija redova zauzima značajno mesto, njeni korenii sežu još u antički period razvoja matematike, a intenzivno se razvija već pola veka. Deo teorije redova koji je obrađen u ovom udžbeniku, uobličen je pre više od sto godina, prvenstveno u radovima Lajbnica (Leibnitz), Košija (Cauchy), Dalambera (D'Alembert), Dirihlea (Dirichlet), Furijea (Fourier), Abela, ali i mnogih drugih naučnika.

Udžbenik *Teorija redova sa primerima* se pored brojnih knjiga, od kojih su samo neke navedene u literaturi, prvenstveno oslanja na 35-godišnju tradiciju predavanja i vežbi iz teorije redova na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Pomenućemo akademika Vojislava Marića, profesore Irenu Čomić, Zvezdanu Radašin, Iliju Kovačevića, Milu Stojaković i asistente Mirjanu Cvijanović i Veru Ungar, koji su u tom periodu dali najveći doprinos razvoju nastave iz ove oblasti.

Udžbenik je namenjen studentima tehnike, pre svega mašinskog, građevinskog i saobraćajnog odseka, ali mislimo da mogu da ga koriste i studenti drugih fakulteta koji se u toku studija susreću sa teorijom redova.

Tekst udžbenika je podeljen na dva poglavlja – brojni redovi i redovi funkcija. U okviru redova funkcija su obrađeni Furijeovi redovi i primena redova na rešavanje diferencijalnih jednačina. Obradena teorija je ilustrovana kroz detaljno urađane primere, a u **drugom izdanju** su na kraju svakog poglavlja dodati i zadaci za samostalno rešavanje sa rezultatima.

Autori se zahvaljuju recenzentima Ireni Čomić, Jovanki Nikić i Zoranu Lužanin na strpljivo i detaljno proučenom tekstu udžbenika, kao i korisnim primedbama koje su značajno uticale na njegov krajnji izgled. Naravno, za sve preostale greške odgovornost snose samo autori.

Predgovor trećem izdanju

Usled promena u nastavnim planovima i programima studija, kao i njihovih usklađivanja sa studiranjem po principima Bolonjske deklaracije, u trećem izdanju udžbenika **Teorija redova** ne nalazi se gradivo vezano za rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću stepenih redova i za teoriju Furićevih redova. Preostali deo teksta je uz manje ispravke štamparskih grešaka istovetan tekstu drugog izdanja.

Autori

Sadržaj

I DEO

BROJNI REDOVI

1. Osnovni pojmovi i definicije	1
2. Osnovni uslovi konvergencije redova	8
3. Osnovne operacije sa redovima	12
4. Redovi sa pozitivnim članovima	16
5. Uporedni kriterijumi konvergencije pozitivnih redova	19
6. Redovi sa pozitivnim i negativnim članovima	37
7. Zadaci za samostalno vežbanje	50

II DEO

REDOVI FUNKCIJA

1. Definicija reda funkcija	53
2. Konvergencija i osobine redova funkcija	54
3. Stepeni redovi	66
4. Tajlorov i Maklorenov red	80
5. Zadaci za samostalno vežbanje	89

I DEO

Brojni redovi

1 Osnovni pojmovi i definicije

Neka je $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ beskonačan niz realnih brojeva, a brojevi a_k , $k \in \mathbb{N}$ na neki način zavise od indeksa k , tj. $a_k = f(k)$. Ako je potrebno sabrati konačno mnogo članova (brojeva) ovog niza, npr. prvih $n + 1$

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k,$$

to se može uraditi bez većih poteškoća, osim ako se zahteva da se taj konačan zbir predstavi jednim matematičkim izrazom, što ne mora uvek biti moguće. Kao primer može da posluži zbir prvih n prirodnih brojeva

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

ili zbir prvih n članova geometrijske progresije

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

što se u oba slučaja lako pokazuje primenom matematičke indukcije.

U matematici se vrlo rano pojavila potreba nalaženja zbiru u kome je broj sabiraka (brojeva) veći od svakog unapred datog broja, drugim rečima da se

nađe zbir beskonačno mnogo brojeva. Taj problem se može prikazati i kao zbir svih članova posmatranog beskonačnog niza brojeva $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Očigledno je da se u tom slučaju ovaj zbir ne može izračunati dodavanjem jednog po jednog sabirka, a pokazalo se da takav beskonačan zbir ne mora uvek imati sve osobine konačnog zbira. Za razliku od konačnog zbira, ovde se javljaju dva, ne uvek jednostavna problema

- problem **konvergencije** beskonačnog zbira, tj. da li beskonačan zbir postoji
- problem **zbirljivosti** beskonačnog zbira, tj. ako beskonačni zbir postoji, koliko iznosi.

Da bi se ti problemi razrešili, neophodno je da se kao nov pojam, uvede pojam zbira beskonačno mnogo brojeva. To ćemo uraditi na sledeći način:

Od brojnog niza $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ formiraćemo novi niz realnih brojeva $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n \dots$, gde su

$$\begin{aligned}
 s_0 &= a_0 \\
 s_1 &= a_0 + a_1 \\
 s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\
 &\dots \\
 s_{n-1} &= a_0 + a_1 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} \\
 s_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=0}^n a_k \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Definicija: Granična vrednost niza brojeva $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

u oznaci

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

predstavlja zbir beskonačno mnogo brojeva i naziva se **beskonačan brojni red** ili, kraće, samo **red**.

Broj a_k se naziva **opšti član** reda i na osnovu njega se može pojedinačno napisati bilo koji član reda, tj. da bismo znali kako izgleda red, dovoljno je da imamo njegov opšti član. Niz $\{s_n\}$, $n = 0, 1, \dots$ naziva se **niz parcijalnih (delimičnih) suma** reda $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Opšti član tog niza je $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

Primer 1. Odredimo red ako je opšti član niza parcijalnih suma

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Kako je

$$s_n - s_{n-1} = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n - (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}) = a_n,$$

to je opšti član reda

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)},$$

pa je red oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Početna vrednost indeksa ne može biti $n = 0$, jer izraz $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ koji predstavlja opšti član dobijenog reda nije definisan za $n = 0$.

Napominjemo da se u literaturi beskonačni brojni red ili red, često jednostavno uvodi kao beskonačan zbir realnih brojeva, tj. kao izraz oblika

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Kako smo red definisali kao graničnu vrednost niza parcijalnih suma, pitanje postojanja zbiru tog reda se svodi na pitanje postojanja granične vrednosti niza parcijalnih suma. Ako ta granična vrednost postoji, tj. ako je niz $\{s_n\}$, $n = 0, 1, \dots$ konvergentan i konvergira ka s , tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

kaže se da je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **konvergentan** ili da **konvergira**, i da je s njegov **zbir (suma reda)**. Piše se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Ovako uveden pojam konvergencije reda često se naziva **konvergencija u Košijevom smislu** ili **obična konvergencija** i on je ekvivalentan pojmu zbirljivosti reda, tj. određivanju broja koji predstavlja zbir beskonačno mnogo članova reda.

Napominjemo da ako se pojam konvergencije reda uvede na neki drugi način, tada se konvergencija i zbirljivost reda ne moraju uvek poklapati.

Ako $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ne postoji (niz $\{s_n\}$, $n = 0, 1, \dots$ je divergentan), onda se kaže da je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **divergentan** ili da **divergira**.

Kod divergencije reda, u zavisnosti od vrste divergencije niza parcijalnih suma, razlikujemo dva slučaja:

- ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ ili $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$, kaže se da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira ka $+\infty$, odnosno $-\infty$,
- ako je $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n = l$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = L$ i $l \neq L$, kaže se da divergentan red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **oscilira** između brojeva l i L koji mogu biti konačni ili beskonačni.

Čitaoce takođe podsećamo da je svaki Košijev niz konvergentan, da je svaki monoton i ograničen niz konvergentan, kao i da svaki podniz konvergentnog niza takođe konvergira ka istoj graničnoj vrednosti. Ove tri činjenice ćemo koristiti u daljem tekstu.

Napominjemo da u savremenoj matematici postoji teorija divergentnih redova kao posebna oblast matematičke analize, no u ovom kursu ćemo se prvenstveno baviti konvergentnim redovima.

Dosadašnje izlaganje ćemo ilustrovati kroz sledeće primere.

Primer 2. Ispitajmo konvergenciju i, gde je to moguće, nađimo sumu redova:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} k, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad (c) \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \quad (d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

(a) Kako je $s_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, sledi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty,$$

pa red divergira ka $+\infty$.

(b) Kako je opšti član niza parcijalnih suma

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

to je $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, pa je dati red divergentan.

(c) Opšti član niza parcijalnih suma je

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Za $|q| < 1$ izraz q^{n+1} teži nuli kada n teži beskonačnosti, za $q > 1$ izraz q^{n+1} se uvećava beskonačno sa n , a za $q < -1$ niz $\{s_n\}$ oscilira između $+\infty$ i $-\infty$ jer je $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} = -\infty$, a $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = +\infty$. Zato je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{za } |q| < 1, \quad \text{red konvergira} \\ +\infty & \text{za } q > 1, \quad \text{red divergira ka } +\infty \\ \text{ne postoji} & \text{za } q < -1, \quad \text{red divergira (oscilira).} \end{cases}$$

Za $q = 1$ red postaje

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k = 1 + 1 + \dots + 1 + \dots \Rightarrow s_n = n + 1,$$

pa iz $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty$ sledi da red divergira ka $+\infty$.

Za $q = -1$ imamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots, \Rightarrow s_{2n} = 1, s_{2n+1} = 0,$$

pa $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ne postoji, a red oscilira između 0 i 1, tj. divergira.

(d) Opšti član niza parcijalnih suma je

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right),$$

tj.

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{1} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

pa je $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$. Red konvergira i njegova suma je $s = 1$.

Naglašavamo da smo, kako se radi o konačnom zbiru, u izrazu za s_n smeli da "pomeranjem zagrada" pregrupišemo sabirke, tj. da primenimo osobinu asocijativnosti.

Ako pored označe $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ za (konačan) zbir prvih $n+1$ članova reda, uvedemo i označku $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ za preostali deo reda, tada možemo pisati

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \underbrace{a_0 + a_1 + \dots + a_n}_{s_n} + \underbrace{a_{n+1} + \dots + a_{n+p} + \dots}_{R_n} = s_n + R_n.$$

Izraz $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ naziva se **ostatak reda** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Ako red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergira ka s , tada je

$$s = s_n + R_n.$$

Ostatak R_n konvergentnog reda teži nuli kada $n \rightarrow \infty$ jer, ako red konvergira ka s , tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, pa iz

$$R_n = s - s_n$$



sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s - s_n) = s - s = 0.$$

Važi i obrnuto, tj. ako ostatak R_n nekog reda teži nuli kada $n \rightarrow \infty$, tada je red konvergentan.

Za svako fiksno $n \in \mathbb{N}$ ostatak R_n nekog reda $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ takođe je beskonačan brojni red

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Ovaj brojni red dobijamo kada se izostavi prvih $n+1$ članova, tj s_n . Ako red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergira (divergira) tada konvergira (divergira) i njegov ostatak-red R_n i obrnuto. Zaista, ako sa r_p označimo opšti član niza parcijalnih suma ostatka R_n , tj.

$$r_p = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p},$$

tada je

$$s_{n+p} = s_n + r_p \quad \text{tj.} \quad r_p = s_{n+p} - s_n.$$

Datle je

$$\lim_{p \rightarrow \infty} r_p = \lim_{p \rightarrow \infty} (s_{n+p} - s_n).$$

Ako red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergira, onda je $\lim_{p \rightarrow \infty} s_{n+p} = s$, pa je

$$R_n = s - s_n,$$

što su s i s_n određeni konačni brojevi, te je i zbir reda-ostatka R_n konačan taj, što pokazuje njegovu konvergenciju.

Očigledno je i obrnuto, tj. ako ostatak-red R_n konvergira, onda konvergira i polazni red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Naime, ako je $\lim_{p \rightarrow \infty} r_p = R_n$ konačan broj, onda je i $\lim_{p \rightarrow \infty} s_{n+p} = R_n + s_n$ konačan broj.

Slično se postupa i u slučaju divergencije.

Ovim smo pokazali da prvih konačno mnogo članova reda ne utiče na njegovu konvergenciju, pa je pri ispitivanju konvergencije svejedno koji je početni indeks u oznaci \sum za red. U izlaganju teorije redova početni indeks je najčešće 0 ili 1. Jasno je da se u slučaju konvergencije reda promenom početnog indeksa zbir reda menja.

U Primeru 2(d) smo videli da je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, a ako se u redu za početni indeks umesto $k = 1$ stavi $k = 2$, a zatim doda i oduzme član a_1 , imamo

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2 Osnovni uslovi konvergencije redova

Kao što smo već rekli, pitanje konvergencije reda $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ se svodi na pitanje konvergencije niza $\{s_n\}$ (niz parcijalnih suma). Analogno osnovnim uslovima konvergencije beskonačnih brojnih nizova definišu se i osnovni uslovi konvergencije beskonačnih brojnih redova.

Košijev potreban i dovoljan uslov konvergencije: Potreban i dovoljan uslov da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira je da za svaki (proizvoljno mali) broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $n_0 = n_0(\varepsilon)$, takav da je

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

za svako $p > 0$, $p \in \mathbb{N}$ i za svako $n > n_0$.

Princip monotonosti: Ako su svi članovi a_n , $n = 0, 1, \dots$ reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nenegativni i svi članovi (monotonu rastućeg) niza parcijalnih suma $\{s_n\}$ tog

reda ograničeni (sa gornje strane) nekom pozitivnom konstantom koja ne zavisi od n , tada red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira.

Navedena dva uslova konvergencije redova nećemo dokazivati jer su odgovarajuća tvrđenja za nizove dokazana u nekim prethodnim kursevima iz matematike.

Iz Košijevog potrebnog i dovoljnog uslova konvergencije redova sledi da za konvergentan red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+p} - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0,$$

za svako $p > 0$, $p \in \mathbb{N}$.

Za $p = 1$, razlika $s_{n+p} - s_n$ postaje $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$ i predstavlja opšti član reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, pa gornji uslov postaje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0.$$

Ovim je dokazan osnovni

Potreban uslov konvergencije redova: Kod konvergentnog reda opšti član a_n teži nuli kada n teži beskonačnosti, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

To znači da ako opšti član reda ne teži nuli kada n teži beskonačnosti, tad je sigurno divergentan.

Ovaj važan potreban uslov se lako dokazuje i na osnovu definicije konvergentnog reda, jer ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira, onda je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s,$$

zato kako je $a_n = s_n - s_{n-1}$, to je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

Kako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ samo potreban uslov za konvergenciju reda, obrnuto ne mora da važi, tj. može da bude $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, a da red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ipak divergira. Tako je za **harmonijski red**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

zadovoljen uslov $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, ali red divergira. Da bismo to pokazali, uočićemo da su svi članovi ovog reda pozitivni i formirati razliku

$$\begin{aligned} |s_{n+p} - s_n| &= |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} + \frac{1}{n+p}. \end{aligned}$$

Ako uzmemo $p = n$, a zatim svaki od brojeva $1, 2, \dots, n-1$ u imeniocima razlomaka majoriramo sa n , dobijamo

$$\begin{aligned} |s_{n+p} - s_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n-1} + \frac{1}{n+n} \\ &> \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \dots + \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

To znači da $|s_{n+p} - s_n|$ nije manje od proizvoljnog ε počev od nekog $n_0(\varepsilon)$ za svako $p > 0$, jer je posmatrana razlika za $p = n$ veća od $\frac{1}{2}$ nezavisno od n . Dakle, Košijev potreban i dovoljan uslov konvergencije nije ispunjen, što znači da je harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentan.

Dakle, kada pokažemo da opšti član nekog reda teži nuli kada n teži beskonačnosti, možemo samo zaključiti da red **možda** konvergira. Da bi red sigurno konvergirao, opšti član mora da teži nuli dovoljno brzo. Primer harmonijskog reda je pokazao da izraz $\frac{1}{n}$ ne teži dovoljno brzo nuli da bi red konvergirao. Postavlja se pitanje koliko je to dovoljno brzo. Na primer, za red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, čiji opšti član $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ očigledno teži nuli kada $n \rightarrow \infty$ od opštег člana $a_n = \frac{1}{n}$ harmonijskog reda (za koji smo pokazali da

je divergentan), to povećanje brzine teženja nuli još uvek nije dovoljno, pa i ovaj red divergira. Divergenciju ovog reda pokazaćemo kada budemo ispitali konvergenciju reda čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n \ln^\beta n}$, za svako $\beta \in \mathbb{R}$.

Primer 3. Ispitajmo konvergenciju hiperharmonijskog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Za $\alpha \leq 0$ opšti član reda ne teži nuli kada $n \rightarrow \infty$, pa red divergira.

Kako su svi članovi datog reda pozitivni, po principu monotonosti, za sve ostale vrednosti broja α treba proveriti da li je niz parcijalnih suma ograničen, tj. da li je $s_n < M$, za $n = 1, 2, \dots$ i $M > 0$.

Za $0 < \alpha < 1$ je $n^\alpha < n$, tj. $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, te sledi

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Budući da niz parcijalnih suma harmonijskog reda nije ograničen, jer bi u protivnom harmonijski red konvergirao, tj. za svako pozitivno M postoji dovoljno veliko n tako da je $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > M$, to znači da niz parcijalnih suma hiperharmonijskog reda nije ograničen, pa i u ovom slučaju on divergira.

Za $\alpha = 1$ se dobija harmonijski red koji je divergentan.

Za $\alpha > 1$ imamo da je

$$\therefore = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n+1)^\alpha}.$$

Ako članove dobijenog majorantnog reda grupišemo pa u svakoj zagradi drugi sabirak majoriramo sa prvim, tj. većim, dobijamo

$$\begin{aligned} \therefore &\leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \right) \\ &\leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{(n-1)^\alpha} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right) \\ &\leq 1 + 2 \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right) = 1 + \frac{2}{2^\alpha} \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \right), \end{aligned}$$

tj.

$$s_n \leq 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} s_n .$$

Odatle se dobija

$$s_n \leq \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1} = M \quad \text{za } n \geq 1 ,$$

što znači da je niz parcijalnih suma ograničen, pa, po principu monotonosti, hiperharmonijski red konvergira.

Dakle, pokazali smo da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{konvergira za } \alpha > 1 \\ \text{divergira za } \alpha \leq 1 \end{cases}$$




3 Osnovne operacije sa redovima

Pre nego što pređemo na dalje ispitivanje uslova pod kojim brojni red konvergira, definisaćemo neke osnovne operacije sa redovima. Definisaćemo kako se redovi množe realnim brojem, kako se dva reda sabiraju i množe i pokazaćemo kakav je rezultat tih operacija u odnosu na konvergenciju.

Množenje reda realnim brojem: Red se množi realnim brojem različitim od nule tako što se tim brojem pomnoži svaki član reda, tj.

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n , \quad \alpha \neq 0 .$$

Teorema: Ako je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentan sa zbirom s , tada je dobijeni red

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n$ konvergentan sa zbirom αs .

Dokaz: Ako je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentan sa zbirom s i ako se svi njegovi članovi pomnože nekim brojem α , $\alpha \neq 0$, tj.

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha a_0 + \alpha a_1 + \dots + \alpha a_n + \dots ,$$

onda je za dobijeni red granična vrednost niza parcijalnih sumi, datog opštim članom $s_n^\alpha = \alpha a_0 + \alpha a_1 + \dots + \alpha a_n = \alpha(a_0 + a_1 + \dots + a_n) = \alpha s_n$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha s_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha s.$$

Slično se dokazuje da iz divergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sledi da i red $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n$ divergira.

Sabiranje redova: Zbir redova $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ je red čiji su članovi jednaki zbiru članova redova sabiraka, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Za konačan broj sabiraka važi $\sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k)$, dok za beskonačno mnogo sabiraka ta jednakost ne mora uvek da bude tačna. Kako je zbir beskonačnog brojnog reda vezan za postojanje granične vrednosti, a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n + \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

važi samo kada postoje granične vrednosti $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$, to je relacija

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

tačna samo ako redovi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiraju, što tvrdi sledeća teorema.

Teorema: Red $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ je konvergentan sa sumom $a + b$ ako su redovi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergentni sa sumama a , odnosno b i tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Dokaz: Neka su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergentni redovi sa sumama a , odnosno b . Pokažimo da je tada red

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

konvergentan sa sumom $a + b$.

Za zbir prvih $n + 1$ sabiraka, tj. za opšti član niza parcijalnih suma važi

$$\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k.$$

Iz uslova teoreme i osobine graničnih vrednosti sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n b_k,$$

tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = a + b.$$

Ovim smo pokazali da je zbir dva konvergentna reda konvergentan red.

Na osnovu dosadašnjeg razmatranja o operacijama sa redovima, zaključujemo da je linearna kombinacija dva konvergentna reda ponovo konvergentan red pri čemu je

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n).$$

Teorema: Red $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ je divergentan ako je jedan od redova $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergentan a drugi konvergentan.

Dokaz: Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentan, a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergentan red. Dokazuјemo da je $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ divergentan red. Prepostavimo suprotno, tj. da je $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ konvergentan red. Tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} ((a_n + b_n) - a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Linearna kombinacija dva konvergentna reda ($\alpha = 1$, $\beta = -1$) je konvergentan red, te je red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergentan, što je suprotno prepostavci da

je $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergentan. To znači da je naša pretpostavka da je $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ konvergentan red netačna, pa je $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ divergentan red.

Ovim smo pokazali da je zbir konvergentnog i divergentnog reda divergentan red.

Važno je napomenuti da ako su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergentni redovi, onda red $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ može biti konvergentan ili divergentan. Na primer, redovi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} n$ su divergentni kao i njihov zbir $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} + n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n}$. Ali, iako redovi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$ divergiraju, njihov zbir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

je konvergentan red što smo pokazali u Primeru 2 (d).

Množenje redova: Proizvod dva reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ je red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ čiji je opšti član

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0,$$

tj. red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

gde je poslednja suma u razvijenom obliku

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$$

Kako je za ispitivanje konvergencije proizvoda dva reda, tj. reda $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ potrebno još neko dodatno znanje, o tome će biti govora kasnije.

Košijev potreban i dovoljan uslov konvergencije redova se uglavnom koristi u teorijskim naučnim istraživanjima ili u slučajevima kada se pitanje

konvergencije ne može rešiti na neki drugi način, dok se u praksi, zbog svoje složenosti, retko primenjuje. Pažljiv čitalac je mogao da zapazi da u dosadašnjem izlaganju, osim u Principu monotonosti, nigde nije pomenut znak članova reda. To znači da sve prethodno navedene teoreme i osobine redova važe za redove sa, po znaku, proizvoljnim članovima. U nastavku ćemo, dok se to drugačije ne naglasi, posmatrati samo redove sa pozitivnim članovima (pozitivni redovi) i za njih dati nekoliko praktičnih dovoljnih uslova konvergencije koji se često nazivaju kriterijumi konvergencije.

4 Redovi sa pozitivnim članovima

U ovom odeljku ćemo posmatrati brojne redove čiji članovi imaju stalan znak. Ako je znak pozitivan, takav red se naziva **pozitivan red**. Redovi čiji su svi članovi negativni ne moraju se posebno ispitivati, jer se oni množenjem sa -1 svode na pozitivne redove. Pozitivni redovi se, zahvaljujući svojim osobinama, koriste u ispitivanju konvergencije redova sa članovima koji nisu svi istog znaka.

Kako je niz parcijalnih suma pozitivnih redova monotono rastući (ili monotono neopadajući), kod ovih redova, u odnosu na konvergenciju, mogu nastupiti samo dva slučaja:

1. ako je niz parcijalnih suma ograničen sa gornje strane, na osnovu Principa monotonosti sledi da je red konvergentan sa konačnom sumom,
2. ako niz parcijalnih suma nije ograničen sa gornje strane, tada red divergira (ka $+\infty$).

Dakle, ne može nastupiti slučaj da niz parcijalnih suma ima više tačaka nagomilavanja, tj. da red oscilujući divergira.

Ako je neki pozitivan red konvergentan (divergentan), promenom redosleda ili proizvoljnim grupisanjem, pa promenom redosleda takvih grupa

njegovih članova, konvergencija (divergencija) se ne menja. U slučaju konvergencije, nijedan deo novodobijenog reda ne može da teži ka beskonačnosti, dok će u slučaju divergencije suma bar jednog od delova rasparčanog polaznog reda težiti beskonačnosti. O tome govori Dirihićeva teorema.

Dirihićeva teorema: Promenom redosleda sabiraka u konvergentnom pozitivnom redu čiji je zbir a , dobija se konvergentan red sa istim zbirom a .

Dokaz: Neka je pozitivan red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentan sa sumom a , tj.

$$a = a_0 + a_1 + \dots + a_i + \dots + a_n + \dots, \quad a_n > 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Formirajmo novi red

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \dots + b_k + \dots + b_m + \dots,$$

tako da je svako b_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, jedno i samo jedno a_i iz reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Jasno je da je

$$B_m = \sum_{k=0}^m b_k < a, \quad \text{za svako } m = 0, 1, 2, \dots,$$

jer se u B_m ne nalaze svi članovi iz reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, već samo njih m . Kako je niz $\{B_m\}$ monotono rastući ($B_{m+1} = B_m + b_{m+1}$) i ograničen sa gornje strane sa a , to po teoremi o monotonim nizovima postoji $\lim_{m \rightarrow \infty} B_m$ i važi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_m = b \leq a.$$

Polazeći od reda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ formirajmo red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, tako da svaki njegov član a_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ bude jedno i samo jedno b_k , te važi

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k < \sum_{m=0}^{\infty} b_m = b.$$

Kako je niz $\{A_n\}$ monotono rastući niz, ograničen sa gornje strane sa b , to postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = a$, i važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = a \leq b.$$

Iz $b \leq a$ i $a \leq b$ sledi $b = a$, čime je teorema dokazana.

Na osnovu Dirihleove teoreme, tj. na osobini promene redosleda sabiraka kod pozitivnih konvergentnih redova, može se pokazati da je proizvod dva konvergentna pozitivna reda konvergentan red čija je suma jednaka proizvodu suma polaznih redova, tj. ako je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$, tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a \cdot b. \quad \boxed{}$$

Primer 4. Znajući da je suma geometrijskog reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, pokažimo kako se mogu izračunati sume redova

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n}.$$

(a) Po formuli za množenje redova imamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{n-k}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = 2 \cdot 2 = 4. \end{aligned}$$

(b) Koristeći rezultat dobijen pod (a) i pravilo množenja redova, imamo

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \cdot \frac{n-k+1}{2^{n-k}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot ((n+1) + n + \dots + 2 + 1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} = 2 \cdot 4 = 8. \end{aligned}$$

Odatle sledi da je suma traženog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} = 16 = 2 \cdot 8$$

Napominjemo da je $(n+1) + n + \dots + 2 + 1$ (konačna) suma prvih $n+1$ prirodnih brojeva jednaka $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

5 Uporedni kriterijumi konvergencije pozitivnih redova

Redovi sa pozitivnim članovima imaju osobinu da se mogu upoređivati, što je od velikog značaja za ispitivanje njihove konvergencije. Kao uporedni red sa kojim se vrši upoređivanje datog reda koristi se neki poznati red, najčešće:

- harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ koji divergira,
- hiperharmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ koji konvergira za $\alpha > 1$ a divergira za $\alpha \leq 1$
- geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q > 0$ koji konvergira za $q < 1$ a divergira za $q \geq 1$.

Njihovu konvergenciju (divergenciju) smo pokazali u prethodnim primerima.

Konvergencija pozitivnih redova se može ispitivati pomoću sledećih uporednih kriterijuma:

UK1: Ako članovi pozitivnih redova $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zadovoljavaju uslov

$$a_n \leq b_n \quad \text{za svako } n = 0, 1, 2, \dots,$$

tada:

(a) iz konvergencije "većeg" reda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sledi konvergencija "manjeg" reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

(b) iz divergencije "manjeg" reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sledi divergencija "većeg" reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Kako prvih konačno mnogo članova reda ne utiče na njegovu konvergenciju, uslov $a_n \leq b_n$ ne mora da važi za svako $n = 0, 1, 2, \dots$, već je dovoljno da važi počev od nekog n_0 , tj. za $\forall n \geq n_0$.

Dokaz: (a) Iz uslova kriterijuma $a_k \leq b_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ sledi

$$0 < \sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^n b_k < \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Uvedimo oznaku $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Kako je $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$, $b > 0$, to je

$$0 < A_n < b \quad \text{za svako } n = 0, 1, 2, \dots$$

Niz $\{A_n\}$ je monotono rastući, jer je $A_{n+1} = A_n + a_n$, $a_n > 0$ i ograničen sa gornje strane sa b . Teorema o monotonim nizovima tvrdi da postoji konačna granična vrednost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a \leq b.$$

Znači, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira.

Dokaz (b) je sličan dokazu pod (a), te ga izostavljamo.

Često je teško proveriti uslov $a_n \leq b_n$ za $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ (ili $\forall n \geq n_0$), pa se ovaj kriterijum daje u obliku koji je pogodniji za upotrebu.

UK2: Ako se članovi pozitivnih redova $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jednako ponašaju u beskonačnosti, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, $K \neq 0$, $K \neq \pm\infty$, što se piše

$$a_n \sim b_n, \quad \text{kada } n \rightarrow \infty,$$

tada oba reda istovremeno ili konvergiraju ili divergiraju.

Dokaz: Iz uslova $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, $K \neq 0$, $K \neq \pm\infty$ i definicije granične vrednosti imamo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tako da je

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - K \right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Odatle sledi

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - K < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \quad \Leftrightarrow \quad K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

ili, pošto se radi o pozitivnim redovima,

$$(K - \varepsilon)b_n < a_n < (K + \varepsilon)b_n, \quad \forall n \geq n_0.$$

Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergira, na osnovu osobine množenja redova realnim brojem, konvergira i red $\sum_{n=0}^{\infty} (K + \varepsilon)b_n$ gde su članovi b_n pomnoženi konstantom $K + \varepsilon$. Na osnovu te činjenice i iz desne strane nejednakosti, po uporednom kriterijumu **UK1**, sledi konvergencija reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Ako, pak, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira, iz leve strane gornje nejednakosti, potpuno analogno, sledi konvergencija reda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Slično se zaključuje i da će iz divergencije jednog od datih redova slediti divergencija drugog.

Napominjemo da za $K = 0$ imamo $a_n < \varepsilon \cdot b_n$, pa po kriterijumu **UK1**, iz konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sledi konvergencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i iz divergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sledi divergencija reda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Primer 5. Ispitajmo konvergenciju sledećih redova:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt{1+n^3} \sin \frac{1}{n}}.$$

(a) Kako $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ kada $n \rightarrow \infty$, a red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergira (jer je $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), to dati red konvergira.

(b) Kako je $0 < \sin \frac{1}{n} < 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$, to je

$$\frac{n+3}{\sqrt{1+n^3} \sin \frac{1}{n}} > \frac{n+3}{\sqrt{1+n^3}} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \quad \text{kada } n \rightarrow \infty.$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ divergira ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), pa i dati red divergira.

UK3: Ako članovi pozitivnih redova $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ počev od nekog n_0 , tj. $\forall n \geq n_0$ zadovoljavaju relaciju

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

tada iz konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sledi konvergencija reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, a iz divergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sledi divergencija reda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Dokaz: Ako uslov-nejednakost kriterijuma napišemo redom počev od nekog n , ($n > n_0$), tj. za $n+1, n+2, \dots, n+p$, $p = 1, 2, \dots$, imaćemo

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \\ \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} &\leq \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{a_{n+p-1}}{a_{n+p-2}} &\leq \frac{b_{n+p-1}}{b_{n+p-2}} \\ \frac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}} &\leq \frac{b_{n+p}}{b_{n+p-1}}. \end{aligned}$$

Ako dobijene nejednakosti pomnožimo, dobićemo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n+p-1}}{a_{n+p-2}} \cdot \frac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} \cdot \dots \cdot \frac{b_{n+p-1}}{b_{n+p-2}} \cdot \frac{b_{n+p}}{b_{n+p-1}}.$$

Posle skraćivanja razlomaka ostaje

$$\frac{a_{n+p}}{a_n} \leq \frac{b_{n+p}}{b_n}, \quad \text{tj.} \quad a_{n+p} \leq \frac{a_n}{b_n} \cdot b_{n+p}, \quad p = 1, 2, \dots$$

Ako red $\sum_{p=1}^{\infty} b_{n+p}$ konvergira, tada konvergira i red $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot b_{n+p}$, pa će iz poslednje nejednakosti i kriterijuma **UK1**, red $\sum_{p=1}^{\infty} a_{n+p}$, tj. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergirati. Iz divergencije reda $\sum_{p=1}^{\infty} a_{n+p}$, na sličan način sledi divergencija reda $\sum_{p=1}^{\infty} b_{n+p}$, tj. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Upoređujući brojni red sa geometrijskim redom, dobijaju se Košijev korenski i Dalamberov količnički kriterijum konvergencije pozitivnih redova.

UK4 Košijev korenski kriterijum: Ako je za pozitivan red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ počev od nekog n_0

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \text{za svako } n \geq n_0,$$

gde je q fiksiran broj ($0 < q < 1$), tada red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira, a ako je, počev od nekog n_0

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad \text{za svako } n \geq n_0,$$

tada red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira.

Ukoliko postoji granična vrednost $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, Košijev korenski kriterijum ćemo formulisati i dokazati u drugačijem obliku, kada je nešto manje efikasan.

UK4': Ako je za pozitivan red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell,$$

tada red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{konvergira za } \ell < 1 \\ \text{divergira za } \ell > 1. \end{cases}$$

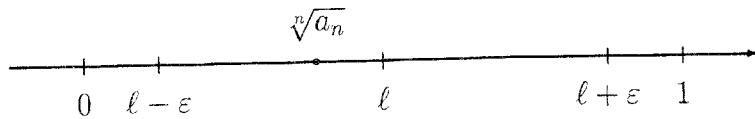
Za $\ell = 1$ kriterijum ne daje odgovor.

Dokaz: Neka je

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1.$$

Biramo tako malo $\varepsilon > 0$, da je i $\ell + \varepsilon < 1$ i $\ell - \varepsilon > 0$. Sada iz (a) sledi da postoji $n_0 = n_0(\varepsilon)$, tako da je

$$(b) \quad |\sqrt[n]{a_n} - \ell| < \varepsilon \quad \text{tj.} \quad 0 < \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon < 1, \quad \forall n \geq n_0.$$



Slika 1

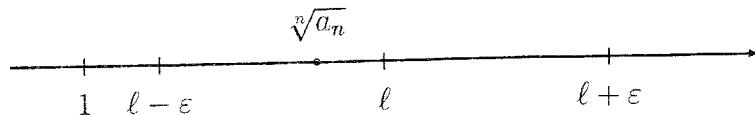
Uvedimo oznaku $\ell + \varepsilon = q$. Tada iz (b) sledi

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < q < 1 \quad \text{tj.} \quad a_n < q^n, \quad \forall n \geq n_0.$$

Kako geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergira ($q < 1$), po kriterijumu **UK1** sledi da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira.

Ako je $\ell > 1$, onda se za dovoljno veliko n može izabrati $\varepsilon > 0$ tako da je $q = \ell - \varepsilon > 1$, pa iz $\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$ sledi

$$1 < q < \sqrt[n]{a_n} \quad \text{tj.} \quad q^n < a_n, \quad \forall n \geq n_0.$$



Slika 2

Odatle, zbog divergencije geometrijskog reda $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ($q > 1$), sledi divergencija reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Ako $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ ne postoji, onda se posmatra $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ koji uvek postoji.

Primer 6. Ispitajmo konvergenciju sledećih redova:

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{n(n+1)}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n^2+n}{n+2}}, \quad a > 0, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(a + \frac{1}{n})^n}, \quad a > 0.$$

(a) Kako je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{n(n+1)} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{n+2} \right)^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-3}{n+2} \right)^{\frac{n+2}{-3}} \right)^{\frac{-3(n+1)}{n+2}} = e^{-3} < 1, \end{aligned}$$

to dati red konvergira.

(b) Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{\frac{n^2+n}{n+2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{n^2+n}{n(n+2)}} = a^1 = a, \quad a > 0,$$

to red konvergira za $0 < a < 1$, a divergira za $a > 1$. Kako za $a = 1$ red glasi $\sum_{n=1}^{\infty} 1^{\frac{n^2+n}{n^2+2n}}$, to je opšti član $a_n = 1$, pa, kako opšti član ne teži nuli, red divergira.

(c) Iz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{(a + \frac{1}{n})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{a + \frac{1}{n}} = \frac{1}{a},$$

(pri čemu smo koristili da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$), sledi da red konvergira za $\frac{1}{a} < 1$, tj. za $a > 1$, a divergira za $\frac{1}{a} > 1$, tj. za $0 < a < 1$.

Za $a = 1$ red glasi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(1 + \frac{1}{n})^n}.$$

Znajući da je $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$, lako se vidi da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, te red divergira.

Kriterijum **UK4'** je manje efikasan od kriterijuma **UK4**, jer za $\ell = 1$ pitanje konvergencije ostaje otvoreno, dok je u kriterijumu **UK4** to pitanje uvek rešeno.

UK5 Dalamberov količnički kriterijum: Ako je za pozitivan red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, počev od nekog n_0 ,

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \leq q < 1 \quad \text{za svako } n \geq n_0,$$

gde je q fiksiran broj ($0 < q < 1$), tada red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira, a ako je počev od nekog n_0

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \geq 1 \quad \text{za svako } n \geq n_0,$$

tada red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira.

Ukoliko postoji granična vrednost $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, Dalamberov kriterijum se može formulisati u drugačijem obliku, ali je, kao i u slučaju Košijevog koren-skog kriterijuma, tada nešto manje efikasan.

UK5': Ako je za pozitivan red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell,$$

tada red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{konvergira za } \ell < 1 \\ \text{divergira za } \ell > 1. \end{cases}$$

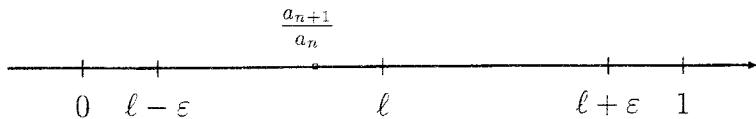
Za $\ell = 1$ kriterijum ne daje odgovor.

Dokaz: Neka je

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1.$$

Biramo tako malo $\varepsilon > 0$ da je $\ell + \varepsilon < 1$ i $\ell - \varepsilon > 0$. Sada iz (a) sledi da postoji $n_0 = n_0(\varepsilon)$, tako da je

$$(b) \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell \right| < \varepsilon \quad \text{tj.} \quad 0 < \ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon < 1, \quad \forall n \geq n_0.$$



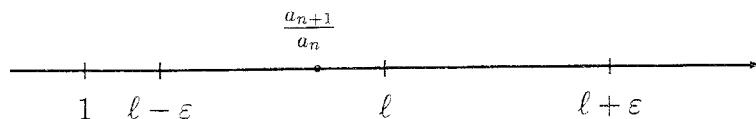
Slika 3

Ako je $\ell + \varepsilon = q$, iz (b) sledi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \quad \text{tj.} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{q^{n+1}}{q^n}, \quad q < 1, \quad \forall n \geq n_0.$$

Œcigledno je da su sada zadovoljeni uslovi kriterijuma **UK3** (za $b_n = q^n$ i $b_{n+1} = q^{n+1}$), te iz konvergencije geometrijskog reda $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ($q < 1$) sledi da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira za $\ell < 1$.

Za $\ell > 1$ možemo naći takvo $\varepsilon > 0$, da je i $q = \frac{q^{n+1}}{q^n} = \ell - \varepsilon > 1$.



Slika 4

Sada iz $\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon$ sledi

$$1 < q < \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{tj.} \quad 1 < \frac{q^{n+1}}{q^n} < \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Lako se vidi da su ponovo zadovoljeni uslovi kriterijuma **UK3**, tj. iz divergencije geometrijskog reda $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ($q > 1$) sledi da za $\ell > 1$ red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira.

Ako $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ne postoji, onda se posmatra $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ koji uvek postoji.

Primer 7. Ispitajmo konvergenciju sledećih redova:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, \quad a > 0, \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^b}{n!}, \quad b \in \mathbb{R}$$

(a) Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n(n!)^2} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = a \cdot e^{-1} = \frac{a}{e},$$

to red konvergira za $a < e$, divergira za $a > e$, a za $a = e$ Dalamberov kriterijum ne daje odgovor.

(b) Ovde je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^b}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^b = 0,$$

pa red konvergira za svako $b \in \mathbb{R}$.

Može se pokazati da je Košijev korenski kriterijum "jači" od Dalamberovog količničkog kriterijuma.

Teorema: Ako za pozitivan red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ važi da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, tada je i $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

Dokaz: Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, to za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon)$, tako da je

$$0 < \ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Ako ovu nejednakost napišemo za $n_0, n_0 + 1, \dots, n - 1$

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < \ell + \varepsilon$$

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < \ell + \varepsilon$$

.....

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \ell + \varepsilon$$

množenjem dobijenih nejednakosti dobijamo

$$(\ell - \varepsilon)^{n-n_0} < \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} < (\ell + \varepsilon)^{n-n_0}.$$

Posle skraćivanja razlomaka, a zatim množenja dobijene nejednakosti sa a_{n_0} imamo

$$(\ell - \varepsilon)^{n-n_0} < \frac{a_n}{a_{n_0}} < (\ell + \varepsilon)^{n-n_0},$$

$$(\ell - \varepsilon)^{n-n_0} \cdot a_{n_0} < a_n < a_{n_0} \cdot (\ell + \varepsilon)^{n-n_0},$$

$$(\ell - \varepsilon)^n \cdot \frac{a_{n_0}}{(\ell - \varepsilon)^{n_0}} < a_n < (\ell + \varepsilon)^n \cdot \frac{a_{n_0}}{(\ell + \varepsilon)^{n_0}} < (\ell + \varepsilon)^n \cdot \frac{a_{n_0}}{(\ell - \varepsilon)^{n_0}}.$$

Ako uvedemo oznaku

$$a = \frac{a_{n_0}}{(\ell - \varepsilon)^{n_0}}, \quad (a > 0)$$

i svaki faktor poslednje nejednakosti stepenujemo sa $\frac{1}{n}$, dobijamo

$$(\ell - \varepsilon) \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a_n} < (\ell + \varepsilon) \sqrt[n]{a}, \quad \forall n > n_0.$$

Kako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, po definiciji granične vrednosti iz prethodne nejednakosti sledi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

Iz sledećeg primera sledi da obrnuto ne važi.

Primer 8) Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}$.

Kako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + (-1)^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{3 + (-1)^n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + (-1)^{n+1}}{3 + (-1)^n}$$

ne postoji, posmatraćemo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + (-1)^{n+1}}{3 + (-1)^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2} = 1.$$

Po Dalamberovom količničkom kriterijumu pitanje konvergencije je nerešeno.

Ali, kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3 + (-1)^n}}{2^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{2},$$

red po Košijevom korenskom kriterijumu konvergira.

Koristeći poslednju teoremu možemo izračunati granične vrednosti nekih nizova, kao što se vidi iz sledećeg primera.

Primer 9. Koristeći red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, odredimo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e},$$

na osnovu prethodne teoreme važi da je i $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

Pokazali smo da hiperharmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira za $\alpha > 1$, što znači da, na primer, red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira. Međutim, po Košijevom korenskom i Dalamberovom količničkom kriterijumu to se ne može pokazati, jer je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right)^2 = 1,$$

pa ti kriterijumi ne daju odgovor. Za ovakve redove je efikasan Rabeov kriterijum koji navodimo bez dokaza.

UK6 Rabeov kriterijum: Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ pozitivan red i ako je počev od nekog n_0

$$\boxed{n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)} \geq k > 1, \quad \forall n \geq n_0,$$

tada red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira, a ako je počev od nekog n_0 ,

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \quad \forall n \geq n_0,$$

tada red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira.

Ili u slabijem obliku

UK6': Ako je za pozitivan red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right) = \ell,$$

tada red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{konvergira za } \ell > 1 \\ \text{divergira za } \ell < 1. \end{cases}$$

Za $\ell = 1$ kriterijum ne daje odgovor.

Ako na red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, čiju konvergenciju po Košijevom korenskom i Dalamberovom količničkom kriterijumu ne možemo potvrditi, primenimo Rabeov kriterijum, dolazimo do rešenja pitanja konvergencije, jer je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} - 1 \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^2 - 1 \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{n^2} = 2 > 1,$$

pa je dati red konvergentan.

U mnogo slučajeva kada primena dosad navedenih kriterijuma nije jednostavna ili kada ne daje odgovor da li je neki red konvergentan, efikasan je Košijev integralni kriterijum u kome se konvergencija reda upoređuje sa konvergencijom nesvojstvenog integrala prve vrste $\int_1^\infty f(x)dx$. Podsetimo da se nesvojstveni integral prve vrste definiše kao granična vrednost

$$\int_1^\infty f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T f(x)dx, \quad T \in \mathbb{R}, \quad T > 1.$$

Za $\int_1^\infty f(x)dx$ se kaže da je konvergentan (da postoji) ako postoji ta granična vrednost, tj. ako je

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T f(x)dx = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

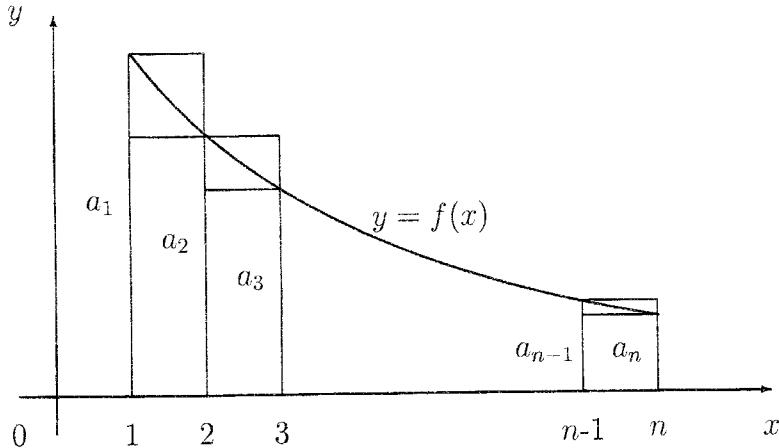
Ako ta granična vrednost ne postoji ili je jednaka $+\infty$ ili $-\infty$, kaže se da posmatrani nesvojstveni integral divergira. Kako granična vrednost kojom se definiše nesvojstveni integral ili postoji ili ne postoji, to će i pitanje konvergencije reda uvek biti rešeno.

UK7 Košijev integralni kriterijum: Neka je $\sum_{n=1}^\infty a_n$ pozitivan red i neka je funkcija $f(x)$ ($f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$) neprekidna i monotono opadajuća nad $[1, \infty)$ i $f(n) = a_n$, $\forall n = 1, 2, \dots$. Tada

(a) red $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergira ako konvergira nesvojstveni integral $\int_1^\infty f(x)dx$,

(b) red $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergira ako divergira nesvojstveni integral $\int_1^\infty f(x)dx$.

Dokaz: Podelimo interval $[x_1, x_n] = [1, n]$ deobenim tačakama $x_2 = 2$, $x_3 = 3, \dots, x_{n-1} = n - 1$ na jednake delove dužine $d = 1$. Posmatrajmo geometrijsku interpretaciju određenog integrala $\int_1^n f(x)dx$ kao površinu krivolinjskog trapeza između krive zadate funkcijom $f(x)$, dela x -ose, i pravih $x = 1$ i $x = n$. Vrednost funkcije $f(x)$ u svakoj deobenoj tački posmatranog intervala je $f(i) = a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.



Slika 5

Površina upisanih pravougaonika je $P_U = a_i \cdot 1 = a_i$, $i = 2, 3, \dots, n$, a površina opisanih pravougaonika $P_O = a_i \cdot 1 = a_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Kako je funkcija $f(x)$ po pretpostavci monotono opadajuća nad intervalom $[1, \infty)$, to je površina svih upisanih pravougaonika manja od površine krivolinijskog trapeza, a površina svih opisanih pravougaonika veća od površine krivolinijskog trapeza, tj.

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n < \int_1^n f(x) dx < a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1},$$

odnosno

$$s_n - a_1 < \int_1^n f(x) dx < s_{n-1}.$$

Ako nesvojstveni integral $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergira, tj. ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \ell$, tada iz $s_n - a_1 < \int_1^n f(x) dx$ sledi

$$s_n < a_1 + \int_1^n f(x) dx,$$

i, kada n teži ∞ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = a_1 + \ell.$$

To znači da je granična vrednost monotono rastućeg niza parcijalnih suma $\{s_n\}$ konačna, tj. niz $\{s_n\}$ je konvergentan, te sledi konvergencija reda.

Ako integral $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$ divergira, tada iz nejednakosti $\int_1^n f(x) dx < s_{n+1}$ sledi i divergencija reda.

Napominjemo da tvrđenja (a) i (b) teoreme važe i u suprotnom smeru. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ka s , tada nejednakost $s_n - a_1 < \int_1^n f(x) dx < s_{n+1}$, kada n teži ∞ , daje

$$s - a_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \int_1^{\infty} f(x) dx \leq s.$$

To znači da granična vrednost $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$ postoji, tj. integral $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergira. Analogno zaključujemo i u slučaju divergencije.

Iz nejednakosti $s - a_1 \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq s$ i $\int_1^{\infty} f(x) dx = \ell$ sledi

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \leq s \leq \int_1^{\infty} f(x) dx + a_1 \quad \text{tj.} \quad \ell \leq s \leq \ell + a_1,$$

što daje interval u kojem se nalazi zbir reda.

Ako je početni indeks sumiranja $n = n_0 > 1$, onda se u integralnom kriterijumu posmatra integral $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$.

Prikazaćemo primenu ovog kriterijuma pri ispitivanju konvergencije već pomenutih redova

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (b) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\beta n}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Kako je $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, to je $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ neprekidna, monotono opadajuća funkcija nad $[1, \infty)$ za $\alpha > 0$.

Za $\alpha \neq 1$ imamo

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T x^{-\alpha} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{T^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right),$$

tj.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{za } \alpha > 1 \\ \infty, & \text{za } \alpha < 1 \end{cases}$$

Za $\alpha = 1$ je

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{dx}{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^T = \lim_{T \rightarrow \infty} (\ln T - \ln 1) = \infty.$$

Tako dobijamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{konvergira za } \alpha > 1 \\ \text{divergira za } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Ovaj zaključak važi i za negativno α , jer je za $\alpha \leq 0$ očigledno da posmatrani red divergira. Interval u kojem se nalazi zbir datog reda je

$$\frac{1}{\alpha-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} + 1, \quad \alpha > 1.$$

(b) Kako je $a_n = \frac{1}{n \ln^\beta n}$, to je $f(x) = \frac{1}{x \ln^\beta x}$. Ova funkcija je neprekidna i monotono opadajuća nad intervalom $[2, \infty)$. Zbog

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^\beta x} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t^\beta} = \begin{cases} \infty, & \text{za } \beta \leq 1 \\ \frac{(\ln 2)^{-\beta+1}}{\beta-1}, & \text{za } \beta > 1 \end{cases}$$

(smena $\ln x = t$), to i dati red konvergira za $\beta > 1$, a divergira za $\beta \leq 1$.

Primer 10. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Kako je $a_n = \frac{1}{1+n^2}$, to je $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ova funkcija je neprekidna i monotonu opadajuća nad intervalom $[1, \infty)$. Iz

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_1^T = \lim_{T \rightarrow \infty} (\arctg T - \arctg 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

sledi da dati red konvergira, i važi

$$\frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}, \quad \text{jer je } a_1 = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}.$$

Primer 11. Dokažimo da je

$$\frac{\pi}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < \frac{\pi+1}{2}.$$

Kako je funkcija $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ neprekidna i monotonu opadajuća nad intervalom $[1, \infty)$ i važi

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int_1^\infty \frac{2tdt}{(t^2+1)\sqrt{t^2}} = 2 \int_1^\infty \frac{dt}{t^2+1} = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \arctg t \Big|_1^T = \frac{\pi}{2},$$

to na osnovu nejednakosti koja daje interval zbiru reda i činjenice da je $a_1 = \frac{1}{2}$ sledi tačnost nejednakosti koja se dokazuje.

U prikazanim primerima je monotonost funkcija $f(x)$ bila očigledna, pa je nismo posebno dokazivali. Ako nije jasno da li funkcija monotonu opada, to se u praksi često pokazuje na osnovu znaka prvog izvoda.

U prvom delu ovog udžbenika smo dali neke osnovne pojmove i osobine beskonačnih brojnih redova sa članovima proizvoljnog znaka, dok smo u nastavku prikazali teoriju redova čiji su članovi bili stalnog (pozitivnog) znaka. U sledećem delu ćemo se baviti ispitivanjem i uslovima raznih konvergencija redova koji se sastoje i od pozitivnih i od negativnih članova.

6 Redovi sa pozitivnim i negativnim članovima

Beskonačni redovi sa, po znaku, proizvoljnim članovima imaju beskonačno mnogo pozitivnih i beskonačno mnogo negativnih članova. U suprotnom, ako bi red imao konačno mnogo negativnih članova koji ne moraju slediti jedan za drugim, već u svom redosledu mogu biti pomešani i sa nekim pozitivnim članovima, tada bi, odbacivši sve te "mešane" članove, tj. dovoljan konačan broj početnih članova, ipak dobili beskonačan red samo sa pozitivnim članovima, pa je problem sveden na ispitivanje pozitivnih redova. Isto slučaj je ako proizvoljan red ima konačno mnogo pozitivnih članova. Kod redova sa beskonačno mnogo pozitivnih i negativnih članova ne postoji mogućnost direktnog upoređivanja članova, pa je ispitivanje konvergencije složenije. Za razliku od redova sa članovima stalnog znaka, kod redova formiranih od članova proizvoljnog znaka se, pri njihovom ispitivanju, javljaju dve vrste konvergencija – **apsolutna konvergencija** i **uslovna konvergencija**. Pokazivanjem jedne od ove dve konvergencije, smatra se da red formiran od članova proizvoljnog znaka konvergira (obična konvergencija), tj. postoji njegov konačan zbir. Taj zbir u opštem slučaju nije jednostavno izračunati.

Neka je, dakle, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red sa pozitivnim i negativnim članovima.

Definicija: Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergira, kaže se da je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **apsolutno konvergentan**.

Definicija: Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ divergira (tj. red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nije absolutno konvergentan), ali red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira (u običnom smislu), kaže se da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **konvergira uslovno** i naziva se **semikonvergentan** red.

Pri ispitivanju absolutne konvergencije reda mogu se primeniti svi kriterijumi za pozitivne redove tako što se a_n zameni sa $|a_n|$. Kod primene Dalambrovog kriterijuma se traži $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, kod Košijevog korenskog kriterijuma

se traži $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, a kod Košijevog integralnog kriterijuma u nesvojstvenom integralu $\int_1^\infty f(x)dx$ funkcija $f(x)$ je određena sa $f(n) = |a_n|$.

Primer 12. Ispitajmo apsolutnu konvergenciju redova:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n-1} \right)^n, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad a < 0.$$

(a) Koristeći Košijev korenski kriterijum imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1,$$

te je red apsolutno konvergentan.

(b) Koristeći Dalamberov kriterijum imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|a|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{n+1} = 0 < 1,$$

pa je red apsolutno konvergentan za svako $a < 0$.

Apsolutna konvergencija je "jača" od konvergencije u običnom smislu, što tvrdi sledeća teorema.

Teorema: Iz konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ sledi konvergencija reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, tj. ako je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergentan, on je konvergentan i u običnom smislu.

Dokaz: Iz nejednakosti za apsolutne vrednosti $|a+b| \leq |a| + |b|$ i jednakosti $|a| + |b| = ||a| + |b||$ primenjene na članove reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ imamo

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}||.$$

Na osnovu gornje nejednakosti i Košijevog potrebnog i dovoljnog uslova konvergencije (proizvoljnih) brojnih redova, sledi da ako je red $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergentan, tada je

$$||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}|| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0(\varepsilon), \quad \forall p > 0,$$

pa je i

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0(\varepsilon), \quad \forall p > 0.$$

Odatle sledi (obična) konvergencija reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Očigledno je da obrnuto ne mora da važi, tj. ako je red konvergentan (u običnom smislu) on ne mora biti i absolutno konvergentan.

Iz absolutne konvergencije proizvoljnog brojnog reda, pored njegove konvergencija u običnom smislu, tj. zbirljivosti, sledi i konvergencija reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ koji je formiran samo od svih pozitivnih članova (kojih, kao što smo videli, ima beskonačno mnogo) posmatranog reda i reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ formiranog samo od svih absolutnih vrednosti negativnih članova (takođe ih ima beskonačno mnogo) posmatranog reda. Ispitivanje konvergencije ta dva reda se svodi na ispitivanje konvergencije pozitivnih redova.

Neka je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentan. Tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = s' \quad \text{i} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Opšte članove nizova parcijalnih suma ova dva reda možemo zapisati

$$s'_n = s_n^+ + s_n^- \quad \text{i} \quad s_n = s_n^+ - s_n^-,$$

gde je s_n^+ zbir svih pozitivnih članova reda u parcijalnoj sumi s_n , a s_n^- zbir absolutnih vrednosti svih negativnih članova reda posmatrane parcijalne sume s_n . Niz parcijalnih suma $\{s_n\}$ konvergira ka s , a monotono rastući i sa gornje strane ograničen niz parcijalnih suma $\{s'_n\}$ konvergira ka s' . Kako je $s'_n \leq s'$ za svako n , to je $s_n^+ \leq s'$ i $s_n^- \leq s'$ za svako n , tj. monotono rastući nizovi s_n^+ i s_n^- su ograničeni sa gornje strane, pa stoga i konvergentni. To znači da su redovi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ formirani samo od svih pozitivnih i samo od absolutnih vrednosti svih negativnih članova posmatranog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentni.

Očigledno je da ako redovi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ konvergiraju, posmatrani red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira absolutno, a ako je jedan od njih konvergentan, a drugi

divergentan, tada ne može konvergirati niti red formiran od apsolutnih vrednosti članova posmatranog reda, niti posmatrani red.

Ako su redovi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ divergentni, iz parcijalnih suma s_n i s'_n se zaključuje da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ne konvergira apsolutno, ali da može uslovno konvergirati, tj. biti semikonvergentan.

Neka je, sada, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ semikonvergentan, tj. neka red $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ divergira, a red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira. Tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

a odatle je $\lim_{n \rightarrow \infty} (s'_n \pm s_n) = +\infty$. Sabiranjem i oduzimanjem jednakosti $s'_n = s_n^+ + s_n^-$ i $s_n = s_n^+ - s_n^-$ dobija se

$$s'_n + s_n = 2s_n^+ \quad \text{i} \quad s'_n - s_n = 2s_n^-,$$

pa je

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} (s'_n + s_n) = +\infty$$

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^- = \lim_{n \rightarrow \infty} (s'_n - s_n) = +\infty,$$

što znači da su redovi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ formirani od svih pozitivnih i od apsolutnih vrednosti svih negativnih članova posmatranog reda divergentni.

Za redove sa članovima proizvoljnog znaka važe sledeće osobine:

- Kod apsolutno konvergentnog reda može se menjati poredak njegovih članova, članovi se mogu proizvoljno grupisati i od tih grupa formirati novi redovi, a da se pri tom ne menja zbir početnog reda niti njegova apsolutna konvergencija.
- Zbir apsolutno konvergentnog reda jednak je zbiru sume reda sastavljenog od pozitivnih članova toga reda i sume reda sastavljenog od negativnih članova toga reda.

- Kod semikonvergentnog reda redosled sabiraka je bitan. Promenom redosleda sabiraka menja se zbir reda, čak se od konvergentnog reda može napraviti divergentan i obrnuto, ili se može podesiti da suma reda bude proizvoljno izabrani broj.

Šta se dešava kada se u semikonvergentnom redu promeni redosled i izvrši proizvoljno grupisanje njegovih članova, pokazuje primer reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Dati red nije apsolutno konvergentan, jer je red formiran od absolutnih vrednosti njegovih članova harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ koji je divergentan. Da dati red konvergira uslovno, tj. da je semikonvergentan, pokazaćemo kasnije posebnim kriterijumom.

Ako zbir datog reda obeležimo sa s i napišemo red sa istim članovima, ali drugim redosledom i proizvoljno grupisanim, imamo

$$\begin{aligned} s &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots\right) = \frac{1}{2}s. \end{aligned}$$

Dobili smo red čiji je zbir $\frac{1}{2}s$, tj. jednakost $s = \frac{1}{2}s$, odakle sledi da je $s = 0$, što očigledno za dati red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ nije tačno. Pogrešan zaključak da je $s = 0$ posledica je promene redosleda članova.

Primer 13. Izračunajmo sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}.$$

Kako red $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergira kao geometrijski red ($q = \frac{1}{2}$), to je posmatrani red apsolutno konvergentan, pa je dozvoljeno grupisanje članova

reda. Tako je

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^4} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \dots \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \dots\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Već smo rekli da je proizvod dva konvergentna pozitivna reda ponovo konvergentan red čija je suma jednaka proizvodu suma polaznih redova. Neka su redovi sa članovima proizvoljnog znaka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolutno konvergentni. Tada postoje njihove konačne sume $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$, a njihov proizvod je absolutno konvergentan red i važi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a \cdot b.$$

Dokaz ove osobine se zasniva na mogućnosti promene redosleda sabiraka kod absolutno konvergentnih redova.

Ako su redovi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergentni u običnom smislu sa zbirovima a i b , a jedan od njih je i absolutno konvergentan, i tada je njihov proizvod konvergentan red sa zbirom $a \cdot b$. Konvergencija proizvoda takva dva reda je sigurno uslovna, a može biti i absolutna. Dakle, red $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ je bar semikonvergentan.

Primer 14. Izračunajmo proizvod redova

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad \text{i} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}.$$

Pozitivan red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ je konvergentan geometrijski red i njegova suma je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Drugi posmatrani red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ je absolutno konvergentan i njegova suma je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Po pravilu za množenje dva reda imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{3^{n-k}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k.$$

Kako je

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} 1, & n = 2m \\ 0, & n = 2m - 1 \end{cases}$$

to je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}.$$

Kod ispitivanja konvergencije reda sa članovima proizvoljnog znaka prvo proveravamo njegovu absolutnu konvergenciju koja se svodi na ispitivanje konvergencije pozitivnih redova. Ako konstatujemo da posmatrani red nije absolutno konvergentan, proveravamo njegovu običnu konvergenciju da bi utvrdili da li je red uslovno konvergentan. Ispitivanje uslovne konvergencije nije, u opštem slučaju, uvek jednostavno. Ali, za specijalne redove koji počinju bilo sa pozitivnim bilo sa negativnim članom i čiji članovi naizmenično menjaju znak, postoji jednostavan kriterijum za ispitivanje njihove konvergencije – Lajbnicov kriterijum. Takvi redovi se nazivaju naizmenični ili alternativni.

Definicija: Red oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} + \dots$$

ili

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \dots - a_{2n-1} + a_{2n} - \dots$$

gde je $a_n > 0, \forall n = 1, 2, \dots$, naziva se **naizmeničan (alternativan) red**.

Lajbnicov kriterijum konvergencije naizmeničnih redova: Ako u naizmeničnom redu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ili $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ brojevi a_n (apsolutne vrednosti članova reda) čine monotono opadajući niz i ako absolutna vrednost opštег člana reda teži nuli kada n teži beskonačnosti, tj.

$$a_n > a_{n+1}, \forall n = 1, 2, \dots \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

tada naizmeničan red konvergira i njegov zbir ima znak prvog člana.

Lajbnicov kriterijum važi i u slučaju kada je $a_n > a_{n+1}, \forall n \geq n_0$, tj. nejednakost ne mora biti zadovoljena za $\forall n = 1, 2, \dots$, već je dovoljno da važi počev od nekog n_0 .

Dokaz: Posmatraćemo naizmeničan red

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} + \dots$$

Iz niza parcijalnih suma i činjenice da je $a_n - a_{n+1} > 0, \forall n = 1, 2, \dots$, imamo

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 - a_2 \\ s_3 &= a_1 - a_2 + a_3 = s_1 - (a_2 - a_3) < s_1 \\ s_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = s_2 + (a_3 - a_4) > s_2 \\ s_5 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = s_3 - (a_4 - a_5) < s_3 \\ s_6 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 = s_4 + (a_5 - a_6) > s_4 \\ &\dots \\ s_{2n-1} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \dots - a_{2n-2} + a_{2n-1} < s_{2n-3} \\ s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} > s_{2n-2}. \end{aligned}$$

Ako brojeve a_1, a_2, a_3, \dots u nizu parcijalnih suma $\{s_n\}$ drugačije grupišemo,

imaćemo

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 - a_2 < s_1$$

$$s_3 = a_1 - a_2 + a_3 = s_2 + a_3 > s_2$$

$$s_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = s_3 - (a_2 - a_3) - a_4 < s_1$$

$$s_5 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = s_2 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) > s_2$$

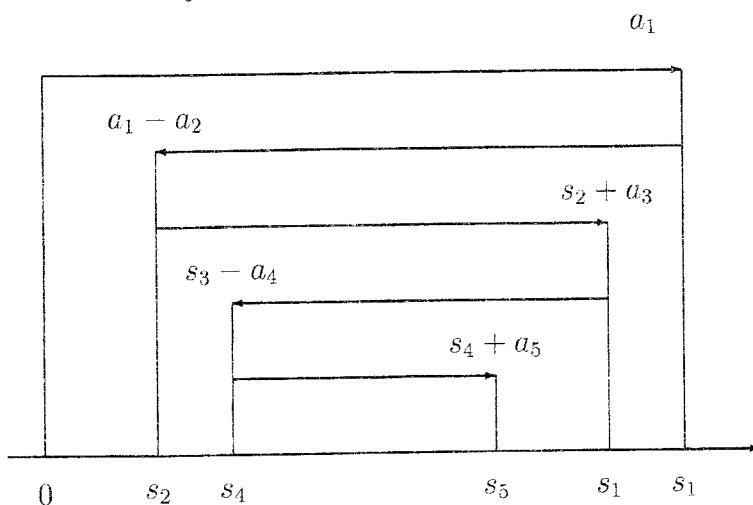
$$s_6 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 = s_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - a_6 < s_1$$

.....

$$s_{2n-1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \dots - a_{2n-2} + a_{2n-1} > s_2$$

$$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} < s_1.$$

To je prikazano na sledećoj slici



Slika 6

Vidimo da je $0 < s_{2n} < s_{2n-1}$, $\forall n = 1, 2, \dots$ i da je podniz $\{s_{2n}\}$ niza parcijalnih suma $\{s_n\}$ monotono rastući niz ograničen sa gornje strane sa s_1 , a podniz $\{s_{2n-1}\}$ monotono opadajući niz ograničen sa donje strane sa s_2 , pa po teoremi o monotonim nizovima postoji sledeće granične vrednosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \bar{s} \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} = \underline{s}.$$

Dokazaćemo da je $\bar{s} = \underline{s}$. Iz $a_{2n} = s_{2n} - s_{2n-1}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_{2n} - s_{2n-1}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{2n}| = 0.$$

Sa druge strane je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_{2n} - s_{2n-1}| = |\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1}| = |\bar{s} - \underline{s}|,$$

pa je

$$|\bar{s} - \underline{s}| = 0 \Rightarrow \bar{s} = \underline{s}.$$

Stoga je naizmeničan red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ koji počinje sa pozitivnim članom, konvergentan i njegov zbir je pozitivan (znak prvog člana) i manji od prvog člana.

Ako posmatramo naizmeničan red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ koji počinje negativnim članom, tada Lajbnicov kriterijum i dalje važi, ali je zbir negativan (znak prvog člana) i po absolutnoj vrednosti manji od absolutne vrednosti prvog člana.

Ako se pri sabiranju konvergentnog naizmeničnog reda koji počinje bilo pozitivnim bilo negativnim članom, zaustavimo na n -tom članu, tj. saberemo prvih n (konačno mnogo) članova, ostatak R_n je u zavisnosti da li smo sabrali paran ili neparan broj članova

$$R_n = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \dots = +((a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \dots)$$

$$R_n = -a_{n+1} + a_{n+2} - a_{n+3} + \dots = -((a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \dots).$$

Ostatak R_n je takođe konvergentan naizmeničan red i, kao takav, ima znak svog prvog sabirka.

Teorema: Apsolutna vrednost $|R_n|$ ostatka reda, tj. greška pri aproksimaciji reda zbirom njegovih prvih n članova, manja je od absolutne vrednosti prvog izostavljenog člana, tj. absolutne vrednosti prvog sabirka u R_n .

Dokaz: Pokazaćemo da teorema važi ako saberemo prvih bilo mnogo

bilo neparno mnogo članova, odakle sledi da teorema važi za svako konačno $n = 1, 2, \dots$

Posmatraćemo konvergentan naizmeničan red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ koji počinje pozitivnim članom. Ako saberemo prvih $2m$ članova, tada je $R_{2m} > 0$ i

$$R_{2m} = a_{2m+1} - a_{2m+2} + a_{2m+3} - \dots = a_{2m+1} - (a_{2m+2} - a_{2m+3}) - \dots,$$

pa sledi

$$R_{2m} < a_{2m+1} \quad \text{tj.} \quad |R_{2m}| < |a_{2m+1}|.$$

Takođe je, ako saberemo prvih $2m-1$ članova, $R_{2m-1} < 0$ i

$$R_{2m-1} = -a_{2m} + a_{2m+1} - a_{2m+2} + \dots = -a_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) + \dots,$$

pa sledi

$$R_{2m-1} > -a_{2m} \quad \text{tj.} \quad |R_{2m-1}| < |-a_{2m}|.$$

Odatle je za svako $n = 1, 2, \dots$

$$|s - s_n| = |R_n| < |a_n|,$$

čime je tvrđenje teoreme dokazano.

Za konvergentan naizmeničan red koji počinje negativnim članom dokaz je istovetan.

Primer 15. Ispitajmo konvergenciju redova

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+10}.$$

(a) Za $p \leq 0$ opšti član $a_n = \frac{(-1)^n}{n^p}$ reda ne teži nuli kada $n \rightarrow \infty$, te red divergira.

Za $p > 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira, tj. dati red absolutno konvergira, pa i konvergira (u običnom smislu).

Za $0 < p \leq 1$ dati red ne konvergira absolutno. Iz

$$n^p < (n+1)^p \Leftrightarrow \frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

sledi da članovi reda po absolutnoj vrednosti čine monotono opadajući niz. Pored toga opšti član reda po absolutnoj vrednosti teži nuli, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$. Kako su time zadovoljeni uslovi Lajbnicovog kriterijuma, zaključujemo da dati red uslovno konvergira.

(b) Kako red absolutnih vrednosti članova $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+10}$ divergira, a kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+10} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\sqrt{n+1}}{n+11} < \frac{\sqrt{n}}{n+10} \quad \text{za } n \geq 5,$$

to red uslovno konvergira po Lajbnicovom kriterijumu.

Primer 16. Odredimo koliko članova reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ treba sabrati da bi suma reda bila izračunata sa greškom manjom od 10^{-3} ?

Kako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

pri aproksimaciji

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

činimo grešku

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+3} + \dots \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n+2} + \frac{(-1)^n}{n+3} \dots \end{aligned}$$

Kako je greška aproksimacije po absolutnoj vrednosti manja od absolutne vrednosti prvog izostavljenog člana, tj. $|R_n| < |a_{n+1}|$, to je

$$|R_n| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^3} \quad \text{za } n > 10^3 - 1,$$

pa zaključujemo da treba sabrati 999 članova reda.

Kriterijumi za ispitivanje konvergencije redova koji su do sada prikazani u udžbeniku, predstavljaju osnovne i najčešće korištene kriterijume. Međutim u teoriji redova postoje i drugi kriterijumi, od kojih navodimo još dva koji se takođe često koriste u praksi.

Abelov kriterijum: Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i ako je $\{b_n\}$ monoton, ograničen niz.

Primer 17. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} \sqrt[n]{n}$.

Ako uzmemo da je $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$, $b_n = \sqrt[n]{n}$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira po Lajbnicovom kriterijumu, a niz $\{b_n\}$ je monotono opadajući za $n \geq 3$ i konvergira ka 1 jer je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, pa je $\{b_n\}$ i ograničen. Po Abelovom kriterijumu dati red konvergira.

Dirihleov kriterijum: Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira ako je niz parcijalnih suma $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ograničen i ako je niz $\{b_n\}$ monotono opadajući i teži nuli kada $n \rightarrow \infty$.

Primer 18. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \sin \frac{n\pi}{4}$.

Ako uzmemo da je $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$, $b_n = \frac{1}{\ln n}$, tada za članove niza parcijalnih suma

$$A_n = \sum_{k=2}^n a_k = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \dots, n = 1, 2, \dots$$

važi $-\frac{\sqrt{2}}{2} < A_n \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. niz parcijalnih suma je ograničen, a niz $\{b_n\}$ monotono opada i teži nuli kada $n \rightarrow \infty$. Po Dirihleovom kriterijumu zaključujemo da dati red konvergira.

7 Zadaci za samostalno vežbanje

1. Naći sumu reda koristeći niz parcijalnih suma.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \quad S = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} \quad S = 3$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \quad S = 1 - \sqrt{2}$$

2. Na osnovu ponašanja opštег člana reda pri $n \rightarrow \infty$ ispitati konvergenciju redova.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \quad \text{Divergira}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \quad \text{Divergira}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{5+n^2} \quad \text{Konvergira}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha} \quad \text{Divergira za } \alpha \leq 2, \text{ možda konvergira za } \alpha > 2$$

3. Primenom uporednog kriterijuma ispitati konvergenciju redova.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 5^n} \quad \text{Konvergira}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \quad \text{Divergira}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \quad \text{Divergira}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}) \quad \text{Divergira}$$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ Divergira

4. Ispitati konvergenciju redova.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$ Divergira

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1}$ Konvergira

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2 + 3}$ Konvergira.

5. Primenom Dalamberovog količničkog kriterijuma ispitati konvergenciju redova.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ Konvergira

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$ Konvergira

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ Konvergira

6. Primenom Košijevog korenskog kriterijuma ispitati konvergenciju redova.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{3^n}$ Konvergira

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^\alpha}{n+1} \right)^n$ Konvergira za $\alpha < 1$

7. Primenom Košijevog integralnog kriterijuma ispitati konvergenciju redova.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$ Divergira

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$ Konvergira

8. Dokazati

$$\frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 1)} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

9. Primenom Lajbnicovog kriterijuma ispitati konvergenciju redova.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 1}$ Konvergira

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n-6} (-1)^{n-1}$ Divergira

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}$ Konvergira.

Koliko članova reda treba sabrati sa tačnošću od 0,01? $n = 3$

10. Primenom Košijevog proizvoda izračunati sume redova.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ $S = 4$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n}$ $S = 16$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}$ $S = 12$

II DEO

Redovi funkcija

1 Definicija reda funkcija

Poznato je da zbir dve ili više realnih funkcija definisanih nad nekim skupom $D \subset \mathbb{R}$ predstavlja realnu funkciju definisanu nad istim domenom D . Postavlja se pitanje: Šta se događa kada se sabere beskonačno mnogo ovakvih funkcija?

Posmatrajmo realne funkcije $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ definisane nad domenom $D \subset \mathbb{R}$ (D je najčešće neki otvoren, zatvoren ili poluotvoren interval $[a, b]$, (a, b) , $(a, b]$, (a, ∞) , $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty)$, itd.). Beskonačan zbir

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots$$

se naziva **red funkcija** definisan nad domenom D . Kao i kod brojnih redova, zbir prvih n sabiraka

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

nazivamo **n -ta parcijalna suma reda funkcija**, a izraz

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

predstavlja **ostatak reda**.

2 Konvergencija i osobine redova funkcija

Za svako $x = x_0 \in D$ red funkcija postaje brojni red koji može konvergirati ili divergirati. Interval $I \subset D$ koji čine sve one vrednosti x_0 za koje brojni red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ konvergira nazivamo **interval konvergencije** reda funkcija $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ i kažemo da ovaj **red funkcija za svako $x \in I$ konvergira ka funkciji $s(x)$** koja se dobija kao

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad x \in I,$$

i koja se naziva **zbir reda**. Pri tome, za svako $x \in I$ možemo pisati

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = s(x).$$

Granična vrednost kojom se definiše zbir reda kazuje da za svako $x_0 \in I$ i proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji n_0 koje zavisi od ε , kao i od posmatrane tačke x_0 , tako da važi

$$|s(x_0) - s_n(x_0)| < \varepsilon \quad \text{za svako } n \geq n_0.$$

Iz jednakosti $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$ sledi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s(x) - s_n(x)) = 0 \quad \text{za svako } x \in I,$$

što možemo smatrati ekvivalentnom definicijom konvergencije reda funkcija.

Kod brojnih redova smo pokazali da ako brojni red konvergira, onda njegov opšti član teži nuli. Na osnovu ovog zaključujemo da **potreban uslov za konvergenciju reda funkcija** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ nad intervalom I glasi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \text{za svako } x \in I.$$

Iz razmatranja iznetih u prvom delu udžbenika posvećenom brojnim redovima sledi

Košijev potreban i dovoljan uslov konvergencije reda funkcija: Potreban i dovoljan uslov da red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergira nad intervalom I je da za

svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon)$, tako da važi

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad \text{za svako } n > n_0, \quad p \geq 1.$$

Konvergencija reda funkcija o kojoj smo dosad govorili često se naziva **konvergencija u običnom smislu** ili **slaba konvergencija**.

Za red funkcija $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ kažemo da **konvergira absolutno** nad intervalom I ako za svako $x \in I$ red funkcija $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ konvergira (u običnom smislu).

Primer 1. Red funkcija

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

je definisan za svako $x \in \mathbb{R}$ i za bilo koju vrednost promenljive x predstavlja geometrijski (brojni) red kod koga je količnik $q = x$. Poznato je da geometrijski red konvergira ka $\frac{1}{1-q}$ za $|q| < 1$, što znači da je interval konvergencije posmatranog reda funkcija $I = (-1, 1)$ i da je za $x \in (-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

dok za $x \geq 1$ i $x \leq -1$ posmatrani red divergira.

Primetimo da su svi članovi posmatranog reda, nad intervalom konvergencije $I = (-1, 1)$, ograničene funkcije, tj. $|x^n| < 1$, dok funkcija koja predstavlja zbir reda $s(x) = \frac{1}{1-x}$ nije ograničena, tj.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} s(x) = +\infty.$$

Primer 2. Red funkcija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} - \frac{x^{2(n-1)}}{1+x^{2(n-1)}} \right)$$

je definisan za svako $x \in \mathbb{R}$. Lako je videti da je n -ta parcijalna suma posmatranog reda

$$s_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} - \frac{1}{2}.$$

Kako je za $|x| < 1$, tj. $x \in (-1, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0,$$

za $|x| = 1$, tj. $x = 1$ i $x = -1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1,$$

a za $|x| > 1$, tj. $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = 1,$$

to je

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{za } x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{za } x = \pm 1 \\ \frac{1}{2} & \text{za } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

Dakle, interval konvergencije posmatranog reda je $I = (-\infty, \infty)$.

Primetimo da su svi članovi posmatranog reda neprekidne funkcije za svako $x \in I$, dok zbir reda $s(x)$ ima prekid prve vrste (konačan skok) u tačkama $x = -1$ i $x = 1$.

Iz prethodnih primera vidimo da konvergencija u običnom smislu ne obezbeđuje da se neke važne osobine funkcija kao što su ograničenost i neprekidnost (a samim tim i diferencijabilnost i integrabilnost) prenesu automatski sa članova reda na zbir tog reda. U tom cilju ćemo uvesti pojam jedne "jače" konvergencije koju nazivamo **uniformna konvergencija**.

Red funkcija $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ **konvergira uniformno** ka $s(x)$ nad intervalom I ako za svako $x \in I$ i proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji n_0 koje zavisi samo od ε (a ne i od posmatrane tačke x), tako da važi

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad \text{za svako } n \geq n_0.$$

Ovaj uslov se može zapisati i u obliku

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0(\varepsilon), \quad \forall x \in I, \quad |R_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Može se pokazati da je ovaj uslov ekvivalentan sa zahtevom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in I} |R_n(x)| = 0$$

koji je praktičniji za primenu od same definicije uniformne konvergencije.

Ako neki red funkcija konvergira uniformno nad intervalom I , onda taj red konvergira nad intervalom I i u običnom smislu, tj **iz uniformne konvergencije sledi konvergencija u običnom smislu**. Interval I u kome red funkcija uniformno konvergira, u opštem slučaju, je podskup intervala nad kojim red konvergira u običnom smislu. (Naravno, u nekim slučajevima ovi intervali su isti.)

Primer 3. Pokažimo da red

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)}, \quad x > 0$$

uniformno konvergira za svako $x > 0$.

Lako je videti da je

$$f_k(x) = \frac{x+k+1-x-k}{(x+k)(x+k+1)} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1},$$

pa je

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} \right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1},$$

a zbir reda, za svako $x > 0$, je

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Na osnovu toga vidimo da za svako $x \in (0, \infty)$ važi

$$|s(x) - s_n(x)| = \frac{1}{x+n+1} < \frac{1}{n+1},$$

a odavde sledi da je

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{za } n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = n_0.$$

Kako $n_0 = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ ne zavisi od x već samo od ε , to posmatrani red funkcija uniformno konvergira nad intervalom $I = (0, +\infty)$.

Primer 4. U Primeru 2 smo pokazali da red funkcija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} - \frac{x^{2(n-1)}}{1+x^{2(n-1)}} \right)$$

konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$ ka funkciji $s(x)$

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{za } x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{za } x = \pm 1 \\ \frac{1}{2} & \text{za } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

koja ima prekid prve vrste u tačkama $x = -1$ i $x = 1$. Za svako $x \in (-1, 1)$ nejednakost

$$|s_n(x) - s(x)| = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} < \varepsilon$$

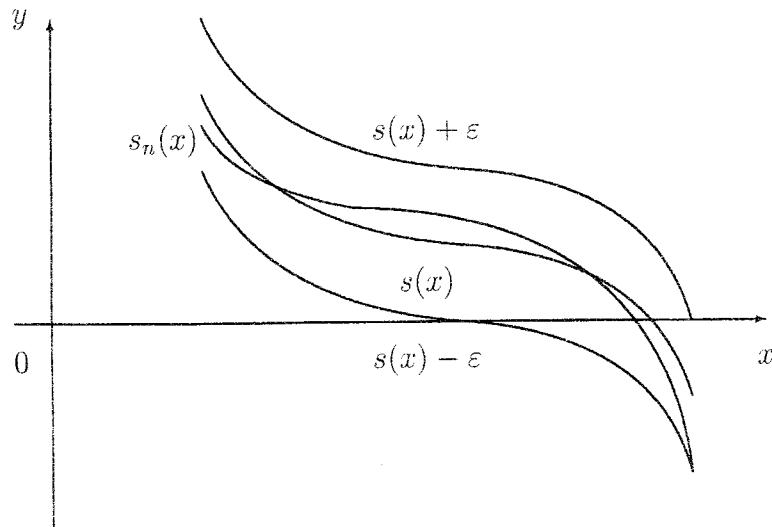
daje uslov

$$x^{2n} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

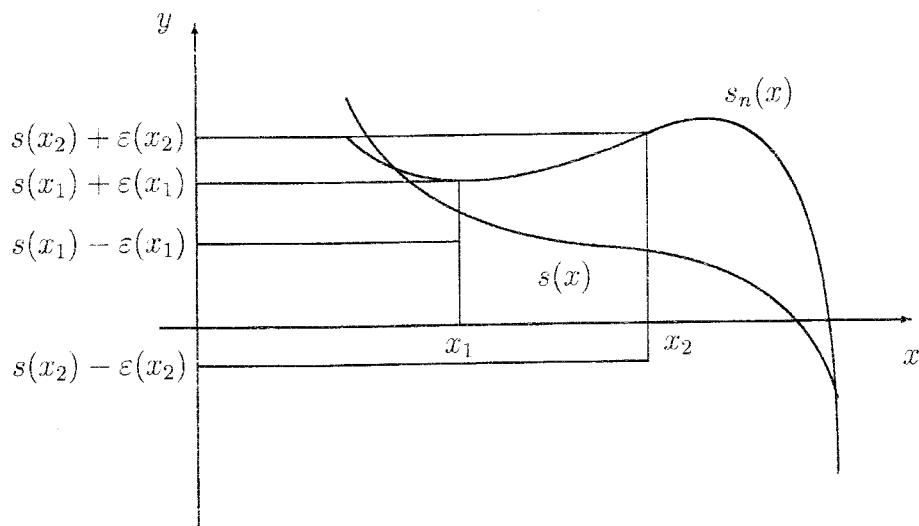
iz koga se vidi da što je vrednost za x bliža broju 1 to i vrednost za n mora postajati sve veća. Dakle, u okolini tačke $x = 1$ vrednost n za koju važi posmatrani uslov ne zavisi samo od ε već i od vrednosti promenljive x , što znači da posmatrani red nije uniformno konvergentan u okolini tačke $x = 1$. Na isti način se zaključuje da red nije uniformno konvergentan ni u okolini tačke $x = -1$, pa se upravo zbog toga u ovim tačkama i pojavljuje prekid za funkciju $s(x)$ koja predstavlja zbir datog reda.

Uniformna konvergencija nam kazuje da se za svaku proizvoljnu vrednost ε nad čitavim intervalom I sve funkcije $s_n(x)$, koje predstavljaju članove niza parcijalnih sum za svako $n > n_0$, nalaze unutar pruge $(s(x) - \varepsilon, s(x) + \varepsilon)$, tj. dela ravni oko funkcije $s(x)$ širine 2ε , dok kod konvergencije u običnom smislu širina intervala $(s(x) - \varepsilon, s(x) + \varepsilon)$ u kojoj se nalaze svi članovi niza $s_n(x)$ za $n > n_0$ se menja u zavisnosti od posmatrane tačke $x \in I$. Sledeće

dve slike ilustruju razliku između uniformne konvergencije i konvergencije u običnom smislu.



Slika 1



Slika 2

Praktičan kriterijum za ispitivanje uniformne konvergencije redova funkcija predstavlja Vajerštrasov kriterijum.

Vajerštrasov kriterijum: Ako za svako $x \in I$ važi

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

gde su a_n realni brojevi koji ne zavise od x , a brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. tada red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira nad intervalom I .

Dokaz: Da bismo dokazali ovo tvrđenje podimo od činjenice da brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, što znači da za svaku $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon)$, tako da za ostatak tog reda važi

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon \quad \text{za svako } n > n_0.$$

Kako je $|f_k(x)| < a_k$, $k \in \mathbb{N}$, to za posmatrani red funkcija $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, za svaku $x \in I$, važi

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon.$$

Činjenica da je za svaku $x \in I$

$$|R_n(x)| < \varepsilon \quad \text{za svako } n > n_0(\varepsilon)$$

znači da red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ uniformno konvergira nad intervalom I .

Iz dokaza sledi da pod navedenim pretpostavkama i red $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ uniformno konvergira za svaku $x \in I$, tj. ako red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergira za svaku $x \in I$, onda on i apsolutno konvergira nad intervalom I .

Primer 5. U Primeru 3 smo, primenom definicije, pokazali da red

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)}, \quad x > 0$$

uniformno konvergira za svako $x > 0$. Do ovog zaključka se može doći i primenom Vajerštrasovog kriterijuma, jer je za $x > 0$

$$\frac{1}{(x+k)(x+k+1)} < \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2},$$

a brojni red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergira ($\alpha = 2 > 1$).

U nastavku ćemo pokazati da se neke važne osobine, kao što su neprekidnost, diferencijabilnost, integrabilnost, pod izvesnim uslovima mogu preneti sa članova reda funkcija i na njegov zbir. Pri tome bitnu ulogu ima uniformna konvergencija.

Znamo da ako su funkcije $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$ neprekidne nad nekim intervalom I , onda je i zbir $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, kao zbir konačno mnogo neprekidnih funkcija, neprekidna funkcija nad I , dok za zbir beskonačno mnogo neprekidnih funkcija $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$, koji definiše red funkcija $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$, to ne mora da važi, što se vidi iz Primera 1. Za neprekidnost zbirja $s(x)$ je bitna uniformna konvergencija reda što tvrdi naredna teorema.

Teorema o neprekidnosti reda funkcija: Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ uniformno konvergira ka funkciji $s(x)$ nad intervalom I i ako su $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ neprekidne funkcije nad I , tada je $s(x)$ neprekidna funkcija nad intervalom I .

Dokaz: Da bismo dokazali da je funkcija $s(x)$ neprekidna nad intervalom I , treba da pokažemo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon)$, tako da je

$$|s(x') - s(x)| < \varepsilon \quad \text{za } |x' - x| < \delta, \quad x, x' \in I.$$

Kako red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ uniformno konvergira ka $s(x)$ nad intervalom I , to za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0 koje zavisi samo od ε (a ne i od x), tako da za svako $x, x' \in I$ važi

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za svako } n > n_0,$$

i

$$|R_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za svako } n > n_0.$$

Budući da je $s_n(x)$ neprekidna funkcija za svako $x \in I$ (kao zbir konačno mnogo neprekidnih funkcija), po definiciji neprekidnosti je

$$|s_n(x') - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za } |x' - x| < \delta, \quad x, x' \in I.$$

Na osnovu ovih nejednakosti dobijamo da je

$$\begin{aligned} |s(x') - s(x)| &= |s_n(x') + R_n(x') - s_n(x) - R_n(x)| \leq \\ &\leq |s_n(x') - s_n(x)| + |R_n(x')| + |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

za $|x' - x| < \delta$, $x, x' \in I$, što znači da je $s(x)$ neprekidna funkcija nad intervalom I .

Teorema o neprekidnosti reda funkcija ustvari znači da granični proces (\lim) i beskonačan zbir (\sum) mogu zameniti mesta, tj.

$$\lim \sum = \sum \lim .$$

Može se pokazati da je uniformna konvergencija reda ka funkciji $s(x)$ samo dovoljan uslov za neprekidnost funkcije $s(x)$, ali nije i potreban uslov. Naime, mogu se konstruisati primjeri redova funkcija koji ne konvergiraju uniformno, ali je njihov zbir ipak neprekidna funkcija.

Uniformno konvergentni redovi funkcija imaju osobinu da se mogu integraliti i diferencirati član po član, što pokazuju sledeće dve teoreme.

Teorema o integraciji reda funkcija: Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, gde su funkcije $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ neprekidne nad I , uniformno konvergira ka $s(x)$ nad intervalom I , tada za svako $x_0, x \in I$ važi

$$\int_{x_0}^x s(t) dt = \int_{x_0}^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^x f_k(t) dt .$$

Dokaz: Polazimo od činjenice da posmatrani red funkcija uniformno konvergira nad intervalom I što znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0 koje zavisi samo od ε , tako da je za svako $t \in I$

$$|R_n(t)| < \varepsilon \quad \text{za svako } n > n_0.$$

Ako uvedemo oznaku $\Delta x = x - x_0$, onda je

$$\left| \int_{x_0}^x R_n(t) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |R_n(t)| dt < \varepsilon \int_{x_0}^x dt = \varepsilon(x - x_0) = \varepsilon \Delta x \quad \text{za svako } n > n_0.$$

Kako je

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x R_n(t) dt &= \int_{x_0}^x (s(t) - s_n(t)) dt = \int_{x_0}^x s(t) dt - \int_{x_0}^x \left(\sum_{k=1}^n f_k(t) \right) dt \\ &= \int_{x_0}^x s(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x f_k(t) dt, \end{aligned}$$

(kod konačno mnogo sabiraka operatori \sum i \int mogu promeniti redosled), to prethodna nejednakost postaje

$$\left| \int_{x_0}^x s(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x f_k(t) dt \right| < \varepsilon \Delta x \quad \text{za svako } n > n_0.$$

Iz poslednje nejednakosti sledi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{x_0}^x s(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x f_k(t) dt \right| = 0,$$

što znači da je

$$\int_{x_0}^x \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^x f_k(t) dt.$$

Ovo ustvari znači da je (pod uslovima teoreme) integral uniformno konvergentnog beskonačnog zbiru (reda) neprekidnih funkcija jednak beskonačnom zbiru (redu) integrala tih funkcija, tj. operatori \sum i \int mogu zameniti mesta

$$\int \sum = \sum \int .$$

Uslov o uniformnoj konvergenciji posmatranog reda je dovoljan, ali nije i potreban, jer postoje redovi funkcija koji nisu uniformno konvergentni a mogu se integraliti član po član, što pokazuje sledeći primer.

Primer 6. Posmatrajmo red funkcija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right), \quad x \in [0, 1].$$

Vidimo da je

$$s_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

odakle dobijamo

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

i

$$|R_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} .$$

Dakle, posmatrani red konvergira za svako $x \in [0, 1]$, ali ne uniformno jer je za $x = \frac{1}{n}$

$$\left| R\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2}$$

za svako n pa i za $n \rightarrow \infty$, tj. kada $x = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Nad posmatranim intervalom $[0, 1]$ red se ipak može integraliti član po član, tj. integral zbiru je jednak zbiru integrala, jer je

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = \int_0^1 s(x) dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0$$

i

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_k(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{k=1}^n f_k(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 s_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx dx}{1+n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0. \end{aligned}$$

Teorema o diferenciranju redova funkcija: Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergira ka funkciji $s(x)$ nad intervalom I , pri čemu $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ imaju neprekidan prvi izvod nad I i red $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ uniformno konvergira nad intervalom I , tada je

$$s'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x).$$

Dokaz: Dokaz sledi iz činjenice da se na red $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$, pošto on uniformno konvergira, može primeniti integracija član po član nad nekim intervalom $[x_0, x] \subseteq I$, te važi

$$\int_{x_0}^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^x f'_k(t) dt \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(x) - f_k(x_0)),$$

tj.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0) = \int_{x_0}^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(t) \right) dt.$$

Diferenciranjem ove jednakosti po x (budući da je $\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0) \right)' = c' = 0$) dobijamo da je

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x).$$

Ovo drugim rečima znači da je (pod uslovima teoreme) izvod beskonačnog zbiru (reda) funkcija jednak beskonačnom zbiru (redu) izvoda tih funkcija, tj. operatori sumiranja (\sum) i diferenciranja mogu zameniti mesta.

Treba obratiti pažnju na razliku u uslovima koji omogućuju diferenciranje i integraciju reda član po član. Kod integracije smo zahtevali da posmatrani red funkcija konvergira uniformno, dok se kod diferenciranja zahteva samo konvergencija u običnom smislu, ali pri tom red izvoda funkcija mora uniformno konvergirati.

3 Stepeni redovi

U ovom delu udžbenika bavićemo se jednom specijalnom klasom redova funkcija kod kojih je opšti član reda jedna od najjednostavnijih realnih funkcija – stepena funkcija.

Red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad a, a_n \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

naziva se **stepeni red**, a brojevi a_n **koeficijenti stepenog reda**.

Ako označimo $x - a = \bar{x}$, vidimo da stepeni red može da se zapiše u obliku $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n$ i uglavnom ćemo, ne ograničavajući opštost, posmatrati takve redove.

Opšti član stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je stepena funkcija oblika $f_n(x) = a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$.

Iako su funkcije koje predstavljaju članove stepenog reda definisane (i neprekidne) za svako $x \in \mathbb{R}$, stepeni red ne mora konvergirati za svako $x \in \mathbb{R}$. On može da konvergira samo za $x = 0$ ili nad nekim konačnim intervalom, kao što je to bio slučaj sa stepenim redom $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ (koeficijenti ovog stepenog reda su $a_n = 1$), koji smo posmatrali u Primeru 1, gde smo pokazali da ovaj stepeni red konvergira za $x \in (-1, 1)$.

Problem određivanja intervala konvergencije može se rešiti na osnovu tvrdjenja koje daje Abelova teorema.

Abelova teorema: Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira za $x = x_0$, tada on apsolutno konvergira za svako x za koje je $|x| < |x_0|$.

Dokaz: U dokazu ove teoreme koristimo činjenicu da za $x = x_0$ posmatrani stepeni red postaje brojni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ i da ovaj brojni red konvergira, iz čega sledi da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$. Kako je svaki konvergentan niz ograničen, to postoji broj $M > 0$ takav da je

$$|a_n x_0^n| \leq M, \quad n = 0, 1, \dots$$

Iz prethodnog sledi da je

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Kako geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ konvergira za $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, tj. za $|x| < |x_0|$, to na osnovu uporednog kriterijuma konvergencije brojnih redova **UK1** i red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira apsolutno za $|x| < |x_0|$.

Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ divergira, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ne može konvergirati za $|x| > |x_0|$ jer bi tada, na osnovu Abelove teoreme, posmatrani red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ morao konvergirati i za x_0 , što je suprotno pretpostavci. Znači, ako stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergira u tački $x = x_0$, onda on divergira i za svako x za koje je $|x| > |x_0|$.

U slučaju da stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ niti konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$, niti divergira za svako $x \neq 0$, Abelova teorema nam omogućuje da skup pozitivnih realnih brojeva \mathbb{R}^+ podelimo na disjunktne skupove L i D , pri čemu skup D sadrži sve brojeve za koje stepeni red divergira, a skup L sve brojeve za koje red konvergira. Na ovaj način dobijamo broj $R = \sup L = \inf D$ sa osobinom da posmatrani stepeni red konvergira za svako x za koje je $|x| < R$, a divergira za svako x za koje je $|x| > R$. Broj R se naziva **poluprečnik konvergencije** stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a interval $(-R, R)$ **oblast konvergencije**. Često se u literaturi za oblast konvergencije upotrebljavaju i termini **razmak konvergencije** ili **interval konvergencije**.

Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ponekad konvergira i za $x = R$ ili $x = -R$, što se posebno proverava nekim od kriterijuma za konvergenciju brojnih redova. Tada oblast konvergencije sadrži i jednu ili obe krajnje tačke $x = R$, odnosno $x = -R$.

Ako na stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ primenimo Košijev korenski kriterijum, dobijemo da posmatrani red konvergira ako je

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |x|} < 1,$$

a divergira ako je

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |x|} > 1.$$

Prema tome, poluprečnik konvergencije je ona vrednost $x = R$ za koju je

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |x|} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |R| = 1.$$

Na isti način, primenom Dalamberovog količničkog kriterijuma dobijamo da se poluprečnik konvergencije može odrediti iz uslova

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |R| = 1.$$

Na ovaj način je dokazana

Teorema Koši-Adamara: Poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je broj R za koji važi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

tj.

ili

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R},$$

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ili

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}.$$

Ako nizovi $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}$ i $\left\{ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right\}$ imaju samo jednu tačku nagomilavanja koja je istovremeno i granična vrednost odgovarajućeg niza, tada se poluprečnik konvergencije određuje iz uslova

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \quad \text{ili} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R},$$

tj.

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{ili} \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Ako je $R = +\infty$, onda posmatrani stepeni red konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$, a ako je $R = 0$, onda posmatrani stepeni red konvergira samo za $x = 0$.

Za red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ čiji je poluprečnik konvergencije jednak R , oblast konvergencije je interval $(a-R, a+R)$. Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ ponekad konvergira i za $x = a - R$ ili $x = a + R$, što se posebno proverava nekim od kriterijuma konvergencije brojnih redova i tada i ove tačke (jedna ili obe) pripadaju oblasti konvergencije.

Primer 7. Pokažimo kako se primenom Teoreme Koši–Adamara određuje oblast konvergencije na primerima sledećih stepenih redova

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 + (-1)^{n+1}}{2}\right)^n x^n$$

$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$$

(a) Poluprečnik konvergencije određujemo iz uslova

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

pa je $R = \frac{1}{e}$. Zamenom $x = \pm \frac{1}{e}$ u dati red dobijaju se dva brojna reda čiji opšti članovi

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \left(\pm \frac{1}{e}\right)^n$$

ne teže nuli, pa posmatrani red funkcija konvergira za $x \in \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

(b) Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

to je poluprečnik konvergencije $R = +\infty$, pa posmatrani red konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$.

(c) Da bismo odredili poluprečnik konvergencije, u ovom slučaju je potrebno izračunati

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + (-1)^{n+1}}{2} = \frac{3+1}{2} = 2,$$

pa je $R = \frac{1}{2}$. Za $x = \pm \frac{1}{2}$ dobija se brojni red koji možemo prikazati u obliku zbiru reda sa parnim stepenima koji konvergira i reda sa neparnim stepenima koji divergira

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 + (-1)^{n+1}}{2} \right)^n \cdot \left(\pm \frac{1}{2} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^{2k+1},$$

pa zaključujemo da posmatrani stepeni red divergira za $x = \pm \frac{1}{2}$. Dakle, oblast konvergencije posmatranog stepenog reda je interval $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(d) Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty,$$

to je poluprečnik konvergencije $R = 0$, pa posmatrani red konvergira samo za $x = 0$. Za $x = 0$ suma reda je $a_0 = 1$.

(e) Poluprečnik konvergencije određujemo iz uslova

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(3^{n+1} + (-2)^{n+1})}{(n+1)(3^n + (-2)^n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n} = 1 \cdot 3 = 3,\end{aligned}$$

pa je $R = \frac{1}{3}$ i red konvergira u otvorenom intervalu $\left(-1 - \frac{1}{3}, -1 + \frac{1}{3}\right)$, tj. za $x \in \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Za $x = -\frac{4}{3}$ dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Prvi sabirak predstavlja alternativni brojni red za koji je u prvom delu udžbenika pokazano da konvergira, dok za opšti član reda koji predstavlja drugi sabirak važi

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{za svako } n > 1.$$

Pošto geometrijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konvergira, na osnovu uporednog kriterijuma **UK1** zaključujemo da i brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konvergira. Dakle, posmatrani red funkcija konvergira za $x = -\frac{4}{3}$.

Za $x = -\frac{2}{3}$ dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

Prvi sabirak predstavlja harmonijski brojni red za koji je u prvom delu udžbenika pokazano da divergira. Drugi sabirak, na osnovu prethodnog razmatranja, predstavlja absolutno konvergentan brojni red. Dakle, posmatrani red funkcija divergira za $x = -\frac{2}{3}$.

Zaključujemo da je oblast konvergencije posmatranog reda funkcija interval $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Oblast konvergencije stepenog reda o kojoj smo do sad govorili odnosila se na konvergenciju u običnom smislu. Sledеće tvrđenje omogućиće nam da odredimo interval u kome stepeni red konvergira uniformno.

Teorema o uniformnoj konvergenciji: Stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uniformno konvergira u svakom zatvorenom intervalu $[-b, b]$ koji je sadržan u oblasti konvergencije $(-R, R)$.

Dokaz: Da bismo dokazali ovo tvrđenje, predstavimo opšti član stepenog reda u obliku

$$f_n(x) = a_n x^n = a_n b^n \left(\frac{x}{b}\right)^n$$

odakle za svako $x \in [-b, b]$, zbog $|x| \leq b$, sledi da je

$$|f_n(x)| = |a_n x^n| = |a_n x^n \cdot \frac{b^n}{b^n}| = |a_n b^n| \cdot \left|\frac{x}{b}\right|^n \leq |a_n| b^n.$$

Po prepostavci je $b < R$, te brojni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ konvergira. Iz poslednje nejednakosti, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma, dobijamo da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uniformno konvergira nad posmatranim intervalom $[-b, b]$.

Jasno je da posmatrani stepeni red uniformno konvergira i nad svakim intervalom $[\alpha, \beta] \subset [-b, b]$. Ako brojni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konvergira, onda možemo uzeti $\beta = b = R$, a ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ konvergira, onda možemo uzeti $\alpha = -b = -R$.

Na osnovu Teoreme o neprekidnosti zaključujemo da **zbir stepenog reda $s(x)$ predstavlja neprekidnu funkciju za svako x iz intervala uniformne konvergencije**.

Budući da stepeni redovi imaju veoma veliku praktičnu primenu, u nastavku ovog dela ćemo se detaljnije pozabaviti operacijama sa stepenim re-

dovima, tj. pojasnićemo kako se osnovne operacije kao što su sabiranje redova, množenje reda skalarom, množenje dva reda, integracija i diferenciranje, o kojima smo već ranije govorili, primenjuju kod stepenih redova.

Posmatrajmo stepene redove $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ čiji su poluprečnici konvergencije R i R_b , pri čemu je $r = \min\{R, R_b\}$.

Sabiranje i množenje skalarom:

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$$

za svako $x \in (-r, r)$.

Proizvod stepenih redova: --- ne uveđen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) x^n$$

za svako $x \in (-r, r)$.

Integralacija stepenog reda: Stepeni red se može integraliti član po član, tj. za svako x iz intervala uniformne konvergencije je

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1},$$

pri čemu dobijeni red ima isti poluprečnik konvergencije R kao i polazni stepeni red. Naime, polazeći od

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \Rightarrow \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

vidimo da je poluprečnik konvergencije stepenog reda dobijenog integracijom

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{a_n}{n+1}}{\frac{a_{n+1}}{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 \cdot R = R.$$

Diferenciranje stepenog reda: Za svako x iz intervala uniformne konvergencije stepeni red se može diferencirati član po član, tj. važi

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

pri čemu je poluprečnik konvergencije reda dobijenog diferenciranjem isti kao i poluprečnik konvergencije polaznog reda. Naime, ako je poluprečnik konvergencije polaznog reda

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

onda je poluprečnik konvergencije reda dobijenog diferenciranjem

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 \cdot R = R.$$

Napomenimo da se stepeni red poluprečnika konvergencije R može proizvoljan broj puta integraliti ili diferencirati, pri čemu svi tako dobijeni stepeni redovi imaju isti poluprečnik konvergencije R kao i polazni red.

Operacije sa stepenim redovima se najčešće koriste pri izračunavanju zbiru nekog stepenog ili brojnog reda, kao i za predstavljanje nekih elementarnih funkcija u obliku stepenog reda, što će biti ilustrovano narednim primerima.

Primer 8. Nadimo zbir stepenog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Poluprečnik konvergencije posmatranog reda je

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

te red konvergira za $x \in (-1, 1)$. Kako se za $x = 1$ dobija alternativni brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ koji konvergira, a za $x = -1$ harmonijski red pomnožen sa (-1) , tj. $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ koji divergira, zaključujemo da je oblast konvergencije posmatranog reda funkcija interval $I = (-1, 1]$. Za svako $x \in I$ zbir datog reda možemo naći na sledeći način:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^x t^{n-1} dt \\ &= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} \right) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-t)^{n-1} \right) dt. \end{aligned}$$

Kako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-t)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k = \frac{1}{1+t}$$

(geometrijski red sa količnikom $q = -t$), to je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x).$$

Primer 9. Prikažimo u obliku stepenog reda funkciju

$$f(x) = \arctgx.$$

Kako je

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

(zbir geometrijskog reda sa količnikom $q = -x^2$), pri čemu dobijeni red konvergira za $x^2 < 1$, tj. $|x| < 1$, to je

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x. \end{aligned}$$

Dakle, zbog $f(0) = \arctg 0 = 0$, dobijamo

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

pri čemu navedena jednakost važi za $x \in (-1, 1)$.

 **Primer 10.** Odredimo zbir stepenog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n.$$

Poluprečnik konvergencije posmatranog reda je

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+1)}{(n+3)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+3} = 1.$$

Za $x = \pm 1$ opšti član dobijenih brojnih redova ne teži nuli, pa ovi redovi divergiraju. Dakle, posmatrani brojni red konvergira za svako $x \in (-1, 1)$.

Uvođenjem smene $n+2 = k$ posmatrani stepeni red se može zapisati u obliku

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}.$$

Vidimo da za opšti član ovog stepenog reda važi

$$k(k-1)x^{k-2} = (x^k)'' ,$$

pa je

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} &= \sum_{k=2}^{\infty} (x^k)'' = \left(\sum_{k=2}^{\infty} x^k \right)'' \\ &= \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' = \left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2} \right)' = \frac{2}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

 **Primer 11.** Izračunajmo zbir brojnog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{(n+2)2^{n+1}}.$$

Posmatraćemo stepeni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n + 2} x^{n+1}.$$

Njegov poluprečnik konvergencije je

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + n + 1)(n + 3)}{(n + 2)(n^2 + 3n + 3)} = 1.$$

Kako je

$$\frac{n^2 + n + 1}{n + 2} = n - 1 + \frac{3}{n + 2},$$

to ćemo, za $|x| < 1$, zbir posmatranog stepenog reda predstaviti kao

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n - 1)x^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n + 2} = s_1(x) + 3s_2(x).$$

Da bismo izračunali zbir prvog reda $s_1(x)$, izdvojićemo prva dva člana (za $n = 0$ i $n = 1$), pa ćemo imati

$$\begin{aligned} s_1(x) &= -x + \sum_{n=2}^{\infty} (n - 1)x^{n+1} = -x + x^3 \sum_{n=2}^{\infty} (n - 1)x^{n-2} \\ &= -x + x^3 \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)x^k = -x + x^3 \sum_{k=0}^{\infty} (x^{k+1})' \\ &= -x + x^3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} \right)' = x + x^3 \left(x \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)' \\ &= -x + x^3 \left(x \cdot \frac{1}{1-x} \right)' = -x + x^3 \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2} \\ &= -x + \frac{x^3}{(1-x)^2} = \frac{-x + 2x^2 - x^3 + x^3}{(1-x)^2} = \frac{x(2x-1)}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Da bismo izračunali zbir drugog reda $s_2(x)$, postupićemo na sledeći način

$$s_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n + 2} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n + 2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^{n+1} dt = \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} \right) dt \\
&= \frac{1}{x} \int_0^x \left(t \sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \frac{1}{x} \int_0^x \left(t \cdot \frac{1}{1-t} \right) dt \\
&= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t-1+1}{1-t} dt = \frac{1}{x} \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1-t} \right) dt \\
&= \frac{1}{x} (-x - \ln(1-x)) = -1 - \frac{\ln(1-x)}{x}.
\end{aligned}$$

Dobijeni rezultat predstavlja zbir posmatranog reda za svako $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$, mada posmatrani red konvergira i za $x = 0$ i tada je njegov zbir $s_2(0) = 0$ (što dobijamo uvrštavanjem $x = 0$ u posmatrani red). Prema tome, zbir drugog reda je

$$s_2(x) = \begin{cases} -1 - \frac{\ln(1-x)}{x}, & \text{za } x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0, & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

Primetimo da je dobijena funkcija $s_2(x)$ neprekidna za svako $x \in (-1, 1)$ pošto se primenom Lopitalovog pravila dobija da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-1 - \frac{\ln(1-x)}{x} \right) = -1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1-x} = -1 + 1 = 0.$$

Zbir zadatog brojnog reda se dobija kada u posmatrani stepeni red zamenimo $x = \frac{1}{2}$. Prema tome, traženi zbir je

$$s\left(\frac{1}{2}\right) = s_1\left(\frac{1}{2}\right) + 3s_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + 3 \left(-1 - 2 \ln \frac{1}{2} \right) = -3 + 6 \ln 2.$$

Primer 12. Izračunajmo zbir reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(x^2 - x)^n.$$

Ako uvedemo smenu $x^2 - x = t$, dobijamo stepeni red

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)t^n$$

čiji je poluprečnik konvergencije

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Za $x = \pm 1$ dobijamo brojne redove čiji opšti članovi ne teže nuli, pa je oblast konvergencije dobijenog stepenog reda $\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)t^n$ interval $(-1, 1)$.

To znači da zadati red $\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(x^2 - x)^n$ konvergira za $|x^2 - x| < 1$, tj. za one vrednosti x -a za koje je $-1 < x^2 - x < 1$. Rešavanjem dobijenog sistema nejednačina nalazimo da je interval konvergencije posmatranog reda $I = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Za $x \in I$, odnosno $|t| < 1$, zbir dobijenog stepenog reda nalazimo na sledeći način

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)t^n &= t^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)t^{n-2} = t^2 \sum_{n=2}^{\infty} (t^{n-1})' \\ &= t^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} t^{n-1} \right)' = t^2 \left(\frac{t}{1-t} \right)' = \frac{t^2}{(1-t)^2}. \end{aligned}$$

Vraćanjem smene $t = x^2 - x = x(x-1)$ dolazimo do traženog zbiru

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(x^2 - x)^n = \frac{x^2(x-1)^2}{(1+x-x^2)^2}, \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Pre nego što pređemo na dalja izlaganja o stepenim redovima, reći ćemo par reči o tome kada su dva stepena reda jednaka.

Jednakost stepenih redova: Potreban i dovoljan uslov da dva stepena reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, čiji poluprečnici konvergencije su R_1 i R_2 , budu identički jednaka nad intervalom $(-R, R)$, gde je $R = \min(R_1, R_2)$, je da važi

$$a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dokaz: Ako je $a_n = b_n$, za $n = 0, 1, 2, \dots$ očigledno je da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{za svako } x \in (-R, R).$$

S druge strane, ako stepeni redovi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ konvergiraju ka istoj funkciji $s(x)$ nad $(-R, R)$, onda je njihova razlika identički jednaka nuli, tj. za svako $x \in (-R, R)$ je

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n = s(x) - s(x) = 0,$$

odnosno

$$\varphi(x) = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + (a_3 - b_3)x^3 + \dots \equiv 0.$$

Kako $x = 0$ pripada oblasti konvergencije $(-R, R)$, to je $\varphi(0) = a_0 - b_0 = 0$, tj. $a_0 = b_0$. Koristeći ovu činjenicu vidimo da je

$$\varphi(x) = (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + (a_3 - b_3)x^3 + \dots \equiv 0.$$

Ovaj red se sme nad intervalom konvergencije diferencirati član po član, pa je

$$\varphi'(x) = (a_1 - b_1) + 2(a_2 - b_2)x + 3(a_3 - b_3)x^2 + \dots \equiv 0.$$

Za $x = 0$ je $\varphi'(0) = a_1 - b_1 = 0$, odakle dobijamo da je $a_1 = b_1$. Na isti način, posle ponovnog diferenciranja, dobija se da je $a_2 = b_2$, itd.

Na ovaj način je dokazana **jedinstvenost razvoja funkcije u stepeni red**, tj. činjenica da se funkcija može prikazati u obliku stepenog reda samo na jedan način.

4 Tajlorov i Maklorenov red

Tvrđenje o jedinstvenosti razvoja funkcije u stepeni red omogućuje nam da rešimo jedan od najvažnijih problema vezan za primenu stepenih redova, a to je: **Kada i kako se neka funkcija može prikazati u obliku stepenog reda**, ili, kako se to često u praksi kaže, **razviti u stepeni red?**

Prepostavimo da stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konvergira ka funkciji $f(x)$ za $|x-a| < R$, gde je R poluprečnik konvergencije posmatranog reda. Tada, za svako $x \in (a-R, a+R)$ važi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4 + \dots$$

Diferenciranjem ove jednakosti (pošto se za svako x iz oblasti konvergencije stepeni red sme diferencirati član po član) dobija se

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-a) + 3 \cdot 4a_4(x-a)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x-a) + \dots$$

$$\vdots$$

Kako je $x = a$ tačka iz oblasti konvergencije $(a-R, a+R)$, to zamenjujući $x = a$ u gornje jednakosti dobijamo

$$f(a) = a_0, \quad f'(a) = a_1, \quad f''(a) = 2a_2, \quad f'''(a) = 2 \cdot 3a_3, \quad \dots$$

Odavde vidimo da je

$$a_0 = f(a), \quad a_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \quad \dots,$$

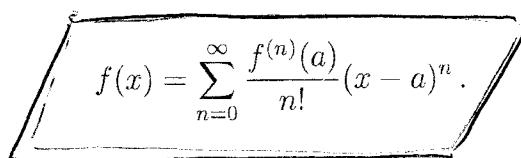
tj.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad f^{(0)}(x) = f(x).$$

Uvrštavanjem ovako određenih koeficijenata u posmatrani stepeni red dobijamo da je za svako $x \in (a-R, a+R)$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots,$$

tj.



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Dobijeni red se zove **Tajlorov red** funkcije $f(x)$ u okolini tačke a . Prema tvrđenju o jedinstvenosti razvoja u stepeni red, Tajlorov red je jedini stepeni red po stepenima od $(x - a)$ koji određuje (konvergira ka) $f(x)$. Ako se u okolini neke tačke a funkcija $f(x)$ može razviti u konvergentan Tajlorov red poluprečnika $R > 0$, onda kažemo da funkcija predstavlja **analitičku funkciju u tački a** .

Ako posmatramo Tajlorov red u okolini tačke 0, tj. u prethodnu formulu uvrstimo $a = 0$, dobijamo

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

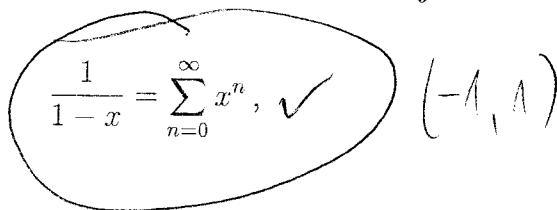
Ovaj red nazivamo **Maklorenov red** funkcije $f(x)$. Poslednja jednakost važi za sve vrednosti x za koje je $|x| < R$, gde je R poluprečnik konvergencije stepenog (Maklorenovog) reda.

U nastavku ovog dela odredićemo Maklorenove redove za neke od najčešće korišćenih elementarnih funkcija, s tim što ćemo neke od tih redova odrediti direktno (primenom formule), a neke primenom operacija diferenciranja i integracije na već dobijene Maklorenove redove. Naravno i u ovim slučajevima bi bilo moguće posmatrane funkcije razviti direktno u njihov Maklorenov red.

Budući da se funkcija može predstaviti stepenim redom na jedinstven način, mi smo u nekim od ranije navedenih primera već odredili Maklorenove redove za neke funkcije. Prvo ćemo se podsetiti tih rezultata.

Racionalna funkcija $f(x) = \frac{1}{1-x}$:

U Primeru 1 smo pokazali da se navedena funkcija dobija kao zbir geometrijskog reda, što znači da geometrijski red predstavlja Maklorenov red za ovu funkciju, tj.



$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad (-1, 1)$$

pri čemu ovaj razvoj važi za $|x| < 1$ (poluprečnik konvergencije stepenog reda u gornjoj jednakosti je $R = 1$).

Logaritamska funkcija $f(x) = \ln(1 + x)$:

U Primeru 8 smo integracijom geometrijskog reda $\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$, koji predstavlja Maklorenov red funkcije $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, pokazali da je

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in [-1, 1]}$$

pri čemu ovaj razvoj važi za $x \in (-1, 1]$.

Inverzna trigonometrijska funkcija $f(x) = \arctgx$:

Koristeći geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$, tj. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ koji predstavlja

Maklorenov red funkcije $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, u Primeru 9 smo integracijom dobili da je

$$\arctgx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

pri čemu navedena jednakost važi za $x \in \underline{(-1, 1)}$.

Odredimo sada Maklorenove redove za još neke funkcije.

Eksponencijalna funkcija $f(x) = e^x$:

Ovu funkciju ćemo razviti u Maklorenov red direktno. Polazeći od

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = e^x, \dots$$

vidimo da je

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = 1, \dots$$

Zamenjujući dobijene vrednosti za $f(0), f'(0), \dots, f^{(n)}(0)$ u formulu kojom se definiše Maklorenov red, dobijamo

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

Kako je poluprečnik konvergencije dobijenog stepenog reda

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty,$$

to navedeni razvoj važi za svako $x \in \mathbb{R}$.

Trigonometrijska funkcija $f(x) = \sin x$:

Ovu funkciju ćemo razviti u Maklorenov red direktno. Polazeći od

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x,$$

$$f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x, \quad f^{(5)}(x) = \cos x, \dots$$

vidimo da je

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 1, \dots$$

odakle zaključujemo da je

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{i} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Zamenjujući dobijene vrednosti u formulu kojom se definiše Maklorenov red dobijamo

$$\boxed{\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.} \quad x \in \mathbb{R}$$

Oblast konvergencije dobijenog reda odredićemo pomoću Dalamberovog količničkog kriterijuma. Vidimo da je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)! x^{2n+3}}{(-1)^n (2n+3)! x^{2n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1 \end{aligned}$$

za svako $x \in \mathbb{R}$, pa nađeni razvoj važi nad celim skupom \mathbb{R} .

Trigonometrijska funkcija $f(x) = \cos x$:

Kako je $\cos x = (\sin x)'$, to Maklorenov razvoj za ovu funkciju dobijamo nalazeći izvod Maklorenovog reda funkcije $\sin x$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Dobijeni red, kao i Maklorenov red funkcije $\sin x$, konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$, pa dobijeni razvoj važi nad celim skupom \mathbb{R} .

Binomna funkcija $f(x) = (1+x)^m$, $m \in \mathbb{Q}$:

Ovu funkciju ćemo direktno razviti u Maklorenov red polazeći od

$$f(x) = (1+x)^m, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f'(0) = m$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \quad f''(0) = m(m-1)$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, \quad f'''(0) = m(m-1)(m-2)$$

...

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)(m-2) \cdots (m-k+1)(1+x)^{m-k},$$

$$f^{(k)}(0) = m(m-1)(m-2) \cdots (m-k+1)$$

...

Uvrštavajući $f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(k)}(0), \dots$ u formulu kojom je definišan Maklorenov red $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, dobijamo

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \\ &\quad + \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)}{k!}x^k + \dots \end{aligned}$$

Ako definišemo binomni koeficijenat $\binom{m}{k}$ za $m \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ kao

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}, \quad 0! = 1,$$

tada dobijeni Maklorenov red za $(1+x)^m$, $m \in \mathbb{Q}$, možemo pisati u obliku

$$(1+x)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k}x^k.$$

Dobijeni red $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k}x^k$ se naziva **binomni red**. Poluprečnik konvergencije binomnog reda je

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}}{\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)(m-k)}{(k+1)!}} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k+1}{m-k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{k}}{\frac{m}{k} - 1} \right| = 1. \end{aligned}$$

Primetimo da se, ako je m prirodan broj, u svakom članu binomnog reda počev od $(m+1)$ -og pa nadalje, pojavljuje faktor $m-m=0$, pa se na desnoj strani dobija konačan broj sabiraka, tj.

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{m}x^m.$$

Vidimo, dakle, da za $m \in \mathbb{N}$ binomni red predstavlja poznati binomni obrazac.

Taylorovi i Maklorenovi redovi navedenih elementarnih funkcija imaju veoma veliku primenu u praksi, posebno kada je potrebno prikazati neku složenu funkciju u obliku stepenog reda, izračunati integrale za koje ne postoje primitivne funkcije u konačnom obliku ili, pak, izračunati zbir nekog brojnog reda koji je nastao uvrštavanjem konkretne vrednosti promenljive u neki od poznatih Maklorenovih redova. Sve ovo ćemo ilustrovati na nekoliko

primera.

Primer 13. Predstavimo u obliku stepenog reda funkciju

$$f(x) = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}, \quad |x| < 1.$$

Kako se data funkcija može prikazati u obliku

$$f(x) = \ln(1+x^2) - \ln(1-x^2),$$

to koristimo Maklorenov razvoj za logaritamsku funkciju $\ln(1+x)$, pri čemu ćemo promenljivu x zameniti sa x^2 , odnosno $-x^2$. Na taj način dobijamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x^2) - \ln(1-x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x^2)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x^2)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} + 1 \right) \frac{x^{2n}}{n}. \end{aligned}$$

Budući da je

$$(-1)^{n-1} = -1 \quad \text{za } n = 2k \quad \text{i} \quad (-1)^{n-1} = 1 \quad \text{za } n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N},$$

tj.

$$(-1)^{n-1} + 1 = 0 \quad \text{za } n = 2k \quad \text{i} \quad (-1)^{n-1} + 1 = 2 \quad \text{za } n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N},$$

na kraju dobijamo

$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k-2}}{2k-1},$$

odnosno, ako pomerimo indeks sumiranja uvođenjem smene $k = j+1$,

$$f(x) = 2x^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{4j}}{2j+1}.$$

Primer 14. Izračunajmo integral $I(x) = \int \sqrt{x} e^x dx, \quad x \geq 0$.

Primetimo da se ovaj integral ne može izračunati elementarnim metodama (uvodenjem smene ili parcijalnom integracijom), jer se njegova primitivna funkcija ne može prikazati pomoću konačnog broja elementarnih funkcija.

Da bismo izračunali zadati integral, predstavićemo eksponencijalnu funkciju u obliku Maklorenovog reda, pomnožiti ovaj red sa \sqrt{x} i zatim primeniti integraciju član po član (što smemo učiniti jer Maklorenov red funkcije e^x , a time i proizvod ovog reda i funkcije \sqrt{x} , uniformno konvergira za svaku konačnu vrednost $x \geq 0$). Posmatrajući određeni integral kao funkciju gornje granice, imamo da je

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^x \sqrt{t} e^t dt = \int_0^x \left(t^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\frac{2n+1}{2}}}{n!} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{\frac{2n+1}{2}}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!(2n+3)} x^{\frac{2n+3}{2}} \\ &= 2x\sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+3)n!}. \end{aligned}$$

Jasno je da dobijeni rezultat važi za svako $x \geq 0$.

Primer 15. Izračunajmo zbir reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$

Poći ćemo od Maklorenovog reda funkcije $f(x) = \arctg x$

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Zamenjujući $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ dobijamo

$$\arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(\sqrt{3})^{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n},$$

odakle nalazimo traženi zbir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}.$$

5 Zadaci za samostalno vežbanje

Konvergencija redova funkcija

1. Odrediti oblasti absolutne i uslovne konvergencije sledećih redova

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2x)^n}{n}$ Apsolutno za $|x| < \frac{1}{2}$, uslovno za $x = \frac{1}{2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ Apsolutno za $|x| > 1$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{x^n}$ Apsolutno za $|x| > 3$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$ Apsolutno za $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$, uslovno za $x = -3$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n}$ Apsolutno za $x \in (\frac{1}{e}, e)$, uslovno za $x = \frac{1}{e}$

2. Koristeći Vajerštrasov kriterijum pokazati da sledeći redovi uniformno konvergiraju u naznačenim intervalima

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 nx}{\sqrt[4]{n^7}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^5}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x^2}}{n^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$, $x \in (0, +\infty)$

Stepeni redovi

1. Odrediti oblast konvergencije za sledeće stepene redove

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (-1, 1)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty, \infty)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad [-1, 1)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \quad [-1, 1]$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n^2+2)(n+3)} \quad [-1, 1]$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n x^{2n} \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2 + 1} \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n \quad [-1, 1)$

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n \quad \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

2. Sledеће funkcije razviti u stepeni red po x i odrediti za koje vrednosti x ti razvoji važe

a) $f(x) = e^x + e^{-x} \quad 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

b) $f(x) = \frac{1}{4 - x^4} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4^{n+1}}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

c) $f(x) = \frac{x-3}{(x+1)^2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (3+4n)x^n, \quad x \in (-1, 1)$

d) $f(x) = e^{-x^2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

e) $f(x) = \frac{12 - 5x}{6 - 5x - x^2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n, \quad x \in (-1, 1)$

- f) $f(x) = \ln(2x^2 + 3x + 1)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(1+2^n)}{n} x^n, \quad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- g) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]$
- h) $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$ $x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}, \quad x \in [-1, 1]$
- i) $f(x) = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$ $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-2}}{2n-1}, \quad x \in (-1, 1)$
- j) $f(x) = (1+e^x)^2$ $4 + \sum_{n=1}^{\infty} (2+2^n) \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

3. Odrediti oblast konvergencije i zbir sledećih redova

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $S = -\ln(1-x), \quad x \in [-1, 1)$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ $S = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1)$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$ $S = \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} - \operatorname{arctg} 2, \quad x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2n(2n-1)}$ $S = x\operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}, \quad x \in [-1, 1)$
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ $S = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1, 1)$
- f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)x^{2n}}{n!}$ $S = (2x^2+3)e^{x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
- g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)x^n}$ $S = \frac{x-1}{x^2} \ln \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x^2}, \quad |x| \geq 1$
- h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+n-2}$

$$S = \frac{1}{3} \left(\frac{1-x^3}{x^2} \ln(1-x) + \frac{2x^2+3x+6}{6x} \right), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1)$$
- i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 5n^2 + 8n + 1}{n-1} (x^2 + x)^n$

$$S = \frac{(x^2+x)^3(x^2+x+1)}{(1-x-x^2)^3} - 5(x^2+x) \ln(1-x-x^2), \quad x \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} \left(\frac{x}{x+1} \right)^n$

$$S = \frac{x+1}{x} \ln(x+1) + x^2 - 1, \quad x \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!x^n}$

$$S = \frac{x^2+3x+1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}, \quad x \in [-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

l) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 - 2n}$

$$S = \frac{1}{2}(2x-x^2) \ln(2-x) + \frac{x^2-1}{4}, \quad x \in [0, 2]$$

4. Koristeći sume odgovarajućih stepenih redova odrediti sume brojničkih redova

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

$$S = \ln 2$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

$$S = 2e$$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$

$$S = 3e^2$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

$$S = \frac{1}{3}(\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3})$$

Literatura

- [1] Adžić N., Marić V., Kovačević I., Ungar V., Matematička analiza II, FTN, Novi Sad, 1996.
- [2] Bertolino M., Matematika II, Naučna knjiga Beograd, 1975.
- [3] Čomić I., Ungar V., Teorija redova, FTN, Novi Sad, 1996.
- [4] Mitrinović D.S., Adamović D., Nizovi i Redovi, Naučna knjiga, Beograd, 1980.
- [5] Pejović T., Matematička analiza. knj.III, Naučna knjiga, Beograd, 1972.
- [6] Popović B., Matematika za tehničke fakultete, Uvod u višu matematiku, knj. 1., Naučna knjiga, Beograd, 1988.