VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Blesić Andrija, Dedeić Jovana, Dragić Đorđe, Janjoš Aleksandar, Miščević Irena, Ostojić Tijana, Prokić Aleksandar, Tošić Stefan, Vuković Manojlo

Katedra za matematiku
Fakultet tehničkih nauka

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe III.2

1.1. Integrali racionalnih funkcija

Svaku nepravu racionalnu funkciju $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (stepen polinoma $P(x)$ je veći ili jednak od stepena polinoma $Q(x)$) možemo napisati u obliku $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \dfrac{R_1(x)}{Q(x)}$, gde je $T(x)$ polinom, a $\dfrac{R_1(x)}{Q(x)}$ racionalna funkcija kod koje je stepen polinoma $R_1(x)$ manji od stepena polinoma $Q(x)$ ($\dfrac{R_1(x)}{Q(x)}$ se naziva pravi razlomak ili prava racionalna funkcija).

Posmatrajmo sada pravu racionalnu funkciju, neka je $P(x)$ polinom stepena manjeg od n, a $Q(x)$ polinom oblika

$$Q(x) = c_n(x-a_1)^{k_1}...(x-a_p)^{k_p}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}...(x^2+b_qx+c_q)^{l_q},$$

gde je $k_1+k_2+...+k_p+2(l_1+l_2+...+l_q)=n$, n je stepen polinoma $Q(x)$, a_i, b_j i c_j su realni brojevi za koje važi $b_j^2-4c_j<0$, $i=1,\ 2,...,p$, $j=1,\ 2,...,q$ (drugim rečima polinom $Q(x)$ je faktorisan nad poljem $\mathbb{R}$).

Tada se $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ može napisati u obliku

$$\begin{aligned} R(x) = & \left(\frac{A_{11}}{x-a_1}+...+\frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}\right)+...+\left(\frac{A_{p1}}{x-a_p}+...+\frac{A_{pk_p}}{(x-a_p)^{k_p}}\right) \\ & +\left(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+...+\frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+b_1x+c)^{l_1}}\right) \\ & +...+\left(\frac{B_{q1}x+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q}+...+\frac{B_{ql_q}x+C_{ql_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}}\right). \end{aligned}$$

Koeficijente A_{ij}, B_{ij} i C_{ij} dobijamo metodom neodređenih (nepoznatih) koeficijenata. Ova metoda se sastoji u sledećem: za datu funkciju $R(x)$ pretpostavi se da važi data jednakost u kojoj su A_{ij}, B_{ij} i C_{ij} neodređeni koeficijenti. Množenjem te jednakosti sa $Q(x)$, dobijaju se na levoj i desnoj strani polinomi; kako su dva polinoma identički jednaka ako i samo ako su im jednaki koeficijenti uz iste stepene od x, te se izjednačavanjem ovih koeficijenata dobija sistem jednačina za određivanje A_{ij}, B_{ij} i C_{ij}.

Razlomci oblika $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ i $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}$ nazivaju se prosti ili parcijalni razlomci.

Zadatak 1.1. Izračunati $I = \int \frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}dx.$

Rešenje.

Podintegralna funkcija je prava racionalna funkcija. Međutim za rastavljanje na sumu parcijalnih razlomaka prvo je potrebno faktorisati polinom u imeniocu, tj. pronaći korene kvadratne jednačine

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}.$$

Prema tome, pravu racionalnu funkciju

$$\frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

treba rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka.

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}$$

Nakon množenja cele jednakosti sa $(x-1)^2(x-2)^2$ sledi

$$\begin{aligned} x^2 &= A(x-1)(x-2)^2 + B(x-2)^2 + C(x-1)^2(x-2) + D(x-1)^2 \\ x^2 &= x^3(A+C) + x^2(-5A+B-4C+D) + x(8A-4B+5C-2D) \\ &\quad + (-4A+4B-2C+D) \end{aligned}$$

Metodom neodređenih koeficijenata dobija se sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} A & & & + & C & & & = & 0 \\ -5A & + & B & - & 4C & + & D & = & 1 \\ 8A & - & 4B & + & 5C & - & 2D & = & 0 \\ -4A & + & 4B & - & 2C & + & D & = & 0 \end{array}$$

Rešavanjem sistema dobija se $A = 4$, $B = 1$, $C = -4$ i $D = 4$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{(x^3-3x+2)^2}dx = \int \left(\frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-4}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right) dx \\ &= 4\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} - 4\int \frac{dx}{x-2} + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2} \\ &= \left[\begin{array}{c} x-1 = t \Rightarrow dx = dt \\ x-2 = t_1 \Rightarrow dx = dt_1 \end{array} \right] = 4\int \frac{dt}{t} + \int t^{-2}dt - 4\int \frac{dt_1}{t_1} + 4\int {t_1}^{-2}dt_1 \\ &= 4\ln|t| + \frac{t^{-1}}{-1} - 4\ln|t_1| + 4\frac{{t_1}^{-1}}{-1} + c = 4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| - \frac{1}{x-1} - 4\frac{1}{x-2} + c \\ &= \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^4 - \frac{5x-6}{x^2-3x+2} + c. \end{aligned}$$

1.2. Integrali iracionalnih funkcija

I Integral oblika $\displaystyle\int \boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{x},\ \left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{px+q}}\right)^{\boldsymbol{r_1}},\ \dots,\ \left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{px+q}}\right)^{\boldsymbol{r_k}}\right]\boldsymbol{dx}$.

Posmatrajmo integral kod koga je podintegralna funkcija racionalna funkcija od x i od različitih stepena izraza $\dfrac{ax+b}{px+q}$, pri čemu je $aq - bp \neq 0$ (inače se izraz svodi na konstantu).
Neka je s najmanji zajednički sadržalac imenilaca eksponenata r_1, r_2, ..., r_k. Uvedimo smenu $\sqrt[s]{\dfrac{ax+b}{px+q}} = t \Rightarrow \dfrac{ax+b}{px+q} = t^s$. Tada je $\left(\dfrac{ax+b}{px+q}\right)^{r_i} = t^{sr_i}$ za svako $i = 1, 2, ..., k$, pri čemu je, s obzirom da se imenilac svakog broja r_i sadrži u s, sr_i ceo broj. Takođe je $x = \dfrac{qt^s - b}{a - pt^s}$, pa se dati integral svodi na integral racionalne funkcije nove promenljive t.

Zadatak 1.2. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt{x+1}}$.

Rešenje.
Primetimo da je podintegralna funkcija racionalna funkcija po x i da se javlja izraz $x+1$ na stepene redom $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$. Kako je $NZS\{2,3\} = 6$ smena koja se uvodi je $\sqrt[6]{x+1} = t$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt{x+1}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt[6]{x+1} = t \Rightarrow x+1 = t^6 \\ dx = 6t^5 dt, \end{array}\right] \\ &= \int \frac{6t^5}{t^4 - t^3}dt = 6\int \frac{t^5}{t^3(t-1)}dt = 6\int \frac{t^2}{t-1}dt \end{aligned}$$

U poslednjem integralu podintegralna funkcija je neprava racionalna funkcija. Potrebno je podeliti t^2 sa $t-1$. Može se izvršiti klasično deljenje polinoma, međutim oduzimanjem i dodavanjem broja 1 brojiocu, brže ćemo izvršiti deljenje.

$$\begin{aligned} I &= 6\int \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1}dt = 6\int \frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1}dt = 6\int (t+1)dt + 6\int \frac{dt}{t-1} \\ &= 6\frac{t^2}{2} + 6t + 6\ln|t-1| + c = 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x+1} - 1\right| + c. \end{aligned}$$

II Integrali binomnog diferencijala

Integral binomnog diferencijala je integral oblika $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$, gde su m, n i p racionalni brojevi ($n, p \neq 0$), a a i b realni brojevi različiti od nule. Uvođenjem pomoćne smene

$$x^n = t, \quad \text{tj.} \quad x = t^{\frac{1}{n}},$$

odakle je

$$dx = \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} dt,$$

integral se svodi na

$$\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt = \frac{1}{n}\int t^q (a+bt)^p dt,$$

gde je $\frac{m+1}{n} - 1 = q$ takođe racionalan broj.

Uvođenje naredne smene zavisi od vrednosti p i q, razlikujemo tri slučaja:

1. $p \in \mathbb{Z}$, $q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$.
   Tada je $\int t^{\frac{r}{s}}(a+bt)^p dt = \int R(t,\ t^{\frac{r}{s}})dt$, tj. dobija se prethodno razmotren tip integrala, koji se smenom $t = z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.
2. $q \in \mathbb{Z}$, $p = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$.
   Tada je $\int t^q(a+bt)^{\frac{r}{s}} dt = \int R(t,\ (a+bt)^{\frac{r}{s}})dt$, koji se smenom $a+bt = z^s$ (prepoznajemo da je u pitanju I tip integrala iracionalnih funkcija) svodi na integral racionalne funkcije od z.
3. $p + q \in \mathbb{Z}$ i neka je $p = \frac{r}{s}$.
   Tada je $\int t^q(a+bt)^p dt = \int t^{p+q}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt = \int R\left[t, \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dt$,
   pri čemu se poslednji integral smenom $\frac{a+bt}{t} = z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.

Naredna tri zadatka će reprezentovati redom navedene slučajeve.

Zadatak 1.3. Izračunati $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-\sqrt[3]{x})}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-\sqrt[3]{x})} = \int x^{-\frac{1}{2}}(4-x^{\frac{1}{3}})^{-1}dx = \begin{bmatrix} x^{\frac{1}{3}} = t, \ \ x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{bmatrix} \\
&= 3\int t^{-\frac{3}{2}}(4-t)^{-1}t^2 dt = 3\int t^{\frac{1}{2}}(4-t)^{-1}dt = \begin{bmatrix} t = z^2 \\ dt = 2zdz \end{bmatrix} \\
&= 6\int z(4-z^2)^{-1}zdz = 6\int \frac{z^2}{4-z^2}dz = -6\int \frac{z^2-4+4}{z^2-4}dz \\
&= -6\int dz - 24\int \frac{dz}{z^2-2^2} = -6z - 24\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + c \\
&= -6t^{\frac{1}{2}} - 6\ln\left|\frac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}+2}\right| + c = -6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x}+2}\right| + c.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.4. Izračunati $I = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}dx = \begin{bmatrix} x^{\frac{1}{3}} = t, \ \ x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{bmatrix} \\
&= 3\int t^{-2}(1+t)^{\frac{1}{2}}t^2 dt = 3\int (1+t)^{\frac{1}{2}}dt = \begin{bmatrix} 1+t = z^2 \\ dt = 2zdz \end{bmatrix} \\
&= 6\int z^2 dz = 6\cdot\frac{z^3}{3} + c = 2\cdot(\sqrt{1+t})^3 + c = 2\cdot(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}} + c.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.5. Izračunati $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx = \begin{bmatrix} x^2 = t, \ \ x = t^{\frac{1}{2}} \\ dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\int t^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{2}} \ \ t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}(1+t)^{-\frac{3}{2}}dt \\
&= \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\cdot\frac{(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{t^{-\frac{3}{2}}}dt = \frac{1}{2}\int t^{-3}\cdot\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-\frac{3}{2}}dt \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1+t}{t} = z^2, \ \ t = \frac{1}{z^2-1} \\ dt = \frac{-2z}{(z^2-1)^2}dz \end{bmatrix} = -\int \frac{(z^2-1)^3}{z^3}\frac{z}{(z^2-1)^2}dz \\
&= -\int \frac{z^2-1}{z^2}dz = -z - \frac{1}{z} + c = -\sqrt{\frac{1+t}{t}} - \sqrt{\frac{t}{1+t}} + c \\
&= -\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} - \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} + c.
\end{aligned}$$

III Integrali oblika $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)dx$

Neka je dat integral $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\ dx$, $(a \neq 0)$, gde je R racionalna funkcija od x i $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Ovaj integral se svodi na integral racionalne funkcije primenom jedne od Ojlerovih smena.

1) Ako je $a > 0$, uvodi se smena $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$ (prva Ojlerova smena). Tada je (uzmimo da je $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$, znak minus ispred a ne menja način izvođenja) $ax^2+bx+c = t^2 + 2xt\sqrt{a} + ax^2$, odakle je $x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}$. Znači da je x racionalna funkcija od t (takođe je i dx racionalan izraz od t i dt), a $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a} = t + \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a}$, tj. i $\sqrt{ax^2+bx+c}$ je racionalan izraz od t. Prema tome, dati integral se transformiše u integral racionalne funkcije od t.
2) Ako je $c > 0$, može se uvesti smena $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$ (druga Ojlerova smena). Tada je (uzmimo ispred korena znak plus) $ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c$, odakle je $x = \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}$. Prema tome, x je racionalna funkcija od t, a kako se dx i $\sqrt{ax^2+bx+c}$ izražavaju takođe racionalno preko t, dati integral se svodi na integral racionalne funkcije od t.
3) Ako kvadratni trinom ax^2+bx+c ima realne različite korene x_1 i x_2, može se staviti $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)\cdot t$ (treća Ojlerova smena). Kako je $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, to je $a(x-x_1)(x-x_2) = (x-x_1)^2t^2$, a odatle je $x = \frac{ax_2-x_1t^2}{a-t^2}$. Prema tome, x je racionalna funkcija od t, a kako se dx i $\sqrt{ax^2+bx+c}$ izražavaju racionalno preko t, dati integral se svodi na integral racionalne funkcije od t.

Zadatak 1.6. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Rešenje.
Kako je $c > 0$ koristimo drugu Ojlerovu smenu.

$$\sqrt{1-2x-x^2} = xt-1 \Rightarrow 1-2x-x^2 = x^2t^2-2xt+1 \Rightarrow x = \frac{2t-2}{t^2+1} = 2\frac{t-1}{t^2+1}$$

$$dx = 2\frac{t^2+1-2t(t-1)}{(t^2+1)^2}dt = -2\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}dt$$

$$xt-1 = 2\frac{t^2-t}{t^2+1} - \frac{t^2+1}{t^2+1} = \frac{t^2-2t-1}{t^2+1}$$

$$I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = -2\int \frac{\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}dt}{1+\frac{t^2-2t-1}{t^2+1}} = -2\int \frac{\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}dt}{\frac{2(t^2-t)}{t^2+1}}$$

$$= -\int \frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)}dt$$

Dakle, polazni integral smo sveli na integral prave racionalne funkcije, koju je potrebno rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka.

$$\frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

$$\frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)} = \frac{A(t-1)(t^2+1) + Bt(t^2+1) + t(t-1)(Ct+D)}{t(t-1)(t^2+1)}$$

Metodom neodređenih koeficijenata i rešavanjem sistema linearnih jednačina, dobija se da je $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$ i $D = 2$.
Konačno,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} &= -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} \\
&= -\ln|t| + \ln|t-1| - 2\operatorname{arctg} t + c \\
&= \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\operatorname{arctg} t + c,
\end{aligned}$$

gde je $t = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

1.3. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1.7. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{x^2+3x-1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,dx$.

Zadatak 1.8. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx$.

Zadatak 1.9. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$.

Zadatak 1.10. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}(1+\sqrt[6]{x})}$.

Zadatak 1.11. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

2. Vežbe III.3

Ojlerove smene u većini slučajeva dovode do integrala prilično glomaznih racionalnih funkcija, pa se preporučuje da se one koriste samo u slučajevima kada nema drugih mogućnosti integracije. Razmotrićemo zbog toga neke specijalne slučajeve integrala $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ za koje postoje metodi rešavanja pogodniji od Ojlerovih smena.

a) **Metod Ostrogradskog**. Integral oblika $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $a \neq 0$, gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena od x ($n \geq 1$), rešava se primenom identiteta

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gde je $Q_{n-1}(x)$ polinom stepena $n-1$ sa neodređenim (nepoznatim) koeficijentima, a λ neodređena (nepoznata) konstanta. Nađemo izvod leve i desne strane poslednje jednakosti i sređivanjem po stepenima od x, određuju se koeficijenti polinoma $Q_{n-1}(x)$ i λ, rešavanjem sistema od $n+1$ nepoznatih.

Zadatak 2.1. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx.$

Rešenje.
Polinom u brojiocu je drugog stepena, primenjujemo gore navedeni identitet za $n = 2$, dakle $Q_1(x) = Ax + B$.

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = A\sqrt{x^2+x+1} + (Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Nakon množenja cele poslednje jednakosti sa $2\sqrt{x^2+x+1}$, dobija se

$$\begin{aligned} 2x^2+2 &= 2A(x^2+x+1) + 2Ax^2 + 2Bx + Ax + B + 2\lambda \\ 2x^2+2 &= 4Ax^2 + (3A+2B)x + 2A + B + 2\lambda \end{aligned}$$

Rešavanjem sistema jednačina:

$$\begin{array}{lllllll} 4A & & & & & = & 2 \\ 3A & + & 2B & & & = & 0 \\ 2A & + & B & + & 2\lambda & = & 2 \end{array}$$

dobija se $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{3}{4}$ i $\lambda = \frac{7}{8}$.

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{7}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}$$
$$= \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{7}{8}\ln\left|\,x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\,\right| + c.$$

b) Integral oblika $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $n\in\mathbb{N}$, $a\neq 0$, svodi se na integral prethodnog tipa uvođenjem smene $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

Zadatak 2.2. Izračunati $I=\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

Rešenje.

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}} = \left[\begin{array}{l} x+1=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt \Rightarrow x=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t} \\ x^2+2x=\frac{(1-t)^2}{t^2}+\frac{2-2t}{t}=\frac{1-2t+t^2+2t-2t^2}{t^2}=\frac{1-t^2}{t^2} \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^3}\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}} = -\underbrace{\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}}}_{I_1}$$

Primetimo da smo polazni integral sveli na integral I_1 koji se može rešiti pomenutom metodom Ostrogradskog (uraditi na taj način). Međutim, konkretno integral I_1 možemo brže svesti na tablične integrale na sledeći način:

$$I_1 = \int \frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \sqrt{1-t^2}dt - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= \frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t - \arcsin t + c$$
$$= \frac{1}{2(x+1)}\sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1} + c.$$

2.1. Integrali trigonometrijskih funkcija

I Integrali oblika

$$\int \boldsymbol{\sin(\alpha x)\cos(\beta x)dx}, \int \boldsymbol{\sin(\alpha x)\sin(\beta x)dx}, \int \boldsymbol{\cos(\alpha x)\cos(\beta x)dx},$$

gde su α i β proizvoljne konstante, rešavaju se primenom trigonometrijskih identiteta:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha x)\cos(\beta x) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)x\right]\\
\sin(\alpha x)\sin(\beta x) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right]\\
\cos(\alpha x)\cos(\beta x) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x\right].
\end{aligned}$$

Zadatak 2.3. Izračunati $I = \int \cos x\cos(2x)\cos(3x)\ dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
I &= \int \cos x\cos(2x)\cos(3x)\ dx = \frac{1}{2}\int \cos x\left[\cos x+\cos(5x)\right]\ dx\\
&= \frac{1}{2}\int \cos x\cos x dx + \frac{1}{2}\int \cos x\cos(5x)dx\\
&= \frac{1}{4}\int \left[1+\cos(2x)\right]\ dx + \frac{1}{4}\int\left[\cos(4x)+\cos(6x)\right]\ dx\\
&= \frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\sin(2x)+\frac{1}{16}\sin(4x)+\frac{1}{24}\sin(6x)+c.
\end{aligned}$$

II Integrali oblika $\int \boldsymbol{R(\sin x, \cos x)dx}$

Posmatrajmo integral kod koga je podintegralna funkcija racionalna funkcija od $\sin x$ i $\cos x$. Svaki ovakav integral može se svesti na integral racionalne funkcije po novoj promenljivoj, smenom $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Koristeći poznate trigonometrijske obrasce imamo da je

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ako je $x \in ((2k-1)\pi,\ (2k+1)\pi),\ k\in\mathbb{Z}$, tada je $x = 2\operatorname{arctg} t + 2k\pi$, pa je $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Sledi da je

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt,$$

gde je R_1 nova racionalna funkcija.

Zadatak 2.4. Izračunati $I = \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$

Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \left[\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right] = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} dt \\ &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{2dt}{2(t^2+2t+2)} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} \\ &= \operatorname{arctg}(t+1) + c = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1) + c. \end{aligned}$$

Smena $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ često dovodi do integrala glomaznih racionalnih funkcija, pa je preporučljivo izbegavati je onda kada je to moguće. Navešćemo neke od specijalnih slučajeva integrala racionalne funkcije od $\sin x$ i $\cos x$, u kojima je pogodnije uvesti neku drugu smenu.

II_1 Ako je u integralu oblika $\int R(\sin x, \cos x)dx$ funkcija R takva da je

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

tj. funkcija je neparna po drugoj komponenti, $\cos x$, stepen funkcije $\cos x$ je neparan, dok je stepen funkcije $\sin x$ paran, uvodi se smena $\sin x = t$ $(\cos x dx = dt)$.

II_2 Ako je u integralu oblika $\int R(\cos x, \sin x)dx$ funkcija R takva da je

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

tj. funkcija je neparna po $\sin x$, stepen funkcije $\sin x$ je neparan, dok je stepen funkcije $\cos x$ paran, uvodi se smena $\cos x = t$ $(-\sin x dx = dt)$.

II_3 Ako je u integralu oblika $\int R(\sin x, \cos x)dx$ funkcija R takva da je

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

uvodi se smena $\operatorname{tg} x = t$ $(dx = \frac{dt}{1+t^2})$.

Zadatak 2.5. Izračunati $I = \int \frac{dx}{\sin x \sin(2x)}$.

Rešenje.

Koristeći trigonomertijske identitete $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, sledi

$$I=\int\frac{dx}{\sin x\sin(2x)}=\int\frac{dx}{2\sin x\sin x\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{\cos x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}dx.$$

Podintegralna funkcija je

$$R(\sin x,\cos x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)},$$

kako je

$$R(\sin x,-\cos x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}=-R(\sin x,\cos x),$$

uvodimo smenu $\sin x=t,\ \cos x\ dx=dt.$

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2(1-t^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)}dt=\frac{1}{2}\int t^{-2}dt+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t^2}\\&=-\frac{1}{2t}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c=-\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c.\end{aligned}$$

Zadatak 2.6. Izračunati $I=\displaystyle\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx.$

Rešenje.

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^4 x}\sin x dx=\int\frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^4 x}\sin x dx\\&=\left[\begin{array}{c}\cos x=t\\-\sin x dx=dt\end{array}\right]=-\int\frac{(1-t^2)^2}{t^4}dt=-\int\frac{t^4-2t^2+1}{t^4}dt\\&=-\int dt+2\int t^{-2}dt-\int t^{-4}dt=-t-\frac{2}{t}+\frac{1}{3t^3}+c\\&=-\cos x-\frac{2}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+c.\end{aligned}$$

Zadatak 2.7. Izračunati $I=\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}.$

Rešenje.

Prisetimo se trigonometrijskih identiteta: $\sin^2 x=\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$ i $\cos^2 x=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$.

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x=t,\ \ dx=\frac{dt}{1+t^2}\\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}\end{array}\right]=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\\&=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+2t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{1+2t^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}(t\sqrt{2})+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(x\sqrt{2}))+c.\end{aligned}$$

Zadatak 2.8. Izračunati integral $I = \displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx.$

Rešenje.
Deljenjem brojioca i imenioca podintegralne funkcije sa $\cos x$, dobijamo

$$I = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 2} dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t,\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{t^2+1} \end{array} \right]$$
$$= \int \frac{t-1}{t+2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t-1}{(t+2)(t^2+1)} dt.$$

Polazni integral smo sveli na integral prave racionalne funkcije. Predstoji nam rastavljanje podintegralne funkcije na sumu parcijalnih razlomka.

$$\frac{t-1}{(t+2)(1+t^2)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{At^2 + A + Bt^2 + Ct + 2Bt + 2C}{(t+2)(t^2+1)}$$

$$t - 1 = (A+B)t^2 + (2B+C)t + A + 2C$$

Rešavanjem sistema

$$\begin{array}{ccccccc} A & + & B & & & = & 1 \\ & & 2B & + & C & = & 1 \\ A & + & & & 2C & = & -1 \end{array}$$

dobijamo da je $A = -\frac{3}{5}$, $B = \frac{3}{5}$ i $C = -\frac{1}{5}$.

$$I = -\frac{3}{5}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{5}\int \frac{3t-1}{t^2+1} dt = -\frac{3}{5}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{3}{10}\int \frac{2t}{t^2+1} dt - \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2+1}$$
$$= -\frac{3}{5}\ln|t+2| + \frac{3}{10}\ln\left|t^2+1\right| - \frac{1}{5}\operatorname{arctg} t + c$$
$$= -\frac{3}{5}\ln|\operatorname{tg} x + 2| - \frac{3}{10}\ln\left|\operatorname{tg}^2 x + 1\right| - \frac{1}{5}x + c.$$

III **Integrali oblika** $\displaystyle\int (\sin(\alpha x))^m (\cos(\beta x))^n dx,\ m, n \in \mathbb{N}$ rešavaju se pomoću Ojlerovih formula:

$$\sin(\alpha x) = \frac{e^{\alpha xi} - e^{-\alpha xi}}{2i}, \quad \cos(\beta x) = \frac{e^{\beta xi} + e^{-\beta xi}}{2}$$

Zadatak 2.9. Izračunati $I = \displaystyle\int \sin^3 x \cos^2(3x)\, dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\sin^3 x \cos^2(3x) &= \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^3 \left(\frac{e^{3xi} + e^{-3xi}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{3xi} - 3e^{xi} + 3e^{-xi} - e^{-3xi}}{-8i} \cdot \frac{e^{6xi} + 2 + e^{-6xi}}{4} \\
&= -\frac{1}{32i}(e^{9xi} + 2e^{3xi} + e^{-3xi} - 3e^{7xi} - 6e^{xi} - 3e^{-5xi} \\
&\quad + 3e^{5xi} + 6e^{-xi} + 3e^{-7xi} - e^{3xi} - 2e^{-3xi} - e^{-9xi}) \\
&= -\frac{1}{16}\frac{e^{9xi} - e^{-9xi}}{2i} + \frac{3}{16}\frac{e^{7xi} - e^{-7xi}}{2i} - \frac{3}{16}\frac{e^{5xi} - e^{-5xi}}{2i} \\
&\quad - \frac{1}{16}\frac{e^{3xi} - e^{-3xi}}{2i} + \frac{6}{16}\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \\
&= -\frac{1}{16}\sin 9x + \frac{3}{16}\sin 7x - \frac{3}{16}\sin 5x - \frac{1}{16}\sin 3x + \frac{6}{16}\sin x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I = &-\frac{1}{16}\int \sin 9x dx + \frac{3}{16}\int \sin 7x dx - \frac{3}{16}\int \sin 5x dx - \frac{1}{16}\int \sin 3x dx \\
&+ \frac{6}{16}\int \sin x dx = \frac{1}{144}\cos 9x - \frac{3}{112}\cos 7x + \frac{3}{80}\cos 5x + \frac{1}{48}\cos 3x - \frac{3}{8}\cos x + c.
\end{aligned}$$

IV **Integral oblika** $I = \displaystyle\int (P_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x))dx$**,** gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena, $Q_m(x)$ polinom m-tog stepena, a α i β proizvoljne konstante rešava se primenom identiteta

$$I = R_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x) + T_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c,$$

gde su $R_k(x)$ i $T_k(x)$ polinomi k-tog stepena sa neodređenim (nepoznatim) koeficijentima, a $k = \max\{m, n\}$. Diferenciranjem leve i desne strane, izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene od x i rešavanjem sistema od $2k + 2$ jednačina sa $2k + 2$ nepoznatih, dobijaju se koeficijenti polinoma $R_k(x)$ i $T_k(x)$.

Zadatak 2.10. Izračunati $I = \displaystyle\int \left[xe^{2x}\cos x + (x^2-2)e^{2x}\sin x\right] dx.$

Rešenje.
U ovom slučaju stepeni polinoma su $n = 1$, $m = 2$, pa je $k = \max\{1,2\} = 2$. Nepoznati polinomi su $R_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ i $S_2(x) = Dx^2 + Ex + F$. Primenjujemo gore navedeni identitet.

$$
\begin{aligned}
&I = \left[Ax^2 + Bx + C\right] e^{2x}\sin x + \left[Dx^2 + Ex + F\right] e^{2x}\cos x + c \Big/ {}' \\
&xe^{2x}\cos x + (x^2-2)e^{2x}\sin x = \\
&= \left[2Ax + B\right] e^{2x}\sin x + \left[Ax^2 + Bx + C\right] e^{2x}(2\sin x + \cos x) \\
&+ \left[2Dx + E\right] e^{2x}\cos x + \left[Dx^2 + Ex + F\right] e^{2x}(2\cos x - \sin x) \\
&= e^{2x}\sin x \left[2Ax + B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C - Dx^2 - Ex - F\right] \\
&+ e^{2x}\cos x \left[Ax^2 + Bx + C + 2Dx + E + 2Dx^2 + 2Ex + 2F\right] \\
&= \left[(A+2D)x^2 + (B+2D+2E)x + C + E + 2F\right] e^{2x}\cos x \\
&+ \left[(2A-D)x^2 + (2A+2B-E)x + B + 2C - F\right] e^{2x}\sin x
\end{aligned}
$$

Rešavanjem sistema jednačina $A+2D = 0$, $B+2D+2E = 1$, $C+E+2F = 0$, $2A-D = 1$, $2A+2B-E = 0$, $B+2C-F = -2$, dobijamo $A = \dfrac{2}{5}$, $B = -\dfrac{1}{25}$, $C = -\dfrac{116}{125}$, $D = -\dfrac{1}{5}$, $E = \dfrac{18}{25}$ i $F = \dfrac{13}{125}$.

Dakle,

$$
I = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{25}x - \frac{116}{125}\right) e^{2x}\sin x + \left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{18}{25}x + \frac{13}{125}\right) e^{2x}\cos x + c.
$$

2.2. Integrali eksponencijalne funkcije

Integral oblika $\int R(e^x)dx$, gde je R racionalna funkcija od e^x, rešava se smenom $e^x = t$. Tada je $e^x dx = dt$, odakle je $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$, pa je $\int R(e^x)dx = \int R(t)\frac{dt}{t}$, što znači da se integral svodi na integral racionalne funkcije od t.

Zadatak 2.11. Izračunati $I = \int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\,dx$.

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\,dx = \begin{bmatrix} e^{\frac{x}{2}} = t, \;\; x = 2\ln t \\ dx = \frac{2}{t}dt \end{bmatrix} \\
&= 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t(1+t^2)} \cdot \frac{dt}{t} = 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2(1+t^2)}dt \\
&= \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} t \Rightarrow du = \frac{dt}{1+t^2} \\ dv = \frac{dt}{t^2(t^2+1)} \Rightarrow v = \int \frac{1+t^2-t^2}{t^2(t^2+1)}dt = \int t^{-2}dt - \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t \end{bmatrix} \\
&= 2(-\frac{1}{t}\operatorname{arctg} t - arctg^2 t + \underbrace{\int \frac{dt}{t(1+t^2)}}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}\,dt)}_{I_2}
\end{aligned}
$$

$$
I_1 = \int \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)}dt = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{t}{1+t^2}dt = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| + c
$$

$$
I_2 = \int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}dt = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg} t = z \\ \frac{dt}{1+t^2} = dz \end{bmatrix} = \int z dz = \frac{z^2}{2} = \frac{\operatorname{arctg}^2 t}{2} + c
$$

Dakle,

$$
\begin{aligned}
I &= -\frac{2\operatorname{arctg} t}{t} - 2\operatorname{arctg}^2 t + 2\ln|t| - \ln\left|1+t^2\right| + \operatorname{arctg}^2 t + c \\
&= -\frac{2\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} - \operatorname{arctg}^2 e^{\frac{x}{2}} + \ln\frac{e^x}{1+e^x} + c.
\end{aligned}
$$

2.3. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 2.12. Izračunati $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$.

Zadatak 2.13. Izračunati $I = \int \sin(6x)\cos(7x)dx$.

Zadatak 2.14. Izračunati $I = \int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx$.

Zadatak 2.15. Izračunati $I = \int (x+1)\cdot e^{2x}\cos x\;dx$.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladmir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladmir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.