DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA JEDNE PROMENLJIVE - I deo

21. mart 2023.

Definicija izvoda

Posmatramo realnu funkciju $y = f(x)$, $f : D \to \mathbb{R}$, i $x_0 \in D^\circ$.

- $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} \neq 0$ - **priraštaj argumenta** funkcije $f(x)$ u tački $x \in D^\circ$
- ukoliko $x + \Delta x \in D^\circ$ tada je

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} = f(x + \Delta x) - f(x)$$

priraštaj funkcije $f(x)$ u tački $x \in D^\circ$ koji odgovara priraštaju argumenta Δx

Kako je priraštaj funkcije $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, to količnik $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nije definisan za $\Delta x = 0$.

Da li postoji granična vrednost tog količnika kada $\Delta x \to 0$?
Očigledno da je potreban uslov da granična vrednost količnika postoji kada $\Delta x \to 0$ taj da i $\Delta y \to 0$ tj. da funkcija $f(x)$ treba da bude neprekidna u tački x.

Definicija

Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

onda se ta granična vrednost zove **izvod funkcije $f(x)$ u tački x** *i označava se sa* $\mathbf{f'(x)}$ *ili* $\mathbf{y'}$.

Izvod i neprekidnost. Jednostrani izvod

Teorema

Ako funkcija ima izvod u nekoj tački x, ona je u toj tački i neprekidna.

Dokaz. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = f'(x) \cdot 0 = 0.$

Obrnuto ne mora da važi! Primer: $f(x) = |x|$, neprekidna je za svako x, a nema izvod u $x = 0$, jer je

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

pri čemu je

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \qquad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Prethodni primer pokazuje da mogu postojati desna i leva granična vrednost, $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ i $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ koje su različite, pa ima smisla definisati i jednostrane izvode.

- **Desni izvod** funkcije $f(x)$ nad $[x, x+\delta)$, $\delta > 0$ je

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x + \Delta x \in [x, x+\delta)$$

- **Levi izvod** funkcije $f(x)$ nad $(x-\delta, x]$, $\delta > 0$ je

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x + \Delta x \in (x-\delta, x]$$

$f(x)$ ima izvod u x akko postoje jednostrani izvodi i važi
$$f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$$

Da iz neprekidnosti funkcije u tački x ne sledi uvek da postoji bar jedan jednostrani izvod u posmatranoj tački, pokazuje sledeći primer.

Primer

Funkcija $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ *nema jednostrane izvode u tački* $x = 0$.

Rešenje. Funkcija $f(x)$ *je neprekidna za svako* x*. U tački* $x = 0$ *ne postoji ni jedan jednostrani izvod:*

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \sin \frac{1}{\Delta x} \quad \textit{ne postoji,}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \sin \frac{1}{\Delta x} \quad \textit{ne postoji.}$$

Funkcija $f(x)$ ima izvod nad intervalom $I_1 = [a, b)$, $I_2 = (a, b]$, $I_3 = [a, b]$ ako:

- *funkcija ima izvod u svakoj tački (a, b)*
- *u tački a funkcija ima desni izvod, za intervale I_1 i I_3, piše se da je $f'(a) = f'_+(a)$*
- *u tački b funkcija ima levi izvod, za intervale I_2 i I_3, piše se da je $f'(b) = f'_-(b)$*

Primetimo da ako funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački x važi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \ \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x, \ \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

Može se desiti da funkcija ima izvod u svakoj tački intervala (a, b), da u tačakama a i b nema izvod, a da ima izvod nad zatvorenim intervalom $[a, b]$. Na primer, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \sin x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}x & , \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

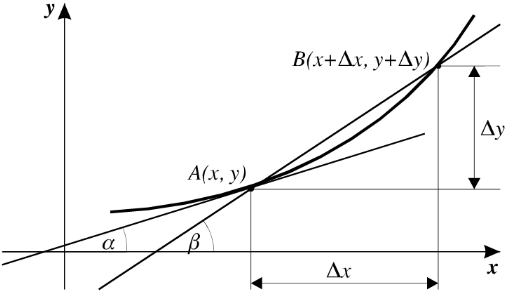
ima izvod $f'(x)$ nad intervalom $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ iako u krajnjim tačkama 0 i $\frac{\pi}{2}$ tog intervala ne postoji izvod, jer je

$$f'_-(0) = 0, \quad f'_+(0) = 1,$$

$$f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

Geometrijska interpretacija izvoda

$y = f(x)$ je neprekidna funkcija nad (a, b)



- A, B su tačke grafika, prava AB je sečica krive, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- ako $B \to A$ prava AB postaje tangenta krive u tački A
- ako je $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ugao koji tangenta zaklapa sa pozitivnim delom x-ose tada je $\operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$.

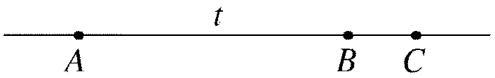
Geometrijska interpretacija izvoda

- ako je $f'(a) \neq 0$, jednačina tangente u tački $A(a, f(a))$ je
$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$
a jednačina normale u tački $A(a, f(a))$ je
$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$
- jednačina desne tangente u tački $A(a, f(a))$ je
$$y - f(a) = f'_+(a)(x - a),$$
a jednačina leve tangente u tački $A(a, f(a))$ je
$$y - f(a) = f'_-(a)(x - a),$$
- ako je ako je $f'(a) = 0$ jednačina tangente funkcije u tački $A(a, f(a))$ je $y = f(a)$, a jednačina normale je $x = a$.

Fizička interpretacija izvoda

Brzina i ubrzanje tačke

Neka se tačka kreće po pravoj tako da je jednačinom $s = f(t)$ data zavisnost pređenog puta od početne tačke A.



U trenutku t neka se tačka nalazi u B, a u trenutku $t + \Delta t$ u C. Pređeni put do trenutka t je $f(t)$, a do trenutka $t + \Delta t$ je $f(t + \Delta t)$. Srednja brzina v_s na putu BC je jednaka

$$v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Prirodno je definisati trenutnu brzinu te tačke u B kao graničnu vrednost srednje brzine kada C teži B. Drugim rečima, brzina $v(t)$ u B se definiše kao

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t),$$

ako ta granična vrednost postoji.

Slično, ako je u trenutku t data brzina $v = f(t)$, a u trenutku $t + \Delta t$ brzina $v = f(t + \Delta t)$, srednje ubrzanje na putu BC je jednako

$$a_s = \frac{\Delta v_s}{\Delta t},$$

pa je trenutno ubrzanje u tački B jednako

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_s}{\Delta t} = v'(t),$$

ako ta granična vrednost postoji.

Osobine izvoda

Teorema

Ako funkcije $u = u(x),\ v = v(x)$ *imaju izvod u tački* x, *tada i funkcije* $u \pm v$, uv, $\dfrac{u}{v}$ *(*$v(x) \neq 0$ *u datoj tački* x*) i* $c \cdot u$ *imaju izvod u tački* x *i važi da je:*

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$,
2. $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$,
3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$,
4. $[c\ u(x)]' = c\ u'(x),\ c = const.$

Izvod složene funkcije

Neka je data složena funkcija $y = f(u),\ u = g(x)$. *Ako* $g(x)$ *ima izvod u tački* x *i* $f(u)$ *ima izvod u tački* u, *tada je*

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(u)g'(x).$$

Izvod inverzne funkcije

Neka je $f(x)$ *neprekidna strogo monotona funkcija definisana na intervalu* (a, b) *i* $f^{-1}(x)$ *njena inverzna funkcija. Ako funkcija* $f(x)$ *ima izvod* $f'(x)$ *u tački* $x \in (a, b)$ *i* $f'(x) \neq 0$, *tada funkcija* $f^{-1}(x)$ *ima izvod u tački* $y = f(x)$ *i važi*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

$I \subset \mathbb{R},\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in I$

- postoji inverzna funkcija za $\varphi(t),\ t = \varphi^{-1}(x)$
- $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$ je definisana nad skupom $\{\varphi(t) : t \in I\}$

Tada je sa $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in I$ funkcija $f(x)$ zadata u parametarskom obliku i promenljivu t zovemo parametrom.

Izvod parametarski zadate funkcije

Neka je data funkcija $y = f(x)$ u parametarskom obliku $x = x(t)$, $y = y(t),\ t \in I$. Ako neprekidne funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ imaju izvode u tački $t \in (a, b)$ i ukoliko je $\varphi'(t) \neq 0$, tada funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački t i važi

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Logaritamski izvod

Neka je data funkcija $y = f(x)^{g(x)}, \quad f(x) > 0.$ *Tada je*

$$\ln y = g(x) \ln f(x),$$

pa je

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)},$$

odakle je

$$y' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

Primer

Odrediti prvi izvod funkcije $y = x^x$.

Diferencijabilnost. Diferencijal.

Funkcija $f(x)$ je definisana na D i $x \in D^\circ$. Priraštaj funkcije $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, $x + \Delta x \in D^\circ$ zavisi od priraštaja nezavisno promenljive Δx.

Definicija

Za funkciju $f(x)$ se kaže da je diferencijabilna u tački x ako se Δy može napisati u obliku

$$\Delta y = D\Delta x + \alpha \Delta x,$$

pri čemu $\alpha \to 0$ kada $\Delta x \to 0$, dok D ne zavisi od Δx.
Linearni deo priraštaja funkcije, $D\Delta x$, naziva se diferencijal funkcije $f(x)$ i obeležava se sa dy ili $df(x)$, tj.

$$dy = df(x) = D\Delta x.$$

- Ako je funkcija diferencijabilna u svakoj tački skupa A onda se kaže da je $f(x)$ diferencijabilna nad skupom A.
- Ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ ima izvod u svakoj tački skupa $X_1 \subseteq D^\circ$, tada za funkciju $f' : x \to f'(x)$, $x \in X_1$ kažemo da je izvodna funkcija funkcije f.

Primer

Za funkciju $f(x) = x^2$ je

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= (x+\Delta x)^2 - x^2 \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 \\ &= \underbrace{2x}_{D}\Delta x + \underbrace{\Delta x}_{\alpha}\Delta x, \end{aligned}$$

gde $D = 2x$ ne zavisi od Δx, a $\alpha = \Delta x \to 0$, $\Delta x \to 0$, pa je ova funkcija diferencijabilna.

Diferencijabilnost

Teorema

Potreban i dovoljan uslov da funkcija $f(x)$ bude diferencijabilna u tački x je da ima izvod u toj tački.

Dokaz. **Uslov je potreban.** Pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u tački x. Tada je

$$\Delta y = D\Delta x + \alpha\Delta x,$$

pri čemu $\alpha \to 0$ kada $\Delta x \to 0$. Sledi da je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (D + \alpha) = D.$$

Izvod postoji i to je baš D.

Uslov je dovoljan. Ako $f(x)$ ima izvod u tački, tj. postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

tada je količnik

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Sledi da je

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x,$$

što znači da je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u tački x.

Treba uočiti da $f'(x)$ ne zavisi od Δx. $\square$

- Dakle, diferencijal je dat obrascem $dy = f'(x)\Delta x$.
- Za funkciju $y = x$ je $dy = dx$ pa se i u opštem slučaju Δx zamenjuje sa dx, pa je

$$dy = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

  što je Lajbnicova oznaka za izvod.
- Izvod složene funkcije je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

- Izvod inverzne funkcije je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Invarijantnost oblika diferencijala

- Ako je $y = f(u),\ u = g(x)$ složena funkcija, tada je

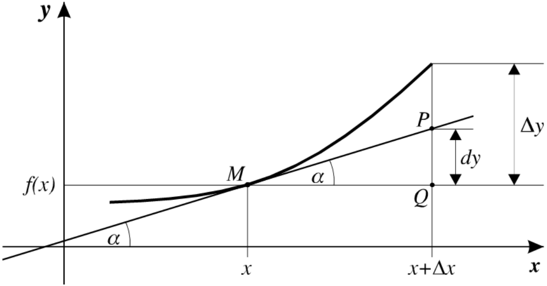
$$dy = d(f(g(x))) = (f \circ g)'(x)dx = f'(u)g'(x)dx$$

odnosno

$$dy = f'(u)du$$

Dakle, diferencijal ima osobinu invarijantnosti oblika, tj. diferencijal ima isti oblik i kada je u funkcija od x, kao što bi imao da je u nezavisna promenljiva.

Geometrijska interpretacija diferencijala



- Neka u proizvoljnoj tački $M(x, f(x))$ kriva $y = f(x)$ ima tangentu. Tada je

$$dy = f'(x)\Delta x = \mathrm{tg}\alpha\Delta x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{MQ}}\overline{MQ} = \overline{PQ},$$

tj. diferencijal dy je priraštaj ordinate tangente u tački $M(x, f(x))$ koji odgovara priraštaju argumenta Δx.

Osobine diferencijala

Osobine diferencijala

Ako su funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ diferencijabilne u tački x tada važi

1. $d(u(x) \pm v(x)) = du(x) \pm dv(x)$,
2. $d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x)$,
3. $d\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right) = \dfrac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)},\ v(x) \neq 0$
4. $d(c \cdot u(x)) = c \cdot du(x)$.

Primena diferencijala

Kako je

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x,$$

pri čemu $\alpha \to 0$ kada $\Delta x \to 0$, u određenom smislu priraštaj

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

možemo aproksimirati diferencijalom

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

kada $\Delta x \to 0$, tj.

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \quad (\Delta x \to 0).$$

Na osnovu toga sledi da je

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad (\Delta x \to 0).$$

Primer

Odrediti približno $\sqrt[3]{8,01}$.

Rešenje. Za funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *imamo da je*

$$\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Delta x, \quad \Delta x \to 0, x \neq 0.$$

Za $x = 8$ *i* $\Delta x = 0,01$ *dobijamo*

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8+0,01} &\approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} \cdot 0,01 \\ &= 2 + \frac{1}{1200} \\ &\approx 2 + 0,00083 = 2,00083.\end{aligned}$$

Izvodi višeg reda

- Izvodi višeg reda

Neka funkcija $y = f(x)$ ima izvod u svakoj tački skupa $X_1 \subset D^\circ$.
Njen izvod $f'(x)$ je funkcija nezavisne promenljive x, $x \in X_1$.
Ako ona ima izvod u nekoj tački $x \in X_1$ tada njen izvod $(f'(x))'$ nazivamo

drugi izvod ili izvod drugog reda funkcije $f(x)$ u tački x.

Slično se definišu ostali viši izvodi funkcije $y = f(x)$:

$$
\begin{aligned}
y & \overset{\text{def}}{=} f^0(x), \\
y' & = f'(x), \\
y'' & = (f'(x))', \\
& \vdots \\
f^{(n)}(x) & = (f^{(n-1)}(x))'.
\end{aligned}
$$

Izvodi višeg reda

- za parametarski zadatu funkciju $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in (a, b)$:

$$y''_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}$$

- za inverznu funkciju $x = f^{-1}(y)$:

$$x''_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x \cdot x'_y = -\frac{y''_x}{(y'_x)^2}\frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_x}{(y'_x)^3}$$

Diferencijali višeg reda

- Diferencijali višeg reda

Ako je funkcija $f(x)$ dva puta diferencijabilna nad $X_1 \subset D^\circ$ onda se diferencijal funkcije $y = f'(x)dx$ označava sa d^2y i naziva drugi diferencijal ili diferencijal drugog reda funkcije $f(x)$.

Shodno tome se $dy = f'(x)dx$ naziva diferencijal prvog reda ili prvi diferencijal.

• Važi da je $d^2f = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2$.

• Ako je funkcija $f^{(n-1)}(x)$, $n \geq 2$ diferencijabilna, tada se diferencijal funkcije $d^{n-1}y = f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}$ naziva diferencijal $n-$tog reda funkcije $f(x)$ i može da se pokaže da važi $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$.

Diferencijali višeg reda

Ako je $y = f(u)$, $u = u(x)$, gde su funkcije $y = f(u)$ i $u = u(x)$ dva puta diferencijabilne, tada je

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) \\ &= d(f'(u)du) \\ &= d(f'(u))du + f'(u)d(du) \\ &= d(f'(u))du + f'(u)d(u'(x)dx) \\ &= d(f'(u))du + f'(u)(u''(x)dx^2) \\ &= f''(u)du^2 + f'(u)d^2u, \end{aligned}$$

pa diferencijali višeg reda ne poseduju osobinu invarijantnosti oblika!