

Rekurzija

© Goodrich, Tamassia, Goldwasser

Katedra za informatiku, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

2023.

Rekurzija kao šablon

- **rekurzija**: kada funkcija poziva samu sebe
- klasičan primer: faktorijel

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (n - 1) \cdot n$$

- rekurzivna definicija:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{ako } n = 0 \\ n(n - 1)! & \text{inače} \end{cases}$$

Faktorijel pomoću rekurzije

```
def fact(n):  
    if n == 0:  
        return 1  
    else:  
        return n * fact(n-1)
```

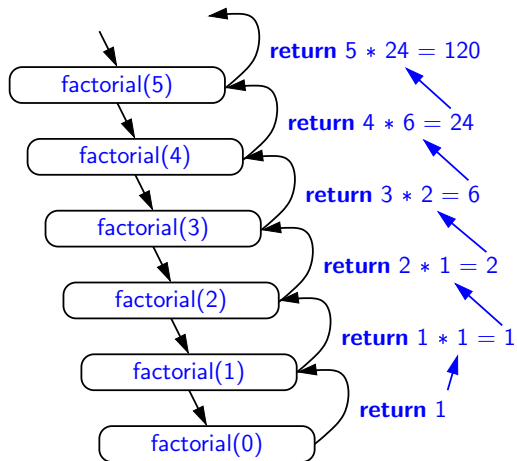
Sadržaj rekurzivne funkcije

- osnovni slučajevi
 - vrednosti ulaznih promenljivih za koje ne pravimo rekurzivne pozive
 - mora postojati bar jedan
- rekurzivni pozivi
 - poziv iste funkcije
 - svaki rekurzivni poziv bi trebalo definisati tako da predstavlja napredovanje prema osnovnom slučaju

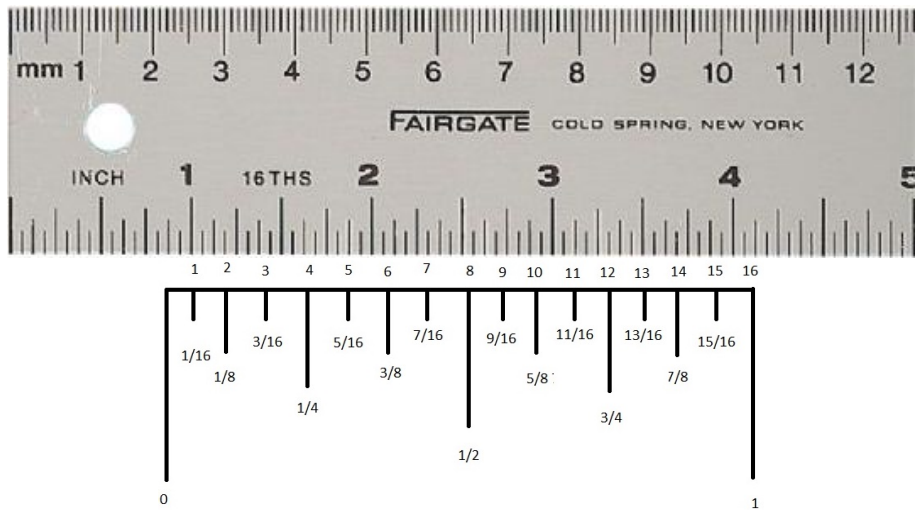
Vizuelizacija rekurzije

- **trag rekurzije**
 - pravougaonik za svaki rekurzivni poziv
 - strelica od pozivača ka pozvanom
 - strelica od pozvanog ka pozivaču sa rezultatom koji se vraća

Vizuelizacija rekurzije: faktorijel



Primer rekurzije: „engleski lenjir“



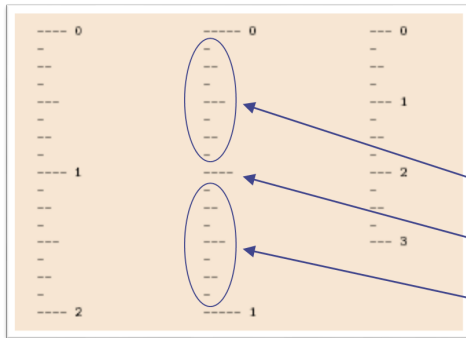
Primer rekurzije: „engleski lenjir“

- odštampati crtice i brojeve tako da se dobije izgled lenjira



Crtanje „engleskog lenjira“

- `drawTicks(length)`
- ulaz: dužina crtice
- izlaz: lenjir sa crticom date dužine u sredini i manji lenjiri sa leve i desne strane



`drawTicks(length)`

`if(length > 0) then`

`drawTicks(length - 1)`

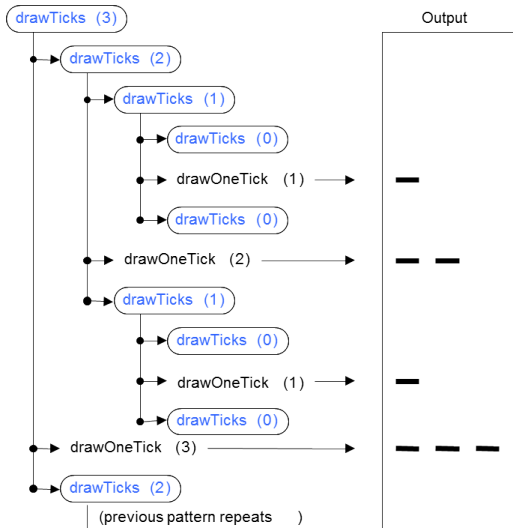
draw tick of the given length

`drawTicks(length - 1)`

Crtanje „engleskog lenjira“

- interval sa centralnom crticom dužine $L \geq 1$ sastoji se od
 - intervala sa centralnom crticom dužine $L - 1$
 - crtice dužine L
 - intervala sa centralnom crticom dužine $L - 1$

Crtanje „engleskog lenjira“



Crtanje „engleskog lenjira”: Python implementacija

```
def draw_line(tick_length, tick_label=''):
    """Draw one line with given tick length (followed by optional label)."""
    line = '-' * tick_length
    if tick_label:
        line += tick_label
    print(line)

def draw_interval(center_length):
    """Draw tick interval based upon a central tick length."""
    if center_length > 0:
        # recursively draw top ticks
        draw_interval(center_length - 1)
        # draw center tick
        draw_line(center_length)
        # recursively draw bottom ticks
        draw_interval(center_length - 1)

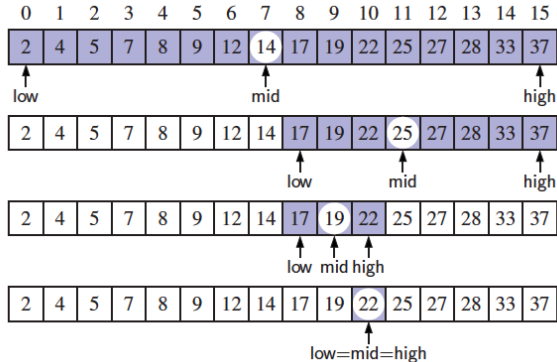
def draw_ruler(num_inches, major_length):
    """Draw English ruler with given number of inches, major tick length."""
    draw_line(major_length, '0')
    # draw inch 0 line
    for j in range(1, 1+num_inches):
        draw_interval(major_length - 1)
        # draw interior ticks for inch
        draw_line(major_length, str(j))
        # draw inch j line and label
```

Binarna pretraga

```
def binary_search(data, target, low, high):
    """Return True if target is found in indicated portion of a Python
    list. The search only considers the portion from data[low] to
    data[high] inclusive.
    """
    if low > high:
        return False                # interval is empty; no match
    else:
        mid = (low + high) // 2
        if target == data[mid]:    # found a match
            return True
        elif target < data[mid]:
            # recur on the portion left of the middle
            return binary_search(data, target, low, mid - 1)
        else:
            # recur on the portion right of the middle
            return binary_search(data, target, mid + 1, high)
```

Vizuelizacija binarne pretrage

- $\text{target} == \text{data}[\text{mid}]$ – našli smo ga
- $\text{target} < \text{data}[\text{mid}]$ – ponavljamo pretragu u levoj polovini
- $\text{target} > \text{data}[\text{mid}]$ – ponavljamo pretragu u desnoj polovini



Analiza binarne pretrage

- radi u $O(\log n)$ vremenu
- veličina preostale liste je $high - low + 1$
- posle jednog poređenja, to postaje

$$(mid - 1) - low + 1 = \left\lfloor \frac{low + high}{2} \right\rfloor \leq \frac{high - low + 1}{2}$$

$$high - (mid + 1) + 1 = high - \left\lfloor \frac{low + high}{2} \right\rfloor \leq \frac{high - low + 1}{2}$$

- \Rightarrow svaki rekurzivni poziv deli region pretrage na pola; prema tome, može biti najviše $\log n$ nivoa

Linearna rekurzija

- testiranje baznih slučajeva
 - početi sa testiranjem baznih slučajeva (mora biti bar jedan)
 - obrada baznog slučaja ne sme koristiti rekurziju
 - svaki mogući lanac rekurzivnih poziva **mora** se završiti dolaskom do baznog slučaja
- rekurzivno jednom
 - napraviti jedan rekurzivni poziv
 - možemo napraviti grananje sa odlukom da se izabere jedan od mogućih rekurzivnih poziva
 - svaki mogući rekurzivni poziv treba da se približi baznom slučaju

Primer linearne rekurzije

LinearSum(A, n)

Input: A : niz celih brojeva

Input: n : broj brojeva u nizu koje treba sabrati

Output: suma prvih n brojeva u A

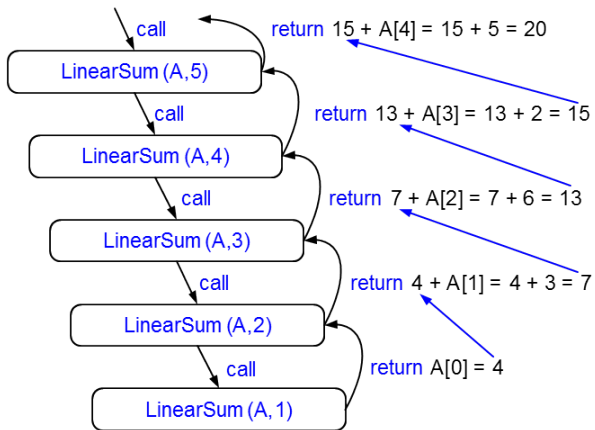
if $n = 1$ **then**

return $A[0]$

else

return $\text{LinearSum}(A, n - 1) + A[n - 1]$

Primer linearne rekurzije



Obrtanje redosleda u nizu

ReverseArray(A, i, j)

Input: A : niz brojeva

Input: i, j : nenegativni indeksi, $i < j$

Output: obrnut redosled u A počevši od indeksa i do indeksa j

if $i < j$ **then**

 swap $A[i], A[j]$

 ReverseArray($A, i + 1, j - 1$)

Definisanje elemenata za rekurziju

- prilikom dizajniranja rekurzivnih funkcija važno je definisati ih tako da je rekurzija jednostavna
- ponekad to znači da treba definisati dodatne parametre funkcije
- na primer, definisali smo $\text{ReverseArray}(A, i, j)$ umesto $\text{ReverseArray}(A)$

Definisanje elemenata za rekurziju

- Python implementacija

```
def reverse(S, start, stop):  
    """Obrni elemente u isečku S[start:stop]."""  
    # ako ima bar dva elementa  
    if start < stop - 1:  
        # zameni im mesta  
        S[start], S[stop-1] = S[stop-1], S[start]  
        # rekurzivno obrni ostatak  
        reverse(S, start+1, stop-1)
```

Stepenovanje

- funkciju za stepenovanje $p(x, n) = x^n$ možemo definisati rekurzivno:

$$p(x, n) = \begin{cases} 1 & \text{ako } n = 0 \\ x \cdot p(x, n - 1) & \text{inače} \end{cases}$$

- na ovaj način ćemo dobiti funkciju koja radi u $O(n)$ vremenu (jer pravimo n poziva)
- može li brže?

Stepenovanje

- možemo napraviti brži linearno rekurzivan algoritam pomoću ponavljanog kvadriranja:

$$p(x, n) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x = 0 \\ x \cdot p(x, \frac{n-1}{2})^2 & \text{ako je } x > 0 \text{ neparan} \\ p(x, n/2)^2 & \text{ako je } x > 0 \text{ paran} \end{cases}$$

- na primer:

$$2^4 = 2^{(4/2)^2} = (2^{4/2})^2 = (2^2)^2 = 4^2 = 16$$

$$2^5 = 2^{1+(4/2)^2} = 2(2^{4/2})^2 = 2(2^2)^2 = 2(4^2) = 32$$

$$2^6 = 2^{(6/2)^2} = (2^{6/2})^2 = (2^3)^2 = 8^2 = 64$$

$$2^7 = 2^{1+(6/2)^2} = 2(2^{6/2})^2 = 2(2^3)^2 = 2(8^2) = 128$$

Rekurzivno stepenovanje

Power(x, n):

Input: broj x i njegov stepen n

Output: vrednost x^n

if $n = 0$ **then**

return 1

if n je neparan **then**

$y \leftarrow \text{Power}(x, (n - 1)/2)$

{svakim pozivom polovimo n }

return $x \cdot y \cdot y$

else

$y \leftarrow \text{Power}(x, n/2)$

return $y \cdot y$

{promenljiva umesto duplog poziva funkcije}

„Repna“ rekurzija

- kada je rekurzivni poziv poslednji korak u funkciji
- primer: $\text{ReverseArray}(A, i, j)$
- lako se preradi u iterativni postupak

IterativeReverseArray (A, i, j)

Input: niz A i nenegativni indeksi i i j , $i < j$

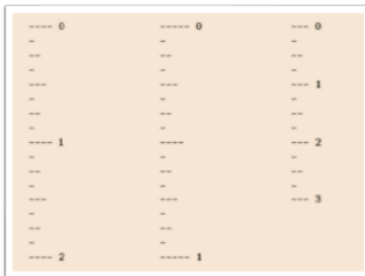
Output: obrnut redosled elemenata u A počevši od indeksa i do j

```

while  $i < j$  do
    swap  $A[i], A[j]$ 
     $i \leftarrow i + 1$ 
     $j \leftarrow j - 1$ 
    
```

Binarna rekurzija

- kada postoje **dva** rekurzivna poziva za svaki bazni slučaj
- primer: engleski lenjir



Binarna rekurzija: sumiranje elemenata

BinarySum(A, i, n)

Input: niz A i celi brojevi i i n

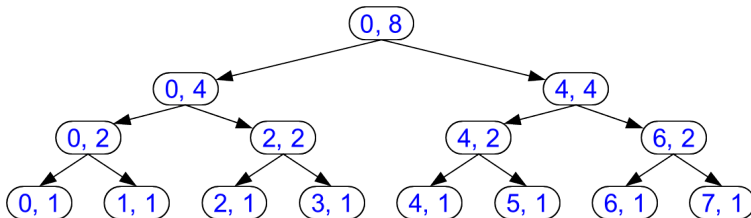
Output: zbir n brojeva iz A počevši od i -tog

if $n=1$ **then**

return $A[i]$

else

return $\text{BinarySum}(A, i, n/2) + \text{BinarySum}(A, i + n/2, n/2)$



Fibonačijevi brojevi

- definišu se rekurzivno:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \quad \text{za } i > 1$$

- rekurzivni algoritam (prvi pokušaj):

BinaryFib(k)

Input: nenegativan ceo broj k

Output: k -ti Fibonačijev broj F_k

if $k \leq 1$ **then**

return k

else

return BinaryFib($k - 1$) + BinaryFib($k - 2$)

Fibonačijevi brojevi

- neka je n_k broj rekurzivnih poziva funkcije **BinaryFib**(k):
 - $n_0 = 1$
 - $n_1 = 1$
 - $n_2 = n_1 + n_0 + 1 = 3$
 - $n_3 = n_2 + n_1 + 1 = 5$
 - $n_4 = n_3 + n_2 + 1 = 9$
 - $n_5 = n_4 + n_3 + 1 = 15$
 - $n_6 = n_5 + n_4 + 1 = 25$
 - $n_7 = n_6 + n_5 + 1 = 41$
 - $n_8 = n_7 + n_6 + 1 = 67$
- n_k se svaki drugi put više nego duplira!
- dakle, $n_k \geq 2^{k/2}$
- broj poziva raste **eksponencijalno**!

Fibonačijevi brojevi v2

- pomoću linearne rekurzije

LinearFib(k)

Input: pozitivan ceo broj k

Output: par Fibonačijevih brojeva (F_k, F_{k-1})

if $k = 1$ **then**

return $(k, 0)$

else

$(i, j) \leftarrow \text{LinearFib}(k - 1)$

return $(i + j, i)$

- ima samo $k - 1$ rekurzivnih poziva!

Višestruka rekurzija

- primer problema: zagonetke sabiranja
 - $pot + pan = bib$
 - $dog + cat = pig$
 - $boy + girl = baby$
- višestruka rekurzija
- potencijalno pravi puno rekurzivnih poziva
- ne samo jedan ili dva

Višestruka rekurzija

PuzzleSolve(k, S, U)

Input: ceo broj k , sekvenca S , skup U (skup svih elemenata)

Output: lista svih proširenja S dužine k korišćenjem elemenata iz U bez ponavljanja

for all $e \in U$ **do**

ukloni e iz U

{ e se sada koristi}

dodaj e na kraj S

if $k = 1$ **then**

test da li S predstavlja rešenje

if S predstavlja rešenje **then**

return 'Solution found:', S

else

PuzzleSolve($k - 1, S, U$)

dodaj e u U

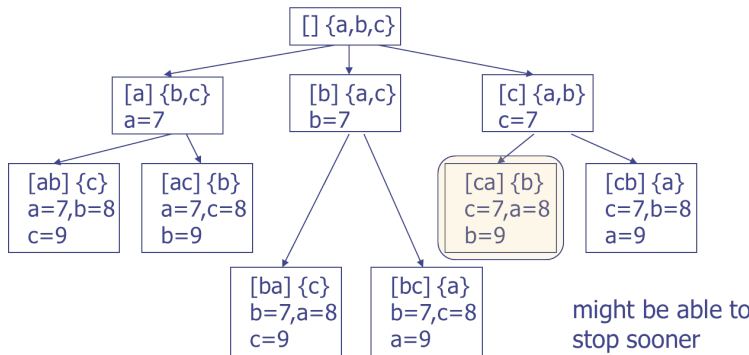
{ e se više ne koristi}

ukloni e sa kraja S

Višestruka rekurzija

$$cbb + ba = abc$$

$$799 + 98 = 897$$



Višestruka rekurzija

