

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

23. maj 2023.

Opšti pojmovi, definicije

- **Diferencijalna jednačina** - jednačina koja sadrži bar jedan izvod nepoznate funkcije jedne ili više promenljivih.
- **Obična diferencijalna jednačina** - nepoznata funkcija je funkcija jedne promenljive, **parcijalna diferencijalna jednačina** - nepoznata funkcija je funkcija više promenljivih.
- **Red diferencijalne jednačine** je red najvišeg izvoda nepoznate funkcije koji se javlja.
- **Sistem (običnih ili parcijalnih) diferencijalnih jednačina** je sistem jednačina kod kog svaka jednačina sadrži bar jedan izvod reda $n \in \mathbb{N}$ jedne od nepoznatih funkcija jedne ili više promenljivih, npr.

$$x' = 2x - 3xy, y' = -2x + 5xy, x = x(t), y = y(t).$$

Ako je broj nepoznatih funkcija jednak broju jednačina sistema, sistem je **određen** (naredni primer).

Opšti pojmovi, definicije

- Jednačina

$$tx'(t) + ty''(t) = t^2 - 1$$

može se smatrati **neodređenim** sistemom ($n = 2, m = 1$).

- **Opšti oblik** jednačine n -tog reda:

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 0.$$

- **Normalni oblik** jednačine n -tog reda:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

- Funkcija $y = f(x)$, definisana i n puta diferencijabilna u intervalu (a, b) je **rešenje** jednačine n -tog reda u opštem, tj. normalnom obliku, ako je za svako $x \in (a, b)$

$$G(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0,$$

odnosno

$$f^{(n)} = F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)).$$

Opšti pojmovi, definicije

- Rešenje je u **implicitnom obliku** ako je dato vezom $g(x, y) = 0$, npr. $x^2 + y^2 = r^2$ je **implicitno rešenje** jednačine $x + yy' = 0$.
- **Početni (Košijev) problem** - Pronaći rešenje jednačine

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

koje zadovoljava početni uslov

$$y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1},$$

pri čemu je x_0 proizvoljna tačka posmatranog intervala, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ su proizvoljni brojevi, $i = 0, \dots, n-1$.

- **Granični problem** - Problem drugog reda: naći rešenje jednačine $y = y(x)$ jednačine

$$y'' = F(x, y, y')$$

nad intervalom $[a, b]$ koje zadovoljava granični uslov

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$



$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y(\pi) = -1$$

je granični problem koji ima beskonačno mnogo rešenja.



$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y(\pi) = 2$$

je granični problem koji nema rešenje.



$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

je granični problem koji ima jedinstveno rešenje.

Opšti pojmovi, definicije

Modeli: izvod $\frac{dy}{dx}$ predstavlja veličinu promene funkcije $y(x)$ u zavisnosti od x , a sve što se u prirodi dešava je promena

- $y' = ky$, $y = y(x)$, k - proizvoljna konstanta - **Maltusov zakon rasta populacije**
- $y'' - 2xy' + 2py = x^2$, $y = y(x)$, p - proizvoljna konstanta - **Ermitova jednačina** čija su rešenja **talasne funkcije** kvantne mehanike
- $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u = (x, t)$ - **jednodimenzionalna jednačina provođenja toplote**
- $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$ - **jednačina matematičkog klatna** (L je dužina klatna, g je gravitaciona konstanta, θ je uglovno udaljenje od ravnotežnog položaja)

Opšti pojmovi, definicije

- $N(t)$ -broj jedinki posmatrane populacije u trenutku t ; ako smatramo da je veličina promene populacije srazmerna broju jedinki dobijamo **matematički model rasta populacije**:

$$N'(t) = kN(t), \quad k = \text{const.}$$

Tada je $N(t)$ rešenje početnog problema

$$N'(t) = kN(t), \quad N(t_0) = N_0 :$$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = kN &\Rightarrow \frac{dN}{N} = kdt \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int kdt \Rightarrow \ln N(t) = kt + c \\ &\Rightarrow N(t) = e^{kt+c} \Rightarrow N(t) = c_1 e^{kt} \end{aligned}$$

$$t = t_0 \Rightarrow N(t_0) = c_1 e^{kt_0}, \text{ tj. } c_1 = N_0 e^{-kt_0},$$

pa je rešenje posmatranog početnog problema

$$N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}.$$

Ukoliko matematički model pojave zadovoljava osobine:

- postoji rešenje početnog problema,
- rešenje početnog problema je jedinstveno,
- rešenje početnog problema neprekidno zavisi od početnih uslova

kaže se da je **problem korektno postavljen** u smislu Adamara.

- **Kvalitativna analiza** - ne samo nalaženje rešenja, već i proučavanje njegovih osobina na osnovu posmatrane jednačine
- ključna tačka postupka rešavanja bila je **integracija**, odatle se termin **integrala diferencijalne jednačine** koristi za njeno rešenje

Diferencijalne jednačine prvog reda

- Opšti oblik

$$G(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

- Normalni oblik

$$y' = F(x, y) \quad (2)$$

- x je promenljiva, $y = y(x)$ je nepoznata funkcija, y' je izvod po promenljivoj, F, G poznate funkcije.
- $y = f(x)$, definisana i diferencijabilna nad (a, b) je rešenje jednačine (1) odnosno (2) ako za svako $x \in (a, b)$ važi da je

$$G(x, f(x), f'(x)) = 0,$$

odnosno

$$f'(x) = F(x, f(x)).$$

Diferencijalne jednačine prvog reda

Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja

Neka je $F(x, y)$ neprekidna u zatvorenoj oblasti $G : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \alpha \leq y \leq \beta \end{cases}$ i
neka postoji $K > 0$ tako da u oblasti G važi

$$|F(x, y_2) - F(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1| \quad (\text{Lipšicov uslov}).$$

Tada postoji jedinstveno rešenje početnog problema

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in G,$$

koje je definisano nad intervalom $[a', b'] \subset [a, b]$. Rešenje je dato sa

$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$, gde je $\{y_n(x)\}$ niz sukcesivnih aproksimacija,
definisan rekurzivno sa

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a' = \max \left\{ a, x_0 - \frac{\beta - y_0}{M}, x_0 - \frac{y_0 - \alpha}{M} \right\}, \quad b' = \min \left\{ b, x_0 + \frac{\beta - y_0}{M}, x_0 + \frac{y_0 - \alpha}{M} \right\},$$

$$M = \sup_{(x, y) \in G} |f(x, y)| > 0$$

Diferencijalne jednačine prvog reda

- dovoljan uslov za konvergenciju niza je neprekidnost i Lipšicov uslov
- neprekidnost i jedinstvenost rešenja ne garantuju konvergenciju niza sukcesivnih aproksimacija
- ako niz konvergira ka nekom rešenju, ono ne mora biti jedinstveno
- u praksi se umesto Lipšicovog uslova zahteva da je u oblasti G

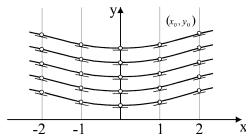
$$\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \leq M.$$

- metoda se koristi u teorijske, a manje u praktične svrhe

Diferencijalne jednačine prvog reda

Neka je funkcija $F(x, y)$ definisana i neprekidna u oblasti G i neka je $y = f(x)$ rešenje jednačine $y' = F(x, y)$ nad intervalom (a, b) .

- (x, y, y') je **linijski element**
- skup svih linijskih elemenata je **polje pravaca**
- tangenta rešenja $y = f(x)$ u svakoj tački (x, y) grafika ima koeficijent pravca y' dat sa $y' = F(x, y)$; svaka kriva sa ovom osobinom je **saglasna sa poljem pravaca**



- skup svih krivih saglasnih sa poljem pravaca naziva se **opšte rešenje jednačine**
- kriva koja zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, tj. prolazi kroz neku tačku (x_0, y_0) naziva se **partikularno rešenje**

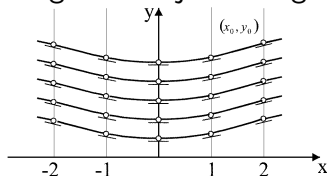
Diferencijalne jednačine prvog reda

Primer

Odrediti rešenje $y = y(x)$ diferencijalne jednačine $y' = x$.

U svim tačkama sa istom apscisom tangente imaju isti nagib:

x :	$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
y :	sve vrednosti (proizvoljne)
y' :	$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$



Lako se može zaključiti da su sva rešenja (opšte rešenje u smislu naše definicije) data sa

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + c,$$

gde je c proizvoljna konstanta, a partikularno koje prolazi kroz tačku (x_0, y_0) sa data sa

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2}.$$

Ojlerove poligonalne linije - aproksimacija rešenja

- podela konačnog intervala intervala (a, b) koji sadrži x_0 :
 $a = z_n < z_{n-1} < \dots < z_1 < z_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
- kroz (x_0, y_0) postavimo pravu $L_0 : y = y_0 + (x - x_0)F(x_0, y_0)$, sa nagibom $F(x_0, y_0)$
- ako je $\xi_1 = x_1$ ili z_1 dosta blizu x_0 , u tački ξ_1 ordinata prave L_0 data sa $y_1 = y_0 + (\xi_1 - x_0)F(x_0, y_0)$ ne odstupa mnogo od ordinate rešenja u toj tački
- kroz (ξ_1, y_1) postavimo pravu $L_1 : y = y_1 + (x - \xi_1)F(\xi_1, y_1)$
- nakon k koraka - Ojlerova poligonalna linija

$$L_k : y = y_k + (x - \xi_k)F(\xi_k, y_k),$$

$$(\xi_k \leq x \leq \xi_{k+1}, \xi_i = x_i) \text{ ili } (\xi_{k+1} \leq x \leq \xi_k, \xi_i = z_i), i = 1, 2, \dots, n$$

gde se y_{k+1} računa iz obrasca

$$y_{k+1} = y_k + (\xi_{k+1} - \xi_k)F(\xi_k, y_k), k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Jednačina koja razdvaja promenljive

Normalni oblik:

$$y' = f(x)g(y)$$

Teorema

Ako je $f(x)$ neprekidna nad $a < x < b$, a $g(y)$ neprekidna i različita od 0 nad $\alpha < y < \beta$ tada postoji **jedinstveno rešenje** jednačine $y' = f(x)g(y)$ koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (\alpha, \beta)$ i definisano je na nekoj okolini x_0 . Rešenje je dato sa

$$y(x) = G^{-1} \left(G(y_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt \right),$$

pri čemu je $G(u)$ primitivna funkcija za $\frac{1}{g(u)}$ nad (α, β) .

Opšte rešenje pod uslovom $g(y) \neq 0$ je dato obrascem

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + c.$$

O egzistenciji i jedinstvenosti rešenja ako je funkcija $g(y)$ neprekidna nad intervalom (α, β) , ali ne važi $g(y) \neq 0$ nad datim intervalom:

- Ako je $g(y_0) \neq 0$, zbog neprekidnosti $g(y)$ postoji interval $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$ koji sadrži y_0 sa osobinom

$$g(y)g(y_0) > 0 \text{ za svako } y \in (\alpha_1, \beta_1).$$

Zaključak teoreme ostaje, ali se (α, β) zamenjuje sa (α_1, β_1) .

- Ako je $g(y_0) = 0$, rešenje početnog problema je sigurno funkcija $y(x) = y_0$, ali to rešenje ne mora da bude jedinstveno (videti sledeći primer).

Jednačina koja razdvaja promenljive

Primer

Rešiti početni problem $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $y(1) = 0$.

Jedno rešenje početnog problema je $y(x) = 0$.

Iz $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$ zbog konvergencije nesvojstvenog integrala

$$\int_{(0,y(x))} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}} \text{ za } y(x) > 0, \text{ odnosno } \int_{(y(x),0)} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}} \text{ za } y(x) < 0,$$

da je

$$\int_0^{y(x)} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}} = \int_1^x dt, \text{ odnosno } \sqrt[3]{u}|_0^{y(x)} = t|_1^x.$$

Sledi da je $\sqrt[3]{y(x)} = x - 1$, odnosno $y(x) = (x - 1)^3$, pa dati problem ima najmanje dva rešenja.

Jednačina koja razdvaja promenljive

Primer

Naći rešenje jednačine $y' = x(y - 1)^2$ koje prolazi kroz tačku $(0, 1)$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{(y-1)^2} = x dx &\Rightarrow -\frac{1}{y-1} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y-1 = -\frac{2}{x^2 + 2c} \\ &\Rightarrow y(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + 2c}\end{aligned}$$

Uzimajući u obzir početni uslov dobijamo $1 = 1 - \frac{2}{2c}$, tj. $0 = \frac{1}{c}$ (konstanta u "opštem" rešenju ne može da se odredi).

Ova situacija je nastupila jer nesvojstveni integral

$$\int_{(1,y)} \frac{dy}{(y-1)^2} \text{ za } y > 1, \text{ odnosno } \int_{(y,1)} \frac{dy}{(y-1)^2} \text{ za } y < 1$$

divergira. Rešenje problema je $y(x) = 1$.

Homogena diferencijalna jednačina

Normalni oblik: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, $f(t)$ je neprekidna funkcija nad (a, b) ;

smenom: $\frac{y}{x} = u$, $y' = u + xu'$ svodi se na jednačinu $u' = \frac{f(u) - u}{x}$ koja razdvaja promenljive.

Ako je $f(u) - u \neq 0$ nad intervalom (a, b) tada kroz svaku tačku (x_0, y_0) oblasti $G : \begin{cases} a < \frac{y}{x} < b \\ x > 0 \end{cases}$ ili $G : \begin{cases} a < \frac{y}{x} < b \\ x < 0 \end{cases}$ prolazi samo jedno rešenje $y(x) = xu(x)$ definisano za svako x za koje je

$$\text{ili } \lim_{y \rightarrow \alpha^+} G(y) < G(y_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt < \lim_{y \rightarrow \beta^-} G(y)$$

$$\text{ili } \lim_{y \rightarrow \beta^-} G(y) < G(y_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt < \lim_{y \rightarrow \alpha^+} G(y),$$

gde je $u(x)$ dato sa $\int_{u_0}^{u(x)} \frac{dt}{f(t) - t} = \ln \left| \frac{x}{x_0} \right|$, $u_0 = \frac{y_0}{x_0}$.

Homogena diferencijalna jednačina

Ako je $f(u) - u = 0$ za neko $u \in (a, b)$:

- Ako je $f(u_0) \neq u_0$, $\left(u_0 = \frac{y_0}{x_0}\right)$, zbog neprekidnosti funkcije $f(u) - u$ postoji interval $(a_1, b_1) \subset (a, b)$, koji sadrži tačku u_0 , tako da je

$$(f(u) - u)(f(u_0) - u_0) > 0 \text{ za svako } u \in (a_1, b_1)$$

pa svi zaključci važe nad podintervalom (a_1, b_1) intervala (a, b) .

- Ako je **$f(u) - u = 0$ za svako $u \in (a, b)$** , jednačina glasi $y' = \frac{y}{x}$, a to je jednačina koja razdvaja promenljive.
- Ako je $f(u_0) = u_0$, $\left(u_0 = \frac{y_0}{x_0}\right)$, rešenje početnog problema je sigurno funkcija $y(x) = u_0 x$, $\left(y'(x) = u_0 = f\left(\frac{u_0 x}{x}\right) = f(u_0)\right)$. Ovo rešenje ne mora da bude jedinstveno.

Homogena diferencijalna jednačina

Napomena

Opšte rešenje uz pretpostavku $f(u) - u \neq 0$ dato je obrascem $\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln cx \quad (u = \frac{y}{x}), \quad y = y(x),$ a partikularno se dobija određivanjem c iz početnog uslova $y(x_0) = y_0$. Gornji integral mora da postoji nad posmatranim intervalom!

Primer

Jednačina $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, gde su $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ realni brojevi, a $f(t)$ neprekidna funkcija nad intervalom (a, b) , svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive ili na homogenu.

- Ako je $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, jednačina se smenom

$$a_1x + b_1y + c_1 = t \text{ ili } a_2x + b_2y + c_2 = t$$

svodi na jednačinu koja razdvaja promenljive.

Homogena diferencijalna jednačina

- Ako je $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, smenom

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta$$

gde su α i β (jedinstvena!) rešenja sistema

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$$

dobija se

$$\begin{aligned} Y' = y' &= f \left(\frac{a_1X + a_1\alpha + b_1Y + b_1\beta + c_1}{a_2X + a_2\beta + b_2Y + b_2\beta + c_2} \right) \\ &= f \left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y} \right) = f \left(\frac{a_1 + b_1 \frac{Y}{X}}{a_2 + b_2 \frac{Y}{X}} \right) \\ &= g \left(\frac{Y}{X} \right). \end{aligned}$$

Linearna diferencijalna jednačina

Opšti oblik:

$$y' + f(x) y = g(x)$$

Teorema

Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ **neprekidne** nad intervalom (a, b) tada postoji **jedinstveno** rešenje linearne diferencijalne jednačine koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ i definisano je nad (a, b) u obliku

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x f(t)dt} \left(y_0 + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^t f(u)du} g(t)dt \right).$$

- **smena:** $y(x) = u(x) \cdot v(x)$

Bernulijeva jednačina

Opšti oblik:

$$y' + f(x)y = g(x)y^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

- $\alpha = 0$ - linearna diferencijalna jednačina
- $\alpha = 1$ - jednačina koja razdvaja promenljive
- **smena**: $z(x) = (y(x))^{-\alpha+1}$, $z'(x) = (1 - \alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x)$

Svodi se na linearnu diferencijalnu jednačinu

$$z'(x) + (1 - \alpha)f(x)z(x) - (1 - \alpha)g(x) = 0$$

Ako su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne nad (a, b) , tada kroz svaku tačku (x_0, z_0) , gde je $x_0 \in (a, b)$, $z_0 \in \mathbb{R}$, prolazi jedinstveno rešenje definisano nad (a, b) . Kako se zbog $\alpha \in \mathbb{R}$ mora pretpostaviti da je $y > 0$, rešenje je u opštem slučaju definisano na najvećem podintervalu (a_1, b_1) od (a, b) kom pripada x_0 i u kom je $z(x) > 0$.

Šta je jednostruko povezana oblast?

Definicija

Ako je $D = I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ i ako je $\vec{r}: I \rightarrow X_0$ neprekidna funkcija, tada skup tačaka

$$L = \{\tau(t) : t \in I\}$$

zovemo *kriva* ili *luk* u prostoru, odnosno *hodograf vektorske funkcije* \vec{r} .

- Ako je $M((x(a), y(a), z(a))) \equiv N(x(b), y(b), z(b))$ za krivu L kažemo da je *zatvorena*, tj. da je luk L zatvoren.
- Ako sve tačke krive L leže u jednoj ravni, onda kažemo da je L *ravna kriva*.

Šta je jednostruko povezana oblast?

Definicija

Ako je (X, d) metrički prostor, **spojnicom (lukom)** u prostoru X nazivamo svako neprekidno preslikavanje $s : I \rightarrow X$ intervala $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ u prostor X . Ako su tačke $a = s(0)$ i $b = s(1)$ različite, tada kažemo da spojnica s **povezuje tačke** a i b .

Tvrđenje

Skup $L \subset \mathbb{R}^3$ je kriva ako i samo ako je spojnica.

Definicija

Za skup $\emptyset \neq A \subset X$ kažemo da je **povezan (lučno povezan)** u metričkom prostoru (X, d) , ako za svake dve različite tačke $a, b \in A$, postoji spojnica $s : I \rightarrow A$ koja povezuje tačke a i b . Ako je skup X povezan u metričkom prostoru (X, d) , tada kažemo da je metrički prostor (X, d) **povezan**.

Šta je jednostruko povezana oblast?

Definicija

Ako je skup $A \subset X$ istovremeno otvoren i povezan u metričkom prostoru (X, d) i $A_1 \subset A^*$, tada za skup $A \cup A_1$ kažemo da je **oblast**. Specijalno, ako je $A_1 = \emptyset$, tada se za A kaže i **otvorena oblast**, a ako je $A_1 = A^*$, tada se za $A \cup A_1 = A \cup A^* = \bar{A}$ kaže i **zatvorena oblast**.

Definicija

Za skup $L \subset E = \mathbb{R}^3$ kažemo da je **Žordanova^a kriva** ili **Žordanov luk sa krajevima** ako:

- 1°) postoji interval $I = [a, b]$ i preslikavanje $\tau : I \rightarrow E$, tako da je
$$L = \{\tau(t) : t \in I\};$$
- 2°) τ je bijektivno preslikavanje intervala I na L ;
- 3°) τ je neprekidno preslikavanje.

Tačke $A = \tau(a)$, $B = \tau(b)$ zovemo **krajevi krive** ili **luka L** .

^aŽordan, K. (Camil Jordan, 1838-1922) - francuski matematičar

Šta je jednostruko povezana oblast?

Ako umesto 2°) uzmemo da važi

2*) τ je bijekcija skupa $[a, b)$ na L i $\tau(a) = \tau(b)$, onda kažemo da je L **zatvorena Žordanova kriva** ili **zatvoren Žordanov luk**.

Tvrđenje

Ako je $L_1 = \{M(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, tada je kriva L zatvorena Žordanova kriva ako i samo ako postoji preslikavanje $f : L_1 \rightarrow L$, tako da važi

- 1) f je bijektivno preslikavanje skupa L_1 na L ;*
- 2) f je neprekidno preslikavanje;*
- 3) $f^{-1} : L \rightarrow L_1$ je neprekidno preslikavanje.*

Šta je jednostruko povezana oblast?

Tvrđenje

Neka je $L \subset \tau = \mathbb{R}^2$ ravna zatvorena Žordanova kriva. Tada

- 1) $\mathbb{R}^2 \setminus L = \Omega_1 \cup \Omega_2$, gde su Ω_1 i Ω_2 dve disjunktne otvorene oblasti;
- 2) $L = \Omega_1^* = \Omega_2^*$;
- 3) Jedna od oblasti, npr. uzmimo da je to Ω_1 , je ograničen skup i nju zovemo **unutrašnjost krive L** , dok je druga Ω_2 neograničen skup i nju zovemo **spoljašnjost krive L** .

Za ravnu oblast $G \subset \tau = \mathbb{R}^2$ kažemo da je **jednostruko povezana** ako unutrašnjost svake Žordanove krive $L \subset G$ pripada oblasti G .

Jednačina totalnog diferencijala

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

je jednačina totalnog diferencijala ako postoji funkcija $F(x, y)$ takva da je

- $dF(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$
- $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$

Teorema

*Neka su $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ neprekidne u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti G i $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Da bi jednačina $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ bila jednačina totalnog diferencijala **potrebno je i dovoljno** da bude za svako $(x, y) \in G$*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Ako oblast nije jednostruko povezana, tvrđenje ne mora da važi!

Integracioni množitelj

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

Da li postoji funkcija $h(x, y) \neq 0$ takva da je diferencijalna jednačina

$$h(x, y)P(x, y)dx + h(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

jednačina totalnog diferencijala, tj. $\frac{\partial(hP)}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial(hQ)}{\partial x}(x, y)$?

$$\frac{1}{h} \left(P \frac{\partial h}{\partial y} - Q \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$h(x, y)$ - **integracioni množitelj** (funkcija koja ima u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti G neprekidne parcijalne izvode, zadovoljava gornji uslov i različita je od nule u G)

Klairova jednačina

$$y = xy' + f(y')$$

Tvrđenje

neka funkcija $f(t)$ ima nad intervalom (a, b) neprekidan drugi izvod koji je različit od nule i neka je $\varphi(t)$ inverzna funkcija od $-f'(t)$.

Tada su rešenja jednačine $y = xy' + f(y')$ funkcije

- $y = xc + f(c), \quad c \in (a, b)$ (c je konstanta)
- $y = x\varphi(x) + f(\varphi(x))$ (tzv. singularno rešenje)
definisano nad intervalom (α, β) , gde je $\alpha = \inf_{t \in (a, b)} \{-f'(t)\}$ ako infimum postoji, u suprotnom je $\alpha = -\infty$ i $\beta = \sup_{t \in (a, b)} \{-f'(t)\}$ ako supremum postoji, u suprotnom je $\beta = \infty$
- svaka kriva sastavljena od proizvoljnog luka AB krive i na nju nastavljenih tangenata u tačkama A i B .

Lagranžova jednačina

$$y = xf(y') + g(y')$$

Uzmimo $p = y'$, tj. $dy = p dx$. Dobijamo $y = xf(p) + g(p)$, a odavde diferenciranjem $p dx = dy = (xf'(p) + g'(p))dp + f(p)dx$, tj. $(f(p) - p)dx + (xf'(p) + g'(p))dp = 0$.

- $f(p) - p \neq 0 \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x + \frac{g'(p)}{f(p) - p},$

što je linearna jednačina, iz koje dobijamo $x = x(p)$, što sa $y(p) = x(p)f(p) + g(p)$ predstavlja rešenje Lagranžove jednačine u parametarskom obliku.

- Ako jednačina $f(p) - p = 0$ ima rešenja i ako je jedno rešenje $p = c$, tada je rešenje jednačine i $y = cx + g(c)$.
- Ako je $f(p) - p = 0$ za svako p , Lagranžova jednačina postaje $y = xy' + g(y')$ (Klero-ova).

(ovo je spec. slučaj opšteg postupka uvođenja parametra)