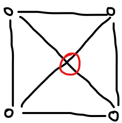
Вежбе 12

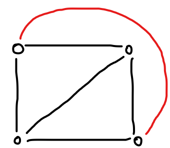
-Планарни графови-

Граф G је ПЛАНАРАН ако се МОЖЕ нацртати у равни тако да ГРАНЕ НЕМАЈУ ЗАЈЕДНИЧКИХ ТАЧАКА осим чворова графа.

K_4



Међутим, K_4 је планаран граф јер се може нацртати и на следећи начин



За повезане планарне графове важи Ојлерова формула $n-e+r=2$, где је

$n=|V(G)|$ - број чворова

$e=|E(G)|$ - број грана

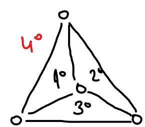
r - број повезаних области на које планарни граф G дели раван

Ознаке: r (regions) или f (faces)

- Неповезани графови: $n-e+r = 1+\omega(G)$

Данас на вежбама радимо искључиво са повезаним графовима

Пример: Представимо K_4 на следећи начин



$n=4, e=6, r=4$

(Око сваког планарног графа имамо једну неограничену, спољашњу област)

Важи $n-e+r = 4-6+4 = 8-6 = 2$

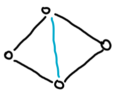
Граф G је **МАКСИМАЛАН планаран** $\iff$

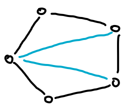
1° G је планаран

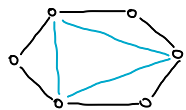
2° $G + uv$ је непланаран, $\forall\, uv \notin E(G)$

Све области у максималном планарном графу G су **троуглови**.

Претпоставимо да је нека област у максималном планарном графу k-тоугао. Сада повлачењем $k-3$ додатне дијагонале, посматрани k-тоугао можемо поделити на $k-2$ троугла. Како смо графу G додали нове гране које нису нарушиле планарност, граф G није могао бити планаран.

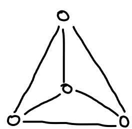






<u>пример:</u>

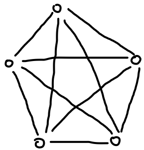
K_4 је максималан планаран граф



Спољашња област графа K_4 је такође троугао (на рубу области су 3 чвора)

T: Ако је G планаран граф са $n \geq 3$ чворова и e грана, тада је $e \leq 3n-6$.

За максималан планаран граф важи $e = 3n-6$.



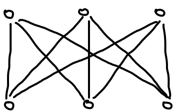
$n = 5$

$e = \binom{5}{2} = 10$

$3n-6 = 3\,5-6 = 9 < 10$

$\Rightarrow K_5$ није планаран

T: Ако је G планаран граф са $n \geq 3$ чворова и e грана, који не садржи контуре дужине 3, тада важи $e \leq 2n-4$.



$n = 6$

$e = 3 \cdot 3 = 9$

$2n-4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8 < 9$

$\Rightarrow K_{3,3}$ није планаран

1. Граф G има 1000 чворова и 3000 грана. Да ли је G планаран?

Нека је $|V(G)| = n = 1000$

$|E(G)| = e = 3000$

Знамо да за планарне графове важи $e \leq 3n - 6$

$3n - 6 = 3 \cdot 1000 - 6 = 2994 < 3000 = e$

$\Rightarrow$ Граф G није планаран

2. Да ли постоји 5-регуларан планаран граф са 10 чворова?

$n = 10$

5-регуларан: $d(v) = 5, \forall v \in V$

основна теорема теорије графова:

$$2e = \sum_{v \in V} d(v) = 10 \cdot 5$$

$$\Rightarrow e = 25$$

Уколико је граф планаран, треба да важи: $e \leq 3n - 6$

$$25 \leq 3 \cdot 10 - 6$$

$$25 \leq 24 \; ↯$$

$\Rightarrow$ Не постоји 5-регуларан планаран граф са 10 чворова.

3. Колико чворова има планаран 4-регуларан граф са 10 области?

4-регуларан: $d(v)=4,\ v\in V$

$r=10$

Нека је n број чворова у графу.

основна теорема:

$$2e=\sum_{v\in V} d(v)=4n$$

$$\Rightarrow e=2n$$

Ојлерова формула

$$n-e+r=2$$

$$n-2n+10=2$$

$$\Rightarrow n=8$$

4. Ако је G планаран граф са мање од 12 чворова, доказати да је $\delta(G) \leq 4$.

Претпоставимо супротно, $\delta(G) > 4$, тј. $d(v) \geq 5, \forall v \in V$

Сада је $2e = \sum_{v \in V} d(v) \geq 5n \Rightarrow e \geq \frac{5n}{2}$

Пошто је G планаран, важи $e \leq 3n-6$

$$\frac{5n}{2} \leq e \leq 3n-6$$

Одавде је $\frac{5n}{2} \leq 3n-6$

$$5n \leq 6n-12$$

$n \geq 12$ $\lightning$ (услов задатка је $n<12$)

$\Rightarrow$ За граф G важи $\delta(G) \leq 4$.

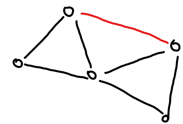
5. Ако је G планаран граф са мање од 30 грана, доказати да је $\delta(G) \leq 4$. (домаћи)

6. Ако је G максималан планаран граф са $n \geq 4$ чворова, доказати да је

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 = n_7 + 2n_8 + \cdots + (k-6)n_k + 12,$$

где је n_i број чворова степена i, за $i = 1, 2, \ldots, k = \Delta(G)$.

G је максималан планаран: $e = 3n-6$



основна теорема: $2e = \sum_{v \in V} d(v) = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \ldots + kn_k$

У максималном планарном графу је $n = n_3 + n_4 + \ldots + n_k$ (видети доказ на следећој страни)

$\Rightarrow 2e = 3n_3 + 4n_4 + \ldots + kn_k$

$2(3n-6) = 3n_3 + 4n_4 + \ldots + kn_k$

$6(n_3 + n_4 + \ldots + n_k) - 12 = 3n_3 + 4n_4 + \ldots + kn_k$

$6n_3 + 6n_4 + 6n_5 + \cancel{6n_6} + 6n_7 + 6n_8 + \ldots + 6n_k - 12 = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \cancel{6n_6} + 7n_7 + 8n_8 + \ldots + kn_k$

$\Rightarrow 3n_3 + 2n_4 + n_5 = n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \ldots + (k-6)n_k + 12$

* Нека је G максималан планаран граф са $n \geq 4$ чворова. Тада је степен сваког чвора у графу ≥ 3, тј. $\delta(G) \geq 3$.

Посматрајмо произвољан чвор v у максималном планарном графу G.

Граф $G-v$ сада има $n-1$ чвор и $|E(G)| - d(v)$ грана

Како је граф G био планаран, и граф $G-v$ је такође планаран и важи

$$|E(G-v)| \leq 3|V(G-v)| - 6$$

$$|E(G)| - d(v) \leq 3(n-1) - 6 = 3n-9$$

G максималан планаран граф : $|E(G)| = 3n-6$

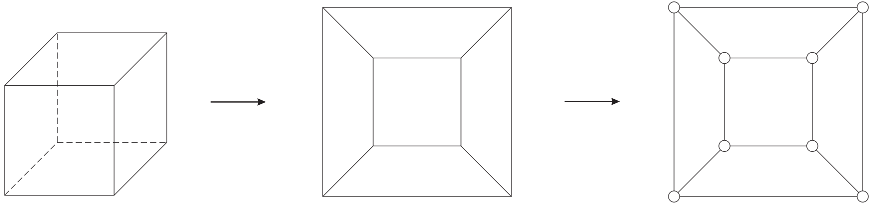
Сада је

$$3n-6-d(v) \leq 3n-9$$

$$\Rightarrow d(v) \geq 3$$

Како је чвор v био произвољан чвор закључујемо да је $\delta(G) \geq 3$.

Пројекцијом полиедра на раван добија се планаран граф



темена полиедра → чворови

ивице (странице) полиедра → гране

пљосни (стране) полиедра → области

7. Из сваког темена полиедра излазе по три ивице, а пљосни су искључиво петоуглови, шестоуглови и седмоуглови којих има редом r_5, r_6 и r_7. Доказати да је $r_5 - r_7 = 12$.

Нека је планарни граф G добијен пројекцијом датог полиедра на раван.

G је 3-регуларан граф

$r = r_5 + r_6 + r_7$

основна теорема:

$2e = \sum d(v) = 3n \Rightarrow n = \frac{2}{3}e$

Ојлерова формула:

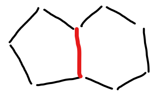
$r - e + n = 2$

$r_5 + r_6 + r_7 - e + \frac{2}{3}e = 2$

$r_5 + r_6 + r_7 - \frac{e}{3} = 2 \;/\cdot 6$

$6r_5 + 6r_6 + 6r_7 - 2e = 12$

$\Rightarrow 2e = 6r_5 + 6r_6 + 6r_7 - 12$



За планарне графове важи

$2e = 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + \dots + kr_k$

Уколико бројимо гране помоћу области, сваку грану ћемо бројати 2 пута, пошто је свака грана заједничка грана за две суседне области планарног графа.

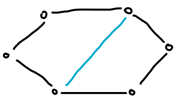
У нашем графу важи $2e = 5r_5 + 6r_6 + 7r_7$

$6r_5 + \cancel{6r_6} + 6r_7 - 12 = 5r_5 + \cancel{6r_6} + 7r_7$

$\Rightarrow r_5 - r_7 = 12$

8. Ако је G бипартитан планаран граф са n чворова и e грана, доказати да је $e \leq 2n - 4$.

Посматрајмо максималан планаран бипартитан граф $G(X,Y)$.
Најмања контура у неком бипартитном графу може бити контура дужине 4 (јер бипартитни графови не садрже непарне контуре).



Уколико би G садржао контуру веће дужине од 4, повлачењем одређених тетива бисмо могли да додамо нове гране које неће сећи ниједну од претходних грана и које неће нарушити услов да је G бипартитан, па граф није могао бити максималан планаран.

$\Rightarrow$ Све области максималног планарног бипартитног графа су четвороуглови, тј. $r = r_4$.

Сада је $2e = 4r$

Ојлерова формула:

$n - e + r = 2 \;/\cdot 2$

$2n - 2e + 2r = 4$

$2n - 2e + e = 4$

$\Rightarrow e = 2n - 4$

Максималан планаран бипартитан граф има $e = 2n - 4$ гране.

$\Rightarrow$ За остале бипартитне планарне графове тада важи $e \leq 2n - 4$.

9. Ако је G планаран граф такав да је $\delta(G) \geq 5$, доказати да G има бар 12 чворова степена 5.

Доказујемо $n_5 \geqslant 12$.

Из услова $\delta(G) \geqslant 5$ добијамо $n = n_5 + n_6 + n_7 + \ldots + n_k$, где је $k = \Delta(G)$

основна теорема: $2e = \sum_{v \in V} d(v) = 5n_5 + 6n_6 + 7n_7 + \ldots + kn_k$

Пошто је G планаран важи $e \leq 3n - 6 \mid \cdot 2$

$$2e \leq 6n - 12$$

Сада је

$$5n_5 + \cancel{6n_6} + 7n_7 + \ldots + kn_k \leq 6n_5 + \cancel{6n_6} + 6n_7 + \ldots + 6n_k - 12$$

$$n_5 \geqslant 12 + \underbrace{n_7 + 2n_8 + \ldots + (k-6)n_k}_{\geqslant 0 \text{ јер је } n_i \geqslant 0,\ \forall i}$$

Добијамо $n_5 \geqslant 12$.

10. Нека је G планаран граф са бар 4 чвора. Доказати да у G постоје бар четири чвора чији је степен ≤ 5.

Нека је G' максималан планаран граф добијен од графа G додавањем грана.

Нека је $e' = |E(G')|$ (јасно $n' = n$)

„мали" степени: 3, 4, 5 — k чворова

„велики" степени: ≥ 6 — $n-k$ чворова

G' максималан планаран: $e' = 3n-6$ и $\delta(G') \geq 3$

Означимо са k број чворова степена 3, 4 и 5 у графу G'

основна теорема $2e' = \sum_{v\in V(G')} d_{G'}(v) \geq 3k + 6(n-k) = 6n-3k$

$$2(3n-6) \geq 6n-3k$$

$$6n-12 \geq 6n-3k \Rightarrow k \geq 4$$

Добили смо да граф G' има $k \geq 4$ чворова степена ≤ 5 (чворови са степеном 3, 4 и 5).

Како је G подграф графа G', G ће имати бар k ($k \geq 4$) чворова степена ≤ 5.

(Граф G се сада добија уклањањем додатих грана из G', па број „добрих" чворова графа G може бити само већи или једнак од броја „добрих" чворова графа G'.)

11. Нека је G повезан планаран граф такав да је $\delta(G) \geq 3$. Доказати да најмање две области графа G имају највише 5 ивица.

Доказујемо $r_3+r_4+r_5 \geq 2$

Претпоставимо супротно, да области са највише 5 ивица у G имамо највише једну, тј. да важи $r_3+r_4+r_5 \leq 1$.

Сада је $r = r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+\dots+r_k \leq 1+r_6+r_7+\dots+r_k$

Даље је $2e = \underbrace{3r_3+4r_4+5r_5}_{0,3,4,5} + \underbrace{6r_6+7r_7+\dots+kr_k}_{\geq 6\cdot(r-1)} \geq 6\cdot(r-1)$ *

* Можемо направити и прецизнију оцену $2e \geq 3+6(r-1)$, али ћемо и помоћу посматране оцене добити контрадикцију

$2e \geq 6r-6$

$e \geq 3r-3 \Rightarrow 3r \leq e+3$

Ојлерова формула $n-e+r=2 \;/\cdot 3$

$6 = 3n-3e+3r \leq 3n-3e+e+3 = 3n-2e+3$

$\Rightarrow 2e \leq 3n-3$

Са друге стране због услова $\delta(G) \geq 3$ из основне теореме добијамо

$2e = \sum_{v\in V} d(v) \geq 3n$ ↯ (Добили смо $2e \leq 3n-3$)

$\Rightarrow$ Број области са највише 5 ивица мора бити ≥ 2.

12. Ако је G граф са 11 чворова, доказати да бар један од графова G и $\overline{G}$ није планаран.

Нека је $n = |V(G)| = |V(\overline{G})|$, $e = |E(G)|$, $e' = |E(\overline{G})|$

Претпоставимо супротно, да су и граф G и граф $\overline{G}$ планарни

G планаран: $e \le 3n-6$

$\overline{G}$ планаран: $\underline{e' \le 3n-6}$

$$e + e' \le 6n - 12$$

$$\binom{n}{2} \le 6n - 12$$

$n = 11$: $\binom{11}{2} \le 6 \cdot 11 - 12$

$$55 \le 54 \quad \lightning$$

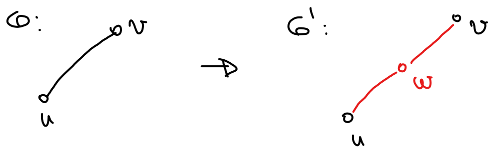
$\Rightarrow$ Није могуће да и G и $\overline{G}$ буду оба планарна.

13. Ако је G граф са n чворова и притом важи $n^2 - 13n + 24 > 0$ доказати да бар један од графова G и $\overline{G}$ није планаран. (домаћи)

Сваки подграф планарног графа је такође планаран. Сваки надграф непланарног графа такође није планаран.

K_5 и $K_{3,3}$ нису планарни $\Rightarrow$ ни сваки граф који их садржи као подграфове није планаран

ЕЛЕМЕНТАРНА ПОДЕЛА ГРАНЕ: (уметање чвора)



+1 чвор (чвор w)

+1 грана (бришемо uv, додајемо uw и wv)

Ако је G био планаран/непланаран, онда је и граф G' који настаје од G елементарним поделама грана такође планаран/непланаран граф.

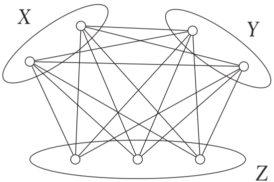
Два графа су **ХОМЕОМОРФНА** ако се оба могу добити од истог графа применом елементарних подела грана.

Нпр. P_n и P_m, где је $n \neq m$ (оба се могу добити од графа K_2 o—o)

Т: (Куратовски)

Граф је непланаран АККО садржи подграф који је хомеоморфан са K_5 или са $K_{3,3}$.

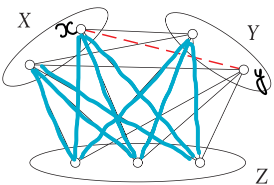
14. Доказати да $K_{3,2,2}$ нема планаран подграф са 15 грана.



$|E(K_{3,2,2})| = 3\cdot 2 + 3\cdot 2 + 2\cdot 2 = 16$ грана

Тражени подграф добијамо брисањем једне гране из графа $K_{3,2,2}$

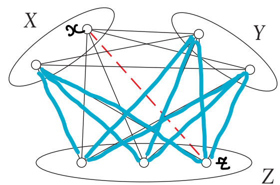
1° $e = xy$



Граф $K_{3,2,2} - xy$ има подграф $K_{3,3}$

(Једна класа је Z, а у другу ћемо узети 3 од 4 чвора из $X \cup Y$)

2° $e = xz$ (аналогно $e = yz$)

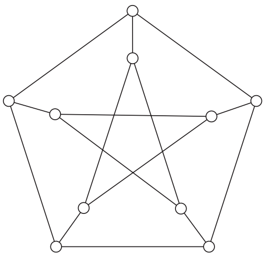


Граф $K_{3,2,2} - xz$ такође садржи $K_{3,3}$

(Једна класа је Z, а другу класу ће чинити преостали чворови из $X \cup Y$, тј. $X \cup Y \setminus \{x\}$)

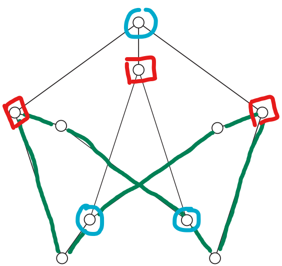
$K_{3,2,2} - e$ садржи $K_{3,3}$, те на основу теореме Куратовског $K_{3,2,2} - e$ није планаран

15. Доказати да Петерсенов граф није планаран.



Петерсенов граф је 3-регуларан граф са 10 чворова и 15 грана.

Иако је $15 \leq 3 \cdot 10 - 6 = 24$, видећемо да Петерсенов граф није планаран, те је поменуто тврђење потребан, али није и довољан услов да граф буде планаран.



Уочени подграф је хомеоморфан са графом $K_{3,3}$, те је због теореме Куратовског Петерсенов граф непланаран.

(Гране које су добијене елементарним поделама грана графа $K_{3,3}$ су обележене зеленом бојом)