1. Vežbe I.1

Konvergencija nizova

Definicija 1.1. Proizvoljno preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazivamo realni niz, dok njegovu vrednost $a(n) = a_n$ nazivamo opšti ili n-ti član niza.

Definicija 1.2. Za realni niz $\{a_n\}$ kažemo da je

- ograničen sa gornje strane ako postoji realan broj G takav da je $a_n \leq G$ za sve $n \in \mathbb{N}$. G nazivamo gornje ograničenje niza $\{a_n\}$;
- ograničen sa donje strane strane ako postoji realan broj g takav da je $a_n \geq g$ za sve $n \in \mathbb{N}$. g nazivamo donje ograničenje niza $\{a_n\}$;
- ograničen ako postoje realni brojevi $g, G \in \mathbb{R}$ takvi da za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $g \leq a_n \leq G$.

Definicija 1.3. Broj $a \in \mathbb{R}$ je **granična vrednost niza** $\{a_n\}$ u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Tada pišemo

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a.}$$

Definicija 1.4. Za $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je **tačka nagomilavanja niza** $\{a_n\}$ ako se za svako $\varepsilon > 0$ u $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ nalazi beskonačno mnogo članova niza.

Definicija 1.5. Za realni niz $\{a_n\}$ kažemo da je

- monotono rastući ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n < a_{n+1}$;
- monotono neopadajući ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n \leq a_{n+1}$;
- monotono nerastući ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n \geq a_{n+1}$;
- monotono opadajući ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n > a_{n+1}$.

Osobine graničnih vrednosti nizova

Za $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ gde su $a, b \in \mathbb{R}$ važi:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$, gde je $c \in \mathbb{R}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$, gde je $b, b_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Neke poznate granične vrednosti

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0;$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ za $a > 0;$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$ za $\alpha \in \mathbb{R}, a > 0;$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ za $a > 0;$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1;$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e;$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & , \quad |q| < 1, \\ 1 & , \quad q = 1, \\ \infty & , \quad q > 1, \\ \text{ne postoji} & , \quad q \leq -1. \end{cases}$

Granične vrednosti neodređenog tipa

„$\frac{0}{0}$”, „$\frac{\infty}{\infty}$”, „$0 \cdot \infty$”, „$\infty - \infty$”, „1^∞”, „∞^0”, „0^0”.

Zadaci

Zadatak 1.6. Izračunati sledeće granične vrednosti

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2-3n+4}{5n^3+3n^2+1}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3-2n+1}{5n^3+2n^2+3}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-3n+4}{3n^2+1}$.

Rešenje.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2-3n+4}{5n^3+3n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{5+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}} = 0,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3-2n+1}{5n^3+2n^2+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{5+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}} = \dfrac{4}{5},$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-3n+4}{3n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}} = \infty.$

Na osnovu prethodnog primera možemo zaključiti da ako su

$P_k(n) = a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_1n+a_0$ i $Q_m(n) = b_mn^m+b_{m-1}n^{m-1}+\cdots+b_1n+b_0$

polinomi k-tog, odnosno m-tog stepena, važi

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0 & , \quad m > k, \\ \frac{a_k}{b_k} & , \quad m = k, \\ \pm\infty & , \quad m < k. \end{cases}}$$

Napomena. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ tada je

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.}$$

Takođe, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ za $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tada je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right)^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = e^b.$$

Zadatak 1.7. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{5n^2+n}\right)^n$.

Rešenje.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{5n^2+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0.$$

Zadatak 1.8. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^3+2}{5n^3}\right)^{n^3}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+2}{5n^3}\right)^{n^3} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5n^3}\right)^{n^3} = \text{„}1^{\infty}\text{"} \text{ - neodređen izraz}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5n^3}{2}}\right)^{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5n^3}{2}}\right)^{\frac{5n^3}{2}\frac{2}{5n^3}n^3}\\ &= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{5n^3}{2}}\right)^{\frac{5n^3}{2}}\right)}_{=e}^{\frac{2}{5}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2}{5}} = e^{\frac{2}{5}}.\end{aligned}$$

Zadatak 1.9. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}\frac{2}{2n+1}2n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\right)}_{=e}^{\frac{4n}{2n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{2n+1}} = e^2.\end{aligned}$$

Zadatak 1.10. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0}+\cdots+\underbrace{\frac{n-1}{n^2}}_{\to 0}\right) &= \text{,,}0\cdot\infty\text{'' - neodređen izraz}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}}{n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Napomena. Zbir prvih n brojeva je dat sa

$$\boxed{1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.}$$

Zadatak 1.11. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n-5^n}$.

Rešenje.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n-5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1\right)}{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\left(\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}_{\to 0}+1\right)}{\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^{n}}_{\to 0}-1}=-5.$$

Zadatak 1.12. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n\cdot(n+1)}{n^3}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n\cdot(n+1)}{n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot(1+1) + 2\cdot(2+1) + \cdots + n\cdot(n+1)}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\underbrace{1+2+\cdots+n}_{\text{zbir prvih } n \text{ brojeva}} + \underbrace{1^2+2^2+\cdots+n^2}_{\text{zbir kvadrata prvih } n \text{ brojeva}}}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+6n^2+4n}{6n^3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Napomena. Zbir kvadrata prvih n brojeva je dat sa

$$\boxed{1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

Zadatak 1.13. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+n}\right)$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+n}\right)\\
&= \text{,,}\infty-\infty\text{'' - neodređen izraz}\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n+n-\sqrt[3]{n^3+n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)+\lim_{n\to\infty} n(n-\sqrt[3]{n^3+n})\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}+\\
&+\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-\sqrt[3]{n^3+n})(n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2})}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n}+\lim_{n\to\infty} \frac{n(n^3-(n^3+n))}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}+\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}+\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2}\right)}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.14. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)!+(n+1)!}{(n+1)!}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!+(n+1)!}{(n+1)!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!+(n+1)n(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!(1+n(n+1))}{(n-1)!n(n+1)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+n}=1.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.15. Izračunati $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{n}}{n}}\right)} = 1.
\end{aligned}$$

1. Vežbe I.2

Zadatak 1.1. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) &= \sin\infty = \text{ne postoji}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\pm n\pi\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\underbrace{\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi}_{\alpha}+\underbrace{n\pi}_{\beta}\right)\\
&[\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta]\\
&= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)\underbrace{\cos n\pi}_{=(-1)^n}+\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)\underbrace{\sin n\pi}_{=0}\\
&= \lim_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^n}_{a_n}\underbrace{\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)}_{b_n}
\end{aligned}
$$

Ovde ne možemo primeniti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, jer $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ ne postoji. Međutim, posmaraćemo posebno niz b_n i kako je

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right) &= \lim_{n\to\infty} \sin\left[\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\frac{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi(n^2+n-n^2)}{\sqrt{n^2+n}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\\
&= \sin\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n} = \sin\frac{\pi}{2} = 1,
\end{aligned}
$$

dobijamo da ni $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$ ne postoji.

Zadatak 1.2. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

Rešenje.

Analogno, kao i prethodnom zadatku, dobijamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) &= \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right) = \lim_{n\to\infty} \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1.\end{aligned}$$

Zadatak 1.3. Dat je niz sa opštim članom

$$a_n = n - 1 - \sqrt{pn^2 + qn},$$

gde su $p, q \in \mathbb{R}$, $p > 0$. U zavisnosti od p i q odrediti kada ovaj niz:

a) konvergira,

b) divergira.

U slučaju konvergencije, odrediti kada ovaj niz konvergira ka nuli, a kada broju različitom od nule.

Rešenje.
Kako je

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(n - 1 - \sqrt{pn^2 + qn}\right) \frac{n - 1 + \sqrt{pn^2 + qn}}{n - 1 + \sqrt{pn^2 + qn}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2 - pn^2 - qn}{n - 1 + \sqrt{pn^2 + qn}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-p)n^2 - (2+q)n + 1}{n - 1 + \sqrt{pn^2 + qn}},\end{aligned}$$

dobijamo da

a) za $p = 1$ i $\forall q$ niz konvergira,

b) za $p \neq 1$ i $\forall q$ niz divergira.

U nastavku posmatramo slučaj kada je $p = 1$, dobijamo da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-(2+q)n + 1}{n - 1 + \sqrt{n^2 + qn}} = \frac{-(2+q)}{2}.$$

Primetimo da konvergencija niza ne zavisi od q, dok je granična vrednost niza $\{a_n\}$ za $p = 1$ i $q = -2$ jednaka 0, a za $p = 1$ i $q \neq -2$ jednaka broju A, $A \neq 0$.

Definicija 1.4. s je **supremum niza** $\{a_n\}$ ako važi:

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq s$,
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(a_{n_0} > s - \varepsilon)$.

Tada pišemo $s = \sup\{a_n\}$

Definicija 1.5. i je **infimum niza** $\{a_n\}$ ako važi:

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq i$,
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(a_{n_0} < i + \varepsilon)$.

Tada pišemo $i = \inf\{a_n\}$

Svaki monotono rastući (neopadajući) niz koji je ograničen sa gornje strane, konvergira svom supremumu. Svaki monotono opadajući (nerastući) niz koji je ograničen sa donje strane, konvergira svom infimumu.

Zadatak 1.6. Ispitati monotonost, ograničenost, supremum, infimum, tačke nagomilavanja i graničnu vrednost (ukoliko postoji) za niz $\{a_n\}$ čiji je opšti član niza dat sa

$$a_n = \frac{3n-1}{5n+1}.$$

Rešenje. Kako je

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{3(n+1)-1}{5(n+1)+1} - \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3n+2}{5n+6} - \frac{3n-1}{5n+1} \\
&= \frac{(3n+2)(5n+1) - (5n+6)(3n-1)}{(5n+6)(5n+1)} \\
&= \frac{8}{(5n+6)(5n+1)} > 0,
\end{aligned}$$

dobijamo da je niz monotono rastući, a samim tim $a_n \geq \frac{1}{3}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je ograničen i sa donje strane. Primetimo da je imeniilac veći od brojioca, pa je i $a_n < 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, niz je ograničen.

Iz monotonosti i ograničenosti sledi da je niz konvergentan i pri tome je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3}{5}.$$

Jedina tačka nagomilavanja je $\frac{3}{5}$, supremum $\sup\{a_n\} = \frac{3}{5}$ i infimum $\inf\{a_n\} = \frac{1}{3}$.

Zadatak 1.7. Za prethodni primer odrediti počev od kog člana se svi naradne nalaze u ε-okolini granične vrednosti za $\varepsilon = 0.1$.

Rešenje. Posmatramo za koje vrednosti n će važiti $|a_n - a| < \varepsilon$, odnosno za koje vrednosti n važi

$$|\frac{3n-1}{5n+1} - \frac{3}{5}| < 0.1.$$

Pošto je

$$\begin{aligned}
|\frac{3n-1}{5n+1} - \frac{3}{5}| < 0.1 &\iff |\frac{15n-5-15n-3}{5(5n+1)}| < \frac{1}{10} \\
&\iff |-\frac{8}{5(5n+1)}| < \frac{1}{10} \\
&\iff \frac{8}{5(5n+1)} < \frac{1}{10} \\
&\iff 16 < 5n+1 \\
&\iff 5n > 15 \\
&\iff n > 3,
\end{aligned}$$

dobijamo da za sve $n > 3$ važi nejednakost, odnosno počevši od $n_0 := 4$ svi naredni članovi niza se nalaze u ε-okolini.

Napomena. Broj n_0 zavisi od ε i on pokazuje koliko se članova niza nalazi izvan ε-okoline tačke a. Da bismo videli tu zavisnost, pretpostavimo da nam vrednost za ε nije data u zadatku. U tom slučaju potrebno je odrediti prvi prirodan broj za koji važi

$$\begin{aligned}
|\frac{3n-1}{5n+1} - \frac{3}{5}| < \varepsilon &\iff \frac{8}{5(5n+1)} < \varepsilon \\
&\iff 5n+1 > \frac{8}{5\varepsilon} \\
&\iff n > \frac{1}{5}\left(\frac{8}{5\varepsilon} - 1\right).
\end{aligned}$$

U opštem slučaju broj $\frac{1}{5}\left(\frac{8}{5\varepsilon} - 1\right)$ nije prirodan broj. Dakle, prvi prirodan broj veći od njega je dat sa

$$n_0 = \lfloor \frac{1}{5}\left(\frac{8}{5\varepsilon} - 1\right) \rfloor + 1.$$

Funkcija $\lfloor \cdot \rfloor$ je najveće donje celo - $\lfloor x \rfloor$ je najveći prirodan broj koji je manji ili jednak sa x.

1.1. Teorema o uklještenju

Neka su $\{a_n\}, \{b_n\}$ i $\{c_n\}$ realni nizovi. Ako važi:

(1) $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su konvergentni i pri tome je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A,$$

(2) $a_n \le c_n \le b_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Tada je niz $\{c_n\}$ konvergentan i $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

Zadatak 1.8. Pokazati da je niz $\{c_n\}$ dat sa opštim članom

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

Rešenje. Pre svega, primetimo da je

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\\
c_2 &= \frac{1}{\sqrt{2^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}},\\
c_3 &= \frac{1}{\sqrt{3^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{3^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{12}},\\
&\vdots\\
c_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}},
\end{aligned}$$

odnosno, n-ti član niza c_n ima n sabiraka. Kako je

$$\underbrace{n\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{\text{kandidat za } a_n} \le \underbrace{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{\text{najveći sabirak}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{\text{najmanji sabirak}}}_{n \text{ sabiraka}} \le \underbrace{n\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{\text{kandidat za } b_n},$$

dobijamo da je $a_n \le c_n \le b_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je uslov (2) iz teoreme o uklještenju ispunjen. Takođe, važi da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 1,$$

tj. imamo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, pa je i uslov (1) iz teoreme o uklještenju ispunjen. Dakle, na osnovu teoreme o uklještenju niz $\{c_n\}$ je konvergentan i važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.

1. Vežbe I.3

1.1. Granična vrednost rekurzivno zadatih nizova

Definicija 1.1. s je **supremum** niza $\{a_n\}$ ako važi:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq s$,
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(a_{n_0} > s - \varepsilon)$.

Tada pišemo $s = \sup\{a_n\}$

Definicija 1.2. i je **infimum** niza $\{a_n\}$ ako važi:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \geq s$,
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(a_{n_0} < i + \varepsilon)$.

Tada pišemo $i = \inf\{a_n\}$

Napomena: Primetimo, supremum s je najmanje gornje ograničenje niza $\{a_n\}$, dok je infimum i najveće donje ograničenje niza $\{a_n\}$.

Tvrđenje 1.3. *Svaki monotono rastući (neopadajući) niz koji je ograničen sa gornje strane konvergira svom supremumu.*

Tvrđenje 1.4. *Svaki monotono opadajući (nerastući) niz koji je ograničen sa donje strane konvergira svom infimumu.*

1.2. Zadaci

Zadatak 1.5. Neka je niz $\{a_n\}$ dat sa

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 3 \cdot \frac{2a_n + 1}{a_n + 4}, n \in \mathbb{N}.$$

Pokazati da je niz $\{a_n\}$ konvergentan i naći njegovu graničnu vrednost.

Rešenje.

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{9}{5}, a_3 = 3 \cdot \frac{2a_2 + 1}{a_2 + 4} = \frac{2\frac{9}{5} + 1}{\frac{9}{5} + 4} = \frac{69}{29}, \ldots$$

Očigledno je da je niz $\{a_n\}$ niz pozitivnih brojeva, tj. $\boxed{a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}}$.
Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući.
Monotonost:

BI Za $n = 1$ treba pokazati $a_2 > a_1$,

$$a_1 = 1 < \frac{9}{5} = a_2.$$

IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $a_k > a_{k-1}$.

IK Treba pokazati da za $n = k + 1$ važi $a_{k+1} > a_k$, odnosno da je

$$a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow a_{k+1} - a_k > 0.$$

$$\begin{aligned}
&3 \cdot \frac{2a_k + 1}{a_k + 4} - 3 \cdot \frac{2a_{k-1} + 1}{a_{k-1} + 4} \\
&= 3 \cdot \frac{(2a_k + 1)(a_{k-1} + 4) - (2a_{k-1} + 1)(a_k + 4)}{(a_{k-1} + 4)(a_k + 4)} \\
&= 3 \cdot \frac{2a_k a_{k-1} + 8a_k + a_{k-1} + 4 - (2a_k a_{k-1} + 8a_{k-1} + a_k + 4)}{(a_k + 4)(a_{k-1} + 4)} \\
&= 3 \cdot \frac{7a_k - 7a_{k-1}}{(a_k + 4)(a_{k-1} + 4)} = \frac{21(a_k - a_{k-1})}{(a_k + 4)(a_{k-1} + 4)} > 0.
\end{aligned}$$

Dakle, niz je monotono rastući, odnosno $\boxed{a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}}$.

Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane brojem 3.
Ograničenost:

BI Za $n = 1$ je $a_1 < 3$.

IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $a_k < 3$.

IK Treba pokazati da za $n = k + 1$ važi $a_{k+1} < 3$.

$$a_k < 3 \Rightarrow a_k = 3 - \delta, \delta > 0$$

$$a_{k+1} = 3 \cdot \frac{2a_k + 1}{a_k + 4} = 3 \cdot \frac{2(3-\delta)+1}{3-\delta+4} = 3\frac{6-2\delta+1}{7-\delta} = 3 \cdot \underbrace{\frac{7-2\delta}{7-\delta}}_{<1} < 3.$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane, tj. $\boxed{a_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}}$.

Iz monotonosti i ograničenosti sledi da je niz konvergentan, tj. postoji $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Konvergencija:
Neka je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Iz

$$a_{n+1} = 3\frac{2a_n + 1}{a_n + 4}$$

sledi

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 3\frac{2\lim_{n\to\infty} a_n + 1}{\lim_{n\to\infty} a_n + 4}$$

$$A = 3\frac{2A+1}{A+4} \Leftrightarrow A^2 + 4A = 6A + 3 \Leftrightarrow A^2 - 2A - 3 = 0.$$

Rešenja poslednje jednačine su:

$$A_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2},$$

odnosno

$$A_1 = -1 \text{ i } A_2 = 3.$$

Kako je $a_n > 0$, sledi da je $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$, odnosno$A \geq 0$. Dakle,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 3.}$$

Zadatak 1.6. Pokazati konvergenciju i odrediti graničnu vrednost niza

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \; a_1 > 2.$$

Rešenje. Dokazaćemo da je niz monotono opadajući i ograničen sa donje strane brojem 2.
Monotonost:

BI Za $n = 1$ treba pokazati $a_1 > a_2$,

$$a_2 = \sqrt{2 + a_1} < \sqrt{a_1 + a_1} = \sqrt{2a_1} < \sqrt{a_1^2} = a_1.$$

IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $a_{k-1} > a_k$.

IK Treba pokazati da za $n = k + 1$ važi $a_k > a_{k+1}$.
Iz indukcijske hipoteze dobijamo

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + a_{k-1}} = a_k.$$

Dakle, niz je monotono opadajući.

Ograničenost:

BI Za $n = 1$ je $a_1 > 2$ po pretpostavci.

IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $a_k > 2$.

IK Treba pokazati da za $n = k + 1$ važi $a_{k+1} > 2$.
Iz indukcijske hipoteze dobijamo

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} > \sqrt{2 + 2} = 2,$$

pa je niz ograničen.

Iz monotonosti i ogračenosti sledi da je niz konvergentan, tj. postoji $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Konvergencija:
Neka je $A = \lim_{n\to\infty} a_n$.
Iz

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

sledi

$$A = \sqrt{2 + A} \Leftrightarrow A^2 - A - 2 = 0$$

$$A_1 = 2 \vee A_2 = -1.$$

Kako je $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, za graničnu vrednost uzimamo broj 2, tj.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Zadatak 1.7. Dokazati da je niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dat sa

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2$$

konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

Rešenje.
Prvo ćemo pokazati da za sve članove niza važi $0 < x_n < 1$.
Ograničenost:

BI Za $n = 1$ je $x_1 = \frac{1}{2}$, pa je zadovoljeno $0 < x_1 < 1$.

IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $0 < x_k < 1$.

IK Treba pokazati da za $n = k + 1$ važi $0 < x_{k+1} < 1$.
Iz indukcijske hipoteze dobijamo

$$0 < x_{k+1} = x_k^2 < x_k < 1.$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{x_n\}$ ograničen.

Pokazaćemo da je niz monotono opadajući.

Monotonost:
Primetimo da je $x_1 = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = x_1^2 = x_2$, pa važi $x_1 > x_2$.
Treba pokazati da važi $x_k > x_{k+1}$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

$$x_{k+1} - x_k = x_k^2 - x_k = (x_k - 1)x_k < 0,$$

jer je $0 < x_k < 1, \forall k \in \mathbb{N}$. Dakle, niz je monotono opadajući.

Kako je niz je monotono opadajući i ograničen sa donje strane, sledi da je konvergentan i da konvergira ka svom infimumu.

Konvergencija:
Neka je
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$
Iz
$$x_{n+1} = x_n^2$$
sledi
$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n^2,$$
$$x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$$
$$x = 0 \vee x = 1,$$
a kako je niz opadajući, sledi da je
$$\lim_{x\to\infty} x_n = 0.$$

Zadatak 1.8. Neka je niz $\{a_n\}$ definisan na sledeći način

$$a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}, a_1 = \frac{c}{2}, c \in \mathbb{R}^+.$$

a) Pokazati da je niz monotono rastući.

b) Dokazati da je niz konvergentan ako i samo ako $c \in (0, 1]$ i naći njegovu graničnu vrednost.

Rešenje.

a) Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući.
Monotonost:

BI Za $n = 1$ treba pokazati da je $a_2 - a_1 > 0$.

$$a_2 = \frac{c}{2} + \frac{a_1^2}{2} = \frac{c}{2} + \frac{c^2}{8}$$

$$a_2 - a_1 = \frac{c}{2} + \frac{c^2}{8} - \frac{c}{2} = \frac{c^2}{8} > 0$$

IH Za $n = k$ pretpostavimo da važi $a_k - a_{k-1} > 0$.

IK Za $n = k + 1$ treba pokazati da je $a_{k+1} - a_k > 0$.

$$a_{k+1} - a_k = \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} - (\frac{c}{2} + \frac{a_{k-1}^2}{2}) = \frac{a_k^2 - a_{k-1}^2}{2} = \frac{(a_k - a_{k-1})(a_k + a_{k-1})}{2} > 0$$

zbog IH i zbog $a_n > 0, \forall n \in N$.

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući, odnosno važi $\boxed{a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.}$

b) Pokažimo niz je konvergentan ako i samo ako $c \in (0, 1]$.
1. Niz je konvergentan ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$) $\Rightarrow c \in (0, 1]$.

Iz $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$ sledi:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_n^2$$

$$A = \frac{c}{2} + \frac{A^2}{2} \Leftrightarrow A^2 - 2A + c = 0.$$

Rešenja poslednje jednačine su:

$$A_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4c}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-c}.$$

Da bi ova rešenja bila realna mora da važi:

$$1 - c \geq 0 \Rightarrow c \leq 1 \text{ i } c \in \mathbb{R}^+$$

$\Rightarrow c \in (0, 1]$

2. $c \in (0, 1] \Rightarrow$ niz je konvergentan.
Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane.
Ograničenost:

BI Za $n = 1$ treba pokazati da je $a_1 < 1$.

$$a_1 = \frac{c}{2} \leq \frac{1}{2} < 1$$

IH Za $n = k$ pretpostavimo da važi $a_k < 1$.

IK Za $n = k + 1$ treba pokazati da je $a_{k+1} < 1$.

$$a_{k+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{a_k^2}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je $\boxed{a_n < 1, \forall n \in N.}$

Kako je niz $\{a_n\}$ monoton i ograničen sledi sledi da je niz $\{a_n\}$ konvergentan, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Konvergencija:
Moguće granične vrednosti su:

$$A_1 = 1 + \sqrt{1-c} > 1 \text{ i } A_2 = 1 - \sqrt{1-c} < 1.$$

Zbog toga što je $a_n < 1$ za svako $n \in N$, sledi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - \sqrt{1-c}.$$

1. Vežbe I.4

1.1. Košijevi nizovi

Definicija 1.1. Niz $\{a_n\}$ je **Košijev niz** ako važi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,\ m \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon).$$

Definicija 1.2. Niz $\{a_n\}$ je **Košijev niz** ako važi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,\ p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon).$$

Svaki konvergentan niz je Košijev.

U metričkom prostoru $\mathbb{R}$ važi: niz $\{a_n\}$ je Košijev ako i samo ako je konvergentan.

Zadatak 1.3. Pokazati da je niz $\{a_n\}$ sa opštim članom

$$a_n = \frac{\sin(1\cdot 2)^2}{1\cdot 2} + \frac{\sin(2\cdot 3)^3}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\sin(n\cdot(n+1))^{(n+1)}}{n\cdot(n+1)}$$

Košijev.

Rešenje. Niz $\{a_n\}$ je Košijev ako važi:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,\ p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Tada za bilo koja dva prirodna broja n i p važi:

$$\begin{aligned}
&\left|a_{n+p} - a_n\right| \\
&= \left|\frac{\sin(1\cdot 2)^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{\sin(n\cdot(n+1))^{(n+1)}}{n\cdot(n+1)}\right. \\
&+ \frac{\sin((n+1)\cdot(n+2))^{(n+2)}}{(n+1)\cdot(n+2)} \cdots + \frac{\sin((n+p)\cdot(n+p+1))^{(n+p+1)}}{(n+p)\cdot(n+p+1)} \\
&\left. - \left(\frac{\sin(1\cdot 2)^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{\sin(n\cdot(n+1))^{(n+1)}}{n\cdot(n+1)}\right)\right| \\
&= \left|\frac{\sin((n+1)\cdot(n+2))^{(n+2)}}{(n+1)\cdot(n+2)} + \cdots + \frac{\sin((n+p)\cdot(n+p+1))^{(n+p+1)}}{(n+p)\cdot(n+p+1)}\right| \\
&\text{[iskoristimo nejednakost trougla: } |A+B| \leq |A| + |B|\text{]} \\
&\leq \left|\frac{\sin((n+1)\cdot(n+2))^{(n+2)}}{(n+1)\cdot(n+2)}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin((n+p)\cdot(n+p+1))^{(n+p+1)}}{(n+p)\cdot(n+p+1)}\right| \\
&\text{[iskoristimo ograničenost funkcije: } |\sin x| \leq 1\text{]} \\
&\leq \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)\cdot(n+p+1)} \\
&\left[\text{svaki sabirak predstavimo kao } \frac{1}{(n+i)(n+i+1)} = \frac{A}{n+i} + \frac{B}{n+i+1}\right] \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \\
&\leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Prethodna procena pokazuje da je $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ za sve $n,\ p \in \mathbb{N}$ takve da je

$$n \geq n_0(\varepsilon) := \lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor + 1.$$

Zadatak 1.4. Koristeći Košijev kriterijum ispitati da li je niz $\{c_n\}$ s opštim članom

$$c_n = \frac{\cos 27}{1\cdot 2} + \frac{\cos 27^2}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos 27^n}{n\cdot (n+1)}$$

konvergentan.

Rešenje. Niz $\{c_n\}$ je Košijev ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,\ p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |c_{n+p} - c_n| < \varepsilon).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Tada za bilo koja dva prirodna broja n i p važi:

$$\begin{aligned}
&\left|c_{n+p} - c_n\right| \\
&= \left|\frac{\cos 27^{n+1}}{(n+1)\cdot(n+2)} + \frac{\cos 27^{n+2}}{(n+2)\cdot(n+3)} + \ldots + \frac{\cos 27^{n+p}}{(n+p)\cdot(n+p+1)}\right| \\
&\text{[iskoristimo nejednakost trougla: } |A+B| \leq |A|+|B|] \\
&\leq \left|\frac{\cos 27^{n+1}}{(n+1)\cdot(n+2)}\right| + \ldots + \left|\frac{\cos 27^{n+p}}{(n+p)\cdot(n+p+1)}\right| \\
&\text{[iskoristimo ograničenost funkcije: } |\cos x| \leq 1] \\
&\leq \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)\cdot(n+p+1)} \\
&\left[\text{svaki sabirak predstavimo kao } \frac{1}{(n+i)(n+i+1)} = \frac{A}{n+i} + \frac{B}{n+i+1}\right] \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \\
&\leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Prethodna procena pokazuje da je $|c_{n+p} - c_n| < \varepsilon$ za sve $n,\ p \in \mathbb{N}$ takve da je

$$n \geq n_0(\varepsilon) := \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1.$$

Dokazali smo da je niz $\{c_n\}$ Košijev, sledi da je niz konvergentan.

Zadatak 1.5. Neka je opšti član niza $\{a_n\}$ dat sa

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}.$$

Pokazati da je niz $\{a_n\}$ divergentan.

Rešenje.
Pokazaćemo da niz $\{a_n\}$ nije Košijev, odnosno da važi

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n,\ p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \wedge |a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon).$$

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= \left|1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+p} - (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n})\right| \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p} \\
&> \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + ... + \frac{1}{n+p} \\
&= \frac{p}{n+p}
\end{aligned}$$

Za $p = n$ dobija se

$$|a_{2n} - a_n| > \frac{n}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Kako niz $\{a_n\}$ nije Košijev, sledi da nije ni konvergentan.

Zadatak 1.6. Neka je opšti član niza $\{b_n\}$ dat sa

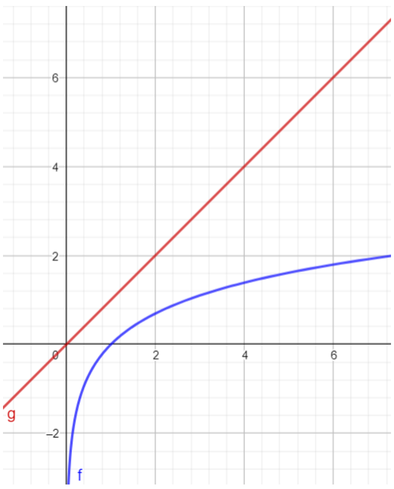
$$b_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n}.$$

Pomoću Košijevog kriterijuma pokazati da je niz $\{b_n\}$ divergentan.

Rešenje.
Pokazaćemo da niz $\{b_n\}$ nije Košijev, odnosno da važi

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n,\ p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \wedge |b_{n+p} - b_n| \geq \varepsilon).$$

$$\begin{aligned}
|b_{n+p} - b_n| &= \left| \frac{1}{\ln 2} + \dots + \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} - \left(\frac{1}{\ln 2} + \dots + \frac{1}{\ln n}\right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} \right| \\
&\text{[iskoristimo: } \ln x \geq 0 \text{ za } x \geq 1] \\
&= \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} \\
&> \frac{1}{\ln(n+p)} + \frac{1}{\ln(n+p)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} \\
&= \frac{p}{\ln(n+p)} \\
&> \frac{p}{n+p}
\end{aligned}$$



Za $p = n$ važi

$$|b_{2n} - b_n| > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

Kako niz $\{b_n\}$ nije Košijev, sledi da niz $\{b_n\}$ nije konvergentan.

Zadatak 1.7. Neka je opšti član niza $\{a_n\}$ dat sa

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + ... + \frac{\sin n}{2^n}.$$

Pomoću Košijevog kriterijuma pokazati da je niz $\{a_n\}$ konvergentan.

Rešenje.
Pokazaćemo da je niz $\{a_n\}$ Košijev, odnosno da važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,\ p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon).$$

$$\begin{aligned}
&|a_{n+p} - a_n| \\
&= \left| \frac{\sin 1}{2} + ... + \frac{\sin n}{2^n} + \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + ... + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} - (\frac{\sin 1}{2} + ... + \frac{\sin n}{2^n}) \right| \\
&= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + ... + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \\
&\leq \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} \right| + \left| \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} \right| + ... + \left| \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}} \\
&< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}} + \frac{1}{2^{n+p+1}} + \frac{1}{2^{n+p+2}} \cdots \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \underbrace{(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^p} + ...)}_{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q},\ |q|<1} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Dakle, dobijamo

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n \ln 2 > \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$$

$$n_0 := \lfloor \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \rfloor + 1.$$

Kako je niz $\{a_n\}$ Košijev, sledi da je niz $\{a_n\}$ konvergentan.