UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Ilija Kovačević
Momčilo Novković

Vojislav Marić
Biljana Rodić

MATEMATIČKA ANALIZA I

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN; OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Novi Sad 2004. god.

Naziv udžbenika: "Matematička analiza I : diferncijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine"

Autori:

Dr Ilija Kovačević, redovni profesor FTN-a u Novom Sadu
Dr Vojislav Marić, redovni profesor FTN-a u penziji i dopisni član SANU
Mr (neformalno Dr) Momčilo Novković
Mr Biljana Rodić, asistent FTN-a u Novom Sadu

Recenzenti:

Dr Jovan Mališić , redovni profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu
Dr Mirko Budinčević, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu

Izdavač: Vedes, Beograd ,Lješka 57
JP Informatika, Bulevar Cara Lazara 3, Novi Sad

Štampa: Vedes, Beograd ,Lješka 57

Tiraž: 550

Autori zadržavaju sva prava. Bez pismene saglasnosti autora nije dozvoljeno reprodukovanje (fotokopiranje, fotografisanje, magnetni upis ili umnožavanje na bilo koji način) ili ponovno objavljivanje sadržaja (u celini ili delovima) ove knjige.

Nastavno–naučno veće Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu na svojoj sednici 25.juna 2003. prihvatilo je ovu knjigu kao stalni univerzitetski udžbenik.

PREDGOVOR

Ova knjiga je pisana prema planu i programu Matematičke analize I (granični procesi, diferencijalni račun realnih funkcija jedne i više realnih promenljivih sa primenama, integralni račun realnih funkcija jedne realne promenljive, obične diferencijalne jednačine prvog i višeg reda) za studente elektrotehničke struke i računarstva Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu.

Zbog nivoa izlaganja i raznovrsnosti sadržaja može da posluži i studentima tehničkih fakulteta, studentima PMF-a, kao i studentima ostalih fakulteta i viših škola koji u okviru matematike izučavaju sadržaje iz matematičke analize. Zbog malog broja časova bilo je neophodno da se vrši sužavanje tema u odnosu na standardne oblike (to se posebno odnosi na diferencijalni račun realnih funkcija više realnih promenljivih). Sužavanje je vršeno na taj način što je izostavljen određen broj dokaza, kao i određen broj tvrđenja. Prilikom pisanja ove knjige autori su uglavnom koristili : materijal za neodređeni integral iz knjige [17], materijal za određeni integral iz knige [1] , materijal za nesvojstveni integral iz knjige [3], materijal za diferencijalne jednačine iz knjige [13].

Ova knjiga predstavlja drugo izdanje knjiga [9], [10] i [11], pri čemu je tekst ispravljen (otklonjene su uočene štamparske greške), dopunjen i uobličen u jednu celinu.

I ovom prilikom zahvaljujemo se recenzentima dr Mili Stojaković, redovnom profesoru FTN-a u Novom Sadu, dr Ljiljani Gajić, redovnom profesoru PMF-a u Novom Sadu i dr Mirku Budinčeviću, redovnom profesoru PMF-a u Novom Sadu na korisnim sugestijama i primedbama kojima su omogućili da sadržaj knjige bude poboljšan.

Svesni smo da nijedna knjiga ne može da izađe bez grešaka (nadamo se da ih u ovoj knjizi ima malo), pa ćemo biti zahvalni svima koji nam ukažu na greške koje bismo otklonili u narednom izdanju knjige.

Autori

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

Ovo izdanje je istovetno sa prvim izdanjem. U njemu su uklonjene neke štamparske greške koje su u međuvremenu uočene.

Autori

SADRŽAJ

PRVA GLAVA

DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA JEDNE PROMENLJIVE

Polazni problem diferencijalnog računa je da se odredi tangenta u nekoj tački grafika date funkcije $f(x)$. Taj geometrijski problem uzeo je Lajbnic[1] kao polaznu tačku da sagradi *diferencijalni* i *integralni račun* ili zajedničkim imenom *infinitenizimalni račun*. Nezavisno od njega učinio je to isto i Njutn[2], ali on polazi od problema određivanja brzine neke čestice koja se kreće, a kretanje joj je poznato po tome, da je dat put s kao funkcija vremena t, tj. data je funkcija $s = s(t)$.

G. W. Leibniz

Videćemo posle da je taj problem u fizici ekvivalentan geometrijskom problemu određivanja tangente. Obojica su nezavisno došli do analognih rezultata, čak je za njihova života nastao spor o prioritetu u pogledu tog fundamentalnog napretka matematike. Danas se zna da je Njutn svoje rezultate imao pre Lajbnica (svakako pre 1669. godine), ali su ti rezultati tek kasnije obelodanjeni. Prva osnovna Lajbnicova publikacija o tim problemima objavljena je 1684. godine. Njutnovi rezultati obelodanjeni su prvi put 1693. godine, kada su odštampani i neki delovi iz Njutnovih pisama.

I. Newton

1. IZVOD. INTERPRETACIJE IZVODA

Posmatrajmo realnu funkciju $y = f(x)$[3] koja je definisana nad intervalom $(a, b) \subset R$. Sa $\Delta x \neq 0$ označimo priraštaj argumenta funkcije $f(x)$ u tački $x \in (a, b)$.

---

[1] G.W. Leibniz (1646 – 1716), nemački matematičar i filozof

[2] I. Newton (1643 – 1727), engleski matematičar i filozof

[3] Kao što je u prvom delu knjige [12] rečeno umesto "funkcija f definisana sa $f(x) = \ldots$" kraće ćemo reći " funkcija $f(x) = \ldots$"

Ako tačka $x + \Delta x$ pripada intervalu (a, b), onda je realan broj $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ **priraštaj funkcije** $f(x)$ u tački x, koji odgovara priraštaju argumenta Δx.
Kako je priraštaj funkcije $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, to količnik

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

nije definisan za $\Delta x = 0$. Od interesa je da li postoji granična vrednost tog količnika kada $\Delta x \to 0$. Očigledno da je potreban uslov da granična vrednost količnika postoji kada $\Delta x \to 0$, taj da i $\Delta y \to 0$, tj. da funkcija $y = f(x)$ treba da bude neprekidna u tački x.

Definicija 1.1. *Ako postoji granična vrednost*[1]

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

onda se ta granična vrednost, koja se označava sa $f'(x)$ *ili* y' *zove* **izvod funkcije** $f(x)$ **u tački** x.
Dakle,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Često se priraštaj argumenta Δx označava sa h, pa je $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

Ako funkcija $f(x)$ ima izvod u svakoj tački $x \in X \subset (a, b)$ onda je sa $x \to f'(x)$ definisana funkcija $f' : X \to R$ koju zovemo **izvod funkcije** $f(x)$, $x \in X$. Prema tome, ako funkcija $f(x)$ ima izvod u svakoj tački x skupa $X \subset (a, b)$ izvod funkcije $f(x)$ jeste funkcija $f'(x)$ definisana nad skupom X.

Primer 1.1. Naći izvode sledećih funkcija

1. $f(x) = c$, c je konstanta, 2. $f(x) = x^n, n \in N$, stepena funkcija,

3. $f(x) = \sin x$, 4. $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Rešenje.

1. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0 \Rightarrow c' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

---

[1] U literaturi se često kaže konačna granična vrednost. U ovoj knjizi ćemo pod graničnom vrednošću podrazumevati samo konačnu graničnu vrednost, pa iz tog razloga reč "konačna" izostavljamo.

2. $(x^n)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \ldots + \binom{n}{n}(\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}.$

3. $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \cos x\,.$

4. Kod funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$, za $x \neq 0$, imamo da je

$$(\sqrt[3]{x})' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Data funkcija nema izvod za $x = 0$, jer $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}$ ne postoji. Δ

Izvod i neprekidnost. Jednostrani izvod

Teorema 1.1. *Ako funkcija ima izvod u nekoj tački x, ona je u toj tački neprekidna.*
Dokaz. S obzirom da funkcija ima izvod u tački x, to je

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\Delta x = f'(x)\cdot 0 = 0,$$

što znači da je funkcija neprekidna u tački x.

Obrnuto ne mora da važi. Funkcija može da bude neprekidna u nekoj tački x, a da u njoj nema izvod. Na primer, funkcija $f(x) = |x| = \begin{cases} x & , \ x \geq 0 \\ -x & , \ x < 0 \end{cases}$ je neprekidna za svako x, ali za $x = 0$ nema izvod, jer je

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \ \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Prethodni primer pokazuje da mogu postojati desna i leva granična vrednost $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ i $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ koje su različite, pa ima smisla definisati i jednostrane izvode.

Desni izvod funkcije $f(x)$ definisane nad intervalom $[x, x+\delta)$, $\delta > 0$ u tački x je

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x + \Delta x \in [x, x+\delta)$$

(ako ova granična vrednost postoji).

Levi izvod funkcije definisane nad intervaluom $(x-\delta, x]$, $\delta > 0$ u tački x je

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x + \Delta x \in (x-\delta, x]$$

(ako ova granična vrednost postoji).

Tako je $f'_+(0) = 1$ desni izvod funkcije $f(x) = |x|$ u tački $x = 0$, a $f'_-(0) = -1$ levi izvod.

Levi ili desni izvod funkcije $f(x)$ u tački x jednim imenom zovemo **jednostrani izvodi.**

U prethodnom primeru smo videli da funkcija u datoj tački može da nema izvod, a da u njoj ima levi i desni izvod koji su različiti.

Na osnovu osobina granične vrednosti, sledi da funkcija $f(x)$ ima izvod $f'(x)$ u tački x ako i samo ako postoji $f'_+(x)$ i $f'_-(x)$ u tački x i pri tome važi jednakost

$$f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x).$$

Da iz neprekidnosti funkcije u tački x ne sledi uvek da postoji bar jedan jednostrani izvod u posmatranoj tački, pokazuje sledeći primer.

Primer 1.2. Pokazati da funkcija $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, nema jednostrane izvode u tački $x = 0$.

Rešenje. Funkcija $f(x)$ je neprekidna za svako x. U tački $x = 0$ ne postoji ni jedan jednostrani izvod (ne postoji $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta x \sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \sin\dfrac{1}{\Delta x}$, kao ni

$\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta x \sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \sin\dfrac{1}{\Delta x}$). Δ

Funkcija $f(x)$ ima izvod nad intervalom $I_1 = [a,b)$, $I_2 = (a,b]$, $I_3 = [a,b]$ ako:

- funkcija ima izvod u svakoj tački (a,b),
- u tački a funkcija ima desni izvod, za intervale I_1 i I_3, piše se da je $f'(a) = f'_+(a)$;
- u tački b funkcija ima levi izvod za intervale I_2 i I_3, piše se da je $f'(b) = f'_-(b)$.

Dakle, posmatramo funkciju samo nad datim intervalom, bez obzira da li je van intervala funkcija definisana ili ne. Može se desiti da funkcija ima izvod u svakoj tački intervala (a,b), da u tačkama a i b nema izvod, a da ima izvod nad zatvorenim intervalom $[a, b]$. Na primer, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \sin x & , \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{2}{\pi} x & , \quad x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

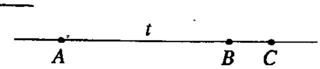
ima izvod $f'(x) = \cos x$ nad intervalom $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ iako u krajnjim tačkama 0 i $\dfrac{\pi}{2}$ tog intervala ne postoji izvod ($f'_-(0) = 0$, $f'_+(0) = 1$, $f'_-(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f'_+(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$).

Primetimo, da ako funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački x tj. ako postoji $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, tada se količnik $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ može napisati u obliku $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, gde $\alpha \to 0$ kada $\Delta x \to 0$. Sledi da je tada $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Brzina i ubrzanje tačke

Neka se tačka kreće po pravoj tako da je jednačinom $s = f(t)$ data zavisnost pređenog puta (vidi sliku 1.1.) od početne tačke A. U trenutku t neka se tačka nalazi u B, a u trenutku $t + \Delta t$ u C. Pređeni put do trenutka t je $f(t)$, a do trenutka $t + \Delta t$ je $f(t + \Delta t)$. Srednja brzina v_s na putu BC je jednaka

$$v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$



Slika 1.1

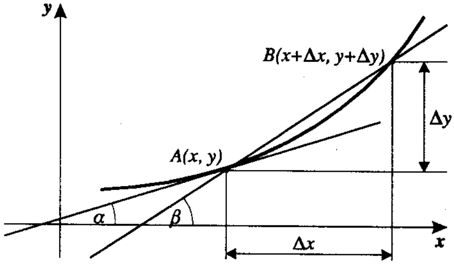
Prirodno je definisati trenutnu brzinu te tačke u B kao graničnu vrednost srednje brzine kada C teži B. Drugim rečima, brzina $v(t)$ u B se definiše kao

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t),$$

ako ta granična vrednost postoji. Slično, ako je u trenutku t data brzina $v = f(t)$, a u trenutku $t + \Delta t$ brzina $v = f(t + \Delta t)$, tada je srednje ubrzanje na putu BC jednako $a_s = \dfrac{\Delta v_s}{\Delta t} = \dfrac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$, pa je trenutno ubrzanje u tački B definisano sa $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v_s}{\Delta t} = v'(t)$, ako ta granična vrednost postoji.

Geometrijska interpretacija izvoda

Posmatrajmo grafik neprekidne funkcije $y = f(x)$ nad intervalom (a,b). Prava AB, gde su tačke A i B tačke grafika naziva se **sečica** te krive, određena tačkama



Slika 1.2

A i B. Pustimo da se tačka B kreće po krivoj i teži da se poklopi sa A. Sečica AB pri tome menja svoj položaj (nagib). Ukoliko postoji granični položaj te sečice, kada tačka B teži ka tački A, tada se prava koja zauzima taj položaj naziva **tangenta funkcije** $y = f(x)$ u tački A.

Pretpostavimo da je ugao α koji tangenta zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose različit od $\frac{\pi}{2}, (\alpha \neq \frac{\pi}{2})$. Ako je β ugao koji zaklapa sečica AB sa pozitivnim delom x-ose, to je $\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, pa je koeficijent pravca $\operatorname{tg}\alpha$ tangente kroz tačku A dat izrazom $\operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$. Dakle, jednačina tangente u tački $A(a, f(a))$ je

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Prava koja je normalna na tangentu krive $y = f(x)$ u tački A naziva se **normala funkcije** u tački A. Ako je $f'(a) \neq 0$, tada je jednačina normale funkcije u tački A prava

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Ako je $f'(a) = 0$, to je jednačina tangente funkcije u tački $A(a, f(a))$ prava $y = f(a)$, a jednačina normale u tački $A(a, f(a))$ je prava $x = a$.

U poglavlju 8. detaljnije ćemo razmotriti problematiku u vezi tangente i normale krive.

2. OSOBINE IZVODA

Teorema 2.1. *Ako funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ imaju izvod u tački x, tada i funkcije $u \pm v$, uv, $\frac{u}{v}$ i cu imaju izvode u toj tački ($\frac{u}{v}$ pod pretpostavkom da je $v(x) \neq 0$ u datoj tački x). Pri tom je*

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$, **2.** $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$,

3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$, **4.** $[cu(x)]' = cu'(x)$ (c je konstanta).

Dokaz.

1. Kako je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x) - [u(x) \pm v(x)]}{\Delta x}$, to je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x).$$

2. Kako je sada

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= u(x + \Delta x)\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} + \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}v(x),$$

to se primenom pravila za graničnu vrednost zbira i proizvoda, dobija

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x + \Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

3. Kako je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x)v(x) - v(x + \Delta x)u(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x)}{\Delta x v(x) v(x + \Delta x)} =$$

$$= \frac{1}{v(x)v(x + \Delta x)}\left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}v(x) - u(x)\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right],$$

to se primenom pravila za graničnu vrednost razlike i količnika dobija:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{v(x)v(x+\Delta x)}\left[\lim_{\Delta x \to 0}\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}v(x) - u(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{1}{[v(x)]^2}[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)].$$

4. Kako je $c' = 0$, to prema osobini 3. je $[cu(x)]' = c' \cdot u(x) + cu'(x) = cu'(x)$.

Izvod složene funkcije

Teorema 2.2. *Neka je data složena funkcija* $y = f(u)$, $u = g(x)$. *Ako* $g(x)$ *ima izvod u tački* x, *a* $f(u)$ *izvod u tački* u, *tada je*

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x))' = f'(u)\,g'(x).$$

Dokaz. Napišimo priraštaj Δy funkcije $y = f(u)$ u obliku $\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha\Delta u$, gde $\alpha \to 0$, kada $\Delta u \to 0$. Ako podelimo ovu jednakost sa Δx, dobijamo da je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Ako sada $\Delta x \to 0$, onda $\Delta u \to 0$ (zbog neprekidnosti funkcije u) i $\alpha \to 0$, pa dobijamo da je $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\cdot u'(x)$, tj. $(f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)$.

U slučaju da je funkcija složena od tri funkcije, $y = f(u)$, $u = g(v)$), $v = h(x)$, tada je

$$(f(g(h(x))))' = f'(u)u'(v)v'(x) = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

Za još složenije funkcije razmatranje bi bilo analogno.

Primer 2.1. Naći izvod funkcije $y = \sin^3\sqrt[3]{x}$ za $x \neq 0$.

Rešenje. Označimo da je $v = \sqrt[3]{x}$, $u = \sin v$. Tada je $y = u^3$. Kako je $(u^3)' = 3u^2$, $(\sin v)' = \cos v$, $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, to je

$$(\sin^3\sqrt[3]{x})' = 3\sin^2\sqrt[3]{x}\cdot\cos\sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sin^2\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}},\quad x \neq 0.\quad \Delta$$

Izvod inverzne funkcije

Teorema 2.3. *Neka je* $f(x)$ *neprekidna strogo monotona funkcija definisana nad intervalom* (a,b), *a* $f^{-1}(x)$ *njena inverzna funkcija. Ako funkcija* $f(x)$ *ima izvod* $f'(x)$ *u tački* $x \in (a,b)$, *pri čemu je* $f'(x) \neq 0$, *tada funkcija* $f^{-1}(x)$ *ima izvod u tački* $y = f(x)$ *i važi*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Dokaz. Prema definiciji izvoda je $(f^{-1})'(y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0}\frac{f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y}$.

Kako je $f^{-1}(y) = x$, to je $f^{-1}(y + \Delta y) = x + \Delta x$, pa je $f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y) = \Delta x$. Iz činjenice da je $f^{-1}(x)$ injektivna funkcija i $\Delta y \neq 0$, sledi da je i $\Delta x \neq 0$. S obzirom da je $f^{-1}(y)$ neprekidna funkcija, to $\Delta x \to 0$ kada $\Delta y \to 0$. Sledi da je

$$(f^{-1}(y))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Primer 2.2. Naći izvod funkcije $y = \arcsin x$.

Rešenje. Kako je $y = \arcsin x$ i $x = \sin y$ za $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, to je

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1). \quad \Delta$$

Izvod parametarski zadate funkcije

Neka su nad intervalom $I \subset R$ definisane dve realne funkcije $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$, $t \in I$ i neka za funkciju $\varphi(t)$ postoji inverzna funkcija $t = \varphi^{-1}(x)$. Tada je složena funkcija $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$, definisana nad skupom vrednosti $\{\varphi(t) : t \in I\}$ funkcije $\varphi(t)$. Kažemo da je sa $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$, funkcija $f(x)$ zadata u **parametarskom obliku** pri čemu ćemo pomoćnu promenljivu t nazvati parametrom.

Teorema 2.4. *Neka je data funkcija* $y = f(x)$ *u parametarskom obliku*

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in (a,b).$$

Ako neprekidne funkcije $\varphi(t)$ *i* $\psi(t)$ *imaju izvode u tački* $t \in (a,b)$, *i ukoliko je* $\varphi'(t) \neq 0$, *tada funkcija* $y = f(x)$ *ima izvod u tački* t *i važi*

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Dokaz. Kako je $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$, sledi

$$f'(x) = (\psi(\varphi^{-1}(x)))' = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' = \psi'(t) \cdot \frac{1}{(\varphi(t))'} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Primer 2.3. Naći izvod funkcije $x = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t)$, **(cikloida).** (Neka se kružnica $x^2 + (y-r)^2 = r^2$ poluprečnika r kotrlja bez klizanja po x osi. Uočimo na kružnici fiksnu tačku $O(0,0)$. Kotrljanjem kružnice po x osi tačka O opisuje liniju koja se naziva cikloida. Parametarski oblik jednačine cikloide je:

$x = r(t - \sin t),\ y = r(1 - \cos t),\ t \in R$.)

Rešenje. $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{r \sin t}{r(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg} \dfrac{t}{2} \,(t \neq 2k\pi, k \in Z)$. Δ

3. IZVODI ELEMENTARNIH FUNKCIJA

1. $c' = 0$ (vidi Primer 1.1., slučaj 1).

2. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0, a \neq 1$, jer je

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\frac{1}{x}} = \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

Specijalno, kada je $a = e$, imamo $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Takođe, za funkciju $y = \ln|x|$, koja je definisana za $x \neq 0$, imamo da je

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} (\ln(x))' & , \ x > 0 \\ (\ln(-x))' & , \ x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \ x > 0 \\ -\dfrac{1}{x}(-1) & , \ x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x},\ x \neq 0.$$

3. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0, a \neq 1$, jer je

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Specijalno, kada je $a = e$, imamo $(e^x)' = e^x$.

4. $x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in R, x > 0$, jer je

$$(x^a)' = (e^{\ln x^a})' = e^u u'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ell n x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1},$$

gde smo stavili da je $u = a \ln x$.

Ako je $\alpha = \dfrac{p}{q}$ racionalan broj pri čemu je q neparan broj tada data formula važi i za $x < 0$. Zaista, ako je $p \neq 0$ paran broj, tada je

$$(x^{\frac{p}{q}})' = ((-x)^{\frac{p}{q}})' = -\frac{p}{q}(-x)^{\frac{p}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}, \ (p - q \text{ je neparan broj}).$$

Ako je p neparan broj tada je

$$(x^{\frac{p}{q}})' = (-(-x)^{\frac{p}{q}})' = -(-\frac{p}{q}(-x))^{\frac{p}{q}-1} = \frac{p}{q}(-x)^{\frac{p}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}, \ (p-q \text{ je paran broj }).$$

Lako se proverava da dati obrazac za izvod važi za svako $x \in R$, ako je $\alpha = \frac{p}{q} > 1$ racionalan broj, pri čemu je q neparan broj.

Formula važi i za $\alpha = n \in N$, tj. $(x^n)' = n\,x^{n-1}$, $x \in R$.,(vidi Primer 1.1.,pod 2).

5. $(\sin x)' = \cos x$ (vidi Primer 1.1, pod 3).

6 $(\cos x)' = -\sin x$, jer je

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \sin(x+\Delta x)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x .$$

7. $(\mathbf{tg}\ x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, jer je

$$(\text{tg } x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

8. $(\mathbf{ctg}\ x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq k\pi, k \in Z$, jer je

$$(\text{ctg } x)' = (\frac{\cos x}{\sin x})' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

9. $(\mathbf{arcsin}\ x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$ (vidi primer 2.3.).

10. $(\mathbf{arccos}\ x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Kako je $y = \arccos x$ i $x = \cos y$ za $0 \leq y \leq \pi$, to je

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in (-1,1).$$

11. $(\mathbf{arctg}\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Kako je $y = \text{arctg}\, x$ i $x = \text{tg}\, y$ za $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ to je

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

12. $(\mathbf{arcctg}\ \boldsymbol{x})' = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$.

Kako je $y = \operatorname{arcctg} x$ i $x = \operatorname{ctg} y$ za $0 < y < \pi$, to je

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Navedimo sada tablicu izvoda osnovnih elementarnih funkcija

	Funkcija $f(x)$	Izvod $f'(x)$	Važi za
1.	$c = const$	0	$x \in R$
2.	x	1	$x \in R$
3.	x^n	nx^{n-1}	$n \in N,\ x \in R$
	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	*a)* $\alpha = \frac{p}{q} \in Q,\ q \in N$ *neparan broj,* $x \neq 0$ *b)* $\alpha = \frac{p}{q} > 1$, q *neparan broj,* $x \in R$
	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in R, x > 0$
4.	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1, x \in R$
5.	e^x	e^x	$x \in R$
6.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1, x > 0$
7.	$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$

8.	$\sin x$	$\cos x$	$x \in R$
9.	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in R$
10.	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
11.	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in Z$
12.	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
13.	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
14.	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in R$
15.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in R$

Izvešćemo sada pravilo za takozvani **logaritamski izvod.** Neka je $y = (f(x))^{g(x)}, f(x) > 0$. Tada je $\ln y = g(x) \ln f(x)$. Ako nađemo izvode leve i desne strane dobijamo da je

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

(y je funkcija od x, pa je izvod $(\ln y)'$ određen primenom teoreme 2.2.). Odatle je

$$y' = (f(x))^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right].$$

Primer 3.1. Naći izvod funkciji $y = x^x$.

Rešenje. Iz $\ln y = x \ln x$ sledi da je $\frac{1}{y} y' = \ln x + 1$, odnosno da je

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1). \quad \Delta$$

Logaritamski izvod se koristi i kada imamo proizvod više funkcija. Na primer, ako je $y = \sin^3 x \cdot \ln^2 x \cdot x^3$, tada je $\ln y = 3 \ln \sin x + 2 \ln \ln x + 3 \ln x$ za $\sin x > 0$ i $\ln x > 0$. Sledi da je

$y' = \sin^3 x \cdot \ln^2 x \cdot x^3 \,(3\text{ctg}\, x + \dfrac{2}{x \ln x} + \dfrac{3}{x})$, za $\sin x > 0$ i $\ln x > 0$. Δ

4. DIFERENCIJABILNOST. DIFERENCIJAL

Neka je realna funkcija $f(x)$ definisana nad intervalom (a, b) i neka je $x \in (a, b)$ određena tačka. Jasno je da priraštaj funkcije $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, $x + \Delta x \in (a, b)$, zavisi od priraštaja nezavisno promenljive Δx.

Definicija 4.1. *Za funkciju* $f(x)$ *se kaže da je* **diferencijabilna** u **tački** x *ako se* Δy *može napisati u obliku*

$$\Delta y = D\Delta x + \alpha\Delta x,$$

pri čemu $\alpha \to 0$ *kada* $\Delta x \to 0$, *dok* D *ne zavisi od* Δx. *Linearni deo priraštaja funkcije,* $D\Delta x$, *naziva se* **diferencijal funkcije** $f(x)$ *i obeležava se sa* dy *ili* $df(x)$, *tj.*

$$dy = df(x) = D\Delta x.$$

Ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u svakoj tački skupa A onda se kaže da je **diferencijabilna nad skupom** A.

Teorema 4.1. *Potreban i dovoljan uslov da funkcija* $f(x)$ *bude diferencijabilna u tački* x *je da ima izvod u toj tački.*

Dokaz. Uslov je potreban. Pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u tački x. Tada je $\Delta y = D\Delta x + \alpha\Delta x$, pri čemu $\alpha \to 0$ kada $\Delta x \to 0$. Sledi da je

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(D + \alpha) = D.$ Izvod postoji i to je baš D ($D = f'(x)$).

Uslov je dovoljan. Ako $f(x)$ ima izvod u tački, tj. postoji granična vrednost $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, tada je količnik $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Sledi da je

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

što znači da je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u tački x. Treba uočiti da $f'(x)$ ne zavisi od Δx.

Kako je $D = f'(x)$ sledi da je diferencijal dy dat obrascem $dy = f'(x)\Delta x$. S obzirom da je za funkciju $y = x, dy = dx,$ to se u opštem slučaju u diferencijalu dy,

Δx zamenjuje sa dx, pa je $dy = f'(x)dx$. Odavde je $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ **(Lajbnicova oznaka za izvod)**, pa se zato izvod često piše kao količnik diferencijala funkcije dy i diferencijala nezavisne promenljive dx. Izvod složene funkcije je $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$, dok izvod inverzne funkcije glasi $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

Invarijantnost oblika diferencijala

Diferencijal ima osobinu **invarijantnosti oblika**. Ako je $y = f(u)$, $u = g(x)$ složena funkcija, tada je

$$dy = d(f(g(x))) = (f \circ g)'(x)dx = f'(u)g'(x)dx,$$

odnosno

$$dy = f'(u)du.$$

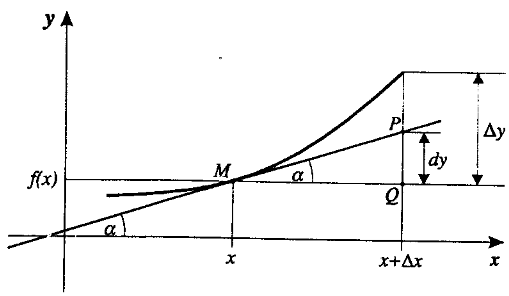
Znači, diferencijal ima isti oblik i kada je u funkcija od x, kao što bi imao da je u nezavisno promenljiva.

Geometrijska interpretacija diferencijala

Posmatrajmo grafik funkcije $y = f(x)$. Neka u proizvoljnoj tački $M(x, f(x))$ kriva $y = f(x)$ ima tangentu. Kako je

$$dy = f'(x)\Delta x = tg\alpha\Delta x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{MQ}}\overline{MQ} = \overline{PQ},$$

to diferencijal dy predstavlja priraštaj ordinate tangente u tački $M(x, f(x))$ koji odgovara priraštaju argumenta Δx.



Slika 4.1

Osobine diferencijala

Teorema 4.2. *Ako su funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ diferencijabilne u tački x, tada važi*

1. $d(u(x) \pm v(x)) = du(x) \pm dv(x)$, $(d(u \pm v) = du \pm dv)$.

2. $d(u(x)\, v(x)) = v(x)\, du(x) + u(x)\, dv(x)$, $(d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv)$.

3. $d(\frac{u(x)}{v(x)}) = \frac{v(x)\,du(x) - u(x)\,dv(x)}{v^2(x)}$ ($v(x) \neq 0$ *u tački* x),($d\,\frac{u}{v} = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$).

4. $d(c\,u(x)) = c\,du(x)$, *c je proizvoljna konstanta* ($d(c \cdot u) = c \cdot du$).

Dokaz. Dokaz sledi direktno iz Teoreme 2.1. Dokazaćemo, na primer, osobinu 2.

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)'dx = (u' \cdot v + u \cdot v')\,dx = v \cdot u'dx + u \cdot v'dx = v \cdot du + u \cdot dv .$$

Primena diferencijala

Kako je za diferencijabilnu funkciju $y = f(x)$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x, \ \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0,$$

zaključujemo da u određenom smislu priraštaj Δy možemo aproksimirati diferencijalom $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$ kada $\Delta x \to 0$, tj. $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ $(\Delta x \to 0)$. Na osnovu toga sledi da je

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad (\Delta x \to 0).$$

Primer 4.1. Naći približno $\sqrt[3]{8{,}01}$.

Rešenje. Za funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x}$ imamo da je $\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Delta x$ $(\Delta x \to 0)$, $x \neq 0$. Za $x = 8$ i $\Delta x = 0{,}01$ dobijamo

$$\sqrt[3]{8 + 0{,}01} \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} \cdot 0{,}01 = 2 + \frac{1}{1200} \approx 2 + 0{,}00083 = 2{,}00083 . \ \Delta$$

5. VIŠI IZVODI I DIFERENCIJALI

Izvodi višeg reda

Neka je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna nad intervalom (a, b). Izvod $f'(x)$ funkcije $f(x)$ je funkcija nezavisno promenljive x, definisana nad intervalom (a, b). Ako je ona diferencijabilna u nekoj tački $x \in (a, b)$, onda njen izvod $(f'(x))'$ nazivamo **drugi izvod** ili **izvod drugog reda** funkcije $f(x)$ u tački x, koji označavamo sa $y'' = f''(x)$ ili $y^{(2)} = f^{(2)}(x)$. Dakle,

$$(f'(x))' = f''(x).$$

Slično se definiše $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$, itd.

Ako je definisan izvod $(n-1)$ reda, $n \geq 2$ tada je **n-ti izvod** ili **izvod n-tog**

reda definisan kao izvod funkcije $y = f^{(n-1)}(x)$, tj.

$$(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x).$$

Ako se govori o drugom, trećem itd. izvodu (**viši izvodi**) funkcije $y = f(x)$ onda se izvod $y' = f'(x)$ naziva **prvi izvod** ili **izvod prvog reda**. Za funkciju koja ima izvod n – tog reda kaže se da je n – **puta diferencijabilna**. Po definiciji se uzima da je izvod **nultog reda** ili **nulti izvod** sama funkcija $f(x)$, tj. $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Na primer, za funkciju $y = \ln x$ je $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$, $x > 0$, $n \geq 1$.

Lajbnicova formula

Slično formuli, $(uv)' = u'v + uv'$, postoji obrazac za izračunavanje izvoda n-tog reda funkcije $y = uv$, pod pretpostavkom da su funkcije u i v n-puta diferencijabilne. Taj Lajbnicov obrazac ima oblik

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Obrazac se izvodi principom matematičke indukcije.

Ako je funkcija $y = f(x)$ data u parametarskom obliku, $x = \varphi(t)$, $y = \varphi(t)$, $t \in (a, b)$ tada je

$$y''(x) = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'(x) = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'(t) \cdot t'(x) = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^2} \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{y''x' - x''y'}{(x')^3}.$$

Drugi izvod inverzne funkcije $x = f^{-1}(y)$ je:

$$x''(y) = \left(\frac{1}{y'(x)}\right)'(y) = \left(\frac{1}{y'(x)}\right)'(y) \cdot x'(y) = \frac{-y''(x)}{y'^2(x)} \cdot \frac{1}{y'(x)} = -\frac{y''(x)}{y'^3(x)}.$$

Slično se traže i izvodi n - tog reda, $n \geq 3$.

Diferencijali višeg reda

Ako je funkcija $f(x)$ dva puta diferencijabilna nad intervalom (a, b), onda, diferencijal funkcije $y = f'(x)dx$, koji označavamo sa d^2y, nazivamo **drugi diferencijal** ili **diferencijal drugog reda** funkcije $f(x)$ (sam diferencijal $dy = f'(x)dx$, u tom svetlu, naziva se **diferencijal prvog reda** ili **prvi diferencijal**).

Sledi da je

$$d^2 f = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2.$$

Induktivno se definišu i diferencijali višeg reda.

Pretpostavimo da je funkcija $f^{(n-1)}(x)$ diferencijabilna, $n \geq 2$. Diferencijal funkcije $d^{n-1}y = f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}$ se naziva diferencijal **n -tog reda** ili **n - ti diferencijal** funkcije $y = f(x)$ i označava se sa $d^n y$. Dokazuje se da važi

$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Diferencijali drugog, trećeg ili uopšte n-tog reda $n \geq 2$ se nazivaju **viši diferencijali** ili **diferencijali višeg reda.**

Kako je $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ to je $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ **(Lajbnicova oznaka za n - ti izvod** $f^{(n)}(x)$) funkcije $f(x)$.

Ako je $y = f(u)$, $u = u(x)$, pri čemu su funkcije $u = u(x)$ i $y = f(u)$ dva puta diferencijabilne, tada je $d^2 y = d(dy) = d(f'(u)du) = d(f'(u)du) + f'(u)d(du)$, tj.

$d^2 y = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u$.

Primetimo da drugi diferencijal ne poseduje osobinu invarijantnosti oblika. Slično važi i za više diferencijale.

6. OSNOVNE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA

Rolova[1] teorema

Teorema 6.1. *Ako je funkcija* $f : [a,b] \to R$ *neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a,b]$, *ima izvod nad otvorenim intervalom* (a,b) *i ako je* $f(a) = f(b)$, *tada postoji bar jedna tačka* $\xi \in (a,b)$, *takva da je* $f'(\xi) = 0$.

Dokaz. Neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom dostiže bar jednom svoju najmanju vrednost m i najveću vrednost M. Ako je $m = M$, $f(x)$ ima konstantnu vrednost na celom intervalu, pa je $f'(x) = 0$ za svako $x \in (a,b)$. Neka je $m < M$. Pretpostavimo da je $M > f(a) = f(b)$ (ukoliko je $M = f(a)$ tada je $m < f(a)$). Tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a,b)$, takva da je $f(\xi) = M$. Dokazaćemo da je

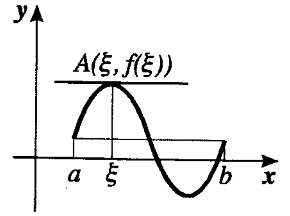
[1] M. Rolle (1652 – 1719), francuski matematičar

$f'(\xi) = 0$. Važi $f(\xi + \Delta x) \leq f(\xi)$, za $\xi + \Delta x \in [a, b]$, odnosno,

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0 \text{, za } \Delta x > 0 \text{ i } \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0 \text{, za } \Delta x < 0 .$$

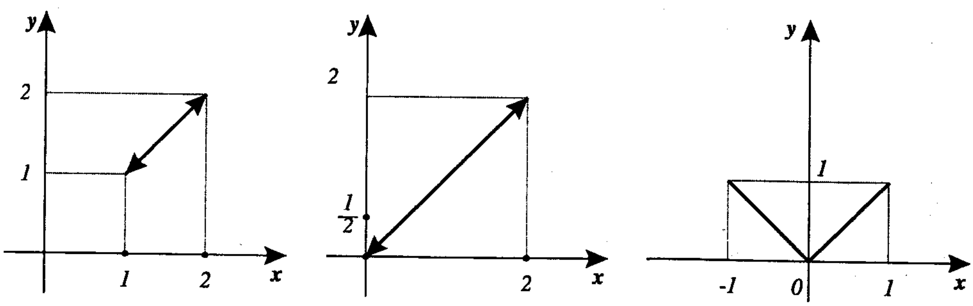
Za tačku ξ, po pretpostavci postoji $f'(\xi)$, pa je $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$. Iz $f'_+(\xi) \leq 0$ i $f'_-(\xi) \geq 0$ i $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$ sledi da je $f'(\xi) = 0$.

Geometrijski smisao Rolove teoreme je taj, da postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ sa osobinom da je tangenta u tački $A(\xi, f(\xi))$ krive $y = f(x)$ horizontalna, tj. paralelna sa x – osom (vidi sliku 6.1).



Slika 6.1

Sve pretpostavke u Rolovoj teoremi su bitne. Ako bar jedna pretpostavka ne važi, tvrđenje Rolove teoreme ne mora (a može) da bude tačno. Ako posmatramo funkcije sa slike 6.2 vidimo da ne postoji ξ sa osobinom da je $f'(\xi) = 0$. Funkcija sa slike a) ima prekid u tačkama $x = 1$ i $x = 2$. Funkcija sa slike b) ima prekid i različitu vrednost u tačkama $x = 1$ i $x = 2$, a funkcija sa slike c) nema izvod u tački $x = 0$.

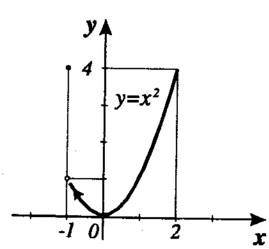


a) b) c)

Slika 6.2

Ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \in (-1,2] \\ 4 & , \quad x = -1 \end{cases}$$ nad intervalom $[-1,2]$ (vidi sliku 6.3.) vidimo da, iako funkcija $f(x)$ ne ispunjava uslove Rolove teoreme (ima prekid u tački $x = -1$), postoji tačka $\xi \in (-1,2)$ u kojoj je $f'(\xi) = 0$ ($f'(x) = 2x$, za $x \in (-1,2)$, pa sledi da je $\xi = 0$).



Slika 6.3

Navedimo i jednostavnu **mehaničku** interpretaciju Rolove teoreme. Neka se tačka kreće po pravoj i neka se u trenutku t nalazi u tački sa koordinatom $x(t)$. Neka je funkcija $x = x(t)$ neprekidna za $t \in [\alpha, \beta]$ i diferencijabilna za $t \in (\alpha, \beta)$. Ako je $x(\alpha) = x(\beta)$, tj. ako se položaj tačke u trenutku $t = \alpha$ poklapa sa položajem tačke u trenutku $t = \beta$, tada mora postojati bar jedna tačka $\xi \in (\alpha, \beta)$ u kojoj je brzina jednaka nuli.

Lagranžova[1] teorema

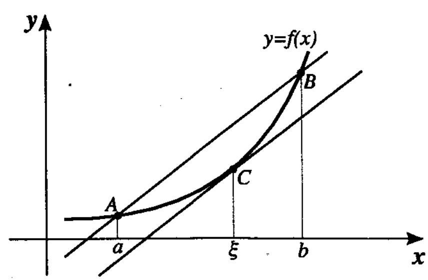
Teorema 6.2. *Ako je funkcija $f : [a, b] \to R$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ i ima izvod nad otvorenim intervalom (a, b), tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$, takva da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Dokaz. Dokaz je dat kasnije (strana 24).

Kako je $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, to je i $f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b)$.

J.L.Lagrange



Slika 6.4

Geometrijski smisao Lagranžove teoreme je u tome da postoji tačka $\xi \in (a, b)$, takva da je tangenta u tački $C(\xi, f(\xi))$ krive $y = f(x)$ paralelna sa sečicom kroz tačke $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ (vidi sliku 6.4.).

Navedimo i **mehaničku** interpretaciju Lagranžove teoreme. Ako posmatramo pravolinijsko kretanje tačke po zakonu $x = x(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, pri čemu je funkcija $x(t)$ neprekidna nad intervalom $[\alpha, \beta]$ i diferencijabilna nad intervalom (α, β), onda je srednja brzina jednaka $\dfrac{x(\beta) - x(\alpha)}{\beta - \alpha}$, za vremenski interval $[\alpha, \beta]$. Postoji $\xi \in (\alpha, \beta)$

[1] J.L.Lagrange (1736 – 1813), francuski matematičar

sa osobinom da je trenutna brzina u tački ξ jednaka srednjoj brzini u pomenutom intervalu, jer je $\dfrac{x(\beta)-x(\alpha)}{\beta-\alpha} = x'(\xi)$.

Ako stavimo da je $\dfrac{\xi - a}{b-a} = \theta$, tada je $\xi = a + \theta(b-a), 0 < \theta < 1$, to se tvrđenje Lagranžove teoreme može zapisati i u sledećem obliku

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a), 0 < \theta < 1.$$

Ako uz to još stavimo da je $a = x$, $b = x + h$, tada tvrđenje Lagranžove teoreme dobija sledeći oblik

$$f(x+h) - f(x) = h\, f'(x + \theta\, h), 0 < \theta < 1.$$

Inače, Lagranžovu teoremu zovemo još **i teorema o srednjoj vrednosti.**

Posledice Rolove i Lagranžove teoreme

Posledica 6.1. (Rolov metod za razdvajanje korena ili nula funkcije).

Ako za funkciju $f : [a,b] \to R$ *važi:*

a) $f(x)$ *je neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a,b]$,

b) $f(x)$ *je diferencijabilna nad intervalom* (a,b) *i pri tome je* $f'(x) \neq 0$ *za* $x \in (a,b)$,

c) $f(a)\cdot f(b) < 0$,

tada postoji samo jedna nula funkcije nad intervalom (a,b).

Dokaz. Na osnovu neprekidnosti funkcije nad $[a,b]$ i činjenice da je $f(a)\cdot f(b) < 0$, sledi da postoji bar jedna nula funkcije nad intervalom (a,b). Pretpostavimo da postoje dve različite nule $c_1, c_2 \in (a,b)$ funkcije $f(x)$. Neka je $c_1 < c_2$. Kako funkcija ispunjava uslove Rolove teoreme nad zatvorenim intervalom $[c_1, c_2] \subset (a,b)$ sledi da postoji bar jedna tačka $\xi \in (c_1, c_2)$ takva da je $f'(\xi) = 0$, što je suprotno sa pretpostavkom b). Dakle, funkcija ima tačno jednu nulu nad otvorenim intervalom (a,b).

Posledica 6.2. *Ako je funkcija* $f : (a,b) \to R$ *diferencijabilna nad intervalom* (a,b) *i ako su* $c_1, c_2 \in (a,b)$, $c_1 < c_2$ *dve uzastopne nule prvog izvoda, tada nad intervalom* (c_1, c_2) *funkcija* $f(x)$ *ima najviše jednu nulu.*

Dokaz je sličan dokazu prethodne Posledice, te ga izostavljamo.

Posledica 6.3. *Ako za funkciju $f : [a,b] \to R$ važi:*

a) *$f(x)$ je neprekidna nad $[a,b]$,*

b) $f(x)$ je difererncijabilna nad (a,b) i pri tome je $f'(x) = 0$, za svako $x \in (a,b)$, tada je $f(x)$ konstantna funkcija nad $[a,b]$.

Dokaz. Neka je x_1 fiksirana tačka iz intervala $[a,b]$, a $x \neq x_1 \in [a,b]$ proizvoljna tačka iz intervala $[a,b]$. Tada funkcija $f(x)$ nad zatvorenim intervalom $[x_1, x]$ za $x > 0$, odnosno, $[x, x_1]$ za $x < 0$ zadovoljava uslove Lagranžove teoreme. Dakle, postoji tačka $\xi \in (x_1, x)$ za $x > 0$, odnosno, $\xi \in (x, x_1)$ za $x < 0$, takva da važi

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1).$$

Kako je $f'(x) = 0$, to je $f(x) = f(x_1)$.

Napomena 6.1. Tvrdenje Posledice 6.3. važi i ako se pretpostavka da je interval $[a,b]$ zatvoren izostavi.

Posledica 6.4. *Ako funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju jednake izvode: $f'(x) = g'(x)$, $x \in I$, tada se one razlikuju za konstantu nad intervalom I.*

Dokaz. Funkcija $h(x) = f(x) - g(x)$ ispunjava sve uslove iz prethodne Posledice, pa je $h(x) = c$, odakle dobijamo da je $f(x) = g(x) + c$.

Posledica 6.5. *Neka je funkcija $f : [a,b] \to R$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ i diferencijabilna nad otvorenim intervalom (a,b). Ako postoji $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ $(\lim\limits_{x\to b^-} f'(x))$, tada postoji i $f'_+(a)$ $(f'_-(b))$ i važi jednakost*

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = f'_+(a) \quad (\lim_{x\to b^-} f'(x) = f'_-(b)).$$

Dokaz. $f'_+(a)$ po definiciji je $f'_+(a) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$, ako ova granična vrednost postoji. Kako funkcija $f(x)$ nad intervalom $[a, a+\Delta x] \subset [a,b]$ zadovoljava uslove Lagranžove teoreme, to postoji tačka $\xi = a + \theta\,\Delta x \in (a, a+\Delta x), 0 < \theta < 1$, takva da je $f(a+\Delta x) - f(a) = f'(a+\theta\,\Delta x)\Delta x$. Tada je

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(a+\theta\,\Delta x).$$

Kako postoji $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$, to postoji i $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+} f'(a+\theta\,\Delta x)$, pri čemu važi jednakost $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+} f'(a+\theta\,\Delta x) = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$. Sledi da je

$f'_+(a) = \lim\limits_{\Delta x \to a^+} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to a^+} f'(a)$, što je i trebalo dokazati.

Slično se dokazuje da je $\lim\limits_{x \to b^-} f'(x) = f'_-(b)$.

Posledica 6.6. *Ako funkcija $f : I \to R$ ima izvod nad intervalom I, tada izvod $f'(x)$ ne može imati prekide prve vrste nad tim intervalom.*

Dokaz. Ako je c unutrašnja tačka intervala I, tada ako obe granične vrednosti $\lim\limits_{x \to c^-} f'(x)$ i $\lim\limits_{x \to c^+} f'(x)$ postoje, prema prethodnoj posledici mora da važi

$$\lim_{x \to c^-} f'(x) = \lim_{x \to c^+} f'(x) = f'(c).$$

Ako je $I = [a,b)$, a $c = a$ tada je,prema prethodnoj Posledici,

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) = f'_+(a).$$

Slično se rezonuje i za slučajeve, ako je $I = (a,b]$, odnosno, $I = [a,b]$.

Odavde sledi da za funkciju $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$, ne postoji funkcija $g : R \to R$ sa osobinom da je $g'(x) = f(x)$ za svako $x \in R$.

Da izvod može da ima prekide druge vrste, pokazuje sledeći primer.

Primer 6.1. Pokazati da za funkciju $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & , \ x \ne 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$, $f'(x)$ ima prekid druge vrste u tački $x = 0$.

Rešenje. Kako je $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$, za $x \ne 0$, $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0$, i sa obzirom da ne postoje granične vrednosti $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$ i $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$ to funkcija $f'(x)$ ima u nuli prekid druge vrste. Δ

Primer 6.2.

a) Pokazati da jednačina $\cos 2x + \cos 30x + \cos 100x = 0$ ima bar jedno rešenje nad intervalom $(0, \pi)$.

b) Dokazati nejednakost $\dfrac{x-y}{x} < \ln \dfrac{x}{y} < \dfrac{x-y}{y}$, $0 < y < x$.

Rešenje.

a) Posmatrajmo funkciju $g(x) = \dfrac{1}{2} \sin 2x + \dfrac{1}{30} \sin 30x + \dfrac{1}{100} \sin 100x$. Funkcija $g(x)$

ispunjava sve uslove Rolove teoreme nad intervalom $[0,\pi]$, pa postoji tačka $\xi \in (0,\pi)$, takva da je $g'(\xi) = 0$, odakle sledi da je za to ξ

$$\cos 2\xi + \cos 30\xi + \cos 100\xi = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

b) Primenom Lagranžove teoreme na funkciju $f(x) = \ln x$ nad intervalom $[y, x]$,

dobijamo da je $\ln x - \ln y = (x-y)\frac{1}{\xi}$, za neku tačku $\xi \in (y, x)$. Sledi da je

$\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y < \frac{x-y}{y}$, odnosno da je $\ln\frac{x}{y} > \frac{x-y}{x}$. Dakle, važi data dvostruka nejednakost. Δ

Košijeva[1] teorema

A.L.Cauchy

Teorema 6.3. *Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne nad zatvorenim intervalom $[a,b]$, imaju izvode nad otvorenim intervalom (a,b) i za svako $x \in (a,b)$ je $g'(x) \neq 0$, tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a,b)$, takva da je*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dokaz. Primetimo da je $g(b) - g(a) \neq 0$, jer bi inače funkcija $g(x)$ ispunjavala uslove Rolove teoreme, pa bi postojala tačka $\xi \in (a,b)$ takva da je $g'(\xi) = 0$, što je suprotno uslovu da je $g'(x) \neq 0$ za svako $x \in (a,b)$.
Funkcija $h(x) = (f(b) - f(a))\,g(x) - (g(b) - g(a))\,f(x)$, je neprekidna nad intervalom $[a,b]$ ima izvod u svakoj tački $x \in (a,b)$, i $h(a) = h(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$.
Prema Rolovoj teoremi postoji $\xi \in (a,b)$, takvo da je

$$h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0.$$

Sledi da je $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, što je i trebalo dokazati.

Dokaz Lagranžove teoreme. Lagranžova teorema je specijalan slučaj Košijeve. Naime, stavljajući u Košijevu teoremu $g(x) = x$, dobija se: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

[1] A.L. Cauchy (1789 – 1857), francuski matematičar

Lopitalova[1] pravila

Određivanje graničnih vrednosti neodređenih oblika "$\frac{0}{0}$" i "$\frac{\infty}{\infty}$".

Kažemo da količnik $\frac{f(x)}{g(x)}$ ima neodređeni oblik "$\frac{0}{0}$" kada $x \to a$ ako važi da je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, odnosno neodređeni oblik "$\frac{\infty}{\infty}$" ako $f(x) \to \pm\infty$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$.

G.F.A.De L´ Hospital

Za određivanje granične vrednosti neodređenog oblika "$\frac{0}{0}$" i "$\frac{\infty}{\infty}$" treba proveriti da li granična vrednost $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ postoji ili ne. Za određivanje granične vrednosti $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, korisna su tzv. Lopitalova pravila.

Teorema 6.4. *Neka su funkcije* $f:(a,b)\to R$, $g:(a,b)\to R$ *diferencijabilne nad otvorenim intervalom* (a,b) *i pri tom je* $g'(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$ *i neka je*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 \ \left(\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = 0\right).$$

Tada:

1. *Ako postoji* $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $\left(\lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = B\right)$ *tada postoji* $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ $\left(\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ *i važi jednakost*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \ \left(\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = B\right).$$

2. *Ako* $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \pm\infty$, *kada* $x\to a^+$ (*kada* $x\to b^-$), *tada i* $\frac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty$, *kada* $x\to a^+$ (*kada* $x\to b^-$).

Dokaz. Dokazaćemo slučaj 1) za desnu graničnu vrednost u tački a $(a\in R)$. Ostali slučajevi se analogno dokazuju.

[1] C. F. A. de L'Hospital (1661 – 1704), francuski matematičar

Posmatrajmo funkcije

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & , \quad x\in(a,b) \\ 0 & , \quad x=a \end{cases}, \quad G(x)=\begin{cases} g(x) & , \quad x\in(a,b) \\ 0 & , \quad x=a \end{cases}.$$

Funkcije $F(x)$ i $G(x)$ su neprekidne nad intervalom $[a,b)$ i diferencijabilne nad intervalom (a,b) ($F'(x)=f'(x), G'(x)=g'(x)\neq 0$). Kako za svako $x\in(a,b)$, funkcije $F(x)$ i $G(x)$ nad intervalom $[a,x]$ zadovoljavaju uslove Košijeve teoreme, sledi da postoji tačka $\xi\in(a,x)$, takva da važi

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Kako je $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, to za svako $\varepsilon>0$ postoji tačka $x_0\in(a,b)$, takva da važi

$$a<x<x_0 \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon.$$

Ako je $x\in(a,x_0)$, na osnovu $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right|<\varepsilon$, zaključujemo da je

$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, što je i trebalo da se dokaže.

Za slučaj da je "$a=-\infty$" uvedimo smenu $x=\frac{1}{t}$. Tada važi

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^-}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0^-}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0^-}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema 6.5. Neka su funkcije $f:(a,b)\to R$ i $g:(a,b)\to R$ diferencijabilne nad intervalom (a,b) i pri tome je $g'(x)\neq 0$, za $x\in(a,b)$ i neka $f(x)\to\pm\infty$ i $g(x)\to\pm\infty$ kada $x\to a^+$ ($f(x)\to\pm\infty$ i $g(x)\to\pm\infty$ kada $x\to b^-$). Tada

1. Ako postoji $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ $\left(\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=B\right)$ tada postoji i $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ $\left(\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ i važi jednakost $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ $\left(\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=B\right)$.

2. *Ako* $\frac{f'(x)}{g'(x)}\to\pm\infty$, *kada* $x\to a^+$ $(x\to b^-)$ *tada i* $\frac{f(x)}{g(x)}\to\pm\infty$ *kada* $x\to a^+$ $(x\to b^-)$.

Dokaz. Dokažimo samo slučaj 1. $f(x) \to \infty$ i $g(x) \to \infty$ kada $x \to a^+$, $a \in R$.

Kako je $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ sledi da za svako $\varepsilon > 0$, postoji pozitivan broj δ_1, takav da je

$a + \delta_1 < b$ i da za svako $x \in (a, a+\delta_1)$ važi $\left| \dfrac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. S obzirom da

$f(x) \to \infty$ i $g(x) \to \infty$ kada $x \to a^+$, to postoji pozitivan broj $\delta_2 < \delta_1$, takav da za svako $x \in (a, a+\delta_2)$ važi $f(x) > 0$ i $g(x) > 0$. Neka je x_1 fiksirana tačka iz intervala $(a, a+\delta_2)$. Iz činjenice da $f(x) \to \infty$ kada $x \to a^+$, sledi da postoji pozitivan broj $\delta_3 < \delta_2$ takav da za svako $x \in (a, a+\delta_3)$ važi $f(x) > f(x_1)$. Sledi da je za svako $x \in (a, a+\delta_3)$ $\dfrac{f(x_1)}{f(x)} - 1 \neq 0$.

Primenjujući Košijevu teoremu za funkcije $f(x)$ i $g(x)$ nad zatvorenim intervalom $[x, x_1]$, $x \in (a, a+\delta_3)$, $x < x_1$, sledi da postoji tačka $\xi \in (x, x_1)$ takva da je

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{g(x_1) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}}.$$

Uvedimo sledeće oznake

$$\alpha_1 = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\,, \quad \alpha_2(x) = \frac{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}} - 1\,, \; x \in (a, a+\delta_3),\; x < x_1 .$$

Iz $f(x) \to \infty$ i $g(x) \to \infty$ kada $x \to a^+$ sledi da je $\lim\limits_{x\to a^+} \alpha_2(x) = 0$, pa za svako $\varepsilon > 0$ postoji pozitivan broj $\delta < \delta_3$, takav da važi

$$a < x < a + \delta \Rightarrow \left|\alpha_2(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(|A| + \varepsilon)}.$$

Kako tačka $\xi \in (x, x_1) \subset (a, a+\delta_1)$, sledi $|\alpha_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Iz

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}},\; x \in (a, a+\delta_3),\; x < x_1,$$

sledi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (A + \alpha_1)(1 + \alpha_2(x)) = (A + \alpha_1) + (A + \alpha_1)\alpha_2(x).$$

Iz $|\alpha_2(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(|A| + \varepsilon)}$, $x < x_1$, $x \in (a, a + \delta)$ sledi

$$|\alpha_1 + (A + \alpha_1)\alpha_2(x)| \leq |\alpha_1| + (|A| + |\alpha_1|)|\alpha_2(x)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + (|A| + \frac{\varepsilon}{2})\frac{\varepsilon}{2(|A| + \frac{\varepsilon}{2})} < \frac{\varepsilon}{2} + (|A| + \varepsilon)\frac{\varepsilon}{2(|A| + \varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Na kraju, dobijamo $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - A\right| = |\alpha_1 + (A + \alpha_1)\alpha_2(x)| < \varepsilon$, za $x < x_1$,

$x \in (a, a + \delta)$, tj. sledi da je $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$, što je i trebalo dokazati.

Primer 6.3. Naći $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \sin x}{x}$.

Rešenje. Ovde ne možemo da koristimo Lopitalovo pravilo, jer $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 + \cos x}{1}$ ne postoji, dok je $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \sin x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty}(1 + \dfrac{\sin x}{x}) = 1$. Δ

Dakle, Lopitalova pravila daju dovoljne, ali ne i potrebne uslove za postojanje granične vrednosti.

I ostali neodređeni izrazi oblika "$0 \cdot \infty$", "$\infty - \infty$", "0^0", "∞^0" i "1^∞" mogu se određivati koristeći Lopitalova pravila.

1. "$0 \cdot \infty$": Ako je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$, tada je

$\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$, a to je neodređeni izraz oblika "$\dfrac{0}{0}$", ili

$\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ (neodređeni izraz oblika "$\dfrac{\infty}{\infty}$").

2. "$\infty - \infty$": ($f(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$).

$$\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right].$$

Ako je $\lim_{x \to a}\left[1 - \dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = 0$ slučaj se svodi na 1.

Ako je $\lim_{x \to a}\left[1 - \dfrac{f(x)}{g(x)}\right] \neq 0$, to $f(x) - g(x) \to \pm\infty$, kada $x \to a$.

3. "0^0", "∞^0", "1^∞":Neka je $\phi(x) = f(x)^{g(x)}$, $f(x) > 0$. Ako je $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ neodređen izraz oblika "0^0" ($\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$), oblika "$\infty^0$" ($f(x) \to \infty$ kada $x \to a$ i $\lim_{x \to a} g(x) = 0$) i oblika "1^∞" ($\lim_{x \to a} f(x) = 1$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$), tada je $\lim_{x \to a} \ln\phi(x) = \lim_{x \to a} g(x) \ln f(x)$, neodređen izraz oblika "$0 \cdot \infty$", "$0 \cdot \infty$" i "$\infty \cdot 0$", pa se slučaj svodi na 1.

Primer 6.4. Naći: **a)** $\lim_{x \to 0} x \ln x$ **b)** $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$ **c)** $\lim_{x \to 0} x^x$.

Rešenje.

a) $$\lim_{x \to 0} x \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0}(-x) = 0.$$

b) $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}.$$

c) $y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$,

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} x \ln x = 0. \quad \ln \lim_{x \to 0} y = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} y = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} x^x = 1. \quad \Delta$$

Tejlorova[1] teorema

Teorema 6.6. *Neka su funkcija $f(x)$ i svi njeni izvodi do $(n-1)$-og reda neprekidni nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ i neka $f(x)$ ima n-ti izvod nad otvorenim intervalom (a, b). Tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$, takva da je*

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

$$R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

[1] B. Taylor (1685 – 1731), engleski matematičar

Dokaz. Formirajmo pomoćnu funkciju $\phi(x) = F(x) - (\frac{b-x}{b-a})^n F(a)$, gde je

$$F(x) = f(b) - f(x) - \frac{(b-x)}{1!} f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) - \ldots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x).$$

B.Taylor

Na osnovu osobina funkcije $f(x)$, sledi da je funkcija $\phi(x)$ neprekidna nad intervalom $[a,b]$, i ima izvod nad intervalom (a,b). Takođe je $\phi(a) = \phi(b) = 0$, pa $\phi(x)$ zadovoljava sve uslove Rolove teoreme. Postoji tačka $\xi \in (a,b)$, takva da je $\phi'(\xi) = 0$. Kako je

$$\phi'(x) = -f'(x) + f'(x) - \frac{b-x}{1!} f''(x) + \frac{(b-x)}{1!} f''(x) -$$

$$- \cdot \cdot \cdot - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{n}{b-a} (\frac{b-x}{b-a})^{n-1} F(a),$$

$$\phi'(\xi) = \frac{n}{(b-a)^n} (b-\xi)^{n-1} F(a) - \frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) = 0,$$

to je

$$f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1!} f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) - \ldots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) =$$

$$= \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Obrazac $f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (b-a)^i + R_n$, gde je $R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$, $\xi \in (a,b)$, zove se **Tejlorova formula ili Tejlorov obrazac**. Tejlorova formula se može napisati i u drugom obliku. Za $b = a + h$ je

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h),\ 0 < \theta < 1.$$

Za $b = x$, Tejlorova formula ima oblik

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta(x-a)),\ 0<\theta<1.$$

Kada je funkcija $f(x)$ predstavljena na način

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_n(x),$$

kažemo da je razvijena po Tejlorovoj formuli u tački a. Izraz $R_n(x)$ zovemo **ostatak** ili **greška** i on predstavlja odstupanje funkcije $f(x)$ od **Tejlorovog polinoma**

$$T_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i, \text{ tj. } R_n(x) = f(x) - T_{n-1}(x).$$

Za $n = 1$, kao specijalan slučaj, dobijamo Lagranžovu teoremu.

Maklorenova[1] formula

Ako u Tejlorovoj formuli stavimo da je $a = 0$, dobićemo **Maklorenovu formulu**

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x),\ 0<\theta<1.$$

Polinom $M_{n-1}(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)$ zove se **Maklorenov polinom**, a $R_n(x)$ **ostatak** ili **greška** aproksimacije funkcije $f(x)$ Maklorenovim polinomom.

Tejlorova i Maklorenova formula daju nam mogućnost da izračunamo vrednost funkcije u tački x (koja je blizu tačke a ili 0), znajući vrednost funkcije i svih izvoda do reda $(n-1)$ u tački $x = a$, odnosno u tački $x = 0$. Pri tome, tu vrednost možemo naći sa unapred određenom tačnošću.

Primer 6.5. Napisati Maklorenove formule za funkcije

a) $f(x) = e^x$ **b)** $f(x) = \sin x$ c) $f(x) = \cos x$

d) $f(x) = \ln(1+x)$ **e)** $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Rešenje.

a) Kako je $f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$ i

[1] C. Maclauren (1698 – 1746), engleski matematičar

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = e^0 = 1,\ f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x},$$

to Maklorenova formula za funkciju e^x glasi:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x), \qquad R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, 0 < \theta < 1, x \in R.$$

b) Kako je $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$,

$f^{IV}(x) = \sin x, \dots, f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n-1}\cos x,\ \ f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x,$

$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x,\ \ f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1},\ \ f^{(2n)}(0) = 0,$

$f^{(2n+1)}(\theta x) = (-1)^n \cos\theta x$, to Maklorenova formula za funkciju $\sin x$ glasi:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x),$$

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2h+1)!}\cos\theta x,\ \ 0 < \theta < 1, x \in R.$$

c) Kako je $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$,

$f^{IV}(x) = \cos x, \dots,\ f^{(2n-2)}(x) = (-1)^{n-1}\cos x,\ \ f^{(2n-1)}(x) = (-1)^n \sin x,$

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x,\ \ f^{(2n-2)}(0) = (-1)^{n-1},\ \ f^{(2n-1)}(0) = 0, f^{(2n)}(\theta x) = (-1)^n \cos\theta x,$
sledi da je

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R_{2n}(x),$$

$$R_{2n}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos\theta x,\ \ 0 < \theta < 1, x \in R.$$

d) Kako je $f(x) = \ln(1+x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, f''(x) = -(1+x)^{-2}$,

$f'''(x) = 2!(1+x)^{-3}, \dots,\ f^{(n-1)}(x) = (-1)^n (n-2)!(1+x)^{-n+1},$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n},\ f(0) = 0,\ f^{(n-1)}(0) = (-1)^n (n-1)!,$$

$$f^{(n)}(\theta x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+\theta x)^{-n},\ n \in N$$

to je,

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n},\ \ 0 < \theta < 1, -1 < x \le 1, n > 1.$$

e) Kako je za funkciju $f(x) = (1+x)^\alpha$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$,...,

$f^{(n-1)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+2)(1+x)^{\alpha-n+1}$, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$,

$f^{(n-1)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+2)$, $f^{(n)}(\theta x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+\theta x)^{\alpha-n}$, ako

definišemo da je $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$, $\alpha \in R$, $k \in N_0 = N \cup \{0\}$, to

Maklorenovu formulu za funkciju $f(x) = (1+x)^\alpha$ možemo zapisati u obliku

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + ... + \binom{\alpha}{n-1}x^{n-1} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n}x^n(1+\theta x)^{\alpha-n}, \quad 0 < \theta < 1, \; |x| < 1.$$

Specijalno, za $\alpha = -1$ je

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{(1+\theta\,x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1, \; |x| < 1. \; \Delta$$

Primer 6.6. Naći $\sqrt[5]{34}$ sa greškom manjom od 10^{-5}.

Rešenje.

$$\sqrt[5]{34} = \sqrt[5]{32+2} = \sqrt[5]{32(1+\frac{2}{32})} = 2(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{5}}.$$

Odredićemo n u Maklorenovoj formuli funkcije $f(x) = (1+x)^\alpha$ tako da, kada aproksimiramo funkciju $f(x)$ Maklorenovim polinomom $M_{n-1}(x)$, za $x = \frac{1}{16}$ i $\alpha = \frac{1}{5}$, greška $|2R_n(x)|$ bude manja od 10^{-5} ($(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{5}}$ množimo sa 2).

$$2\left|R_n(\frac{1}{16})\right| = 2\left|\binom{\frac{1}{5}}{n}\right| \cdot \frac{1}{16^n} \frac{1}{(1+\frac{\theta}{16})^{n-\frac{1}{5}}} < 2 \cdot \left|\frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)\cdot(\frac{1}{5}-2)...(\frac{1}{5}-n+1)}{n!}\right| \cdot \frac{1}{16^n} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{16^n}\left|\frac{\frac{1\cdot(1-5)(1-10)...(1-5n+5)}{5^n}}{n!}\right| = \frac{2}{n!\cdot 80^n} \cdot 4 \cdot 9 ... |5n-6|.$$

Odredimo n tako da je: $\dfrac{2}{n!(80)^n} \cdot 4 \cdot 9 \cdot ... \cdot |5n-6| < 0{,}00001$.

$$n = 1 \;\; ; \;\; \frac{2}{80} > 10^{-5}\,; \qquad n = 2 \;\; ; \;\; \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 6400} > 10^{-5}\,;$$

$$n = 3 \;\; ; \;\; \frac{2 \cdot 4 \cdot 9}{6 \cdot 512000} > 10^{-5}\,; n = 4 \;\; ; \;\; \frac{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{24 \cdot 40960000} < 0{,}00000103 < 10^{-5}\,.$$

Dakle, za aproksimaciju uzimamo Maklorenov polinom trećeg stepena $M_3(x)$. Kako je

$$2M_3(x) = 2\,(1 + \binom{\frac{1}{5}}{1} x + \binom{\frac{1}{5}}{2} x^2 + \binom{\frac{1}{5}}{3} x^3) =$$

$$= 2\,(1 + \frac{x}{5} \cdot \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5} - 1)}{2\,!} x^2 + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5} - 1)(\frac{1}{5} - 2)}{3\,!} x^3) =$$

$$= 2\,(1 + \frac{x}{5} - \frac{2}{25} x^2 + \frac{6}{125} x^3) = 2 + \frac{2}{5} x - \frac{4}{25} x^2 + \frac{12}{125} x^3,$$

to je

$$2M_3(\frac{1}{16}) = 2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{16} - \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{16^2} + \frac{12}{125}\frac{1}{16^3} = 2 + \frac{1}{40} - \frac{1}{1600} + \frac{3}{128000} =$$

$$= 2 + \frac{32000 - 80 + 3}{128000} \approx 2 + 0{,}249398 = 2{,}249398\,. \;\; \Delta$$

Primer 6.7. Napisati polinom $P(x) = 1 + x - 3x^2 + 4x^3$ po stepenima od $x - 1$.

Rešenje. Kako je $P\,(x) = P(1) + \frac{x - 1}{1\,!} P'(1) + \frac{(x - 1)^2}{2\,!} P''(1) + \frac{(x - 3)^3}{3\,!} P'''(1)$, i

$P(1) = 3$, $P'(x) = 1 - 6x + 12x^2 \Rightarrow P'(1) = 7$, $P''(x) = -6 + 24x \Rightarrow P''(1) = 18$,

$P'''(x) = 24 \Rightarrow P'''(1) = 24$, $P^{IV}(x) = 0$, to je

$$1 + x - 3x^2 + 4x^3 = 3 + 7(x - 1) + 9(x - 1)^2 + 4(x - 3)^3 \, \Delta$$

Primer 6.8. Dokazati da je e iracionalan broj.

Rešenje. Iz $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x)$, $R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$,

sledi da je $e = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + R_n$, $R_n = \frac{e^\theta}{n!}$, $0 < \theta < 1$.

Pretpostavimo da je e racionalan broj. Tada je $e = \frac{m}{n-1}$, gde je $n \geq 3$. Tada je $(n-1)!\left(e-1-\frac{1}{1!}-\ldots-\frac{1}{(n-1)!}\right)=(n-1)!R_n$, pa je $(n-1)!R_n$ prirodan broj. Kako je $R_n=\frac{e^\theta}{n!}$, to je $(n-1)!R_n=\frac{e^\theta}{n}$, $0<\theta<1$.

Stavljajući $\theta=0$ i $\theta=1$ dobijamo da je $\frac{1}{n}<(n-1)!R_n<\frac{3}{n}$, tj. sledi da je prirodan broj $(n-1)!R_n\in(0,1)$, što je nemoguće. Dakle, e je iracionalan broj. Δ

7. NAPOMENA U VEZI DEFINICIJE IZVODA

Pri definiciji izvoda funkcije $f: D\to R$ $D\subset R$ u tački $x\in D$, pretpostavka je bila da je x unutrašnja tačka oblasti definisanosti D, odnosno da je $x\in D^0$, tj. da je funkcija definisana u nekoj okolini tačke x. Specijalno, ako je $I_1=D=[a,b)$, $I_2=D=(a,b]$ ili $I_3=D=[a,b]$, rekli smo da funkcija $f(x)$ nad intervalom I_1, I_2 ili I_3 ima izvod ako:

- ima izvod u svakoj tački intervala (a,b),
- za slučaj I_1 i I_3 ima desni izvod u tački a,
- za slučaj I_1 i I_3 ima levi izvod u tački b.

Mogli smo definisati i izvod u tački $x\in D$, ali uz pretpostavku da je x tačka nagomilavanja skupa D, jer graničnu vrednost

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ x+\Delta x\in D}}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

možemo tražiti, bez obzira da li je funkcija definisana u nekoj okolini tačke x.

Na primer, ako posmatramo funkciju $f(x)=x^2, x\in Q$ ova funkcija bi imala "izvod" u svakoj tački $x\in Q$ (" $f'(x)=2x$ "), dok izvod, kako smo ga definisali u Poglavlju 1. ne postoji ni u jednoj tački $x\in Q$ (u svakoj okolini tačke $x\in Q$ ima i iracionalnih tačaka). Čitava teorija bi se mogla izvesti definišući na ovakav način "izvod". Ista je situacija i prilikom definisanje levog i desnog izvoda u tački.

Dalje, često imamo situaciju da funkcija $f(x)$ ima u tački a otklonjiv prekid, tj. postoji $\lim_{x\to a}f(x)=A$, pri čemu ili funkcija $f(x)$ nije definisana u tački a (recimo za funkciju $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to 0}f(x)=1$, a $f(x)$ nije definisana u nuli), ili ako je definisana $A \neq f(a)$. Za takve situacije funkcija nema izvod u tački a (funkcija mora da bude neprekidna u tački a).

Mogli bismo definisati

$$\bar{f}'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - A}{\Delta x},$$

ako ta granična vrednost postoji, i tu graničnu vrednost nazvati **nepravi** ili **kvazi izvod**. Sledilo bi da, ako funkcija ima izvod u tački a, tj. postoji $f'(a)$, tada postoji i $\bar{f}'(a)$ i pritom važi jednakost $f'(a) = \bar{f}'(a)$. Funkcija u tački a može da ima nepravi izvod, a da nema izvod. Na primer, za funkciju $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ je

$$\bar{f}'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x - \Delta x}{(\Delta x)^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin \Delta x}{2} = 0.$$

$f'(0)$ ne postoji (funkcija $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ nije definisana u nuli). Primetimo da je $\bar{f}'(0)$, ustvari izvod funkcije

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

u nuli, tj. $F'(0) = \bar{f}'(0) = 0$. Ista se situacija pojavljuje i kod jednostranih izvoda. Pretpostavimo da je funkcija $f : (a,b) \to R$ definisana nad intervalom (a,b) i da postoji $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a^+)$ ($\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b^-)$). Ako postoji

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a^+)}{\Delta x} \quad (\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(b+\Delta x) - f(b^-)}{\Delta x}),$$

onda tu graničnu vrednost možemo nazvati **nepravi desni** (**nepravi levi**) izvod u tački a (b) i obeležiti ga sa $\bar{f}'_+(a)$ $(\bar{f}'_-(b))$, tj.

$$\bar{f}'_+(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a^+)}{\Delta x} \quad (\bar{f}'_-(b) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(b+\Delta x) - f(b^-)}{\Delta x}).$$

Ovde nas ne interesuje da li je funkcija definisana u datim tačkama, ili, ako je definisana da li je u datoj tački neprekidna sa desne (leve) strane.

Ovakve situacije se često pojavljuju i od definicije **jednostranog nepravog izvoda** (desni nepravi izvod ili levi nepravi izvod jednim imenom zovemo jednostrani nepravi izvodi) možemo da imamo samo koristi (tu situaciju imamo kod razmatranja problema tangente i normale). Naravno, ako funkcija u tački ima desni (levi) izvod onda ona ima u toj tački i nepravi desni (nepravi levi) izvod i oni su jednaki. Obrnuto nije tačno. Recimo, ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , \quad x < 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases},$$

vidimo da ona nije definisana u nuli, pa ne može u nuli da ima ni desni ni levi izvod. Kako je

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0^-),$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} - \sin x = 0 = f(0+),$$

to je

$$\bar{f}_-'(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0^-)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 0,$$

$$\bar{f}_+'(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0^+)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\dfrac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\cos \Delta x - 1}{(\Delta x)^2} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-\sin \Delta x}{2\Delta x} = -\frac{1}{2}.$$

8. ISPITIVANJE FUNKCIJA

Monotonost funkcija

Definicija 8.1. *Funkciju $f : D \to R, D \subset R$ je nad intervalom $I \subseteq D$*

1. **monotono rastuća** *ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in I$ važi*

   $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

2. **monotono opadajuća** *ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in I$ važi*

   $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

3. **monotono nerastuća,** *ako za svake dve tačke* $x_1, x_2 \in I$ *važi*

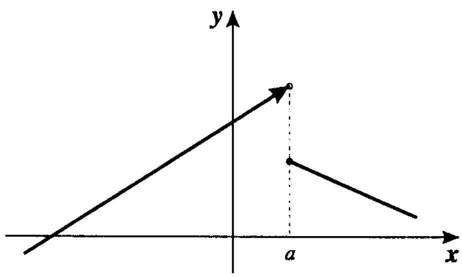
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

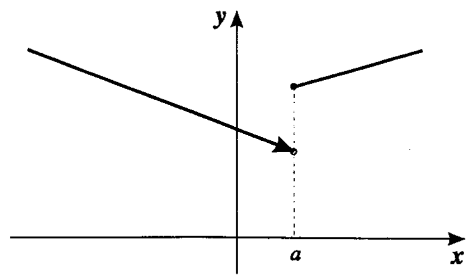
4. **monotono neopadajuća,** *ako za svake dve tačke* $x_1, x_2 \in I$ *važi*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

U svakom od navedenih slučajeva funkcija je **monotona** *nad intervalom* I. *Za slučaj* 1. *ili* 2 *funkcija je* **strogo monotona.**

Definicija 8.2. *Neka je funkcija* $f(x)$ *definisana u nekoj okolini tačke* a. *Funkcija* $f(x)$ *je* **rastuća u tački** a, *ako postoji okolina tačke* a *u kojoj za svako* x *iz te okoline važi* $f(x) > f(a)$ *za* $x > a$; $f(x) < f(a)$ *za* $x < a$. *Funkcija je* **opadajuća u tački** a, *ako postoji okolina tačke* a *u kojoj za svako* x *iz te okoline važi* $f(x) < f(a)$ *za* $x > a$; $f(x) > f(a)$ *za* $x < a$.





a) b)

Slika 8.1

Funkcija sa slike 8.1 (a) je opadajuća u tački a, a funkcija na slici 8.1 (b) je rastuća u tački a.

Teorema 8.1. *Neka funkcija* $f(x)$ *ima izvod nad intervalom* I. *Ako je* $f(x)$ *monotono neopadajuća funkcija nad intervalom* I *tada je* $f'(x) \geq 0$, *za* $x \in I$, *a ako je monotono nerastuća funkcija nad intervalom* I *tada je* $f'(x) \leq 0$, *za* $x \in I$.

Dokaz. Dokaz ćemo dati za monotono neopadajuću funkciju. Neka je $x \in I$ proizvoljna tačka. S obzirom da je $f(x)$ monotono neopadajuća nad I to je,

$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$ za $x + \Delta x \in I$. Odavde sledi da je

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Slično se može dokazati da važi i sledeća teorema.

Teorema 8.2. *Ako je funkcija rastuća (opadajuća) u tački* a *i ako postoji* $f'(a)$, *tada je* $f'(a) \geq 0$ $(f'(a) \leq 0)$.

Ako je funkcija monotono rastuća (monotono opadajuća) nad intervalom I i ako postoji $f'(x)$ nad intervalom I, tada ne sledi da je uvek $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ za svako $x \in I$. Na primer, funkcija $f(x) = x^3$ je monotono rastuća, ali je $f'(x) = 3x^2 > 0$ ($f'(0) = 0$).

Teorema 8.3. *Pretpostavimo da funkcija* $y = f(x)$ *u tački* a *ima izvod* $f'(a) \neq 0$. *Ako je* $f'(a) > 0$, *funkcija* $f(x)$ *je u tački* a *rastuća, a ako je* $f'(a) < 0$, *ona je u tački* a *opadajuća.*

Dokaz. Dokaz ćemo dati za slučaj da je $f'(a) > 0$. Neka je $\varepsilon > 0$ takav broj da je $f'(a) - \varepsilon > 0$. Kako je $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$, postoji $\delta > 0$, takvo da važi

$$|a + \Delta x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a) \right| < \varepsilon,$$

odnosno,

$$|\Delta x| < \delta \Rightarrow 0 < f'(a) - \varepsilon < \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} < f'(a) + \varepsilon.$$

Sledi da je $\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} > 0$ za $|\Delta x| < \delta$, tj. važi

$$0 < \Delta x < \delta \Rightarrow f(a+\Delta x) > f(a), \quad -\delta < \Delta x < 0 \Rightarrow f(a+\Delta x) < f(a),$$

pa je funkcija rastuća u tački a.

Teorema 8.4. *Neka funkcija* $f(x)$ *ima prvi izvod nad intervalom* I. *Ako je* $f'(x) > 0$, *funkcija* $f(x)$ *je monotono rastuća nad intervalom* I, *a ako je* $f'(x) < 0$, *funkcija* $f(x)$ *je monotono opadajuća nad intervalom* I.

Dokaz. Neka je $[x_1, x_2] \subset I$ proizvoljan podinterval intervala I. Funkcija $f(x)$ nad intervalom $[x_1, x_2]$ ispunjava uslove Lagranžove teoreme, pa postoji tačka $\xi \in (x_1, x_2)$, takva da važi $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Ako je $f'(x) > 0$, tada je i $f'(\xi) > 0$, pa je $f(x_2) > f(x_1)$, što znači da je funkcija $f(x)$ montono rastuća nad I. Dokaz je sličan i za monotono opadajuću funkciju.

Da iz činjenice ako je funkcija $f(x)$ rastuća (opadajuća) u tački a, obavezno ne sledi da je ona monotona u nekoj okolini tačke a, može se videti iz sledećeg primera.

Primer 8.1. Pokazati da funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

nije monotona ni u jednoj okolini nule.

Rešenje. Kako je $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , \ x = 0 \end{cases}$, tada, iz $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$

sledi da je funkcija $f(x)$ rastuća u nuli. Da funkcija nije monotona ni u jednoj okolini nule, možemo videti posmatrajući nizove čiji su opšti članovi

$$a_n = \frac{1}{2n\pi},\ b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi},\ c_n = -\frac{1}{2n\pi},\ d_n = -\frac{1}{(2n+1)\pi}.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, to u svakoj okolini nule su skoro svi članovi datih nizova. Kako je $f'(a_n) = f'(c_n) = -\frac{1}{2}$, $f'(b_n) = f'(d_n) = \frac{3}{2}$, to sledi da u svakoj okolini nule imamo tačke gde je prvi izvod pozitivan i imamo tačke gde je prvi izvod negativan, pa sledi da funkcija $f(x)$ nije monotona ni u jednoj okolini nule. Primetimo da prvi izvod ima prekid druge vrste u nuli. Δ

Sada ćemo dati jedan dovoljan uslov za monotonost funkcije u nekoj okolini tačke a.

Teorema 8.5. *Neka funkcija $f(x)$ ima prvi izvod u nekoj okolini tačke a i neka je $f'(x)$ neprekidna funkcija u tački a. Ako je $f'(a) > 0$, tada je funkcija $f(x)$ monotono rastuća u nekoj okolini tačke a, a ako je $f'(a) < 0$, funkcija $f(x)$ je monotono opadajuća u nekoj okolini tačke a.*

Dokaz. Iz neprekidnosti $f'(x)$ u tački a i činjenice da je $f'(a) > 0$ $(f'(a) < 0)$, sledi da postoji okolina $(a-\delta, a+\delta)$ tačke a u kojoj je $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$. Odavde sledi da je nad okolinom $(a-\delta, a+\delta)$ funkcija monotono rastuća (monotono opadajuća).

Teorema 8.6. (**Darbuova[1] teorema**) *Ako funkcija* $f : [a,b] \to R$ *ima izvod nad zatvorenim intervalom* $[a,b]$ *i ako je* $f'(a) \neq f'(b)$*, onda* $f'(x)$ *uzima sve međuvrednosti između* $f'(a)$ *i* $f'(b)$.

Dokaz. Uzmimo da je $f'(a) > f'(b)$, a C neka međuvrednost, tj. $f'(a) > C > f'(b)$. Posmatrajmo pomoćnu funkciju $g(x) = f(x) - Cx$. Kako je $g'(x) = f'(x) - C$, sledi da je

$$f'(a) - C = g'(a) > 0 > g'(b) = f'(b) - C.$$

Funkcija $g(x)$ je neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$, jer za svako $x \in [a,b]$ postoji $g'(x)$.

G. Darboux

Na osnovu osobina neprekidnosti funkcije nad zatvorenim intervalom, sledi da postoji $\xi \in [a,b]$, takvo da je $g(\xi) = \max_{x\in[a,b]} g(x)$, $\xi \neq a$. Zaista, iz $g'(a) > 0$, sledi da postoji tačka $x \in (a,b]$ sa osobinom da je $g(x) > g(a)$, dakle funkcija $f(x)$ u tački a nema najveću vrednost. Slično, sledi da je $\xi \neq b$. Dakle, $\xi \in (a,b)$. S obzirom da u tački ξ funkcija ima najveću vrednost, sledi da je $g'(\xi) = 0$, tj. sledi da je $f'(\xi) = C$.

Da bi se shvatio značaj ove teoreme, treba uočiti da funkcija $f'(x)$ ne mora da bude neprekidna nad intervalom $[a,b]$. Ako je ona neprekidna, onda se tvrđenje teoreme dobija direktno iz osobina neprekidnosti funkcije $f(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a,b]$. Znamo da izvod $f'(x)$ može da ima prekid druge vrste(Primer 6.1).

Ekstremne vrednosti funkcija

Definicija 8.3. *Ako je realna funkcija* $f(x)$ *definisana u nekoj okolini tačke* $a \in R$, *tada kažemo da funkcija* $f(x)$ *u tački* a *ima* **lokalni minimum** (**lokalni maksimum**) ako *postoji* $\delta > 0$, *takvo da*

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > f(a) \quad (f(x) < f(a)).$$

Ako funkcija u tački a *ima lokalni minimum ili lokalni maksimum kažemo da funkcija u tački* a *ima* **lokalnu ekstremnu vrednost.**

[1] G.Darboux (1842–1917), francuski matematičar

Ove pojmove ne treba poistovetiti sa najvećom i najmanjom vrednošću funkcije. Taj odnos je sledeći:

- Ako funkcija u tački a ima lokalni minimum (lokalni maksimum) onda je to najmanja (najveća) vrednost funkcije u nekoj okolini tačke a.
- Ako je $x = a + \Delta x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, tada, kao što vidimo, funkcija u tački a ima lokalnu ekstremnu vrednost ako je priraštaj funkcije u tački a $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ stalnog znaka i to: ako je $\Delta y > 0$, funkcija u tački a ima lokalni minimum, a ako je $\Delta y < 0$ ima lokalni maksimum.

S obzirom da ćemo ovde ispitivati samo lokalne ekstremne vrednosti, to ćemo u daljem izlaganju reč "lokalni" izostaviti. Napomenimo da je našom definicijom ekstremne vrednosti obuhvaćen samo tzv. "unutrašnji" ekstrem, jer je pretpostavljeno da je funkcija definisana u nekoj okolini tačke a. Naime, mogli bismo reći da funkcija ima ekstremnu vrednost i u tački na kraju intervala definisanosti. Na primer, funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ ima u tački $x = 0$ minimum, pri čemu u tački $x = 0$ funkcija dostiže svoju minimalnu vrednost (apsolutni minimum – za svako $x > 0$ je $f(x) = \sqrt{x} > f(0) = 0$). Funkcija $f(x)$ je definisana samo za $x \geq 0$ pa se ne uklapa postojanje ekstremne vrednosti u našu definiciju, jer funkcija $f(x)$ nije definisana u čitavoj nekoj okolini tačke $x = 0$. S obzirom da neki zaključci koje ćemo ovde izvesti ne važe za takve tačke, pod ekstremnom vrednošću podrazumevaćemo ekstremnu vrednost iz definicije 8.3.

Napomena 8.1. Često se u literaturi kod definicije ekstremne vrednosti ne traži da za svako x važi $f(x) > f(a)$ odnosno $f(x) < f(a)$ nego je zahtev da je $f(x) \geq f(a)$ odnosno $f(x) \leq f(a)$. Ovakvu definiciju, koju smo ovde dali za lokalni minimum i lokalni maksimum, pojedini autori nazivaju **strogi lokalni minimum i strogi lokalni maksimum**, a jednim imenom ih zovu **strogi ekstremi**. S obzirom da ovde ispitujemo samo stroge ekstremne vrednosti, u tom smislu smo i dali definiciju ekstremne vrednosti funkcije.

Teorema 8.7. *Ako funkcija $f(x)$ ima u tački a ekstremnu vrednost i ako postoji $f'(a)$ tada je $f'(a) = 0$.*

Dokaz. Ako je $f'(a) > 0$, funkcija je u tački a rastuća, a ako je $f'(a) < 0$ ona je u tački a opadajuća. U svakom slučaju funkcija u tački a nema ekstremnu vrednost. Sledi da je $f'(a) = 0$.

Dakle, ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u tački a, potreban uslov da u posmatranoj tački ona ima ekstremnu vrednost jeste da je $f'(a) = 0$, a da to nije i dovoljan uslov, može se videti na primeru funkcije $f(x) = x^3$. Funkcija $f(x) = x^3$ je uvek monotono rastuća i nema ekstremnu vrednost, ali je $f'(x) = 3x^2 = 0$ za $x = 0$. Iz tog razloga potrebno je posmatrati nule prvog izvoda. Tačke u kojima je $f'(x) = 0$ nazivaju se **stacionarne tačke.**

Funkcija u tački a može da ima ekstremnu vrednost a da ne postoji $f'(a)$. Na primer, funkcija $f(x) = |x|$ ima ekstremnu vrednost za $x = 0$, ali u toj tački ne postoji prvi izvod ($f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$).

Jedna od mogućnosti da se ispita da li u tački a funkcija ima ekstremnu vrednost ili ne, jeste da ispitamo znak prvog izvoda.

Teorema 8.8. *Ako je funkcija u tački a neprekidna i ako postoji $\delta > 0$ takvo da za $x \in (a-\delta, a)$ je $f'(x) > 0$, ($f'(x) < 0$), a za $x \in (a, a+\delta)$ je $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) onda funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost i to maksimum (minimum).*

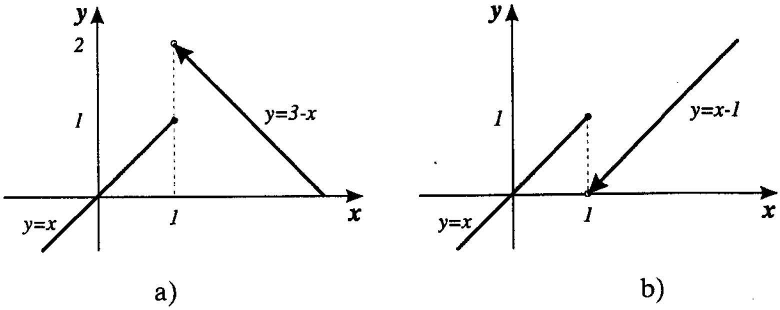
Dokaz. Dokaz ćemo dati za maksimum. Kako je $f'(x) > 0$ za $x \in (a-\delta, a)$ to je funkcija $f(x)$ monotono rastuća nad intervalom $(a-\delta, a)$, a kako je $f'(x) < 0$ za $x \in (a, a+\delta)$, to je data funkcija monotono opadajuća nad intervalom $(a, a+\delta)$. Dokažimo da je $f(x) < f(a)$ za svako $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$. Ako postoji neka tačka $x_1 \in (a-\delta, a)$, takva da je $f(x_1) \geq f(a)$ to sledi da postoji tačka $\xi \in (x_1, a)$ sa osobinom da je $0 \geq f(a) - f(x_1) = f'(\xi)(a - x_1)$. Sledi da je $f'(\xi) \leq 0$ što je suprotno sa pretpostavkom da je $f'(x) > 0$. Slično, ne može da postoji tačka $x_2 \in (a, a+\delta)$, takva da važi $f(a) \leq f(x_2)$. Dakle, $f(x) < f(a)$ za svako $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, pa funkcija u tački a ima maksimum.

Bitna je bila pretpostavka da je funkcija $f(x)$ u tački a neprekidna, i da prvi izvod funkcije $f(x)$ menja znak prolazeći kroz tačku a, bez obzira da li funkcija $f(x)$ u tački a ima prvi izvod ili ne. Da nije dovoljno samo pretpostaviti da je funkcija u tački a definisana, pa da u njoj ima ekstremnu vrednost, može se videti na primeru funkcije $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 1 \\ 3 - x & , \quad x > 1 \end{cases}$. Prvi izvod funkcije $f(x)$ u tački $x = 1$ menja znak ($f'(x) = 1$ za $x < 1$, $f'(x) = -1$ za $x > 1$, $f'(x)$ za $x = 1$ ne postoji) ali u tački $x = 1$ data funkcija nema maksimum, a ni minimum, iako je $f(x)$ definisana u tački $x = 1$ ($f(1) = 1$) (vidi sliku 8.2 a).

Da funkcija $f(x)$ u tački a može da ima ekstremnu vrednost, a da prvi izvod ne menja znak, prolazeći kroz tačku a, može se videti na primeru funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \le 1 \\ x-1 & , \quad x > 1 \end{cases}.$$

Funkcija $f(x)$ u tački $x = 1$ ima maksimum (vidi sliku 8.2 b) iako prvi izvod ne menja znak prolazeći kroz tačku 1 ($f'(x) = 1$ za $x \neq 1$, $f'(x)$ ne postoji u tački $x = 1$).



Slika 8.2

Teorema 8.9. *Neka je $f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ i $f^{(n)}(a) \neq 0, n \geq 2$. Ako je n paran broj, funkcija $f(x)$ ima u tački a ekstremnu vrednost i to: maksimum ako je $f^{(n)}(a) < 0$ odnosno minimum ako je $f^{(n)}(a) > 0$. Ako je n neparan broj funkcija $f(x)$ nema ekstremnu vrednost u tački a. U tom slučaju ako je $f^{(n)}(a) > 0$ funkcija je u tački a rastuća a ako je $f^{(n)}(a) < 0$ funkcija je u tački a opadajuća.*

Dokaz. Dokaz ćemo dajemo za slučaj da je $f^{(n)}(a) > 0$. Slično rezonovanje je i za slučaj da je $f^{(n)}(a) < 0$. Ako se primeni Tejlorova formula

$$f(a+\Delta x) - f(a) = \frac{\Delta x}{1} f'(a) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a + \theta\, \Delta x), 0 < \theta < 1,$$

i koriste dati uslovi dobija se

$$f(a+\Delta x) - f(a) = \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a + \theta\, \Delta x),\ 0 < \theta < 1.$$

Ako je $f^{(n)}(a) > 0$, tada je $f^{(n-1)}(x)$ rastuća funkcija u tački a, pa je $f^{(n-1)}(a + \theta\, \Delta x) > f^{(n-1)}(a) = 0$ za $\Delta x > 0$, a $f^{(n-1)}(a + \theta\, \Delta x) < f^{(n-1)}(a) = 0$ za $\Delta x < 0$. Ako je n paran broj izraz sa desne strane $\frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a + \theta\, \Delta x) > 0$ je pozitivan, pa je $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) > 0$ za svako dovoljno malo Δx, što dokazuje da funkcija $f(x)$ u tački a ima minimum. Ako je n neparan broj tada je, za dovoljno malo Δx, izraz $\dfrac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a+\theta\,\Delta x) \begin{cases} > 0 & \text{za } \Delta x > 0 \\ < 0 & \text{za } \Delta x < 0 \end{cases}$.

Dakle, $f(x)$ je rastuća funkcija u tački a.

Primer 8.2. Ispitati monotonost i naći ekstremne vrednosti funkcije

$$f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

Rešenje. Data funkcija je definisana za $-1 \le \dfrac{2x}{1+x^2} \le 1$. Iz

$$\frac{2x}{1+x^2} \le 1 \Rightarrow 1+x^2-2x \ge 0 \Rightarrow (x-1)^2 \ge 0$$

i

$$\frac{2x}{1+x^2} \ge -1 \Rightarrow (x+1)^2 \ge 0$$

sledi da je data funkcija $f(x)$ definisana za svako x.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\,\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\left|1-x^2\right|} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2}, & |x| < 1 \\[2ex] -\dfrac{2}{1+x^2}, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Znači, funkcija $f(x)$ monotono opada nad intervalima $(-\infty,-1)$ i $(1,\infty)$, a monotona raste za $|x| < 1$.

S obzirom da je funkcija neprekidna za svako x, sledi da u tački $x=-1$ funkcija ima minimum, a u tački $x=1$ maksimum.

Primer 8.3. Proveriti da li funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2(2+\sin\dfrac{1}{x}), & x \ne 0 \\[2ex] 0, & x = 0 \end{cases},$$

ima ekstremnu vrednost u tački $x = 0$.

Rešenje. Kako je

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

$$f''(x) = 4 + 2\sin\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}, \; x \neq 0,$$

to je $f'(0) = 0$, pa je $x = 0$ stacionarna tačka. $f''(0)$ ne postoji. Pokažimo da ne postoji $\delta > 0$ takvo da je u intervalu $(-\delta, 0)$, odnosno u intervalu $(0, \delta)$ prvi izvod istog znaka.

Ako posmatramo nizove se opštim članovima

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}, \; b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \; c_n = -\frac{1}{2n\pi}, \; d_n = -\frac{1}{(2n+1)\pi},$$

vidimo da važi: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.

Dakle, u svakoj okolini nule su skoro svi članovi posmatranih nizova.

Kako je $f'(a_n) = \dfrac{2}{n\pi} - 1 < 0$, $f'(b_n) = \dfrac{4}{(2n+1)\pi} + 1 > 0$, $f'(c_n) = -\dfrac{2}{n\pi} - 1 < 0$,

$f'(d_n) = -\dfrac{4}{(2n+1)\pi} + 1 > 0$, sledi da za svako $\delta > 0$ postoji $n_0 \in N$, takav da za svako $n \geq n_0$ $a_n, b_n \in (0, \delta) \wedge c_n, d_n \in (-\delta, 0)$, tj. sledi da za svako $\delta > 0$ u intervalima $(-\delta, 0)$ i $(0, \delta)$ postoje tačke u kojima je prvi izvod pozitivan i tačke u kojima je prvi izvod negativan. Dakle, prvi izvod ne menja znak prolazeći kroz tačku $x = 0$.

Znači, na osnovu do sada utvrđenih kriterijuma ne možemo primetiti da li funkcija $f(x)$ u tački nula ima ekstremnu vrednost ili ne. Kako je $f(0) = 0$ i $f(x) > 0$ za svako $x \neq 0$ sledi da funkcija $f(x)$ u tački nula ima minimum. Δ

Primer 8.4. Odrediti dimenzije pravouglog rezervoara zapremine V sa kvadratnom osnovom, otvorenog sa gornje strane, tako da zbir površina strana koje ograničavaju rezervoar, bude najmanji.

Rešenje. Iz zapremine rezervoara $V = x^2 h$ sledi da je visina rezervoara $h = \dfrac{V}{x^2}$.

Površina rezervoara je $P(x) = x^2 + 4x\dfrac{V}{x^2}$, odnosno $P(x) = x^2 + 4\dfrac{V}{x}$. Iz

$P'(x) = 2x - 4\dfrac{V}{x^2} = 0$ sledi da je $x = \sqrt[3]{2V}$ nula prvog izvoda funkcije $P(x)$. Kako je

$P''(x) = 2 + \dfrac{8V}{x^3}$ i $P''(\sqrt[3]{2V}) = 6 > 0$, to za $x = \sqrt[3]{2V}$ funkcija $P(x)$ ima minimum.

Iz $x = \sqrt[3]{2V}$, sledi da je $V = \dfrac{x^3}{2}$, odnosno $h = \dfrac{x}{2}$.

Znači, kod rezervoara sa najmanjom površinom visina je jednaka polovini osnove. Δ

Tangenta i normala krive

Videli smo da, kada funkcija $f(x)$ ima izvod u tački a, da je jednačina tangente u tački $A(a, f(a))$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

a normale $y - f(a) = -\dfrac{1}{f(a)}(x - a)$ za $f'(a) \neq 0$, odnosno $x = a$ za $f'(a) = 0$.

Tangenta funkcije u tački $A(a, f(a))$ može da bude paralelna sa y osom (vidi sliku 8.3).

U ova dva slučaja, ne postoji $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ za tačku a, ali $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \infty$ (slučaj a), odnosno $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to -\infty$ (slučaj b) kada $\Delta x \to 0$.

Znači, ako $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to +\infty$, odnosno $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to -\infty$ kada $\Delta x \to 0$, tada je prava $x = a$ tangenta funkcije $f(x)$ u tački $A(a, f(a))$. U tim slučajevima prava $y = f(a)$ je normala u tački $A(a, f(a))$.

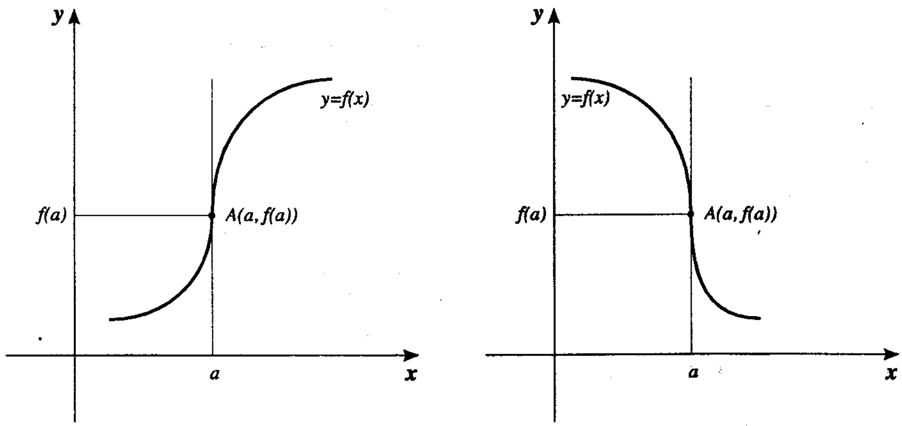
Može da se desi da ne postoji $f'(x)$ ali postoji $f'_+(a)$ ili $f'_-(a)$. Ako postoji $f'_+(a)$ tada je prava

$$y - f(a) = f'_+(a)(x - a)$$

tangenta na desnu granu funkcije $f(x)$ u tački $A(a, f(a))$ (**desna tangenta**), a ako postoji $f'_-(a)$, tada je prava

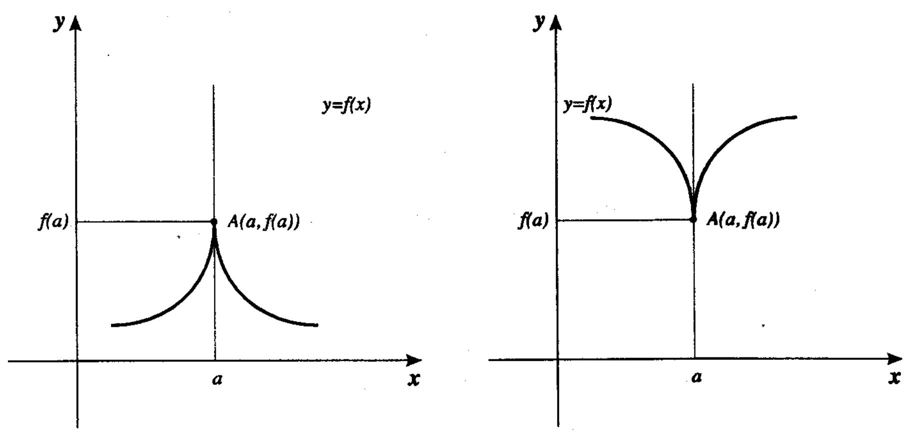
$$y - f(a) = f'_-(a)(x - a)$$

tangenta na levu granu funkcije $f(x)$ u tački $A(a, f(a))$ (**leva tangenta**)(slika 8.5 a).



a) b)

Slika 8.3

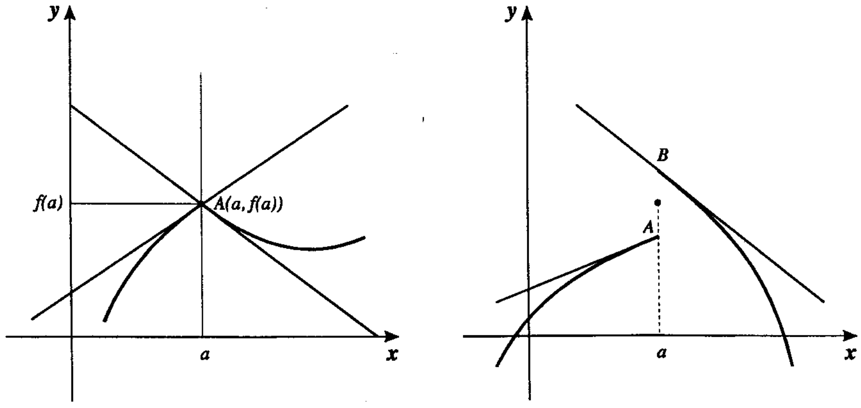


a) b)

Slika 8.4

Ako $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \infty$ ili $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to -\infty$ kada $\Delta x \to 0^+$ tada je prava $x = a$ tangenta na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$, a ako $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \infty$ ili $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to -\infty$ kada $\Delta x \to 0^-$ tada je prava $x = a$ tangenta na levu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$. Ako je prava $x = a$ tangenta i na levu i na desnu granu funkcije $f(x)$ u tački $A(a, f(a))$, tada je, ustvari, prava $x = a$ tangenta funkcije $f(x)$ u tački $A(a, f(a))$ (vidi sliku 8.4).

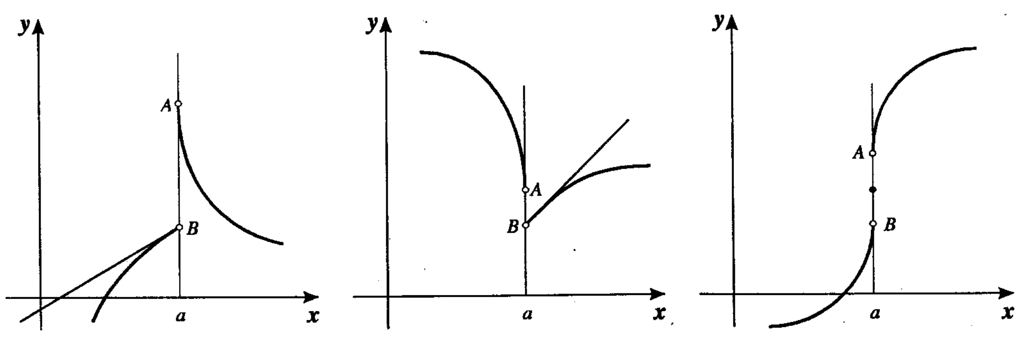
Može da se desi da ne postoji $f'_{+}(a)$, a da postoji $\bar{f}'_{+}(a)$ (nepravi desni izvod u tački a. Tada prava $y - f(a^{+}) = \bar{f}'_{+}(a)(x-a)$ jeste tangenta na desnu granu funkcije $f(x)$ u tački. $A(a, f(a^{+}))$. Ako postoji $\bar{f}'_{-}(a)$ (nepravi levi izvod), tada prava $y - f(a^{-}) = \bar{f}'_{-}(a)(x-a)$ jeste tangenta na levu granu funkcije $f(x)$ u tački $B(a, f(a^{-}))$ (slika 8.5 b).



a) b)

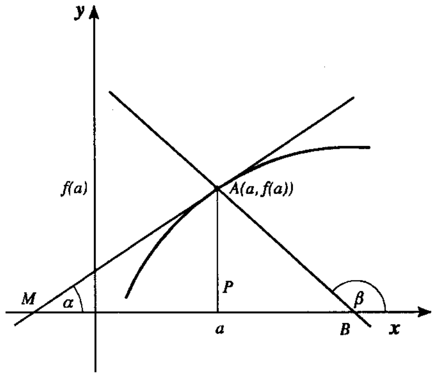
Slika 8.5

Ako $\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a^{+})}{\Delta x} \to \pm\infty$ kada $\Delta x \to 0^{+}$, tada prava $x = a$ jeste tangenta na desnu granu funkcije $f(x)$ u tački $A(a, f(a^{+}))$, a ako $\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a^{-})}{\Delta x} \to \pm\infty$ kada $\Delta x \to 0^{-}$ tada prava $x = a$ jeste tangenta na levu granu funkcije $f(x)$ u tački $B(a, f(a^{-}))$ (vidi sliku 8.6).



a) b) c)

Slika 8.6



Slika 8.7

Pretpostavimo da funkcija ima izvod u tački a i da je $f'(a) \neq 0$.

Dužina duži AM (vidi sliku 8.7) (duž AM je deo tangente od tačke $A(a, f(a))$ do preseka sa x osom) naziva se **dužina tangente** i označava se sa T, a dužina duži AB u oznaci N (duž AB je deo normale od tačke $A(a, f(a))$ do preseka sa x osom) naziva se **dužina normale.**

Dužine projekcija ovih duži na x osu nazivaju se **subtangenta** odnosno **subnormala**. Subtangentu označavamo sa S_T, a subnormalu sa S_N.

Kako je, $|f'(a)| = |tg\alpha| = \dfrac{|f(a)|}{S_T} = \dfrac{S_N}{|f(a)|}$, to je

$$S_T = \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \qquad T = \sqrt{f^2(a) + S_T^2} = \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|\sqrt{1 + f'^2(a)},$$

$$S_N = |f(a)f'(a)|, \qquad N = \sqrt{f^2(a) + S_N^2} = |f(a)|\sqrt{1 + f'^2(a)}.$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

Definicija 8.4. *Funkcija $f(x)$ definisana nad intervalom I je* **konveksna (konkavna)** *nad I ako za proizvoljne dve tačke $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ važi*

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

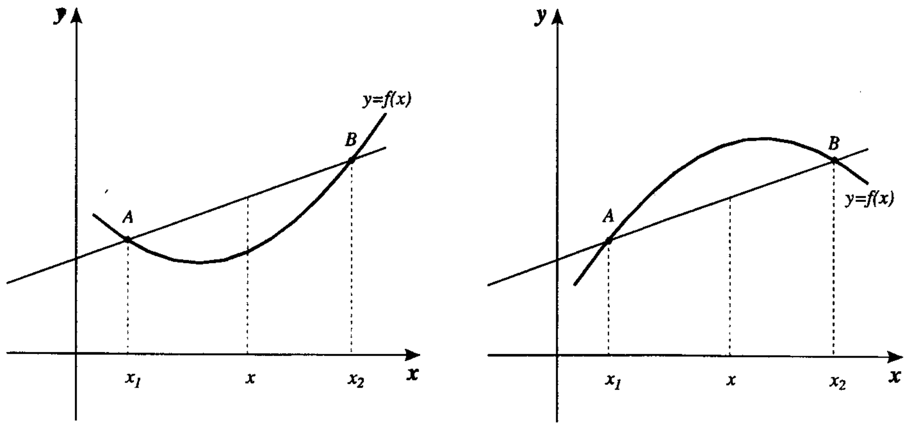
$$\left(f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)\right),$$

za svako x za koje je $x_1 < x < x_2$ (vidi sliku 8.8).

Geometrijski to znači da ako se kroz tačke $A(x_1, f(x_1))$ *i* $B(x_2, f(x_2))$, $x_1 < x_2$ postavi sečica, grafik funkcije je ispod (iznad) sečice, nad intervalom (x_1, x_2).

Napomenimo i ovde, da se često u literaturi umesto zahteva $y(x) < s(x)$ ($y(x) > s(x)$) ($s(x)$ je vrednost sečice u tački x) postavlja zahtev $y(x) \leq s(x)$

($y(x) \geq s(x)$). Ako važi da je $y(x) < s(x)$, odnosno $y(x) > s(x)$ onda se kaže da je funkcija **strogo konveksna** odnosno **strogo konkavna** nad intervalom I. S obzirom da ćemo ispitivati samo strogu konveksnost i strogu konkavnost, držaćemo se naše definicije konveksnosti odnosno konkavnosti. Dalje se u literaturi ovi termini zamenjuju, tj. poneki autori kažu da je funkcija konveksna ako je konkavna u smislu definicije i obrnuto da je konkavna ako je konveksna u našem smislu.



a) konveksna b) konkavna

Slika 8.8

Prema našoj definiciji konveksnosti i konkavnosti sledi da prava $y = ax + b$ nije ni konveksna ni konkavna.

Definicija 8.5. *Neka je funkcija* $f(x)$ *definisana u nekoj okolini tačke* a *i neka je u tački* a *diferencijabilna. Funkcija* $f(x)$ *je* **konveksna (konkavna) u tački** a *ako postoji okolina* $(a-\delta, a+\delta)$ *tačke* a*, takva da je*

$$f(x) > y_t(x) \; (f(x) < y_t(x)),$$

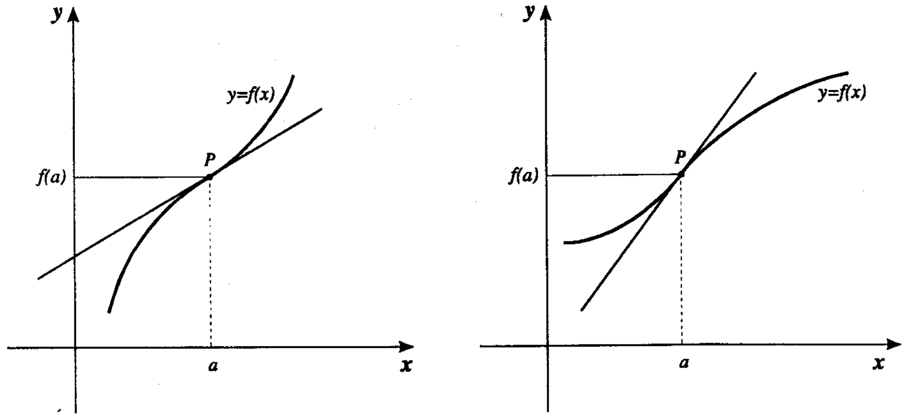
za svako $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$, *gde je*

$$y_t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

jednačina tangente na datu funkciju u tački $A(a, f(a))$.

Definicija 8.6. *Za tačku* $P(a, f(a))$ *se kaže da je* **prevojna tačka** *funkcije* $f(x)$ *ako postoji okolina* $(a-\delta, a+\delta)$ *tačke* a*, takva da je funkcija* $f(x)$ *nad intervalom* $(a-\delta, a)$ *konkavna (konveksna), a nad intervalom* $(a, a+\delta)$ *konveksna (konkavna) (vidi sliku 8.9).*

U daljem izlaganju se pretpostavlja da funkcija $f(x)$ ima izvod nad intervalom I.



a) b)

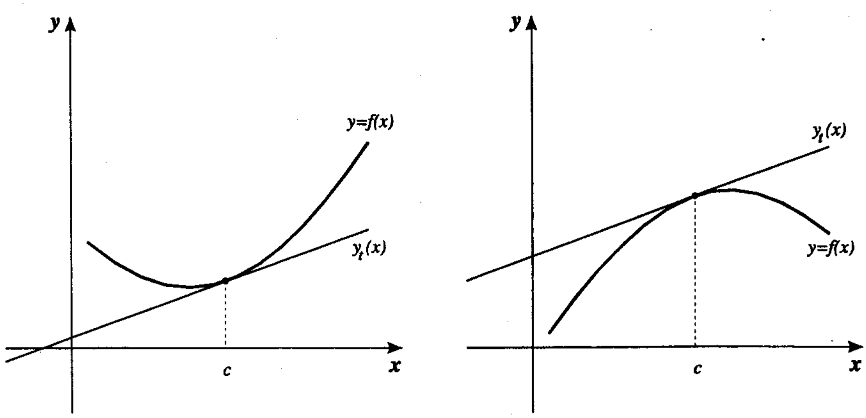
Slika 8.9

Ako funkcija $f(x)$ ima izvod nad intervalom I konveksnost i konkavnost može da se definiše na sledeća dva načina.

Definicija 8.7. *Funkcija $f(x)$ je konveksna (konkavna) nad intervalom I ako za svako $c \in I$ i za svako $x \in I \setminus \{c\}$ važi*

$$f(x) > y_t(x) \; (\, f(x) < y_t(x)\,)$$

gde je $y_t(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$ jednačina tangente na krivu $y = f(x)$ u tački $C(c, f(c))$ (vidi sliku 8.10).



a) konveksna b) konkavna

Slika 8.10

Definicija 8.8. *Funkcija $f(x)$ je konveksna (konkavna) nad intervalom I ako je $f'(x)$ monotono rastuća (monotono opadajuća) funkcija nad intervalom I.*

Teorema 8.10. *Ako funkcija $f(x)$ ima izvod nad intervalom I tada su definicije 8.4, 8.7 i 8.8 konveksnosti (konkavnosti) ekvivalentne.*

Dokaz. Dokaz ćemo dati za konveksnost (za konkavnost dokaz je sličan). Dokažimo da su definicije 8.7 i 8.8 ekvivalentne.

Neka je funkcija $f(x)$ konveksna nad intervalom I u smislu definicije 8.7 i neka su x_1 i x_2 ($x_1 < x_2$) proizvoljne tačke iz I. Neka su

$$y_t^1 = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1), \qquad y_t^2 = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2),$$

tangente na datu funkciju u tačkama $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$.

Tada važi:

$$f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1), \quad f(x_1) > f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

Sabiranjem tih nejednakosti dobija se

$$f(x_2) + f(x_1) > f(x_1) + f(x_2) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$

odnosno $(f'(x_2) - f'(x_1))(x_2 - x_1) > 0$.

Odavde sledi da je $f'(x_2) > f'(x_1)$ pa je $f'(x)$ monotono rastuća funkcija nad intervalom I.

Neka je sada funkcija $f(x)$ konveksna u smislu definicije 8.8. Sada je $f'(x)$ monotono rastuća funkcija nad intervalom I. Neka je $a \in I$ proizvoljna tačka iz I i $y_t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ tangenta funkcije u tački $A(a, f(a))$. Neka je $x \neq a$ proizvoljna tačka iz I. Tada važi

$$f(x) - y_t(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a),$$

odnosno

$$f(x) - y_t(x) = (x - a)\left(f'(\xi) - f'(a)\right),$$

gde je ξ tačka koja se nalazi između a i x.

Ako je $x > a$, tada je $f'(\xi) > f'(a)$, pa je $f(x) > y_t(x)$. Ako je $x < a$, tada je $f'(\xi) < f'(a)$, pa je $f(x) > y_t(x)$.

Dakle, $f(x)$ je konveksna nad intervalom I u smislu definicije 8.7.

Dokažimo sada da su definicije 8.4. i 8.8. konveksnosti ekvivalentne. Neka je funkcija $f(x)$ konveksna u smislu definicije 8.4.

Iz konveksnosti funkcije $f(x)$ za svake tri tačke $x_1, x_2, x \in I$ takve da je $x_1 < x < x_2$ sledi

$$f(x) < \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

odnosno

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Sledi da je

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

odnosno

$$f'(x_2) = \lim_{x \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq \lim_{x \to x_2} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ovim smo pokazali da je $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. Pokažimo da je $f'(x_1) < f'(x_2)$. Kako za svako $x \in (x_1, x_2)$ važi $f'(x_1) \leq f'(x) \leq f'(x_2)$ to bi iz jednakosti $f'(x_1) = f'(x_2)$ sledilo da je $f'(x) = c$ (konstanta) nad intervalom $[x_1, x_2]$. Ako posmatramo funkciju $g(x) = cx$ sledi da je $f'(x) = g'(x), x \in [x_1, x_2]$, pa se funkcije $f(x)$ i $g(x)$ razlikuju samo za konstantu. Dakle, nad intervalom $[x_1, x_2]$ funkcija $f(x)$ je prava $f(x) = cx + \alpha$, a prava nije ni konveksna ni konkavna funkcija. Kontradikcija. Dakle, važi da je $f'(x_1) < f'(x_2)$ pa je funkcija konveksna u smislu definicije 8.8.

Obrnuto, pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ konveksna u smislu definicije 8.8. Neka je $[x_1, x_2] \subset I$ proizvoljan interval i $x \in (x_1, x_2)$ proizvoljna tačka. S obzirom da funkcija $f(x)$ zadovoljava uslove Lagranžove teoreme nad zatvorenim intervalima $[x_1, x]$ i $[x, x_2]$ sledi da postoje tačke $\xi_1 \in (x_1, x)$ i $\xi_2 \in (x, x_2)$, takve da važi

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \quad \text{i} \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2).$$

Kako je $\xi_1 < x < \xi_2$, a $f'(x)$ monotono rastuća funkcija, to je $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$.

Odavde dobijamo

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

pa je funkcija $f(x)$ konveksna u smislu definicije 8.4.

Kako su definicije konveksnosti 8.4 i 8.8 ekvivalentne, definicije konveksnosti 8.7 i 8.8 ekvivalentne, to sledi da su definicije konveksnosti 8.4 i 8.7 ekvivalentne.

Teorema 8.11 *Ako je $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) nad intervalom I, tada je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I. Ako postoji $f''(x)$ nad intervalom I i ako je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I, tada je $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) nad intervalom I.*

Dokaz. Ako je $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) tada je $f'(x)$ monotono rastuća (opadajuća) funkcija, pa je $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I.

Ako je $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I, tada je $f'(x)$ monotono rastuća (opadajuća) funkcija nad intervalom I, pa je $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) nad intervalom I

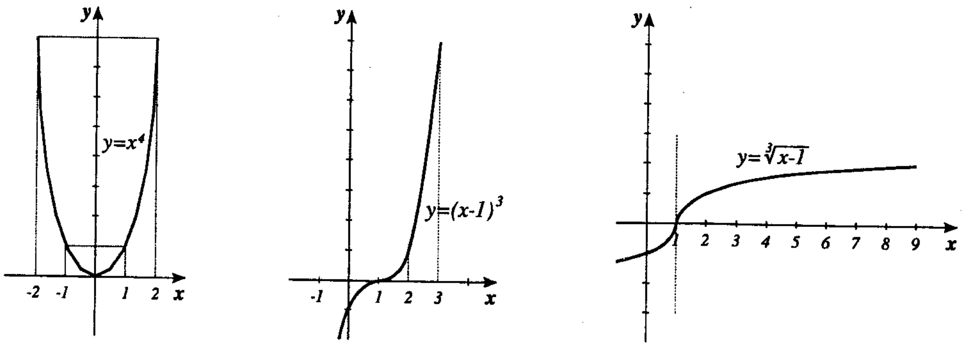
Teorema 8.12. *Ako je $P(a, f(a))$ prevojna tačka funkcije $f(x)$ i ako postoji $f''(a)$, tada je $f''(a) = 0$.*

Dokaz. Ako je $P(a, f(a))$ prevojna tačka funkcije, to postoji $\delta > 0$, takvo da je nad intervalom $(a - \delta, a)$ funkcija konkavna (konveksna, a nad intervalom $(a, a + \delta)$ konveksna (konkavna). Sledi da je funkcija $f'(x)$ nad intervalom $(a - \delta, a)$ monotono rastuća (opadajuća), a nad intervalom $(a, a + \delta)$ monotono opadajuća (rastuća). Odavde sledi da funkcija $f'(x)$ ima ekstremnu vrednost u tački a, pa je $f''(a) = 0$

Obrnuto ne mora da važi. Ako je $f''(a) = 0$ tačka $P(a, f(a))$ nije uvek prevojna tačka funkcije $f(x)$. Na primer, funkcija $f(x) = x^4$ ima drugi izvod $f''(x) = 12x^2$ za koji je $f''(0) = 0$, a tačka $O(0,0)$ nije prevojna tačka (slika 8.11 a).

Za funkciju $f(x) = (x-1)^3$ tačka $A(1,0)$ je prevojna tačka, jer je $f''(1) = 0$ $f''(x) = 6(x-1) > 0$ za $x > 1$ i $f''(x) < 0$ za $x < 1$ (slika 8.11 b).

Ako u tački a drugi izvod $f''(x)$ menja znak (bez obzira da li postoji $f''(a)$) i ako je funkcija $f(x)$ definisana u tački a, tada je $P(a, f(a))$ prevojna tačka date funkcije (tačka $P(a, f(a))$ može da bude prevojna tačka funkcije a da u tački $x = a$ ne postoji drugi izvod). Za funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ tačka $P(1,0)$ je prevojna tačka, jer je $f''(x) = \dfrac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$ i $f''(x)$ menja znak prolazeći kroz tačku $x = 1$. ($f''(1)$ ne postoji). Važi da je $f''(x) < 0$ za $x > 1$ i $f''(x) > 0$ za $x < 1$ (slika 8.11 c).



a) b) c)

Slika 8.11

Primer 8.5. Naći intervale konveksnosti, konkavnosti i prevojne tačke funkcije

$$f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

Rešenje. Videli smo da je

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{1+x^2} & , \ |x| > 1 \\[2mm] \dfrac{2}{1+x^2} & , \ |x| < 1 \end{cases},$$

i da funkcija u tački $x = -1$ ima minimum $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$, a u tački $x = 1$ maksimum $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$. Kako je

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} & , \ |x| > 1 \\[2mm] -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2} & , \ |x| < 1 \end{cases},$$

vidimo da je $f''(x) > 0$ nad intervalima $(-1,0)$ i $(1,\infty)$, a $f''(x) < 0$ nad intervalima $(-\infty,-1)$ i $(0,1)$.

Dakle, funkcija $f(x)$ je konveksna nad intervalima $(-1,0)$ i $(1,\infty)$, a konkavna nad intervalima $(-\infty,-1)$ i $(0,1)$. Prevojne tačke su $P_1(-1,-\dfrac{\pi}{2})$, $P_2(1,\dfrac{\pi}{2})$ i $P_3(0,0)$.Δ

Primetimo da su tačke -1 i 1 apscise prevojnih tačaka i da u njima funkcija ima ekstremne vrednosti.

Teorema 8.13. *Ako je $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$) funkcija $f(x)$ je konveksna (konkavna), u tački a.*

Dokaz. Neka je $y_t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ jednačina tangente funkcije $f(x)$ u tački $A(a, f(a))$. Tada je $f(a + \Delta x) - y_t(a + \Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x$, pa je

$$f(a + \Delta x) - y_t(a + \Delta x) = (f'(a + \theta\,\Delta x) - f'(a))\Delta x,\; 0 < \theta < 1.$$

Ako je $f''(a) > 0$, tada funkcija $f'(x)$ raste u tački a, pa je

$f'(a + \theta\,\Delta x) > f'(a)$ za $\Delta x > 0$ i $f'(a + \theta\,\Delta x) < f'(a)$ za $\Delta x < 0$. Sledi da je $f(a + \Delta x) - y_t(a + \Delta x) > 0$, odnosno $f(a + \Delta x) > y_t(a + \Delta x)$, pa je funkcija konveksna u tački a (slično se dokazuje i konkavnost u tački a).

Da iz $f''(a) > 0$ ne sledi uvek da postoji okolina tačke a nad kojom je funkcija konveksna, pokazuje sledeći primer.

Primer 8.6. Ispitati da li je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + x^4 \sin\dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\[2ex] 0 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

konveksna (konkavna) u nekoj okolini tačke $x = 0$.

Rešenje. Za datu funkciju $f(x)$ je

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 4x^3 \sin\dfrac{1}{x} - x^2\cos\dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\[2ex] 0 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + 12x^2 \sin\dfrac{1}{x} - 6x\cos\dfrac{1}{x} - \sin\dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & , \quad x = 0 \end{cases}.$$

Neka su $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ nizovi čiji su opšti članovi

$$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi},\quad b_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi},\quad c_n = -\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi},\quad d_n = -\frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}.$$

Kako je $f''(a_n) = -\frac{1}{2} + \frac{12}{\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^2}$, $f''(b_n) = \frac{3}{2} - \frac{12}{\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)^2}$,

$$f''(c_n) = \frac{3}{2} - \frac{12}{\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^2}, \quad f''(d_n) = -\frac{1}{2} + \frac{12}{\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)^2}$$

to je $f''(a_n) < 0$, $f''(b_n) > 0$, $f''(c_n) > 0$, $f''(d_n) < 0$ za dovoljno veliko n. Dakle, u svakoj okolini tačke $x = 0$ postoje tačke u kojima je drugi izvod negativan i tačke u kojima je drugi izvod pozitivan, pa funkcija $f(x)$ ne može da bude ni konveksna ni konkavna ni u jednoj okolini nule. Δ

Međutim, ako funkcija $f(x)$ ima drugi izvod $f''(x)$ u nekoj okolini tačke $x = a$ i ako je funkcija $f''(x)$ neprekidna u tački $x = a$, tada iz $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$) sledi da postoji okolina tačke $x = a$ u kojoj je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna).

Teorema 8.14. *Ako postoji $\delta > 0$ takvo da je u intervalu $(a - \delta, a)$ funkcija ispod (iznad) tangente funkcije $f(x)$ u tački $A(a, f(a))$, a u intervalu $(a, a + \delta)$ iznad (ispod) tangente funkcije $f(x)$ u tački $A(a, f(a))$ i ako postoji $f''(a)$, tada je $f''(a) = 0$.*

Dokaz. Ako je $f''(a) > 0$, tada je funkcija $f(x)$ u tački $x = a$ konveksna, a ako je $f''(a) < 0$, tada je funkcija $f(x)$ u tački $x = a$ konkavna. U oba slučaja se dolazi do kontradikcije sa prethodnom teoremom. Dakle, $f''(a) = 0$.

Međutim, može se desiti da je funkcija u nekom intervalu $(a - \delta, a)$ ispod (iznad), a u intervalu $(a, a + \delta)$ iznad (ispod) tangente na datu funkciju u tački $A(a, f(a))$, a da tačka $A(a, f(a))$ nije prevojna tačka date funkcije.

Primer 8.7. Ispitati da li je tačka $O(0,0)$ prevojna tačka funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x^3(2 + \sin\frac{1}{x^2}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}.$$

Rešenje. Za datu funkciju $f(x)$ je

$$f'(x)=\begin{cases}6x^2+3x^2\sin\frac{1}{x^2}-2\cos\frac{1}{x^2} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases},$$

$$f''(x)=12x+6x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}\cos\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}, \quad x\neq 0, \; f''(0) \text{ ne postoji.}$$

Ako posmatramo nizove $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ sa opštim članovima

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},\; b_n=\frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}},\; c_n=-\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},\; d_n=-\frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}$$

dobićemo da je za dovoljno veliko n

$$f''(a_n)=\frac{12}{\sqrt{2n\pi}}-6\sqrt{2n\pi}<0,\; f''(b_n)=\frac{12}{\sqrt{(2n+1)\pi}}+6\sqrt{(2n+1)\pi}>0,$$

$$f''(c_n)=-\frac{12}{\sqrt{2n\pi}}+6\sqrt{2n\pi}>0, f''(d_n)=-\frac{12}{\sqrt{(2n+1)\pi}}-6\sqrt{(2n+1)\pi}<0,$$

pa sledi da za svako $\delta>0$, funkcija $f(x)$ nad intervalima $(-\delta,0)$ i $(0,\delta)$ nije ni konkavna ni konveksna. Dakle, $O(0,0)$ ne može da bude prevojna tačka. Tangenta u tački $O(0,0)$ je prava $y=0$ Kako je $f(x)>0$ za svako $x>0$ to se funkcija $f(x)$ za $x>0$ nalazi iznad tangente, a kako je $f(x)<0$ za svako $x<0$, to se funkcija za svako $x<0$ nalazi ispod tangente. Δ

Teorema 8.15. *Neka je*

$$f''(a)=f'''(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0 \text{ i } f^{(n)}(a)\neq 0,\; n\geq 3.$$

Ako je n neparan broj, tada je $P(a,f(a))$ prevojna tačka funkcije $f(x)$.

Ako je n paran broj, tada je funkcija u okolini tačke $x=a$ konveksna za $f^{(n)}(a)>0$, a konkavna za $f^{(n)}(a)<0$.

Dokaz. Neka je $n=2k+1, k\in N$. Kako je $f^{(2k+1)}(a)=(f'')^{(2k-1)}(a)\neq 0$, to sledi da je $f''(x)$ rastuća funkcija u tački $x=a$ za $f^{(2k+1)}(a)>0$, a opadajuća funkcija u tački $x=a$ za $f^{(2k+1)}(a)<0$. Sledi da postoji $\delta>0$ takvo da je $f''(x)<f''(a)=0$, $(f''(x)>f''(a)=0)$ za $x\in(a-\delta,a)$, a $f''(x)>f''(a)=0$ $(f''(x)<f''(a)=0)$. za $x\in(a,a+\delta)$.

Dakle, nad intervalom $(a-\delta,a)$ funkcija je konkavna (konveksna), a nad intervalom

$(a, a+\delta)$ konveksna (konkavna), pa je tačka $P(a, f(a))$ prevojna tačka date funkcije.

Ako je $n = 2k, k \in N$ tada je $f^{(2k)}(x) = (f'')^{(2k-2)}(x)$, pa sledi da funkcija $f''(x)$ u tački $x = a$ ima ekstremnu vrednost i to minimum za $f^{(2k)}(a) > 0$, a maksimum za $f^{(2k)}(a) < 0$. Sledi da postoji $\delta > 0$ takvo da je za svako $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$. $f''(x) > f''(a) = 0$ odnosno $f''(x) < f''(a) = 0$. Dakle, sledi da je $f'(x)$ monotono rastuća funkcija nad intervalima $(a-\delta, a)$ i $(a, a+\delta)$ za $f^{(2k)}(a) > 0$, odnosno da je monotono opadajuća nad tim intervalima za $f^{(2k)}(a) < 0$. Dalje, kako je $f^{(2k)}(a) = (f')^{(2k-1)}(a)$, sledi da je funkcija $f'(x)$ rastuća u tački $x = a$ za $f^{(2k)}(a) > 0$, odnosno opadajuća za $f^{(2k)}(a) < 0$. To znači da postoji $\delta_1 > 0$ takvo da za $a - \delta_1 < x_1 < a < x_2 < a + \delta_1$ sledi $f'(x_1) < f'(a) < f'(x_2)$, odnosno da je $f'(x_1) > f'(a) > f'(x_2)$. Ovim smo dokazali da postoji okolina tačke a nad kojom je funkcija $f'(x)$ monotono rastuća (monotono opadajuća), pa je nad tom okolinom $f(x)$ konveksna (konkavna).

Asimptote funkcija

Definicija 8.9. *Neka je funkcija $f(x)$ definisana nad intervalom (a, ∞) ($(-\infty, a)$), $a \in R$. Funkcija $\phi(x)$ je* **asimptota funkcije** $f(x)$ ***kada*** $x \to \infty$, *ako je* $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - \phi(x)] = 0$. *Analogno, funkcija $\phi(x)$ je* **asimptota funkcije** $f(x)$ **kada** $x \to -\infty$, *ako je* $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - \phi(x)] = 0$.

Funkcija $f(x)$ se **asimptotski ponaša** kao $\phi(x)$ i piše se $f(x) \sim \phi(x)$ kada $x \to \infty$ (odnosno $x \to -\infty$). Geometrijski smisao asimptote je sledeći: postoji realan broj b takav da je razlika ordinata krivih $y = f(x)$ i $y = \phi(x)$ proizvoljno mala za svako $x > b$ ($x < b$).

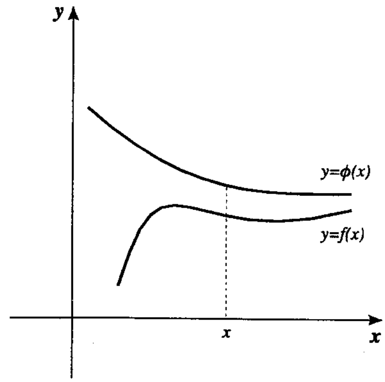
Kriva $y = f(x)$ se približava svojoj asimptoti $y = \phi(x)$ kada $x \to \infty$ (analogno i kada $x \to -\infty$). Ako je asimptota prava, znači $\phi(x) = mx + n, m, n \in R$, tada kriva $y = f(x)$ ima:

1. za $m \neq 0$ **kosu** asimptotu $\phi(x) = mx + n$, a
2. za $m = 0$ **horizontalnu** asimptotu $\phi(x) = n$.

Po definiciji je (uzmimo da $x \to \infty$) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (mx+n)] = 0$ ili

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right] = 0, \text{ pa je}$$

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx].$$



Slika 8.12

Ako postoje brojevi m i n kriva ima za asimptotu pravu $y = mx + n$, kada $x \to \infty$.

Analogno se posmatra slučaj kada $x \to -\infty$. Asimptote funkcije ne moraju biti iste kada $x \to \infty$ odnosno $x \to -\infty$.

Ako postoji $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x))$, vidimo da je prava $\phi(x) = n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ $(\phi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x))$ horizontalna asimptota funkcije $f(x)$ kada $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$.

Primer 8.8. Naći asimptote funkcija

a) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ b) $y = (1+\dfrac{1}{x})^x$ c) $y = \operatorname{arctg} x$

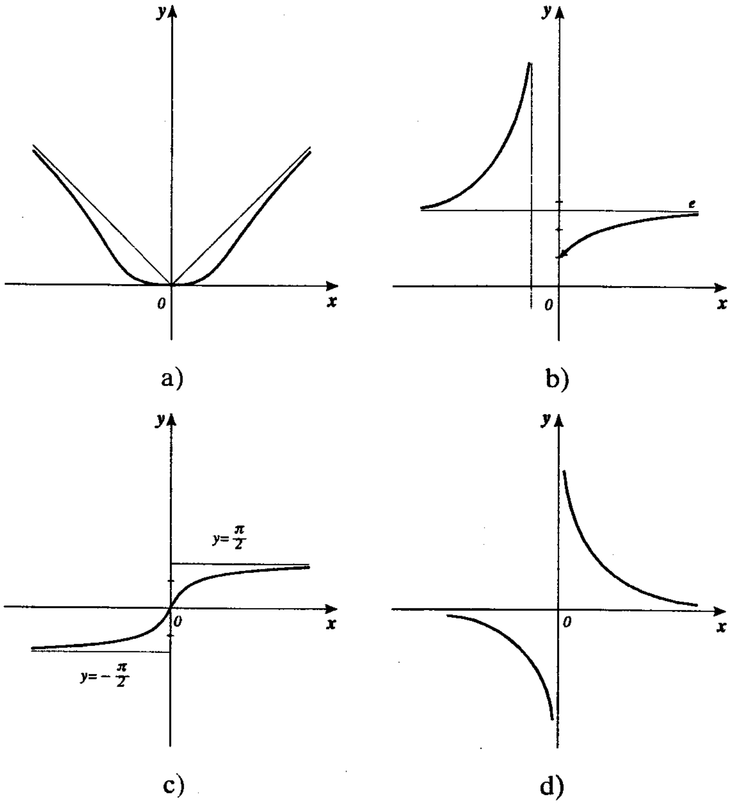
Rešenje.

a) Kako je $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x\sqrt{x^2+1}} = 1$ i

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x(x-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}\,(x+\sqrt{x^2+1})} = 0,$$

to je prava $y = x$ kosa asimptota funkcije kada $x \to \infty$.

Kako je $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x\sqrt{x^2+1}} = -1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + x\right) = 0$, to je prava $y = -x$ kosa asimptota funkcije kada $x \to -\infty$ (vidi sliku 8.13 a).



Slika 8.13

b) Prava $y = e$ je horizontalna asimptota funkcije $y = (1+\frac{1}{x})^x$, jer je

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e,$$ (vidi sliku 8.13 b).

c) Prava $y = \frac{\pi}{2}$ je horizontalna asimptota krive $y = \operatorname{arctg} x$, kada $x \to \infty$, a prava $y = -\frac{\pi}{2}$ je horizontalna asimptota iste krive kada $x \to -\infty$ (vidi sliku 8.13 c). Δ

Definicija 8.10. *Funkcija* $y = f(x)$ *ima* **vertikalnu asimptotu** *u tački nagomilavanja* $x = a$ *definicionog skupa, ako funkcija bar sa jedne strane tačke* a *teži* ∞ *odnosno ka* $-\infty$. *Za pravu* $x = a$ *kažemo da je* **vertikalna asimptota** *funkcije* $f(x)$.

Primer 8.9. Naći asimptote funkcija

a) $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

Rešenje.

a) Prava $x = 0$ je vertikalna asimptota funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$, jer $\frac{1}{x} \to \infty$, kada $x \to 0^+$, $\frac{1}{x} \to -\infty$ kada $x \to 0^-$. Kako je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, to je prava $y = 0$ horizontalna asimptota date funkcije, (slika 8.13 d).

b) Prava $x = 0$ je vertikalna asimptota funkcije $y = xe^{\frac{1}{x}}$, jer je

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \infty .$$

Primetimo da je $\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$. Prava $y = x + 1$ je kosa asimptota ove funkcije,

jer je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = 1 \text{ i } \lim_{x\to\infty}(xe^{\frac{1}{x}} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = 1 \text{ i } \lim_{x\to-\infty}(xe^{\frac{1}{x}} - x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1. \ \Delta$$

U praksi najčešće imamo situacije da funkcija $f(x)$ ima vertikalnu asimptotu u tački $a \in R$ ako je a rubna tačka oblasti definisanosti date funkcije.

Ispitivanje toka funkcija

Ispitivanje toka funkcije i crtanje njenog grafika je tip problema gde utvrđujemo niz osobina funkcije bilo elementarno, bilo uz pomoć izvoda, pa na osnovu toga crtamo odgovarajući grafik. Ispitivanje najčešće obuhvata:

I) Obavezna grupa zahteva,

I 1) određivanje oblasti definisanosti funkcije,

I 2) određivanje nula funkcije,

I 3) određivanje intervala monotonosti i određivanje ekstremnih vrednosti,

I 4) određivanje intervala konveksnosti, konkavnosti i određivanje prevojnih tačaka,

I 5) određivanje asimptota funkcije i ispitivanje položaja grafika funkcije u odnosu na asimptote,

I 6) tangente funkcije u tačkama gde ne postoji $f'(x)$ i ponašanje funkcije $f'(x)$ u tim tačkama,

I 7) skiciranje grafika date funkcije.

II Neobavezna grupa zahteva,

II 1) znak funkcije,

II 2) parnost i neparnost funkcije,

II 3) periodičnost funkcije.

Primer 8.10. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije

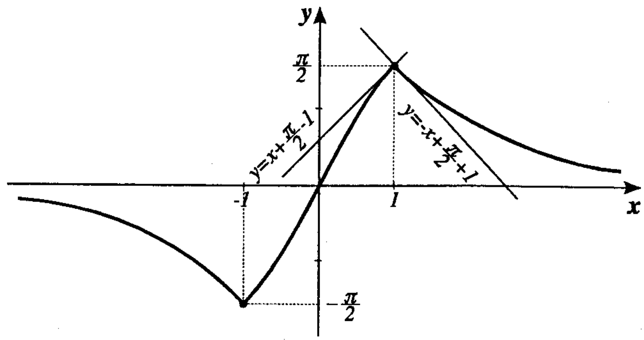
$$f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\,.$$

Rešenje. Funkcija je definisana za svako $x \in R$. Iz $f(x) = 0$, sledi da je $x = 0$ nula funkcije. Kako je $f(-x) = -f(x)$, funkcija je neparna, tj. funkcija je simetrična u odnosu na koordinatni početak. Izvodi funkcije su

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{1+x^2} & , \ |x| > 1 \\[2ex] \dfrac{2}{1+x^2} & , \ |x| < 1 \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} & , \ |x| > 1 \\[2ex] -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2} & , \ |x| < 1 \end{cases}.$$

Vrednost funkcije u tački $x = 1$ je $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$. Funkcija raste nad intervalom $(-1,1)$, a opada nad intervalima $(-\infty,-1)$ i $(1,\infty)$. Sledi da funkcija ima minimum za $x = -1$ $(f(-1) = -\dfrac{\pi}{2})$, a maksimum za $x = 1$ $(f(1) = \dfrac{\pi}{2})$. Funkcija je konveksna nad intervalima $(-1,0)$ i $(1,\infty)$, a konkavna nad intervalima $(-\infty,-1)$ i $(0,1)$. Sledi da su prevojne tačke funkcije $O(0,0)$ i $A(-1,-\dfrac{\pi}{2})$, $B(1,\dfrac{\pi}{2})$. Prava $y = 0$ je horizontalna asimptota, jer je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = 0$. Tangenta na levu (desnu) granu funkcije u tački $A(1,\dfrac{\pi}{2})$ je prava $y = x + \dfrac{\pi}{2} - 1$ $(y = -x + \dfrac{\pi}{2} + 1)$. Δ

Grafik date funkcije prikazan je na slici 8.4. Δ



Slika 8.4

9. VEKTORSKE FUNKCIJE JEDNE SKALARNE PROMENLJIVE

Definicija 9.1. *Ako za vektorsku funkciju* $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in (a,b)$ *postoji* $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$ *onda kažemo da vektorska funkcija* $\vec{r}(t)$ *ima* **izvod u tački** *t koji se obeležava sa* $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$ *ili sa* $\dot{\vec{r}}(t)$, *tj.*

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Očigledno je

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k},$$

pa važe slična pravila kao i kod izvoda realne funkcije jedne promenljive

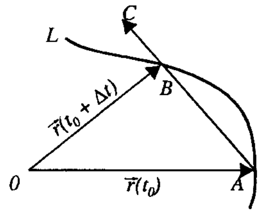
a) $\dfrac{d}{dt}(\lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2) = \lambda_1\dfrac{d\vec{r}_1}{dt} + \lambda_2\dfrac{d\vec{r}_2}{dt}$, **b)** $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = \dfrac{d\vec{r}_1}{dt}\cdot\vec{r}_2 + \dfrac{d\vec{r}_2}{dt}\cdot\vec{r}_1$,

c) $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = \dfrac{d\vec{r}_1}{dt}\times\vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \dfrac{d\vec{r}_2}{dt}$, **d)** $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_2(u(t))) = \dfrac{d\vec{r}}{du}\dfrac{du}{dt}$,

e) $\dfrac{d}{dt}((u\vec{r})) = u\dfrac{d\vec{r}}{dt} + \dfrac{du}{dt}\vec{r}$,

pri čemu izvodi na desnoj strani postoje po pretpostavci.

Geometrijska interpretacija izvoda. Pretpostavimo da je $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0 \neq 0$.



Slika 9.1

Tada je $\Delta\vec{r}(t) = \overrightarrow{AB}$ (A je vrh vektora $\vec{r}(t_0)$ i B vrh vektora $\vec{r}(t_0+\Delta t)$, pa je $\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \overrightarrow{AC}$). Granična vrednost

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}_0$$

je vektor koji leži na pravoj koja prolazi kroz tačku A koju ćemo definisati kao **tangenta krive** L u tački A. Tangenta krive L u tački A je prava

$$p: \frac{x-x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y-y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z-z_0}{\dot{z}_0}, (\dot{\vec{r}}_0 \neq 0), \text{ a ravan}$$

$$\dot{x}_0(x-x_0) + \dot{y}_0(y-y_0) + \dot{z}_0(z-z_0) = 0$$

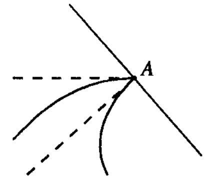
koja je normalna na p zovemo **normalna ravan krive** L. Ovde je stavljeno $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$, $\dot{z}(t_0) = \dot{z}_0$. Vektor $\dot{\vec{r}}$ ima smer tamo kuda skalar raste.

Primetimo da intenzitet vektora $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ zavisi od izbora parametra t.

Uzmimo $t = \alpha\tau$, $\alpha \neq 0$, tada je prema d) $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right|\left|\frac{1}{\alpha}\right|$. Stoga možemo izabrati parametar tako da taj intenzitet bude jednak jedinici i obeležićemo ga sa s. Tada je $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1$. Sledi da je

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$, odnosno $s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$. Dakle, s je dužina luka krive L od neke fiksne tačke M. Prema geometrijskoj interpretaciji izvoda sledi da je $\vec{r}\,'(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \vec{t}_0$ gde je $\vec{t}_0$, ort tangente na krivu L u posmatranoj tački, sa smerom porasta skalara t.

Ilustracije radi, navodimo dva slučaja koji se često javljaju.



Slika 9.2

Za jedinični vektor $\vec{c} = \vec{c}(t)$ je $\vec{c} \cdot \vec{c} = 1$, odakle sledi da je $\frac{d\vec{c}}{dt} \cdot \vec{c} + \frac{d\vec{c}}{dt} \cdot \vec{c} = 0$. Dakle, izvod $\frac{d\vec{c}}{dt}$ jediničnog vektora $\vec{c}$ normalan je na vektor $\vec{c}$. Za $\vec{r} = r\vec{r}_0$ ($\vec{r}_0$ je ort) je

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_o + r\frac{d\vec{r}_0}{dt}.$$

Ako je $\vec{r}_0$ konstantan vektor tada vektor $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_o$ ima pravac jediničnog vektora, a ako je $\vec{r}$ konstantnog intenziteta tada vektor $\frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ ima pravac koji je normalan na vektor $\vec{r}_0$.

Interesantna je ova **mehanička interpretacija jednostranih izvoda**. Ako materijalna tačka tokom kretanja udari u prepreku, ona se odbija i nastavlja kretanje. U trenutku t_0 (sudar sa preprekom) funkcija $\vec{r}$ nema izvod, ali postoji **desni i levi izvod u tački** t_0 dati sa

$$\dot{\vec{r}}_+(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}, \quad \dot{\vec{r}}_-(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0^-} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Oni daju brzinu posle i pre udara tačke u prepreku. Tim izvodima odgovaraju desna i leva tangenta na krivu L u tački A date sa

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_{0^+}} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_{0^+}} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_{0^+}}; \quad \frac{x - x_0}{\dot{x}_{0^-}} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_{0^-}} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_{0^-}}.$$

Funkciju $\vec{r} : [a, b] \to X_0$ ima **izvod** nad intervalom $[a, b]$ ako ima izvod u svakoj tački (a, b), u tački A desni, a u tački B levi izvod. **Diferencijal** $d\vec{r}$ je dat sa $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}dt = (dx, dy, dz)$.

DRUGA GLAVA

DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

U ovoj glavi nastavićemo proučavanje funkcija više realnih promenljivih, započeto u knjizi [12].

Posmatraćemo realne funkcije n realnih promenljivih, dakle funkcije $f : D \to R$ $(D \subset R^n, n \in N, n > 1)$). Vrednost funkcije $f : D \to R$ u tački $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$, za $n > 3$ zapisuje se kao $z = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, za $n = 3$, vrednost funkcije u tački $X(x, y, z)$ zapisuje se kao $u = f(X) = f(x.y.z)$, a za $n = 2$ vrednost funkcije u tački $X(x, y)$ sa $z = f(x, y)$. Kao što smo navikli u R^2 i R^3, tačke $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ označavaćemo kraće sa $X(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ i kažemo da je tačka X data sa koordinatama $x_1, x_2, ..., x_n$. Specijalno, za $n = 2$ umesto koordinata x_1 i x_2 tačke $X(x_1, x_2)$ koriste se, kao što smo i navikli, za koordinate oznake x i y, a za $n = 3$ umesto koordinata x_1, x_2 i x_3 tačke $X(x_1, x_2, x_3)$ koriste se za koordinate oznake x, y i z.

S obzirom da će se u ovoj glavi izučavati samo realne funkcije više realnih promenljivih, reč "realan" ćemo izostaviti.

10. PARCIJALNI IZVODI I DIFERENCIJABILNOST

Parcijalni izvodi

U tački $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n$, $n \geq 2$ funkcije $f : D \to R$ možemo, pod određenim pretpostavkama, posmatrati $n + 1$ priraštaja i to:

1. ako $M \in D$ nije izolovana tačka oblasti definisanosti D funkcije $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, tada

$$\Delta z = f(N) - f(M) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

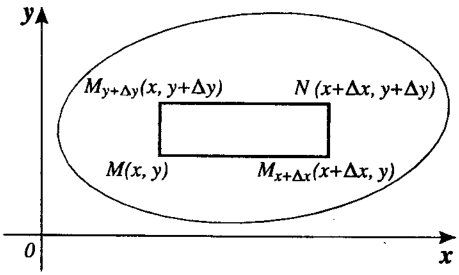
$$N(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) \in D\ ,\ (\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) \neq (0,0,...,0)$$

je **totalni priraštaj** funkcije $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ u tački M.

2. ako $D_i = D \cap \{(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, v, x_{i+1}, ..., x_n) : v \in R, i = 1,2,...,n\}$ nije jednočlan skup, tada

$$\Delta_{x_i} z = f(M_{x_i+\Delta x_i}) - f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$M_{x_i+\Delta x_i}(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \in D_i, \Delta x_i \neq 0$$



Slika 10.1

je **parcijalni priraštaj po promenljivoj** x_i funkcije $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ u tački M.

Pri definiciji totalnog priraštaja $\Delta z = f(N) - f(M)$ posmatramo promenu vrednosti funkcije $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, pri čemu tačka $N \in D$ pripada nekoj okolini tačke M, tj. iz tačke $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ došli smo u tačku $N(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) \in D$, pri čemu dozvoljavamo da se mogu promeniti sve koordinate $x_i, i = 1,2,...,n$ tačke $M(x_1, x_2, ..., x_n)$. Pri definiciji parcijalnog priraštaja $\Delta_{x_i} z = f(M_{x_i+\Delta x_i}) - f(M), i = 1,2,...,n$ posmatramo promenu vrednosti funkcije $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, pri čemu tačka $M_{x_i+\Delta x_i} \in \mathrm{D_i}$ ima iste j – te, $j \neq i$, koordinate kao i tačka M, tj. ovde vršimo promenu samo jedne koordinate x_i dok ostale koordinate ostaju fiksne. Tačka $M_{x_i+\Delta x_i}(x_1, x_2, ..., x_{i-1}; x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, ... x_n)$ ima iste j – te, $j = 1,2,...,i-1,i+1,...,n$, koordinate x_j kao i tačka $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ dok je i – ta koordinata $x_i + \Delta \mathrm{x_i}$ tačke $M_{x_i+\Delta x_i}$ različita od i – te koordinate tačke M.

Za svako $x_i \in R, i = 1,2,...,n$, ako posmatramo restrikciju $f_i : D_i \to R$ funkcije f nad skupom D_i vidimo da je to funkcija jedne promenljive $x_i \in D_i$.

Ideja da se posmatraju funkcije $f_i(x_i)$, $i = 1,2,...,n$ jedne promenljive se ogleda u tome što je razvijena teorija funkcija jedne promenljive pa se ta teorija pogodno može iskoristiti za izučavanje funkcija više promenljivih. No, sve osobine koje važe za funkcije jedne promenljive ne mogu se automatski preneti na funkcije više promenljivih (na primer, veza neprekidnosti i diferencijabilnosti, itd). No, i pored toga takva ideja je korisna, što ćemo videti iz samog daljeg izlaganja gradiva.

Definicija 10.1. *Ako funkcija* $f_i(x_i), x_i \in D_i, i \in \{1,2,\dots,n\}$ *ima izvod u tački* $M(x_1, x_2,\dots, x_n) \in D$ *onda taj izvod funkcije* $f_i(x_i)$ *zovemo* **parcijalni izvod funkije** $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ **u tački M po promenljivoj** x_i, i obeležavamo ga sa $\frac{\partial z}{\partial x_i}(M)$ *ili* $z_{x_i}(M)$. *U tom slučaju je*

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2,\dots, x_i + \Delta x_i,\dots, x_n) - f(x_1, x_2,\dots, x_i,\dots, x_n)}{\Delta x_i}.$$

Ako funkcija $f_i(x_i), x_i \in D_i, i \in \{1,2,\dots,n\}$ *ima desni (levi) izvod u tački* $M(x_1, x_2,\dots, x_n) \in D$, *onda taj izvod funkcije* $f_i(x_i)$ *zovemo* **desni (levi) parcijalni izvod funkije** $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ **u tački M po promenljivoj** x_i, i obeležavamo ga sa $\frac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M)$ *ili* $z^+_{x_i}(M)$ ($\frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M)$ ili $z^-_{x_i}(M)$). *U tom slučaju je*

$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0^+} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0^+} \frac{f(x_1, x_2,\dots, x_i + \Delta x_i,\dots, x_n) - f(x_1, x_2,\dots, x_i,\dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

$$\left(\frac{\partial^- z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0^-} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0^-} \frac{f(x_1, x_2,\dots, x_i + \Delta x_i,\dots, x_n) - f(x_1, x_2,\dots, x_i,\dots, x_n)}{\Delta x_i}\right).$$

Očigledno važi, kao i kod funkcije jedne promenljive, da funkcija ima parcijalni izvod po promenljivoj $x_i, i \in \{1,2,\dots,n\}$ u tački M ako i samo ako ima i desni i levi parcijalni izvod po promenljivoj x_i i ako su oni jednaki.

Funkcija $z = f(x_1, x_2,\dots, x_n), f : D \to R$ ima parcijalni izvod po $x_i, i \in \{1,2,\dots,n\}$ nad skupom $E \subset D$, pri čemu je skup E unija neke otvorene oblasti E_1 i dela njenog ruba ako

1. postoji $\frac{\partial z}{\partial x_i}(x_1, x_2,\dots, x_n)$ po Definiciji 10.1;

2. za rubnu tačku $M(x_1, x_2,\dots, x_n) \in E$ ako ne postoji $\frac{\partial z}{\partial x_i}(M)$, tada postoji samo jedan parcijalni izvod $\frac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M)$ ($\frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M)$ ne postoji, jer je za dovoljno malo $\delta_{x_i} > 0$ $E \cap \{(x_1, x_2,\dots, x_{i-1}, v_i, x_{i+1},\dots, x_n) : x_i - \delta_{x_i} < v_i < x_i\} = \varnothing$), ili $\frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M)$

$(\dfrac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M)$ ne postoji, jer je za dovoljno malo $\delta_{x_i} > 0$

$$E \cap \{ (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, v_i, x_{i+1}, ..., x_n) : x_i < v_i < x_i + \delta_{x_i} \} = \varnothing).$$

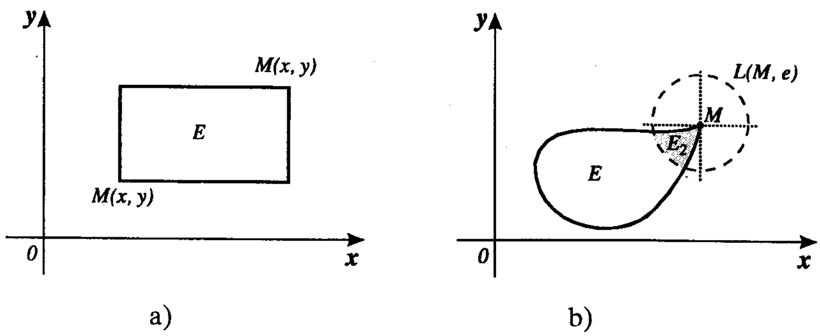
Ako postoji $\dfrac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M)$, tada je $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \dfrac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M)$, a ako postoji $\dfrac{\partial^- z}{\partial x_i}(M)$, tada je $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \dfrac{\partial^- z}{\partial x_i}(M)$.(vidi sliku 10.2 a).

3. Za rubnu tačku $M \in E$, ako postoji $\delta_{x_i} > 0$ takvo da

$N(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \notin E$ za svako $0 < |\Delta x_i| < \delta_{x_i}$ (vidi sliku 10.2 b),

tada, ako postoji $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}(N)$ za svako $N \in L(M, \varepsilon) \cap E_1 = E_2 \neq \varnothing$, uzmimo po definiciji da je

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \lim_{\substack{N \to M \\ N \in E_2}} \frac{\partial z}{\partial x_i}(N), i = 1, 2, ..., n.$$



Slika 10.2

Iz definicije proizilazi da je parcijalni izvod funkcije $n \, (n \geq 2)$ promenljivih po promenljivoj $x_i, i = 1, 2, ..., n$ običan izvod funkcije jedne promenljive x_i za fiksne vrednosti promenljivih $x_j, j \neq i$. Zbog toga se parcijalni izvodi mogu tražiti pomoću postupaka i formula za izračunavanje izvoda funkcije jedne promenljive.

Ako postoji parcijalni izvod po promenljivoj x_i u svim tačkama nekog podskupa D' oblasti definisanosti D funkcije $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, onda je taj parcijalni izvod funkcija od $x_1, x_2, ..., x_n$ na tom podskupu D', pa se i označava sa

$\frac{\partial z}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D'$ ili kraće sa $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ odnosno i z_{x_i}.

Primeri 10.1. Naći parcijalne izvode sledećih funkcija

1. $z = x^2 - 2xy^2 + y^3$ **2.** $z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$,

3. $z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}$, **4.** $z = \sqrt{(1 - x^2)^3} + \sqrt{(1 - y^2)^3}$,

5. $z = 2\sqrt{(y - x)^3} + 2\sqrt{(2x - y)^3}$, **6.** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rešenje.

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -4xy + 3y^2$.

2. Za $(x, y) \neq (0,0)$ je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x^2 + y^2) - 2y \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - y^2 x}{(x^2 + y^2)^2},$$

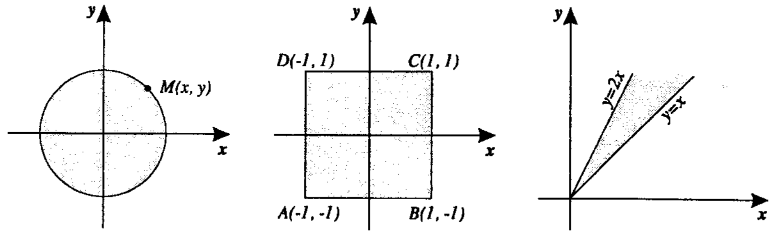
$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(\Delta x, 0) - z(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(0, \Delta y) - z(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{0 \cdot \Delta y}{0^2 + (\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Primetimo ovde da funkcija z ima parcijalni izvod $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ u tački $O(0,0)$, a da u toj tački ima prekid (vidi [12]). Dakle, ovde se odnos postojanja parcijalnih izvoda i neprekidnosti funkcije razlikuje od odnosa postojanja izvoda i neprekidnosti funkcije jedne promenljive. Neprekidnost, kod funkcije jedne promenljive, je potreban uslov za postojanje prvog izvoda, dok kod funkcije dve ili više promenljivih parcijalni izvodi mogu da postoje, a da u toj tački funkcija ima prekid.

3. Funkcija $z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}$ je definisana za $x^2 + y^2 \leq 1$ (vidi sliku 10.3 a).

Za svaku tačku $M(x, y)$ za koju je $x^2 + y^2 < 1$ (M je unutrašnja tačka oblasti definisanosti) je $\frac{\partial z}{\partial x} = -3x\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -3y\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.



a) b) c)

Slika 10.3

U rubnoj tački $M(x, y)$ za koju je $x^2 + y^2 = 1, x \neq 0, y \neq \pm 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = \frac{\partial^- z}{\partial x}(M) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sqrt{(1-(x+\Delta x)^2 - (1-x^2))^3} - 0}{\Delta x} = 0, \text{ za } x > 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = \frac{\partial^+ z}{\partial x}(M) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt{(1-(x+\Delta x)^2 - (1-x^2))^3} - 0}{\Delta x} = 0, \text{ za. } x < 0.$$

U tačkama $M(0,1)$ i $N(0,-1)$ je

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ x^2+y^2<1}} -3x\sqrt{1-x^2-y^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(N) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,-1)\\ x^2+y^2<1}} -3x\sqrt{1-x^2-y^2} = 0.$$

Slično, u rubnoj tački $M(x, y)$ za koju je $x^2 + y^2 = 1, \ x \neq \pm 1, y \neq 0$ je

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M) = \frac{\partial^- z}{\partial y}(M) = \lim_{\Delta y \to 0^-} \frac{\sqrt{(1-(1-y^2)-(y+\Delta y)^2)^3} - 0}{\Delta y} = 0, \text{ za } y > 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M) = \frac{\partial^+ z}{\partial y}(M) = \lim_{\Delta y \to 0^+} \frac{\sqrt{(1-(1-y^2)-(y+\Delta y)^2)^3} - 0}{\Delta y} = 0, \text{ za } y < 0.$$

U tačkama $M(1,0)$ i $N(-1,0)$ je

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M) = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ x^2+y^2<1}} -3y\sqrt{1-x^2-y^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(N) = \lim_{\substack{(x,y)\to(-1,0)\\ x^2+y^2<1}} -3y\sqrt{1-x^2-y^2} = 0.$$

4. Funkcija $z = \sqrt{(1-x^2)^3} + \sqrt{(1-y^2)^3}$ je definisana za $x^2 \leq 1$ i $y^2 \leq 1$ (vidi sliku 10.3 b). Za svaku tačku $M(x, y)$, za koju je $x^2 < 1$ i $y^2 \leq 1$, je $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -3x\sqrt{1-x^2}$.

Za tačku $M(1, y)$, $|y| \leq 1$ je

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, y) = \frac{\partial^- z}{\partial x}(1, y) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sqrt{(1-(1+\Delta x)^2)^3} + \sqrt{(1-y^2)^3} - \sqrt{(1-y^2)^3}}{\Delta x} = 0,$$

a za tačku $N(-1, y)$, $|y| \leq 1$ je

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-1, y) = \frac{\partial^+ z}{\partial x}(-1, y) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt{(1-(-1+\Delta x)^2)^3} + \sqrt{(1-y^2)^3} - \sqrt{(1-y^2)^3}}{\Delta x} = 0 .$$

Slično, dobijamo da je

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M) = -3y\sqrt{1-y^2}\ , \text{ za svaku tačku } M(x, y) \text{ za koju je } x^2 \leq 1\ ,\ y^2 < 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M) = \frac{\partial^- z}{\partial y}(M) = 0\ , \text{ za svaku tačku } M(x{,}1)\ \ |x| \leq 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M) = \frac{\partial^+ z}{\partial y}(M) = 0\ , \text{ za svaku tačku } M(x,-1)\ ,\ |x| \leq 1.$$

5. Funkcija $z = 2\sqrt{(y-x)^3} + 2\sqrt{(2x-y)^3}$ je definisana za $y \geq x \wedge y \leq 2x \wedge x \geq 0$ (vidi sliku 10.3 c).Za tačke $M(x, y)$ za koje važi: $y > x \wedge y < 2x \wedge x > 0$ je

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = -3\sqrt{y-x} + 6\sqrt{2x-y}\ , \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(M) = 3\sqrt{y-x} - 3\sqrt{2x-y}\ .$$

Za tačku $M(x, x)$, $x > 0$ je

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{z(x+\Delta x, x) - z(x,x)}{\Delta x} = 6\sqrt{x}\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M) = \lim_{\Delta y \to 0^+} \frac{z(x, x+\Delta y) - z(x, x)}{\Delta y} = -3\sqrt{x}\ .$$

Za tačku $N(x{,}2x), x > 0$ je

$$\frac{\partial z}{\partial x}(N) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{z(x+\Delta x, 2x) - z(x, 2x)}{\Delta x} = -3\sqrt{x}\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(N) = \lim_{\Delta y \to 0^-} \frac{z(x, 2x+\Delta y) - z(x, 2x)}{\Delta y} = 3\sqrt{x}\ .$$

Za tačku $O(0{,}0)$ je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in D^o}} (-3\sqrt{y-x} + 6\sqrt{2x-y}) = 0\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in D^o}} (3\sqrt{y-x} - 3\sqrt{2x-y}) = 0 \ \ (D^0 = \{(x, y) : 0 < x < y < 2x\}).$$

6. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, za $(x, y) \neq (0{,}0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, za $(x, y) \neq (0{,}0)$.

$$\frac{\partial^+ z}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = 1, \quad \frac{\partial^- z}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = -1 .$$

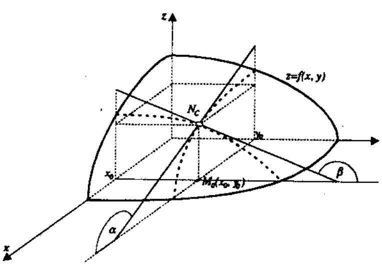
Funkcija z u tački $O(0,0)$ ima levi i desni parcijalni izvod po x. Kako su ovi parcijalni izvodi različiti, funkcija z nema u tački $O(0,0)$ parcijalni izvod po x.

Slično je i $\frac{\partial^+ z}{\partial y}(0,0) = 1$, $\frac{\partial^- z}{\partial y}(0,0) = -1$, pa funkcija z nema parcijalni izvod po y u tački $O(0,0)$.

Primetimo da je funkcija $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ neprekidna za svako $(x, y) \in R^2$. Δ

Geometrijska interpretacija parcijalnih izvoda

Neka je površ S zadata jednačinom $z = f(x,y)$ pri čemu je funkcija $f(x,y)$ neprekidna i ima parcijalne izvode nad skupom D. Želimo geometrijski da interpretiramo parcijalne izvode funkcije $f(x,y)$ u tački $M_0(x_0, y_0) \in D$ koja odgovara tački $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ površi S. Pri traženju parcijalnog izvoda $\frac{\partial z}{\partial x}$ u tački M_0 posmatra se funkcija $z = f(x,y)$ kao funkcija jedne promenljive x, a y se tretira kao konstanta $y = y_0$ to jest $z = f(x, y_o) = f_1(x)$. Funkcijom $z = f_1(x)$ definisana je kriva L dobijena presekom površi S i ravni $y = y_0$ (slika 10.4). Ako se podsetimo geometrijske interpretacije prvog izvoda funkcije jedne promenljive, to je $f_1'(x_o) = \mathrm{tg}\alpha$, gde je α ugao između pozitivnog dela x – ose i tangente krive L u tački N_0. Kako je $f_1'(x_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$,



Slika 10.4

Dakle, $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \mathrm{tg}\,\alpha$ koeficijent pravca tangente u tački N_0 krive dobijene presekom ravni $y = y_0$ i površi $z = f(x, y)$.

Slično, funkcijom $z = f_2(y) = f(x_0, y)$ definisana je kriva L_1, dobijena presekom površi S i ravni $x = x_0$, pa je $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = \mathrm{tg}\,\beta$ koeficijent pravca tangente u N_0 (β je ugao između pozitivnog dela y -ose i tangente na krivu L_1) krive L_1

dobijene preskom površi S i ravni $x = x_0$.

Diferencijabilnost

Definicija 10.3. *Neka je* $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ *unutrašnja tačka oblasti definisanosti* $D \subset R^n, n \geq 2$ *funkcije* $z = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n), X \in D$. *Funkcija* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *je* **diferencijabilna u tački** M, *ako se njen totalni priraštaj*

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$N(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) \in D, (\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) \neq (0,0,...,0)$$

koji odgovara priraštajima $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ *promenljivih* $x_1, x_2, ..., x_n$ *može napisati u obliku*

$$\Delta z = D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + ... + D_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + ... + \alpha_n \Delta x_n$$

pri čemu $D_1, D_2, ..., D_n$ *ne zavise od* $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ *i*

$$\lim_{(\Delta x_1, ..., \Delta x_n) \to (0,0,...,0)} \alpha_1 = \lim_{(\Delta x_1, ..., \Delta x_n) \to (0,0,...,0)} \alpha_2 = ... = \lim_{(\Delta x_1, ..., \Delta x_n) \to (0,0,...,0)} \alpha_n = 0.$$

Linearni deo priraštaja $D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + ... + D_n \Delta x_n$ *koji označavamo sa* dz *ili* df *je* **totalni diferencijal** *funkcije* $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *u tački* M. *Dakle,*

$$dz(M) = df(M) = D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + ... + D_n \Delta x_n.$$

Oznaka tačke M u kojoj tražimo totalni diferencijal može se izostaviti i pisati samo dz ili df.

Videli smo kod funkcije jedne promenljive $y = f(x)$ da je ona diferencijabilna ako i samo ako postoji $f'(x)$ u datoj tački. Slična osobina ne važi kod funkcija više promenljivih.

Primer 10.2. Proveriti diferencijabilnost funkcije $z = x^2 + y^2$.

Rešenje. Kako je

$$\Delta z = ((x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2) = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x \cdot \Delta x + \Delta y \cdot \Delta y,$$

to je funkcija z diferencijabilna u svakoj tački $M(x, y)$ oblasti definisanosti, jer je

$$D_1 = 2x, D_2 = 2y, \alpha_1 = \Delta x, \alpha_2 = \Delta y. \quad \Delta$$

Iz prethodnog primera vidimo da je $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = 2x\Delta x + 2y\Delta y$.

Postavlja se pitanje da li u opštem slučaju iz diferencijabilnosti sledi postojanje parcijalnih izvoda u datoj tački i da li je za funkciju $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\Delta x_2 + .. + \frac{\partial z}{\partial x_n}\Delta x_n .$$

Odgovor na to pitanje daje sledeća teorema.

Teorema 10.1. *Neka je funkcija* $z = f(x_1, x_2,..., x_n)$ *diferencijabilna u tački* M *. Tada*

a) *funkcija* f *je neprekidna u tački* M ,

b) *postoje parcijalni izvodi* $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2},..., \frac{\partial z}{\partial x_n}$ *i važi jednakost*

$$D_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}(M), D_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}(M),..., D_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}(M).$$

Dokaz.

a) Kako je

$$\lim_{(\Delta x_1,...\Delta x_n)\to(0,0,...,0)} \Delta z = \lim_{(\Delta x_1,...\Delta x_n)\to(0,0,...,0)} \sum_{i=1}^{n}(D_i + \alpha_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \lim_{(\Delta x_1,...\Delta x_n)\to(0,0,...,0)}(D_i + \alpha_i)\Delta x_i = 0,$$

to sledi da je funkcija $z = f(x_1, x_2,..., x_n)$ neprekidna u tački M .

b) Dokažimo, na primer, da je $D_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}(M)$. Iz diferencijabilnosti funkcije z u tački M , to je, za $\Delta x_1 \neq 0$, $\Delta x_2 = \Delta x_3 = ... = \Delta x_n = 0$, $\Delta_{x_1} z = D_1\Delta x_1 + \alpha_1\Delta x_1$. Sledi da je

$$\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta_{x_1} z}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1\to 0}(D_1 + \alpha_1) = D_1 .$$

Iz ovoga proizilazi da parcijalni izvod $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ postoji u tački M i da je $\frac{\partial z}{\partial x_1}(M) = D_1$.

Analogno prethodnom, dokazujemo da je $D_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}(M),..., D_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}(M)$.

Kako je $dz = dx_i = \Delta x_i$ za funkciju $z = x_i$, $i = 1,2,...,n$, to totalni diferencijal dz možemo zapisati u obliku

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n .}$$

Ako sa $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + ... + (\Delta x_n)^2} \neq 0$ označimo rastojanje tačaka $M(x_1, x_2,..., x_n)$ i $N(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2,..., x_n + \Delta x_n)$ tada izraz

$$\alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + ... + \alpha_n\Delta x_n$$

možemo zapisati u obliku $\omega\rho$ gde je $\omega = \alpha_1 \dfrac{\Delta x_1}{\rho} + \alpha_2 \dfrac{\Delta x_2}{\rho} + \ldots + \alpha_n \dfrac{\Delta x_n}{\rho}$.

Kako je $\left|\dfrac{\Delta x_i}{\rho}\right| \le 1$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, i $\lim\limits_{(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)\to(0,0,\ldots,0)} \alpha_i = 0$, sledi da je $\lim\limits_{\rho\to 0} \omega = 0$.

Iz toga razloga, da je funkcija $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diferencijabilna možemo zapisati i u obliku

$\Delta z = D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + \ldots + D_n \Delta x_n + \omega\,\rho$, pri čemu $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ne zavisi od $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, a $\lim\limits_{\rho\to 0} \omega = 0$.

Na primer, za funkciju $z = x^2 + y^2$ imamo da je $\Delta z = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \rho \cdot \rho$, gde $\omega = \rho \to 0$ kada $\rho \to 0$.

Suprotan smer teoreme 10.1 ne važi uvek, to jest neprekidnost funkcije u tački M i postojanje njenih parcijalnih izvoda u ovoj tački ne garantuje diferencijabilnost funkcije u toj tački. Funkcija iz Primera 10.1 pod 2, nije diferencijabilna u tački $O(0,0)$ (ima u toj tački prekid) iako postoje parcijalni izvodi $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0$ u toj tački. Funkcija iz Primera 10.1 pod 6, je neprekidna u tački $O(0,0)$, a u toj tački nije diferencijabilna, jer ne postoje parcijalni izvodi $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ u njoj.

Da funkcija može da bude neprekidna i da ima parcijalne izvode u datoj tački, a da u toj tački nije diferencijabilna pokazuje sledeći primer.

Primer 10.3. Ispitati diferencijabilnost funkcije

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} &, (x, y) \ne (0,0) \\ 0 &, (x, y) = (0,0) \end{cases},$$

u tački $O(0,0)$.

Rešenje. Funkcija $z = f(x, y)$ je neprekidna u tački $O(0,0)$. Zaista, iz

$|f(x, y) - f(0,0)| = \left|\dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| \le |y| \le \sqrt{x^2 + y^2}$, i $\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon = \delta$, sledi da je

$|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$, pa je funkcija $f(x,y)$ neprekidna u tački $O(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(\Delta x)^2 \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{0^2 \cdot \Delta y}{0^2 + (\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Dakle, funkcija $f(x,y)$ ima parcijalne izvode u tački $O(0,0)$. Ona, međutim, nije diferencijabilna u toj tački. Naime, ako bi ona to bila, njen priraštaj bi mogao da se napiše u obliku

$$\Delta z = \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} - 0 = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \omega\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

pri čemu je $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \omega = 0$, što nije tačno, jer za $\Delta x = \Delta y > 0$ imamo da je

$\omega(\Delta x, \Delta x) = \dfrac{(\Delta x)^3}{(2(\Delta x)^2)\Delta x\sqrt{2}}$ pa je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \omega(\Delta x, \Delta x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, što je kontradikcija. Δ

Navedimo sada jedan dovoljan uslov za diferencijabilnost funkcije.

Teorema 10.2. *Ako funkcija* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ima parcijalne izvode u nekoj* δ *– okolini tačke* M *i ako su ti izvodi neprekidni u samoj tački* M, *tada je funkcija diferencijabilna u tački* M.

Dokaz. Dokaz ćemo dati za slučaj $n = 2$. Dodelimo promenljivama x i y priraštaje Δx i Δy tako male da se tačka $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ nalazi u ovoj δ–okolini tačke M. Totalni priraštaj funkcije $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$ se može napisati kao

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x,y)].$$

Izraz $[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)]$ možemo da posmatramo kao priraštaj funkcije jedne promenljive $f(x, y + \Delta y)$ (drugi argument ima konstantnu vrednost koja je jednaka $y + \Delta y$). Kako, prema pretpostavci, ova funkcija ima izvod $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y + \Delta y)$, zaključujemo, u skladu sa Lagranžovom teoremom, da je

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\Delta x, 0 < \theta_1 < 1.$$

Analogno za izraz $[f(x, y + \Delta y) - f(x,y)]$ imamo da je

$$f(x, y + \Delta y) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Kako su izvodi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ neprekidni u tački $M(x,y)$ to je,

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y), \quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y).$$

Iz ovoga proizilazi da je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta_2\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \beta,$$

gde je $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \alpha = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \beta = 0$. Zamenjivanjem datih izraza u formulu za Δz, dobijamo

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y.$$

Neprekidnost parcijalnih izvoda sadrži u sebi i neprekidnost same funkcije. Da uslov diferencijabilnosti, dat u ovoj teoremi (neprekidnost parcijalnih izvoda), nije potreban za diferencijabilnost, pokazuje sledeći primer.

Primer 10.4. Ispitati diferencijabilnost funkcije

$$z = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

u tački $O(0,0)$.

Rešenje.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, \quad \text{za } (x,y) \neq (0,0),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, \quad \text{za } (x,y) \neq (0,0).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{(\Delta y)^2 \sin\dfrac{1}{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Kako je

$$\Delta z = z(\Delta x, \Delta y) = 0\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y + \left(\Delta x\cdot\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)\Delta x + \left(\Delta y\cdot\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)\Delta y$$

i

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \alpha = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta x \sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = 0,$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \beta = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta y \sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = 0,$$

to sledi da je funkcija z diferencijabilna u tački $O(0,0)$.

Kako ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial z}{\partial y}$ to su oba parcijalna izvoda prekidna u tački $O(0,0)$.

Funkcija $z = f(x_1, x_2,..., x_n)$ je **diferencijabilna nad skupom (u skupu)** $A \subset D$ (D je oblast definisanosti funkcije z), ako je diferencijabilna u svakoj tački skupa A. Ako funkcija $z = f(x_1, x_2,..., x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode u tački $M \in D$ onda kažemo da je **neprekidno diferencijabilna u tački** M. Ako funkcija $z = f(x_1, x_2,..., x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode u svim tačkama skupa A, onda je **neprekidno diferencijabilna nad skupom** A.

Iz definicije diferencijabilnosti funkcije $z = f(x_1, x_2,..., x_n)$ sledi da je $\Delta z - dz = \alpha_1\Delta x_1 + ... + \alpha_n\Delta x_n$ pri čemu $\lim\limits_{(\Delta x_1,...,\Delta x_n)\to(0,...,0)}(\alpha_1\Delta x_1 + ... + \alpha_n\Delta x_n) = 0$.

Sledi da je

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z - dz}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}(\alpha_1\frac{\Delta x_1}{\rho} + ... + \alpha_n\frac{\Delta x_n}{\rho}) = 0.$$

Dakle, za dovoljno male priraštaje $\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_n$ važi približna aproksimacija $\Delta z \approx dz$ koja se često koristi u približnom računu, jer je lakše izračunati totalni diferencijal u tački nego totalni priraštaj.

Izvod složene funkcije

Neka je dat skup od n funkcija

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2,..., x_m), u_2 = \varphi_2(x_1, x_2,..., x_m),..., u_n = \varphi_n(x_1, x_2,..., x_m),$$

koje preslikavaju skup $D_1 \subset R^m$ na skup $D \subset R$. Dalje, neka je data funkcija $z = f(u_1, u_2,..., u_n)$ koja je definisana nad skupom D^n. Tada je funkcija $z = f(\varphi_1(x_1, x_2,..., x_m), \varphi_2(x_1, x_2,..., x_m),..., \varphi_n(x_1, x_2,..., x_m))$ složena funkcija od funkcija $\varphi_1, \varphi_2,..., \varphi_n$ i f. Oblast definisanosti ove funkcije je skup $D_1 \subset R^m$.

Teorema 10.3. *Neka funkcije*

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

imaju parcijalne izvode po svim promenljivama $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *u tački* $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Ako je funkcija $z = f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *diferencijabilna u tački*

$$N(\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m),\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots,\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)),$$

tada složena funkcija $z = f(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), u_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, u_n(x_1, x_2, \ldots, x_m))$ *ima sve parcijalne izvode po promenljivama* x_i *u tački* M, *pri čemu važe jednakosti*

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_m} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_m} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_m} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}.$$

Dokaz. Dokaz ćemo dati za slučaj $z = f(u, v)$, $u = u(x, y), v = v(x, y)$. Kako je funkcija z diferencijabilna u tački M to je

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v, \quad \lim_{(\Delta u, \Delta v)\to(0,0)} \alpha = \lim_{(\Delta u, \Delta v)\to(0,0)} \beta = 0.$$

Ako uzmemo da je $\Delta y = 0$ i $\Delta x \neq 0$, tada iz diferencijabilnosti funkcije f sledi da je

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Za $\Delta x \to 0$, sledi da i $(\Delta_x u, \Delta_y v) \to (0,0)$, pa je $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \beta = 0$.

Dakle,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right) = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Slično se dobija da je

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ako posmatramo funkciju $z = f(x, y)$, pri čemu je $y = \psi(x)$, tada je $z = f(x, \psi(x))$, pa je,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Primer 10.5. Naći parcijalne izvode sledećih funkcija:

1. $z = f(x, y), x = t^3 + 2, y = 3t^4 - 1$, **2.** $z = x \sin\frac{x}{y}, x = 1 + 3t, y = \sqrt{1+t^2}$,

3. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, y = x^2$, **4.** $z = x^2 y - xy^2, x = \varepsilon\eta, y = \frac{\varepsilon}{\eta}$.

Rešenje.

1. $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot 3t^2 + \frac{\partial z}{\partial y}12t^3$.

2. $\frac{dz}{dt} = (\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y})\cdot 3 - \frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

3. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$, to je

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot 2x = \frac{1}{1+x^2}.$$

4. $\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = (2xy - y^2)\eta + (x^2 - 2xy)\frac{1}{\eta} = (2\varepsilon\eta\frac{\varepsilon}{\eta} - \frac{\varepsilon^2}{\eta^2})\eta + (\varepsilon^2\eta^2 - 2\varepsilon\eta\frac{\varepsilon}{\eta})\frac{1}{\eta} =$

$$= 3\varepsilon^2(\eta - \frac{1}{\eta}).$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} = (2xy - y^2)\varepsilon + (x^2 - 2xy)(-\frac{\varepsilon}{\eta^2}) =$$

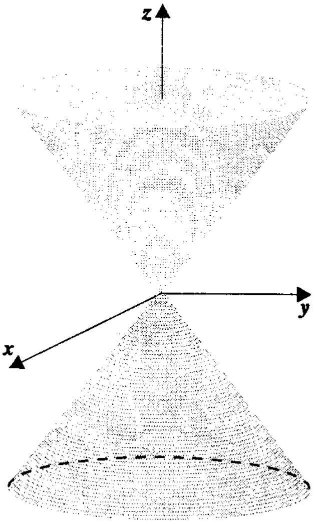
$$= (2\varepsilon\eta\frac{\varepsilon}{\eta} - \frac{\varepsilon^2}{\eta^2})\varepsilon + (\varepsilon^2\eta^2 - 2\varepsilon\eta\frac{\varepsilon}{\eta})(-\frac{\varepsilon}{\eta^2}) = \varepsilon^3(1 + \frac{1}{\eta^2}).\ \Delta$$

Tangentna ravan i normala površi

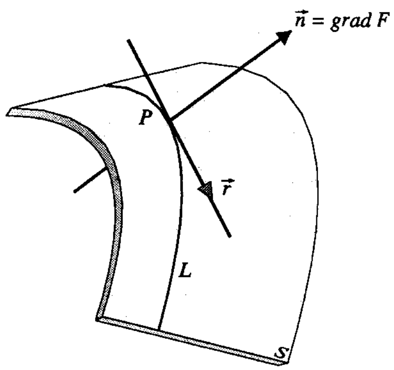
Neka je površ S data jednačinom $F(x, y, z) = 0$. Tačka $M(x, y, z)$ površi S je **regularna (nesingularna) tačka površi** S ako postoje sva tri parcijalna izvoda $\frac{\partial F}{\partial x}$,

$\dfrac{\partial F}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ u tački M i ako je $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\right) \neq (0,0,0)$. Tačka $M(x, y, z)$ je **singularna tačka površi** S ako je $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\right) = (0,0,0)$ u tački M ili najmanje jedan od njih ne postoji u tački M.

Posmatrajmo kružni konus dat jednačinom $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (vidi sliku 10.5 a).



a)



b)

Slika 10.5

Ovde imamo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, pa je $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$ i $\dfrac{\partial F}{\partial z} = -2z$. Jedina singularna tačka je koordinatni početak $O(0,0,0)$ gde su sva tri parcijalna izvoda jednaka nuli.

Neka je L kriva u prostoru data u parametarskom obliku

$$L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]. \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

Pretpostavimo da funkcije φ, ψ i ω imaju neprekidne izvode za svako $t \in [\alpha, \beta]$ i neka je $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2 \neq 0$ za svako $t \in [\alpha, \beta]$. Dakle, ne uzimamo u obzir singularne tačke krive L, tj. tačke krive L, gde je $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2 = 0$, već regularnu tačku $M(x_0, y_0, z_0) \in L$ određenu pomoću vrednosti t_0, $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Tada vektor

$$\dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$$

leži na tangenti krive L u tački $M(x_0, y_0, z_0)$.

Neka je $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$, proizvoljna kriva površi S koja sadrži regularnu tačku P površi S, i neka funkcije $\varphi(t)$, $\psi(t)$ i $\omega(t)$ imaju neprekidne prve izvode za svako $t \in [\alpha, \beta]$, pri čemu je $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2 \neq 0$ za svako $t \in [\alpha, \beta]$.

Tangenta krive L u tački P je **tangenta površi** S u tački P.

Ako gornje parametarske jednačine krive L zamenimo u jednačinu $F(x, y, z)$ površi S, ova poslednja postaje identitet u odnosu na t, tako dobijamo da je $F(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) = 0$, jer kriva L leži na površi S.

Diferencirajući ovaj identitet kao složenu funkciju po t, dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

Izraz na levoj strani je skalarni proizvod vektora $\mathrm{grad}F = \vec{n} = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$ i

$\dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dy}{dt}\vec{k}$. Vektor $\dot{\vec{r}}$ leži na tangenti krive L u tački P. Vektor $\vec{n}$ ne zavisi od oblika krive koja prolazi kroz tačku P, tj. on zavisi jedino od koordinata tačke P i od funkcije $F(x, y, z)$. Kako je P regularna tačka, to je

$$|\,\mathrm{grad}F\,| = |\vec{n}\,| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \neq 0.$$

Iz $\vec{n} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$ sledi da je $\sphericalangle(\vec{n}, \dot{\vec{r}}) = \frac{\pi}{2}$. Ovo znači da je vektor $\dot{\vec{r}}$, koji leži na tangenti krive L u tački P, normalan na vektor $\vec{n}$ u tački P (vidi sliku 10.5 b). Isti postupak se može primeniti na bilo koju krivu koja leži na površi S i prolazi kroz tačku P. Stoga, bilo koja tangenta površi S u tački P je normalna na vektor $\vec{n}$ i tako sve ovakve tangente leže u istoj ravni normalnoj na vektor $\vec{n}$.

Definicija 10.5. *Ravan formirana od svih tangenti površi S kroz datu regularnu tačku $P \in S$ je* **tangentna ravan** *površi S u tački P.*

Vektor $\vec{n}(P) = (\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P))$ je vektor normale tangentne ravni površi $F(x, y, z) = 0$ u tački P. Stoga dobijamo jednačinu tangente ravni na površ $F(x, y, z) = 0$ u regularnoj tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$ kao

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ako je površ S data jednačinom $z = f(x, y)$ to nju možemo da napišemo kao $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, pa je $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{df}{dx}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{df}{dy}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$. Tada jednačina tangentne ravni u tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ postaje

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Geometrijska interpretacija totalnog diferencijala

Zamenom $x - x_0 = \Delta x$ i $y - y_0 = \Delta y$ gornja jednačina tangentne ravni se svodi na

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dy.$$

Desna strana gornje jednakosti nije ništa drugo do totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ xy ravni, pa je $z - z_0 = dz$. Sledi da je vrednost totalnog diferencijala funkcije $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ koji odgovara priraštajima Δx i Δy jednak priraštaju $z - z_0$ po aplikati z tangentne ravni u tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dobijenog pri pomeranju iz tačke $M_0(x_0, y_0)$ u tačku $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Definicija 10.6. *Prava koja prolazi kroz tačku $P_0(x_0, y_0, z_0)$ površi $F(x, y, z) = 0$ i koja je normalna na tangentnu ravan površi u tački P_0 je* **normala površi u tački P_0.**

Lako je uočljivo da je vektor $\vec{n} = (\frac{\partial F}{\partial x}(P_0), \frac{\partial F}{\partial y}(P_0), \frac{\partial F}{\partial z}(P_0))$ vektor pravca normale i da je normala data jednačinama

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}.$$

Ako je površ S zadata jednačinom $z = f(x, y)$ jednačina normale u tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$ postaje

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Primer 10.6. Napisati jednačinu tangentne ravni i normale na površ $z = x^2 + y^2$ u tački $O(0,0,0)$.

Rešenje.

Iz $f(x, y) = x^2 + y^2$ sledi da je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, pa je $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Tada jednačina tangentne ravni postaje $z - 0 = 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0)$ to jest, $z = 0$ (tangentna ravan je xy –ravan).

Jednačina normale je $\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{1}$, to jest normala je z –osa.

11. PARCIJALNI IZVODI I DIFERENCIJALI VIŠEG REDA

Parcijalni izvodi višeg reda

Neka za funkciju $f : D \to R, D \subset R^n$ postoji parcijalni izvod $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ za neko $i \in \{1, 2, ..., n\}$ u svim tačkama nepraznog podskupa $D_1 \subset D$. Tada je i taj parcijalni izvod realna funkcija definisana nad skupom D_1 tj. $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D_1 \to R$, pa se za neko $j \in \{1, 2, ..., n\}$ može postaviti pitanje o postojanju parcijalnog izvoda te funkcije po promenljivoj x_j u nekoj tački $M \in D_1$.

Definicija 11.1. *Ako postoji parcijalni izvod* $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(M)$ *njega zovemo* **drugi parcijalni izvod** *ili parcijalni izvod* **drugog reda funkcije** $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *u* **tački** M, **po promenljivama** x_i, x_j *(tim redom) i označavamo ga sa*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) \text{ ili } f_{x_i, x_j}(M).$$

U slučaju kada je $i = j$ odgovarajući parcijalni izvod označavamo sa $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(M)$. *Ako je $i \neq j$ parcijalni izvod* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$ *je* **mešoviti.**

U opštem slučaju, mešoviti parcijalni izvodi, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M)$, ako postoje, mogu imati različite vrednosti.

Parcijalne izvode koje smo definisali u poglavlju 10 zvaćemo parcijalni izvodi **prvog reda** ili **prvi parcijalni izvodi.**

Primer 11.1.

1. Naći parcijalne izvode drugog reda funkcije $z = x^3y^2 - xy^3$.
2. Naći mešovite parcijalne izvode funkcije $z = f(x, y)$ u tački $O(0,0)$ gde je

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Rešenje.

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 3xy^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 6xy$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y^2 - 3y^2.$$

Kao što se vidi mešoviti izvodi $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ i $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ su jednaki.

2. Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

to je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} -\frac{\Delta y}{\Delta y} = -1 .$$

Na sličan način se dobija da je $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$, pa je $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Pod određenim dodatnim pretpostavkama, koje su date u narednoj teoremi, jednakost mešovitih parcijalnih izvoda je obezbeđena.

Teorema 11.1. *Ako postoje drugi mešoviti parcijalni izvodi* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *i* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *u nekoj* δ *okolini tačke* $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *i ako su oni neprekidni u datoj tački* M *, onda su oni i jednaki u ovoj tački, to jest važi jednakost*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M) .$$

Dokaz. Dokaz ćemo dati za slučaj $n = 2$, tj. za funkciju $z = f(x, y)$.

Posmatrajmo sledeći izraz

$$A = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)] - [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]$$

gde su Δx i Δy proizvoljni brojevi tako mali da je tačka $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ u δ okolini tačke M . Uvedimo pomoćnu funkciju $\varphi(x) = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$.

Izraz A se sada može posmatrati kao priraštaj funkcije $\varphi(x)$ jedne promenljive x diferencijabilne nad intervalom $[x, x+\Delta x]$, za $\Delta x > 0$, odnosno nad intervalom $[x+\Delta x, x]$ za $\Delta x < 0$.

$$A = \Delta\varphi = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) .$$

Stoga, primenom Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti na ovu razliku, dobija se da je

$$A = \Delta\varphi = \varphi'(x+\theta_1\Delta x)\Delta x = [f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) - f_x(x+\theta_1\Delta x, y)]\Delta x, 0 < \theta_1 < 1.$$

Izraz u zagradi se može smatrati priraštajem funkcije $f_x(x+\theta_1\Delta x, y)$ jedne promenljive y diferencijabilne nad intervalom $[y, y+\Delta y]$, za $\Delta y > 0$ odnosno nad intervalom $[y+\Delta y, y]$, za $\Delta y < 0$. Ako još jednom primenimo Lagranžovu teoremu (u odnosu na promenljivu y) dobićemo

$$A = f_{xy}(x+\theta_1\Delta x, y+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y, 0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1. \quad \textbf{(1)}$$

Sa druge strane, ako uvedemo pomoćnu funkciju $\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ tada, analogno dobijamo

$$A = \Delta\psi = \psi(y + \Delta y) - \psi(y)$$

a zatim

$$A = f_{yx}(x + \theta_4\Delta x, y + \theta_3\Delta y)\Delta y\Delta x, 0 < \theta_3 < 1, 0 < \theta_4 < 1. \qquad \textbf{(2)}$$

Upoređujući (1) i (2) dobijamo da je

$$f_{xy}(x + \theta_1\Delta x, y + \theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y = f_{yx}(x + \theta_4\Delta x, y + \theta_3\Delta y)\Delta y\Delta x.$$

Sledi da je

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_{xy}(x + \theta_1\Delta x, y + \theta_2\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_{xy}(x + \theta_4\Delta x, y + \theta_3\Delta y)$$

tj.

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

Parcijalni izvodi **višeg reda** definišu se induktivno. Parcijalni izvod **reda** m ili m **-tog reda funkcije** $f(x_1, x_2,..., x_n)$ u **tački** $M(x_1, x_2,..., x_n)$ **po promenljivama** $x_{i_1}, x_{i_2},..., x_{i_n}$ (tim redom) označava se sa

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_m}}(M),$$

pri čemu neki od indeksa $i_1, i_2,..., i_m \in \{1, 2,..., n\}$ mogu biti i jednaki među sobom.

Kao i kod drugih parcijalnih izvoda, poredak traženja parcijalnog izvoda u opštem slučaju utiče na vrednost tog izvoda. No, u slučaju da su ti izvodi neprekidne funkcije u nekoj tački, taj poredak više neće biti bitan, na osnovu prethodne teoreme. Specijalno, ako su svi parcijalni izvodi m – tog reda neke funkcije f neprekidni u svim tačkama skupa D, tada se skup svih takvih funkcija označava sa $C^m(D, R)$ ili samo sa $C^m(D)$.

Posledica 11.1. Ako je $f \in C^m(D, R)$, tada se vrednost izraza

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_m}}(M)$$

ne menja pri proizvoljnoj permutaciji indeksa $i_1, i_2,..., i_m$.

Funkcije klase $C^m(D, R)$ su m **puta neprekidno diferencijabilne**. Za m– ti parcijalni izvod takve funkcije koristićemo oznaku

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ celi brojevi, takvi da je $0 \le \alpha_i \le m$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = m$.

Totalni diferencijal višeg reda

Ako je $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diferencijabilna funkcija nad skupom D tada je totalni diferencijal funkcije $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u tački $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ koji odgovara priraštajima $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dat formulom

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n,$$

gde su $dx_i = \Delta x_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ proizvoljni priraštaji nezavisnih promenljivih, to jest to su proizvoljni brojevi nezavisni od x_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ možemo da menjamo tako da pri tome $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ ostanu konstantni. Za date $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ totalni diferencijal dz je funkcija od $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koja takođe može biti diferencijabilna.

Definicija 11.2. *Totalni diferencijal d(dz) u tački* $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *koji odgovara priraštajima nezavisnih promenljivih* $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ *se zove* **drugi totalni diferencijal** ili **totalni diferencijal drugog reda funkcije** $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **u tački** M *i obeležava se sa* $d^2 z$.

Totalni diferencijal dz funkcije $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je totalni diferencijal **prvog reda** ili **prvi** totalni diferencijal.

Neka funkcija $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u domenu D. Tada je totalni diferencijal dz funkcije $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diferencijabilna funkcija, pa u domenu D postoji $d^2 z$.

Kako su $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ konstantni, sledi da je

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} dx_n^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dydz + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dxdz\right)$$

pri čemu je $dx_i^2 = (dx_i)^2$ (koristili smo da su svi odgovarajući mešoviti parcijalni izvodi drugog reda, zbog njihove neprekidnosti, međusobno jednaki).

Ako sa d označimo $d = \frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n$, tada gornju formulu možemo zapisati na sledeći način

$$d^2 z = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^2 z,$$

a prvi totalni diferencijal možemo zapisati u obliku

$$dz = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)z.$$

Totalni diferencijal m **-tog reda** ili m -ti **totalni diferencijal**, $m \geq 3$ definišu se induktivno.

Za $m-$ti, $m \geq 2$, totalni diferencijal kažemo da je totalni diferencijal **višeg reda** ili **viši** totalni diferencijal.

Teorema 11.2. *Ako funkcija* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^m(D, R)$, *tada postoji totalni diferencijal* $d^m z$ m *-tog reda, koji je dat obrascem:*

$$d^m z = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^m z.$$

Primedba: Posmatrajmo funkciju $z = f(x, y)$ dve promenljive. Ako x i y nisu nezavisne promenljive, već funkcije od ξ i η, tj. $x = \varphi(\xi, \eta)$ i $y = \psi(\xi, \eta)$ tada forma drugog totalnog diferencijala ne ostaje invarijantna.

Za funkciju $z = f(x, y)$, pri čemu je $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$, prvi totalni diferencijal je

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

gde su dx i dy funkcije, pa stoga ne mogu biti konstante. Tada je

$$d^2 z = d(\frac{\partial z}{\partial x})dx + d(\frac{\partial z}{\partial y})dy + \frac{\partial z}{\partial x}d(dx) + \frac{\partial z}{\partial y}d(dy) = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2 y.$$

U ovom slučaju forma drugog totalnog diferencijala nije invarijantna.

12. EKSTREMNE VREDNOSTI FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

U ovom paragrafu biće izložena materija u vezi ekstremnih vrednosti bez strogih dokaza. Za šire izučavanje ekstremnih vrednosti čitaoca upućujemo na literaturu [2].

Lokalni ekstremi

Pojam lokalnog ekstrema se za realne funkcije više realnih promenljivih definiše analogno slučaju funkcije jedne promenljive.

Definicija 12.1. *Neka je* $f : D \to R$, $D \subset R^n$, $n \geq 2$ *definisana u nekoj okolini* $L(A, \varepsilon)$ *tačke* $A \in D$ *(sledi da je* $A \in D^0$*). Ako je za svaku tačku* $X \in L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}$ *ispunjeno* $f(X) < f(A)$ *funkcija* $f(X)$ *u tački* A *ima* **lokalni maksimum** *jednak* $f(A)$. *Ako je za svaku tačku* $X \in L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}$ *ispunjeno* $f(X) > f(A)$ *funkcija* $f(X)$ *u tački* A *ima* **lokalni minimum** *jednak* $f(A)$.

Lokalne minimume i lokalne maksimume jednim imenom zovemo **lokalni ekstremi.**[1]

Drugim rečima, funkcija $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ u tački $A(x_1, x_2, ..., x_n) \in D^0$ ima lokalni ekstrem ako za svako $i \in \{1, 2, ..., n\}$ postoje brojevi $\delta_i > 0$ takvi da za svako $|\Delta x_i| < \delta_i$, $(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) \neq (0,0,...,0)$, $B(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) \in D$,

priraštaj funkcije

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

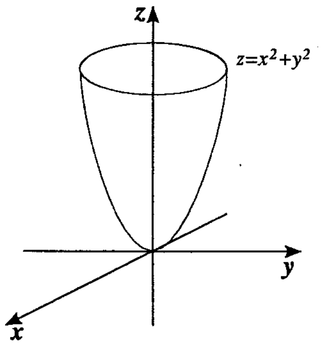
u tački A je ili pozitivan ili negativan. Ako je $\Delta z > 0$, tada funkcija $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ u tački A ima lokalni minimum, a ako je $\Delta z < 0$ ima lokalni maksimum.

Primetimo da su lokalni ekstremi ili kraće ekstremi, prema ovoj definiciji, uvek postignuti u unutrašnjim tačkama oblasti definisanosti D funkcije. O tzv. rubnim ekstremima biće reči nešto kasnije.

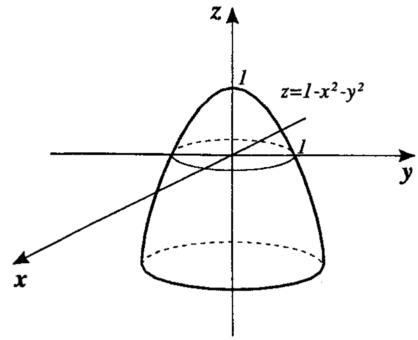
1. Funkcija $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ u tački $O(0,0)$ ima lokalnoi minimum (slika 12.1).

2. Funkcija $z = f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$ u tački $O(0,0)$ ima lokalni maksimum (slika 12.2).

[1] Napomena u vezi definicije ekstremne vrednosti je ista kao i Napomena 8.1. (strana 42) kod funkcija jedne promenljive



Slika 12.1

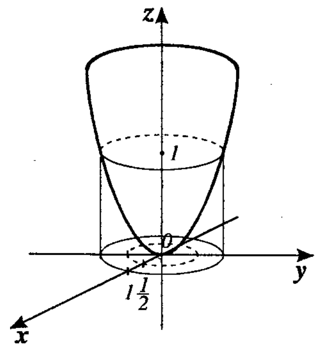


Slika 12.2

3. Funkcija

$$z = f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1 \ , & x = y = 0 \end{cases},$$

u tački $O(0,0)$ ima lokalni maksimum (slika 12.3). Postoji okolina tačke $O(0,0)$, npr. krug poluprečnika $\frac{1}{2}$ tako da je u svim tačkama te okoline sem u $O(0,0)$ vrednost funkcije $f(x,y)$ manja nego $1 = f(0,0)$.



Slika 12.3

Kao i kod funkcija jedne promenljive, za diferencijabilne funkcije postoji jednostavan neophodan uslov za postajanje lokalnog ekstrema.

Teorema 12.1. *Neka funkcija $f : D \to R, D \subset R^n, n \geq 2$ u tački $A(a_1, a_2, ..., a_n) \in D^{0\,n}$ ima sve parcijalne izvode prvog reda i neka u toj tački ima lokalni ekstrem. Tada je*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) = 0 .$$

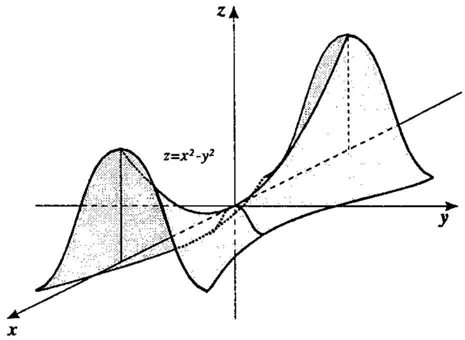
Specijalno, ako je $f(X), X \in D^0$ diferencijabilna funkcija u tački A, onda je

$$df(A) = 0, (dx_1, dx_2, ..., dx_n) \neq (0,0,...,0)$$

Dokaz. Neka je $L(A,\varepsilon)$ otvorena lopta u kojoj je definisana funkcija $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ i u kojoj važi da je $f(X) < f(A)$ $(f(X) > f(A))$ za sve $X \in L(A,\varepsilon) \setminus \{A\}$. Za proizvoljno $i \in \{1, 2, ..., n\}$ posmatrajmo funkciju $f_i : (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \to R$ definisanu sa $f_i(x_i) = f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n)$ za

$x_i \in (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$. Ta funkcija jedne promenljive ima lokalni ekstrem u tački a_i, pa je $f_i'(a_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0$.

Prethodna teorema, za diferencijabilnu funkciju, daje smo potreban uslov za lokalni ekstrem.



Slika 12.4

Na primer, funkcija $z = x^2 - y^2$ (slika 12.4) ima izvode $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y$, koji su jednaki nuli za $x = y = 0$, ali u $O(0,0)$ ova funkcija nema lokalne ekstreme. Zaista, kako je $f(O) = f(0,0) = 0$

$\Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = x^2 - y^2$ i

$$\begin{cases} \Delta f > 0 & \text{za } x \neq 0 \text{ i } y = 0 \\ \Delta f < 0 & \text{za } x = 0 \text{ i } y \neq 0 \end{cases},$$

to sledi da data funkcija $z = f(x,y)$ nema lokalnu ekstremnu vrednost u tački $O(0,0)$.

Unutrašnje tačke oblasti definisanosti diferencijabilne funkcije $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, u kojima su svi parcijalni izvodi prvog reda jednaki nuli, nazivamo **stacionarne tačke**.

Preostali deo ovog paragrafa posvećen je ispitivanju prirode stacionarnih tačaka, tj. nalaženju dovoljnih uslova pod kojima diferencijabilna funkcija ima lokalni ekstrem.

Navedimo sada, bez dokaza, dve teoreme koje daju dovoljne uslove za postajanje lokalnog ekstrema funkcije više promenljivih.

Teoreme 12.2. *Neka je* $D \subset R^n, n \geq 2$ *i neka je* $A \in D^0$, $f \in C^2(D,R)$, *pri čemu je* $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *stacionarna tačka funkcije* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *tj.* $df(A) = 0$ *za* $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) \neq (0,0,\ldots,0)$. *Tada:*

1. *ako je* $d^2 f(A) = (\dfrac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^2 f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < 0$ *za* $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) \neq (0,0,\ldots,0)$, *funkcija* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *u tački A ima lokalni maksimum,*

2. *ako je* $d^2 f(A) > 0$ *za* $(dx_1, dx_2,..., dx_n) \neq (0,0,...,0)$, *funkcija* $f(x_1, x_2,..., x_n)$ *u tački A ima lokalni minimum,*

3. *ako* $d^2 f(A)$ *menja znak za* $(dx_1, dx_2,..., dx_n) \neq (0,0,...,0)$ *funkcija* $f(x_1, x_2,..., x_n)$ *u tački A nema lokalni ekstrem.*

Teorema 12.3. *Neka je* $D \subset R^2$ *i neka je* $A(a,b) \in D^0$, $f \in C^2(D, R)$ *i*

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0.$$

Označimo sa $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ i $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$.

Tada:

1. *ako je* $r > 0$ $(t > 0)$ *i* $rt - s^2 > 0$, *funkcija* $f(x,y)$ *u tački* $A(a,b)$ *ima lokalni minimum,*

2. *ako je* $r < 0$ $(t < 0)$ *i* $rt - s^2 > 0$, *funkcija* $f(x,y)$ *u tački* $A(a,b)$ *ima lokalni maksimum,*

3. *ako je* $rt - s^2 < 0$ *funkcija* $f(x,y)$ *u tački* $A(a,b)$ *nema lokalni ekstrem,*

4. *ako je* $rt - s^2 = 0$ *odgovor na pitanje da li funkcija u tački* $A(a,b)$ *ima lokalni ekstrem ili ne, ne znamo. Potrebna su dalja ispitivanja (posmatra se znak priraštaja funkcije u tački* $A(a,b)$*).*

Ponovimo na kraju da se sve izloženo odnosi samo na tzv. unutrašnje lokalne ekstreme funkcije više promenljivih. Prilikom određivanja apsolutnih ekstrema (najvećih i najmanjih vrednosti funkcije) takvih funkcija neophodno je zajedno sa unutrašnjim stacionarnim tačkama ispitivati i tačke ruba oblasti definisanosti date funkcije. Za takvo ispitivanje je često korisna tehnika određivanja tzv. uslovnog ekstrema.

Primer 12.1. Naći ekstremne vrednosti sledećih funkcija:

1. $z = f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 6$, **2.** $z = f(x,y) = xy$,

3. $z = f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, **4.** $z = f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$,

5. $z = f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + x^4 + y^4$, $= (x+y)^2 + x^4 + y^4 > 0$

6. $z = f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - x^4 - y^4$.

Rešenje.

1. Koristeći potreban uslov za ekstreme nalazimo stacionarne tačke. Nađimo parcijalne izvode $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ i izjednačimo ih sa nulom.

Dobijamo sistem jednačina

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2 = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 4 = 0\,.$$

Dakle, $A(1,-1)$ je stacionarna tačka. Kako je $r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-1) = 2$, $s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,-1) = 0$, $t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-1) = 4$, $rt - s^2 > 0$, data funkcija u tački A ima lokalni ekstrem. S obzirom da je $r = 2 > 0$ to funkcija u tački A ima lokalni minimum. Ako transformišemo z u oblik $z = (x-1)^2 + 2(y+1)^2 - 9$ lako možemo videti da će desna strana biti minimalna kada je $x = 1$, $y = -1$. Ovo je apsolutni lokalni minimum funkcije. Za tačku $A(1,-1)$ je

$$d^2 f(A) = 2dx^2 + 2 \cdot 0 dxdy + \overset{2}{\cancel{4}}dy^2 = 2(dx^2 + dy^2) > 0\,, \text{za } (dx, dy) \neq (0,0)$$

pa i po ovom kriterijumu dobijamo da data funkcija $z = f(x, y)$ u tački A ima lokalni minimum.

2. Iz $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x = 0$ dobijamo stacionarnu tačku $O(0,0)$.

Kako je $r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 0$, $s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$, $t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = 0$, i $rt - s^2 = -1 < 0$, to funkcija $z = xy$ u tački $O(0,0)$ nema lokalni ekstrem.

Za tačku $O(0,0)$ je $d^2 f(O) = 2dxdy$, pa za $dx \neq 0$, $dy > 0$ je $d^2 f(O) > 0$, a za $dx \neq 0$, $dy < 0$ *je* $d^2 f(O) < 0$ Dakle, drugi totalni diferencijal date funkcije u tački O menja znak, pa posmatrana funkcija u tački $O(0,0)$ nema lokalni ekstrem.

3. Iz $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$ dobijamo dve stacionarne tačke $M(0,0)$ i $N(1,1)$. Kako je $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$, to je za:

tačku $M: r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 0, s = -3, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = 0$,

tačku $N: r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1) = 6, s = -3, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,1) = 6$.

Za tačku M imamo da je $rt - s^2 = -9 < 0$ ili $d^2 f(M) = -6dxdy$, pa sledi da funkcija f u tački M nema lokalni ekstrem.

Za tačku N je $rt - s^2 = 36 - 9 > 0$ ($r = 6 > 0$) ili, za $(dx, dy) \neq (0,0)$,

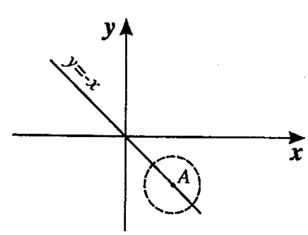
$d^2 f(N) = 6dx^2 + 6dy^2 - 6dxdy = 6((dx - \frac{dy}{2})^2 + \frac{3}{4}dy^2) > 0$, pa funkcija u tački N ima lokalni minimum.

4. Iz $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 2x = 0$, dobijamo stacionarne tačke $A(x,-x)$, tj sve tačke sa prave $y = -x$ su stacionarne tačke. Kako je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

to je uvek $rt - s^2 = 4 - 4 = 0$ ili $d^2 f(A)) = 2(dx + dy)^2 \geq 0$, pa na osnovu ovih kriterijuma ne možemo zaključiti da li data funkcija u tačkama $A(x,-x)$ ima lokalni ekstrem ili ne.

Kako za svaku okolinu tačke $A(x,-x)$ imamo i drugih tačaka $B(y,-y)$, pri čemu je $B \neq A$, i kako je $f(B) - f(A) = 0$, a za sve tačke $X(x, y)$ pri čemu je $x \neq y$ je $f(x, y) - f(0,0) = (x + y)^2 > 0$, to zaključujemo da je $f(X) - f(A) \geq 0$ za tačke $X \in L(A, \varepsilon)$, pa funkcija ni u jednoj tački $A(x,-x)$ nema lokalni ekstrem.



Slika 12.5

5. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y + 4x^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 2x + 4y^3$, sledi da je tačka $O(0,0)$ jedina stacionarna tačka. Kako je $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 + 12x^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 + 12y^2$, to je

$r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 2$, $s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = 2$, $t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = 2$. Sledi da je $rt - s^2 = 0$ i $d^2 z(O) = 2(dx + dy)^2 \geq 0$ pa na osnovu ovih kriterijuma ne znamo da li funkcija z u tački $O(0,0)$ ima lokalni ekstrem ili ne. Kako je za $(x, y) \neq (0,0)$, $z = (x + y)^2 + x^4 + y^4 > 0$, to sledi da funkcija u tački $O(0,0)$ ima ne samo lokalni minimum, nego apsolutni minimum.

6. Kako je $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 4x^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + 2x - 4y^3$, to su stacionarne tačke $A(1,1)$, $B(-1,-1)$ i $O(0,0)$. Iz $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 - 12x^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 - 12y^2$ sledi da je za

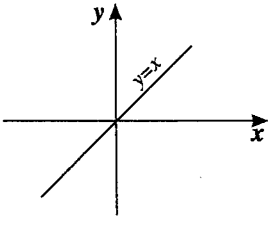
- tačke A i B: $r = -10$, $s = 2$, $t = -10$, $rt - s^2 = 96 > 0$,

pa u tim tačkama funkcija ima lokalni maksimum,

- tačku $O(0,0)$: $r = s = t = 2$, $rt - s^2 = 0$, pa ne znamo da li u toj tački funkcija

ima lokalni ekstrem ili ne. Kako je $f(0,0) = 0$, a za $y = x$ i $0 < |x| < \sqrt{2}$ je

$$f(x, x) = 4x^2 - 2x^4 = 2x^2(2 - x^2) > 0,$$



Slika 12.6

a za $y = -x$,

$$f(x,-x) = -2x^4 < 0 \text{ za } x \neq 0,$$

to u svakoj okolini tačke $O(0,0)$, postoji tačka $X(x, x)$ za koju je $f(X) - f(O) > 0$ i tačka $Y(x,-x)$ za koju je $f(Y) - f(O) < 0$ pa funkcija u tački $O(0,0)$ nema lokalni ekstrem. Δ

Vezani (uslovni) ekstremi

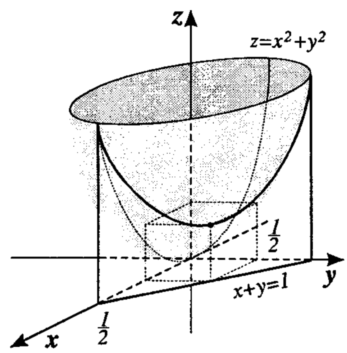
U prethodnom paragrafu upoznali smo se sa metodama određivanja ekstremnih vrednosti realnih funkcija više promenljivih koje su u datoj meri analogne onome što nam je poznato za funkcije jedne promenljive. Kod funkcija više promenljivih, međutim, često se srećemo i sa jednom novom situacijom – da kod određivanja ekstrema promenljive ne mogu slobodno da se menjaju u oblasti definisanosti funkcije, već su one vezane nekim dodatnim relacijama. Ilustrujmo to na sledećem primeru.

Primer 12.3. Naći ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ pod uslovom da je $x + y = 1$.

Rešenje. Iz date veze sledi da je $y = 1 - x$ pa je u odgovarajućim tačkama

$$f(x, y) = f(x, 1-x) = 2x^2 - 2x + 1 = 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}.$$

Funkcija $f(x, 1-x)$ ima minimum za $x = \frac{1}{2}$ (pa i $y = \frac{1}{2}$). Minimalna vrednost je $\frac{1}{2}$. Primetimo da sama funkcija $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ u svakoj okolini tačke $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ima i manjih vrednosti od $\frac{1}{2}$. Inače njena najmanja vrednost je 0. Δ



Slika 12.7

Zadaci ovakvog tipa često se sreću prilikom ispitivanja ponašanja funkcije više promenljivih na rubu oblasti definisanosti. Pre nego što budemo razmatrali ovu problematiku navedimo bez dokaza sledeću teoremu.

Teorema 12.4. (o implicitnim funkcijama)

Neka je $A \subset R^2$ otvoren skup, $(a, b) \in A$ i neka je:

1. $F : A \to R$ *neprekidna funkcija,*
2. $F(a, b) = 0$,
3. *Parcijalni izvod* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *postoji i neprekidan je na* A,
4. $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

Tada postoji okolina $W = U \times V \subset A$ tačke (a, b), gde su U i V okoline tačaka a i b respektivno i samo jedna neprekidna funkcija $f : U \to V$, takva da je $f(a) = b$ i $F(x, f(x)) = 0$ za $x \in U$.

Ako je uz to $F \in C^1(A)$, tada je i funkcija f neprekidno diferencijabilna, tj. $f \in C^1(U)$ i za svako $x \in U$ važi

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Dokaz. Vidi [2].

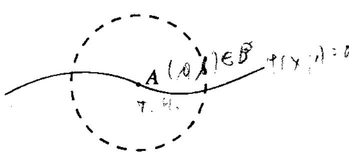
Ograničimo naša razmatranja, za sada, na slučaj funkcije dve promenljive $z = f(x, y)$. Neka je data funkcija $f : D \to R$ definisana na skupu $D \subset R^2$ i neka je data funkcija $\varphi : D \to R$. Neka je $B = \{(x, y) \in D : \varphi(x, y) = 0\}$. Pretpostavimo da je $B \neq \varnothing$. Skup B je određen uslovom ili vezom $\varphi(x, y) = 0$.

Definicija 12.2. *Funkcija $z = f(x, y)$ u tački nagomilavanja $A(x, y) \in B$ skupa B ima* **uslovni (vezani) lokalni maksimum (uslovni (vezani) lokalni minimum) pri uslovu** $\varphi(x, y) = 0$, *ako postoji broj $\varepsilon > 0$ takav da za svako*

$$X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}) \text{ važi } f(X) < f(A) \quad (f(X) > f(A)), \text{ tj.}$$

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}))\ f(X) < f(A)\ (f(X) > f(A)).$$

Uslovni lokalni maksimum odnosno uslovni lokalni minimum jednim imenom zovemo uslovni *ili* **vezani ekstremi.** *Jednačina $\varphi(x, y) = 0$ zove se* **jednačina veze.**



Slika 12.8

Ako je jednačina krive $L : \varphi(x, y) = 0$ tada se problem nalaženja uslovnih ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ na krivoj L može formulisati na sledeći način: naći ekstrem funkcije $z = f(x, y)$ nad skupom D pod uslovom da je $\varphi(x, y) = 0$.

Dakle, u nalaženju uslovnog ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ promenljive x i y se ne mogu više smatrati kao nezavisne promenljive. One su povezane relacijom $\varphi(x, y) = 0$ koja se, kao što smo naveli, zove jednačina veze.

Objasnimo detaljnije **Lagranžov metod** za nalaženje uslovnog ekstrema.

Neka je $M_0(x_0, y_0)$ potencijalna tačka uslovnog ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ sa jednačinom veze $\varphi(x, y) = 0$. Pretpostavimo da funkcije $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ imaju neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u nekoj okolini tačke $M_0(x_0, y_0)$ i da je bar jedan od parcijalnih izvoda $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0)$ različit od nule (neka je na primer, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0) \neq 0$). Iz $\varphi(x, y) = 0$ sledi da je $y = \psi(x)$, pa je $z = f(x, \psi(x)) = h(x)$ funkcija jedne promenljive. Potreban uslov da funkcija $z = f(x, \psi(x))$ u tački $M_0(x_0, \psi(x_0))$ ima ekstremnu vrednost je $\frac{dz}{dx}(M_0) = 0$. Sledi da je

$$dz(M_0) = df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)dy = 0. \qquad \textbf{(a)}$$

Iz jednačine veze se dobija

$$d\varphi(M_0) = \varphi_x(M_0)dx + \varphi_y(M_0)dy = 0.$$

Množenjem poslednje jednakosti faktorom λ i dodavanjem rezultata izrazu (a), dobijamo da je

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)\right)dy = 0.$$

Izrazimo λ iz $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ $\left(\lambda = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)}, \ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0\right)$;

tada, kako je dx proizvoljno (ako je $dx = 0$, tada iz $d\varphi(M_0) = 0$ sledi da je i $dy = 0$), imamo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. Dakle, jednakosti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

daju potrebne uslove za nevezane ekstreme u tački $M_0(x_0, y_0)$ funkcije

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

koja se zove, kao što smo videli, **Lagranžova funkcija**.

Stoga je uslovni ekstrem funkcije $f(x, y)$, ako je $\varphi(x, y) = 0$, obavezno stacionarna tačka Lagranžove funkcije $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ gde je λ neki faktor.

Dakle, da bismo pronašli tačke koje mogu biti uslovni ekstremi funkcije $z = f(x, y)$ pod uslovom da je $\varphi(x, y) = 0$ formiramo Lagranžovu funkciju

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\,\varphi(x, y),$$

i izjednačimo prve parcijalne izvode $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$ funkcije $F(x, y)$ sa nulom. Dobijamo sistem od tri jednačine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \qquad (*)$$

pomoću kojih određujemo vrednosti λ i koordinate x i y mogućih tačaka ekstrema.

Pitanje postajanja i prirode uslovnih ekstrema se rešava pomoću znaka drugog totalnog diferencijala Lagranžove funkcije

$$d^2F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2,$$

za skup vrednosti x_0, y_0, λ dobijenih iz (*) pod uslovom $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0$ $(dx, dy) \neq (0,0)$. Ako je $d^2F(x_0, y_0) < 0$ tada u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x, y)$ ima uslovni maksimum, a ako je $d^2F(x_0, y_0) > 0$ uslovni minimum.

Vratimo se na Primer 12.2, gde smo tražili ekstrem funkcije $z = x^2 + y^2$ pod uslovom da je $x + y = 1$. Ovaj problem ćemo rešiti Lagranžovom metodom. Lagranžova funkcija će sada biti $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$. Da bismo pronašli stacionarne tačke, posmatramo sistem:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0, \qquad x + y - 1 = 0.$$

Iz prve dve jednačine sistema sledi da je $x = y$, a iz treće jednačine sistema (jednačina veze) dobićemo da je $x = y = \dfrac{1}{2}$ (koordinate mogućeg ekstrema). Sledi da je $\lambda = -1$.

Kako je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \text{ i } dx + dy = 0 \text{ to je } d^2F = 4dx^2 > 0$$

pa funkcija u tački $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ima uslovni minimum pri uslovu $x + y = 1$.

Primer 12.4. Naći ekstremne vrednosti funkcije $z = xy$ pod uslovom da je $y - x = 0$.

Rešenje. Posmatrajmo Lagranžovu funkciju

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(y - x),$$

kao i sistem za pronalaženje λ i koordinata mogućeg ekstrema

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - \lambda = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda = 0, \quad \varphi(x, y) = y - x = 0. \qquad (**)$$

Iz prve dve jednačine dobijamo da je $x + y = 0$, i dolazimo do sistema

$$x + y = 0, \qquad y - x = 0$$

odakle je $x = y = 0$. Tada je $\lambda = 0$. Primetimo da je za funkciju $F(x, y)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$. Iz $dy - dx = 0$ sledi da je $dy = dx$, pa je $d^2F = dx^2 > 0$, za $dx \neq 0$. Kako je $d^2F(0,0) > 0$, to funkcija u tački $(0,0)$ ima uslovni lokalni minimum.Primetimo da je za tačku $(0,0)$, $rt - s^2 = -1 < 0$. Dakle, ako je $rt - s^2 < 0$ funkcija može da ima uslovni ekstrem. Δ

Metod Lagranžovih množitelja može se proširiti i na slučaj funkcija bilo koliko promenljivih. Formulisaćemo sada u opštem slučaju problema određivanja uslovnog ekstrema kada je data funkcija $f : D \to R$ definisana na skupu $D \subset R^n, n \geq 2$. Neka su, pored toga, date funkcije $\varphi_i : D \to R$, $i = 1, 2, \ldots, m$, gde je m fiksiran prirodan broj manji od n. Neka je $B = \{X \in D : \varphi_i(X) = 0, i = 1, 2, \ldots, m\}$. Neka je $B \neq \varnothing$. Skup B određen uslovima $\varphi_1(X) = 0$, $\varphi_2(X) = 0, \ldots, \varphi_m(X) = 0$.

Definicija 12.3. *Funkcija* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *u tački nagomilavanja* $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B$ *skupa* B *ima* **uslovni lokalni minimum (uslovni lokalni maksimum)** *pri uslovima* $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, *ako postoji broj* $\varepsilon > 0$, *takav da za svako*

$$X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}) \text{ važi } f(X) > f(A) \ (f(X) < f(A)), \text{ tj.}$$

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\})) \ f(X) > f(A))(f(X) < f(A)).$$

Uslovni lokalni minimum i lokalni maksimum jednim imenom se zovu **uslovni ekstremi.**[1]

Ako želimo da nađemo ekstreme funkcije $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pod uslovom da je

[1] Napomena u vezi definicije uslovnog ekstrema je ista kao i Napomena 8.1. (strana 42) kod funkcija jedne promenljive

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}, \tag{b}$$

$1 \leq m < n$, formiramo Lagranžovu funkciju

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \; \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Pretpostavke za funkcije su slične kao i za funkcije dve promenljive. Funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ i funkcije $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, imaju neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u nekoj okolini potencijalne tačke uslovnog ekstrema $M(a_1, a_2, ..., a_n)$. Dalje pretpostavimo da u toj okolini funkcionalna matrica

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ima rang m.

Izjednačavanjem sa nulom svih parcijalnih izvoda prvog reda funkcije $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ i uzimajući u obzir sistem jednačina (b), dobijamo sistem od $n + m$ jednačina

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \; \varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}, \; j \in \{1, 2, ..., m\} \tag{c}$$

iz kojih nalazimo $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ i koordinate $x_1, x_2, ..., x_n$ mogućih tačaka uslovnih ekstrema. Da li su tačke dobijene Lagranžovom metodom uslovni ekstremi ili ne, određujemo (utvrđujemo) nalaženjem drugog totalnog diferencijala. Ako je u dobijenim tačkama $d^2F > 0$ $(d^2F < 0)(dx_1, dx_2, ..., dx_n) \neq (0, 0, ..., 0)$, funkcija u tim tačkama ima uslovni minimum (uslovni maksimum). Između $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ postoje veze

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n = 0, ..., \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Ako d^2F menja znak, tada funkcija nema uslovni ekstrem.

Primer 12.5.

1. Naći lokalne ekstreme funkcije $u = f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, pod uslovom da je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2. Naći lokalne ekstreme funkcije $u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, pod uslovom da je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c > 0.$$

3. Naći najmanju i najveću vrednost funkcije

$z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ na skupu $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$.

4. Od svih pravouglih paralelopipeda površine $P = 24$ naći onaj koji ima maksimalnu zapreminu.

Rešenje.

1. Formirajmo Lagranžovu funkciju

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ $\quad \varphi(x, y, z) = 0$

$$F(x, y, z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$

Iz uslova

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0 \text{ i } x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

dobijamo stacionarne tačke

$$A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ (za } \lambda = \frac{3}{2}\text{) i } B\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \text{ (za } \lambda = -\frac{3}{2}\text{)}.$$

Kako je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0,$$

to je

$$d^2 F = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Diferenciranjem jednačine veze $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dobijamo da je $2xdx + 2ydy + 2zdz = 0$. Za tačku A je $dx = -2dy - 2dz$, a za tačku B je takođe $dx = -2(dy + dz)$. Sledi da je

$$d^2 F(A) = 12((dy + dz)^2 + dy^2 + dz^2) > 0,$$

pa funkcija u tački A ima uslovni lokalni minimum, odnosno

$$d^2 F(B) = -12((dy + dz)^2 + dy^2 + dz^2) < 0$$

pa funkcija u tački B ima uslovni lokalni maksimum.

2. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda \frac{x}{a^2} = 2x(1 + \frac{\lambda}{a^2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \lambda = -a^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2\lambda \frac{y}{a^2} = 2y(1 + \frac{\lambda}{b^2}) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee \lambda = -b^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z + 2\lambda \frac{z}{a^2} = 2z(1 + \frac{\lambda}{c^2}) = 0 \Rightarrow z = 0 \vee \lambda = -c^2.$$

Dobijamo šest stacionarnih tačaka

$A(a,0,0)$, $B(-a,0,0)$ ($\lambda = -a^2$), $C(0,b,0)$, $D(0,-b,0)$ ($\lambda = -b^2$), $E(0,0,c)$

$H(0,0,-c)$ ($\lambda = -c^2$).

Kako je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{b^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{c^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0,$$

to je

$$d^2 F = 2((1 + \frac{\lambda}{a^2}) dx^2 + (1 + \frac{\lambda}{b^2}) dy^2 + (1 + \frac{\lambda}{c^2}) dz^2).$$

Za tačke A i B je

$$d^2 F(A) = d^2 F(B) = 2((1 - \frac{\lambda}{b^2}) dy^2 + (1 - \frac{\lambda}{c^2}) dz^2).$$

Diferenciranjem jednačine veze $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ dobijamo da je

$$\frac{2x}{a^2} dx + \frac{2y}{b^2} dy + \frac{2z}{c^2} dz = 0.$$

Ako u gornju jednačinu uvrstimo koordinate tačaka A i B dobićemo da je $\pm \frac{2a}{a^2} dx = 0$, odakle sledi da je $dx = 0$. S obzirom da je $(dx, dy, dz) \neq (0,0,0)$ i $dx = 0$, sledi da bar jedan od diferencijala dy ili dz mora biti različit od nule. Kako je $1 - \frac{a^2}{b^2} < 0$ i $1 - \frac{a^2}{c^2} < 0$, sledi da je $d^2 F(A) = d^2 F(B) < 0$, pa funkcija ima uslovni maksimum u tačkama A i B.

Za tačke C i D je

$$d^2 F(C) = d^2 F(D) = 2((1 - \frac{b^2}{a^2}) dx^2 + (1 - \frac{b^2}{c^2}) dz^2).$$

Iz $\pm\frac{2b}{c^2}dy^2=0$, sledi da je $dy=0$, pa bar jedan od diferencijala dx ili dz mora biti različit od nule.

Ako je $dx=0$ tada je $d^2F(C)=d^2F(D)=2(1-\frac{b^2}{c^2})dz^2<0$, a ako je $dz=0$, tada je $d^2F(C)=d^2F(D)=2(1-\frac{b^2}{a^2})dx^2>0$.

Kako drugi totalni diferencijal u tačkama C i D menja znak, to sledi da funkcija u ovim tačkama nema uslovni ekstrem.

Za tačke E i H je

$$d^2F(E)=d^2F(H)=2((1-\frac{c^2}{a^2})dx^2+(1-\frac{c^2}{b^2})dz^2).$$

Iz $\pm\frac{2c}{c^2}dz^2=0$, sledi da je $dz=0$ pa je ili $dx\neq 0$ ili $dy\neq 0$ Kako je $1-\frac{c^2}{a^2}>0$ i $1-\frac{c^2}{b^2}>0$, to je $d^2F(E)=d^2F(H)>0$, pa funkcija ima uslovni minimum u tačkama E i H.

3. Iz $\frac{\partial F}{\partial x}=2x-12=0$, sledi da je $x=6$, a iz $\frac{\partial F}{\partial y}=2y+16=0$ je $y=-8$.

Kako je $f(x,y)=(x-6)^2(y+8)^2-100$, to funkcija $f(x,y)$ u tački $M(6,-8)$ ima najmanju vrednost jednaku -100. Nađimo najmanju i najveću vrednost funkcije na kružnici $x^2+y^2=25$. Za Lagranžovu funkciju

$F(x,y)=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25)$ je

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-12+2\lambda x=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y+16+2\lambda y=0,\ x^2+y^2=25,$$

za $x=3$, $y=-4$, $\lambda=1$ ili $x=-3$, $y=4$, $\lambda=-3$.

Kako je $f(3,-4)=-75$, $f(3,-4)=125$ to je tražena najveća vrednost funkcije jednaka 125, a najmanja -75.

Napomena 12.1. Ako je funkcija neprekidna u ograničenoj i zatvorenoj oblasti onda je ona u toj oblasti ograničena i ima najveću i najmanju vrednost. Ova osobina je slična osobini neprekidne realne funkcije nad zatvorenim intervalom.

4. Označimo sa x, y i z ivice pravouglog paralelopipeda. Tada je površina paralelopipeda $P = 2(xy + xz + yz)$, a zapremina $V = xyz$. Dakle, traži se maksimum funkcije V pod uslovom da je $2(xy + xz + yz) = 24$.

Za Lagranžovu funkciju $F(x, y, z) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - 12)$ je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda(y + z) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda(x + z) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda(x + y) = 0,$$

$$xy + xz + yz = 12,$$

za $x = y = z = 2$, $\lambda = -1$ (vodimo računa da su x, y i z kao ivice pravouglog paralelopipeda pozitivni brojevi).

Kako je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = z + \lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = y + \lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = x + \lambda,$$

to je

$$d^2F(2,2,2) = dxdy + dxdz + dydx.$$

Diferencirajući jednačinu veze dobijamo da je

$$(y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz = 0,$$

pa kako je $x = y = z = 2$, to je $dx + dy + dz = 0$. Odavde je $dz = -dx - dy$.

Sada je

$$d^2F = dxdy - dx^2 - dxdy - dxdy - dy^2 = -((dx + \frac{1}{2}dy)^2 + \frac{3}{4}dy^2) < 0,$$

pa funkcija ima uslovni maksimum za $x = y = z = 2$. Dakle, traženi paralelopiped je kocka. Maksimalna zapremina je $V = 8$. Δ

$dy^2 + dydz \quad \frac{dz^2}{4} + \frac{3}{4}dz^2$

TREĆA GLAVA

NEODREĐENI INTEGRAL

13 PRIMITIVNA FUNKCIJA I NEODREĐENI INTEGRAL

Postavimo problem obrnut u odnosu na onaj koji smo imali kod traženja izvoda. Naime, neka je data funkcija $f(x)$ koja je definisana nad nekim intervalom I. Potrebno je naći, ako postoji, funkciju $F(x)$ koja ima izvod nad intervalom I, i za koju važi

$$F'(x) = f(x), \ x \in I.$$

Ako za funkciju $f : I \to R, x \in I$ postoji funkcija $F : I \to R$, koja ima izvod $F'(x)$ nad intervalom I i pri tom važi $F'(x) = f(x), \quad x \in I$, onda je $F(x)$ **primitivna funkcija** funkcije $f(x)$ nad intervalom I.

Na primer, ako je $f(x) = \cos x$, tada za tu funkciju nad skupom R je $F(x) = \sin x$ primitivna funkcija, jer je $(\sin x)' = \cos x$.

Ako je funkcija $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, tada ona nije jednoznačno određena. Za funkciju $f(x) = \cos x$ nije jedina primitivna funkcija $F(x) = \sin x$, jer je i svaka funkcija $G(x) = F(x) + C = \sin x + C$, gde je C proizvoljan realan broj, takođe primitivna funkcija funkcije $\cos x$, jer je

$$(\sin x + C)' = (\sin x)' + C' = \cos x.$$

I u opštem slučaju, sledi da ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ nad intervalom I, onda je i svaka funkcija $F(x) + C$, gde je C proizvoljna konstanta, takođe primitivna funkcija funkcije $f(x)$, jer je

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Postavlja se pitanje kakva je veza između dve primitivne funkcije $F(x)$ i $G(x)$ funkcije $f(x)$. Odgovor na to pitanje daje sledeća teorema.

Teorema 13.1. *Ako su $F(x)$ i $G(x)$ dve primitivne funkcije funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom I onda se one nad tim intervalom razlikuju za konstantu, tj. $F(x) - G(x) = C$ nad intervalom I.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $F'(x) = G'(x) = f(x), x \in I$. S obzirom da funkcije $F(x)$

i $G(x)$ imaju isti izvod nad intervalom I, tada je kao što je poznato iz diferencijalnog računa, $G(x) = F(x) + C$.

Primetimo da je u gornjem stavu bitna pretpostavka da se razlika $G(x) - F(x)$ primitivnih funkcija od $f(x)$ posmatra nad intervalom, a ne na proizvoljnom skupu.

Primer 13.1. Pokazati da su funkcije $G(x) = \text{arcctg}\frac{1}{x}$ i $F(x) = \text{arctg}\, x$, primitivne funkcije funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, za $x \neq 0$. Naći $G(x) - F(x)$.

Rešenje. Primitivna funkcija funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ za svako $x \in R$ je $F(x) = \text{arctg}\, x$, jer je $(\text{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. No kako je $\left(\text{arcctg}\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ za $x \neq 0$, to je nad svakim od intervala $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ funkcija $G(x) = \text{arcctg}\frac{1}{x}$ primitivna za funkciju $f(x)$. Razlika $G(x) - F(x)$ je

$$G(x) - F(x) = \begin{cases} \pi & za \quad x \in (-\infty, 0) \\ 0 & za \quad x \in (0, \infty) \end{cases} . \quad \Delta$$

Definicija 13.1. *Skup svih primitivnih funkcija funkcije* $f(x)$ *nad nekim intervalom* I *naziva se* **neodređeni integral funkcije** $f(x)$ *nad datim intervalom* I *i označava se sa*

$\int f(x)\,dx$.

U ovoj definiciji $f(x)$ se naziva **podintegralna funkcija**, $f(x)\,dx$ **podintegralni izraz**, $\int$ **znak integrala**, a postupak nalaženja neodređenog integrala naziva se **integracija.**

Ako je $F(x)$ jedna primitivna funkcija funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom, onda se skup $\int f(x)\,dx$ nad tim intervalom piše u obliku $\{ F(x) + C : C \in R \}$, ili kraće

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Postavlja se pitanje da li za svaku funkciju postoji primitivna funkcija, odnosno neodređeni integral. Važi sledeća teorema

Teorema 13.2. *Ako je funkcija* $f : I \to R$ *neprekidna nad intervalom* I *tada postoji primitivna funkcija* $F : I \to R$ *nad intervalom* I, *to jest postoji neodređeni integral funkcije* $f(x)$ *nad datim intervalom* I.

Dokaz. Dokaz ćemo dati u drugoj glavi, tj. kada se bude izučavao određeni integral (vidi stranu 165).

Funkcija $f(x)$ ne mora da bude neprekidna, pa da za nju postoji neodređeni integral. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

za $x = 0$ ima prekid druge vrste. Ipak za nju postoji primitivna funkcija (neodređeni integral) nad R. Jedna primitivna funkcija funkcije $f(x)$ je

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

to se lako proverava ($F'(x) = f(x)$) (vidi Primer 6.1).

Postavlja se pitanje, ako funkcija $f : [a,b] \to R$ $[a,b]$ u nekoj tački intervala $[a,b]$ ima prekid druge vrste, da li za nju postoji uvek primitivna funkcija nad posmatranim intervalom $[a,b]$.

Primer 13.2. Proveriti da li **Dirihleova[1] funkcija**

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in Q \\ 0 & , \quad x \in R \setminus Q \end{cases},$$

ima primitivnu funkciju nad proizvoljnim intervalom I.

P. G. L. Dirichlet

Rešenje. Dirihleova funkcija nema primitivnu funkciju nad proizvoljnim zatvorenim intervalom $[a,b] \subset I$. Ako bi postojala funkcija $F : [a,b] \to R$, koja ima izvod nad intervalom $[a,b]$, pri čemu je $F'(x) = \chi(x)$, tada iz $F'(x) = 1$ za $x \in [a,b] \cap Q$ i $F'(x) = 0$ za $x \in [a,b] \cap (R \setminus Q)$, sledi da ne postoji $\xi \in [a,b]$ sa osobinom da je $F'(\xi) = \frac{1}{2}$ (vidi Darbuovu teoremu iz diferencijalnog računa). Znači $F(x)$ nije primitivna funkcija funkcije $\chi(x)$ nad $[a,b]$. Kontradikcija. Δ

[1] PG.L. Dirichlet (.1805–1859), nemački matematičar

Ako funkcija $f : I \to R$ ima prekid prve vrste u tački $c \in I$, tada za funkciju $f(x)$ ne postoji primitivna funkcija $F(x)$ nad intervalom I, tj. za funkciju $f(x)$ ne postoji neodređeni integral. (Ako funkcija $f(x)$ ima izvod u svakoj tački intervala I, tada taj izvod ne može da ima prekide prve vrste. Tako, na primer, za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ x+1 & , \quad x > 0 \end{cases},$$

ne postoji neodređeni integral nad skupom R (funkcija $f(x)$ je definisana u nuli i u nuli ima prekid prve vrste).

Međutim, ako postoji neodređeni integral date funkcije, on se ne može uvek izraziti u konačnom obliku, tj. preko konačnog broja elementarnih funkcija. Na primer, neodređeni integrali $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \cos x^2\, dx$ i $\int \frac{e^x}{x} dx$ postoje nad svakim intervalom $I \subset (1, \infty)$, ali se ne mogu izraziti preko elementarnih funkcija u konačnom obliku.

Osobine neodređenog integrala

1. $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$, $\quad ((\int f(x)\,dx)' = (F(x) + C)' = f(x))$.

2. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$, $\quad (d\int f(x)\,dx = (\int f(x)\,dx)'dx = f(x)\,dx)$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$, $\quad (\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C)$.

4. $\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, $a \in R$,

(izvod i leve i desne strane je $af(x)$, pa se leva i desna strana mogu razlikovati samo za aditivnu konstantu, koja je i sadržana u pojmu neodređenog integrala).

5. $\int (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))\,dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$,

(izvod i leve i desne strane je $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, pa se leva i desna strana mogu razlikovati samo za aditivnu konstantu, koja je i sadržana u pojmu neodređenog integrala).

6. *Ako je* $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, *tada je* $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, a \neq 0$

(izvod leve i desne strane je $f(ax+b)$).

Tablica neodređenih integrala

Neposredno na osnovu tablice izvoda ili neposrednog proveravanja dobija se tablica integrala:

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, *na svakom intervalu I koji je podskup oblasti definisanosti funkcije* x^{α}.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ x \neq 0$, *na svakom intervalu I koji ne sadrži tačku* $x = 0$.

3. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C,\ x \in R$.

4. $\int \cos x\, dx = \sin x + C,\ x \in R$.

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, *na svakom intervalu I, koji ne sadrži tačke oblika* $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$,

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, *na svakom intervalu I, koji ne sadrži tačke oblika* $x = k\pi, k \in Z$,

7. $\int e^x dx = e^x + C,\ x \in R$,

8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0, a \neq 1, x \in R$,

9. $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1\ x \in R$,

10. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1,\ x \in (-1,1)$,

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C, k \neq 0 : x \in R$ *za* $k > 0$; *na svakom intervalu* $I \subset (-\infty, -\sqrt{-k}) \cup (\sqrt{-k}, \infty)$ *za* $k < 0$,

12. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0;\ |x| \neq |a|$, *nad svakim intervalom I koji ne sadrži tačke* $x = a$ *i* $x = -a$.

Napomena 13.1. Traženje neodređenog integrala, ako drugačije nije naznačeno, podrazumeva nalaženje datog integrala nad svim intervalima iz oblasti definisanosti podintegralne funkcije.

Primer 13.3. Naći $\int (\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\, dx.$

Rešenje.

$$\int (\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\, dx = 2\int x^{-\frac{1}{2}} dx - 3\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4\sqrt{x} - 3\ln|x| + \arcsin x + C. \Delta$$

Međutim, najčešće podintegralna funkcija nije takva da je u pitanju tzv. tablični integral. Tada se mora pribeći određenim metodama, koje integral svode na tablični.

Postoje dve osnovne metode za svođenje integrala na tablični integral. To su metoda smene promenljive i metoda parcijalne integracije.

14. SMENA PROMENLJIVE I PARCIJALNA INTEGRACIJA

Smena promenljive

Teorema14.1. *Neka sirjekcija $\varphi : I_1 \to I \subset R$ ima neprekidan izvod različit od nule nad intervalom I_1 i neka za funkciju $f : I \to R$ postoji neodređeni integral nad intervalom I. Tada važi*

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt,$$

(pri tom se podrazumeva da se posle integracije desne strane stavi $t = \varphi^{-1}(x), x \in I$).

Dokaz. Kako je $\frac{d}{dx}\int f(x)\, dx = f(x)$ i

$$\frac{d}{dx}\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \frac{d}{dt}(\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt\, \frac{dt}{dx} = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x),$$

to su izvodi leve i desne strane jednaki, pa važi jednakost. Takođe, s obzirom na stalnost znaka $\varphi'(t)$, $\varphi(t)$ je strogo monotona funkcija, te postoji inverzna funkcija $\varphi^{-1}(x)$.

Često je pogodnije smenu promenljivih, umesto u obliku $x = \varphi(t)$, pisati u obliku $t = \psi(x)$ $(dt = \psi'(x)\, dx)$. Recimo,

$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C$, $\int \frac{\psi'(x)}{2\sqrt{\psi(x)}}dx = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{\psi(x)} + C$,

a analogno se dobija za svaki integral iz tablice ako se stavi $\psi(x)$ umesto x i $\psi'(x)\,dx$ umesto dx.

Primer 14.1. Da li se u integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}, x > 2$ može uvesti smena $x = \arcsin t$? Zbog čega?

Rešenje. Funkcija $\varphi(t) = \arcsin t$ preslikava interval $[-1,1]$ na interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Dakle, za svako $t \in [-1,1]$ sledi da je $|\varphi(t)| < 2$. Kako složena funkcija $f(\varphi(t)) = \frac{1}{\sqrt{\arcsin^2 t - 4}}$ nije definisana ni za jedno $t \in [-1,1]$, to se ne može uvesti data smena. Znamo da je $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \ln|\,x + \sqrt{x^2-4}\,| + C$. Δ

Primer 14.2. Naći sledeće integrale:

1. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}, a > 0$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, a > 0$

3. $\int \frac{dx}{2x^2+4x+20}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x}}$.

5. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a > 0$.

Rešenje.

1. Smenom $t = \frac{x}{a}$ $(dt = \frac{dx}{a})$ dobija se da je

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C .$$

2. Istom smenom kao pod 1. dobija se

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C .$$

3. $\int \frac{dx}{2x^2+4x+20} = \int \frac{dx}{18((\frac{x+1}{3})^2+1)} = \left(\frac{x+1}{3} = t,\, dx = dt\right) = \frac{1}{18}\int \frac{3}{t^2+1}\,dt =$

$$= \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C.$$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}}}\,dt = \left(x+\frac{3}{4} = t,\, dx = dt\right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{t^2-\frac{9}{16}}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{9}{16}}\right| + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x}\right| + C\cdot$$

5. Uvedimo smenu $x = a\sin t$, $dx = a\cos t\,dt$. Tada je

$$\int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt = a^2\int\cos^2 t\,dt = a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Napomenimo da je uzeto $-a < x < a$ i $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Δ

Parcijalna integracija

Teorema 14.2. *Neka su $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije $u'(x)\,v(x)$. Tada postoji primitivna funkcija funkcije $u(x)\,v'(x)$ i pri tom važi jednakost*

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,du(x) \qquad \left(\int u\,dv = uv - \int v\,du\right).$$

Dokaz. Polazeći od jednakosti $(u(x)\,v(x))' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$, dobija se

$$\int (u(x)\,v(x))'dx = \int u'(x)\,v(x)\,dx + \int u(x)\,v'(x)\,dx,$$

odakle je $\int u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,du(x)$.

Pri integraciji leve strane jednakosti smo stavili umesto $u(x)\,v(x) + C$ (osobina 3) samo $u(x)\,v(x)$, s obzirom da $\int v(x)\,du(x)$ sadrži konstantu C, a dovoljno je da desna strana poslednje jednakosti sadrži jednu integracionu konstantu.

Pri primeni formule za parcijalnu integraciju treba voditi računa na koji će se način podintegralni izraz rastaviti na faktore $u(x)$ i $dv(x)$, a da pri tom nalaženje funkcije $v(x)$ iz njenog diferencijala i izračunavanje $\int v(x)\,du(x)$ bude prostije nego neposredno izračunavanje $\int u(x)\,dv(x)$. Nalaženje $v(x)$ iz $dv(x)$ nije jednoznačno, pa se obično za $v(x)$ bira najjednostavnija funkcija.

Primer 14.3. Naći sledeće integrale:

1. $\int \sqrt{x^2+k}\,dx, k \neq 0$ **2.** $\int e^x \sin x dx$.

Rešenje.

1. $\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \int \frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}}\,dx$. Za nalaženje $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}\,dx$, stavimo da je $u = x$,

$dv = \frac{x}{\sqrt{x^2+k}}\,dx$. Tada je $du = dx$, $v = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+k}}\,dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}}\,dx = \sqrt{x^2+k}$,

tj. $\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \int \frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}}\,dx = x\sqrt{x^2+k} - \int \sqrt{x^2+k}\,dx + k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|$,

pa je $2\int \sqrt{x^2+k}\,dx = x\sqrt{x^2+k} + k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|$. Sledi da je

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} + k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|\right) + C.$$

2. Stavimo $u = e^x$, $dv = \sin x\,dx$, $du = e^x\,dx$, $v = -\cos x$, pa je

$$I = \int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx.$$

Na $\int e^x \cos x\,dx$ primenimo formulu za parcijalnu integraciju, što daje

$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$, gde je uzeto $u = e^x$, $dv = \cos x\,dx$, $du = e^x dx$, $v = \sin x$. Dakle, $I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$, ili

$$I = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C. \quad \Delta$$

Napomena 14.1.

1. Ako integral oblika $\int P_n(x)e^{ax}dx$, gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena, $n \geq 1$, želimo da rešimo metodom parcijalne integracije, uzimamo da je $u = P_n(x)$, $e^{ax}dx = dv$. Ima n parcijalnih integracija.

2. Ako imamo integrale oblika $\int P_n(x)\sin ax\,dx$, $\int P_n(x)\cos ax\,dx$, gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena, $n \geq 1$, uzima se da je $u = P_n(x)$, $\sin ax\,dx = dv$, odnosno $\cos ax\,dx = dv$. Ima n parcijalnih integracija.

3. Ako imamo integral oblika $\int P_n(x)\ln^m x\,dx$, gde je $P_n(x)$ polinom n – tog stepena, $m \in N$, uzima se da je $u = \ln^m x$, $dv = P_n(x)\,dx$, i imamo m parcijalnih integracija.

Primer 14.4. Naći $\int \arcsin x\,dx$.

Rešenje. $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$, pri tome je

$$u = \arcsin x,\quad dv = dx,\quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ v = x \quad \Delta$$

Slično možemo naći i sledeće integrale: $\int \arccos x\,dx$, $\int \operatorname{arctg} x\,dx$ i $\int \operatorname{arcctg} x\,dx$.

15. INTEGRALI NEKIH FUNKCIJA

Integrali racionalnih funkcija

Navedimo neke osobine polinoma i racionalnih funkcija, koje se koriste pri integraciji. Dokazi tih osobina su dati u okviru predmeta Diskretna matematika.

Svaku nepravu nesvodljivu racionalnu funkciju $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (stepen polinoma $P(x)$ je veći ili jednak od stepena polinoma $Q(x)$) možemo napisati u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R_1(x)}{Q(x)},$$

gde je $T(x)$ polinom, a $\frac{R_1(x)}{Q(x)}$ racionalna funkcija kod koje je stepen polinoma $R_1(x)$ manji od stepena polinoma $Q(x)$ ($\frac{R_1(x)}{Q(x)}$ se naziva **pravi razlomak** ili **prava racionalna funkcija**).

Ako je $Q(x) = x - a$ tada se polinom $P(x)$ može napisati u obliku $P(x) = T(x)(x-a) + r$, gde je $r \in R$ konstanta. Ako je $r = 0$ onda je $P(x)$ **deljiv** sa $x - a$. Iz ove jednakosti sledi:

1. *Polinom $P(x)$ je deljiv sa $x - a$ ako i samo ako je $P(a) = 0$.*

2. *Svaki polinom stepena $n \geq 1$ ima tačno n nula (realnih ili kompleksnih - imaginarni deo je različit od nule).*

Jasno je da među n nula polinoma $P(x)$ može biti i jednakih. Prema tome, ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sve različite nule polinoma $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0$, $n \geq 1$, onda se polinom može napisati u obliku

$$P(x) = c_n (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \ldots (x-a_m)^{k_m}, \; k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n.$$

Pri tom se broj k_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, naziva **red** nule a_i

Ako je kompleksan broj $z = \alpha + i\beta$ *nula polinoma* $P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ $n \geq 2$ *reda* k *sa realnim koeficijentima* c_i*, onda je i njemu konjugovan broj* $\bar{z} = \alpha - i\beta$ *takođe nula polinoma* $P(x)$ reda k.

Navedimo sada teoremu o razlaganju racionalne funkcije.

Teorema15.1. *Neka je* $P(x)$ *polinom stepena manjeg od* n*, a* $Q(x)$ *polinom oblika*

$$Q(x) = c_n (x-a_1)^{k_1} \ldots (x-a_p)^{k_p}(x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1} \ldots (x^2 + b_q x + c_q)^{l_q},$$

gde je $k_1 + k_2 + \ldots + k_p + 2(l_1 + l_2 + \ldots + l_q) = n, n$ *je stepen polinoma* $Q(x)$, a_i, b_j *i* c_j *su realni brojevi za koje važi:* $b_j^2 - 4c_j < 0, i = 1, 2, \ldots, p, j = 1, 2, \ldots, q$ *(svaki polinom* $Q(x)$ *se može napisati u tom obliku).Tada se* $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *može napisati u obliku*

$$R(x) = \left(\frac{A_{11}}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}\right) + \ldots + \left(\frac{A_{p1}}{x-a_p} + \ldots + \frac{A_{pk_p}}{(x-a_p)^{k_p}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + b_1 x + c_1} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + b_1 x + c)^{l_1}}\right) + \ldots + \left(\frac{B_{q1}x + C_{q1}}{x^2 + b_q x + c_q} + \ldots + \frac{B_{ql_q}x + C_{ql_q}}{(x^2 + b_q x + c_q)^{l_q}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j} .$$

Koeficijente A_{ij}, B_{ij} i C_{ij} u Teoremi 15.1. dobijamo metodom jednakih (neodređenih – nepoznatih) koeficijenata. Ova metoda se sastoji u sledećem: za datu funkciju $R(x)$ pretpostavi se da važi data jednakost u kojoj su A_{ij}, B_{ij} i C_{ij} neodređeni koeficijenti. Množenjem te jednakosti sa $Q(x)$, dobijaju se na levoj i desnoj strani polinomi. Dva polinoma su identički jednaka ako i samo ako su im jednaki koeficijenti uz iste stepene od x, to se izjednačavanjem ovih koeficijenata dobija sistem jednačina za određivanje A_{ij}, B_{ij} i C_{ij}.

Razlomci oblika $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ i $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}$, $b^2-4ac<0$ nazivaju se **prosti** ili **parcijalni razlomci.**

Svaku racionalnu funkciju možemo razložiti, prema onome što je rečeno, na zbir polinoma i prostih razlomaka. Znači, integracija racionalne funkcije se svodi na integraciju polinoma i prostih razlomaka. Razmotrimo integrisanje prostih razlomaka.

I $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C, a \notin I$ (I je interval nad kojim tražimo neodređeni integral).

II $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C$, $k \geq 2$, a $\notin$ I (I je interval nad kojim tražimo neodređeni integral).

III $$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + (B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\,,\quad p^2-4q<0\,.$$

IV $$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^k}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx + (B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}, k \geq 2\,,\ p^2-4q<0\,.$$

Prvi integral se rešava smenom $x^2+px+q=t$ ($(2x+p)\,dx = dt$), tj.

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int\frac{dt}{t^k} = \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = -\frac{1}{(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + C.$$

Drugi integral (označimo ga sa I_k) napišimo u obliku

$$I_k = \int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int\frac{dx}{\left((x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})\right)^k} = \int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}\,,$$

gde smo stavili $x+\frac{p}{2}=t\ (dx=dt)$, $\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=m$. Dalje je

$$I_k=\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2+m^2-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k}.$$

Na poslednji integral primenimo parcijalnu integraciju: $u=t, dv=\frac{tdt}{(t^2+m^2)^k}$,

odakle je $du=dt$ i $v=\frac{1}{2}\int 2t(t^2+m^2)^{-k}dt=\frac{1}{2}\frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{-k+1}=\frac{1}{2(1-k)(t^2+m^2)^{k-1}}$,

pa je $\int\frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k}=-\frac{1}{2(k-1)}(t\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}})$.

Zamenom ovog izraza u jednakost za I_k dobijamo da je

$$I_k=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{1}{m^2}\frac{1}{2(k-1)}(\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}})=$$
$$=\frac{\mathrm{t}}{2\mathrm{m}^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}I_{k-1}.$$

Primenjujući potreban broj puta rekurzivnu formulu za I_k na kraju se dolazi do integrala

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+C.$$

Primer 15.1. Naći sledeće integrale:

1. $\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$, 2. $\int\frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}dx$,

Rešenje.

1. Za rešavanje integrala $\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$ napišimo podintegralnu funkciju u obliku

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{1+x^2}+\frac{Ex+F}{(1+x^2)^2}.$$

Množenjem gornje jednakosti sa $x^2(1+x^2)^2$ dobijamo da je

$$1=Ax(1+x^2)^2+B(1+x^2)^2+(Cx+D)x^2(1+x^2)+(Ex+F)x^2=$$
$$=(A+C)x^5+(B+D)x^4+(2A+C+E)x^3+(2B+D+F)x^2+Ax+B.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz jednake stepene dobijamo sistem

$A+C=0$, $B+D=0, 2A+C+E=0$, $2B+D+F=0, A=0$, $B=1$, čije je rešenje $A=0, B=1, C=0, D=-1, E=0$ i $F=-1$. Uvrštavajući ovo rešenje dobijamo da je

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x - I_2,$$

gde je

$$I_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}.$$

U poslednjem integralu primenjujemo parcijalnu integraciju, stavljajući da je $u = x$, $dv = x(1+x^2)^{-2}dx$, odakle je $du = dx$, $v = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1}$, pa je

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}.$$

Tada je

$$I_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C_1,$$

pa je

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{-x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{x} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

2. $$\int \frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}\,dx = \int (x^2+x-3+\frac{5}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2})\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x + 5\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C.$$

Integrali nekih iracionalnih funkcija

I *Integrali oblika* $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

Neka je dat integral $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ $(a \neq 0)$, gde je R racionalna funkcija od x i $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Pokazaćemo da se ovaj integral svodi na integral racionalne funkcije primenom jedne od **Ojlerovih[1] smena.**

1. Ako je $a > 0$, uvodi se smena $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$, (**prva Ojlerova smena**). Tada je (uzmimo da je $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$, znak minus ispred a ne

---

[1] L.Euler (1707–1783), švajcarski matematičar

menja način izvođenja) $ax^2 + bx + c = t^2 + 2xt\sqrt{a} + ax^2$,

odakle je $x = \dfrac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}$. Znači da je x racionalna funkcija od t (takođe je i dx racionalan izraz od t i dt), a

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a} = t + \dfrac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}\sqrt{a}$, tj. i

L. Euler

$\sqrt{ax^2 + bx + c}$ je racionalan izraz od t. Prema tome, dati integral se transformiše u integral racionalne funkcije od t.

Primer 15.2. Naći integral $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$, $k \neq 0$ (vidi tablični integral broj 11).

Rešenje. Iz $\sqrt{x^2 + k} = t - x$ $(a > 0)$ sledi da je j $x^2 + k = t^2 - 2xt + x^2$, tj.

$$x = \frac{t^2 - k}{2t}, \ dx = \frac{t^2 + k}{2t^2}dt, \ \sqrt{x^2 + k} = \frac{t^2 + k}{2t}.$$

Uvrštavanjem u integral dobijamo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \int \frac{\frac{t^2 + k}{2t^2}}{\frac{t^2 + k}{2t}}dt = \int \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}} = \ln|\mathrm{t}| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + \mathrm{C}. \ \Delta$$

2. Ako je $c > 0$, može se uvesti smena $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$ (**druga Ojlerova smena**).Tada je (uzmimo pred korenom znak plus)

$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c$, odakle je $x = \dfrac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}$.

Prema tome, x je racionalna funkcija od t, a kako se dx i $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ izražavaju takođe racionalno preko t, dati integral se svodi na integral racionalne funkcije od t.

Primer 15.3. Naći integral $I = \int \dfrac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2\sqrt{1 + x + x^2}}dx$.

Rešenje. Iz $\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1$, sledi da je

$$1 + x + x^2 = x^2t^2 + 2xt + 1, x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}, dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1 - t^2)^2}dt,$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2},\ 1-\sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2+t}{1-t^2}.$$

Uvrštavanjem u integral dobijamo

$$I = \int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int \frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}dt =$$

$$=2\int \frac{t^2}{1-t^2}dt = -2t + \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right| + C. \Delta$$

3. Ako kvadratni trinom ax^2+bx+c ima realne i različite korene α i β, može se staviti

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t, \text{ (\textbf{treća Ojlerova smena}).}$$

Kako je $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, to je $a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2t^2$, a odatle $x = \dfrac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}$. dx i $\sqrt{ax^2+bx+c}$ takođe zavise od t. Prema tome x je racionalna funkcija od t, a kako se dx i $\sqrt{ax^2+bx+c}$ izražavaju racionalno preko t, dati integral se svodi na integral racionalne funkcije od t.

Primer 15.4. Naći integral $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

Rešenje. Kako je $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$, iz $\sqrt{x^2-4x+3} = (x-1)t$ i $(x-1)(x-3) = (x-1)^2t^2$, $x-3 = (x-1)t^2$, sledi da je

$$x = \frac{3-t^2}{1-t^2},\ dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2}dt,\ \sqrt{x^2-4x+3} = (x-1)t = \frac{2t}{1-t^2}, \text{ tj.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}} = \int \frac{4t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 2t}dt = 2\int \frac{dt}{1-t^2} = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x-1+\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1-\sqrt{x^2-4x+3}}\right| + C. \quad \Delta$$

Može se zapaziti da su za rešavanje integrala funkcije $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ dovoljne Ojlerove smene 1 i 3. Zaista, ako su koreni kvadratnog trinoma ax^2+bx+c realni, može se primeniti Ojlerova smena 3. Ako su koreni kvadratnog trinoma ax^2+bx+c kompleksni ($b^2-4ac<0$), to iz identiteta

$ax^2+bx+c = \dfrac{1}{4a}((2ax+b)^2+(4ac-b^2))$ sledi da kvadratni trinom (zbog pozitivnosti izraza u srednjoj zagradi) ima isti znak kao i a, a kako je on pozitivan (inače $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ne bi bilo realno) mora biti $a>0$. U tom slučaju se može primeniti Ojlerova smena 1.

Ojlerove smene u većini slučajeva dovode do integrala glomaznih racionalnih funkcija, pa se preporučuje da se one koriste samo u slučajevima kada nema drugih mogućnosti integracije. Razmotrićemo zbog toga neke specijalne slučajeve integrala $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, za koje postoje metodi rešavanja pogodniji od Ojlerovih smena.

II *Integral oblika* $\boldsymbol{I=\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx}$, $\boldsymbol{a\neq 0}$, gde je $P_n(x)$ polinom n*-tog* stepena od x $(n\geq 1)$, rešava se primenom identiteta

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\text{ , gde je}$$

$Q_{n-1}(x)$ polinom stepena $n-1$ sa neodređenim (nepoznatim) koeficijentima, a λ neodređena (nepoznata) konstanta. Nađimo izvod leve i desne strane poslednje jednakosti.

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{(2ax+b)Q_{n-1}(x)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Množenjem poslednje jednakosti sa $\sqrt{ax^2+bx+c}$ dobijamo identitet

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c)+(ax+\frac{b}{2})Q_{n-1}(x)+\lambda\ .$$

$Q'_{n-1}(x)$ je nula polinom za $n=1$, a za $n>1$ polinom stepena $n-2$. U svakom slučaju je polinom na desnoj strani n-tog stepena, kao i $P_n(x)$. Iz ovog identiteta, sređivanjem po stepenima od x, određuju se koeficijenti polinoma $Q_{n-1}(x)$ i λ, rešavanjem sistema od $n+1$ nepoznatih.

Primer 15.5. Naći $\int\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Rešenje. $\int\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Diferenciranjem leve i desne strane dobijamo da je

$$\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2+1}+\frac{x(Ax^2+Bx+C)}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}},$$

odnosno

$$x^3-1=2Ax^3+Bx^2+2Ax+B+Ax^3+Bx^2+Cx+\lambda,$$

odakle je $3A=1, 2B=0, 2A+C=0$ i $B+\lambda=-1$, pa je rešenje toga sistema $A=\frac{1}{3}, B=0, C=-\frac{2}{3}$ i $\lambda=-1$. Prema tome je

$$\int\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}dx=(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3})\sqrt{x^2+1}-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=$$
$$=\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{x^2+1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.\ \Delta$$

III ***Integral oblika*** $\boldsymbol{I=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}}$, $\boldsymbol{n\in N, a\neq 0,}$

svodi se na integral prethodnog tipa uvođenjem smene $x-\alpha=\frac{1}{t}$. Tada je

$$dx=-\frac{dt}{t^2},\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(\frac{\alpha t+1}{t})^2+b\frac{\alpha t+1}{t}+c}=\frac{1}{|t|}\sqrt{pt^2+qt+r},$$ gde p,q i r zavise od a,b,c i α. Prema tome je

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\int\frac{t^n|t|}{t^2\sqrt{pt^2+qt+r}}dt=-\int\frac{t^{n-2}|t|}{\sqrt{pt^2+qt+r}}dt.$$

Primer 15.6. Naći integral $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$.

Rešenje. Prvo rešimo integral za $x>0$. Uvedimo smenu $x=\frac{1}{t}$. Sledi da je

$$dx=-\frac{dt}{t^2},\ \sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1}=\frac{1}{t}\sqrt{t^2-t+1},\text{tj.}$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}=-\int\frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}\sqrt{t^2-t+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}=$$
$$=-\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{2x}{2-x+2\sqrt{x^2-x+1}}\right|+C.$$

Istim postupkom, dobija se isti rezultat i za $x<0$, što se lako proverava. Δ

IV *Integral oblika* $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{r_1},\dots,\left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{r_k}\right)dx$.

Posmatrajmo integral kod koga je podintegralna funkcija racionalna funkcija od x i od različitih stepena izraza $\frac{ax+b}{px+q}$, pri čemu je $aq-bp\neq 0$ (inače se izraz svodi na konstantu). Neka je s najmanji zajednički sadržalac imenilaca eksponenata $r_1, r_2, \dots, r_k$. Uvedimo smenu

$$\sqrt[s]{\frac{ax+b}{px+q}}=t \Rightarrow \frac{ax+b}{px+q}=t^s.$$

Tada je $\left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{r_i}=t^{sr_i}$ za svako $i=1,2,\dots,k$,

pri čemu je, s obzirom da se imenilac svakog broja r_i sadrži u s, sr_i ceo broj. Takođe je $x=\frac{qt^s-b}{a-pt^s}$, pa se dati integral svodi na integral racionalne funkcije nove promenljive t.

Primer 15.7. Naći integral $\int\frac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})x}$.

Rešenje. Uvedimo smenu $\sqrt[6]{x}=t$, odakle sledi da je $x=t^6$. Kako je $dx=6t^5\,dt$, to je $\int\frac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})x}=\int\frac{6t^5}{(t^3+t^2)t^6}dt=6\int\frac{dt}{t^3(t+1)}$. Iz $\frac{1}{t^3(t+1)}=\frac{A}{t^3}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t}+\frac{D}{t+1}$, sledi da je $1=A(t+1)+Bt(t+1)+Ct^2(t+1)+Dt^3$. Iz poslednje relacije dobija se sistem $C+D=0, B+C=0, A+B=0, A=1$.

Rešavajući poslednji sistem dobijamo da je $A=1, B=-1, C=1$ i $D=-1$.

Prema tome je

$$\int\frac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})x}=6\left(\int\frac{dt}{t^3}-\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t+1}\right)=-\frac{3}{t^2}+\frac{6}{t}++6\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.\ \Delta$$

V *Integrali oblika* $\int x^m (a + bx^n)^p dx$.

Binomni diferencijal je izraz oblika $x^m (a + bx^n)^p dx$, gde su m, n i p racionalni brojevi $(n, p \neq 0)$, a a i b realni brojevi različiti od nule. Integral

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

se može, pre svega, transformisati smenom $t = x^n$, odakle je $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$,

pa se integral svodi na $\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a + bt)^p dt = \frac{1}{n}\int t^q (a + bt)^p dt$, gde smo stavili $\frac{m+1}{n} - 1 = q$ (takođe racionalan broj). Razmotrićemo tri slučaja:

1. p je ceo broj, a $q = \frac{r}{s}$ je racionalan broj. Tada je

$$\int t^{\frac{r}{s}} (a + bt)^p dt = \int R(t, t^{\frac{r}{s}})\, dt,$$

tj. dobija se integral razmotren ranije, a on se smenom $t = z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.

Primer 15.8. Naći $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} = \int x^{-\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{3}})^{-1} dx$.

Rešenje. Stavimo $x^{\frac{1}{3}} = t$ $(x = t^3, dx = 3t^2 dt)$. Tada je

$$\int x^{-\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{3}})^{-1} dx = 3\int t^{\frac{1}{2}}(1 + t)^{-1} dt.$$

Uvodeći smenu $t^{\frac{1}{2}} = z$ $(t = z^2, dt = 2z\, dz)$ dobijamo da je

$$\begin{aligned}\int x^{-\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{3}})^{-1} dx &= 6\int \frac{z^2 dz}{1 + z^2} = 6(z - \operatorname{arctg} z) + C = \\ &= 6(\sqrt{t} - \operatorname{arctg}\sqrt{t}) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}) + C. \ \Delta\end{aligned}$$

Napomenimo da smo u gornjem primeru na početku mogli uvesti smenu $\sqrt[6]{x} = t$.

2. q je ceo broj, a $p = \frac{r}{s}$ je racionalan broj. Tada se dobija integral

$$\int t^q (a + bt)^{\frac{r}{s}} dt = \int R(t, (a + bt)^{\frac{r}{s}})\, dt,$$

koji se smenom $a + bt = z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.

Primer 15.9. Naći $\int \frac{dx}{\sqrt{2+\sqrt{x}}} = \int (2+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} dx$.

Rešenje. Smenom $\sqrt{x} = t$ $(x = t^2,\ dx = 2tdt)$ dobijamo

$\int (2+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} dx = 2\int t(2+t)^{-\frac{1}{2}} dt$. Dalje, smenom $2+t = z^2$ $(dt = 2z\,dz)$ imamo

$$\int (2+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} dx = 4\int (z^2-2)\,dz = \frac{4}{3}z^3 - 8z + C =$$
$$= \frac{4}{3}\sqrt{(2+\sqrt{x})^3} - 8\sqrt{2+\sqrt{x}} + C = \frac{4}{3}(\sqrt{x}-4)\sqrt{2+\sqrt{x}} + C.\Delta$$

3. $p+q$ je ceo broj (neka je $p = \frac{r}{s}$). Tada je

$$\int t^q (a+bt)^p\, dt = \int t^{p+q} \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt = \int R\left(t, \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dt,$$

pri čemu se poslednji integral smenom $\frac{a+bt}{t} = z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.

Primer 15.10. Naći $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx = \int x^{-2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx.$

Rešenje. Pomoću smene $t = x^2$ $(x = t^{\frac{1}{2}}, dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$, za $x > 0)$ dobija se integral

$\int x^{-2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\int t^{-1}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{\frac{1}{2}} dt$, koji se smenom $\frac{1+t}{t} = z^2$ $\left(t = \frac{1}{z^2-1},\right.$

$\left. dt = -\frac{2z\,dz}{(z^2-1)^2}\right)$ svodi na integral

$$\int x^{-2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx = -\int \frac{z^2 dz}{z^2-1} = -z + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\left[\frac{1+t}{t}\right]^{\frac{1}{2}}}{1-\left[\frac{1+t}{t}\right]^{\frac{1}{2}}}\right| - \sqrt{\frac{1+t}{t}} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right| - \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} + C =$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2} + C.$$

Isti rezultat se dobija i za $x < 0$. Δ

P.I. Čebišev

Integral binomnog diferencijala je, dakle, elementarno rešiv, tj. može se izraziti u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija ako i samo ako je jedan od brojeva $p, q, p+q$ ceo broj. Videli smo da su ti uslovi dovoljni. Da su i potrebni, tj. da integral nije elementarno rešiv ako ni jedan od brojeva $p, q, p+q$ nije ceo broj, dokazao je ruski matematičar Čebišev[1] 1853.godine.

Integrali trigonometrijskih funkcija

I *Integrali oblika* $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$.

Posmatrajmo integral kod koga je podintegralna funkcija racionalna funkcija od $\sin x$ i $\cos x$. Svaki ovakav integral može se svesti na integral racionalne funkcije po novoj promenljivoj, smenom $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, za $(2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi$, $k \in Z$. Koristeći se poznatim trigonometrijskim obrascima imamo da je

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Kako je $x = 2\operatorname{arctg} t + 2k\pi$, to je $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. Sledi da je

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,$$ gde je R_1 nova racionalna funkcija.

Primer 15.11. Naći integral $\int \dfrac{dx}{1+\sin x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Rešenje. Uvrštavanjem navedenih formula za $\sin x$ i dx, smenom $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ za $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ integral se svodi na

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

[1] P.I. Čebišev (1821-1894), ruski matematičar

Kako je funkcija $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$ neprekidna nad intervalom $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ to za nju postoji neodređeni integral nad tim intervalom. Neka je

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{1+\sin x} = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C_1, \; x \in (-\frac{\pi}{2}, \pi)$$

$$F_2(x) = \int \frac{dx}{1+\sin x} = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C_2, \; x \in (\pi, \frac{3\pi}{2}).$$

Kako je $\lim\limits_{x\to\pi^-} F_1(x) = C_1$, $\lim\limits_{x\to\pi^+} F_2(x) = C_2$, to je neodređeni integral funkcije $f(x)$ nad intervalom $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ dat obrascem

$$F(x) = \int \frac{dx}{1+\sin x} = \begin{cases} -\dfrac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}) \\ C, & x = \pi \end{cases}. \; \Delta$$

Data smena često dovodi do integrala glomaznih racionalnih funkcija, pa je preporučljivo izbegavati je onda kada je to moguće. Navešćemo neke od specijalnih slučajeva integrala racionalne funkcije od $\sin x$ i $\cos x$, u kojima je pogodnije uvesti neku drugu smenu.

I₁ *Integral oblika* $\int \mathbf{R(\sin x)\cos x\, dx}$ rešava se smenom $\sin x = t$ $(\cos x dx = dt)$, kojom se svodi na $\int R(t)\,dt$.

Na ovaj slučaj svode se svi tipovi integrala $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ kod kojih je funkcija R takva da je

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x), \text{ za } \frac{2k-1}{2}\pi < x < \frac{2k+1}{2}\pi, k \in Z.$$

Tada je, naime, $\dfrac{R(\sin x, -\cos x)}{-\cos x} = \dfrac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$, što znači da desna strana ne menja vrednost ako se $\cos x$ zameni sa $-\cos x$. To znači da ona zavisi od $\cos^2 x$, a umesto $\cos^2 x$ se može staviti $1-\sin^2 x$, te ona zavisi samo od $\sin x$. Prema tome je

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x\,dx = \int R_1(\sin x)\cos x\,dx.$$

I₂ *Integral oblika* $\int \mathbf{R(\cos x)\sin x\, dx}$ rešava se smenom $\cos x = t$ $(-\sin x\,dx = dt)$, kojom se svodi na $-\int R(t)dt$.

Na integral ovog oblika svode se svi integrali $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ kod kojih je R funkcija za koju je

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),\ 2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ k \in Z,$$

jer je $\dfrac{R(-\sin x, \cos x)}{-\sin x} = \dfrac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x}$, pa se desna strana ne menja zamenom $\sin x$ sa $-\sin x$, odnosno ona zavisi samo od $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Tada je

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x} \sin x\,dx = \int R_1(\cos x) \sin x\,dx.$$

I$_3$ *Integral oblika* $\int \boldsymbol{R(\mathrm{tg}\,x)\,dx}$ rešava se smenom $\mathrm{tg}\,x = t$, za $\dfrac{2k-1}{2}\pi < x < \dfrac{2k+1}{2}\pi,\ k \in Z$ $(dx = \dfrac{dt}{1+t^2})$, i njom se svodi na

$$\int R(t)\frac{dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,$$

tj. na integral racionalne funkcije od t.

Ako je u integralu oblika $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ funkcija R takva da je

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),\ \frac{2k-1}{2}\pi < x < \frac{2k+1}{2}\pi,\ k \in Z$$

tada je $R(-\cos x\,\mathrm{tg}\,x, -\cos x) = R(\cos x\,\mathrm{tg}\,x, \cos x)$. Sledi da se podintegralna funkcija ne menja ako se $\cos x$ zameni sa $-\cos x$, što znači da ona zavisi od $\cos^2 x$. Kako je $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$, funkcija R zavisi samo od $\mathrm{tg}\,x$, pa je

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R_1(\mathrm{tg}\,x)\,dx,$$

tj. integral se svodi na već opisani slučaj.

Primer 15.12. Naći integral $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2}$, $x \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

Rešenje. Smenom $t = \mathrm{tg}\,x$ $(dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x})$, dobijamo da je

$$\int \frac{dx}{(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2} = \int \frac{dx}{(\mathrm{tg}\,x + \sqrt{3})^2 \cos^2 x} = \int \frac{dt}{(t+\sqrt{3})^2} =$$

$$= -\frac{1}{(t+\sqrt{3})} + C = -\frac{1}{(\mathrm{tg}\,x + \sqrt{3})} + C. \qquad \Delta$$

II *Integrali oblika* $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$.

Neka su m i n racionalni brojevi. Integral $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ se svodi na integral binomnog diferencijala pomoću smene $\sin x = t$ ili $\cos x = t$. Recimo, stavimo da je $t = \sin x$ $(dt = \cos x\, dx)$. S obzirom da je tada

$$\cos x = (1-t^2)^{\frac{1}{2}},\ dx = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

dobija se da je

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

Analogno se dobija smenom $t = \cos x$. Dobijeni integral binomnog diferencijala se, u zavisnosti od brojeva m i n, može izraziti u konačnom obliku ukoliko se pojavi jedan od tri slučaja opisanih u integralu binomnog diferencijala.

Ako su m i n celi brojevi, integral spada u integrale opisane do sada. Razmotrićemo različite slučajeve koji se pri tom javljaju, u zavisnosti od datih brojeva m i n.

1. Bar jedan od brojeva m i n je neparan. Recimo, neka je $m = 2k+1$, $k \in Z$. Tada je

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \sin x\, dx = \int R(\cos x) \sin x\, dx,$$

pa se može uvesti smena $t = \cos x$ $(dt = -\sin x\, dx)$. Analogno se postupa ako je n neparan broj.

Primer 15.12. Naći $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$.

Rešenje. Kako je $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin^3 x}{1-\sin^2 x} \cos x\, dx$, uvođenjem smene $t = \sin x$ $(dt = \cos x\, dx)$, dobija se

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int \frac{t^3}{1-t^2} dt = -\int t\, dt - \int \frac{t\, dt}{t^2-1} =$$

$$= -\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln\left|t^2-1\right| + C = -\frac{1}{2}\sin^2 x - \ln\left|\cos x\right| + C. \Delta$$

2. m i n su parni i nenegativni brojevi. Neka je $m = 2k, n = 2l$ (k, l nenegativni celi brojevi).Iz $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ i $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, sledi da je

$$\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x\, dx = \frac{1}{2^{k+l}} \int (1-\cos 2x)^k (1+\cos 2x)^l\, dx,$$

pa se, posle razvijanja po binomnom obrascu i množenja, integral svodi na zbir integrala kod kojih je podintegralna funkcija neki stepen od $\cos 2x$. Ukoliko je taj stepen neparan, integral se rešava kao u slučaju 1, a ako je paran, ponovo se primenjuje dati obrazac za $\cos^2 2x$ i postupak se nastavlja na isti način.

Primer 15.14. Naći $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$.

Rešenje. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)\, dx =$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C. \ \Delta$$

3. m i n su parni brojevi i bar jedan od njih je negativan. Tada je za $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x\, dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2(l+1)} x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(\frac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x}\right)^k \left(\frac{1}{1+\text{tg}^2 x}\right)^{l+1} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Ako uvedemo smenu $\text{tg}\, x = t$ $(dt = \frac{dx}{\cos^2 x})$, integral se svodi na integral racionalne funkcije, tj.

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \frac{t^{2k}}{(1+t^2)^{k+l+1}} dt.$$

Primer 15.15. Naći $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Rešenje. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} \frac{1}{1+\text{tg}^2 x}} = \int \frac{dt}{\frac{t^2}{1+t^2} \frac{1}{1+t^2}} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^2} + 2 + t^2\right) dt = -\frac{1}{t} + 2t + \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\text{tg}^3 x + 2\text{tg}\, x - \text{ctg}\, x + C.$$

Pri tom smo imali u vidu da je $\sin^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x}$ i $\cos^2 x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x}$. Δ

III *Integrali oblika* $\boldsymbol{I = \int \sin mx \sin nx\, dx}$,

gde su m i n proizvoljne konstante, rešava se tako što se primeni trigonometrijski identitet $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$, pa je za $|m| \neq |n|$.

$$\int \sin mx \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int (-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x) + C.$$

Za $m = \pm n \neq 0$ je

$$\pm \int \sin^2 mx dx = \pm\frac{1}{2}\int (1-\cos 2mx)dx = \pm\frac{1}{2}(x - \frac{\sin 2mx}{2m}) + C.$$

IV *Integral oblika* $I = \int \sin mx \cos nx\ dx$,

rešava se koristeći identitet $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$, odakle je za $|m| \neq |n|$

$$\int \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{m+n}\cos(m+n)x - \frac{1}{m-n}\cos(m-n)x) + C.$$

Za $m = \pm n \neq 0$ je

$$\int \sin mx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2mx dx = -\frac{\cos 2mx}{4m} + C.$$

V *Integral oblika* $I = \int \cos mx \cos nx\, dx$,

rešava se primenom identiteta $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$, odakle je za $|m| \neq |n|$

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x) + C.$$

Za $m = \pm n \neq 0$ je

$$\int \cos^2 mx\, dx = \int \frac{1+\cos 2mx}{2}dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2mx}{2m}\right) + C.$$

Primer 15.16. Naći integral $I = \int \sin 5x \cos 3x\, dx$.

Rešenje. Kako je $\sin 5x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)$, imamo da je

$$\int \sin 5x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin 2x)\, dx = \frac{1}{2}(-\frac{1}{8}\cos 8x - \frac{1}{2}\cos 2x) + C.\ \Delta$$

Primer 15.17. Naći integral $I = \int \sin^2 3x \cos^3 2x \, dx.$

Rešenje. Kako je $\sin^2 3x = \left(\dfrac{e^{3xi} - e^{-3xi}}{2i}\right)^2 = \dfrac{e^{6xi} - 2 + e^{-6xi}}{-4}$,

$$\cos^3 2x = \left(\frac{e^{2xi} + e^{-2xi}}{2}\right)^3 = \frac{e^{6xi} + 3e^{2xi} + 3e^{-2xi} + e^{-6xi}}{8},$$

to je

$$\sin^2 3x \cos^3 2x = \frac{e^{6xi} - 2 + e^{-6xi}}{-4} \cdot \frac{e^{6xi} + 3e^{2xi} + 3e^{-2xi} + e^{-6xi}}{8} =$$

$$= \frac{e^{12xi} + 3e^{8xi} + 3e^{4xi} + 1 - 2e^{6xi} - 6e^{2xi} - 6e^{-2xi} - 2e^{-6xi} + 1 + 3e^{-4xi} + 3e^{-8xi} + e^{-12xi}}{-32} =$$

$$= -\frac{1}{16}\left(\frac{e^{12xi} + e^{-12xi}}{2} + 3\frac{e^{8xi} + e^{-8xi}}{2} - 2\frac{e^{6xi} + e^{-6xi}}{2} + 3\frac{e^{4xi} + e^{-4xi}}{2} - 6\frac{e^{2xi} + e^{-2xi}}{2} + \frac{2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{16}(\cos 12x + 3\cos 8x - 2\cos 6x + 3\cos 4x - 6\cos 2x + 1),$$

pa je

$$I = -\frac{1}{16}\int (\cos 12x + 3\cos 8x - 2\cos 6x + 3\cos 4x - 6\cos 2x + 1)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\left(\frac{1}{12}\sin 12x + \frac{3}{8}\sin 8x - \frac{1}{3}\sin 6x + \frac{3}{4}\sin 4x - 3\sin 2x + x\right) + C. \Delta$$

Integrali nekih eksponencijalnih funkcija

I *Integral oblika* $\int R(e^x)\,dx$.

Neka je dat integral $I = \int R(e^x)\,dx$, gde je R racionalna funkcija od e^x Ovaj integral rešava se smenom $e^x = t$. Tada je $e^x dx = dt$, odakle je $dx = \dfrac{dt}{e^x} = \dfrac{dt}{t}$, pa je

$$\int R(e^x)\,dx = \int R(t)\frac{dt}{t},$$

što znači da se integral svodi na integral racionalne funkcije od t.

Primer 15.18. Naći integral $I = \int \dfrac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1}\,dx.$

Rešenje. Smenom $e^x = t$ $\left(dx = \dfrac{dt}{t}\right)$, dobija se da je

$$\int \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1}\,dx = \int \frac{t^3 - t}{t^2 + 1}\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\,dt = \int dt - 2\int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= t - 2\operatorname{arctg} t + C = e^x - 2\operatorname{arctg} e^x + C. \quad \Delta$$

II *Integral oblika* $\int (P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x)dx$.

Posmatrajmo integral $\int (P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x)dx$, gde je $P(x)$ polinom n-tog stepena ili nula polinom, $Q(x)$ polinom m-tog stepena ili nula polinom, pri čemu je bar jedan od polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ različit od nula polinoma, a α i β proizvoljne konstante. Ovaj integral se rešava primenom identiteta

$$\int (P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x)dx = R(x)e^{\alpha x} \sin \beta x + S(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + C,$$

gde su $R(x)$ i $S(x)$ polinomi k-tog stepena sa neodređenim (nepoznatim) koeficijentima, a $k = \max\{\mathrm{m}, \mathrm{n}\}$ ako su oba polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ različiti od nula polinoma, $k = n$, ako je polinom $Q(x)$ nula polinom i $k = m$ ako je polinom $P(x)$ nula polinom. Diferenciranjem leve i desne strane dobijamo da je

$$\begin{aligned} &P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x = \\ &= R'(x)e^{\alpha x} \sin \beta x + \alpha R(x)e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta R(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + \\ &\quad + S'(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + \alpha S(x)e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta S(x)e^{\alpha x} \sin \beta x, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} &P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x = \\ &= (\beta R(x) + \alpha S(x) + S'(x))e^{\alpha x} \cos \beta x + (\alpha R(x) - \beta S_k(x) + R'(x))e^{\alpha x} \sin \beta x, \end{aligned}$$

odakle je

$$P(x) = \beta R(x) + \alpha S(x) + S'(x), \qquad Q(x) = \alpha R(x) - \beta S(x) + R'(x).$$

Iz ova dva identiteta, izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene od x i rešavanjem sistema od $2k+2$ jednačina sa $2k+2$ nepoznatih, dobijaju se koeficijenti polinoma $R(x)$ i $S(x)$.

Primer 15.19. Naći $\int (x^2+1)e^{2x} \sin x\, dx$.

Rešenje. $\int (x^2+1)e^{2x} \sin x\, dx = (Ax^2+Bx+C)e^{2x} \sin x + (Dx^2+Ex+F)e^{2x} \cos x + C.$

Diferencirajući levu i desnu stranu dobijamo da je

$$\begin{aligned} (x^2+1)e^{2x} \sin x = {} & (2Ax+B)e^{2x} \sin x + 2(Ax^2+Bx+C)e^{2x} \sin x + \\ & + (Ax^2+Bx+C)e^{2x} \cos x + (2Dx+E)e^{2x} \cos x + \\ & + 2(Dx^2+Ex+F)e^{2x} \cos x - (Dx^2+Ex+F)e^{2x} \sin x, \end{aligned}$$

tj.

$$(x^2+1)e^{2x}\sin x =$$
$$= ((A+2D)x^2+(B+2D+2E)x+C+E+2F)e^{2x}\cos x +$$
$$+ ((2A-D)x^2+(2A+2B-E)x+B+2C-F)e^{2x}\sin x\,.$$

Izjednačavanjem koeficijenata dobijamo sistem

$$A+2D=0\,,\qquad B+2D+2E=0\,,\qquad C+E+2F=0\,,$$
$$2A-D=1\,,\qquad 2A+2B-E=0\,,\qquad B+2C-F=1\,,$$

čije je rešenje

$$A=\frac{2}{5},\quad B=-\frac{6}{25},\quad C=\frac{54}{125},\quad D=-\frac{1}{5},\quad E=\frac{8}{25},\quad F=-\frac{47}{125}.$$

Prema tome je

$$\int(x^2+1)e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{125}e^{2x}((50x^2-30x+54)\sin x+(-25x^2+40x-47)\cos x)+C.\Delta$$

U dosadašnjim izlaganjima videli smo kako se nalaze primitivne funkcije nekih klasa elementarnih funkcija. Dokazano je, međutim, da primitivna funkcija elementarne funkcije ne mora obavezno da bude elementarna funkcija. Na primer, integrali

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int\cos x^2 dx,\quad \int\frac{\sin x}{x}dx$$

nisu elementarne funkcije. S obzirom da su podintegralne funkcije neprekidne u oblasti definisanosti dati integrali postoje nad svakim intervalom iz oblasti definisanosti datih podintegralnih funkcija.

Eliptični integrali

Jedan od tipova integrala koji nisu uvek elementarne funkcije su **eliptični integrali**. Eliptični integrali su integrali oblika

(1) $\int R(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})dx$, **(2)** $\int R(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})dx$,

gde je R racionalna funkcija, $a\neq 0$.

Napomenimo da nekad integrali (1) i (2) mogu biti elementarne funkcije. Na primer, $\int\frac{5x^3+2}{2\sqrt{x^3+1}}dx = x\sqrt{x^3+1}+C$, pa funkcija $\frac{5x^3+2}{2\sqrt{x^3+1}}$ ima elementarnu primitivnu funkciju.

Posmatrajmo sledeće tri vrste eliptičnih integrala

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}dz$ **(eliptični integral I vrste)**,

(4) $\int \frac{z^2}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}dz$ **(eliptični integral II vrste)**,

(5) $\int \frac{1}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}dz$ **(eliptični integral III vrste)**,

gde je $0 < k < 1$. Parametar h može imati i kompleksne vrednosti. Pokazano je da integrali (3), (4) i (5) nisu elementarne funkcije.

Takođe je pokazano da se svaki eliptični integral može svesti, do na sabirak koji je elementarna funkcija, na jedan od ta tri eliptična integrala.

Ležandr[1] je, smenom $z = \sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$,

integrale sveo na

A.M. Legendre

- integral (3) na integral $\int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$, **(6)**
- integral (4) se izražava preko integrala (6) i integrala

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi \qquad \textbf{(7)}$$

$$\left(\int \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi = \frac{1}{k^2}\int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi - \frac{1}{k^2}\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi\right),$$

- integral (5) na integral $\int \frac{1}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$. **(8)**

integrali (6), (7) i (8) nazivaju se **eliptični integrali** u **Ležandrovom obliku** I, II i III vrste, respektivno (**kanonski oblik eliptičnih integrala**).

Posebno su proučeni integrali (6) i (7). Naime, odredimo konstante u njima tako da vrednosti tih integrala za $\varphi = 0$ budu 0. Dobijene funkcije označimo sa $F(k,\varphi)$, odnosno $E(k,\varphi)$, tj.

$$F(k,\varphi) = \int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi,\quad F(k,0) = 0,$$

$$E(k,\varphi) = \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,\quad E(k,0) = 0.$$

[1] A.M.Legendre (1752–1833), francuski matematičar

Dakle, funkcije $F(k,\varphi)$ i $E(k,\varphi)$ su neelementarne funkcije definisane neodređenim integralima. Njihove osobine su proučene, a formirane su i tabele njihovih vrednosti. Primenjuju se u mnogim teorijskim i praktičnim problemima.

Razni primeri

Primer 15.20. Naći $F(x) = \int \arcsin \frac{2x}{1+x^2}\,dx$, za $x \geq 0$.

Rešenje. Integral se rešava metodom parcijalne integracije.

$$u = \arcsin \frac{2x}{1+x^2},\ dv = dx,\ v = x,\ du = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ -\dfrac{2}{1+x^2}, & x > 1 \end{cases},$$

pa je:

1) za $0 \leq x < 1$

$$F_1(x) = I = x \arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \int \frac{2xdx}{1+x^2} = x \arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \ln(1+x^2) + C_1,$$

2) za $x > 1$

$$F_2(x) = I = x \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \int \frac{2xdx}{1+x^2} == x \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \ln(1+x^2) + C_2 .$$

Treba da nađemo integral za svako $x \geq 0$ (podintegralna funkcija je neprekidna, pa postoji neodređeni integral).

Primitivna funkcija $F(x)$ funkcije $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ je $F_1(x)$ za $0 \leq x < 1$, a

$F_2(x)$ za $x > 1$. Pre svega $F(x)$ mora da bude neprekidna za $x = 1$. Iz

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-} F_1(x) = \frac{\pi}{2} - \ln 2 + C_1 \text{ i } \lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^+} F_2(x) = \frac{\pi}{2} + \ln 2 + C_2,$$

sledi da je $\frac{\pi}{2} - \ln 2 + C_1 = \frac{\pi}{2} + \ln 2 + C_2$. Sada se dobija: $C_2 = -2\ln 2 + C_1$.

Dakle,

$$F(x)=\begin{cases} x\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}-\ln(1+x^2)+C & ,\quad 0\le x<1\\ \dfrac{\pi}{2}-\ln 2+C & ,\quad x=1\\ x\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}+\ln(1+x^2)-2\ln 2+C & ,\quad x>1\end{cases}.$$

Lako se pokazuje da postoji $F'(1)=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$

$$\left(\lim_{x\to1^-}F'(x)=\lim_{x\to1^+}F'(x)=\lim_{x\to1}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\right).\quad \Delta$$

Primer 15.21. Naći $F(x)=\int\dfrac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ nad intervalom $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

Rešenje. Kako je $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, to je

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x=1\Rightarrow$$
$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\,,$$

pa je $F(x)=\int\dfrac{dx}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}$. Uvedimo smenu: $\operatorname{tg}2x=t$ za $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

Sada je: $\dfrac{1}{2\cos^2 2x}dx=dt\Rightarrow dx=\dfrac{1}{2}\dfrac{dt}{1+t^2}$, $\sin^2 2x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$. Dakle, za $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ je

$$F_1(x)=\int\frac{\frac{1}{2}\frac{dt}{1+t^2}}{1-\frac{1}{2}\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt2}+C_1=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt2}+C_1,$$

a za $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ je

$$F_2(x)=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt2}+C_2.$$

Kao i u predhodnom primeru treba da važi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}F(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}F_1(x)=\frac{\pi}{2\sqrt2}+C_1;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}F(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}F_2(x)=-\frac{\pi}{2\sqrt2}+C_2.$$

Sledi da je $\dfrac{\pi}{2\sqrt2}+C_1=-\dfrac{\pi}{2\sqrt2}+C_2$, odakle dobijamo $C_2=\dfrac{\sqrt2}{2}\pi+C_1$.

Dakle, neodređeni integral $F(x)$ nad intervalom $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ je

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} + C & , \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \pi + C & , \quad x = \frac{\pi}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi + C & , \quad x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right] \end{cases} . \blacktriangle$$

ČETVRTA GLAVA

ODREĐENI INTEGRAL

Površine pravolinijski ograničenih figura u ravni određuju se elementarnim sredstvima, svođenjem na određivanje površine trougla prikladnim razbijanjem, a trougao se može planimetrijskim konstrukcijama " pretvoriti " u kvadrat, tj. može se konstruisati kvadrat jednake površine, kako se to izlaže u elementarnoj nastavi. Iako logički precizna obrada za to potrebnih pojmova i rasuđivanja nije nimalo jednostavna, nećemo se u to ovde upuštati, već ćemo obratiti pažnju na znatno teži zadatak od određivanja površine krivolinijski ograničenih figura, iz kojeg je izrastao pojam određenog integrala. Pri tome nam je iz elementarne geometrije potrebna samo površina pravougaonika, koja je jednaka proizvodu njegovih međusobno normalnih stranica.

Određivanjem površine krivolinijski ograničenih figura, bavili su se već stari Grci. Klasičan primer takvog nastojanja je Arhimedov[1] način izračunavanja površine segmenta parabole. Njegov postupak je izvanredno oštrouman i zapravo već sadrži temeljnu misao koja nas nešto drugačijim putem vodi do pojma određenog integrala. Pojam određenog integrala je sasvim različit od pojma neodređenog integrala, koji je definisan kao skup primitivnih funkcija podintegralne funkcije i određen je do jedne aditivne konstante.

Arhimed

Da su određeni i neodređeni integral ipak u vrlo uskoj vezi, videćemo naknadno i time se opravdava isto ime "integral" za ta dva pojma. Ujedno, to će značiti odlučan korak kojim je omogućeno rešavanje mnogih problema, ne samo određivanjem površina.

16. POJAM ODREĐENOG INTEGRALA

Uočimo zatvoren interval $[a,b] \subset R$. Konačan skup tačaka $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, takav da je $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, zovemo **podela intervala** $[a,b]$. Skup $\mathcal{P}^*[a,b]$ svih podela intervala $[a,b]$ uredimo relacijom $\subset$: ako je $P' \subset P$, podela P je **finija** od podele P' odnosno podela P' je **grublja** od podele P. Sa

[1] Arhimed (287-212 p.n.e.), starogrčki matematičar

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,2,\dots,n$ označimo dužinu intervala $[x_{i-1}, x_i]$. **Parametar podele** $\boldsymbol{P}$ je $\max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i = \lambda(P)$ (maksimalna dužina intervala podele) P.

Na svakom intervalu $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2,\dots,n$ izaberimo po tačku ξ_i i neka je $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n$. Skup

$$\xi(P) = \{\xi \in R^n : \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,2,\dots,n\}$$

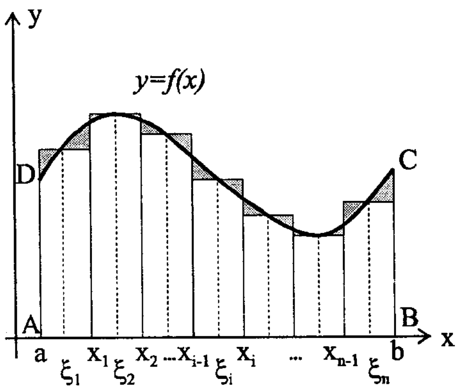
je **skup izabranih tačaka** $\xi \in R^n$ **podele** $\boldsymbol{P}$. Na ovaj način dobija se **podela intervala** $[a,b]$ **sa izabranom tačkom** koju označavamo sa (P,ξ). Skup takvih podela označavamo sa $\mathcal{P} = \mathcal{P}[a,b]$. Ako nije bitan interval, skupove $\mathcal{P}^*[a,b]$ i $\mathcal{P}[a,b]$ kraće označavamo samo sa $\mathcal{P}^*$ odnosno sa $\mathcal{P}$.

Definicija 16.1. *Neka je $f : [a,b] \to R$ i neka je (P,ξ) podela sa izabranom tačkom intervala $[a,b]$. Zbir*

$$I(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

se naziva **integralna** *ili* **Rimanova[1] suma** (**integralni** *ili* **Rimanov zbir**) *funkcije $f(x)$ za datu podelu (P,ξ).*

Motivacija za posmatranje integralnih suma se vidi kod razmatranja sledeća dva problema:



Slika 16.1

1. Neka je

$$y = f(x), a \le x \le b, f(x) \ge 0,$$

neprekidna funkcija (sl. 16.1). Geometrijska figura $ABCD$ koju ograničava deo $x-$ ose, prave $x = a$, $x = b$ i kriva $y = f(x)$ je **krivolinijski trapez.** Uočimo jednu podelu $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sa izabranom tačkom $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Nacrtajmo pravougaonike sa osnovama $[x_{i-1}, x_i]$ i visinama $f(\xi_i), i = 1,2,\dots,n$. Zbir površina svih ovih pravougaonika dat je integralnom sumom

[1] B.Riemann (1826–1866), nemački matematičar

$$I(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,.$$

Uočimo delove ravni koje sadrže tačke koje se nalaze u pravougaonicima, a ne nalaze se u krivolinijskom trapezu, kao i tačke koje se nalaze u krivolinijskom trapezu, a ne nalaze se u pravougaonicima. Ne ulazeći u ovom trenutku u definiciju površine krivolinijskog trapeza, koju dajemo kasnije, a imajući u vidu intuitivan pojam površine, možemo reći da je površina krivolinijskog trapeza približno jednaka integralnoj sumi $I(f,P,\xi)$.

2. Na pravolinijskom putu AB deluje promenljiva sila $\vec{F}$ na materijalnu tačku. Pravac sile poklapa se sa pravcem puta. Pretpostavimo da je data zavisnost inteziteta sile od puta, $F=F(s)$. Pokušajmo da izračunamo rad R sile $\vec{F}$ na putu AB. U tom cilju uočimo jednu podelu sa izabranom tačkom (P,ξ) intervala $[a,b]$ tj. puta (a i b su koordinate tačaka A i B, respektivno), pri čemu je $P=\{s_0,s_1,\dots,s_n\}$. **Rad sile** $\vec{F}$ na intervalu $[s_{i-1},s_i]$ iznosi približno $F(\xi_i)\cdot(s_i-s_{i-1})$, pa je ukupan rad R približno dat sa

B. Riemann

$$R\approx\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta s_i,\ \Delta s_i=s_i-s_{i-1}\,.$$

Dakle, rad R sile intenziteta F, konstantnog pravca na pravolinijskom putu, približno je jednak integralnoj sumi $I(F,P,\xi)$.

Definicija 16.2. *Broj I je* **limes** (**granična vrednost**) *integralnih suma $I(f,P,\xi)$ funkcije $f:[a,b]\to R$, za $\lambda(P)\to 0$, pišemo*

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} I(f,P,\xi)=I\,,$$

ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$, takvo da za svaku podelu P i svaku izabranu tačku $\xi\in\xi(P)$, kada je $\lambda(P)<\delta$, važi nejednakost

$$|I(f,P,\xi)-I|<\varepsilon\,.$$

Simbolički zapisano

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} I(f,P,\xi)=I \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall(P,\xi)\in\mathcal{P}[a,b])$$
$$(\lambda(P)<\delta\Rightarrow|I(f,P,\xi)-I|<\varepsilon)\,.$$

Ako postoji $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} I(f,P,\xi) = I$, onda je funkcija $f(x)$ **integrabilna u Rimanovom smislu** nad intervalom $[a,b]$. Broj I se naziva **Rimanov** ili **određeni integral** funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a,b]$ i piše se

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Pri tom se a i b nazivaju **donja** odnosno **gornja granica** integrala, respektivno. Funkcija $f(x)$ se naziva **podintegralna funkcija**, a izraz $f(x)\,dx$ je **podintegralni izraz**. Promenljiva x je **integraciona promenljiva**. Ona se može zameniti bilo kojim drugim odgovarajućim simbolom.

Skup svih funkcija, integrabilnih u Rimanovom smislu nad intervalom $[a,b]$ označavamo sa $\mathscr{R}[a,b]$, i za takve funkcije kraće kažemo da su **integrabilne nad zatvorenim intervalom** $[a,b]$.

Primetimo da se Rimanov integral naziva i određeni integral, za razliku od skupa primitivnih funkcija neke funkcije, koji smo nazvali neodređeni integral.

Primer 16.1.

1. Pokazati da je $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$.

2. Pokazati da za Dirihleovu funkciju $\chi(x)$ ne postoji određeni integral ni nad jednim zatvorenim intervalom $[a,b]$.

Rešenje.

1. Posmatrajmo funkciju $f(x) = c$, $x \in [a,b]$. Neka je $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ proizvoljna podela sa izabranom tačkom. Tada je $f(\xi_i) = c, i = 1,2,\dots,n$, pa je

$$I(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c\,\Delta x_i = c(b-a).$$

Dakle, $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} I(f,P,\xi) = c(b-a)$, tj. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$.

Specijalno, za $c = 1$ dobijamo $\int_a^b dx = b-a$.

2. Neka je $f(x) = \chi(x)$ (Dirihleova funkcija)

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in R \setminus Q \end{cases}.$$

Neka su a i b proizvoljni realni brojevi ($a < b$). Uzmimo proizvoljnu podelu $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ intervala $[a,b]$ i dve izabrane tačke $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $\xi' = (\xi_1', \xi_2', ..., \xi_n')$ takve da je $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ iracionalan, a $\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ racionalan broj, $i = 1, 2, ..., n$. Tada je

$$I(\chi, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0 \ , \ I(\chi, P, \xi') = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a.$$

Odavde sledi da $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} I(\chi, P, \xi)$ ne postoji, pa Dirihleova funkcija nije integrabilna nad intervalom $[a,b]$. Δ

Napomena 16.1. Francuski matematičar Lebeg[1] je dao uopštenje Rimanovog integrala, po kome je i Dirihleova funkcija integrabilna u Lebegovom smislu nad proizvoljnim intervalom $[a,b]$.

H. Lebesgue.

U gornjem primeru imali smo dve ograničene funkcije, od kojih je jedna integrabilna, a druga ne. Da neograničena funkcija nije integrabilna, pokazuje sledeća teorema

Teorema 16.1. *Potreban uslov da funkcija $f(x)$ bude integrabilna nad intervalom $[a,b]$ je da funkcija $f(x)$ bude ograničena nad intervalom $[a,b]$.*

Dokaz. Neka je funkcija $f(x)$ definisana i neograničena nad intervalom $[a,b]$. Za proizvoljnu podelu $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ postoji interval $[x_{k-1}, x_k]$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$, takav da je funkcija $f(x)$ neograničena na njemu. Na intervalima $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, ..., k-1, k+1, ..., n\}$ proizvoljno izaberimo tačke ξ_i i sa I^k označimo zbir

$$I^k = \sum_{i \neq k} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Neka je M proizvoljno veliki broj. Zbog neograničenosti funkcije $f(x)$ nad intervalom $[x_{k-1}, x_k]$, postoji tačka $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, takva da je

$$|f(\xi_k)| \geq \frac{|I^k| + M}{\Delta x_k}, \text{odakle sledi da je } |f(\xi_k)|\Delta x_k \geq |I^k| + M.$$

Za integralni zbir $I(f, P, \xi)$ sada važi

[1] H.Lebesgue (1875–1941), francuski matematičar

$$|I(f,P,\xi)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| = \left|I^k + f(\xi_k)\Delta x_k\right| \ge |f(\xi_k)|\Delta x_k - |I^k| \ge M.$$

Izaberimo niz $\{M_k\}$, takav da $M_k \to \infty$ kada $k \to \infty$. Za dato $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ i za svako $k \in N$ postoji $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, tako da je $|I(f,P,\xi)| \ge M_k$. Dakle, ne postoji $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} I(f,P,\xi)$. Prema tome, funkcija $f(x)$ nije integrabilna.

Darbuove sume

Neka je funkcija $f(x)$ definisana i ograničena nad intervalom $[a,b]$ i neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ podela tog intervala. Uvedimo sledeće oznake:

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Sume

$$s = s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{i} \quad S = S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

nazivamo **donja** i **gornja Darbuova suma** funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a,b]$, respektivno. Odgovor na pitanje, kakav je odnos između integralne i Darbuovih suma daje sledeća teorema.

Teorema 16.2. *Za integralnu i Darbuove sume ograničene funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a,b]$ važi*

1. $m(b-a) \le s(f,P) \le I(f,P,\xi) \le S(f,P) \le M(b-a)$,

2. $\inf\limits_{\xi\in\xi(P)} I(f,P,\xi) = s(f,P)$; $\sup\limits_{\xi\in\xi(P)} I(f,P,\xi) = S(f,P)$.

Dokaz.

1. Za datu podelu (P,ξ) sa izabranom tačkom $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, važi

$$m \le m_i \le f(\xi_i) \le M_i \le M, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Množenjem sa Δx_i i sabiranjem dobija se

$$m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \le M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i.$$

2. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Pokažimo da postoji tačka $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, takva da je $I(f,P,\xi) < s(f,P) + \varepsilon$. U tom cilju primetimo da zbog $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ sledi da postoji tačka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, takva da je $f(\xi_i) < m_i + \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, $i = 1,2,\ldots,n$

(ako za svako $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ važi $f(\xi_i) \geq m_i + \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, to bi, s obzirom da je $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, važilo da je $m_i \geq m_i + \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, odakle sledi da je $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ broj koji je manji ili jednak nuli, što je kontradicija).

Množenjem ove nejednakosti sa Δx_i i sabiranjem po i dobija se

$$I(f, P, \xi) < s(f, P) + \varepsilon,$$

tj. sledi da je

$$s(f, P) = \inf_{\xi \in \xi(P)} I(f, P, \xi).$$

Slično se dokazuje i nejednakost $I(f, P, \xi) > S(f, P) - \varepsilon$ za neki izbor tačke ξ pa je $S(f, P) = \sup\limits_{\xi \in \xi(P)} I(f, P, \xi)$.

Pokažimo nekoliko osobina Darbuovih suma, koje će nam koristiti u daljem radu.

Za Darbuove sume ograničene funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ važi:

1. $P \subset P' \Rightarrow s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$,

2. $s(f, P) \leq S(f, P')$ *za proizvoljne podele* P *i* P',

3. *Postoje* $\sup\limits_{P \in \mathscr{P}^*} s(f, P)$ *i* $\inf\limits_{P \in \mathscr{P}^*} S(f, P)$.

Dokaz.

1. Tvrđenje je dovoljno dokazati u slučaju da se P i P' razlikuju za jednu tačku. Neka je $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ i $P' = P \cup \{x'\}$, gde je $x_{k-1} < x' < x_k$. Neka je $s^k = \sum\limits_{i \neq k} m_i \Delta x_i$. Tada je

$s(f, P) = s^k + m_k(x_k - x_{k-1})$ i $s(f, P') = s^k + m_k'(x' - x_{k-1}) + m_k''(x_k - x')$, gde je $m'_k = \inf\limits_{x \in [x_{k-1}, x']} f(x)$, $m_k'' = \inf\limits_{x \in [x', x_k]} f(x)$. Kako je $m_k = \min\{m_k', m_k''\}$, to imamo

$$\begin{aligned} m_k(x_k - x_{k-1}) &= m_k(x_k - x' + x' - x_{k-1}) = m_k(x_k - x') + m_k(x' - x_{k-1}) \leq \\ &\leq m_k''(x_k - x') + m_k'(x' - x_{k-1}), \end{aligned}$$

odakle sledi $s(f, P) \leq s(f, P')$.

Slično se dokazuje da je $S(f, P') \leq S(f, P)$.

2. Za proizvoljne podele P i P' intervala $[a, b]$ neka je $P'' = P \cup P'$. Tada je $P \subset P''$ i $P' \subset P''$ pa je

$$s(f, P) \le s(f, P'') \le S(f, P'') \le S(f, P').$$

3. Skup $\{ s(f, P) : P \in \mathcal{P}^* \}$ je ograničen sa gornje strane, a skup $\{ S(f, P) : P \in \mathcal{P}^* \}$ sa donje strane pa, prema 2, postoje $\sup\limits_{P \in \mathcal{P}^*} s(f, P) = I_*$ i $\inf\limits_{P \in \mathcal{P}^*} S(f, P) = I^*$.

Ovako definisane brojeve: $\sup\limits_{P \in \mathcal{P}^*} s(f, P) = I_*$ i $\inf\limits_{P \in \mathcal{P}^*} S(f, P) = I^*$, nazivamo **donji,** odnosno **gornji Darbuov integral** funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$. Jasno je da za svaku podelu P intervala $[a, b]$ važi

$$m(b - a) \le s(f, P) \le I_* \le I^* \le S(f, P) \le M(b - a).$$

Može se takođe dokazati: **(a)** Ako je funkcija $f : [a, b] \to R$ ograničena nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, tada je $I_* = \lim\limits_{\lambda(P) \to 0} s(f, P) \le I^* = \lim\limits_{\lambda(P) \to 0} S(f, P)$;

(b) $f : [a, b] \to R$, je integrabilna ako i samo ako se donji Darbuov integral i gornji Darbuov integral poklapaju, tj. ako važi jednakost $I_* = I^*$ (vidi [1]).

Postavlja se pitanje, koje uslove treba funkcija $f : [a, b] \to R$ da ispunjava, da bi ona bila integrabilna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$. Odgovor na to pitanje daje sledeća teorema.

Teorema 16.3. *Neka je funkcija $f(x)$ ograničena nad intervalom $[a, b]$. Tada su sledeći iskazi međusobno ekvivalentni:*

1. *funkcija $f(x)$ je integrabilna nad intervalom $[a, b]$,*

2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}^*)\, \lambda(P) < \delta \Rightarrow S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$,

3. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}^*)\, \lambda(P) < \delta \Rightarrow \left| I(f, P, \xi') - I(f, P, \xi'') \right| < \varepsilon$,

4. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P', P'' \in \mathcal{P}^*)\, \lambda(P') < \delta, \lambda(P'') < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| I(f, P', \xi') - I(f, P'', \xi'') \right| < \varepsilon.$$

Pri tom su u 3 i 4 sa ξ' i ξ'' označene proizvoljno izabrane tačke u odgovarajućim podelama.

Dokaz.

1 ⇒ 4 Pretpostavimo da postoji $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Za $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da je

$$\left| I(f, P', \xi') - I \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ i } \left| I(f, P'', \xi'') - I \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ za } \lambda(P') < \delta,\ \lambda(P'') < \delta \text{ i}$$

proizvoljno izabrane tačke ξ' i ξ''. Iz poslednje dve nejednakosti sledi

$$|I(f,P',\xi') - I(f,P'',\xi'')| < \varepsilon.$$

4 $\Rightarrow$ 3 Sledi neposredno.

3 $\Rightarrow$ 2 Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da za $P \in \mathcal{P}^*$ i $\lambda(P) < \delta$ važi

$$|I(f,P,\xi') - I(f,P,\xi'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kako je $\sup\limits_{\xi' \in \xi(P)} I(f,P,\xi') = S(f,P)$ i $\inf\limits_{\xi'' \in \xi(P)} I(f,P,\xi'') = s(f,P)$, to je

$$S(f,P) - s(f,P) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

2 $\Rightarrow$ 1 Na osnovu pretpostavke 2 i nejednakosti $s(f,P) \le I_* \le I^* \le S(f,P)$ dobijamo da se gornji i donji Darbuov integral funkcije $f(x)$ poklapaju: $I_* = I^*$. Označimo njihovu zajedničku vrednost sa I. Tada važi:

$$s(f,P) \le I \le S(f,P).$$

Sa druge strane, za proizvoljno izabranu tačku ξ podele P važi

$$s(f,P) \le I(f,P,\xi) \le S(f,P).$$

Iz poslednje dve relacije i pretpostavke 2 sledi da je

$$|I(f,P,\xi) - I| < \varepsilon,$$

ako je podela $P \in \mathcal{P}^*[a,b]$ takva da je $\lambda(P) < \delta$, što znači da je funkcija $f(x)$ integrabilna i da je $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Definicija 16.3.

1. *Ako je funkcija $f(x)$ definisana u tački a, onda je*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

2. *Ako je $a < b$ i $\int_a^b f(x)\,dx$ postoji, onda je*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Primetimo da deo 2 ove definicije sugeriše jednakost

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = -\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i).$$

17. INTEGRABILNOST NEKIH KLASA FUNKCIJA

Teorema 17.1. *Ako je funkcija $f : [a, b] \to R$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, ona je nad tim intervalom i integrabilna.*

Dokaz. Primetimo da iz neprekidnosti funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ sledi njena uniformna neprekidnost (vidi [12]). To znači da za dato $\varepsilon > 0$ možemo naći $\delta > 0$, takvo da

$$x', x'' \in [a, b], \ |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Izaberimo proizvoljnu podelu $P = \{ x_0, x_1, ..., x_n \}$ intervala $[a, b]$ za koju je $\lambda(P) < \delta$. Ako brojevi M_i i m_i, za tu podelu, imaju uobičajeno značenje, na osnovu prethodnog važi $M_i - m_i < \dfrac{\varepsilon}{b - a}$, $i = 1, 2, ..., n$ (postoje tačke $\xi_i^1, \xi_i^2 \in [x_{i-1}, x_i]$ sa osobinom da je $f(\xi_i^2) = M_i$ i $f(\xi_i^1) = m_i$, pa je $M_i - m_i = f(\xi_i^2) - f(\xi_i^1) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$).

To znači da je $S(f, P) - s(f, P) = \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon$.

Na osnovu Teoreme 16.3. zaključujemo da je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$.

Sledeću teoremu navodimo bez dokaza. Za dokaz vidi [1].

Teorema 17.2. *Ako je funkcija $f : [a, b] \to R$ ograničena nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ i ako ima konačan broj prekida nad intervalom $[a, b]$, ona je nad tim intervalom i integrabilna.*

Teorema 17.3. *Ako je funkcija $f : [a, b] \to R$ monotona nad intervalom $[a, b]$, ona je nad tim intervalom i integrabilna.*

Dokaz. Pretpostavimo, određenosti radi, da je funkcija $f(x)$ neopadajuća nad intervalom $[a, b]$ i da $f(x)$ nije konstantna funkcija. Za dato $\varepsilon > 0$ izaberimo podelu P intervala $[a, b]$, takvu da je $\lambda(P) < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Tada je

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i <$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon.$$

Prema teoremi 16.3. funkcija $f(x)$ je integrabilna.

Primetimo da je $f(x)$ ograničena funkcija.

Tvrđenja Teorema 17.2 i 17.3 odnose se na dve različite klase funkcija. U Teoremi 17.2 nismo pretpostavili da je funkcija $f(x)$ monotona nad intervalom $[a,b]$, a u Teoremi 17.3 nismo pretpostavili da funkcija $f(x)$, iako je ograničena, ima konačan broj prekida.

Dakle, tvrđenje Teoreme 17.2, uz date pretpostavke, važi i ako funkcija $f(x)$ nije monotona, a tvrđenje Teoreme 17.3 važi, naravno uz date pretpostavke, pri čemu funkcija $f(x)$ ne mora, iako je ograničena, da ima konačan broj prekida.

Primer 17.1. Naći $\int_0^1 x\,dx$ po definiciji.

Rešenje. Podintegralna funkcija $f(x)=x$ je neprekidna, pa je integrabilna. Za podelu P intervala $[0,1]$ uzmimo **ekvidistantnu podelu** ($\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$) i izaberimo tačku $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$, pri čemu je $\xi_i=\frac{i}{n}$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Tada je

$$I(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2n^2},$$

pa je $\int_0^1 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{1}{2}$. Δ

Primer 17.2. Izračunati **Puasonov**[1] integral

$$I=\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx,\ r>0,\ r\neq 1\,.$$

Rešenje. Kako je $(1-r)^2\le 1-2r\cos x+r^2$, podintegralna funkcija je neprekidna za sve $0<r\neq 1$, pa time i integrabilna. Podelimo interval $[0,\pi]$ na n jednakih delova, a za tačke ξ_k izaberemo baš x_k, $k=0,1,\dots,n-1$ iz te podele P. Tada je

S.D. Poisson

$$f(x_k)=\ln(r-e^{\frac{k\pi}{n}i})(r-e^{-\frac{k\pi}{n}i}),$$

(i je imaginarna jedinica), odakle se dobija

$$I(f,P,\xi)=s(f,P)=\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(r-e^{\frac{k\pi}{n}i})(r-e^{-\frac{k\pi}{n}i})=\frac{\pi}{n}\ln\prod_{k=0}^{n-1}(r-e^{\frac{k\pi}{n}i})(r-e^{-\frac{k\pi}{n}i}).$$

Iz jednakosti

[1] S.D. Poisson (1781-1840), francuski fizičar i matematičar

$$\prod_{k=0}^{n-1}(r-e^{\frac{k\pi}{n}i})(r-e^{-\frac{k\pi}{n}i})=\frac{(r-1)(r^{2n}-1)}{r+1},$$

sledi da je $s(f,P)=\frac{\pi}{n}\ln\frac{(r-1)(r^{2n}-1)}{r+1}$. Za $0<r<1$ je $\lim\limits_{n\to\infty}s(f,P)=0$. Za $r>1$ je

$$\lim_{n\to\infty}s(f,P)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\frac{r-1}{r+1}\cdot\frac{r^{2n}-1}{r^{2n}}r^{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}(\ln\frac{r-1}{r+1}+\ln\frac{r^{2n}-1}{r^{2n}}+2n\ln r)=$$
$$=\pi\ln\frac{r-1}{r+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\frac{r^{2n}-1}{r^{2n}}+2\pi\ln r=2\pi\ln r=\pi\ln r^2.$$

Dakle,

$$\int_0^\pi \ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx=\begin{cases}0 & , \quad 0<r<1\\ \pi\ln r^2 & , \quad r>1\end{cases}.\ \Delta$$

Teorema 17.4

1. *Ako je $f(x)=0$ za svako $x\in[a,b]$, tada je $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b 0\,dx=0$.*
2. *Ako postoji konačan skup različitih tačaka $c_1,c_2,\ldots,c_k\in[a,b]$, takav da je*

$$g(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\in[a,b]\setminus\{c_1,c_2,\ldots,c_k\}\\ A_i & , \quad x=c_i,\ i\in\{1,2,\ldots,k\},\ A_i\neq 0,\end{cases}$$

tada je $\int_a^b g(x)\,dx=0$.

Dokaz.

1. Vidi Primer 16.2 pod 1.
2. Funkcija $g(x)$ ima konačan broj prekida nad zatvorenim intervalom $[a,b]$, pa je nad tim intervalom integrabilna. Uzmimo da je $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_k|}$.

Tada za svaku podelu P intervala $[a,b]$ za koju je $\lambda(P)<\delta$ i za svaku izabranu tačku $\xi\in\xi(P)$ važi:

$$|I(g,P,\xi)|=\left|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i\right|\le\sum_{i=1}^n|g(\xi_i)|\Delta x_i$$
$$<(|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_k|)\frac{\varepsilon}{|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_k|}=\varepsilon,$$

pa je $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}I(g,P,\xi)=0$. Dakle,

$$\int_a^b g(x)\,dx=0.\ \Delta$$

18. VEZA IZMEĐU ODREĐENOG I NEODREĐENOG INTEGRALA

Iako određeni integral ima veliku primenu u svim granama tehnike, kada bi bili prinuđeni da ga uvek izračunavamo po definiciji, neku korist od određenog integrala ne bismo ni imali, jer kao što se i može naslutiti, u nekim situacijama to bi bilo teško izvodljivo.

Iz same definicije određenog integrala se i ne vidi zbog čega smo upotrebili pojam integral.

Ta mogućnost da se određeni integral izračunava pomoću neodređenog integrala date funkcije, je onaj odlučni korak koji je od oštroumnih pokušaja starih Grka (npr. Arhimedovo određivanje površine segmenta parabole koji u sasvim drugačijem obliku u suštini znači određivanje granične vrednosti jedne sume) doveo do modernog integralnog računa.

Sada ćemo dati jednu od fundamentalnih teorema matematike, to jest daćemo vezu između određenog i neodređenog integrala.

Njutn - Lajbnicova formula

Teorema 18.1. *Ako je funkcija* $f(x)$ *integrabilna nad zatvorenim intervalom* $[a,b]$, *i ako funkcija* $f(x)$ *ima primitivnu funkciju* $F(x)$ *nad intervalom* $[a,b]$, *tada je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Posmatrajmo realnu funkciju $F(x)$ nad intervalom $[a,b]$. Ona je neprekidna (ima izvod nad zatvorenim intervalom $[a,b]$, pa je i neprekidna) i ima izvod nad intervalom $[a,b]$. Uzmimo da je $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ proizvoljna podela intervala $[a,b]$.Primenjujući Lagranžovu teoremu, to jest teoremu o srednjoj vrednosti na svakom podintervalu $[x_{i-1},x_i]$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$, dobijamo

$$F(x_1)-F(a)=F'(\xi_1)(x_1-a)=f(\xi_1)\Delta x_1,\ \xi_1\in(a,x_1)$$

$$F(x_2)-F(x_1)=F'(\xi_2)(x_2-x_1)=f(\xi_2)\Delta x_2,\ \xi_2\in(x_1,x_2)$$

$$\dots$$

$$F(b)-F(x_{n-1})=F'(\xi_n)(b-x_{n-1})=f(\xi_n)\Delta x_n,\ \xi_n\in(x_{n-1},b).$$

Ako saberemo gornje jednakosti dobija se

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Desna strana je jedna integralna suma $I(f,P,\xi)$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$, funkcije $f(x)$.

Kako je funkcija $f(x)$ integrabilna nad intervalom $[a,b]$ to je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} I(f,P,\xi) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda(P)\to 0}(F(b)-F(a)) = F(b)-F(a).$$

Jednakost $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ se naziva **Njutn-Lajbnicova formula**. Ona se često piše u obliku

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Ta formula važi u slučaju $a<b$, kao i u slučaju $b<a$. Naime, promenom mesta a i b menja se istovremeno znak obe strane date jednakosti

Primer 18.1. Naći:

1. $\int_1^2 x^3 dx$; **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

Rešenje.

1. $\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$,

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$. Δ

Napomena 18.1. Pomoću definicije određenog integrala i Njutn–Lajbnicove formule možemo da izračunamo i granične vrednosti nizova. Tu mogućnost pokazuje sledeći primer.

Primer 18.2. Naći $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$.

Rešenje. Posmatrajmo niz $\{a_n\}$ sa opštim članom

$$a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}.$$

Kako je $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$, vidimo da je to integralna suma za funkciju

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ nad zatvorenim intervalom $[0,1]$ (podela $P = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ je ekvidistantna podela zatvorenog intervala $[0,1]$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, $\xi_i = \frac{i}{n}$). Dakle, zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2\,.\ \Delta$$

19. NEKE OSOBINE ODREĐENOG INTEGRALA

1. *Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ tj. $f\in\mathcal{R}[a,b]$, tada je ona integrabilna nad svakim zatvorenim podintervalom $[c,d]$ intervala $[a,b]$.*

Dokaz. Kako $f\in\mathcal{R}[a,b]$ to za proizvoljno $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$, takvo da

$$P\in\mathcal{P}^*[a,b],\lambda(P)<\delta\Rightarrow S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon\,.$$

Dodajmo podeli P tačke c i d. Time se dobija nova podela P'. Očito je

$$S(f,P')-s(f,P')<\varepsilon\,.$$

Sa S^*, odnosno s^*, označimo sledeće zbirove

$$S^*=\sum_{\Delta x_i\subset[c,d]}M_i\Delta x_i\,,\text{ odnosno } s^*=\sum_{\Delta x_i\subset[c,d]}m_i\Delta x_i\,.$$

Sledi da je

$$0\le S^*-s^*\le S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon\,,$$

čime je ova osobina dokazana.

2. linearnost integrala) *Ako $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$, tada je i $f\pm g\in\mathcal{R}[a,b]$, $\alpha f\in\mathcal{R}[a,b]$, $\alpha\in R$, i važe jednakosti:*

a) $\displaystyle\int_a^b(f(x)\pm g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx\,,$

b) $\displaystyle\int_a^b\alpha f(x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx\,.$

Dokaz. Integralnu sumu $I(f\pm g,P,\xi)$ integrala $\int_a^b(f(x)\pm g(x))\,dx$, napišimo u obliku

$$I(f\pm g,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)\pm g(\xi_i))\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\pm\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i=$$
$$=I(f,P,\xi)\pm I(g,P,\xi)\,.$$

Kako je $\displaystyle\lim_{\lambda(P)\to0}I(f,P,\xi)=\int_a^b f(x)\,dx$, $\displaystyle\lim_{\lambda(P)\to0}I(g,P,\xi)=\int_a^b g(x)\,dx$, to postoji i

$\displaystyle\lim_{\lambda(P)\to0}I(f\pm g,P,\xi)=\int_a^b(f(x)\pm g(x))\,dx$ pa važi (a).

Slično, napišimo

$$I(\alpha f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\alpha f(\xi_i)\Delta x_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\alpha I(f,P,\xi)\,.$$

Prelaskom na graničnu vrednost kada $\lambda(P) \to 0$, dobija se da postoji $\int_a^b \alpha f(x)\,dx$ tj. da važi (b).

Dakle, važi: *Ako* $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ *i* α *i* β *su realni brojevi onda je* $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}[a,b]$. *Pri tom važi jednakost*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx .$$

3. *Ako je* $f \in \mathscr{R}[a,b]$ *i ako se funkcija* $g : [a,b] \to R$ *razlikuje u konačnom broju tačaka od funkcije* $f(x)$ *tada je i* $g \in \mathscr{R}[a,b]$. *Pri tom važi jednakost*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx .$$

Dakle, određeni integral " ne oseća" razliku funkcija u konačnom broju tačaka.

Dokaz. Funkcija $h(x) = g(x) - f(x)$ je za svako $x \in [a,b]$ jednaka nuli, sem u konačnom broju tačaka $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \backslash[a,b]$. Tada je $\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{dx} = 0$. Kako za $f \in \mathscr{R}[a,b]$, $g - f \in \mathscr{R}[a,b]$ i $g(x) = f(x) + (g(x) - f(x))$, sledi da i $g \in \mathscr{R}[a,b]$, pa je

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) + (g(x) - f(x)))dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx ,$$

što je i trebalo dokazati.

4. *Ako* $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$, *tada je i* $f \cdot g \in \mathscr{R}[a,b]$, $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$ i $\frac{1}{f} \in \mathscr{R}[a,b]$, *uz uslov* $|f(x)| \geq \alpha > 0$ *za* $x \in [a,b]$.

Za dokaz vidi [1].

5. **(aditivnost integrala).** *Neka tačke* a, b *i* $c \in R$ *predstavljaju krajeve za tri zatvorena intervala. Ako je funkcija* $f(x)$ *integrabilna na najvećem od ovih intervala, onda je ona integrabilna i na ostala dva. Pri tom važi jednakost*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

Dokaz. Tvrđenje o integrabilnosti funkcije sledi iz osobine 1. Za dokaz jednakosti pretpostavimo da je, na primer, $a < c < b$ Neka podela $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervala $[a,b]$ sadrži tačku $c = x_m$ i neka je $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \xi(P)$. Tada je

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Prelaskom na graničnu vrednost kada $\lambda(P) \to 0$, dobijamo da je

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, što je i trebalo dokazati.

Ako je $a < b < c$, tada je $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$, tj.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Slično se dokazuje da data jednakost važi i za $c < a < b$. Za $c = a$ ili $c = b$, dokaz je očigledan.

6. (monotonost i procena integrala). *Ako je $f \in \mathcal{R}[a,b], a < b$ i $f(x) \geq 0$ za $x \in [a,b]$, onda je $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.*

Dokaz. Kako je integralna suma $I(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ za svaku podelu $(P,\xi) \in \mathcal{P}[a,b]$ nenegativna, to je i granična vrednost $\lim_{\lambda(P)\to 0} I(f,P,\xi)$ nenegativna.

7. *Ako je $f(x) \leq g(x), x \in [a,b], a < b$, $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, onda je*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dokaz. Nad intervalom $[a,b]$ važi nejednakost $g(x) - f(x) \geq 0$. Na osnovu prethodnog je $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geq 0$, odnosno $\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$.

8. *Neka je $f : [a,b] \to R$ neprekidna i nenegativna (nepozitivna) funkcija. Ako postoji tačka $c \in [a,b]$, takva da je $f(c) > 0$ ($f(c) < 0$), onda je*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0 \ \left(\int_a^b f(x)\,dx < 0\right).$$

Dokaz. Dokaz ćemo dati za slučaj nenegativne funkcije. Pretpostavimo da je $c \in (a,b)$. Iz neprekidnosti funkcije $f(x)$ u tački c, sledi da postoji $\delta > 0$, takvo da je $\delta \leq \min\{c - a, b - c\}$ i da važi

$$x \in [a,b], |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{1}{2} f(c).$$

Odavde je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}\,dx = \frac{f(c)}{2} 2\delta > 0.$$

Dokaz je sličan i za slučajeve da je $c = a$ ili $c = b$.

9. *Ako je $f \in \mathcal{R}[a,b], a < b$, onda važi nejednakost*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

Dokaz. Primetimo da je u osobini 4 pod b) navedeno da je $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$. Iz

$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, sledi nejednakost $-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$,

odakle je $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$. Neka je $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)| = M^*$. Tada je $|f(x)| \le M^*$, $x \in [a,b]$, odakle je

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b M^*\,dx = M^*(b-a).$$

Primer 19.1. Naći određeni integral funkcije $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ 5, & x > 0 \end{cases}$ nad intervalom $[-1,2]$.

Rešenje. Funkcija $f(x)$ je neprekidna u svim tačkama intervala $[-1,2]$ sem u tački 0, gde ima prekid prve vrste. Dakle, funkcija $f(x)$ je integrabilna nad intervalom $[-1,2]$, ali nema primitivnu funkciju, pa se ne može primeniti Njutn-Lajbnicova formula. Kako je $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx$ i

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2},\ \int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} 5\,dx = 5x\Big|_0^2 = 10,$$

(funkcija $f(x)$ i funkcija $g(x) = 5$ se razlikuju nad intervalom $[0,2]$ samo u tački 0, jer je $f(0) = 0$, $g(0) = 5$, pa imaju isti određeni integral) to je,

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = -\frac{1}{2} + 10 = \frac{19}{2}.\ \Delta$$

Teorema o srednjoj vrednosti

Teorema 19.1. *Neka $f, g \in \mathcal{R}[a,b], a < b$, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, i $g(x) \ge 0$ ($g(x) \le 0$) za $x \in [a,b]$. Tada postoji $m \le \eta \le M$, takvo da je*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \eta\int_a^b g(x)\,dx.$$

Ako je još $f \in C[a,b]$ ($C[a,b]$ je skup svih neprekidnih funkcija nad zatvorenim intervalom $[a,b]$), onda postoji $c \in [a,b]$, takvo da je

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Dokaz. Bez ograničenja opštosti može se pretpostaviti da je funkcija $g(x)$ nenegativna. Tada iz $m \le f(x) \le M$ sledi

$$mg(x) \le f(x)\,g(x) \le Mg(x),\; x \in [a,b]\,.$$

Integracijom se dobija

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le m\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Ako je $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, onda je $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$, čime je dokazana data jednakost.

Ako je $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, onda je

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M\,,$$

pa se za broj η u relaciji može uzeti $\eta = \dfrac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$.

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$, postoji $c \in [a,b]$, takvo da je $f(c) = \eta$, čime je dokazana jednakost i za ovaj slučaj.

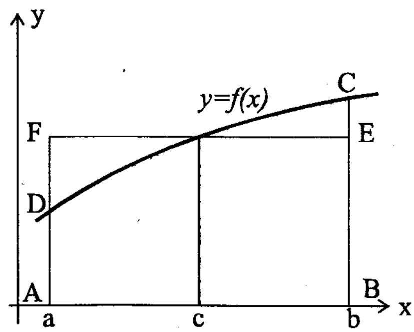
Posledica 19.1. Neka je $f \in \mathscr{R}[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Tada postoji $m \le \eta \le M$ takvo da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \eta(b-a)\,.$$

Ako je $f \in C[a,b]$, onda postoji $c \in [a,b]$ takvo da važi jednakost

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(\mathrm{b}-\mathrm{a})\,.$$

Dokaz se dobija iz Teoreme 19.1 ako uzmemo da je $g(x) = 1$.



Slika 19.1

Ta jednakost ima jednostavno geometrijsko tumačenje. Na slici 19.1 prikazan je grafik funkcije $y = f(x)$ i prava $y = f(c), c \in [a,b]$. Poslednja jednakost govori da su površine krivolinijskog trapeza *ABCD* i pravougaonika *ABEF* jednake.

20. ODREĐENI INTEGRAL KAO FUNKCIJA GRANICE

Neka je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[A, B]$ i neka je a proizvoljna tačka iz intervala $[A, B]$. Kada x uzima vrednost iz intervala $[A, B]$, onda je

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

funkcija definisana nad intervalom $[A, B]$. Ova funkcija se često naziva **integral sa promenljivom gornjom granicom ili određeni integral kao funkcija gornje granice.**

Slično, možemo posmatrati funkciju

$$I_1(x) = \int_x^a f(t)\,dt,$$

koja je definisana za svako $x \in [A, B]$. Ona se zove **određeni integral sa promenljivom donjom granicom ili određeni integral kao funkcija donje granice.** Kako je $I_1(x) = -I(x)$ to je dovoljno ispitati osobine funkcije $I(x)$.

Teorema 20.1. *Neka je* $f \in \mathscr{R}[A, B]$ *i* $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [A, B]$, *pri čemu je* a *neka tačka iz intervala* $[A, B]$. *Tada:*

1. *funkcija* $I(x)$ *je neprekidna nad intervalom* $[A, B]$,
2. ako je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački $x \in (A, B]$ ($x \in [A, B)$) sa leve (desne) strane tada funkcija $I(x)$ ima levi (desni) izvod u tački x. Pri tome važi: $I'_-(x) = f(x)$ ($I'_+(x) = f(x)$).(Levi (desni) zvod integrala po gornjoj (donjoj) granici jednak je vrednosti (minus vrednosti) funkcije u toj gornjoj (donjoj) granici, pod uslovom da je podintegralna funkcija neprekidna sa leve (desne) strane u toj granici.).

Dokaz.

1. Neka $x, x + \Delta x \in [A, B]$. Kako je $f(x)$ integrabilna nad intervalom $[A, B]$ to je ona i ograničena. Neka je

$$m = \inf_{x \in [A,B]} f(x),\ M = \sup_{x \in [A,B]} f(x),\ 0 \neq K = \max\{|m|, |M|\}.$$

Tada je za $\Delta x > 0$,

$$|I(x + \Delta x) - I(x)| = \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| = \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \right| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt \leq K\Delta x.$$

Za $\Delta x < 0$ je

$$|I(x+\Delta x)-I(x)| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| = \left|-\int_{x+\Delta x}^{x} f(t)\,dt\right| = \left|\int_{x+\Delta x}^{x} f(t)\,dt\right| \leq \int_{x+\Delta x}^{x} |f(t)|\,dt \leq -K\Delta x.$$

Ako je $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$, tada važi $|\Delta x| < \delta \Rightarrow |I(x+\Delta x)-I(x)| < \varepsilon$, pa je funkcija $I(x)$ neprekidna u tački x.

Ako je $K = 0$ tada je $f(x) = 0$ za svako $x \in [A, B]$, pa je $I(x) = 0$, odakle sledi njena neprekidnost.

2. Dokaz ćemo dati za slučaj kada je funkcija $f(x)$ neprekidna nad intervalom $[A, B]$ i $x \in (A, B)$. Kako je

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x},$$

to, na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti za integrale, sledi, zbog neprekidnosti funkcije $f(x)$, da postoji tačka $\xi \in [x, x+\Delta x] \subset [A, B]$ za $\Delta x > 0$, odnosno $\xi \in [x+\Delta x, x] \subset [A, B]$ za $\Delta x < 0$,tako da je

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\, f(\xi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x).$$

Za funkciju $I_1(x)$ pod istim uslovima važi:

a) $I_1(x)$ *je neprekidna nad intervalom* $[A, B]$,

b)
$$I'_{1-}(x) = (-I_-(x))' = -I'_-(x) = -f(x),\ x \in (A, B];$$
$$I'_{1+}(x) = (-I_+(x))' = -I'_+(x) = -f(x),\ x \in [A.B).$$

Posledica 20.1. Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom $[A, B]$, tada funkcija $I(x)$ ima izvod nad intervalom $[A, B]$. Pri tom važi

$$I'(x) = f(x),\ x \in [A, B].$$

Posledica 20.2. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna nad intervalom I, tada je funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, pri čemu je a proizvoljna tačka iz intervala I, primitivna funkcija funkcije $f(x)$ nad intervalom I.

Dokaz. S obzirom da je funkcija $f(x)$ neprekidna nad intervalom I, to je $F'(x) = f(x)$ nad intervalom I.

Primer 20.1. Naći $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int\limits_1^x \frac{2+\ln t}{3+\ln t}\,dt}{x}$.

Rešenje. Kako je funkcija $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{3+\ln x}$ neprekidna za $x\geq 1$, to postoji tačka $\xi\in[1,x]$, tako da je $\int\limits_1^x \dfrac{2+\ln t}{3+\ln t}\,dt=(x-1)\dfrac{2+\ln\xi}{3+\ln\xi}$. Kako je funkcija $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{3+\ln x}$ monotono rastuća i $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\ln x}{3+\ln x}=1$, $f(1)=\dfrac{2}{3}$, sledi da $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{3+\ln x}\in\left[\dfrac{2}{3},1\right]$ za $x\geq 1$. Sledi da

$$\int\limits_1^x \frac{2+\ln t}{3+\ln t}\,dt=(x-1)\frac{2+\ln\xi}{3+\ln\xi}\to\infty,\ \text{kada } x\to\infty.$$

Primenjujući Lopitalovo pravilo dobijamo da je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_1^x \frac{2+\ln t}{3+\ln t}\,dt}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2+\ln x}{3+\ln x}}{1}=1. \qquad \Delta$$

21. PARCIJALNA INTEGRACIJA. SMENA PROMENLJIVE

Parcijalna integracija

Teorema 21.1. *Neka funkcije $u(x)$ i $v(x)$ imaju neprekidne izvode nad intervalom $[a,b]$. Tada važi jednakost*

(1) $\int\limits_a^b u(x)\,dv(x)=u(x)\,v(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b v(x)\,du(x)$.

Dokaz. Za proizvod funkcija $u(x)\,v(x)$ važi jednakost

$$(u(x)\,v(x))'=u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)\ .$$

Prema Njutn-Lajbnicovoj formuli je

$$\int\limits_a^b (u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x))\,dx=u(x)\,v(x)\Big|_a^b,$$

ili

$$\int\limits_a^b v(x)\,du(x)+\int\limits_a^b u(x)\,dv(x)=u(x)\,v(x)\Big|_a^b,$$

odakle se dobija (1).

Formula (1) kraće se piše u obliku

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .$$

Smena promenljive

Teorema 21.2. *Neka je funkcija* $f:[A,B]\to R$ *neprekidna, a funkcija* $\varphi:[\alpha_0,\beta_0]\to[A,B]$ *ima neprekidan izvod. Ako je* $\alpha\in[\alpha_0,\beta_0]$, $\beta\in[\alpha_0,\beta_0]$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, *onda važi jednakost*

$$(2)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt .$$

Dokaz. Neka je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, $x\in[A,B]$. Za složenu funkciju $(F\circ\varphi)(t)=F(\varphi(t))$, $t\in[\alpha_0,\beta_0]$ imamo

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'_\varphi\cdot\varphi'_t = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Dakle, za $\alpha_0\le t\le\beta_0$ funkcija $F(\varphi(t))$ je primitivna funkcija funkcije $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, pa je, prema Njutn-Lajbnicovoj formuli,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a).$$

Sa druge strane, iz $F'(x)=f(x)$ sledi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Uslovi teoreme 21.2. se jednostavnije iskazuju kada je $\varphi(t)$ monotona funkcija. Naime važi:

Neka je $f:[a,b]\to R$ neprekidna, a $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ neprekidno diferencijabilna i monotona funkcija, takva da je $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Tada važi jednakost (2).

U navedenoj teoremi formula smene promenljive izvedena je pod pretpostavkom da je funkcija $f(x)$ neprekidna, što je najčešći slučaj u primenama. Napomenimo, u slučaju da je funkcija $\varphi(t)$ strogo monotona, ta formula važi i pod slabijom pretpostavkom da je $f(x)$ samo integrabilna nad intervalom $[a,b]$.

Primer 21.1. Naći

1. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, **2.** $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

Rešenje.

1. Smenom $x = a\sin t$ imamo $dx = a\cos t\,dt$, pa je

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2\pi}{4}.$$

2. Integral $I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ izračunaćemo uvođenjem smene $x = \pi - t$, $dx = -dt$, što daje

$$I = -\int_\pi^0 \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt.$$

Odavde je

$$2I = \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt,$$

tj.

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{d(\cos t)}{1+\cos^2 t} = -\frac{\pi}{2}\,arctg\,(\cos t)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.\ \Delta$$

Pokažimo da, ako je $f \in \mathscr{R}[-a,a]$ parna funkcija (neparna funkcija), onda važi jednakost

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx \qquad \left(\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0\right).$$

Zaista, napišimo $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$. Smenom $x = -t$, $dx = -dt$ dobijamo $\int_{-a}^0 f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt$ $\left(\int_{-a}^0 f(x)\,dx = -\int_0^a f(t)\,dt\right)$, pa je

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,\ \left(\int_{-a}^a f(x)\,dx = -\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = 0\right).$$

Neka je $f: R \to R$ neprekidna i periodična funkcija sa periodom ω. Pokažimo da važi jednakost

$$\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_0^\omega f(x)\,dx.$$

Polazeći od jednakost $\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_a^\omega f(x)\,dx + \int_\omega^{a+\omega} f(x)\,dx$, smenom $x - \omega = t$ u drugom integralu sa desne strane, dobijamo $\int_\omega^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_0^a f(t+\omega)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt$, pa je

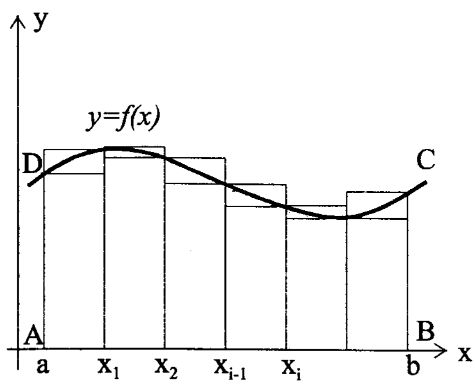
$$\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_a^{\omega} f(x)\,dx + \int_0^{a} f(t)\,dt = \int_0^{\omega} f(x)\,dx\,.$$

22. PRIMENA ODREĐENOG INTEGRALA

Određeni integral ima veoma mnogo primena u nizu naučnih oblasti: tehničkim naukama, fizici, hemiji, biologiji, kao i u društvenim naukama. Posebno, određeni integral se koristi u matematičkim disciplinama. Ovde ćemo videti neke od tih primena u geometriji i fizici.

Površine ravnih figura

Ovde se nećemo baviti problemom definicije površine ravnih likova (u vezi merljivosti ravne figure, vidi na primer, [1]). Kao što smo videli u Primeru 16.1 površinu krivolinijskog trapeza p (figura $ABCD$ ograničena delovima x ose, pravih $x = a$ i $x = b$ i funkcije $f:[a,b] \to R$ koja je nenegativna i neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$) (vidi Sl. 22.1) intuitivno smo aproksimirali sa integralnom sumom



Slika 22.1

$$I(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(data površina pod navedenim pretpostavkama, po definiciji površine postoji). Ako je

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\ , \quad \mathrm{M_i} = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ i \in \{1,2,\dots,n\},$$

tada je donja Darbuova suma $s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i$ jednaka zbiru površina upisanih, a gornja Darbuova suma $S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i$ zbiru površina opisanih praougaonika prikazanih na slici 22.1. Imamo sledeće dve relacije

1) $s(f,P) \le I(f,P,\xi) \le S(f,P)$, 2) $s(f,P) \le P \le S(f,P)$.

Kako je $f(x)$ neprekidna funkcija nad intervalom $[a,b]$, to je ona i integrabilna pa važe sledeće relacije

$$s(f,P) \le I_* = \sup_{P\in\mathcal{P}} s(f,P) \le P \le I^* = \inf_{P\in\mathcal{P}} S(f,P) \le S(f,P)\ ,\ I_* = I^* = \int_a^b f(x)dx.$$

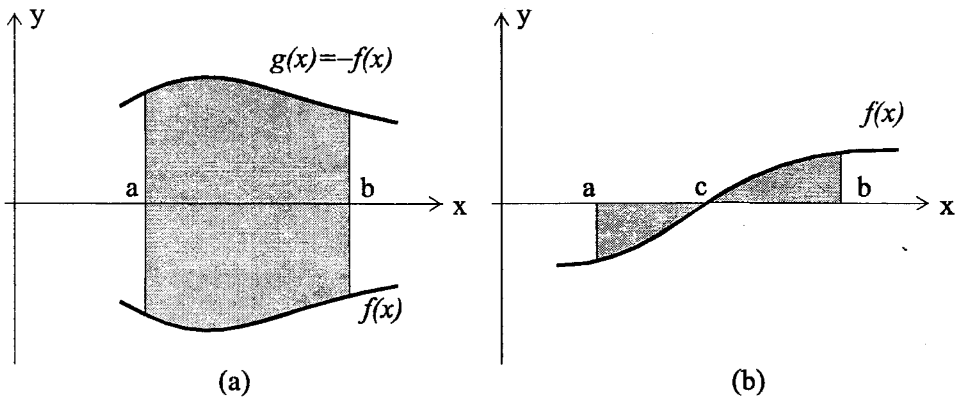
Dakle,

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ako je funkcija $f : [a,b] \to R$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ i ako je $f(x) \le 0$ za svako $x \in [a,b]$ (vidi sliku 22.2.a) tada je površina P krivolinijskog trapeza jednaka

$$P = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx.$$

Ako je $f(x) \le 0$ za $a \le x \le c < b$ i $f(x) \ge 0$ za $c \le x \le b$ i $f(x)$ neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ (vidi sliku 22.2.b), tada je $P = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. Dakle, površina krivolinijskog trapeza je data



Slika 22.2

obrascem $P = \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Pretpostavimo sada da je ravna figura ograničena odozgo grafikom funkcije $y = f_2(x)$, odozdo grafikom funkcije $y = f_1(x)$ i pravama $x = a$ i $x = b, a < b$ (vidi sliku 22.3), gde su funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ neprekidne nad zatvorenim intervalom $[a,b]$. Ako važi da je $0 \le f_1(x) \le f_2(x)$, tada je data površina P jednaka

$$P = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

Data formula važi i u opštem slučaju. Da bi to pokazali možemo izvršiti translaciju grafika datih funkcija po y osi za broj $h = \min\limits_{x\in[a,b]} f_1(x)$. Tada za funkcije

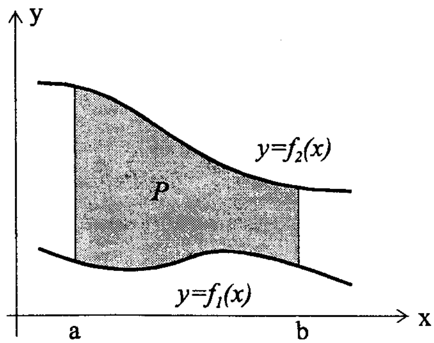
$f_1^*(x) = f_1(x) - h$, $f_2^*(x) = f_2(x) - h$

važi: Funkcije $f_1^*(x)$ i $f_2^*(x)$ su neprekidne nad zatvorenim intervalom $[a, b]$,

$0 \le f_1^*(x) \le f_2^*(x)$.

Sledi

$$P = \int_a^b (f_2^*(x) - f_1^*(x))\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$



Slika 22.3

Ako je funkcija $y = f(x)$ data u parametarskom obliku $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$,

pri čemu funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ zadovoljavaju uslove:

1. funkcija $\varphi(t)$ ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$,
2. funkcija $\varphi(t)$ je monotono rastuća nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$,
3. funkcija $\psi(t)$ je neprekidna nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$,
4. $\psi(t) \ge 0$ za svako $t \in [\alpha, \beta]$.

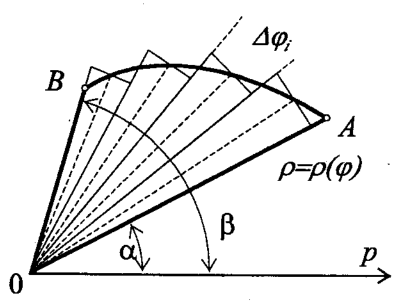
Tada je

$$P = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Neka je data kriva

$\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, $|\beta - \alpha| \le 2\pi$,

u polarnom koordinatnom sistemu, gde je $\rho = \rho(\varphi)$ neprekidna funkcija. Geometrijsku figuru OAB, ograničenu polupravama $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ i krivom $\rho = \rho(\varphi)$ nazvaćemo **krivolinijski trougao** (vidi sliku 22.4).



Slika 22.4

Pokažimo da površina P tog krivolinijskog trougla iznosi

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Neka je $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ proizvoljna podela zatvorenog intervala $[\alpha, \beta]$ i neka je za svako $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\xi_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ proizvoljna tačka. Kružni isečci poluprečnika $\rho(\xi_i^*)$ ograničeni pravama $\varphi = \varphi_{i-1}$ i $\varphi = \varphi_i$ imaju površinu

$P_i = \frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$, gde je $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Površina P figure OAB

približno je jednaka $P \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$. S obzirom da je $\rho = \rho(\varphi)$ neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$, sledi

$$P = \lim_{\max\Delta\varphi_i\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Primer 22.1. Naći površine sledećih ravnih figura:

a) $\begin{cases} 0 \le y \le \cos x \quad , \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \cos x \le y \le 0 \quad , \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{4} \end{cases}$,

b) $x \le y \le 2 - x^2$,

c) elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

d) jednog svoda cikloide $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $a > 0, t \in [0, 2\pi]$,

e) **kardioide** $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $\quad a > 0, \varphi \in [0, 2\pi]$.

Rešenje.

a) $P = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (vidi sliku 22.5. a).

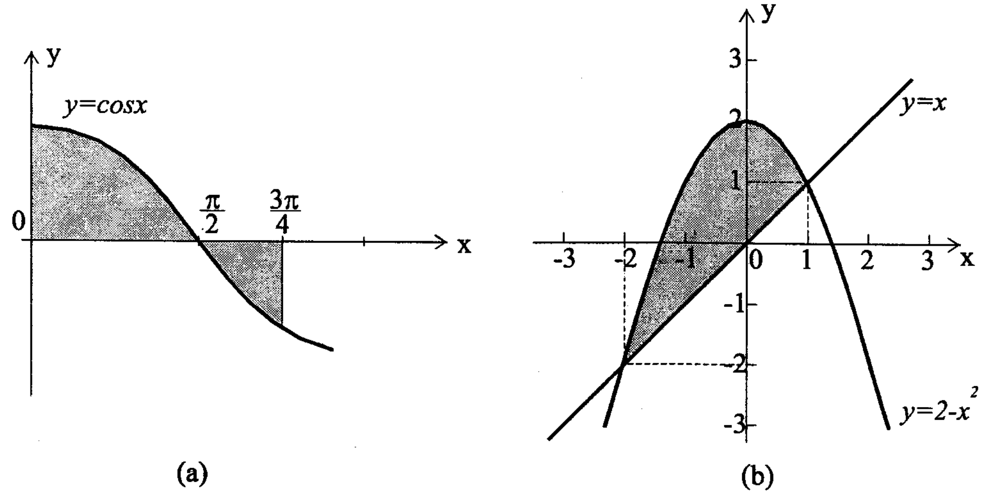
b) Parabola $y = 2 - x^2$ i prava $y = x$ imaju zajedničke tačke $A(-2, -2)$ i $B(1, 1)$, pa je

$$P = \int_{-2}^{1}(2 - x^2 - x)\,dx = (2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2} \quad \text{(vidi sliku 22.5.b).}$$

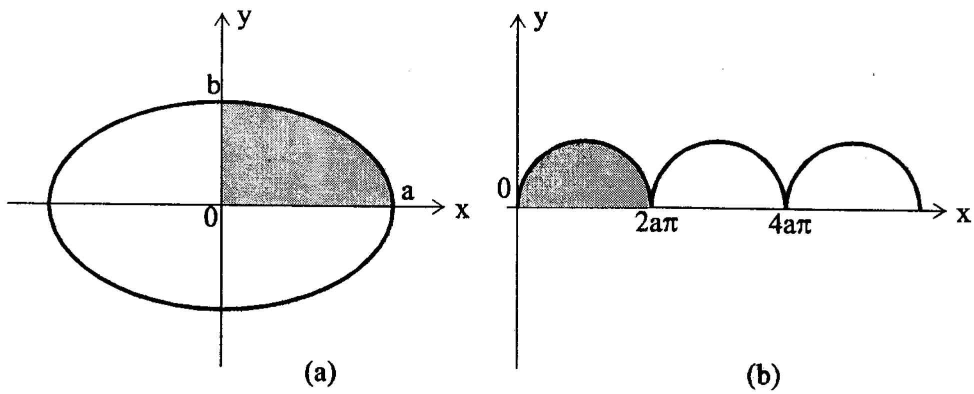
c) Parametarski oblik jednačine elipse je $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$. Kako je elipsa simetrična u odnosu na koordinatne ose to je

$$P = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin t(a\cos t)'dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1 - \cos 2t}{2}dt = ab\pi.$$

(primetimo da smo uzeli ispred integrala znak –, jer je $x(t) = a\cos t$ monotono opadajuća funkcija nad intervalom $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x'(t) = -a\sin t \leq 0$ za $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).



Slika 22.5



Slika 22.6

d) $P = \int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt = a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt =$

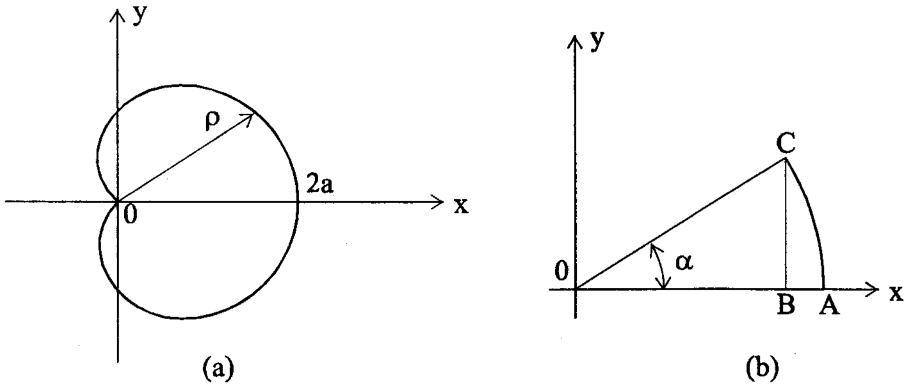
$$= a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{\cos 2t}{2}\right)dt = 3a^2\pi.$$ (vidi Sl.22.6.b).

e) $P = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{3}{2}a^2\pi.$ (vidi Sl.22.7.a).

Primer 22.2 U koordinatnom sistemu xOy dat je kružni isečak centralnog ugla α i poluprečnika r (vidi sliku 22.7.b). Naći njegovu površinu.

Rešenje. Prvo isečak OAB podelimo pravom $x = r\cos\alpha$ na dva dela: trougao OCB i figuru CAB. Površina P_1 trougla OCB jednaka je

$$\frac{1}{2}r^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}r^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$



Slika 22.7

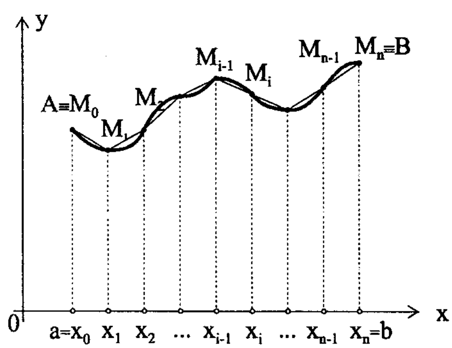
Prema Njutn–Lajbnicovoj formuli, površina P_2 figure CAB iznosi

$$P_2 = \int_{r\cos\alpha}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -\int_0^{\alpha} r^2\sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}r^2\alpha - \frac{1}{2}r^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha,$$

gde je korišćena smena $x = r\cos t$, $\alpha \le t \le 0$. Zbog toga je

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2}r^2\alpha.\ \Delta$$

Dužina luka ravne krive



Slika 22.8

Pretpostavimo da je u ravni definisana kriva AB sa $y = f(x)$, $a \le x \le b$, gde funkcija $f(x)$ ima neprekidan prvi izvod $f'(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a,b]$. Neka je $P = \{x_0, x_1, ..., x_n]$ jedna proizvoljna podela intervala $[a,b]$. Za svako x_i, $i \in \{1,2,...,n\}$ označimo sa $M_i(x_i, f(x_i))$ tačku na datoj krivoj pri čemu je $A = M_0$, $B = M_n$ (vidi Sl.22.8). Spojimo tačke M_{i-1}, M_i, $i \in \{1,2,...,n\}$ dužima. Sa $s(P)$ označimo zbir $s(P) = \sum_{i=1}^{n}\overline{M_{i-1}M_i}$, gde smo sa $\overline{M_{i-1}M_i}$ označili dužinu duži $M_{i-1}M_i$. Kako je.

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

i kako, na osnovu Lagranžove teoreme, postoji tačka $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, takva da je

$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, to je $\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i$, gde je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Graničnu vrednost

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} s(P) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i,$$

(granična vrednost, na osnovu datih pretpostavki postoji i ne zavisi od načina podele zatvorenog intervala $[a, b]$), tj. broj s za koji važi

$$(\forall \varepsilon \in R^+)(\exists \delta \in R^+)(\forall (P, \xi) \in \mathscr{P}[a,b])\,\lambda(P) < \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i - s \right| < \varepsilon$$

zovemo **dužina luka krive** $y = f(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a, b]$. Sledi da je

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\,.$$

Ako je kriva $y = f(x)$ data u parametarskom obliku $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$, gde za funkcije $\varphi : [\alpha, \beta] \to R, \psi : [\alpha, \beta] \to R$ važi: $\varphi(t), \psi(t)$ imaju neprekidne izvode nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$ i pri tom je $\varphi'(t) > 0$. Tada je

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \frac{\psi'^2(t)}{\varphi'^2(t)}}\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt\,.$$

Ako je $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$, jednačina krive AB u polarnom koordinatnom sistemu, gde funkcija $\rho = \rho(\varphi)$ ima neprekidan prvi izvod nad intervalom $[\alpha, \beta]$, tada je

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi\,.$$

Zaista, ako stavimo da je $x = \rho(\varphi)\cos\varphi,\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, to iz

$x'(\varphi) = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi,\quad y'(\varphi) = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi$, sledi da je

$\sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)} = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}$, pa je $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi$.

Primer 22.3. Naći:

a) dužinu luka x kružnog isečka čiji je centralni ugao α, dok je poluprečnik kružnice r Sl.22.9. a),

b) dužinu luka jednog svoda cikloide,

c) dužinu luka **astroide** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$, (Sl.22.9. b),

d) dužinu luka kardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0, 0 \le \varphi \le 2\pi$,

e) dužinu luka prvog zavoja **Arhimedove spirale** $\rho = a\varphi, a > 0$ (vidi Sl.22.9c).

Rešenje.

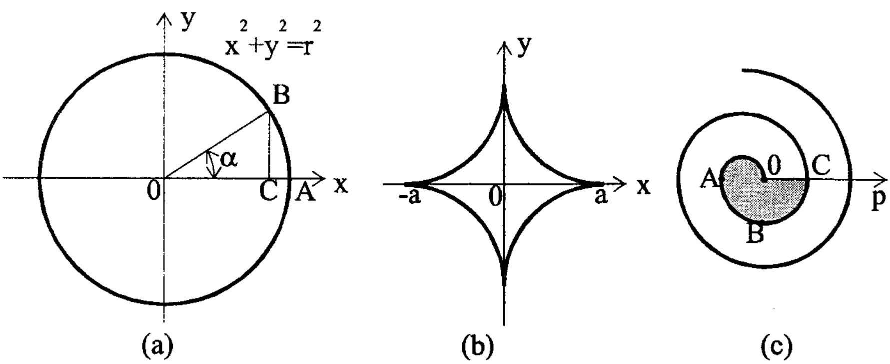
a) Jednačinu kružnice napišimo u obliku $x^2 + y^2 = r^2$. Jednačina luka AB je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $r\cos\alpha \le x \le r$, pa je

$$s = \int_{r\cos\alpha}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_{r\cos\alpha}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r \arcsin\frac{x}{r} \Big|_{r\cos\alpha}^{r} = r\alpha .$$

b) Kako je $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a\sin t$, to je

$$s = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt =$$

$$= 2a(-2\cos\frac{t}{2}) \Big|_0^{2\pi} = -4a(-1 - 1) = 8a .$$



Slika 22.9

c) Parametarski oblik jednačine astroide je

$$x = a\cos^3 t \ , \quad y = a\sin^3 t \ , \quad 0 \le t \le 2\pi .$$

Kako je

$$x' = -3a\cos^2 t \sin t \ , \ y' = 3a\sin^2 t\cos t$$

i kako je astroida simetrična u odnosu na koordinatne ose, to je

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t}\, dt = 4\,\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt = 6a .$$

d) Kako je $\rho' = -a\sin\varphi$, to je

$$s = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos^2\varphi}\,d\varphi = 2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1+\cos^2\varphi}{2}}\,d\varphi =$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi = 2a(\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi - \int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi) = 8a \quad .$$

e) $s = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+a^2\varphi^2}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = a(\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})).\Delta$

Zapremina obrtnih tela

Neka je funkcija $f:[a,b]\to R$ neprekidna nad intervalom $[a,b]$. Ako se krivolinijski trapez, čije stranice su interval $[a,b]$, delovi pravih $x=a$ i $x=b$ i kriva, $y=f(x)$, $a\le x\le b$ obrće oko $x$ose, dobija se obrtno telo (vidi sliku 22.10). Površ koja ograničava ovo telo sastoji se od dve "baze" (krugovi poluprečnika $|f(a)|$ i $|f(b)|$) i "omotača". Neka je

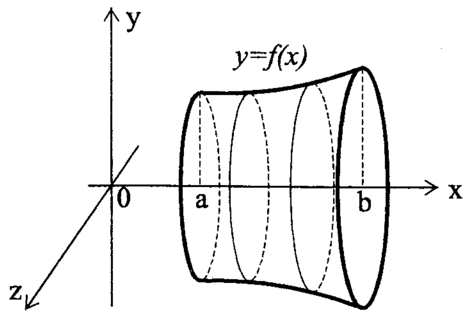
$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$

proizvoljna podela intervala $[a,b]$, a

$\xi_i\in[x_{i-1},x_i], i\in\{1,2,\dots,n\}$

proizvoljne tačke. Posmatrajmo pravougaonik sa stranicama

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ i $|f(\xi_i)|$.



Slika 22.10

Obrtanjem tih pravougaonika oko x ose dobijaju se valjci. Zapremina svakog ovog valjka je $V_i=\pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$. Zbir zapremina svih ovih valjaka aproksimativno je jednak zapremini V datog tela, tj. $V\approx\sum_{i=1}^{n}\pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$. Kada se posmatra dati zbir, taj zbir je jedna od integralnih suma neprekidne funkcije $f^2(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a,b]$. Granična vrednost

$$V=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi f^2(\xi_i)\Delta x_i\,,$$

tj. broj V za koji važi

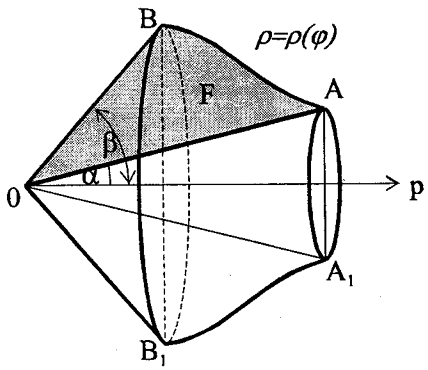
$$(\forall\varepsilon\in R^+)(\exists\delta\in R^+)(\forall(P,\xi)\in\mathcal{P}[a,b])\,\lambda(P)<\delta\Rightarrow\left|\sum_{i=1}^{n}\pi f^2(\xi_i)\Delta x_i - V\right|<\varepsilon,$$

(ona na osnovu datih pretpostavki postoji i ne zavisi od načina podele zatvorenog intervala $[a,b]$ i izbora tačaka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1,2,\ldots n\}$), zovemo **zapremina tela** dobijenog obrtanjem krive $y = f(x)$ oko x ose nad zatvorenim intervalom $[a,b]$. Sledi da je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Ako se kriva $y = f(x)$ data u parametarskom obliku $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$, gde za funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ važe iste osobine kao i kada smo definisali površinu ravnih likova, obrće oko x ose, tada je zapremina V dobijenog tela data obrascem

$$V = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\,dt.$$



Slika 22.11

Posmatrajmo figuru F u polarnom koordinatnom sistemu (vidi Sl.22.11). Neka je funkcija $\rho = \rho(\varphi)$ nenegativna i neka ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$.

Treba naći zapreminu tela nastalog obrtanjem figure F oko polarne ose. Zapremina V obrtnog tela je $V = V_1 + V_2 - V_3$, gde je

$$V_1 = -\pi \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\sin^2\varphi(\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi)\,d\varphi,$$

$$V_3 = \frac{\rho^3(\alpha)\sin^2\alpha\cos\alpha}{3}\pi \text{ (zapremina kupe } AA_1O\text{)},$$

$$V_2 = \frac{\rho^3(\beta)\sin^2\beta\cos\beta}{3}\pi \text{ (zapremina kupe } BB_1O\text{)}, (x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi).$$

Sledi da je

$$V = \pi \int_\alpha^\beta (-\rho^2(\varphi)\sin^2\varphi(\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi) + \frac{1}{3}(\rho^3(\varphi)\sin^2\varphi\cos\varphi)'\,d\varphi.$$

Dalje je

$$V = \pi\int_{\alpha}^{\beta}(-\rho^2(\varphi)\rho'(\varphi)\sin^2\varphi\cos\varphi + \rho^3(\varphi)\sin^3\varphi + \rho^2(\varphi)\sin^2\varphi\cos\varphi +$$

$$+\frac{2}{3}\rho^3(\varphi)\sin\varphi\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\rho^3(\varphi)\sin^3\varphi)\,d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

Primer 22.4. Naći zapremine:

a) **torusa** (vidi sliku 22.12),

b) tela nastalog obrtanjem jednog svoda cikloide oko x ose,

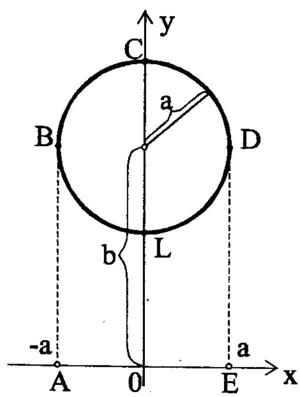
c) **elipsoida** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$,

d) tela nastalog obrtanjem kardioide oko polarne ose.

Rešenje.

a) Neka se kružnica $x^2+(y-b)^2=a^2$, obrće oko x ose. Zapremina $V=V_1-V_2$, gde je V_1 zapremina tela dobijenog rotacijom krive $y=y_2(x)=b+\sqrt{a^2-x^2}$, a V_2 zapremina tela dobijenog rotacijom krive $y=y_1(x)=b-\sqrt{a^2-x^2}$ oko x ose. Sledi da je

$$V = 2\pi\int_0^a y_2^2(x)\,dx - 2\pi\int_0^a y_1^2(x)\,dx =$$



Slika 22.12

$$= 2\pi\int_0^a((b+\sqrt{a^2-x^2})^2-(b-\sqrt{a^2-x^2})^2)\,dx = 8b\pi\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2a^2b\pi^2.$$

b) $$V = \pi\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3dt = a^3\pi\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt =$$

$$= a^3\pi\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+\frac{3}{2}(1+\cos 2t)-(1-\sin^2 t)\cos t)\,dt =$$

$$= a^3\pi(\frac{5}{2}t-3\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t-\sin t-\frac{\sin^3 t}{3})\Big|_0^{2\pi} = 5a^3\pi^2.$$

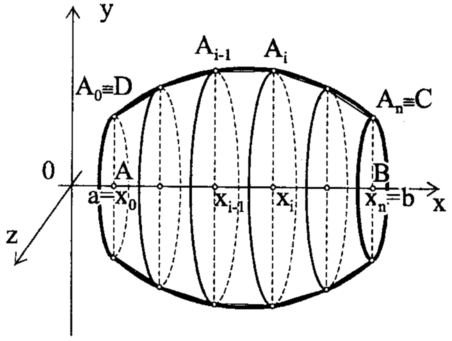
c) Ovaj elipsoid se dobija obrtanjem elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, oko x ose. Sledi da je

$$V = \pi\int_{-a}^{a}b^2(1-\frac{x^2}{a^2})\,dx = \frac{4}{3}ab^2\pi.$$

d) $V = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} a^3(1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2}{3}a^3\pi(-\frac{(1+\cos\varphi)^4}{4})\Big|_0^{\pi} = \frac{8a^3\pi}{3}$. Δ

Površina omotača obrtnih tela

Definišimo površinu " omotača " obrtnog tela, koje se dobija obrtanjem krivolinijskog trapeza $ABCD$ na slici 22.13 oko x ose, s tim što ćemo pretpostaviti



Slika 22.13

da je funkcija $f(x)$ nenegativna i ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[a,b]$. Uočimo proizvoljnu podelu $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ intervala $[a,b]$. Spojimo tačke $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ i $(x_i, f(x_i))$ dužima, za svako $i = 1,2,...,n$. Neka se krivolinijski trapez obrće zajedno sa izlomljenom linijom koja spaja tačke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

Obrtanjem trapeza sa temenima u tačkama $(x_{i-1}, 0)$, $(x_i, 0)$, $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, dobija se zarubljena kupa, čiji poluprečnici osnova su $f(x_{i-1})$ i $f(x_i)$. Zbir $S(P)$ površina omotača svih ovako dobijenih kupa biće

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2},$$

gde je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Definišimo **površinu S omotača obrtnog tela** kao

$$S = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(P),$$

i pokažimo da pod navedenim pretpostavkama ta granična vrednost postoji.

U cilju nalaženja izraza za $S(P)$, pogodnog za nalaženje granične vrednosti, primetimo da je, prema Lagranžovoj teoremi o srednjoj vrednosti,

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i} = f'(\xi_i),$$

za neko $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1,2,...,n$. Kako je $f(x)$ neprekidna funkcija, to postoji $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,...,n$, tako da je $f(x_{i-1}) + f(x_i) = 2f(\eta_i)$, $i = 1,2,...,n$.

Uzimajući gornje jednakosti u obzir, dobija se

$$S(P) = 2\pi\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i .$$

Sledi da je

$$S(P) = 2\pi\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i + 2\pi\sum_{i=1}^{n}(f(\eta_i)-f(\xi_i))\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i .$$

Funkcija $\sqrt{1+f'^2(x)}$ je neprekidna, dakle i ograničena nad intervalom $[a,b]$, pa postoji pozitivan broj $K>0$, takav da je $\sqrt{1+f'^2(x)} \le K$. Treba pokazati da je

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} 2\pi\sum_{i=1}^{n}(f(\eta_i)-f(\xi_i))\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i = 0 .$$

Kako je $f(x)$ uniformno neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom $[a,b]$, to za svako $\varepsilon>0$ postoji pozitivan broj δ, takav da

$$x_1, x_2 \in [a,b], |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)K\pi} .$$

Dakle,

$$P \in \mathcal{P}, \lambda(P) < \delta \Rightarrow \left| 2\pi\sum_{i=1}^{n}(f(\eta_i)-f(\xi_i))\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i \right| < \varepsilon .$$

Na onovu definicije je

$$S = \lim_{\lambda(P)\to 0} 2\pi\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx .$$

Ako se kriva $y=f(x)$ data u parametarskom obliku $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $t\in[\alpha,\beta]$ obrće oko x – ose, tada je površina P omotača obrtnog tela pod pretpostavkama:

a) funkcija $\varphi(t)$ ima neprekidan pozitivan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[\alpha,\beta]$,

b) funkcija $\psi(t)$ je nenegativna i ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[\alpha,\beta]$,

data obrascem

$$P = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt .$$

Primer 22.5. Naći sledeće površine:

a) površinu lopte poluprečnika R,

b) površinu tela nastalog obrtanjem kardioide oko polarne ose.

Rešenje.

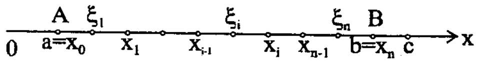
a) $\rho = R$ je jednačina kružnice u polarnom koordinatnom sistemu, pa je površina obrtnog tela (površina lopte) $P = 2\pi\int_0^\pi R^2 \sin\varphi\, d\varphi = 4R^2\pi$.

b) $P = 4a^2\pi\int_0^\pi (1+\cos t)\cos\frac{t}{2}\sin t\, dt = 4a^2\pi\int_0^\pi 2\cos^3\frac{t}{2}\cdot 2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}\, dt =$

$$= 16a^2\pi\left(-2\frac{\cos^5\frac{t}{2}}{5}\right)\Big|_0^\pi = \frac{32}{5}a^2\pi. \quad \Delta$$

Rad sile

Neka promenljiva sila inteziteta $F(x)$ deluje na materijalnu tačku na putu OC (vidi sliku 22.14) (za funkciju $F(x)$ se pretpostavlja da je neprekidna). Pravac i smer sile su stalni, dok je intenzitet promenljiv i zavisi od rastojanja x između napadne tačke sile i tačke O. Treba naći rad te sile na putu AB.



Slika 22.14

Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ proizvoljna podela zatvorenog intervala $[a, b]$.

Na svakom intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ izaberimo proizvoljnu tačku $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Smatraćemo da izraz $\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, predstavlja približnu vrednost rada date sile na putu AB. **Rad sile** intenziteta $F(x)$ na tom putu definiše se kao

$$R = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)\, dx .$$

PETA GLAVA

NESVOJSTVENI INTEGRAL

23. NESVOJSTVENI INTEGRAL

Uvodeći pojam određenog integrala pretpostavka je bila da imamo funkciju $f(x)$ koja je definisana nad zatvorenim intervalom $[a,b]$. Posle smo videli da je potreban uslov integrabilnosti funkcije $f(x)$ u Rimanovom smislu da je funkcija $f(x)$ ograničena nad posmatranim intervalom $[a,b]$. Ako bar jedan od ovih uslova nije ispunjen, definicija Rimanovog integrala nema smisla. Međutim, pojavljuju se problemi koji se moraju rešavati u praksi, kod kojih imamo funkciju koja je definisana nad beskonačnim intervalom ili koja nije ograničena nad posmatranim konačnim ili beskonačnim intervalom. Ti problemi se često rešavaju sličnim metodama kao i kada primenjujemo određeni integral. Zbog toga smo prinuđeni da proširimo pojam određenog integrala, da bi obuhvatili i ove slučajeve. Naravno, prilikom ovog uopštavanja određenog integrala, to uopštenje ne treba da narušava definiciju i osobine određenog integrala kada je u pitanju zatvoren interval i ograničena funkcija. Dalje, tim prirodnim uopštavanjem, treba iskoristiti sve osobine određenog integrala. Prilikom ovoga uopštavanja dolazimo do novog pojma, a to je nesvojstveni integral i pritom imamo dve granične vrednosti (jedna granična vrednost u definiciji određenog integrala, a druga prilikom ovog uopštenja).

Nesvojstveni integral prve vrste

Definicija 23.1. *Neka je funkcija* $f(x)$ *definisana nad intervalom* $[a,\infty)$ *i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom* $[a,T]\subset[a,\infty)$. **Nesvojstveni integral funkcije** $f(x)$ **nad intervalom** $[a,\infty)$, *u oznaci* $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ *je funkcija* $F(T)$ *definisana sa*

$$F(T)=\int_a^T f(x)\,dx\ ,\quad T\geq a\ .$$

Ako postoji $A=\lim\limits_{T\to\infty}F(T)=\lim\limits_{T\to\infty}\int_a^T f(x)\,dx$, *tada* **nesvojstveni integral** $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ **konvergira ka broju** A.

Granična vrednost $A = \lim\limits_{T\to\infty} F(T)$ *obeležava se sa* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$, *tj.*

$$A = \lim_{T\to\infty} F(T) = \lim_{T\to\infty} \int_a^T f(x)\,dx = \int_a^{\infty} f(x)\,dx\ .$$

Ako ne postoji $\lim\limits_{T\to\infty} F(T)$ *onda* **nesvojstveni integral** $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ **divergira.**

Neka je funkcija $f(x)$ *definisana nad intervalom* $(-\infty, a]$ *i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom* $[T, a] \subset (-\infty, a]$.

Nesvojstveni integral funkcije $f(x)$ **nad intervalom** $(-\infty, a]$ *u oznaci* $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)\,dx$ *je funkcija* $F(T)$ *definisana sa*

$$F(T) = \int_T^a f(x)dx\ ,\ T \le a\ .$$

Ako postoji $B = \lim\limits_{T\to\infty} F(T) = \lim\limits_{T\to-\infty} \int\limits_T^a f(x)\,dx$, *tada* **nesvojstveni integral** $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)\,dx$ **konvergira ka broju** B. *Granična vrednost* $B = \lim\limits_{T\to-\infty} F(T)$ *obeležava se sa* $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx$, *tj.*

$$B = \lim_{T\to-\infty} F(T) = \lim_{T\to-\infty} \int_T^a f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx\ .$$

Ako ne postoji $\lim\limits_{T\to-\infty} F(T)$ *onda* **nesvojstveni integral** $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)\,dx$ **divergira.**

Neka je funkcija $f(x)$ *definisana nad intervalom* $(-\infty, \infty)$ *i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom* $[M, N] \subset (-\infty, \infty)$. **Nesvojstveni integral funkcije** $f(x)$ **nad intervalom** $(-\infty, \infty)$, *u oznaci* $\int\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx$ *je uređen par* $\Big(\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)\,dx,\ \int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx\Big)$ *nesvojstvenih integrala* $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)\,dx$ *i* $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$, *gde je a proizvoljan realan broj.*

Dakle,

$$\int\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx = \Big(\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)\,dx,\ \int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx\Big),\ a \in R\ .$$

Ako oba nesvojstvena integrala $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)\,dx$ *i* $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ *konvergiraju tada i nestvojstveni integral* $\int\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx$ **konvergira**. *U tom slučaju piše se da je*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx .$$

Ako bar jedan od nesvojstvenih integral $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)\,dx$, $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ *divergira, tada i* **nesvojstveni integral** $\int\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx$ **divergira.**

Radi veće jasnoće, u ovoj knjizi razlikovaćemo simbole $\int\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx$, $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)\,dx$ i $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ za nesvojstvene integrale od simbola $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ i $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ za odgovarajuće granične vrednosti, što nije često slučaj u literaturi. Nesvojstvene integrale $\int\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx$, $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)\,dx$ i $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ jednim imenom zovemo **nesvojstveni integral prve vrste.**

Primer 23.1. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $I_\alpha = \int\limits_{[1,\infty)} \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha \in R.$

Rešenje. Po definiciji treba posmatrati

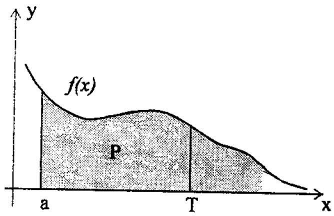
$$\lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(\lim_{T\to\infty} T^{1-\alpha} - 1), \alpha \neq 1 .$$

Ako je $1-\alpha < 0$, tada $T^{1-\alpha} \to 0$, kada $T \to \infty$, pa integral konvergira i vrednost mu je $\frac{1}{\alpha-1}$. Ako je $1-\alpha > 0$, tada $T^{1-\alpha} \to \infty$ kada $T \to \infty$, pa dati nesvojstveni integral divergira. Za $\alpha = 1$ je $\int\limits_1^T \frac{dx}{x} = \ln T \to \infty$, kada $T \to \infty$, pa dati nesvojstveni integral divergira. Prema tome: $I_\alpha : \begin{cases} \text{konvergira} & \text{za} \quad \alpha > 1 \\ \text{divergira} & \text{za} \quad \alpha \leq 1 \end{cases}$. Δ

Geometrijska interpretacija

Kako određeni integral $\int\limits_a^T f(x)\,dx, f(x) \geq 0$ predstavlja površinu ravnog lika ograničenog $x-$ osom, pravama $x = a$, $x = b$ i lukom krive $y = f(x)$ nad intervalom $[a,T]$, prirodno je površinu lika ograničenog $x-$osom, pravom $x = a$ i lukom krive

$y = f(x)$ nad intervalom $[a, \infty)$, definisati kao $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (vidi Sl.23.1.) ako



Slika 23.1

nesvojstveni integral $\int_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ konvergira. Slična geometrijska interpretacija se daje za $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ i $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ako nesvojstveni integrali $\int_{(-\infty,a]} f(x)\,dx$ i $\int_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx$ konvergiraju.

Glavna vrednost integrala $\int_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx$ *je*

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f(x)\,dx = V.P.^1 \int_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx\,,$$

ako ova granična vrednost postoji.

Ako nesvojstveni integral $\int_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx$ konvergira, tada očigledno postoji V.P. $\int_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx$ i važi jednakost $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$ V.P. $\int_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx$. Međutim, može da postoji V.P. $\int_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx$, a da nesvojstveni integral $\int_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx$ divergira. To pokazuje sledeći primer.

Primer 23.2. Ispitati konvergenciju integrala $I = \int_{(-\infty,\infty)} \frac{2x}{1+x^2}\,dx$.

Rešenje. Integral I divergira. Naime $I = (\int_{(-\infty,a]} f(x)\,dx, \int_{[a,\infty)} f(x)\,dx) = (I_1, I_2)$.

Kako je

$$\lim_{T\to\infty} \int_a^T \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{T\to\infty} \ln(1+T^2) - \ln(1+a^2) = \infty,$$

to nesvojstveni integral I_2 divergira. Dakle taj integral divergira, a za konvergenciju integrala I oba integrala na koja smo ga rastavili moraju konvergirati. Međutim, za glavnu vrednost se dobija

$$V.P. \int_{(-\infty,\infty)} \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{T\to\infty} (\ln(1+T^2) - \ln(1+T^2)) = \lim_{T\to\infty} 0 = 0. \ \Delta$$

---

[1] V.P. = valuer principal (fr.) – glavna vrednost

Nesvojstveni integral druge vrste

Definicija 12.2. *Neka je funkcija* $f(x)$ *definisana nad končanim intervalom* $[a,b)$. *Dalje, neka je funkcija* $f(x)$ *integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom* $[a, b-\varepsilon] \subset [a,b), \varepsilon > 0$.

Nesvojstveni integral druge vrste funkcije $f(x)$ **nad** ***intervalom*** $[a,b)$, *u oznaci* $\int\limits_{[a,b)} f(x)\,dx$, *je funkcija* $F(\varepsilon)$ *definisana sa*

$$F(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\,, a < b-\varepsilon < b.$$

Ako postoji $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = A$, *onda nesvojstveni integral* $\int\limits_{[a,b)} f(x)\,dx$ **konvergira broju** A. *Tada se piše da je* $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$, *tj.*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = A.$$

Ako ne postoji $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon)$ *onda nesvojstveni integral* $\int\limits_{[a,b)} f(x)\,dx$ **divergira.**

Neka je funkcija $f(x)$ *definisana nad konačnim intervalom* $(a,b]$. *Dalje, neka je funkcija* $f(x)$ *integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom* $[a+\varepsilon, b] \subset (a,b]$, $\varepsilon > 0$.

Nesvojstveni integral druge vrste funkcije $f(x)$ **nad intervalom** $(a,b]$, *u oznaci* $\int\limits_{(a,b]} f(x)\,dx$, *je funkcija* $F(\varepsilon)$ *definisana sa*

$$F(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\,, a < a+\varepsilon < b.$$

Ako postoji $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = B$, *onda nesvojstveni integral* $\int\limits_{(a,b]} f(x)\,dx$ **konvergira broju** B. *Tada se piše da je* $B = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$, *tj.*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = B.$$

Ako ne postoji $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon)$ *onda nesvojstveni integral* $\int\limits_{(a,b]} f(x)\,dx$ **divergira.**

Neka je funkcija $f(x)$ *definisana nad konačnim intervalom* (a,b). *Dalje, neka je funkcija* $f(x)$ *integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom* $[m,M] \subset (a,b)$.

Nesvojstveni integral druge vrste funkcije $f(x)$ *nad intervalom* (a,b) *u oznaci* $\int\limits_{(a,b)} f(x)\,dx$, *je uređen par* $(\int\limits_{(a,c]} f(x)\,dx, \int\limits_{[c,b)} f(x)\,dx)$ *nesvojstvenih integrala* $\int\limits_{(a,c]} f(x)\,dx$ i $\int\limits_{[c,b)} f(x)\,dx$, *gde je* $c \in (a,b)$ *proizvoljan realan broj. Dakle,*

$$\int\limits_{(a,b)} f(x)\,dx = (\int\limits_{(a,c]} f(x)\,dx, \int\limits_{[c,b)} f(x)\,dx), c \in (a,b).$$

Nesvojstveni integral $\int\limits_{(a,b)} f(x)\,dx$ **konvergira** *ako svaki od nesvojstvenih integrala* $\int\limits_{(a,c]} f(x)\,dx$ i $\int\limits_{[c,b)} f(x)\,dx$ *konvergira. U tom slučaju pišemo da je*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Ako bar jedan od nesvojstvenih integrala $\int\limits_{(a,c]} f(x)\,dx$ *i* $\int\limits_{[c,b)} f(x)\,dx$ *divergira, tada* **divergira** *i nesvojstveni integral* $\int\limits_{(a,b)} f(x)\,dx$.

Ako je funkcija $f(x)$ *definisana u svim tačkama intervala* (a,b) *osim u tački* $c \in (a,b)$[1] *i ako su definisani nesvojstveni integrali* $\int\limits_{(a,c)} f(x)\,dx$ *i* $\int\limits_{(c,b)} f(x)\,dx$, *tada je* **nesvojstveni integral druge vrste funcije** $f(x)$ **nad intervalom** (a,b), *u oznaci* $\int\limits_{(a,b)} f(x)\,dx$, *uređen par* $(\int\limits_{(a,c)} f(x)\,dx, \int\limits_{(c,b)} f(x)\,dx)$ *nesvojstvenih integrala* $\int\limits_{(a,c)} f(x)\,dx$ i $\int\limits_{(c,b)} f(x)\,dx$. *Dakle,*

$$\int\limits_{(a,b)} f(x)\,dx = (\int\limits_{(a,c)} f(x)\,dx, \int\limits_{(c,b)} f(x)\,dx).$$

Ako oba nesvojstvena integrala $\int\limits_{(a,c)} f(x)\,dx$ i $\int\limits_{(c,b)} f(x)\,dx$ *konvergiraju tada* **konvergira** *i nesvojstveni integral* $\int\limits_{(a,b)} f(x)\,dx$. *U tom slučaju pišemo da je*

[1] Umesto intervala (a,b) može se posmatrati bilo koji od konačnih intervala $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \,.$$

Ako bar jedan od nesvojstvenih integrala $\int_{(a,c)} f(x)\,dx$ i $\int_{(c,b)} f(x)\,dx$ *divergira tada* **divergira** *i nesvojstveni integral* $\int_{(a,b)} f(x)\,dx$.

Ako za nesvojstveni integral $\int_{(a,b)} f(x)\,dx$ *postoji* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = V.P. \int_{(a,b)} f(x)\,dx$ *onda je ta granična vrednost* **glavna vrednost nesvojstvenog integrala** $\int_{(a,b)} f(x)\,dx$.

Slično se definiše i nesvojstveni integral $\int_{(a,b)} f(x)dx$ *kada funkcija* $f(x)$ *nije definisana u konačnom broju tačaka intervala* (a,b) [1].

Napomena 23.1. Pri definiciji nesvojstvenog integrala $\int_{[a,b)} f(x)\,dx$ o ponašanju funkcije $f(x)$ u tački b nismo ništa pretpostavili. Tu može da postoji nekoliko situacija. Može se desiti da $f(x) \to \pm\infty$, kada $x \to b^-$. U tom slučaju dati nesvojstveni integral može da konvergira ili da divergira. Međutim, ako postoji $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = L$, tada dati nesvojstveni integral može samo da konvergira. U tom slučaju dati nesvojstveni integral konvergira ka Rimanovom integralu $\int_a^b f_1(x)\,dx$ funkcije

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [a,b) \\ L & , \quad x = b \end{cases}, \text{ pa važi jednakost}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \,.$$

Inače, nije teško pokazati da u slučaju da je funkcija $f(x)$ integrabilna u Rimanovom smislu nad intervalom $[a,b]$, važi $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\,dx$, te zato nema mogućnosti zabune zbog ovog "dvostrukog" korišćenja simbola $\int_a^b f(x)\,dx$. Slična napomena je i za ostale nesvojstvene integrale druge vrste iz prethodne definicije.

[1] Umesto intervala (a,b) može se posmatrati bilo koji od konačnih intervala $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$

Primer 23.3. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala

$$I_\beta = \int\limits_{(0,1]} \frac{dx}{x^\beta}.$$

Rešenje. Za $\beta > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^\beta} \to \infty$, $x \to 0^+$. Po definiciji je

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\beta} = \frac{1}{1-\beta}(1 - \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\beta+1}).$$

Ako je $-\beta + 1 > 0$, onda $\varepsilon^{-\beta+1} \to 0$, $\varepsilon \to 0$, pa integral konvergira i vrednost mu je $\dfrac{1}{1-\beta}$. Ako je $-\beta + 1 < 0$, onda $\varepsilon^{-\beta+1} \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, pa on divergira. Za $\beta = 1$ je $\int\limits_\varepsilon^1 \dfrac{dx}{x} = -\ln\varepsilon \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, pa integral divergira.

Prema tome: $I_\beta : \begin{cases} \text{konvergira} & \text{za} \quad \beta < 1 \\ \text{divergira} & \text{za} \quad \beta \geq 1 \end{cases}$. Δ

Definicija 23.3. *Neka je funkcija $f(x)$ integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom $[a+\varepsilon, T]$, gde je $\varepsilon > 0$, $T > 0$ i $a + \varepsilon < T < \infty$. Tada je po definiciji*

$$\int\limits_{(a,\infty)} f(x)\,dx = \Big(\int\limits_{(a,c)} f(x)\,dx,\ \int\limits_{(c,\infty)} f(x)\,dx \Big),\ c \in (a,\infty),$$

pri čemu, da bi **nesvojstveni integral treće (III) vrste** *na levoj strani gornje jednakosti* **konvergirao** *moraju nesvojstveni integrali na desnoj strani (respektivno, druge i prve vrste) svaki zasebno konvergirati. U tom slučaju pišemo da je*

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^\infty f(x)\,dx.$$

Slično se definišu i ostali slučajevi nesvojstvenog integrala treće vrste, pa same definicije izostavljamo.

Osnovne osobine nesvojstvenog integrala

Osnovne osobine nesvojstvenog integrala pokazaćemo samo za integrale prve vrste. One se analogno mogu formulisati i dokazati i za nesvojstvene integrale druge i treće vrste.

Teorema 23.1. *Nesvojstveni integral $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ konvergira ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $T_0 > a$, takav da za $T' > T > T_0$ važi*

$$\left| \int\limits_T^{T'} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Dokaz. Prema definiciji nesvojstvenog integrala prve vrste, posmatrajmo osobine funkcije $F(T) = \int_a^T f(x)\,dx$, kada $T \to \infty$. Da bi ova funkcija imala graničnu vrednost kada $T \to \infty$, po Košijevom opštem principu konvergencije, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $T_0 > a$, takav da za sve $T' > T_0$ i $T > T_0$, važi

$$\left| F(T') - F(T) \right| < \varepsilon .$$

Za funkciju $F(T)$ taj uslov se svodi na $\left| \int_T^{T'} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$ korišćenjem osobine aditivnosti običnog određenog integrala.

Teorema 23.2. (linearnost) *Ako nesvojstveni integrali* $\int_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ *i* $\int_{[a,\infty)} g(x)\,dx$ *konvergiraju, tada za svako* $\alpha, \beta \in R$, *važi*

$$\int_a^\infty (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^\infty f(x)\,dx + \beta \int_a^\infty g(x)\,dx .$$

Dokaz sledi direktno iz definicije, pa ga izostavljamo.

U sledeće dve teoreme pokazuje se kako se vrši smena i parcijalna integracija u nesvojstvenom integralu.

Teorema 23..3. *Pretpostavimo da nesvojstveni integrali* $\int_{[a,\infty)} u(x)\,v'(x)\,dx$ *i* $\int_{[a,\infty)} v(x)\,u'(x)\,dx$ *konvergiraju. Tada važi*

$$\int_a^\infty u(x)\,v'(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} u(T)\,v(T) - u(a)\,v(a) - \int_a^\infty v(x)\,u'(x)\,dx ,$$

ili pisano formalno

$$\int_a^\infty u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^\infty - \int_a^\infty v(x)\,u'(x)\,dx .$$

Dokaz. Po definiciji je

$$\int_a^\infty u(x)\,v'(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_a^T u(x)\,v'(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} (u(x)\,v(x)\Big|_a^T - \int_a^T v(x)\,u'(x)\,dx) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} u(T)\,v(T) - u(a)\,v(a) - \int_a^\infty v(x)\,u'(x)\,dx ,$$

pri čemu $\lim_{T\to\infty} u(T)\,v(T)$ mora postojati zbog konvergencije oba integrala koji se koriste.

Teorema 23.4. *Neka funkcija* $t = \varphi(x)$ *ima neprekidan prvi izvod različit od nule nad intervalom* $[a,\infty)$ *i neka nesvojstveni integral* $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ *konvergira. Tada važi jednakost*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_A^B f(\phi(t))\phi'(t)\,dt\,,$$

gde je $A = \varphi(a)$ *i* $B = \lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x), \phi(t) = \varphi^{-1}(x)$.

Dokaz. Kako je uočeni nesvojstveni integral konvergentan, to je

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_A^T f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(T)} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_A^B f(\phi(t))\phi'(t)\,dt\,.$$

Ovde je iskorišćeno da je $A = \varphi(a)$ i $B = \lim\limits_{T\to\infty}\varphi(T)$, kao i definicija nesvojstvenog integrala.

Primetimo da ovde može biti i " $B = \infty$ ", dakle, integral ostaje prve vrste. Međutim, B može da bude i konačan broj, i u tom slučaju integral ili postaje integral druge vrste ili postaje običan određeni integral.

Primer 23.4. Izračunati $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$.

Rešenje. Ako stavimo da je $\sqrt{x} = t$ dobijamo, $A = 0$ i $B = \infty$, pa je

$I = 2\int\limits_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$. Ako izvršimo parcijalnu integraciju

($u(t) = t, du(t) = dt, dv(t) = \frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2}, v(t) = \int \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{-1}{1+t^2}$), dobija se

$$I = \frac{-t}{1+t^2}\Bigg|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\,\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Primetimo da ovde $u(t)v(t) \to 0$, kada $t \to \infty$ kao i da integral na desnoj strani prethodnog obrasca konvergira, pa su uslovi Teoreme 23.2 ispunjeni. Δ

Kriterijumi konvergencije nesvojstvenog integrala

Kako se u većini slučajeva nesvojstveni integral ne može izračunati, to se konvergencija (divergencija) integrala mora ispitati na osnovu nekih osobina podintegralne funkcije. Dovoljni uslovi, koji iz osobina podintegralne funkcije, daju zaključak o konvergenciji nesvojstvenog integrala nazivaju se **kriterijumi konvergencije**. Navešćemo neke od njih i to samo za slučaj kada je podintegralna funkcija $f(x)$ stalnog znaka za $x \geq x_0$. Najpogodniji takav kriterijum je **uporedni kriterijum**.

Teorema 23.5. *Neka je* $0 \leq f(x) \leq M\, g(x)$ za $x \geq a, M > 0$. *Ako*

(1) $\int\limits_{[a,\infty)} g(x)\,dx$

konvergira, onda konvergira i integral

(2) $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$,

i važi da je

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \leq M \int_a^\infty g(x)\,dx .$$

Obrnuto, ako je $0 \leq m\, g(x) \leq f(x)$ za $x \geq a, m > 0$ *i integral* (1) *divergira, tada i integral* (2) *divergira.*

Dokaz.

$$\int_a^\infty g(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_a^T g(x)\,dx \quad \text{i} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_a^T f(x)\,dx .$$

Na osnovu osobina određenog integrala iz $0 \leq f(x) \leq M\, g(x)$ za $x \geq a$ i $M > 0$ sledi

$$0 \leq \int_a^T f(x)\,dx \leq M \int_a^T g(x)\,dx .$$

Pored toga, kako je integral (1) konvergentan to postoji realan broj k, takav da je

$$\lim_{T\to\infty} \int_a^T g(x)\,dx = k ,$$

pa je za svako T zadovoljena nejednakost

(3) $0 \leq \int_a^T f(x)\,dx \leq M\,k$.

Funkcija $f(x)$ je nenegativna pa $\int_a^T f(x)\,dx$ monotono ne opada sa T, a zbog (3) funkcija $\int_a^T f(x)\,dx$ je ograničena. Na osnovu principa o monotonim funkcijama sledi da $\int_a^T f(x)\,dx$ konvergira kada $T \to \infty$. Na osnovu osobina granične vrednosti sledi nejednakost

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \leq M \int_a^\infty g(x)\,dx .$$

Obrnuto tvrđenje sledi iz

$$\int_a^T f(x)\,dx \geq m\int_a^T g(x)\,dx \to \infty\text{, kada } T \to \infty.$$

Kriterijum konvergencije iz prethodne teoreme može se dati i u drugom obliku pogodnijem za upotrebu:

Teorema 23.6. *Neka je* $f(x) > 0$ i $g(x) > 0$ i $f(x) \approx g(x)$, kada $x \to \infty$, *tj.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Tada nesvojstveni integrali (1) *i* (2) *istovremeno konvergiraju ili divergiraju.*

Dokaz. Dokaz sledi iz činjenice da je

$$g(x)(1-\varepsilon) \leq f(x) \leq g(x)(1+\varepsilon), \varepsilon > 0,$$

tj. važe uslovi Teoreme 23.5, sa $M = 1 + \varepsilon$, odnosno $m = 1 - \varepsilon$.

Napomena 23.2. Analogne teoreme možemo formulisati i za nesvojstveni integral druge vrste.

Primer 23.5. Ispitati konvergenciju integrala prve vrste $I_\alpha = \int_{[a,\infty)} \frac{dx}{x\ln^\alpha x}$, $a > 1$.

Rešenje. Ako stavimo $\ln x = t$ dobijamo $I_\alpha = \int_{[\ln a,\infty)} \frac{dt}{t^\alpha}$. Taj integral konvergira prema Primeru 23.1 za $\alpha > 1$, a divergira za $\alpha \leq 1$. Primetimo da je uvedena smena, prema Teoremi 23.4, korektna samo za $\alpha > 1$. Δ

Neke funkcije definisane nesvojstvenim integralom

Jedna od najčešće korišćenih neelementarnih funkcija u analizi, matematici i uopšte u primenama je Ojlerova **gama funkcija**

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,$$

definisana za one $x \in R$ za koje nesvojstveni integral $\int_{(0,\infty)} e^{-t}t^{x-1}dt$ konvergira.

Nesvojstveni integral kojim se definiše $\Gamma(x)$ je treće vrste za $x < 1$, jer je $e^{-t}t^{x-1} \approx t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ kada $t \to 0$. Zato ćemo integral $\int_{(0,\infty)} e^{-t}t^{x-1}dt$ prikazati kao

$$(I_1, I_2) = \Big(\int_{(0,a]} e^{-t}t^{x-1}dt,\ \int_{[a,\infty)} e^{-t}t^{x-1}dt\Big),\ 0 < a < \infty.$$

Nesvojstveni integral $\int\limits_{(0,a]} \frac{dt}{t^{1-x}}$, prema Primeru 23.1, konvergira za $1 - x < 1$, tj. za $x > 0$, pa na osnovu Teoreme 23.6, konvergira $\int\limits_{(0,a]} e^{-t} t^{x-1} dt$ za $x > 0$, pa je I_1 definisan za $x > 0$.

Dokažimo da je I_2 definisan za svako $x > 0$. Kako je $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{t}{2}} t^{x-1} = 0$ za svako x (što se može dobiti, na primer, koristeći Lopitalovo pravilo), to je $e^{-\frac{t}{2}} t^{x-1} \le M$ za $t > a$ i svako fiksno x. Dakle, za podintegralnu funkciju važi $e^{-t} t^{x-1} \le M e^{-\frac{t}{2}}$, za $t > a$ i svako fiksirano x. Pored toga $\int\limits_a^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt = 2e^{-\frac{a}{2}}$, tj. integral $\int\limits_{[a,\infty)} e^{-\frac{t}{2}} dt$ konvergira, pa na osnovu Teoreme 23.5 konvergira i $\int\limits_{[a,\infty)} e^{-t} t^{x-1} dt$, pa je I_2 definisan za $x > 0$. Zaključuje se da integral konvergira za $x > 0$, tj. da je njime gama funkcija definisana za $x > 0$.

Funkcionalna jednačina za gama funkciju. Jedna od osnovnih karakteristika funkcije $\Gamma(x)$ jeste da ona zadovoljava funkcionalnu jednačinu

(4) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $x > 0$.

Da bismo dokazali poslednju jednačinu izvršimo parcijalnu integraciju u izrazu za $\Gamma(x)$, sa $x+1$ umesto x. To daje

$$\Gamma(x+1) = -e^{-t} t^x \Big|_0^\infty + x\int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x),$$

što je i trebalo pokazati.

Primetimo da se može pokazati da je $\Gamma(x)$ jedino rešenje jednačine (4), kao što je, na primer, funkcija e^x jedino rešenje funkcionalne jednačine $f(x+y) = f(x)f(y)$ (sve naravno do na konstantan faktor).

Jednačina (4) pokazuje i smisao uvođenja gama funkcije. Naime ako stavimo redom $x = n, n-1, \ldots, 2, 1$ i imamo u vidu da je $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t} dt = 1$, dobija se da je $\Gamma(n+1) = n!$. Gama funkcija, dakle, proširuje funkciju $n!$ na skup pozitivnih realnih brojeva.

Beta funcija definisana je sa

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx,$$

za one vrednosti a i b za koje nesvojstveni integral $\int\limits_{(0,1)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ konvergira.

Pokazuje se da nesvojstveni integral $\int\limits_{(0,1)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ konvergira za $a>0$ i $b>0$. Dakle, beta funkcija je definisana za $a>0$ i $b>0$. Beta funkcija je povezana sa gama funkcijom na sledeći način

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Apsolutna konvergencija nesvojstvenog integraia

Definiciju, kao i osnovne osobine apsolutne konvergencije daćemo za nesvojstveni integral prve vrste. Na isti način se to može uraditi i za nesvojstveni integral druge i treće vrste.

Definicija 23.4. *Nesvojstveni integral prve vrste* $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ **konvergira apsolutno** *ako* $\int\limits_{[a,\infty)} |f(x)|\,dx$ *konvergira. Nesvojstveni integral koji je konvergentan, ali i ne apsolutno konvergentan,* **konvergira uslovno.**

Značaj pojma apsolutne konvergencije vidi se u sledećoj teoremi.

Teorema 23.7. *Svaki apsolutno konvergentan integral je i konvergentan (u običnom smislu). Obrnuto ne mora da važi.*

Dokaz. Kako je $0 \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)|$, to na osnovu Teoreme 23.5 i pretpostavke teoreme, integral $\int\limits_{[a,\infty)} (f(x)+|f(x)|)\,dx$ konvergira. Stoga mora i $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ konvergirati (u protivnom u izrazu $\lim\limits_{T\to\infty}\int_a^T f(x)\,dx =$ $= \lim\limits_{T\to\infty}\int_a^T (f(x)+|f(x)|)\,dx - \lim\limits_{T\to\infty}\int_a^T |f(x)|\,dx$ desna strana bi imala smisla, a leva ne).

Da obrnuto ne mora da važi vidi se iz sledećeg primera.

Primer 23.6. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju integrala

$$I = \int_{[a,\infty)} \frac{\sin x}{x}\,dx,\ a > 0\,.$$

Rešenje. Parcijalna integracija daje $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}dx = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_a^\infty - \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$. Kako je $|\cos x| \le 1$ to integral na desnoj strani konvergira na osnovu Teoreme 23.5. i Primera 23.2. Pored toga je $\left.\frac{\cos x}{x}\right|_a^\infty = \frac{\cos a}{a}$ pa dati integral konvergira.

Međutim, za svako $k \in N$, je

$$(5)\quad \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \ge \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi}dx = \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{k\pi}.$$

Kako za svako T postoji $n \in N$, takvo da je $(n-1)\pi \le T \le n\pi$, to iz (5) sledi za $(m-1)\pi > a$,

$$\int_a^T \frac{|\sin x|}{x}dx \ge \sum_{k=m}^{n-1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi}dx \ge \frac{2}{\pi}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Ako, $n \to \infty$, odakle i $T \to \infty$, to zbog divergencije harmonijskog niza sa opštim članom $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ sledi

$$\int_a^T \frac{|\sin x|}{x}dx \to \infty,\ T \to \infty\,.$$

Dakle, dati nesvojstveni integral ne konvergira apsolutno. Δ

ŠESTA GLAVA

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

24. OPŠTI POJMOVI, DEFINICIJE I MODELI

Problemi matematike, fizike, tehnike, astronomije i drugih nauka mogu se često matematički izraziti pomoću jednačina u kojima su sadržane veze između nepoznatih funkcija i njenih izvoda. Takve se jednačine zovu diferencijalne jednačine.

Jednačina koja sadrži izvode jedne nepoznate funkcije jedne ili više promenljivih, pri čemu je bar jedan izvod nepoznate funkcije reda $n \in N$, naziva se **diferencijalna jednačina**; na primer:

a) $y' = ky, y = y(x),$ k je konstanta **b)** $y'' - 2xy' + 2y = \sin x\,,\ y = y(x)$

c) $(x+y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + z\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial u}{\partial z} + u = x + y + z\,,\ u = u(x, y, z)\ .$

Primetimo da je ovo samo okvirna indikacija čitaocu o čemu je reč u ovoj knjizi a ne formalna definicija. Jer, na primer, jednačine

$$y' + y\int_a^x t^2 y\, dt = 0, y = y(x),$$

$$y'(x) + \Delta\, y(x) = 0, \quad \text{gde je } \Delta\, y(x) = y(x+1) - y(x)$$

iako sadrže prvi izvod obično se ne smatraju diferencijalnim jednačinama u gornjem smislu. Naime, prva sdarži nepoznatu funkciju i pod znakom integrala, pa bi to bila **integro – diferencijalna jednačina**, a druga sadrži diferencni operator Δ pa bi to bila **diferencno – diferencijalna jednačina.**

Ako nepoznata funkcija zavisi samo od jedne nezavisne promenljive, pa se javljaju samo obični izvodi , onda se takva diferencijalna jednačina naziva **obična, a** ako nepoznata funkcija zavisi od više promenljivih pa se javljaju njeni parcijalni izvodi, onda se takva diferencijalna jednačina naziva **parcijalna**. Tako su jednačine a) i b) obične a c) parcijalna.

Red jednačine je red najvišeg izvoda nepoznate funkcije koji se javlja u datoj jednačini. Tako je diferencijalna jednačina a) obična diferencijalna jednačina prvog reda, b) obična diferencijalna jednačina drugog reda a c) parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

Sistem jednačina, kod kojeg svaka jednačina datog sistema sadrži bar jedan izvod reda $n \in N$ jedne od nepoznatih funkcija jedne ili više promenljivih je **sistem diferencijalnih jednačina**; na primer,

d) $x' = 2x - 3xy, \qquad y' = -2y + 5xy, \quad x = x(t), y = y(t).$

e) $x' = -2xy, \qquad y' = 2xy - 3y, \qquad z' = x - 2y + 3z, \quad x = x(t), y = y(t), z = z(t).$

Ako su nepoznate funkcije u sistemu funkcije jedne promenljive, onda se takav sistem naziva **sistem običnih diferencijalnih jednačina** , a ako nepoznate funkcije zaviste od više promenljivih, onda se takav sistem naziva **sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina**.

U opštem slučaju , koji se izučava, uzima se da su najviši izvodi nepoznatih funkcija u sistemu istog reda (na primer, ako su ti izvodi prvog reda tada je to sistem diferencijalnih jednačina prvog reda, ako su ti izvodi drugog reda tada je to sistem diferencijalnih jednačina drugog reda, itd.). Pored toga u posmatranim sistemima je broj nepoznatih funkcija jednak broju jednačina u sistemu i on je u tom smislu **određen.**

Na primer: sistemi c) i d) su određeni sistemi običnih diferencijalnih jednačina prvog reda , dok se jednačina

f) $t\,x'(t) + t\,y''(t) = t^2 - 1,$

koja sadrži dve nepoznate funkcije $x = x(t)$ i $y = y(t)$, može smatrati kao **neodređen** sistem, jer je broj nepoznatih funkcija ($n = 2$) veći od broja jednačina ($m = 1$).

Napomena 24.1. S obzirom da se u ovoj knjizi proučavaju samo obične diferencijalne jednačine koje sadrže izvode jedne nepoznate funkcije, pri čemu je najviši izvod nepoznate funkcije $n \in N$, u tom smislu smo i dali definiciju obične diferencijalne jednačine.

U ovoj knjizi će se proučavati samo obične diferencijalne jednačine, pa reč "obične" u daljem tekstu izostavljamo. Proučavaćemo diferencijalne jednačine koje sadrže izvod reda n ($n \geq 1$) nepoznate funkcije i sadrže poznate funkcije promenljive i eventualno samu promenljivu. Nezavisno promenljivu obeležavamo sa x (izuzetno sa t, što se čini u mnogim knjigama naročito sa težištem na primeni gde je nezavisno promenljiva vreme), a nepoznatu funkciju sa $y = y(x)$. Dakle, u daljem tekstu (ako nije drugačije rečeno) je $y = y(x)$.

Opšti oblik takve jednačine n-tog reda ($n \geq 1$) je

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 , \tag{24.1}$$

a njen **normalni oblik** je

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{24.2}$$

gde su F i G poznate funkcije.

Funkcija $y = f(x)$, koja je definisana i n-puta diferencijabilna u intervalu (a, b), je **rešenje** jednačine (24.1), odnosno (24.2) ako je za svako $x \in (a, b)$

$$G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0,$$

odnosno

$$f^{(n)}(x) = F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)).$$

Na primer, funkcija $f(x) = \sin x$ je za svako $x \in R$ rešenje diferencijalne jednačine $y'' + y = 0$. Rešenje date jednačine je i funkcija $g(x) = \cos x$, pa je rešenje i funkcija $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$, gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante. Dakle, kao što vidimo, jedna jednačina može imati više rešenja.

Ovde će se, kao i u većini knjiga govoriti o **"implicitnim rešenjima"**, tj. rešenje je u implicitnom obliku dato nekom vezom $g(x, y) = 0$, gde je g funkcija od dve promenljive. Na primer, $x^2 + y^2 = r^2$ je "implicitno rešenje" jednačine $x + yy' = 0$ što je lako proveriti diferenciranjem. Pri upotrebi tog termina smatramo da $g(x, y) = 0$ definiše u nekom intervalu bar jednu funkciju $y = f(x)$ koja je rešenje posmatrane jednačine u smislu napred date definicije rešenja. Na primer, iz $g(x, y) = 0$ sledi da postoji funkcija $y = f(x)$ za koju je $g(x, f(x)) = 0$ i koja je rešenje posmatrane diferencijalne jednačine ako funkcija $g(x, y)$ zadovoljava uslove teoreme o implicitnim funkcijama (što, međutim, treba proveriti u svakom konkretnom slučaju).

Međutim, izuzev za relativno jednostavne klase jednačina, obično se ne traže i ne proučavaju sva rešenja nego samo ona koja zadovoljavaju neke dopunske uslove. Dva su osnovna tipa problema koji se proučavaju: početni (Košijev) i granični.

Početni problem se sastoji u tome da se nađe ono rešenje jednačine (24.1), odnosno (24.2), koje zadovoljava **početni uslov**:

$$y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \tag{24.3}$$

gde je x_0 ma koja tačka iz posmatranog intervala, a $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ su proizvoljni dati realni brojevi. Na primer, za $n = 1$ početni uslov se svodi na $y(x_0) = y_0$, pa treba naći ono rešenje jednačine $y' = F(x, y)$ koje prolazi kroz datu tačku (x_0, y_0).

Granični problemi su obično komplikovaniji teorijski, a koriste se za drugačije primene. Kao primer, navodimo ovde granični problem drugog reda: Naći ono rešenje $y = y(x)$ jednačine $y'' = F(x, y, y')$ nad intervalom $[a, b]$ koje zadovoljava granični uslov $y(a) = A$ i $y(b) = B$, gde su a i b krajnje tačke posmatranog intervala, a A i B su dati realni brojevi.

Modeli

Diferencijalne jednačine opisuju najraznovrsnije (prirodne) pojave i stoga se danas pimenjuju u praktično svim oblastima nauke i tehnike. Tako jednačina

a) $y' = ky$, $y = y(x)$, k je proizvoljna konstanta predstavlja **Maltusov[1] zakon rasta populacije,**

b) $y'' - 2xy' + 2py = x^2$, $y = y(x)$, p je proizvoljna konstanta je **Ermitova[2] jednačina** čija su rešenja **talasne funkcije** kvantne mehanike,

c) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u = (x,t)$ je **jednodimenzionalna jednačina provođenja toplote**

d) $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0$ (L je dužina klatna, g gravitaciona konstanta, θ uglovno udaljenje od ravnotežnog položaja) predstavlja **jednačinu matematičkog klatna.**

Razlog za mogućnost tako široke upotrebe diferencijalnih jednačina leži u činjenici da izvod $\dfrac{dy}{dx}$ predstavlja veličinu promene funkcije $y(x)$ u zavisnosti od x, a prirodni zakoni se obično izražavaju nekom vezom između posmatrane veličine i njene promene.

Jednačine a) - d) predstavljaju matematičke modele pojava koje opisuju. Pri korišćenju modela uvek se moraju jasno razlikovati stvarne pojave od modela jer informacije koje daje matematički model ne moraju potpuno odgovarati toku pojave. Odstupanja, dakle, zavise od izbora modela, pogotovo što uopšteno govoreći, nema jednoznačne korespondencije između stvarnosti i modela jer jednoj pojavi može odgovarati više modela i obrnuto, jedan model može opisivati više pojava - čak disparatnih sa gledišta prirodnih nauka. Da bi se napravio matematički model pojave polazi se od njene aproksimacije koja se sastoji u zanemarivanju faktora koji neznatno utiču na pojavu. Zatim se bitni faktori matematički povežu na osnovu odgovarajućih naučnih zakona. Ako matematički model ima rešenja, njihovim upoređivanjem sa

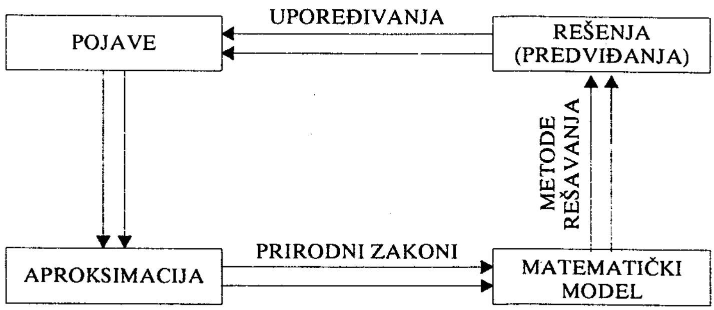
---

[1] T. R. Malthus (1766-1834), engleski sveštenik i ekonomist

[2] C. Hermite (1822-1901), francuski matematičar

stvarnom pojavom koju on treba da opisuje, proveriće se celishodnost ("tačnost") modela. Ta procedura lepo je ilustrovana na slici 24.1. [6].

Prethodne opšte napomene ilustrovaćemo na jednačini a) koja predstavlja model rasta populacije. Pri tom pod populacijom se može podrazumevati broj jedinki neke životinjske vrste ali i broj bakterija u opitnoj epruveti, broj ćelija nekog ljudskog organa ili količina radioaktivne materije.



Slika 24.1

Neka je $N(t)$ broj jedinki posmatrane populacije u trenutku t. Kako je $N(t)$ uvek ceo broj potrebno je izvršiti takvu aproksimaciju da bi se $N(t)$ moglo smatrati neprekidnom i čak diferencijabilnom. To opravdavamo time što je promena od $N(t)$ u malom vremenskom periodu mala u poređenju sa $N(t)$. Ako je populacija izolovana (tj.nema emigracije i imigracije) smatraćemo, zanemarujući druge moguće faktore, da je veličina promene populacije srazmerna broju jedinki; tako dobijamo matematički model a) $N'(t) = k\,\mathrm{N(t)}$, gde je k konstanta.

Ako je N_0 broj jedinki u trenutku t_0, tada je $N(t)$ rešenje početnog problema

$$N'(t) = k\,N(t)\ ,\ N(t_0) = N_0. \tag{24.4}$$

Rešimo početni problem (25.1).

$$\frac{dN}{dt} = kN \Rightarrow \frac{dN}{N} = kdt \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int kdt + c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln N = kt + c \Rightarrow N(t) = e^{kt+c} \Rightarrow N(t) = ce^{kt}.$$

Za $t = t_0$ dobija se da je $N(t_0) = ce^{kt_0}$, tj. $N_0 = ce^{kt_0}$. Odavde je $c = N_0 e^{-kt_0}$, te je $N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}$ rešenje početnog problema (24.4).

Napomena 24.2. Iako je u samoj definiciji neodređenog integrala sadržana konstanta, prilikom rešavanja diferencijalnih jednačina ona se uvek namerno ističe da se vidi da rešenje zavisi od konstante.

Koliko je model "tačan"? Upoređivanje sa eksperimentalnim podacima pokazuje da se kod nekih pojava on vrlo dobro slaže sa opažanjima (npr. rast populacije poljske voluharice (vrsta glodara), radioaktivni raspad itd.). Što se tiče ljudske populacije, podaci dobijeni iz rešenja upoređeni sa podacima o broju stanovništva za period 1700 - 1961. pokazuju izvrsno slaganje. Za budućnost, međutim, ovo rešenje predviđa 200000 milijardi ljudi već u 2510. godini, tj. svega oko $1\,m^2$ površine zemlje (računajući i vodene površine) došlo bi na jednog stanovnika, što je očigledno nemoguće. Dat je poboljšani model - tzv. logistički zakon rasta populacije koji daje realniju procenu porasta ljudske populacije kada $t \to \infty$. Po njemu $N(t)$ teži određenoj graničnoj vrednosti kada $t \to \infty$. U slučaju ljudske populacije $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = 9{,}86 \cdot 10^9$.

Početni problem (24.4) se odlikuje sa sledeće tri osobine: njegovo rešenje postoji, ono je jedinstveno i ono neprekidno zavisi od veličina sadržanih u početnom uslovu. Jasno je da i priroda pojave koja se posmatra nameće takve zahteve: u datom trenutku $N(t)$ ima jednu određenu vrednost - odatle zahtev za egzistencijom i jedinstvenosti rešenja. Što se trećeg zahteva tiče, primetimo da se broj N_0 u većini pojava ne može tačno odrediti (npr. broj ljudi na zemlji u trenutku t_0) već u najboljem slučaju sa malim odstupanjem. Tako se, dakle, N_0 u stvarnoj pojavi i N_0 u početnom uslovu razlikuju; stoga zahtevamo da male promene početnog uslova povlače sa sobom male promene rešenja.

I u opštem slučaju kao i u gornjem primeru, obično se zahteva da matematički model neke pojave ima ove tri osobine:

1. rešenje početnog problema postoji,
2. ono je jedinstveno,
3. ono neprekidno zavisi od početnih uslova.

J.S.Hadamard

Ako su ti zahtevi ispunjeni kaže se da je **problem korektno postavljen** u smislu Adamara[1]. Napominjemo da u poslednje vreme sve više problema vezanih za parcijalne diferencijalne jednačine nisu korektno postavljeni (obično zahtev 3 nije ispunjen). Pokazaćemo da su ti zahtevi ispunjeni za široke klase diferencijalnih jednačina.
Korisno je već ovde upozoriti da su klase jednačina koje se mogu rešiti veoma uske. Stoga se savremena teorija

[1] J.S.Hadamard (1865 - 1963), francuski matematičar

diferencijalnih jednačina sastoji ne samo u nalaženju rešenja već u proučavanju njihovih osobina za koje kao izvor informacije služi posmatrana jednačina; takvo se proučavanje naziva **kvalitativna analiza**.

Tipovi diferencijalnih jednačina čija se rešenja mogu izraziti pomoću konačnog broja elementarnih funkcija i njihovih integrala su veoma malobrojni. To naročito važi za jednačine drugog i višeg reda gde, isključujući linearne jednačine čiji homogeni deo je sa konstantnim koeficijentima, postoje samo izolovani primeri koji se mogu rešiti elementarno u gornjem smislu. Istorijski, njihov značaj je veliki - sva prva saznanja o diferencijalnim jednačinama su i stečena proučavanjem takvih tipova jednačina tokom skoro dva veka počevši od Njutna i Lajbnica. Kako je ključna tačka postupka njihovog rešavanja bila uvek integracija kao operacija inverzna izvodu prisutnom u skoro svakoj diferencijalnoj jednačini, takvi tipovi su nazvani **integrabilni**, postupak rešavanja nazvan je **integracija**, a samo rešenje **integral diferencijalne jednačine**. Ta se terminologija zadržala i do danas.

Iako malobrojni, odavno proučeni i stoga ne od posebnog savremenog interesa, integrabilni tipovi predstavljaju važan aparat u različitim naukama, jer su pogodni za modeliranje mnogobrojnih pojava.

SEDMA GLAVA

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

25. OPŠTI POJMOVI, TEOREMA O EGZISTENCIJI

Opšti oblik diferencijalnih jednačina prvog reda je

$$G(x, y, y') = 0\,, \tag{25.1}$$

a normalni oblik

$$y' = F(x, y)\,, \tag{25.2}$$

gde je x promenljiva, y nepoznata funkcija od x, a y' njen izvod, a G i F su poznate funkcije.

Funkcija $y = f(x)$, koja je definisana i diferencijabilna nad intervalom (a,b) je **rešenje jednačine** (25.1), odnosno (25.2), ako za svako $x \in (a,b)$ važi

$$G(x, f(x), f'(x)) = 0\,,$$

odnosno

$$f'(x) = F(x, f(x))\,.$$

Odgovor na pitanje, pod kojim uslovima jednačina (25.2) ima rešenje, dat je u sledećoj teoremi, koja je poznata kao **teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja diferencijalne jednačine** (25.2) i ona predstavlja fundamentalnu teoremu u teoriji diferencijalnih jednačina prvog reda.

Teorema 25.1. Neka je funkcija $F(x, y)$ neprekidna u zatvorenoj oblasti $G : \begin{cases} a \le x \le b \\ \alpha \le y \le \beta\,, \end{cases}$

i zadovoljava **Lipšicov**[1] **uslov** *po y, tj. postoji* $K > 0$, *takvo da je u G*

$$\left|F(x, y_2) - F(x, y_1)\right| \le K\left|y_2 - y_1\right|.$$

R.O.S. Lipschitz

Tada postoji jedno i samo jedno rešenje početnog problema

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0,\ (x_0, y_0) \in G\,, \end{cases}$$

---

[1] R. O. S. Lipschitz (1832-1903), nemački matematičar

koje je definisano nad intervalom $[a', b']$, *gde je*

$$a' = \max\left\{a, x_0 - \frac{\beta - y_0}{M}, x_0 - \frac{y_0 - \alpha}{M}\right\}, b' = \min\left\{b, x_0 + \frac{\beta - y_0}{M}, x_0 + \frac{y_0 - \alpha}{M}\right\},$$

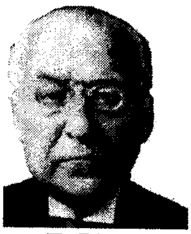
$$M = \sup_{(x,y)\in G} |f(x, y)| > 0.$$

To rešenje $y(x)$ *je dato sa*

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x), \qquad 25.3)$$

gde je niz $\{y_n(x)\}$ *definisan rekurzivno sa*

$$y_0(x) = y_0,\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_{n-1}(t))\,dt,\ n = 1,2,... \qquad (25.4)$$


E. Picard

Niz (25.4) poznat je kao **niz sukcesivnih (uzastopnih) ili Pikarovih**[1] **aproksimacija**. Naime, svaki sledeći član niza $\{y_n(x)\}$ pretstavlja bolju aproksimaciju rešenja od prethodnog. Metod dokaza teoreme 25.1. zasniva se na korišćenju niza (25.4) i naziva se metod sukcesivnih aproksimacija (vidi [14]).

Neprekidnost funkcije $F(x, y)$ nije dovoljna za konvergenciju niza $\{y_n(x)\}$ (ako neprekidna funkcija $F(x, y)$ zadovoljava Lipšicov uslov onda je to dovoljan uslov za konvergenciju niza $\{y_n(x)\}$). Štaviše, ni dodatna pretpostavka da je rešenje jedinstveno ne mora da obezbedi konvergenciju. S druge strane, ako niz sukcesivnih aproksimacija konvergira ka nekom rešenju početnog problema, ono ne mora biti jedinstveno.

U praktičnim problemima se obično umesto Lipšicovog uslova traži da je u posmatranoj oblasti G ispunjen uslov $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \le M$, koji je oštriji, ali je najčešće ispunjen u primerima iz prakse.

Primer 25.1. Rešiti početni problem $y' = x + y$, $y(0) = 1$.

Rešenje: Iz $y' = x + y$ sledi da je $dy = (x + y)dx$, tj. $\int_1^{y(x)} du = \int_0^x (t + y(t))dt$, odnosno

$$y(x) = 1 + \int_0^x (t + y(t))\,dt.$$

Formirajmo niz sukcesivnih aproksimacija $\{y_n(x)\}$:

[1] E.Picard (1856-1941), francuski matematičar

$$y_0(x) = y_0 = 1,\ y_1(x) = 1 + \int_0^x (t + y_0(t))\,dt = 1 + \int_0^x (t+1)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (t + y_1(t))\,dt = 1 + \int_0^x (1 + 2t + \frac{t^2}{2})\,dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3!} \ldots\ldots$$

Može se dokazati, koristeći princip matematičke indukcije, da je

$$y_n(x) = 1 + x + 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},\ x \in R.$$

Kako je za svako x, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$, to iz

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}e^{\theta x} = 0$, $x \in R$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, $x \in R$, sledi da je za svako $x \in R$

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(2\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!} - (x+1) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) = 2e^x - x - 1,$$

tj. prema (25.3) rešenje početnog problema je funkcija $y(x) = 2e^x - x - 1$. Δ

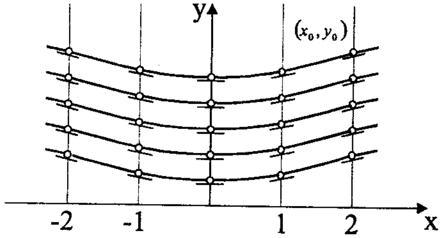
Napomenimo da su vrlo retki primeri u kojima se $y_n(x)$, odnosno $y(x)$ mogu naći kao u prethodnom primeru. Ova metoda se više koristi u teorijske, a manje u praktične svrhe.

Neka je funkcija $F(x, y)$ definisana i neprekidna u oblasti G i neka je $y = f(x)$ rešenje jednačine (25.2) nad nekim intervalom (a, b). Uređena trojka (x, y, y'), gde je y' u svakoj tački (x, y) određeno jednačinom (25.2) naziva se **linijski element**. Skup svih linijskih elemenata naziva se **polje pravaca**. Prema jednačini (25.2) sledi da tangenta rešenja $y = f(x)$ u svakoj tački (x, y) njegovog grafika ima nagib (koeficijent pravca) y' dat sa $F(x, y)$. Za krivu sa takvom osobinom kaže se da je **saglasna sa poljem pravaca** (definisanim pomoću (25.2)). Skup svih krivih saglasnih sa poljem pravaca naziva se **opšte rešenje jednačine** (25.2). Ona kriva koja prolazi kroz neku tačku (x_0, y_0), tj. koja zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$ naziva se **partikularno rešenje**. Prema tome, rešiti jednačinu (25.1) geometrijski znači naći krive saglasne sa poljem pravaca.

Primer 25.2. Naći rešenje $y = y(x)$ diferencijalne jednačine $y' = x$.

Rešenje. Ovde u svim tačkama sa istom apscisom tangente imaju isti nagib

x:	-2,-1,0,1,2,...
y:	sve vrednosti (proizvoljno)
y':	-2,-1,0,1,2,...



Slika 25.1

Ako linijske elemente predstavimo, kao što je uobičajeno, tačkama (x, y) kroz koje postavimo odsečak prave čiji je koeficijent pravca $y' = F(x, y)$, dobijamo grafičku predstavu o polju pravaca pa možemo približno konstruisati opšte, odnosno partikularno, rešenje kao na slici 25.1.

Lako je, međutim, zaključiti da su sva rešenja (tj. opšte rešenje u smislu gornje definicije) data sa $y(x) = \frac{x^2}{2} + c$, gde je c konstanta, a partikularno koje prolazi kroz tačku (x_0, y_0) sa $y(x) = \frac{x^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2}$. Δ

Pokazaće se kasnije, da je pod određenim uslovima situacija ista kod jednačina prvog reda čija se rešenja mogu eksplicitno naći.

U većini slučajeva opšte rešenje zavisi od jedne proizvoljne konstante, a određivanjem te konstante iz početnog uslova nalazi se odgovarajuće partikularno rešenje

Ojlerove poligonalne linije

Geometrijska interpretacija iz prethodnog odeljka može poslužiti za formiranje približnih rešenja jednačine (25.2) u vidu **poligonalnih linija** koje se konstruišu na sledeći način: podelimo posmatrani konačan interval (a, b) na n delova podeonim tačkama $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ i postavimo kroz početnu tačku (x_0, y_0) pravu L_0 čiji je nagib dat sa $F(x_0, y_0)$, tako dobijamo

$$L_0: \quad y = y_0 + (x - x_0)F(x_0, y_0).$$

Ako je x_1 dosta blizu x_0 za očekivati je da u tački x_1 ordinata prave L_0 data sa $y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)F(x_0, y_0)$ neće mnogo odstupati od ordinate rešenja u toj tački. Postavimo zatim pravu L_1 kroz tačku (x_1, y_1) sa nagibom $F(x_1, y_1)$, tako dobijamo $L_1: \quad y = y_1 + (x - x_1)F(x_1, y_1)$. Posle k takvih koraka dobićemo tzv. **Ojlerovu poligonalnu liniju**

$$L_k: \quad y = y_k + (x - x_k)F(x_k, y_k), \qquad x_k \le x \le x_{k+1}$$

gde se y_{k+1} izračunava iz obrasca

$$y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k)F(x_k, y_k), \; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{25.5}$$

Tako smo diferencijalnu jednačinu (25.2) aproksimirali **diferencnom jednačinom**

(25.5), a rešenja od (25.2) poligonalnim linijama. Taj postupak je od značaja za numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina.

26. NEKE KLASE INTEGRABILNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA

Jednačina koja razdvaja promenljive

To je jednačina oblika (25.2), čija se desna strana može napisati kao proizvod dve funkcije, od kojih jedna zavisi samo od x, a druga samo od y, tj.

$$y' = f(x)\,g(y). \tag{26.1}$$

Jednačina koja razdvaja promenljive i pored svog vrlo specijalnog oblika predstavlja model za raznovrsne važne probleme matematike, tehnike, fizike, itd. Egzistencija, jednoznačnost i konstrukcija rešenja date su sledećom teoremom.

Teorema 26.1. *Ako je $f(x)$ neprekidna nad intervalom $a < x < b$, a $g(y)$ neprekidna i različita od nule nad intervalom $\alpha < y < \beta$, tada postoji jedinstveno rešenje jednačine* (26.1) *koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (\alpha,\beta)$ i definisano je u nekoj okolini od x_0. To rešenje dato je obrascem*

$$y(x) = G^{-1}\Big(G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\Big), \tag{26.2}$$

gde je $G(u)$ primitivna funkcija funkcije $\dfrac{1}{g(u)}$ nad intervalom (α,β), a G^{-1} je njena inverzna funkcija.

Dokaz. Neka je $f(x)$ rešenje jednačine (26.1) u nekoj okolini od x_0, tj.

$$y'(x) = f(x)\,g(y(x)).$$

Kako je $g(y) \neq 0$, to je $\dfrac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$ ili $\dfrac{dy(x)}{g(y(x))} = f(x)\,dx$. Integracijom nad intervalom $[x_0, x]$ za $x > 0$, odnosno nad intervalom $[x, x_0]$ za $x < 0$, dobija se posle smene $u = y(x)$ i zbog $y(x_0) = y_0$,

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{g(u)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Odatle sledi

$$G(y(x)) = G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt. \tag{26.3}$$

Kako je $g(u) \neq 0$ i $g(u)$ neprekidna funkcija to je G strogo monotona nad (α, β) i G^{-1} postoji, pa je (26.3) ekvivalentno sa (26.2). Sledi, dakle, da ako pretpostavimo da postoji rešenje posmatrane jednačine, koje zadovoljava dati početni uslov, ono se jednoznačno može izraziti u obliku (26.2). Time je u stvari opisan postupak nalaženja rešenja, koji se sastoji od jedne integracije i nalaženja jedne inverzne funkcije.

Obrnuto, svaka funkcija data sa (26.2) ili ekvivalentno sa (26.3) zadovoljava jednačinu (26.1) što se neposredno dobija diferenciranjem obe strane obrasca (26.3):

$$G'(y(x))\, y'(x) = f(x),$$

odakle, zbog $G'(u) = \dfrac{1}{g(u)}$, sledi (26.1). Pri tom treba pokazati da je $y(x)$ definisano u nekoj okolini od x_0. No, definicioni skup funkcije G^{-1} je u stvari skup vrednosti $G(u)$, $u \in (\alpha, \beta)$. Sledi da je rešenje $y(x)$ definisano za svako x za koje je

$$\lim_{y\to\alpha+} G(y) < G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt < \lim_{y\to\beta-} G(y), \tag{26.4}$$

ako je $G(u)$ monotono rastuća funkcija (za $g(u) > 0$), odnosno za svako x za koje je

$$\lim_{y\to\beta-} G(y) < G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt < \lim_{y\to\alpha+} G(y), \tag{26.5}$$

ako je $G(u)$ monotono opadajuća funkcija (za $g(u) < 0$).

Postavlja se pitanje u vezi egzistencije i jednoznačnosti rešenja ako je funkcija $g(y)$ neprekidna nad intervalom (α, β), pri čemu $g(y) \neq 0$ ne važi nad datim intervalom. Tada se postupa na sledeći način.

1) Ako je $g(y_0) \neq 0$, tada zbog neprekidnosti funkcije $g(y)$, postoji interval $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$ koji sadrži tačku y_0 sa osobinom da je $g(y)\, g(y_0) > 0$ za svako $y \in (\alpha_1, \beta_1)$. Zaključak Teoreme 26.1. ostaje u važnosti, samo se sada interval (α, β) zamenjuje sa intervalom (α_1, β_1).

2) Ako je $g(y_0) = 0$, tada je sigurno rešenje početnog problema (26.1) funkcija $y(x) = y_0$, ali da to rešenje ne mora da bude jednoznačno pokazuje sledeći primer.

Primer 26.1. Rešiti početni problem $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $y(1) = 0$.

Rešenje. Kao što je rečeno, $y(x) = 0$ je jedno rešenje datog početnog problema. Pored toga iz $\dfrac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$, sledi zbog konvergencije nesvojstvenog integrala $\displaystyle\int_{(0,\, y(x))} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}}$

za $y(x) > 0$, odnosno $\int\limits_{(y(x),0)} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}}$ za $y(x) < 0$, da je $\int\limits_{0}^{y(x)} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}} = \int\limits_{1}^{x} dt$, odnosno $\sqrt[3]{u}\,\Big|_{0}^{y(x)} = t\,\Big|_{1}^{x}$. Sledi da je $\sqrt[3]{y(x)} = x-1$, odnosno $y(x) = (x-1)^3$, za svako x rešenje početnog problema. Dakle, dati početni problem ima najmanje dva rešenja. Δ

Zaključak je sledeći: rešenje početnog problema uvek postoji, ali ono nije uvek jednoznačno.

Napomena 26.1. Obično, ako se ne vodi računa o pretpostavkama iz teoreme, postupak za rešavanje početnog problema (26.1) se svodi na određivanje "opšteg rešenja", koje zavisi od jedne konstante. Uvrštavanjem početnog uslova određuje se nepoznata konstanta c.

Postupak je sledeći:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + c$$

(iako je konstanta c sadržana u neodređenom integralu, ovde smo je namerno istakli). Obično se smatra da je

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + c \tag{26.6}$$

opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = f(x)\,g(y)$. To je tačno ako su zadovoljene pretpostavke iz Teoreme 26.1. Ako neka pretpostavka, kao na primer, $g(y) \neq 0$ ne važi, tada može da se desi da neko rešenje ne možemo dobiti određivanjem konstante c, kao što je slučaj u sledećem primeru.

Primer 26.2. Naći rešenje diferencijalne jednačine $y' = x(y-1)^2$, koje prolazi kroz tačku (0,1).

Rešenje. Ako bismo hteli da dobijemo "opšte" rešenje, tada bismo dati problem rešavali (formalno) na sledeći način:

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{y-1} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{x^2+2c} \Rightarrow y(x) = 1 - \frac{2}{x^2+2c}.$$

Uzimajući u obzir početni uslov $y(0) = 1$ dobijamo da je $1 = 1 - \frac{2}{2c}$, tj. $0 = \frac{1}{c}$, što je nemoguće. Dakle, ne može se odrediti konstanta c u "opštem" rešenju $y(x) = 1 - \frac{2}{x^2+2c}$, da bismo dobili rešenje koje prolazi kroz tačku (0,1).

Ta situacija je nastupila zbog toga što nesvojstveni integral $\int\limits_{(1,y)} \frac{dy}{(y-1)^2}$ za $y > 1$, odnosno $\int\limits_{(y,1)} \frac{dy}{(y-1)^2}$ za $y < 1$, divergira. Očigledno je da dati problem za rešenje ima funkciju $y(x) = 1$. Δ

Homogena jednačina

To je jedanačina koja se može svesti na oblik

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{26.7}$$

gde je $f(t)$ neprekidna funkcija nad intervalom (a,b). Uvođenjem nove nepoznate funkcije $u(x)$ smenom

$$\frac{y}{x} = u \quad , \quad y' = u + xu',$$

jednačina (26.7) se svodi na jednačinu $u' = \dfrac{f(u) - u}{x}$, a to je jednačina koja razdvaja promenljive.

Ako je $f(u) - u \neq 0$ nad intervalom (a,b), tada se, primenjujući Teoremu 26.1. zaključuje da kroz svaku tačku (x_0, y_0), koja pripada oblasti

$$G: \begin{cases} a < \dfrac{y}{x} < b \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{ili} \quad G: \begin{cases} a < \dfrac{y}{x} < b \\ x < 0 \end{cases},$$

prolazi samo jedno rešenje $y(x) = x\,u(x)$, definisano nad intervalom (26.4) odnosno (26.5), gde je $u(x)$ funkcija data sa

$$\int\limits_{u_0}^{u(x)} \frac{dt}{f(t) - t} = \ln\left|\frac{x}{x_0}\right|, \quad u_0 = \frac{y_0}{x_0}. \tag{26.8}$$

Ako je $f(u) - u = 0$, za neko $u \in (a,b)$ tada:

1) Za slučaj da je $f(u_0) \neq u_0$ $\left(u_0 = \dfrac{y_0}{x_0}\right)$, s obzirom na neprekidnost funkcije $f(u) - u$, postoji interval $(a_1, b_1) \subset (a,b)$ koji sadrži tačku u_0, tako da je $((f(u) - u))\,(f(u_0) - u_0)) > 0$, za svako $u \in (a_1, b_1)$, pa svi zaključci važe nad intervalom (a_1, b_1) intervala $(a\ , b\ )$.

2) Za slučaj da je $f(u) - u = 0$, za svako $u \in (a,b)$, jednačina glasi $y' = \dfrac{y}{x}$, a to je jednačina koja razdaja promenljive.

3) Za slučaj da je $f(u_0) = u_0$ $(u_0 = \frac{y_0}{x_0})$, rešenje datog početnog problema je sigurno funkcija $y(x) = u_0 x$ $\left(y'(x) = u_0 = f(\frac{u_0 x}{x}) = f(u_0) \right)$. Da to rešenje ne mora da bude jedinstveno, pokazuje sledeći primer.

Primer 26.3. Rešiti početni problem $y' = 3\sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$, $y(1) = 0$.

Rešenje. Kako je početni uslov $y(1) = 0$ dat u tački $x_0 = 1$ to problem rešavamo za $x > 0$. Smenom $\frac{y}{x} = u$, $y' = xu' + u$ data jednačina se svodi na $u'x + u = 3\sqrt[3]{u^2} + u$, odnosno zbog konvergencije odgovarajućeg nesvojstvenog integrala dobijamo da je $\int_0^{u(x)} \frac{dz}{3\sqrt[3]{z^2}} = \int_1^x \frac{dt}{t}$, odnosno $\sqrt[3]{z}\,\Big|_0^{u(x)} = \ln t\,\Big|_1^x$, tj. $u(x) = \ln^3 x$. Sledi da je $y(x) = x\ln^3 x$.

Rešenje početnog problema je i funkcija $y(x) = 0$. Dakle, imamo najmanje dva rešenja datog početnog problema. Δ

Napomena 26.2. Opšte rešenje, uz pretpostavku da je $f(u) - u \neq 0$, dato je obrascem

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln cx \quad (u = \frac{y}{x}), \qquad y = y(x), \tag{26.9}$$

a partikularno rešenje dobija se određivanjem konstante c iz početnog uslova $y(x_0) = y_0$. Pri tome se mora voditi računa da integral u (26.9) mora postojati nad posmatranim intervalom, $(u_0, u(x))$, $u(x) > u_0$ $((u(x), u_0)$, $u(x) < u_0)$. U protivnom se može doći do pogrešnog zaključka kao što pokazuje sledeći primer.

Primer 26.4. Rešiti početni problem $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - 1$, $y(1) = -1$.

Rešenje. Smenom $y = xu$, $y' = xu' + u$ data jednačina se svodi na $u'x + u = u^2 + u - 1$ odnosno $u'x = u^2 - 1$. Ako bismo hteli da dobijemo "opšte" rešenje dati problem se rešava na sledeći način:

$$\frac{du}{u^2 - 1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{u^2 - 1} = \int \frac{dx}{x} + \ln c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \ln|x| + \ln c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u-1}{u+1} = cx^2 \Rightarrow u = \frac{cx^2 + 1}{-cx^2 + 1} \Rightarrow y(x) = x\frac{cx^2 + 1}{1 - cx^2}.$$

Uzimajući u obzir početni uslov $y(1) = -1$ dobija se da je $-1 = \frac{c+1}{1-c}$, odnosno da je $c - 1 = c + 1$, što je nemoguće. Dakle, ne može se odrediti konstanta c u "opštem" rešenju $y(x) = x\dfrac{cx^2+1}{1-cx^2}$, da bismo dobili rešenje koje prolazi kroz tačku $(1,-1)$. Ta situacija je nastupila iz razloga što nesvojstveni integral $\int\limits_{(-1,u)} \dfrac{dt}{t^2-1}$ za $u > -1$, odnosno nesvojstveni integral $\int\limits_{(u,-1)} \dfrac{dt}{t^2-1}$ za $u < -1$, divergira. Međutim, prema 3) dati problem ima za rešenje funkciju $y(x) = -x$, jer je $u_0 = -1$. Δ

Primer 26.5. Naći krivu koja prolazi kroz tačku (1,1) sa osobinom da je u svakoj njenoj tački količnik odsečka koji tangenta gradi sa ordinatnom osom i odsečka koji normala gradi sa apscisnom osom jednak količniku apscise i ordinate tačke u kojoj je postavljena tangenta.

Rešenje. Jednačina tangente u tački (x, y) je $Y - y = y'(X - x)$, a jednačina normale je $Y - y = -\dfrac{1}{y'}(X - x)$. Odsečak tangente na y osi je $y - xy'$, a odsečak normale na x osi je $x + yy'$, pa po uslovu zadatka treba da je $\dfrac{y-xy'}{x+yy'} = \dfrac{x}{y}$, odakle je

$y' = \dfrac{y^2-x^2}{2xy} = \dfrac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\dfrac{y}{x}}$. Ovo je homogena diferencijalna jednačina. Uvedimo smenu

$y = xu$, tj. $y' = xu' + u$. Data jednačina postaje $xu' + u = \dfrac{u^2-1}{2u}$, odakle je

$\dfrac{2u}{1+u^2}du = -\dfrac{dx}{x}$. Rešavajući poslednju diferencijalnu jednačinu dobijamo da je

$1 + u^2 = \dfrac{c}{x}$, odnosno $y^2 = cx - x^2$. Uzimajući u obzir početni uslov $y(1) = 1$, dobija se

$1 = c - 1$, odnosno $c = 2$, pa je tražena kriva data sa $y(x) = \sqrt{2x - x^2}$. Δ

Primer 26.6. Pokazati da se diferencijalna jednačina

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{26.10}$$

gde su a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 i c_2 realni brojevi, a $f(t)$ neprekidna funkcija nad intervalom (a, b), može svesti na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive ili na homogenu.

Rešenje:

1) $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$. U tom slučaju smenom $a_1x + b_1y + c_1 = t$ ili $a_2x + b_2y + c_2 = t$ data diferencijalna jednačina se svodi na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.

2) $D \neq 0$. Uvedimo smenu $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$, gde ćemo α i β odrediti iz sistema $a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$ i $a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$ (α i β su jednoznačno određeni, jer je $D \neq 0$). Tada je

$$y' = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\dfrac{Y}{X}}{a_2 + b_2\dfrac{Y}{X}}\right) = g\left(\frac{Y}{X}\right), \qquad X \neq 0,$$

a to je homogena diferencijalna jednačina. Δ

Primer 26.7. Naći rešenje diferencijalne jednačine $y' = (x + y - 1)^2$.

Rešenje. Kako je $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, to uvodimo smenu $x + y - 1 = t$. Iz $x + y - 1 = t$, sledi $y' = t' - 1$. Data jednačina postaje $t' = t^2 + 1$, odakle je $\dfrac{dt}{t^2 + 1} = dx$. Rešavajući poslednju jednačinu dobijamo da je $\operatorname{arctg} t = x + c$, odnosno $t = \operatorname{tg}(x + c)$, tj. $y(x) = 1 - x + \operatorname{tg}(x + c)$. Δ

Primer 26.8. Rešiti početni problem $y' = \dfrac{x - y + 2}{x + y}$, $y(1) = 1$.

Rešenje. Kako je $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ to uvodimo smenu $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$. Iz sistema $\alpha - \beta + 2 = 0$, $\alpha + \beta = 0$ sledi da je $\alpha = -1$ i $\beta = 1$.
Znači da je $x = X - 1$, $y = Y + 1$. Datom smenom jednačina se svodi na

$$Y' = \frac{X - Y}{X + Y} = \frac{1 - \dfrac{Y}{X}}{1 + \dfrac{Y}{X}}.$$

Smenom $Y = Xu$, $Y' = Xu' + u$ data jednačina se svodi na $Xu' + u = \dfrac{1 - u}{1 + u}$, odnosno $Xu' = \dfrac{1 - 2u - u^2}{1 + u}$. Odavde je $-\dfrac{1}{2}\dfrac{-2 - 2u}{1 - 2u - u^2}du = \dfrac{dX}{X}$. Sledi da je

$$1 - 2u - u^2 = \frac{c}{X^2}, \text{ tj. } -(u + 1)^2 + 2 = \frac{c}{X^2}.$$

$$-(u+1)^2+2=\frac{c}{X^2}\Rightarrow (u+1)^2=-\frac{c}{X^2}-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (X+Y)^2=-c+2X^2\Rightarrow (x+y)^2=-c+2(x+1)^2.$$

Uvrštavajući početni uslov $y(1)=1$ dobijamo $4=-c+8 \Leftrightarrow -c=-4 \Leftrightarrow c=4$, pa je data kriva data sa $(x+y)^2=-4+2(x+1)^2$, odnosno

$$y(x)=-x+\sqrt{2(x+1)^2-4}.\ \Delta$$

Linearna jednačina

To je jednačina koja se može svesti na oblik

$$y'+f(x)y=g(x). \tag{26.11}$$

Egzistencija, jedinstvenost i konstrukcija rešenja date su sledećom teoremom.

Teorema 26.2. *Ako su* $f(x)$ *i* $g(x)$ *neprekidne funkcije nad intervalom* (a,b) *tada postoji jedinstveno rešenje jednačine* (26.11) *koje zadovoljava početni uslov* $y(x_0)=y_0$, $x_0\in(a,b)$, $y_0\in R$ *i definisano je nad intervalom* (a,b). *To rešenje dato je obrascem*

$$y(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}f(t)dt}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}e^{\int_{x_0}^{t}f(u)du}g(t)dt\right). \tag{26.12}$$

Dokaz. Prvo, pokazaćemo da je funkcija $y(x)$ definisana obrascem (26.12) rešenje datog početnog problema. Lako se vidi da je $y(x_0)=y_0$. Očigledno je zbog neprekidnosti funkcija $f(x)$ i $g(x)$ nad intervalom (a,b), funkcija $y(x)$ definisana nad intervalom (a,b). Dalje je,

$$y'(x)=-f(x)y(x)+e^{-\int_{x_0}^{x}f(t)dt}\cdot e^{\int_{x_0}^{x}f(t)dt}\cdot g(x),$$

odakle sledi da je $y'(x)+f(x)y(x)=g(x)$, tj. da je $y(x)$ rešenje linearne diferencijalne jednačine (26.11).

Dakle, rešenje datog početnog problema postoji. Dokazaćemo jedinstvenost tog rešenja. Neka je $y(x)$ rešenje početnog problema nad intervalom (a,b). Tada važi

$$y'(x)+f(x)y(x)=g(x),\quad y(x_0)=y_0. \tag{26.13}$$

Sledi da je

$$(y'(x)+f(x)y(x))\,e^{\int_{x_0}^{x}f(t)dt}=g(x)\,e^{\int_{x_0}^{x}f(t)dt},\qquad x\in(a,b).$$

Dalje je

$$\left(y(x)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt} \right)' = g(x)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt}, \text{ tj. } y(x)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt} - y_0 = \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{t} f(u)du} g(t)\, dt .$$

Sledi da je rešenje dato obrascem

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt} \left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{t} f(u)du} g(t)\, dt \right),$$

odakle zaključujemo da je rešenje $y(x)$ jednoznačno određeno.

Primetimo da je ustvari obrazac (26.12) dobijen iz opšteg rešenja

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx}(c + \int e^{\int f(x)dx} g(x)dx), \tag{26.14}$$

određivanjem konstante c iz početnog uslova $y(x_0) = y_0$.

Primer 26.9. Rešiti početni problem $y' + \frac{y}{x} = 1$, $y(1) = \frac{1}{2}$.

Rešenje. Ovde ćemo izložiti još jedan postupak rešavanja linearne diferencijalne jednačine. Rešenje tražimo u obliku $y(x) = u(x)\, v(x)$.

Iz $y' = u'v + v'u$ sledi da je $u'v + v'u + \frac{uv}{x} = 1$, odnosno da je $u'v + u(v' + \frac{v}{x}) = 1$.

Potražimo nepoznatu funkciju $v = v(x)$, tako da je $v' + \frac{v}{x} = 0$.

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = -\ln x \Rightarrow v = \frac{1}{x}.$$

Pri traženju neodređenog integrala ovde nismo uzeli u obzir konstantu, jer se ona u daljem traženju rešenja skrati. Sada je $\frac{u'}{x} = 1$, pa je $du = x\,dx$, tj. $u = \frac{x^2}{2} + c$. Dakle,

$$y(x) = (\frac{x^2}{2} + c)\, \frac{1}{x} = \frac{x}{2} + \frac{c}{x}.$$

Iz $y(1) = \frac{1}{2}$ sledi da je $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c$, odnosno da je $c = 0$. Dakle, rešenje početnog problema je $y(x) = \frac{x}{2}$. Δ

Bernulijeva[1] jednačina

To je jednačina koja se može svesti na oblik

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha} \quad , \tag{26.15}$$

gde je α realan broj. Za $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$ ona je linearna (za $\alpha = 1$ ona je i jednačina koja razdvaja promenljive jer je u tom slučaju $y' = y(g(x) - f(x))$).

J. Bernoulli

Da bismo je sveli na linearnu i za proizvoljno α, uvodimo smenu

$$z(x) = (y(x))^{-\alpha+1}, \quad z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x),$$

pa jednačina (26.15) postaje

$$z' + (1-\alpha)f(x)z - (1-\alpha)g(x) = 0 \ , \tag{26.16}$$

tj. linearna.

Ako su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne funkcije nad intervalom (a,b) tada kroz svaku tačku (x_0, z_0), gde je $x_0 \in (a,b)$ i $z_0 \in R$, prolazi jedinstveno rešenje koje je definisano nad celim intervalom (a,b). Kako se međutim, mora pretpostaviti da je u (26.15) $y > 0$ jer je α proizvoljno, a $z(x)$ ne mora biti pozitivno u celom intervalu (a,b), to će odgovarajuće rešenje $y(x)$ jednačine (26.16), u opštem slučaju, biti definisano u najvećem podintervalu (a_1, b_1) intervala (a,b) kojem pripada tačka x_0 i u kojem je $z(x) > 0$.

Primer 26.10. Rešiti početni problem $y' + \frac{1}{x}y = 2\sqrt{y}$, $y(1) = 1$.

Rešenje. Zbog početnog uslova $y(1) = 1$ koji je dat u tački $x_0 = 1$ rešenje tražimo za $x > 0$ (funkcija $\frac{1}{x}$ je neprekidna za $x > 0$). Jednačinu možemo napisati u obliku $y' + \frac{1}{x}y - 2y^{\frac{1}{2}} = 0$, odakle se vidi da je to Bernulijeva jednačina sa $\alpha = \frac{1}{2}$. Uvedimo smenu $z = y^{1-\alpha} = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$, $z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$. Deljenjem jednačine sa $2y^{\frac{1}{2}}$ dobijamo $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' + \frac{1}{2x}y^{\frac{1}{2}} - 1 = 0$, odnosno $z' + \frac{1}{2x}z - 1 = 0$. Primenjujući obrazac (26.14) sa $f(x) = \frac{1}{2x}$ i $g(x) = -1$ dobija se

[1] Jacob Bernoulli (1667-1748), švajcarski matematičar

$$z(x) = e^{-\int \frac{1}{2x}dx}(c - \int e^{\int \frac{1}{2x}dx} dx) = \frac{2}{3}x + \frac{c}{\sqrt{x}}.$$

Dalje, prema smeni $z = y^{\frac{1}{2}}$, imamo $\sqrt{y} = \frac{2}{3}x + \frac{c}{\sqrt{x}}$, odnosno

$y(x) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{c}{\sqrt{x}}\right)^2$. Iz $y(1) = 1$ sledi $1 = \left(\frac{2}{3} + c\right)^2$, odnosno da je $c = \frac{1}{3}$. Dakle, rešenje početnog problema je $y(x) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^2$. Δ

Ponekad je korisno zameniti uloge x i y, tj. posmatrati inverznu funkciju $x = x(y)$. Taj postupak je primenjen u sledećem primeru.

Primer 26.11. Rešiti početni problem $y' = \dfrac{y}{x(xy^2 - 1)}$, $y(-1) = 1$.

Rešenje. $x' = \dfrac{1}{y'}$, $y' \neq 0$, $x' = \dfrac{x(xy^2 - 1)}{y} = x^2y - \dfrac{x}{y}$, tj. $x' + \dfrac{x}{y} = x^2y$.

To je Bernulijeva diferencijalna jednačina, po x. Uvedimo smenu

$$x = u\,v \Rightarrow x' = u'v + v'u,\ u'v + v'u + \frac{uv}{y} = u^2v^2y, \qquad u'v + u\,(v' + \frac{v}{y}) = u^2v^2y.$$

$v' + \dfrac{v}{y} = 0 \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dy}{y}$. Odavde je $\ln v = -\ln y$, odnosno $v = \dfrac{1}{y}$. Sada je

$u'\dfrac{1}{y} = u^2\dfrac{1}{y^2}y \Rightarrow u' = u^2 \Rightarrow \dfrac{du}{u^2} = dy \Rightarrow -\dfrac{1}{u} = y + c$, odnosno

$u = -\dfrac{1}{y+c}$, pa je $x = u\,v = -\dfrac{1}{y(y+c)}$, odakle sledi da je

$$y(y+c) = -\frac{1}{x}.$$

Ako uvrstimo početni uslov $y(-1) = 1$, dobićemo da je $c + 1 = 1$, tj. $c = 0$, pa je odgovarajuće partikularno rešenje $y^2 = -\dfrac{1}{x}$, odnosno $y(x) = \sqrt{-\dfrac{1}{x}}$. Očigledno ovo važi za $x < 0$. Δ

Napomena 26.3. Nije potrebno Bernulijevu diferencijalnu jednačinu prvo svoditi na linearnu i tražiti njeno rešenje, nego se Bernulijeva diferencijalne jednačina može odmah rešiti postupkom kao što je urađeno u prethodnom primeru.

Jednačina totalnog diferencijala

Opšta jednačina prvog reda u normalnom obliku $y' = f(x, y)$ može se pisati u obliku $dy - f(x, y)\,dx = 0$. Upoređivanjem sa jednačinom

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{26.17}$$

vidi se da se one za $Q(x, y) \neq 0$ mogu svesti jedna na drugu.

Ako postoji funkcija $F(x, y)$ takva da je leva strana od (26.17) totalni diferencijal funkcije $F(x, y)$ u nekoj oblasti, tj., prema gornjem obrascu, da je

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad dF(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \\ &\text{ii)} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \; \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \end{aligned} \tag{26.18}$$

onda se (26.17) naziva **jednačina totalnog diferencijala.**

Kao što je poznato totalni diferencijal $dF(x, y)$ funkcije $z = F(x, y)$ definisan je obrascem

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\,dy.$$

Ako takva funkcija $F(x, y)$ postoji, onda iz $dF(x, y) = 0$ sledi da je $F(x, y) = c$. Tada su jednačine (26.17) i

$$F(x, y) = c, \tag{26.19}$$

gde je c konstanta, ekvivalentne, u tom smislu da ako je funkcija $y = g(x)$, implicitno definisana pomoću (26.19) ($F(x, g(x)) = c$) nad nekim intervalom, tada je ona rešenje jednačine (26.17) i obrnuto. Naime, iz (26.19) i teoreme o implicitnim funkcijama, sa $y = g(x)$ sledi da je

$$\frac{d}{dx}F(x, g(x)) = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))g'(x) = 0,$$

odakle, prema (26.18) ii), sledi da je $P(x, g(x)) + Q(x, g(x))g'(x) = 0$, te je $y = g(x)$ rešenje jednačine (26.17). Na isti način se pokazuje da važi i obrnuto: ako je $y = g(x)$ rešenje od (26.17) nad nekim intervalom tada iz $P(x, g(x)) + Q(x, g(x))g'(x) = 0$ i prema

$$\text{ii)}\; P(x, g(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)),\; Q(x, g(x)) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)),$$

sledi da je

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\,g'(x)\,dx = 0,$$

odnosno

$$\frac{d}{dx}F(x, g(x)) = 0.$$

Sada je $F(x, g(x)) = c$ nad tim intervalom. Ako se traži da rešenje $y = g(x)$ zadovoljava početni uslov $g(x_0) = y_0$, iz prethodnog obrasca, stavljajući $x = x_0$ se dobija

$$c = F(x_0, y_0).$$

Stoga je funkcija $y = g(x)$, koja je implicitno data sa

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = 0, \tag{26.20}$$

rešenje jednačine totalnog diferencijala (26.17) koja zadovoljava početni uslov $g(x_0) = y_0$.

Podsetimo ovde da će jednačina (26.20) definisati diferencijabilnu funkciju $y = g(x)$ u okolini tačke x_0, jer funkcija $F(x, y)$ zadovoljava uslove teoreme o implicitnim funkcijama zbog $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$ i $Q(x, y) \neq 0$ u nekoj oblasti.

Preostaje da se reše još dva problema:

1. Kako ustanoviti da li je leva strana jednačine (26.17) totalni diferencijal neke funkcije $F(x, y)$.

2. Ako jeste, kako naći funkciju $F(x, y)$.

Na oba ta pitanja odgovor daje sledeća teorema.

Teorema 26.3. *Neka su* $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y)$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ *i* $Q(x_0, y_0) \neq 0$ *neprekidne u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti* G. *Da bi jednačina (26.17) bila jednačina totalnog diferencijala potrebno je i dovoljno da bude za svako* $(x, y) \in G$

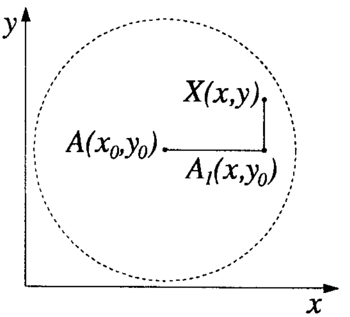
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y). \tag{26.21}$$

Dokaz.

a) Uslov je potreban. Pretpostavimo da postoji funkcija $F(x, y)$ takva da je $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P$ i $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$. Tada je $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, pa (26.17) sledi, jer je

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ zbog neprekidnosti parcijalnih izvoda.

b) Uslov je dovoljan. Pretpostavimo da je oblast G krug $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$ (vidi sliku 26.1). (Za drugačiju jednostruko povezanu otvorenu oblast, dokaz vidi [3]).



Slika 26.1

Ovde smo za dokaz uzeli krug, jer se iz tačke $A(x_0, y_0)$ može doći do proizvoljne tačke $X(x, y)$ datog kruga, ako se krećemo paralelno koordinatnim osama, a da se ne izađe iz datog kruga. U proizvoljnoj jednostruko povezanoj oblasti nemamo takav slučaj. Neka je $X(x, y)$ proizvoljna tačka. Posmatrajmo funkciju

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\, dt + c\,.$$

Tada se, zbog neprekidnosti funkcija $P(x, y)$, $Q(x, y)$ i uslova $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, dobija

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y} Q(x, t)dt = P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x}\, dt =$$

$$P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t}\, dt = P(x, y_0) + P(x, y)\Big|_{y_0}^{y} = P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y),$$

što je i trebalo pokazati.

U praksi se funkcija $F(x, y)$ određuje na sledeći način:

Kako je $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$ i $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$ to se integracijom funkcije $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$ po promenljivoj x dobija

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx + s(y), \tag{26.22}$$

gde je $s(y)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija od y. Kako je $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$ sledi iz (26.22) da funkcija $s(y)$ mora da zadovoljava diferencijalnu jednačinu po promenljivoj y:

$$Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)dx + s'(y)\,.$$

Rešavanjem poslednje diferencijalne jednačine određuje se funkcija $s(y)$ i tako prema (26.22) funkcija $F(x, y)$, pa je opšte rešenje diferencijalne jednačine (26.17) dato prema obrascu (26.19) sa $F(x, y) = c$.

Iz dokaza Teoreme 26.3. (dokaz je dat za slučaj da je oblast G krug) ne vidi se razlog zbog čega je potrebna pretpostavka da je oblast G jednostruko povezana (vidi [3]). Međutim, ako oblast G nije jednostruko povezana, tada tvrđenje teoreme ne mora da bude tačno, što se može videti iz sledećeg primera.

Primer 26.12. Pokazati da ne postoji funkcija $F(x, y)$ čiji je totalni diferencijal $dF(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$, u oblasti: $G = \{(x, y) \in R^2 : (x, y) \neq (0,0)\}$.

Rešenje. Funkcija $P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ je definisana i neprekidna za sve tačke $(x, y) \neq (0,0)$. Takođe to važi i za funkciju $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Kako je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, i kako su oni neprekidni za $(x, y) \neq (0,0)$ to su sve pretpostavke Teoreme 26.3 ispunjene u oblasti $G \subset R^2$ koja nije jednostruko povezana, jer je izvađena tačka $(0,0)$ iz R^2. Za tačku $M(x, y)$, $y \neq 0$ je $F(x, y) = -\text{arctg}\frac{x}{y} + c_1$. (Iz $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ sledi da je

$$F(x, y) = \int -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + s(y) = -\text{arctg}\frac{x}{y} + s(y) = \text{arctg}\frac{y}{x} + s(y),\, x \neq 0.$$

Kako je $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} + s'(y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ to je $s'(y) = 0$ pa je $s(y) = c_1$.).

Slično za tačku $N(x, y)$, $x \neq 0$ je $F(x, y) = \text{arctg}\frac{y}{x} + c_2$.

S obzirom da funkcija $F(x, y)$ treba da bude neprekidna (iz neprekidnosti parcijalnih izvoda $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ i $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$ u oblasti G, sledi da je funkcija $F(x, y)$ diferencijabilna, ako je diferencijabilna tada je i neprekidna) sledilo bi da je ona data sa

$$F(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + c & , \quad x > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} + c & , \quad x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} + c & , \quad x = 0, y < 0 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi + c & , \quad x < 0 \end{cases}.$$

Međutim, ove funkcije nisu neprekidne u tački $M(0, y)$, $y < 0$, što se lako proverava. Δ

Primer 26.13. Naći rešenje diferencijalne jednačine $(x + y + 1)\,dx + (x - y^2 + 3)\,dy = 0$, koje prolazi kroz tačku $M(1,0)$.

Rešenje. $P(x, y) = x + y + 1$, $Q(x, y) = x - y^2 + 3$. Kako je $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$, to imamo diferencijalnu jednačina totalnog diferencijala, stoga je prema (26.22)

$F(x, y) = \int (x + y + 1)dx + s(y) = \dfrac{x^2}{2} + xy + x + s(y)$, a $s(y)$ se određuje iz

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = x + s'(y) = x - y^2 + 3$. Sledi da je $s'(y) = -y^2 + 3$, pa je

$s(y) = -\dfrac{y^3}{3} + 3y + c_1$. Dakle,

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + c_1.$$

Konačno, prema (26.19), opšte rešenje je implicitno dato sa

$$\frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y = c.$$

Za tačku $M(1,0)$ je $\dfrac{1}{2} + 1 = c$, tj. $c = \dfrac{3}{2}$, pa je partikularno rešenje implicitno dato sa

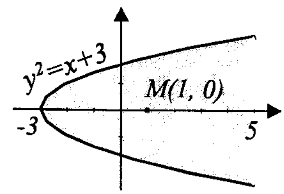
$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = 9$. Δ

Funkcija $F(x, y) = 3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y - 9$ zadovoljava uslove teoreme o implicitnoj funkciji, ako za skup A uzmemo otvorenu jednostruko povezanu oblast $A = \{ (x, y) \in R^2 : x - y^2 + 3 > 0 \}$ iz R^2 koja sadrži tačku $M(1,0)$, jer

1. $F : A \to R$ je neprekidna funkcija,
2. $F(1,0) = 0$,
3. $\dfrac{\partial F}{\partial y} = x - y^2 + 3$ je neprekidna nad skupom A,

4. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,0) \neq 0$.

Dakle, relacija $3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = 9$ definiše rešenje $f : U \to V$ početnog problema (26.13) bar nad minimalnim skupom U, gde je $U = \{x \in R : x \in (-3,5)\}$ i $(1,0) \in U \times V \subset A$.



Slika 26.2

Integracioni množitelj

Ako uslov (26.21) nije ispunjen, pa (26.17) nije jednačina totalnog diferencijala, postavlja se pitanje može li se ona učiniti takvom. Preciznije, postoji li funkcija $h(x, y)$ različita od nule u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti G takva da jednačina

$$h(x, y)P(x, y)dx + h(x, y)Q(x, y)dy = 0,$$

ekvivalentna sa (26.17), bude jednačina totalnog diferencijala. Funkcija $h(x, y)$ (ukoliko postoji) naziva se **integracioni množitelj**. Potreban i dovoljan uslov za njenu egzistenciju u nekoj oblasti, prema (26.21) dat je sa

$$\frac{\partial(h\,P)}{\partial y} = \frac{\partial(h\,Q)}{\partial x}, \tag{26.23}$$

odnosno sa

$$\frac{1}{h}\left(P\frac{\partial h}{\partial y} - Q\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{26.24}$$

Integracioni množitelj je, dakle, prema Teoremi 26.3. funkcija $h(x, y)$ koja ima u nekoj otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti G neprekidne parcijalne izvode, zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu (26.24) i različita je od nule u G. Nalaženje množitelja $h(x, y)$ predstavlja složeniji problem od polaznog i nerešiv je u opštem slučaju. U protivnom mogli bi elementarno rešiti svaku jednačinu prvog reda oblika (26.17) pa tako i jednačinu $y' = f(x, y)$.

Pokazaćemo kako se jednačina (26.24) može rešiti u dva specijalna slučaja:

a) h je funkcija samo od x.

b) h je funkcija samo od y.

Za slučaju a) (26.24) se svodi na $\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ što ima smisla ako je desna strana neka funkcija u koja zavisi samo od x. Prema tome ako je

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = u(x), \tag{26.25}$$

tada jednačina (26.17) ima integracioni množitelj koji zavisi samo od x i on je određen sa $\frac{h'(x)}{h(x)} = u(x)$, tj. $h(x) = ce^{\int u(x)dx}$ pa takvih množitelja znači ima beskonačno mnogo. U praksi se uzima najjednostavniji, tj. $c = 1$.

U slučaju b) na isti način, ako je

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = v(y), \tag{26.26}$$

jednačina (26.17) ima integracioni množitelj koji zavisi samo od y i on je određen sa $h(y) = ce^{\int v(y)dy}$.

Interesantno je videti kada diferencijalna jednačina $y' = f(x, y)$, ili pisana u obliku (26.17) $f(x, y)dx - dy = 0$, ima integracioni množitelj $h(x)$ koji zavisi samo od x. Kako je ovde $P(x, y) = f(x, y)$ i $Q(x, y) = -1$ to uslov (26.25) postaje $\frac{\partial f}{\partial y} = -u(x)$, i tako posle integracije po y, $f(x, y) = -u(x)y + g(x)$.

To pokazuje da samo u slučaju kada posmatrana jednačina ima oblik

$$y' + u(x)y = g(x),$$

tj. kada je linearna ona ima integracioni množitelj koji zavisi samo od x i prema gornjem rezonovanju ima oblik

$$h(x) = e^{\int u(x)dx}.$$

Time je motivisan postupak dokaza Teoreme 26.2.

I jednačina koja razdvaja promenljive $y' = f(x)g(y)$ ima integracioni množitelj oblika $h(y) = \frac{1}{g(y)}$.

Naime, iz $y' = f(x)g(y)$ sledi da je $f(x)g(y)\,dx - dy = 0$. Kako je ovde

$P(x, y) = f(x)g(y)$ i $Q(x, y) = -1$, to je

$$\frac{h'(y)}{h(y)} = \frac{f(x)g'(y)}{f(x)g(y)} = \frac{g'(y)}{g(y)}.$$

Sledi da je $\frac{dh}{h} = -\frac{g'(y)}{g(y)}dy$, odnosno da je $h(y) = \frac{c}{g(y)}$. Za $c = 1$ je $h(y) = \frac{1}{g(y)}$.

Slično i kod homogene i Bernulijeve diferencijalne jednačine postoji integracioni množitelj koji je funkcija samo jedne promenljive. Znači, sve do sada proučavane diferencijalne jednačine I reda možemo rešavati metodom određivanja integracionog množitelja $h = h(x)$, odnosno $h = h(y)$, pa ih time svesti na diferencijalnu jednačinu totalnog diferencijala.

Primer 26.14. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$4xy\,dx + (x^2 + 1)\,dy = 0.$$

Rešenje. Ovde je $P(x, y) = 4xy$, $Q(x, y) = x^2 + 1$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 4x$ i $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$. Kako je

$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2x}{x^2+1}$, to postoji integracioni množitelj koji zavisi samo od x:

$$h(x) = e^{\int u(x)dx} = e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx} = e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1.$$

Jednačina $4xy(x^2 + 1)\,dx + (x^2 + 1)^2\,dy = 0$ je jednačina totalnog diferencijala u celoj ravni, pa je dalje $F(x, y) = \int (x^2 + 1)^2 dy + s(x) = (x^2 + 1)^2 y + s(x)$. Kako je

$\frac{\partial F}{\partial x} = 4xy(x^2 + 1) + s'(x) = 4xy(x^2 + 1)$, sledi da je $s'(x) = 0$, odnosno $s(x) = c_1$. Dakle,

$$F(x, y) = (x^2 + 1)^2 y + c_1.$$

Kako je $F(x, y) = c$, to je $(x^2 + 1)^2 y = c$, odnosno $y(x) = \frac{c}{(x^2 + 1)^2}$, opšte rešenje date jednačine. Δ

Sve do sada posmatrane jednačine u ovoj glavi bile su date u normalnom obliku (25.3). Sledeća jednačina koja se javlja u problemima tehnike i geometrije, je jedan specijalan primer dat u drugom obliku (25.1) koji je tipičan jer se pojavljuju osobine koje u prethodnim jednačinama nismo imali.

Klero-ova[1] jednačina

To je jednačina oblika

$$y = xy' + f(y'). \tag{26.27}$$

A. C. Clairaut

Ovde je interesantno primetiti da je za svako realno c za koje je $f(t)$ definisano $y(x) = cx + f(c)$ rešenje jednačine (26.27). Rezonujući po analogiji sa normalnim oblikom jednačine očekivalo bi se da su gornjom familijom pravih obuhvaćena sva rešenja jednačine (26.27). Da to nije tačno pokazuje sledeća teorema.

Teorema 26.4. *Neka funkcija $f(t)$ ima nad intervalom (a,b) neprekidan drugi izvod koji je različit od nule i neka je $\varphi(t)$ inverzna funkcija od $-f'(t)$. Tada su rešenja jednačine (26.27) ove funkcije:*

- $y(x) = cx + f(c)$ (*c je konstanta*), $c \in (a,b)$, (26.28)
- $y(x) = x\varphi(x) + f(\varphi(x))$, (26.29)

  definisano nad intervalom (α, β), gde je $\alpha = \inf\limits_{t\in(a,b)} \{-f'(t)\}$ ako infimum postoji u suprotnom $\alpha = -\infty$ i $\beta = \sup\limits_{t\in(a,b)} \{-f'(t)\}$ ako supremum postoji u suprotnom $\beta = \infty$,
- *svaka kriva sastavljena od proizvoljnog luka AB krive i na nju nastavljenih tangenata u tačkama A i B.* (26.30)

Dokaz. Neka je $y' = p$. Tada je

$$y = xp + f(p), \quad y' = p + xp' + f'(p)p', \quad p'(x + f'(p)) = 0.$$

Sledi da je ili $p' = 0$ ili $x + f'(p) = 0$.

$$p' = 0 \Rightarrow p = c, \text{ pa je } y(x) = cx + f(c) .\ x + f'(p) = 0 \Rightarrow x = -f'(p).$$

Kako je $f''(t) \neq 0$ sledi da nad intervalom (α, β) postoji inverzna funkcija $t = \phi(x)$ funkcije $-f'(t)$, pa iz $x = -f'(p)$ sledi da je $p = \varphi(x)$, odnosno da je $y(x) = x\varphi(x) + f(\varphi(x))$ rešenje date jednačine.

Kriva (26.29) ima osobinu da u svakoj tački ima za tangentu jednu krivu iz familije pravih (26.28), što je lako videti. Takva kriva naziva se **obvojnica** familije pravih rešenja (26.28). Neka je $A(x_0, x_0\varphi(x_0) + f(\varphi(x_0)))$ proizvoljna tačka rešenja (26.28) Za $c = \varphi(x_0)$ prava $y = x\varphi(x_0) + f(\varphi(x_0))$ prolazi kroz tačku A. Kako je

[1] A. C. Clairaut (1713-1765), francuski matematičar i astronom

$y' = \varphi(x_0)$, to je koeficijent pravca tangentne krive (26.29) u tački A $\varphi(x_0)$, što se poklapa sa koeficijentom pravca prave $y = x\varphi(x_0) + f(\varphi(x_0))$. Time smo u potpunosti dokazali datu teoremu.

Za rešenje (26.29) kažemo da je **singularno rešenje** Klero-ove diferencijalne jednačine. Primetimo da se ono ne može dobiti biranjem konstante c u rešenju (26.28) i da je ono obvojnica rešenja (26.28).

Primer 26.15. Naći krivu koja prolazi kroz tačke $A(-1,1)$ i $B(1,\ln 2)$ sa osobinom da je odsečak tangente na y-osi u tački $M(x, y)$ jednak $1 + y' - \ln(1 + y')$.

Rešenje. Jednačina tangente je $Y - y = y'(X - x)$. Odsečak tangente na Y osi je $y - y'x$. Iz uslova zadatka sledi da je $y - y'x = 1 + y' - \ln(1 + y')$, tj. dobijamo da je nepoznata funkcija $y = y(x)$ rešenje Klero-ove diferencijalne jednačine

$$y = xy' + 1 + y' - \ln(1 + y') \ .$$

Iz $y' = p$ sledi da je $y = xp + 1 + p - \ln(1 + p)$. Diferencirajući poslednju jednakost dobijamo da je $p = y' = p + xp' + p' - \dfrac{p'}{1+p}$. Dalje je $p'(x + 1 - \dfrac{1}{1+p}) = 0$. Iz $p' = 0$, sledi da je $p = c$, tj. $y(x) = cx + 1 + c - \ln(1 + c)$. Iz $x + 1 - \dfrac{1}{1+p} = 0$ sledi da je $1 + p = \dfrac{1}{x+1}$, pa je $p = -\dfrac{x}{1+x}$. Dakle, singularno rešenje je kriva

$$y(x) = -x + 1 + \ln(1 + x) .$$

Kako je singularno rešenje definisano za $x > -1$, sledi da kroz tačku $A(-1,1)$ prolazi rešenje iz familije pravih $y = cx + 1 + c - \ln(1 + c)$.

Iz $1 = -c + 1 + c - \ln(1 + c)$ sledi da je $c = 0$, pa rešenje $y = 1$ prolazi kroz tačku $A(-1,1)$. Kako prava $y = 1$ ne prolazi kroz tačku $B(1,\ln 2)$, a rešenje $y(x) = -x + 1 + \ln(1 + x)$ prolazi kroz tačku $B(1,\ln 2)$ to će se naše rešenje dobiti kombinacijom rešenja $y = 1$ i rešenja $y(x) = -x + 1 + \ln(1 + x)$. Kako $y = 1$ treba da bude tangenta rešenja $y(x) = -x + 1 + \ln(1 + x)$, to se dobija da je ta tangenta postavljena u tački $C(0,1)$. Dakle rešenje našeg zadatka je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \le 0 \\ -x + 1 + \ln(1 + x) & , x > 0 \end{cases} . \quad \Delta$$

Opšti postupak uvođenja parametra, metoda integracije pomoću diferenciranja

U nekim slučajevima može se odrediti rešenje jednačine $F(x, y, y') = 0$, a da se ne odredi y' kao funkcija od x i y, kao što je bio slučaj kod Klero-ove diferencijalne jednačine. Postupak se sastoji u uvođenju parametra i posebno je važan za slučajeve jednačina koje se ne mogu rešiti po y'. S obzirom da se često koristi, ovde ćemo izložiti ovaj postupak, ali samo formalno.

Dakle, uzmimo da je parametar $p = y'$. Tako dobijamo dve jednačine

$$F(x, y, p) = 0 \tag{26.31}$$

i

$$dy = pdx. \tag{26.32}$$

Ako je F diferencijabilna, iz (26.30) imamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial p}dp = 0, \tag{26.33}$$

a zbog (26.31), (26.32) se može pisati u jednom od oblika

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}p\right)dx + \frac{\partial F}{\partial p}dp = 0 \tag{26.34}$$

ili

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y}\right)dy + p\frac{\partial F}{\partial p}dp = 0. \tag{26.35}$$

Sada, ukoliko je to moguće, iz jednačine (26.31) i (26.34) eliminišemo y i tako dođemo do diferencijalne jednačine iz koje odredimo $x = x(p)$, ili iz (26.31) i (26.35) eliminišemo x i odredimo $y = y(p)$. Ako smo odredili $x = x(p)$ i ako je funkcija $x'(p)$ neprekidna i različita od nule, zbog (26.32) je

$$y(p) = \int p\, x'(p)\, dp + c.$$

Dakle, dobijeno rešenje jednačine (26.31) u parametarskom obliku je: $x = x(p)$, $y = y(p)$, pri čemu je $F(x(p), y(p), p) = 0$.

Slično, ako je prvo određena funkcija $y = y(p)$ i ako je funkcija $y'(p)$ neprekidna i $y'(p) \neq 0$, za $p \neq 0$ imamo zbog (26.32)

$$x(p) = \int \frac{y'(p)}{p}\, dp + c.$$

Dakle, dobijamo rešenje u parametarskom obliku $x = x(p)$, $y = y(p)$, pri čemu je $F(x(p), y(p), p) = 0$.

Da bi se dobile jednačine (26.34) i (26.35) bilo je potrebno prethodno diferencirati funkciju F; zbog toga se izložena metoda zove **integracija diferencijalne jednačine pomoću diferenciranja.**

Napomena 26.3. Izloženi postupak može se uprostiti kod određivanja rešenja jednačina oblika $x = F_1(y')$ i $y = F_2(y')$. Ovde je odmah $x = F_1(p)$ odnosno $y = F_2(p)$, pa se postupak znatno skraćuje.

Lagranžova diferencijalna jednačina

Lagranžova diferencijalna jednačina je jednačina oblika

$$y = x\,f(y') + g(y'). \tag{26.36}$$

Za ovaj primer jednačina (26.31) glasi

$$(f(p) - p)\,dx + (x\,f'(p) + g'(p))\,dp = 0. \tag{26.37}$$

Iz nje ćemo odrediti $x = x(p)$. Razlikovaćemo dva slučaja:

a) $f(p) - p \neq 0$

b) $f(p) - p = 0$.

Za slučaju a), jednačina (26.37) je linearna, oblika

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x + \frac{g'(p)}{f(p) - p} = 0,$$

i za svako p takvo da je $f(p) - p \neq 0$, rešenje Lagranžove jednačine u parametarskom obliku je

$$x(p) = \left\{c - \int \frac{g'(p)}{f(p) - p} e^{\int \frac{f'(p)}{f(p)-p}dp} dp\right\} e^{-\int \frac{f'(p)}{f(p)-p}dp}, \quad y(p) = x(p)f(p) + g(p).$$

Ako jednačina $f(p) - p = 0$ ima rešenja i ako je jedno recimo $p = c$, tada je i $y = cx + g(c)$ rešenje Lagranžove jednačine.

U slučaju da je $f(p) - p = 0$, za svako p, Lagranžova jednačina postaje

$$y = xy' + g(y')$$

a to je već poznata Klero-ova jednačina.

OSMA GLAVA

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA

U slučaju jednačina višeg reda sistematizovana teorija postoji samo u slučaju linearnih jednačina. Svi ostali integrabilni tipovi koji se mogu javiti su izolovani primeri bez većeg značaja. U izvesnoj meri od toga odstupaju jednačine iz poglavlja 27.

27. SNIŽAVANJE REDA DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Postoje diferencijalne jednačine višeg reda kojima se rešenje može odrediti pomoću rešenja odgovarajućih diferencijalnih jednačina nižeg reda. Ovaj postupak se naziva **snižavanje reda diferencijalne jednačine.** Evo nekih slučajeva:

I $\quad y^{(n)}(x) = f(x)$ (27.1)

Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija nad intervalom (a,b). Stavimo $y^{(n-1)}(x) = z(x)$. Sada je $z'(x) = f(x)$ i $z(x) = y^{(n-1)}(x) = \int f(x)\,dx = f_1(x) + c_1$. Zatim slično dobijamo

$$y^{(n-2)}(x) = \int (f_1(x) + c_1)\,dx = f_2(x) + c_1 x + c_2.$$

Posle n koraka imamo da je opšte rešenje jednačine $y^{(n)} = f(x)$ (rešenje koje zavisi od n konstanti $c_1, c_2, ..., c_n$) oblika

$$y(x) = f_n(x) + \frac{c_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + \frac{c_{n-1} x}{1!} + c_n.$$

Primer 27.1. Rešiti početni problem

$$y^{IV} = \sin x\,, \quad y(0) = y''(0) = 1\,, \quad y'(0) = y'''(0) = 0\,.$$

Rešenje. $\quad y''' = \int y^{IV}(x)\,dx = \int \sin x\,dx = -\cos x + c_1\,,$

$$y'' = \int y'''(x)\,dx = -\sin x + c_1 x + c_2\,, \quad y' = \int y''(x)\,dx = \cos x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3\,,$$

$$y = \int y'(x)\,dx = \sin x + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4\,.$$

Iz $y'''(0) = -1 + c_1 = 0$ dobijamo da je $c_1 = 1$. Iz $y''(0) = c_2 = 1$ dobijamo da je $c_2 = 1$. Iz $y'(0) = 1 + c_3 = 0$ dobijamo da je $c_3 = -1$. Iz $y(0) = c_4 = 1$ dobijamo da je $c_4 = 1$.

Dakle, rešenje početnog problema je funkcija

$$y = \sin x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x + 1 \, . \, \Delta$$

II $\boldsymbol{F(x, y^{(n)}) = 0}$ (27.2)

Ako se ova jednačina može rešiti po $y^{(n)}$ postupamo kao u (27.1). Ako to nije moguće probamo rešenje odrediti **metodom uvođenja parametra**. Naime treba dobro odabrati funkcije $g(t)$ i $h(t)$ tako da je

$$x = g(t), \; y^{(n)} = H(g(t)) = h(t), \; F(g(t), h(t)) = 0.$$

Sada je redom

$$y^{(n-1)} = \int H(x)dx = \int h(t)g'(t)dt = h_1(t) + c_1 ,$$

$$y^{(n-2)} = \int h_1(t)g'(t)dt + c_1 g(t) + c_2 = h_2(t) + c_1 g(t) + c_2 ,$$

...

$$y = h_n(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i (g(t))^{n-i}}{(n-i)!} = f(t).$$

Parametarski oblik rešenja je dakle: $x = g(t)$, $y = f(t)$.

Primer 27.2. Naći rešenje diferencijalne jednačine

$$x^2 + y''^2 + \arccos x - \arcsin y'' = 1 \, , \text{ za } x \in (0,1) \, .$$

Rešenje. Uvedimo smenu $x = \cos t$. Tada je $y''(x) = \sin t$.

$$y'(x) = \int y''(x)\, dx = \int \sin t\, (-\sin t)\, dt + c_1 = -\int \sin^2 t\, dt + c_1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1 - \cos 2t)\, dt + c_1 = \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}t + c_1 \quad ,$$

$$y(x) = \int y'(x)\, dx = \int (\frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}t + c_1) \cdot (-\sin t)\, dt + c_2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sin^2 t \cos t\, dt + \frac{1}{2}\int t \sin t\, dt - c_1 \int \sin t\, dt \, .$$

Sledi da je

$$y(x) = -\frac{1}{6}\sin^3 t - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t + c_1 \cos t + c_2 \, .$$

Rešenje je dato u parametarskom obliku

$$y(t) = -\frac{1}{6}\sin^3 t - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t + c_1 \cos t + c_2 \, , \; x(t) = \cos t \, . \, \Delta$$

III $\boldsymbol{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0 \; , \; 1 \le k < n}$ (27.3)

Ova jednačina ne sadrži y . Stavimo $y^{(k)} = z, z = z(x)$ .Time se jednačina transformiše na jednačinu reda $n-k$ oblika

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Ako znamo odrediti njeno rešenje u jednom od oblika

$$z = f(z, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}) = 0$$

ili

$$g(x, z, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}) = 0$$

ostaje da se zameni $z = y^{(k)}$ i odredi $y = y(x)$ kao za slučaj (27.1) ili (27.2).

Primer 27.3. Naći rešenje diferencijalne jednačine $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

Rešenje. Diferencijalna jednačina ne sadrži y. Ako stavimo $y' = z,\ y'' = z'$, jednačina postaje $xz' = z \ln \dfrac{z}{x} \Rightarrow z' = \dfrac{z}{x} \ln \dfrac{z}{x}$. Poslednja jednačina je homogena. Uvodeći smenu $\dfrac{z}{x} = u,\quad z = xu,\quad z' = u + xu'$, ona postaje $u + xu' = u \ln u$. Iz $x\dfrac{du}{dx} = u(\ln u - 1)$, sledi da je $\dfrac{du}{u(\ln u - 1)} = \dfrac{dx}{x}$. Odavde je $\int \dfrac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \dfrac{dx}{x}$, odnosno $\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + c = \ln|xc_1|,\quad c = \ln|c_1|$. Dalje je

$\ln u - 1 = c_1 x \Rightarrow \ln u = c_1 x + 1 \Rightarrow u = e^{1+c_1 x} \Rightarrow z = x \cdot e^{1+c_1 x}$. Iz $y' = z = x \cdot e^{1+c_1 x}$ sledi da je $y = \int y' dx = \int x e^{1+c_1 x} dx = \dfrac{1}{c_1} x e^{1+c_1 x} - \dfrac{1}{c_1} \int e^{1+c_1 x} dx = \dfrac{1}{c_1} x e^{1+c_1 x} - \dfrac{1}{c_1^2} e^{1+c_1 x} + c_2$.

Integral $\int x e^{1+c_1 x} dx$ je rešavan parcijalnom integracijom, pri čemu je $u = x$, $du = dx$, $dv = e^{1+c_1 x}$ i $v = \dfrac{1}{c_1} e^{1+c_1 x}$. Dakle, rešenje je

$$y = \left(\frac{x}{c_1} - \frac{1}{c_1^2}\right) e^{1+c_1 x} + c_2 . \ \Delta$$

IV $\boldsymbol{F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,\ n \geq 2}$ (27.4)

Ova jednačina ne sadrži promenljivu x. Stavimo $y' = z, z = z(y)$ i uzmimo y za nezavisnu promenljivu. Tada je

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z'(y)\, y'(x) = z'(y)\, z(y) = z\, z',$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(zz')}{dx} = \frac{dz}{dx} z' + z \frac{dz'}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} z' + z \frac{dz'}{dy}\frac{dy}{dx} = z\, z'^2 + z^2 z'', \text{ itd.}$$

Zamenom u datu jednačinu dobijamo jednačinu

$$H(y, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Ona je reda $n-1$. Njeno rešenje određuje y', pa još ostaje da se nađe rešenje jednačine prvog reda.

Primer 27.4. Naći rešenje diferencijalne jednačine $y' - 1 = yy''$.

Rešenje. Diferencijalna jednačina ne sadrži nezavisnu promenljivu x. Uvodeći smenu $y' = z$, $y'' = z\,z'$, ona se transformiše u diferencijalnu jednačinu oblika

$z - 1 = y\,z\,z'$. Sada je $\dfrac{z-1}{z} = y\dfrac{dz}{dy} \Rightarrow \dfrac{z}{z-1}dz = \dfrac{dy}{y}$. Iz

$$\int \frac{z}{z-1}dz = \int \frac{z-1+1}{z-1}dz = \int dz + \int \frac{dz}{z-1} = z + \ln|z-1| + c_1,$$

dobijamo da je

$$\ln|y| = z + \ln|z-1| + c_1 \Rightarrow y = e^{z+\ln|z-1|+c_1} = c_2(z-1)e^z, \quad c_2 = e^{c_1}.$$

Iz

$$\frac{dy}{dx} = z \Rightarrow dx = \frac{1}{z}dy = \frac{1}{z}c_2\left[e^z + ze^z - e^z\right]dz = c_2e^z dz$$

sledi da je $x = c_2e^z + c_3$, pa je rešenje dato u parametarskom obliku

$$y(z) = c_2(z-1)e^z, \qquad x(z) = c_2e^z + c_3.\ \Delta.$$

Još jedan slučaj snižavanja reda obrađen je u poglavlju 33.

28. LINEARNA JEDNAČINA n-TOG REDA, $n \geq 2$

Opšti oblik takvih jednačina je

$$g_0(x)y^{(n)} + g_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + g_n(x)y = h(x).$$

Pretpostavimo da su funkcije $h(x)$ i $g_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,n$, definisane i neprekidne nad nekim intervalom I i da je $g_0(x) \neq 0$, $x \in I$. Tada se gornja jednačina piše u obliku

$$L_n[y] = f(x), \tag{28.1}$$

gde je

$$L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y,$$

$$a_1(x) = \frac{g_1(x)}{g_0(x)}, \quad a_2(x) = \frac{g_2(x)}{g_0(x)}, \ldots, a_n(x) = \frac{g_n(x)}{g_0(x)}, \quad f(x) = \frac{h(x)}{g_0(x)},$$

tj. data jednačina glasi

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \tag{28.2}$$

Ako je $f(x) = 0$ za svako x iz intervala I linearna diferencijalna jednačina (28.1) je **homogena**. U suprotnom se ona je **nehomogena**.

U vezi sa diferencijalnom jednačinom (28.2) (zapravo, sa svakom diferencijalnom jednačinom i sistemom diferencijalnih jednačina) postavljaju se ovi problemi:

1) **problem egzistencije rešenja**, tj. da li data jednačina uopšte ima rešenje,

2) **problem jednoznačnosti rešenja**, tj. uz koje dodatne uslove za rešenje takva diferencijalna jednačina ima jednoznačno rešenje,

3) **problem efektivnog rešavanja date diferencijalne jednačine** (naći postupak kojim se diferencijalna jednačina rešava).

Navedimo, bez dokaza, **Košijevu** teoremu o egzistenciji

Teorema 28.1. *Ako su $a_i(x)$, $i = 1,2,\dots,n$ i $f(x)$ neprekidne funkcije nad intervalom I, x_0 proizvoljna tačka iz I i $\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ proizvoljni brojevi, tada postoji jedinstveno rešenje $y(x)$ diferencijalne jednačine koje zadovoljava početni uslov*

$$y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1,\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}, \tag{28.3.}$$

i definisano je nad datim intervalom I .

Za dokaz vidi [15].

Napomena 28.1. (granični problem). Prethodna teorema pokazuje da rešenje početnog problema postoji za prilično široke klase funkcija. To međutim, nije slučaj sa graničnim problemima.

Na primer, granični problem

$y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$,

gde je λ konstanta, ima netrivijalno rešenje ($y \neq 0$) samo za specijalne vrednosti konstante λ, tj.ako je $\lambda = n^2$, $n \in N$ **(sopstvene vrednosti problema)**. Tada su rešenja funkcije $y_n(x) = \sin nx$ **(sopstvena rešenja)**.

To je stoga što ti problemi (za razliku od početnog) opisuju diskretne strukture (na primer, kvantna stanja).

Kao osnov čitavog daljeg izlaganja služi sledeća Lema.

Lema 28.1. *Operator $L_n[\,]$ je linearan, tj. važi*

$$L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2] \text{ i } L_n[cy] = cL_n[y], \tag{28.4}$$

gde je c proizvoljna konstanta.

Dokaz. Dokaz sledi direktno iz odgovarajućih osobina izvoda.

29. HOMOGENA LINEARNA JEDNAČINA

Posmatrajmo homogenu linearnu jednačinu

$$L_n[y] = 0. \tag{29.1}$$

Za nju važi ovaj osnovni, jednostavan rezultat.

Teorema 29.1. (princip superpozicije) *Ako su $y_i(x)$, $i = 1,2,\dots,n$ rešenja diferencijalne jednačine* (29.1) *tada je*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \tag{29.2}$$

takođe rešenje jednačine (29.1) *gdc su c_i proizvoljne konstante.*

Dokaz. Kako su $y_i(x)$ rešenja homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$ to je $L_n[y_i] = 0$ za svako $i = 1,2,\dots,n$. Sledi da je, prema Lemi 28.1., tj. zbog linearnosti operatora L_n

$$L_n[c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n] = c_1L_n[y_1] + c_2L_n[y_2] + \dots + c_nL_n[y_n] = 0.$$

Rešenje (29.2) sadrži n proizvoljnih konstanti. Postavlja se pitanje da li se te konstante mogu izabrati tako da rešenje (29.2) zadovoljava svaki zadati početni uslov. Drugim rečima da li su obrascem (29.2) data sva rešenja jednačine (29.1). Ako je to moguće, rešenje (29.2) ćemo zvati **opšte rešenje** jednačine (29.1). Rešenje koje možemo dobiti izborom konstanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ je **partikularno rešenje**. Pre nego odgovorimo na to pitanje daćemo sledeće definicije.

Definicija 29.1. *Funkcije $f_i(x)$, $i = 1,2,\dots,n$ su* **linearno zavisne nad nekim intervalom** *I ako postoje brojevi c_i koji nisu svi jednaki nuli, takvi da je za svako $x \in I$*

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_nf_n(x) = 0. \tag{29.3}$$

Funkcije $f_i(x)$, koje nisu linearno zavisne nad intervalom I tj. kod kojih iz (29.3) *sledi da je $c_i = 0$, za svako $i = 1,2,\dots,n$, su* **linearno nezavisne.**

Definicija 29.2. *Ako su funkcije $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, $(n-1)$ puta neprekidno diferencijabilne $(n \geq 2)$ nad intervalom I, tada se determinanta*

$$W(x) = W(y_1, y_2, \dots y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

naziva **determinanta Vronskog**[1] *od*

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, $x \in I$.

J. M. H. Wronski

Gornja definicija služi za ispitivanje linearne nezavisnosti rešenja jednačine (29.1).

Lema 29.1. *Neka su funkcije* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, $(n-1)$ *puta neprekidno diferencijabilne nad intervalom* I. *Ako su funkcije* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *linearno zavisne nad intervalom* I, *tada je* $W(x) = 0$ *za svako* $x \in I$.

Dokaz. Zaista, ako su funkcije $y_1, y_2, \dots, y_n$ linearno zavisne nad I, tada postoje konstante $c_1, c_2, \dots, c_n$ koje nisu sve istovremeno jednake nuli, tako da je

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \text{ za svako } x \in I.$$

Ako je, na primer, $c_n \neq 0$ tada je

$$y_n = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-1} \quad (\alpha_i = \frac{-c_i}{c_n}, \ i = 1,2,\dots,n-1).$$

Sledi de je poslednja kolona u $W(x)$ linearna kombinacija prethodnih kolona, pa je $W(x) = 0$.

Lema 29.2. *Ako su rešenja* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *homogene linearne jednačine* $L_n[y] = 0$ *linearno nezavisna, tada je* $W(x) \neq 0$, *za svako* $x \in I$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da su posmatrana rešenja linearno nezavisna, ali da postoji $x_0 \in I$ takvo da je $W(x_0) = 0$. Posmatrajmo sledeći homogeni sistem algebarskih jednačina

$$\begin{aligned} &c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0, \\ &c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = 0, \\ &\vdots \\ &c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0, \end{aligned} \tag{29.4}$$

[1] J. M. H. Wronski (1778-1853), poljski matematičar

Kako je determinanta sistema (29.4) $D_s = W(x_0) = 0$, to je homogeni sistem neodređen, pa postoji rešenje sistema (29.4) $(c_1, c_2, ..., c_n) \neq (0,0,...,0)$.

Pomoću tog rešenja $(c_1, c_2, ..., c_n) \neq (0,0,...,0)$ formiramo rešenje

$$\varphi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

date homogene linearne jednačine. Zbog (29.4) ono zadovoljava početni uslov

$$\varphi(x_0) = 0,\ \varphi'(x_0) = 0, ...,\ \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Isti uslov zadovoljava i rešenje $\phi(x) \equiv 0$. Stoga na osnovu jedinstvenosti rešenja početnog problema (Teorema 28.1.) sledi da je $\phi(x) \equiv \varphi(x)$, odnosno da je

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \text{ za sve } x \in I.$$

To je u suprotnosti sa pretpostavkom da su $y_i(x),\ i = 1,2,...,n$ linearno nezavisna rešenja nad intervalom I. Dakle $W(x) \neq 0$ za svako $x \in I$.

Kao posledica Leme 29.1. i Leme 29.2. dobija se sledeći rezultat.

Teorema 29.2. *Da bi* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *bila linearno nezavisna rešenja nad nekim intervalom* I *jednačine (29.1) potrebno je i dovoljno da bude*

$$W(x) \equiv W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) \neq 0 \text{ , za svako } x \in I. \tag{29.5}$$

Dokaz. Ako su rešenja linearno nezavisna tada je, prema Lemi 29.2. $W(x) \neq 0$ za svako $x \in I$. Ako je $W(x) \neq 0$, rešenja su linearno nezavisna. Zaista, ako su ona linearno zavisna, tada je, prema Lemi 29.1., $W(x) = 0$ za svako $x \in I$.

Dakle, zaključak je sledeći: za skup rešenja $\{ y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x) \}$ homogene linearne jednačine (29.1) ili je $W(x) = 0$ za svako $x \in I$ ili je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in I$.

Napomenimo da taj zaključak ne mora da važi u opštem slučaju, tj. za bilo koje linearno zavisne odnosno linearno nezavisne funkcije. Za linearno nezavisne funkcije nad intervalom I ne mora da je za svako $x \in I$, $W(x) \neq 0$, što se može videti iz sledećeg primera.

Primer 29.1. Ispitati linearnu zavisnost funkcija $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ nad R. Naći $W(x)$.

Rešenje. Iz $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0$ za svako $x \in R$ sledi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (za $x = 1$ je $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$; za $x = -1$ je $-\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, pa rešenje sistema $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ i

$-\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ je $(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$) to su funkcije y_1 i y_2 linearno nezavisne nad R. Kako je

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2,$$

sledi da je $W(0) = 0$, $W(x) \neq 0$ za svako $x \neq 0$. Δ

Primer 29.2. Da li funkcije $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ mogu biti rešenja nad skupom R neke homogene linearne jednačine oblika

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{29.6}$$

gde su $a_1(x)$ i $a_2(x)$ neprekidne funkcije za svako $x \in R$? Formirati homogenu linearnu jednačinu drugog reda čija su rešenja $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$.

Rešenje. Kako su $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ linearno nezavisne funkcije, to ove funkcije, zbog Leme 29.2., ne mogu da budu rešenja nad skupom R neke homogene linearne jednačine (29.1), jer je $W(0) = 0$. Ako su $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ rešenja neke linearne jednačine tada je rešenje te jednačine i funkcija $y(x) = c_1x + c_2x^2$, gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante. Iz $y(x) = c_1x + c_2x^2$, $y'(x) = c_1 + 2c_2x$ i $y''(x) = 2c_2$, sledi da je $c_2 = \dfrac{y''(x)}{2}$ i $c_1 = y'(x) - xy''(x)$, pa je $y(x) = xy'(x) - x^2y''(x) + \dfrac{x^2}{2}y''(x)$.

Dakle, tražena diferencijalna jednačina je

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Mogli smo homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, čija su rešenja funkcije $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$, dobiti direktnim uvrštavanjem tih funkcija u datu jednačinu. Naime, tada važi

$$a_1(x) + xa_2(x) = 0, \qquad 2a_0(x) + 2xa_1(x) + x^2a_2(x) = 0.$$

Ako uzmemo da je $a_2(x) = 2$, dobija se $a_1(x) = -2x$ i $a_0(x) = x^2$, pa jednačina glasi

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

a nju smo dobili prethodnim postupkom. Δ

Primetimo da ona nije oblika (29.1) gde je koeficijent uz y'' jednak jedinici i nije nikad jednak nuli. To je slučaj i sa opštom jednačinom $L_n[y] = 0$ za koju i važi Teorema 29.2.

Definicija 29.3. *Svaki skup od n linearno nezavisnih rešenja jednačine (29.1)* je **fundamentalni skup (sistem) rešenja (baza rešenja)** *jednačine (29.1).*

Teorema 29.2. *Postoji fundamentalni skup rešenja jednačine (29.1) nad intervalom I.*

Dokaz. Neka je x_0 proizvoljna tačka iz intervala I i neka su $y_i(x)$, $i = 1,2,\dots,n$ rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine $L_n[y] = 0$ koja zadovoljavaju sledeći početni uslov:

$$\begin{aligned}
&y_1(x_0) = 1,\ y_1'(x_0) = 0,\ y_1''(x_0) = 0,\dots,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0,\\
&y_2(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1,\ y_2''(x_0) = 0,\dots,\ y_2^{(n-1)}(x_0) = 0,\\
&\vdots\\
&y_n(x_0) = 0,\ y_n'(x_0) = 0,\ y_n''(x_0) = 0,\dots,\ y_n^{(n-1)}(x_0) = 1
\end{aligned}$$

(takva rešenja postoje na osnovu osnovne Teoreme 28.1. o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja).

Rešenja $y_i(x)$ su linearno nezavisna nad intervalom I. Ako bi bila linearno zavisna sledilo bi da je $W(x) = 0$ za svako x iz intervala I pa i za $x = x_0$. Za x_0 imamo da je

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ (kontradikcija).}$$

Lema 29.3. (***Formula Ljuvila***[1], ***Abela***[2])

Neka je $x_0 \in I$ proizvoljna tačka iz intervala I, a $\{ y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja homogene linearne jednačine (29.1), tada je za svako $x \in I$

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}$$

(29.7)

Dokaz. Dokaz ćemo dati za slučaj $n = 2$.

Posmatrajmo homogenu linearnu jednačinu drugog reda

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 .$$

Kako je

---

[1] J. Liouville (1809-1882), francuski matematičar

[2] N. H. Abel (1802-1829), norveški matematičar

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

J. Liouville

to je

$$W'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x). \tag{29.8}$$

Iz

$$y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x) = 0;$$
$$y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x) = 0,$$

sledi da je

$$y_1''(x) = -a_1(x)y_1'(x) - a_2(x)y_1(x);$$
$$y_2''(x) = -a_1(x)y_2'(x) - a_2(x)y_2(x),$$

N. H. Abel

pa se zamenom u (29.6.) dobija

$$W'(x) = -a_1(x)y_1(x)y_2'(x) + a_1(x)y_2(x)y_1'(x) = -a_1(x)W(x).$$

Kako su rešenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ linearno nezavisna to je

$W(x) \neq 0$, pa je $\dfrac{dW(x)}{W(x)} = -a_1(x)\,dt$, tj. $\displaystyle\int_{W_0(x)}^{W(x)} \frac{dz}{z} = -\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt$. Sledi da je

$\ln\left|\dfrac{W(x)}{W(x_0)}\right| = -\displaystyle\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt$, tj. $\left|\dfrac{W(x)}{W(x_0)}\right| = e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt}$. Odavde je

$$|W(x)| = |W(x_0)|\,e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt}.$$

Kako su $W(x)$ i $W(x_0)$ istog znaka ($W(x)$ je neprekidna funkcija različita od nule), to je

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt}.$$

Ako su rešenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ linearno zavisna tada je $W(x) = 0$ za svako $x \in I$, pa obrazac (29.7) očigledno važi i za ovaj slučaj.

Posledica 29.1. Rešenja $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ homogene linearne jednačine (29.1) su linearno nezavisna nad intervalom I ako je $W(x_0) \neq 0$ za neku tačku $x_0 \in I$.

Tada je, naime, $W(x) \neq 0$ za svako $x \in I$, jer je eksponencijalna funkcija koja množi $W(x_0)$ uvek pozitivna.

To je očigledno velika prednost u odnosu na Teoremu 29.2., gde za ispitivanje linearne nezavisnosti treba rešiti nejednačinu $W(x) \neq 0$.

Primer 29.3. Pokazati da postoje rešenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ homogene linearne jednačine $y'' + y' + xy = 0$ za koja važi da je

$$y_1(0) = 1,\quad y_1'(0) = 0,\quad y_2(0) = 0,\quad y_2'(0) = 1 \text{ i } W(1) = e^{-1}.$$

Rešenje. Pre svega rešenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ postoje i jednoznačno su određena (Teorema 28.1.). Kako je $W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, to je

$W(x) = W(0)e^{-\int_0^x dt} = e^{-x}$, za svako $x \in R$. Sledi da je $W(1) = e^{-1}$, što je i trebalo pokazati. Δ

Sledeća teorema pokazuje kako se formira opšte rešenje homogene linearne jednačine ako je poznat jedan njen fundamentalni skup rešenja.

Teorema 29.4. *Ako je* $\{ y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \}$ *fundamentalni skup rešenja homogene linearne jednačine* $L_n[y] = 0$ *nad intervalom* I, *tada je opšte rešenje te jednačine nad intervalom* I, *dato obrascem*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x), \tag{29.8}$$

gde su $c_1, c_2, \dots, c_n$ *proizvoljni realni brojevi.*

Dokaz. Neka su $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ proizvoljni realni brojevi i neka je $h(x)$ rešenje jednačine (29.1) koje zadovoljava početni uslov

$$h(x_0) = \alpha_0,\ h'(x_0) = \alpha_1, \dots,\ h^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}\ ,\ x_0 \in I.$$

Pokažimo da se u rešenju

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \tag{29.9}$$

konstante $c_1, c_2, \dots, c_n$ mogu odrediti tako da i $y(x)$ zadovoljava isti početni uslov. Uvrštavajući početni uslov u (29.9) dobićemo sledeći sistem algebarskih jednačina

$$\begin{aligned} &c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) = \alpha_0 \\ &c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) = \alpha_1 \\ &\vdots \\ &c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \end{aligned} \tag{29.10}$$

Determinanta D_s sistema (29.8) je $D_s = W(x_0)$. Kako je $W(x_0) \neq 0$, jer su rešenja $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ linearno nezavisna, to je sistem (29.10) određen. Znači rešenje

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

gde je $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ rešenje sistema (29.10), zadovoljava isti početni uslov kao i rešenje $h(x)$. Sada je zbog jednoznačnosti rešenja početnog problema $y(x) = h(x)$ za svako $x \in I$, čime je dokaz završen.

30. HOMOGENA JEDNAČINA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

To je jednačina oblika (29.1) u kojoj su svi koeficijenti a_i, $i = 1,2,\ldots,n$ realne konstante, tj.

$$L_n[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{30.1}$$

U ovom slučaju se fundamentalni skup rešenja može naći bez ikakve integracije već čisto algebarski. Onda se opšte rešenje (dakle sva rešenja) dobija prema Teoremi 29.4.

Stavimo $y = e^{kx}$, gde je k proizvoljna konstanta. Tada je $y^{(i)} = k^i e^{kx}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Dobijamo da je $L_n[e^{kx}] = e^{kx} P_n(k)$, gde je

$$P_n(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n. \tag{30.2}$$

Kako je $e^{kx} \neq 0$, to je $L_n[e^{kx}] = 0$ samo ako je k nula polinoma $P_n(k)$. Polinom $P_n(k)$ se zove **karakterističan polinom**, a jednačina

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0, \tag{30.3}$$

karakteristična jednačina, diferencijalne jednačine (30.1). Neka su $k_1, k_2, \ldots, k_n$ koreni (rešenja) karakteristične jednačine (30.3). Tada su funkcije

$$y_i = e^{k_i x}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

rešenja diferencijalne jednačine (30.1) za svako $x \in (-\infty, \infty)$.

Primetimo da ako je, na primer, koren k_j jednačine (30.3) kompleksan broj (imaginarni deo je različit od nule), tada je $y_j = e^{k_j x}$ kompleksna funkcija realne promenljive x. Kako ona zadovoljava jednačinu (30.1) za svako x, možemo proširiti našu definiciju rešenja i na ovakav slučaj. Međutim, nas ovde interesuju samo realna rešenja, za koja smo jedino i dokazali sva osnovna tvrđenja, pa zbog toga iz dobijenog komplesnog formiramo realna rešenja na osnovu sledeće leme.

Lema 30.1. Ako je $y(x) = u(x) + i\,v(x)$ kompleksno rešenje date linearne jednačine (29.1), tada su $u(x)$ i $v(x)$ dva realna rešenja jednačine (29.1).

Dokaz. Prema Lemi 28.1. je

$$L_n[y(x)] = L_n[u(x) + iv(x)] = L_n[u(x)] + iL_n[v(x)].$$

Kako je po pretpostavci $L_n[y(x)] = 0$, to je $L_n[u(x)] = 0$ i $L_n[v(x)] = 0$, pa su realni deo $u(x)$ i imaginarni deo $v(x)$ kompleksnog rešenja $y_j(x)$ dva realna rešenja date homogene linearne jednačine.

Razlikovaćemo četiri slučaja:

1. Koreni karakteristične jednačine su realni i jednostruki (prosti)

Znači, karakteristična jednačina ima n različitih realnih korena k_i, $i = 1,2,\dots,n$ pa dobijamo realna rešenja $y_i = e^{k_i x}$, $i = 1,2,\dots,n$. Ta rešenja čine fundamentalni skup rešenja jednačine (30.1), jer je $W(x) \neq 0$ za svako x:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \dots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \dots & k_n e^{k_n x} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \dots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2+\dots+k_n)x} V,$$

gde je

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Može se pokazati da je $V = \prod_{1 \le j < i \le n} (k_i - k_j) \neq 0$, jer je $k_i \neq k_j$ za $i \neq j$, s obzirom da su svi k_i međusobno različiti. Tada je opšte rešenje, prema Teoremi 29.4., dato sa

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{k_i x}.$$

2. Karakteristična jednačina ima kompleksne i jednostruke korene

Neka je $k_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\beta_j \neq 0$ jedan takav koren. Tada su, prema Lemi 30.1, rešenja jednačine (30.1) data sa

$$y_{j_1}(x) = \mathrm{Re}(e^{(\alpha_j + i\beta_j)x}) = \mathrm{Re}(e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x + ie^{\alpha_j x}\sin\beta_j x) = e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x$$

$$y_{j_2}(x) = \mathrm{Im}(e^{(\alpha_j + i\beta_j)x}) = \mathrm{Im}(e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x + ie^{\alpha_j x}\sin\beta_j x) = e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x.$$

Lako je proveriti da su ta dva realna rešenja linearno nezavisna. Primetimo, dalje, da iako je i $\overline{k_j} = \alpha_j - i\beta_j$ koren karakteristične jednačine nema dodatnih rešenja jednačine (30.1), jer je $\mathrm{Re}(e^{\overline{k_j}x}) = y_{j_1}(x)$, a $\mathrm{Im}(e^{\overline{k_j}x}) = -y_{j_2}(x)$ je linearno zavisno sa $y_{j_2}(x)$.

3. Karakteristična jednačina ima realne višestruke korene

Neka je k_i realan koren višestrukosti m, $(m > 1)$ jednačine (30.3). Tada su rešenja jednačine (30.1) sledeće funkcije

$$y_{i_1}(x) = e^{k_i x},\ y_{i_2}(x) = xe^{k_i x}, \ldots,\ y_{i_m}(x) = x^{m-1}e^{k_i x},$$

i ta rešenja su linearno nezavisna.

Kako je $L_n[e^{kx}] = e^{kx}P_n(k)$, to se diferenciranjem po k dobija

$$L_n[x e^{kx}] = x e^{kx}P_n(k) + e^{kx}P_n'(k) = e^{kx}(xP_n(k) + P_n'(k)).$$

Kako je k_i koren višestrukosti m, to je

$$P_n(k_i) = P_n'(k_i) = \ldots = P_n^{(m-1)}(k_i) = 0 \text{ i } P_n^{(m)}(k_i) \neq 0.$$

Stoga se iz $L_n[xe^{kx}] = e^{kx}(xP_n(k) + P_n'(k))$, stavljajući $k = k_i$ dobija da je $L_n[xe^{k_i x}] = 0$, tj. da je funkcija $xe^{k_i x}$ takođe rešenje diferencijalne jednačine (30.1). Diferenciranjem $(m-1)$ puta po k dobijamo na isti način da su funkcije date sa

$$y_{i_1}(x) = e^{k_i x},\ y_{i_2}(x) = xe^{k_i x}, \ldots,\ y_{i_m}(x) = x^{m-1}e^{k_i x},$$

rešenja jednačine (30.1). Za dokaz linearne nezavisnosti vidi [15].

4. Karakteristična jednačina ima višestruke kompleksne korene

Rezonujući kao i u slučaju 3. može se videti da ako je $k_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\beta_j \neq 0$ kompleksan koren jednačine (30.3) višestrukosti $m\ (m > 1)$, tada su $2m$ realnih rešenja jednačine (30.1) sledeće funkcije

$$y_{j_1}(x) = e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x,\ y_{j_2}(x) = xe^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, \ldots, y_{j_m}(x) = x^{m-1}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x,$$

$$y_{j_{m+1}}(x) = e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, y_{j_{m+2}}(x) = xe^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, \ldots, y_{j_{2m}}(x) = x^{m-1}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x,$$

i ta rešenja su linearno nezavisna. Za dokaz linearne nezavisnosti vidi [15].

Fundamentalni skup rešenja jednačine sa konstantnim koeficijentima (30.1) formira se, dakle, na sledeći način:

- ako je k_i realan jednostruki koren jednačine (30.3) tada u fundamentalni skup rešenja ulazi funkcija $e^{k_i x}$,
- ako je k_i realan koren višestrukosti $m\ (m > 1)$ jednačine (30.3) tada u

fundamentalni skup rešenja ulazi sledećih m funkcija (rešenja)

$$e^{k_j x}, xe^{k_j x}, \ldots, x^{m-1}e^{k_j x},$$

- ako je $k_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\beta_j \neq 0$ jednostruki kompleksan koren jednačine (30.3), tada u fundamentalni skup rešenja ulaze sledeća dva realna rešenja

$$e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x \text{ i } e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x,$$

- ako su $k_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\beta_j \neq 0$ kompleksni koreni višestrukosti m $(m > 1)$ jednačine (30.3) tada u fundamentalni skup rešenja ulaze sledećih $2m$ realnih rešenja

$$e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x,\ xe^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x,$$

$$e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x,\ xe^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x.$$

Opšte rešenje je, prema Teoremi 29.4., linearna kombinacija fundamentalnog skupa rešenja.

Primer 30.1. Naći opšte rešenje sledećih diferencijalnih jednačina

1. $y''' - y'' - 12y' = 0$, 2. $y''' + y'' - 3y' - 3y = 0$,
3. $y'' - 6y' + 10y = 0$, 4. $y'' + 2y' + y = 0$,
5. $y^{IV} - 10y''' + 53y'' - 124y' + 100y = 0$,
6. $y^{VI} - 2y^{V} + 3y^{IV} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$.

Rešenje.

1. $k^3 - k^2 - 12k = 0 \Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = 4,\ k_3 = -3,$ pa je opšte rešenje $y(x) = c_1 + c_2e^{4x} + c_3e^{-3x}$.

2. $k^3 + k^2 - 3k - 3 = 0 \Rightarrow k_1 = -1,\ k_2 = \sqrt{3},\ k_3 = -\sqrt{3},$ pa je opšte rešenje $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{\sqrt{3}x} + c_3e^{-\sqrt{3}x}$.

3. $k^2 - 6k + 10 = 0 \Rightarrow k_1 = 3 + i,\ k_2 = 3 - i,$ pa je opšte rešenje $y(x) = e^{3x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$.

4. $k^2 + 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -1,$ pa je opšte rešenje $y(x) = e^{-x}(c_1 + c_2x)$.

5. $k^4 - 10k^3 + 53k^2 - 124k + 100 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 2,\ k_3 = 3 + 4i$ i $k_4 = 3 - 4i$, pa je opšte rešenje $y(x) = e^{2x}(c_1 + c_2x) + e^{3x}(c_3\cos 4x + c_4\sin 4x)$.

6. $k^6 - 2k^5 + 3k^4 - 4k^3 + 3k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1,\ k_3 = k_4 = i,\ k_5 = k_6 = -i$ pa je opšte rešenje $y(x) = e^x(c_1 + c_2x) + c_3\cos x + c_4\sin x + c_5x\cos x + c_6x\sin x)$. Δ

Primer 30.2. Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1, k_4 = -1, k_5 = 3 + i, k_6 = 3 - i,$$
$$k_7 = k_8 = k_9 = 2 + i, k_{10} = k_{11} = k_{12} = 2 - i \ .$$

Kako glasi opšte rešenje date jednačine?

Rešenje. Opšte rešenje je

$$y(x) = e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) +$$
$$+ e^{2x}(c_7 \cos x + c_8 x \cos x + c_9 x^2 \cos x + c_{10} \sin x + c_{11} x \sin x + c_{12} x^2 \sin x).\Delta$$

31. NEHOMOGENA LINEARNA JEDNAČINA

Teorema 31.1. Neka je $y_p(x)$ neko (partikularno) rešenje jednačine

$$L_n[y] = f(x) \tag{31.1}$$

i $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine $L_n[y] = 0$, tada je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{31.2}$$

opšte rešenje jednačine (31.1) (obrazac (31.2) daje sva rešenja jednačine (31.1), pa se ono zbog toga zove **opšte rešenje** diferencijalne jednačine, tj. svako rešenje jednačine (31.1) može se dobiti izborom konstanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$).

Dokaz. Prvo pokažimo da je $y(x)$ rešenje jednačine (31.1).

Iz linearnosti operatora L_n sledi da je

$L_n[y(x)] = L_n[y_h(x) + y_p(x)] = L_n[y_h(x)] + L_n[y_p(x)] = 0 + f(x) = f(x)$. Dakle, $y(x)$ je rešenje. Treba još pokazati da je ono i opšte rešenje jednačine (31.1), tj. da sadrži svako rešenje koje zadovoljava proizvoljni početni uslov $y^i(x_0) = \alpha_i$, $i = 0,1,\ldots,n-1$ (tj. **partikularno rešenje**), gde su α_i proizvoljni realni brojevi, x_0 proizvoljna tačka iz intervala I i $y^{(0)}(x) = y(x)$.

Neka je $\{ y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x) \}$ jedan fundamentalni skup rešenja odgovarajuće homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$. Tada je opšte rešenje $y_h(x)$ odgovarajuće homogene jednačine $L_n[y] = 0$ dato sa

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x). \tag{31.3}$$

Neka su $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in R$ proizvoljni realni brojevi i neka je $h(x)$ rešenje jednačine (9.1) koje zadovoljava početni uslov:

$h(x_0) = \alpha_0$, $h'(x_0) = \alpha_1, \dots,$ $h^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$, u proizvoljnoj tački $x_0 \in I$.

Pokazaćemo da se u rešenju

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p(x)$$

konstante $c_1, c_2, \dots, c_n$ mogu odrediti tako da i funkcija $y(x)$ zadovoljava isti početni uslov. Uvrštavajući početni uslov u jednačinu (31.3) dobijamo sledeći sistem algebarskih jednačina

$$\begin{aligned} &c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = \alpha_0 - y_p(x_0) \\ &c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = \alpha_1 - y_p'(x_0) \\ &\vdots \\ &c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} - y_p^{(n-1)}(x_0)\,. \end{aligned} \tag{31.4}$$

Determinanta sistema D_s od (31.4) je $D_s = W(x_0)$. Kako je $W(x_0) \neq 0$ rešenja $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ od $L_n[y] = 0$ su linearno nezavisna te je sistem (31.4) zaista određen. Znači, rešenje $g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p(x)$, gde je $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ rešenje sistema (31.3) zadovoljava isti početni uslov kao i rešenje $h(x)$. Sada je zbog jednoznačnosti rešenja početnog problema $g(x) = h(x)$, za svako $x \in I$, čime je dokaz završen.

Iz prethodnog razmatranja se vidi da je za nalaženje opštih rešenja jednačine (31.1) potrebno znati jedno njeno partikularno rešenje $y_p(x)$. Ono se može naći sledećim postupkom.

Metod varijacije konstanti

Teorema 31.2. *Neka je* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ *jedan fundamentalni skup rešenja jednačine (29.1) nad intervalom* I, *tada je partikularno rešenje* $y_p(x)$ *nehomogene jednačine (31.1) koje zadovoljava početni uslov* $y_p^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)} = 0$ $(i = 0,1,2,\dots,n-1)$ *dato sa*

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s)\, ds\,, \tag{31.5}$$

gde je x_0 *proizvoljna tačka iz intervala* I, *a* $W_i(s)$, $i = 1,2,\dots,n$, *je determinanta koja je iz determinante Wronskog funkcija* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, *dobijena kad se* i *- ta kolona zameni sa* $col(0,0,\dots,1)$ *dok su ostale kolone iste kao i kod* $W(x)$.

Dokaz. Neka je $\{ y_1, y_2, ..., y_n \}$ fundamentalni skup rešenja jednačine $L_n[y] = 0$ nad intervalom I. Pokušaćemo da odredimo funkcije $c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$ tako da

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + ... + c_n(x)y_n(x), \tag{31.6}$$

bude partikularno rešenje nad intervalom I jednačine

$$L_n[y] = f(x). \tag{31.7}$$

Ako diferenciramo obe strane obrasca (31.6) i kao prvi uslov za funkcije $c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$ uzmemo

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + ... + c_n'(x)y_n(x) = 0, \tag{31.8}$$

dobijamo

$$y_p'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + ... + c_n(x)y_n'(x). \tag{31.9}$$

Ako ponovo diferenciramo obe strane jednačine (31.9) i kao drugi uslov za funkcije $c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$ uzmemo

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + ... + c_n'(x)y_n'(x) = 0, \qquad (31.10$$

dobijamo

$$y_p''(x) = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + ... + c_n(x)y_n''(x). \tag{31.11}$$

Nastavljajući dati postupak, dobijamo na kraju da je

$$c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + ... + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \tag{31.12}$$

$$y_p^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + ... + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x) \tag{31.13}$$

Sada je

$$\begin{aligned} y_p^{(n)}(x) = {} & (c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + ... + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)) + \\ & + (c_1(x)y_1^{(n)}(x) + c_2(x)y_2^{(n)}(x) + ... + c_n(x)y_n^{(n)}(x)) \;. \end{aligned}$$

Ako sada zamenimo u (31.6) $y_p(x), y_p'(x), ..., y_p^{(n)}(x)$, budući da zahtevamo da $y_p(x)$ bude rešenje, dobićemo, vodeći računa da je $\{ y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja od $L_n[y] = 0$, da je

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + ... + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \tag{31.14}$$

Determinanta linearnog (algebarskog) sistema

$$\begin{aligned}
&c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \ldots + c_n'(x)y_n(x) = 0, \\
&c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \ldots + c_n'(x)y_n'(x) = 0, \\
&\vdots \\
&c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x),
\end{aligned} \tag{31.15}$$

je $W(x)$ i ona je različita od nule jer su $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ rešenja odgovarajuće homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$ linearno nezavisna po pretpostavci, pa se rešavanjem sistema (31.15) po $c_i'(x)$ dobija

$$c_i'(x) = \frac{Dc_i}{D} = \frac{W_i(x)f(x)}{W(x)}, \qquad i = 1,2,...,n.$$

Integracijom nad intervalom (x_0, x) za $x > 0$ ((x, x_0) za $x < 0$) sledi da je

$$c_i(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\frac{W_i(s)}{W(s)} f(s)\,ds, \quad i = 1,2,...,n \quad ,$$

a zamenom tako dobijenih $c_1(x), c_2(x),..., c_n(x)$ u obrazac (31.6) dobija se

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x)\int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s)\,ds$$

što predstavlja obrazac (31.5).

Na primer, za $n = 2$ odgovarajući sistem za određivanje funkcija $c_1(x)$ i $c_2(x)$ glasi

$$\begin{aligned}
&c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0, \\
&c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x),
\end{aligned}$$

a za $n = 3$ odgovarajući sistem je

$$\begin{aligned}
&c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_3'(x)y_3(x) = 0 \\
&c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_3'(x)y_3'(x) = 0 \\
&c_1'(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2''(x) + c_3'(x)y_3''(x) = f(x).
\end{aligned}$$

Primer 31.1. Naći opšte rešenje jednačine $y''' - y'' = e^x$.

Rešenje. Posmatrajmo homogeni deo date jednačine $y''' - y'' = 0$. Njena karakteristična jednačina je $k^3 - k^2 = k^2(k-1) = 0$, čiji su koreni $k_1 = k_2 = 0$ i $k_3 = 1$, pa je opšte rešenje homogenog dela $y_h(x)$ dato obrascem $y_h(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x$.

Metodom varijacije konstanti dobijamo sledeći sistem jednačina

$$c_1' + c_2'x + c_3'e^x = 0; \qquad c_2' + c_3'e^x = 0; \qquad c_3'e^x = e^x.$$

Dalje je

$$c_3' = 1 \Rightarrow c_3 = x + C_3; \qquad c_2' = -c_3' e^x = -e^x \Rightarrow c_2 = -e^x + C_2;$$

$$c_1' = -c_2' x - c_3' e^x \Rightarrow c_1' = (x-1)\,e^x,$$

tj. $c_1 = (x-2)\,e^x + C_1$. Kako je $y_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$ opšte rešenje homogenog dela jednačine, $y_p(x) = (x-2)e^x$ jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine, to je $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + (x-2)e^x$ opšte rešenje date nehomogene jednačine. Δ

Primetimo da se taj rezultat dobija direktno koriščenjem obrazaca (31.5) i (31.2).

Nehomogena jednačina sa konstantnim koeficijentima. Metod jednakih koeficijenata

Već smo se upoznali sa metodom varijacije konstanti, kojom se može poznavajući fundamentalan skup rešenja homogenog dela linearne jednačine odrediti partikularno rešenje nehomogene jednačine. Ako je jednačina linearna sa konstantnim koeficijentima oblika

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(x) \tag{31.16}$$

pri čemu je $f(x)$ funkcija specijalnog oblika, jedno partikularno rešenje jednačine (31.16) može se odrediti i jednostavnijim postupkom poznatim kao **metod jednakih koeficijenata**.

Neka je $f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$, gde su α i β realni brojevi, a $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi od kojih je bar jedan različit od nula polinoma. Ako $P(x)$ nije nula polinom, sa n označimo stepen polinoma $P(x)$. Slično, ako $Q(x)$ nije nula polinom, sa m označimo stepen polinoma $Q(x)$. Pretpostavimo da bar jedan od polinoma $P(x)$ ili $Q(x)$ je različit od nula polinoma.

Partikularno rešenje nehomogene jednačine tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^r e^{\alpha x}(T_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x),$$

gde su $T_k(x)$ i $R_k(x)$ nepoznati polinomi stepena k ,.pri čemu je: $k = \max\{m, n\}$ ako su oba polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ različita od nula polinoma, $k = n$ ako je $Q(x)$ nula polinom i $k = m$ ako je $P(x)$ nula polinom, a r višestrukost korena $\alpha + \beta i$ u karakterističnoj jednačini odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine. Ako $\alpha + \beta i$ nije koren karakteristične jednačine, tada se uzima da je $r = 0$. Sada diferenciramo $y_p(x)$ n puta i uvrstimo u datu jednačinu, odakle određujemo nepoznate polinome $T_k(x)$ i $R_k(x)$ (za dokaz vidi [15]).

Ponekad je korisno koristiti i ovu činjenicu. Ako je $L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$ i ako je $y_1(x)$ partikularno rešenje jednačine $L_n[y] = f_1(x)$, a $y_2(x)$ partikularno rešenje jednačine $L_n[y] = f_2(x)$ (oba nad intervalom I), tada je $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ partikularno rešenje jednačine $L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$ nad intervalom I.
To sledi neposredno iz

$$L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2] = f_1(x) + f_2(x) .$$

Primer 31.2. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''' - y'' = e^x + \sin x + x$.

Rešenje. Karakteristična jednačina homogene jednačine $y''' - y'' = 0$ je $k^3 - k^2 = 0$ čiji su koreni $k_1 = k_2 = 0$ i $k_3 = 1$.

Opšte rešenje homogenog dela jednačine je

$$y_h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x .$$

$y''' - y'' = e^x$, $y_{p_1}(x) = Axe^x$ (1 je koren karakteristične jednačine)

$$y'_{p_1} = Ae^x(x+1),\ y''_{p_1} = Ae^x(x+2),\ y'''_{p_1} = Ae^x(x+3) .$$

Kada uvrstimo u datu jednačinu dobićemo da je $A = 1$, pa je $y_{p_1}(x) = xe^x$.

$y''' - y'' = \sin x$,

$y_{p_2}(x) = A\cos x + B\sin x$ (i nije koren karakteristične jednačine).

$$y'_{p_2} = -A\sin x + B\cos x;\quad y''_{p_2} = -A\cos x - B\sin x;$$
$$y'''_{p_2} = A\sin x - B\cos x .$$

$$(A + B)\sin x + (A - B)\cos x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2},$$

pa je $y_{p_2}(x) = \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

$y''' - y'' = x$, $y_{p_3}(x) = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2$

(0 je dvostruki koren karakteristične jednačine)

$$y'_{p_3} = 3Ax^2 + 2Bx,\ y''_{p_3} = 6Ax + 2B,\ y'''_{p_3} = 6A .$$

Kada sve sredimo, dobija se $y_{p_3}(x) = -\dfrac{1}{6}x^2(x+3)$.

Opšte rešenje je

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + xe^x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) - \frac{1}{6}x^2(x+3) . \Delta$$

32. OJLEROVA JEDNAČINA

To je jednačina oblika

$$L_n[y] \equiv (ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x)$$

gde su a_i, $i = 1,2,...,n$, $a \neq 0$ i b konstante. U daljem izlaganju pretpostavićemo da je $a = 1$ i $b = 0$, tj. izučavaćemo Ojlerovu diferencijalnu jednačinu oblika

$$L_n[y] \equiv x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}xy' + a_n y = f(x), \qquad (32.1)$$

gde su a_i, $i = 1,2,...,n$ konstante.Dovoljno je posmatrati odgovarajući homogeni deo, tj. homogenu Ojlerovu diferencijalnu jednačinu. Ako znamo da nađemo njeno opšte rešenje tada znamo da nađemo i opšte rešenje jednačine (32.1).Ona je jedna od retkih linearnih jednačina sa promenljivim koeficijentima koje se mogu rešiti. Smenom $|x| = e^t$, $x \neq 0$ (uzmimo da je $x > 0$), ona se svodi na jednačinu sa konstantnim koeficijentima. Naime,

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}; \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}; \quad x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^2} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt},$$

i matematičkom indukcijom se može pokazati da je za svaki prirodan broj $k > 1$,

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k} = \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt} - 1)...(\frac{d}{dt} - k + 1)y$$

pa se lako može proveriti tvrđenje.

Primetimo još da se koeficijent uz $y^{(n)}$ anulira za $x = 0$ pa se zbog toga osnovni rezultati o linearnim jednačinama počevši od egzistencije i jedinstvenosti rešenja ovde ne mogu primeniti ni nad jednim intervalom koji sadrži tačku nula. Stoga ćemo jednačinu (za slučaj $n = 2$) detaljno analizirati.

Drugi način da se ona reši sastoji se u tome da se potraže rešenja u obliku $y = |x|^r$, $x \neq 0$ (uzmimo da je $x > 0$). Zamenjujući y, y' i y'' u jednačinu dobija se

$$L_2(x^r) = q(r)x^r \qquad (32.2)$$

gde je $q(r) = r(r-1) + a_1 r + a_2$.

Ako su r_1 i r_2 dva različita rešenja jednačine $q(r) = 0$, tada su

$$y_1(x) = x^{r_1} \text{ i } y_2(x) = x^{r_2}$$

dva rešenja Ojlerove jednačine za $x > 0$. Ona su linearno nezavisna što je lako videti.

Neka su c_1 i c_2 takve konstante da za $x > 0$ važi

$$c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} = 0,$$

odnosno

$$c_1 + c_2 x^{r_1 - r_2} = 0. \tag{32.3}$$

Diferenciranjem se dobija $(r_1 - r_2)c_2 x^{r_1 - r_2 - 1} = 0$, pa je $c_2 = 0$, zbog čega sledi iz jednačine (32.3) da je i $c_1 = 0$.

Ako je $r_1 = r_2$, tada je $q(r_1) = 0$ i $q'(r_1) = 0$. Diferenciranjem jednačine (32.2) po r dobija se

$$\frac{\partial}{\partial r}(L_2(t^r)) = L_2(t^r \ln x) = (\,q'(r) + q(r)\ln x\,)\,x^r,$$

pa je za $r = r_1$, $L_2(x^r \ln x) = 0$. Dakle, pored $y_1(x) = x^{r_1}$ i $y_2(x) = x^{r_1}\ln x$ je rešenje koje odgovara korenu r_1. Da su ta dva rešenja linearno nezavisna pokazuje se kao u prethodnom slučaju.

Za $x < 0$ lako se proverava da su,

za $r_1 \neq r_2$,

$$y_1(x) = (-x)^{r_1},\ y_2(x) = (-x)^{r_2},$$

a za $r_1 = r_2$,

$$y_1(x) = (-x)^{r_1},\ y_2(x) = (-x)^{r_1}\ln(-x)$$

linearno nezavisna rešenja.

Sledi, dakle, da Ojlerova jednačina $L_2(x) = 0$ ima kao fundamentalni skup rešenja, za $x \neq 0$:

a) $y_1(x) = |\,x\,|^{r_1}$ i $y_2(x) = |\,x\,|^{r_2}$, ako su r_1 i r_2 realni i različiti,

b) $y_1(x) = |\,x\,|^{r_1}$ i $y_2(x) = |\,x\,|^{r_1}\ln|\,x\,|$, $x \neq 0$, ako su r_1 i r_2 realni i jednaki

c) $y_1 = \mathrm{Re}(|\,x\,|^{\alpha+i\beta}) = \mathrm{Re}(|\,x\,|^{\alpha} e^{\ln|x|^{i\beta}}) = \mathrm{Re}(|\,x\,|^{\alpha} e^{i\beta\ln|x|}) = |\,x\,|^{\alpha}\cos\ln|\,x\,|$,

$y_2 = \mathrm{Im}(|\,x\,|^{\alpha+i\beta}) = |\,x\,|^{\alpha}\sin\ln|\,x\,|$, ako je $r_1 = \alpha + i\beta$ kompleksan broj $(\beta \neq 0)$.

Ovaj se rezultat može uopštiti na slučaj jednačine n-tog reda.

Primer 32.1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^3 y''' + x^2 y'' + 3xy' - 8y = 0.$$

Rešenje. Stavimo $x = e^t$, $x > 0$.

Sada je: $y'_x = y'_t t'_x = \frac{1}{x} y'_t$, $y'' = -\frac{1}{x^2} y'_t + \frac{1}{x^2} y''_t = (y'' - y')\frac{1}{x^2}$,

$$y''' = -\frac{2}{x^3}(y'' - y') + \frac{1}{x^3}(y''' - y'') = \frac{1}{x^3}(y''' - 3y'' + 2y'),$$

pa diferencijalna jednačina postaje linearna sa konstantnim koeficijentima oblika

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0.$$

Karakteristična jednačina $r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = 0$ ima korene $r_1 = 2$, $r_2 = 2i$ i $r_3 = -2i$ pa je $\{e^{2t}, \sin 2t, \cos 2t\}$ jedan fundamentalni skup rešenja za jednačinu sa konstantnim koeficijentima, a $\{x^2, \sin(2\ln|x|), \cos(2\ln|x|)\}$, $x \neq 0$ je fundamentalni skup rešenja date Ojlerove jednačine, pa je opšte rešenje dato sa

$$y = c_1 x^2 + c_2 \sin(2\ln|x|) + c_3 \cos(2\ln|x|). \ \Delta$$

33. NAPOMENE I PRIMERI

1. $\boldsymbol{y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0}$ **(33.1)**

Ako znamo jedno rešenje $y_1(x)$, tj. ako važi

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0,$$

tada se drugo rešenje jednačine (33.1) koje je linearno nezavisno sa y_1 traži u obliku $y_2(x) = z(x)y_1(x)$, gde je $z(x)$ nepoznata funkcija. Iz $y_2 = zy_1$ sledi da je $y_2' = z'y_2 + zy_1'$ i $y_2'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1''$. Da bi funkcija $y_2(x)$ bila rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine (33.1), funkcija $z(x)$ treba da zadovoljava sledeću diferencijalnu jednačinu

$$y_1 z'' + (2y_1' + a_1(x)y_1)z' + (y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1)z = 0.$$

Kako je $y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0$, sledi da je nepoznata funkcija $z(x)$ rešenje diferencijalne jednačine $y_1 z'' + (2y_1' + a_1(x)y_1)z' = 0$. Data jednačina se metodom snižavanja reda ($z' = p$, $z'' = p'$) svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda.

Opšte rešenje je dato obrascem $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

Napomenimo ovde da smo u ovom slučaju mogli da ne tražimo rešenje $y_2(x)$, koje je linearno nezavisno sa rešenjem $y_1(x)$, nego da polaznu diferencijalnu jednačinu (33.1) rešavamo smenom $y(x) = z(x)y_1(x)$, gde je $z(x)$ nepoznata funkcija koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$y_1 z'' + (2y_1' + a_1(x)y_1)z' = 0. \tag{33.2}$$

Smenom $z' = p$, $z'' = p'$ diferencijalne jednačina (33.2) postaje

$$y_1 p' + (2y_1' + a_1(x)y_1)p = 0 , \tag{33.3}$$

a to je linearna diferencijalna jednačina prvog reda.

2. $$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{33.4}$$

Ako znamo jedno rešenje $y_1(x)$ homogenog dela jednačine (33.4), tj. ako važi $y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x) = 0$, tada drugo rešenje $y_2(x)$ homogenog dela, koje je linearno nezavisno sa $y_1(x)$ tražimo u obliku $y_2(x) = y_1(x)z(x)$, gde je $z(x)$ nepoznata funkcija. Opšte rešenje homogenog dela je tada dato obrascem $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, $c_1, c_2 \in R$.

Za opšte rešenje jednačine (33.4) dovoljno je još metodom varijacije konstanti naći jedno partikularno rešenje $y_p(x)$ jednačine (33.4). Tada je $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$ opšte rešenje jednačine (33.4). I u ovom slučaju važi napomena kao i za slučaj 1.

3. Ako znamo dva partikularna rešenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ jednačine (33.4), tj. ako važi

$$y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x) = f(x), \quad y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x) = f(x),$$

tada se oduzimanjem poslednje dve jednakosti dobija da je

$$(y_2(x) - y_1(x))'' + a_1(x)(y_2(x) - y_1(x))' + a_2(x)(y_2(x) - y_1(x)) = 0 .$$

Sledi da je funkcija $h(x) = y_2(x) - y_1(x)$ jedno rešenje odgovarajuće homogene jednačine. Dalje se postupa kao i u slučaju 2.

Primer 33.1. Naći opšte rešenje jednačine $(1 - x^2)y'' + 2y = 2$, $|x| < 1$, ako znamo da su $y_1(x) = 1$ i $y_2(x) = x^2$ njena dva partikularna rešenja.

Rešenje. Dva partikularna rešenja date jednačine su $y_1(x) = 1$ i $y_2(x) = x^2$, pa je rešenje homogene jednačine $(1 - x^2)y'' + 2y = 0$ funkcija

$$y_3(x) = y_2(x) - y_1(x) = x^2 - 1 .$$

$$y = z(x^2 - 1) ; y' = z'(x^2 - 1) + 2zx ; y'' = z''(x^2 - 1) + 4z'x + 2z .$$

$$-(x^2 - 1)^2 z'' + 4x(1 - x^2)z' + 2(1 - x^2)z + 2(x^2 - 1)z = 0 \; ; (x^2 - 1)^2 z'' + 4x(x^2 - 1)z' = 0 .$$

Iz $z' = p$, $z'' = p'$ sledi da je $(x^2 - 1)^2 p' + 4x(x^2 - 1)p = 0$.

$$p' + \frac{4px}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{4x}{x^2 - 1}dx \Rightarrow p = \frac{c_1}{(x^2 - 1)^2} .$$

$$z' = \frac{c_1}{(x^2-1)^2} \Rightarrow z = c_1(\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}) + c_2,$$

tj. opšte rešenje je

$$y(x) = c_1(x^2-1)(\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}) + c_2(x^2-1) + x^2. \ \Delta$$

(Primetimo da se rešenje $y(x) = 1$ dobija za $c_1 = 0$ i $c_2 = -1$.).

Primer 33.2. U smeni $x = t^\alpha$, odrediti α tako da se diferencijalna jednačina

$$xy'' - 2(1+3x^3)y' + 9x^5y = 9x^5(x^3+1)e^{x^3}$$

svede na jednačinu sa konstantnim koeficijentima, a zatim rešiti datu jednačinu.

Rešenje.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'_t}{\alpha t^{\alpha-1}}; \qquad y''_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{x'^3_t} = \frac{y''_t}{\alpha^2 t^{2\alpha-2}} - \frac{(\alpha-1)y'_t}{\alpha^2 t^{2\alpha-1}}.$$

$$\frac{t^\alpha y''_t}{\alpha^2 t^{2\alpha-2}} - \frac{(\alpha-1)t^\alpha y'_t}{\alpha^2 t^{2\alpha-1}} - \frac{2y'_t}{\alpha t^{\alpha-1}} - \frac{6t^{3\alpha}y'_t}{\alpha t^{\alpha-1}} + 9t^{5\alpha}y_t = 9t^{5\alpha}(1+t^{3\alpha})e^{t^{3\alpha}},$$

tj.

$$\frac{1}{\alpha^2 t^{\alpha-2}} y''_t - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2 t^{\alpha-1}} - \frac{2}{\alpha t^{\alpha-1}} + \frac{6}{\alpha t^{-2\alpha-1}}\right) y'_t + 9t^{5\alpha}y_t = 9t^{5\alpha}(1+t^{3\alpha})e^{t^{3\alpha}},$$

$$y''_t - \frac{\alpha^2}{t^{2-\alpha}}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2 t^{\alpha-1}} - \frac{2}{\alpha t^{\alpha-1}} + \frac{6}{\alpha t^{-2\alpha-1}}\right) y'_t + 9\alpha^2 t^{6\alpha-2}y_t = 9\alpha^2 t^{6\alpha-2}(1+t^{3\alpha})e^{t^{3\alpha}}.$$

Da bi se dobila jednačina sa konstantnim koeficijentima potrebno je da je $6\alpha - 2 = 0$, odnosno $\alpha = \frac{1}{3}$. Ako zamenimo $\alpha = \frac{1}{3}$, data jednačina se svodi na $y'' - 2y' + y = (1+t)e^t$. Posmatrajmo homogeni deo jednačine $y'' - 2y' + y = 0$. Njena karakteristična jednačina je $k^2 - 2k + 1 = 0$, čiji su koreni $k_1 = k_2 = 1$.

Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine je

$$y_h(t) = e^t(c_1 + c_2 t).$$

$y_p(t) = t^2(At+B)e^t$ (1 je dvostruki koren karakteristične jednačine)

$$y'_p = (At^3 + (3A+B)t^2 + 2Bt)e^t, \quad y''_p = (At^3 + (6A+B)t^2 + (6A+4B)t + 2B)e^t.$$

Kada uvrstimo u datu jednačinu dobijamo $A = \frac{1}{6}$ i $B = \frac{1}{2}$, odnosno $y_p(t) = \frac{t^2}{6}(t+3)e^t$. Rešenje diferencijalne jednačine je

$$y(t) = e^t(c_1 + c_2 t) + \frac{t^2}{6}(t+3)e^t \quad ,$$

odnosno

$$y(x) = e^{x^3}(c_1 + c_2 x^3) + \frac{x^6}{6}(x^3+3)e^{x^3}. \ \Delta$$

Primer 33.3. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $3y''^2 - y'y''' - y''y'^2 = 0$.

Rešenje. Ovde uzimamo y za nezavisno promenljivu, a x za zavisnu promenljivu, tj. $x = x(y)$. Tada je, prema obrascima za izvod inverzne funkcije: $y' = \dfrac{1}{x'}$,

$$y'' = \left(\frac{1}{x'}\right)'_y y'_x = -\frac{x''}{x'^2}\frac{1}{x'} = -\frac{x''}{x'^3}, \ y''' = -\frac{x'''x'^3 - 3x''x'^2x''}{x'^6}\frac{1}{x'} = \frac{3x''^2 - x'''x'}{x'^5}.$$

Zamenjujući $y^{(i)}$, $i = 1,2,3$ u datu jednačinu i množenjem sa x'^5 dobijamo

$$x''' + x'' = 0.$$

Njena karakteristična jednačina je $r^3 + r^2 = 0$, čiji su koreni $r_1 = 0$, $r_2 = 0$ i $r_3 = -1$. Opšte rešenje posmatrane diferencijalne jednačine je dato u implicitnom obliku sa

$$x(y) = c_1 + c_2 y + c_3 e^{-y}. \ \Delta$$

Primer 33.4. Vreme relaksacije (brzine rasplinjavanja) naelektrisanja u homogenim materijalima.

Ovaj primer se, strogo, ne odnosi na vremenski konstantno strujno polje. Izračunaćemo kojom se brzinom raspodela naelektrisanja, koja je na neki način stvorena u homogenom provodniku, razilazi pod delovanjem međusobnih odbojnih sila.

Pretpostavimo da je u trenutku t **gustina naelektrisanja** u nekoj tački materijala **specifične provodnosti** σ i **permitivnosti** ε jednaka ρ (ρ je funkcija koordinata položaja tačke i vremena). Za taj slučaj matematički model je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho = 0.$$

Pretpostavimo da je, za $t = 0$, $\rho = \rho_0$. Rešenje ove diferencijalne jednačine sa razdvojenim promenljivima je

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}.$$

Odnos $\dfrac{\varepsilon}{\sigma} = \tau$, ima dimenziju vremena i naziva se **vreme relaksacije naelektrisanja** ili **vreme relaksacije materijala.**

Vreme relaksacije za sve provodnike i poluprovodnike je veoma malo, što se može videti iz vrednosti za ε i σ za te materijale. Za dobre izolatore, međutim, ono može biti reda veličine nekoliko sati, pa čak i nekoliko dana.

Analizirajući rešenje $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$ može se zaključiti da ako je u nekom trenutku u nekoj tački $\rho = 0$, elektromagnetno polje ne može da prouzrokuje promenu gustine naelektrisanja i ono ostaje stalno nula. To, međutim, nije slučaj ako u provodniku deluje pobudno polje, ili ako je provodnik nehomogen. Δ

Primer 33.5. Na slici 33.1 prikazano je prosto električno kolo čiji su elementi:

a) **Izvor elektromagnetne sile** E (baterija ili generator) koja je konstantna ili funkcija vremena i proizvodi struju jačine I.

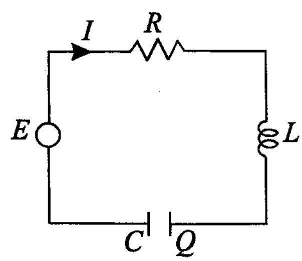
b) **Otpornik,** koji ima otpor R, koji izaziva pad elektromotorne sile veličine $E_R = RI$.

c) **Kalem indukcije** L, koja izaziva pad elektromotorne sile veličine $E_L = I\dfrac{dI}{dt}$.

d) **Kondenzator kapaciteta** C, koji sadrži punjenje Q i koji izaziva pad elektromotorne sile veličine $E_C = \dfrac{Q}{C}$.

Da bismo odredili struju u kolu u trenutku t primetimo da je prema **Kirhofovom**[1] **zakonu** algebarski zbir svih elektromotornih sila u zatvorenom kolu jednak nuli tj.:

$$E - RI - L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0. \qquad (33.5)$$



Slika 33.1

Ako u kolu nema kondenzatora jednačina (33.5) svodi se na linearnu jednačinu

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}.$$

Pretpostavimo da je $I(0) = I_0$ i da je E konstantno,

tada obrazac (26.12) sa $f(x) = \dfrac{R}{L}$ i $g(x) = \dfrac{E}{L}$ daje

$$I(t) = \frac{E}{R} + \left(I_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Iz gornjeg obrasca sledi da struja vrlo brzo teži tzv. stabilnom stanju, tj. veličini $\dfrac{E}{R}$. Δ

[1] G.R.Kirchoff (1824 -1887), nemački fizičar

Primer 33.6. Diferencijalne jednačine oscilacija

Harmonijsko oscilovanje. Ako se materijalna tačka mase m kreće po pravoj pod delovanjem elastične sile $F_s = -kx$, $(k > 0)$, tj. sile usmerene prema položaju mirovanja materijalne tačke $x = 0$ i proporcionalne sa udaljenosti x materijalne tačke od tog položaja; ona vrši harmonijsko oscilovanje. Na osnovu drugog Njutnovog zakona je $F = ma$ ($F =$ sila, $m =$ masa, $a =$ ubrzanje), pa ovom kretanju odgovara diferencijalna jednačina

$$mx'' + kx = 0 \text{ ili } x'' + a^2x = 0 \quad \text{, gde je } a^2 = \frac{k}{m}. \tag{33.6}$$

Rešenje $x(t)$ daje rastojanje materijalne tačke od položaja mirovanja u vremenu t.

Kako su nule karakteristične jednačine $r^2 + a^2 = 0$,
$r_{1,2} = \pm ai$, $x(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at$, rešenje koje zadovoljava uslov $x(0) = x_0$ i $x'(0) = 0$ je $x(t) = x_0 \cos at$ - dakle oscilatorno.

Prigušeno oscilovanje. Ako na materijalnu tačku pored sile F_s deluje i sila $F_d = -cx'$ $(c > 0)$, tj. sila koja zavisi od brzine kretanja materijalne tačke i deluje tako da koči kretanje (takva je sila trenja, koja nastaje pri kretanju u nekoj sredini), ona vrši kretanje poznato kao prigušeno kretanje. Ovom kretanju prema istom Njutnovom zakonu odgovara diferencijalna jednačina

$$x'' + 2bx' + a^2x = 0, \tag{33.7}$$

gde je $b = \dfrac{c}{2m}$ i $a = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

To je homogena linearna jednačina sa karakterističnom jednačinom

$r^2 + 2br + a^2 = 0$ čiji su koreni $r_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$.

Posmatraćemo tri slučaja:

A $b^2 - a^2 > 0$.

Opšte rešenje jednačine (33.7) je oblika $x(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$ (r_1 i r_2 su negativni realni brojevi).

B $b^2 - a^2 = 0$, $r_1 = r_2 = -b$.

Opšte rešenje jednačine (33.7) je oblika $x(t) = c_1e^{-bt} + c_2te^{-bt}$.

C $b^2 - a^2 < 0$. r_1 i r_2 su kompleksni brojevi $r_1 = -b + i\alpha$, $r_2 = -b - i\alpha$, $\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Opšte rešenje jednačine (33.7) je $x(t) = e^{-bt}(c_1 \cos\alpha t + c_2 \sin\alpha t)$.

Neka je početni uslov

$$x(0) = x_0 > 0 \text{ i } x'(0) = 0, \tag{33.4}$$

tj. posmatra se kretanje materijalne tačke koja se u trenutku $t = 0$ nalazi na rastojanju x_0 od položaja mirovanja i ima brzinu jednaku nuli. Rešenje početnog problema (33.7) i (33.8) je

Za slučaj A: $x(t) = \dfrac{x_0}{r_1 - r_2}(r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t})$, $x(t) \to 0,\ t \to \infty$ i $x'(t) \to 0,\ t \to \infty$.

Dakle u ovom slučaju, materijalna tačka se približava položaju mirovanja brzinom koja opada sa t, ne vršeći pri tom uopšte oscilacije oko tog položaja. One su u ovom slučaju ugušene.

Za slučaj B: $x(t) = x_0 e^{-bt}(1 + bt)$.

Ovde kretanje materijalne tačke ima iste osobine kao u slučaju A.

Za slučaj C: $x(t) = \dfrac{x_0\sqrt{\alpha^2 + b^2}}{\alpha} e^{-bt}\cos(\alpha t - \theta)$, gde je $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{\alpha}$. Ova funkcija $x(t)$ osciluje sa amplitudama koje opadaju sa $t \to \infty$ eksponencijalnom brzinom. Njene uzastopne nule su na konstantnom rastojanju $\dfrac{\pi}{\alpha}$.

Materijalna tačka u ovom slučaju vrši prigušene oscilacije oko položaja mirovanja $x = 0$. Ona u vremenu

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{c^2}{4m^2}}}$$

napravi jedan pun ciklus kretanja oko $x = 0$. Frekvencija ovog oscilatornog kretanja je

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

(za $c = 0$ imamo frekvenciju harmonijskog oscilovanja). Ova frekvencija f je tzv. **prirodna** ili **sopstvena frekvencija oscilovanja** materijalne tačke. Ona je veća što je c (otpor sredine) manje.

Prinudno oscilovanje. Materijalna tačka koja se kreće pod dejstvom sila F_s i F_q (unutrašnje sile) i pod dejstvom spoljašnje sile $F_1 = f(t)$, (F_1 zavisi od t i ne zavisi od x) vrši kretanje koje opisuje rešenje diferencijalne jednačine

$$mx'' + cx' + kx = f(t).$$

Zadržaćemo se na slučaju kada je F_1 periodična sila oblika $F_1 = F_0 \cos \omega t$, jer je taj slučaj važan u primenamaJedno partikularno rešenje jednačine

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t \tag{33.9}$$

je oblika

$$x_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

(to je slučaj kada materijalna tačka osciluje sa periodom spoljne sile).
Metodom neodređenih koeficijenata dobijamo da je

$$A = \frac{\omega c F_0}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2} \quad \text{i} \quad B = \frac{(k - \omega^2 m) F_0}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}.$$

Neka je $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\omega c}{k - \omega^2 m}$.

Sada je opšte rešenje jednačine (33.9) za slučaj $b^2 - a^2 < 0$, (tj. kada je c dovoljno malo) oblika

$$x(t) = e^{-bt}(c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t) + \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} \cos(\omega t - \varphi).$$

Ovo rešenje opisuje prinudne oscilacije materijalne tačke. Kako $e^{-bt}(c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t) \to 0$, $t \to \infty$; za $t > t_0$ materijalna tačka vrši oscilatorno kretanje blisko onome koje opisuje funkcija

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} \cos(\omega t - \varphi).$$

Perioda oscilacije $\dfrac{2\pi}{\omega}$ jednaka je periodi oscilacije spoljne sile. Amplituda raste kada $c \to 0$.

Granična vrednost frekvencije spoljne sile kad $c \to 0$ i $\omega \to \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ jednaka je prirodnoj frekvenciji oscilovanja materijalne tačke. Kaže se da je nastupila situacija kada materijalna tačka osciluje u rezonanciji sa spoljnom silom. U toj situaciji amplituda oscilovanja materijalne tačke naglo teži ∞.

U slučaju

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, x_p(t) = \frac{F_0}{\omega c}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{F_0}{\omega c}\sin \omega t,$$

što znači da materijalna tačka prolazi kroz $x = 0$ kada spoljna sila F_1 ima maksimalnu vrednost.

Napomena 33.1. Ako u jednačini (33.5) stavimo $I = \dfrac{dQ}{dt}$ ona postaje

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E.$$

To je diferencijalna jednačina oscilacija u strujnom kolu. Ona je ista kao i diferencijalna jednačina oscilacija u mehaničkom sistemu. Dakle, na istom matematičkom modelu (33.9) mogu se pratiti oscilacije u mehaničkom sistemu i strujnom kolu - jedan model opisuje dve različite pojave.

Primer 33.4. Njutnov zakon gravitacije i kretanja planeta.

Planeta male mase m kreće se pod dejstvom privlačne sile Sunca - velike mase M. Privlačna sila je uvek usmerena od planete prema Suncu. Neka je Sunce smešteno u početku polarnog koordinatnog sistema, a položaj planete neka je određen vektorom r, koji sa polaznom osom zaklapa ugao θ. Polarna osa je izabrana tako da je za $\theta = 0$ planeta najbliža Suncu.

Neka je $\vec{u_r}$ jedinični vektor u smeru vektora $\vec{r}$, tj. $\vec{r} = r\vec{u_r}$, a $\vec{u_a}$ jedinični vektor koji sa polarnom osom zaklapa ugao $\theta + \dfrac{\pi}{2}$. $\vec{i}$ i $\vec{j}$ su jedinični vektori u smeru polarne ose i normalno na nju.

Očigledno je (vidi sl. 33.2)

$$\vec{u_r} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta\ ;\ \vec{u_a} = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta \tag{33.10}$$

Iz (33.9) diferenciranjem dobijamo

$$\frac{d\vec{u_r}}{d\theta} = \vec{u_a}\ ;\ \frac{d\vec{u_a}}{d\theta} = -\vec{u_r}. \tag{33.11}$$

Razložimo brzinu $\vec{v}$, ubrzanje $\vec{a}$ i silu $\vec{F}$ na komponente u smeru $\vec{u_r}$ i $\vec{u_a}$. Tako je

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u_r}) = r\frac{d\vec{u_r}}{dt} + \vec{u_r}\frac{dr}{dt} = \\ &= r\frac{d\vec{u_r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \vec{u_r}\frac{dr}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}\vec{u_a} + \frac{dr}{dt}\vec{u_r}\quad,\end{aligned} \tag{33.12}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \right)\vec{u}_a + \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right)\vec{u}_r, \tag{33.13}$$

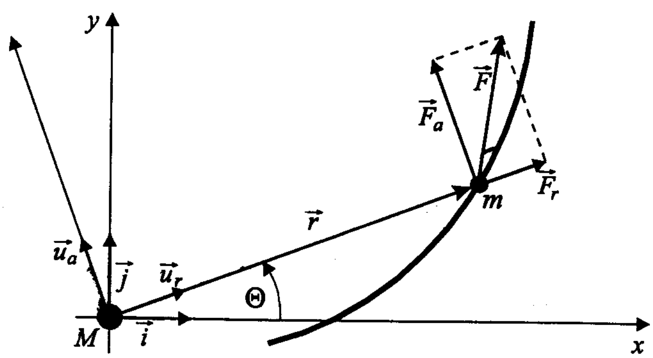
$$\vec{F} = F_a\vec{u}_a + F_r\vec{u}_r. \tag{33.14}$$

Pri čemu iz $\vec{F} = m\vec{a}$ sledi

$$F_a = m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \right) \text{ i } F_r = m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right). \tag{33.15}$$

Jednačina (33.14) opisuje kretanje planete mase m. Ako je $F_a = 0$ sila F se naziva **centralna** i tada prva od jednačina (33.15) postaje

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0. \tag{33.16}$$



Slika 33.2.

Posle množenja (33.16) sa r dobijamo

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \text{ ili } r^2\frac{d\theta}{dt} = h. \tag{33.17}$$

Površina P slike što je opiše $\vec{r}$ – vektor položaja planete u vremenskom razmaku $[t_1, t_2]$ je zbog $r = r(\theta)$, $\theta = \theta(t)$ i (33.17)

$$P = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(r^2\frac{d\theta}{dt} \right)dt = \frac{1}{2}h(t_2 - t_1), \tag{33.18}$$

a to je tvrđenje **drugog Keplerovog[1] zakona**: *radijus vektor $\vec{r}$ od Sunca do planete*

[1] J.Kepler (1571 - 1630), nemački astronom

prebriše iste površine u istim vremenskim intervalima.

Ako je $\vec{F}$ centralna gravitaciona sila, prema Njutnovom zakonu gravitacije ima oblik

$$F_r = -k\frac{m}{r^2},\ k = GM\ ,$$

a G je gravitaciona konstanta, pa druga od jednačina kretanja planeta (33.15) postaje

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k}{r^2}.$$

J. Kepler

Ako ovu diferencijalnu jednačinu transformišemo uzimajući $z = \frac{1}{r}$ za novu nezavisno promenljivu, a θ za zavisno promenljivu dobijamo zbog

$$\frac{dr}{dt} = -h\frac{dz}{d\theta} \text{ i } \frac{d^2r}{dt^2} = -h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2},$$

diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}.$$

To je nehomogena diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima. Njeno opšte rešenje je oblika

$$z = c_1\cos\theta + c_2\sin\theta + \frac{k}{h^2}.$$

Kako je za $\theta = 0$ rastojanje r od planete do Sunca najmanje, to $z = \frac{1}{r}$ ima za $\theta = 0$ maksimum, pa je

$$r = \frac{\frac{h^2}{k}}{1 + \left(\frac{c_1h^2}{k}\right)\cos\theta}. \tag{33.20}$$

(33.20) je jednačina putanje planete u polarnom koordinatnom sistemu.

Putanja je u zavisnosti od $e = \frac{c_1h^2}{k}$, jedan od konusnih preseka. Ali, ako planeta ostaje u Sunčevom sistemu ona se mora kretati po zatvorenoj putanji, tj. jednačina (33.16) je elipsa i $e < 1$. Tako smo dobili tvrđenje **prvog Keplerovog zakona**: *putanja svake planete je elipsa sa Suncem u jednoj žiži.*

Veličina e mora se precizno odrediti na osnovu principa o očuvanju energije. Naime, totalna energija E planete je zbir kinetičke i potencijalne energije, tj.

$$E = \frac{1}{2} m \left[r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] - \frac{km}{r}.$$

Za $\theta = 0$ iz (33.20) sledi

$$r = \frac{\frac{h^2}{k}}{1+e} \text{ i } E = \frac{mr^2}{2} \frac{h^2}{r^4} - \frac{km}{r}. \tag{33.21}$$

Eliminacijom r iz jednačine (33.21) dobija se da je

$$e = \sqrt{1 + E \frac{2h^2}{mk^2}}.$$

Primetimo da za planete koje ostaju u Sunčevom sistemu mora biti $e < 1$, a to znači da im je totalna energija $E < 0$. One planete koje prolaze kroz Sunčev sistem velikom brzinom imaju pozitivnu totalnu energiju ($E > 0$) i njihove su putanje hiperbole. Ako bi se planeti, koja se kreće oko Sunca, na neki način povećala brzina tako da joj totalna energija bude pozitivna, ona bi ušla u hiperboličnu orbitu i napustila Sunčev sistem. Neka elipsa

$$r = \frac{\frac{h^2}{k}}{1 + e \cos \theta}$$

po kojoj se kreće planeta oko Sunca ima poluose a i b i neka je T vreme potrebno da planeta jednom obiđe Sunce. Prema drugom Keplerovom zakonu ili relaciji (33.18) je

$$ab\pi = \frac{1}{2} hT \quad \text{ili} \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2} = 4 \frac{\pi^2 a^3}{k}$$

tj. *kvadrat vremena potrebnog da planeta jednom obiđe oko Sunca proporcionalan je kubu velike poluose elipse.* To je **treći Keplerov zakon.**

INDEKS POJMOVA

LITERATURA

[1] D. Adnađević, Z. Kadelburg, *Matematička analiza I,* Naučna knjiga, Beograd (1989) ,

[2] D. Adnađević, Z. Kadelburg, *Matematička analiza II,* Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd (1991) ,

[3] N. Adžić, I. Kovačević, V. Marić, V. Ungar,*Matematička analiza II,* Edicija tehničke knjige, FTN, Novi Sad, (1996),

[4] D. Blanuša, *Viša matematika I/2,* Tehnička knjiga, Zagreb (1965),

[5] D. Blanuša, *Viša matematika II/2,* Tehnička knjiga, Zagreb (1965),

[6] F. Brauer, J. A. Nohel, *Ordinary differential equations,* Beniamin Inc. New York - Amsterdam (1967) ,

[7] M.Braun, *Differential equations and their applications,*Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1975,

[8] M. Budinčević, V. Marić, *Obične diferencijalne jednačine - Problemi i zadaci,* Naučna knjiga, Beograd (1978) ,

[9] I. Kovačević, M. Novković, *Diferencijalni račun realnih funkcija jedne i više realnih promenljivih,* FTN, Novi Sad, (1998) ,

[10] I. Kovačević, M. Novković, B. Rodić, *Integralni račun realnih funkcija jedne realne promenljive,* FTN, Novi Sad, (1998) ,

[11] I. Kovačević,V.Marić, M. Novković, B. Rodić, *Matematička analiza I (diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine),* FTN, Novi Sad, (2000) ,

[12] I. Kovačević, N. Ralević, *Matematička analiza I - granični procesi,* Edicija tehničke nauke, FTN, Novi Sad, (1996)

[13] I. Kovačević, N. Ralević, *Matematička analiza I – uvodni pojmovi i granični procesi,* FTN, Novi Sad, (2000),

[14] I. Kovačević, N. Ralević, *Uvod u matematičku analizu,* Edicija tehničke nauke, FTN , Novi Sad, (1998),

[15] I.Kovačević, M.Novković, V. Marić, B.Rodić, *Matematička analiza I – diferencijalni i integralni račun ; obične diferencijalne jednačine,* FTN, Novi Sad, (2000),

[16] V. Marić, I. Kovačević, M. Novković, *Obične diferencijalne jednačine,* FTN, Novi Sad, (1998),

[17] V. Marić, M. Skendžić, *Obične diferencijalne jednačine,* Naučna knjiga, Beograd (1980),

[18] M. Novković, B.Rodić, I.Kovačević, *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize I,* FTN, Novi Sad, (1998),

[19] M. Novković, B.Rodić, I.Kovačević, *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize I,* FTN, Novi Sad, (2000),

[20] Z. Radašin, I. Čomić , *Integralni račun,* Naučna knjiga, Beograd (1988),

[21] V. S. Shipackev, *Higher Mathematics,* Mir Publishers, Moscow (1988) .

[22] R. Šćepanović, J. Knežević-Miljanović, Lj. Protić, *Diferencijalne jednačine,* Vesta Company, Beograd (1997) .

13

AB-400,00

CIP - Каталогнзација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517.2/.3(075.8)
517.91/.92

MATEMATIČKA analiza I : diferencijalni i integralni račun : obične diferencijalne jednačine / Ilija M. Kovačević ... (et al.)-Beograd : Vedes, 2004 (Beograd : Vedes; Beograd : Informatika). 280 str. : ilustr. ; 24 em

Na vrhu nasl. str. : Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka. Prema predgovoru ovo je 2. izd. - Tiraž 600. - Bibliografija : str. 1-4. - Bibliografija : str 279-280. - Registar

ISBN 86-82507-69-2

1. Ковачевић, Илија
а) Диференцнјални рачуп
б) Иитегрални рачун
ц) Диференцијалне једначине, обичне

COBISS.SR-ID 108911884

(iz sadržaja)

Udžbenik se sastoji iz tri dela:

1. *Diferencijalni račun (1.1. Diferencijalni račun realnih funkcija jedne realne promenljive sa primenama; 1.2. Diferencijalni račun realnih funkcija više realnih promenljivih sa primenama).*
2. *Integralni račun (2.1. Neodređeni integral; 2.2. Određeni integral sa primenama,*

   2.3. Nesvojstveni integral)
3. *Obične diferencijalne jednačine (3.1. Obične diferencijalne jednačine– osnovni pojmovi, definicije i modeli; 3.2. Diferencijalne jednačine prvog reda – opšti pojmovi; neke klase integrabilnih diferencijalnih jednašina prvog reda;3.3. Diferencijalne jednačine višeg reda).*

(iz recenzije)

Ovaj udžbenik namenjen je prvenstveno studentima tehničkog fakulteta. Pisan je prema programu Matematička analiza I za studente elektrotehničke struke i računarstva FTN-a u Novom Sadu. Ovaj udžbenik pokriva deo gradiva iz Matematičke analize I (diferencijalni račun realnih funkcija jedne i više realnih promenljivih sa primenama; integralni račun realnih funkcija jedne realne promenljive sa primenama; obične diferencijalne jednačine). Autori su uspeli da u matematičkom pogledu tekst bude korektan. Stoga su sve definicije, teoreme i dokazi dati potpuno strogo. Izlaganje je protkano sa većim brojem primera koji doprinose razjašnjavanju apstraktnih pojmova iz ove oblasti.

Smatramo da ovaj udžbenik spada u kvalitetnije udžbenike iz ove oblasti, pa može korisno poslužiti i studentima drugih fakulteta na kojima se izučavaju oblasti iz Matematičke analize.

(o autorima)

Ilija Kovačević je redovni profesor matematike na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Doktorirao je na Prirodno matematičkom fakultetu u Beogradu. Predaje Matematičku analizu I i Matematičke metode IV. Područje njegovog naučnog rada je Topologija - kompaktnost.

Vojislav Marić je redovni profesor u penziji na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu i dopisni član SANU. Bio je dugogodišnji šef Katedre za matematiku. Područje njegovog naučnog rada je Klasična analiza, specijalno diferencijalne jednačine.

Momčilo Novković je bio asistent matematike na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Magistrirao je na Matematičkom fakultetu u Beogradu. Pozitivan izveštaj komisije za ocenu doktorske disertacije prihvatilo je Nastavno-naučno veće Matematičkog fakulteta Beogradu 5. 10. 2001. godine na svojoj 215 sednici, čime je Momčilo Novković neformalno postao doktor matematičkih nauka. Držao je vežbe iz predmeta Matematička analiza I, Matematičke metode IV, Matematika tri i Statističke metode u preduzeću. Područje njegovog naučnog rada bila je oblast: Verovatnoća i statistika – slučajni procesi. Opširnija biografija je data unutar knjige, pre predgovora.

Biljana Rodić je asistent matematike na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Magistrirala je na Prirodno matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Drži vežbe iz predmeta Matematička analiza I i Matematičke metode IV. Područje njenog naučnog rada je Diskretna matematika – višeznačne logike.