2.1 Povezanost

U matematičkom modelovanja realnih problema često se javlja potreba za razmatranjem povezanih kretanja kroz graf duž njegovih grana. U tu svrhu uvodimo pojam šetnje po grafu, kao najopštije forme povezanosti parova čvorova.

Definicija 60 *Neka je $G = (V, E, \psi)$ multigraf. Neka su $e_1, \dots, e_n \in E$ i $v_0, \dots, v_n \in V$ proizvoljne grane i čvorovi sa osobinom $\psi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$, za svako $i \in \{1, \dots, n\}$. Tada za niz*

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$$

kažemo da je v_0v_n-šetnja dužine n u grafu G između čvorova v_0 i v_n. Za čvorove v_0 i v_n kažemo da su krajnji čvorovi šetnje.
Specijalni slučajevi:

1. *staza - ako nema ponavljanja grana tj. ako za sve $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sa osobinom $i \neq j$ važi $e_i \neq e_j$,*
2. *put - ako nema ponavljanja čvorova tj. ako za sve $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ sa osobinom $i \neq j$ važi $v_i \neq v_j$ (osim eventualno $v_0 = v_n$),*

Ako je graf G prost, pisaćemo

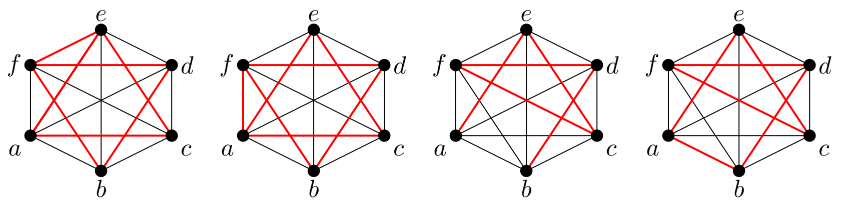
$$v_0 v_1 \dots v_n.$$

Ako su krajnji čvorovi jednaki, tj. $v_0 = v_n$, tada uvodimo dodatne pojmove:

- šetnja dužine bar jedan je zatvorena,
- zatvorena staza je kružna,
- zatvoren put je kontura.

Primer 10 *Za graf K_6 na slici, dajemo po jedan primer za svaku kategoriju.*

1. *šetnja: $aecaefdbf$;*
2. *staza: $aecafdbf$;*
3. *put: $aecfdb$;*
4. *kontura: $aecfdba$.*



$aecaefdbf$ $\quad$ $aecafdbf$ $\quad$ $aecfdb$ $\quad$ $aecfdba$

Teorema 61 *Ako u grafu postoji uv-šetnja (staza), onda postoji i uv-put.*

Definicija 62 *Neka je $G = (V, E, \psi)$ multigraf.*
Kažemo da su čvorovi u i v povezani ako je

- $u = v$ *ili*
- $u \neq v$ *i postoji uv-put u G.*

Kažemo da je G povezan akko $|V| = 1$ ili za svako $u, v \in V$ važi da su u i v povezani.

Direktno sledi da postojanje uv-šetnje u grafu direktno implicira da su čvorovi u i v povezani.

Lema 63 *Relacija "je povezan sa" je relacija ekvivalencije na skupu čvorova grafa.*

Dokaz.

(R) Refleksivnost sledi direktno iz definicije.

(S) Neka je $u \neq v$ i neka uv-put u grafu oblika $uv_0 \ldots v_{n-1}v$. Tada je jedan vu-put u grafu oblika $vv_{n-1} \ldots v_0u$.

(T) Pretpostavimo da u grafu G postoje uv-put i vw-put:

$$uu_0 \ldots u_{l-1}v \quad \text{i} \quad vv_0 \ldots v_{n-1}w.$$

Tada je sa

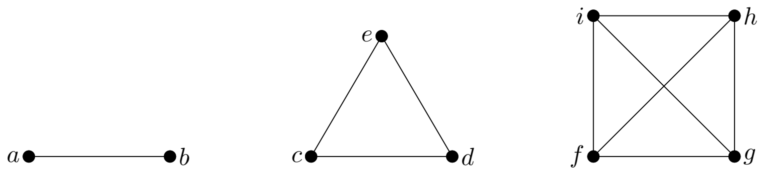
$$uu_0 \ldots u_{l-1}vv_0 \ldots v_{n-1}w$$

data jedna uw-šetnja u grafu, odakle je u povezan sa w.

□

Relacija ekvivalencije "je povezan sa" na skupu čvorova V grafa G deli taj skup na klase ekvivalencije. Svaka komponenta povezanosti indukuje podgraf koji nazivamo komponentom povezanosti tog grafa. Komponenta povezanosti je maksimalan povezan podgraf grafa, tj. svaka komponenta povezanosti grafa je podgraf koji nije sadržan ni u jednom drugom povezanom podgrafu istog grafa. Broj komponenti povezanosti grafa G, u oznaci $\omega(G)$, jednak je broju klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju povezanosti.

Primer 11 *Neka je* $G = (\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}, E)$ *graf na slici.*



Broj komponenti povezanosti datog grafa je $\omega(G) = 3$. *Komponente povezanosti su podgrafovi koji su indukovani skupovima čvorova* $\{a, b\}$, $\{c, d, e\}$ *i* $\{f, g, h, i\}$.

Lema 64 *Multigraf* $G = (V, E, \psi)$ *je povezan akko* $\omega(G) = 1$.

Dokaz. G je povezan akko za svaka dva čvora $u, v \in V$ postoji uv-put u G. To dalje važi akko svi čvorovi pripadaju istoj klasi ekvivalencije u odnosu na relaciju "je povezan sa", što važi akko $\omega(G) = 1$. □

Definicija 65 *Neka je* $G = (V, E, \psi)$ *sa osobinom* $\omega(G) = k \geq 1$.

- *čvor* $v \in V$ *je razdelni (ili artikulacioni) ako je* $\omega(G - v) > k$,
- *grana* $e \in E$ *je razdelni (ili most) ako je* $\omega(G - e) > k$.

Teorema 66 *Neka je* $n \geq 2$.
Graf sa n *čvorova i manje od* $n - 1$ *grana nije povezan.*

Dokaz: Indukcijom po n.
Baza $n = 2$: Graf sa dva čvora i 0 grana nije povezan.
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da graf sa n čvorova i manje od $n - 1$ grana nije povezan.
Induktivni korak: Neka je G graf sa $n+1$ čvorova i manje od n grana. Pokazaćemo da on nije povezan. Na osnovu Posledice 56, postoji čvor v stepena $d_G(v) \leq 1$. Ako je $d_G(v) = 0$, onda je broj komponenti povezanosti bar dva i graf nije povezan. Ako je $d_G(v) = 1$, onda graf G ima jednak broj komponenti povezanosti kao i graf $G' = G - v$. Kako je $G' = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{\{u, v\}\})$ za neki čvor $u \in V$, G' ima n čvorova i manje od $n - 1$ grana. Zaključujemo prema induktivnoj pretpostavci da G' nije povezan. Kako G i G' imaju jednak broj komponenti povezanosti, onda ni G nije povezan.

Teorema 67 *Neka je $G = (V, E)$ povezan i neka je C kontura u grafu G. Ako je e grana konture, onda je $G - e$ povezan.*

Dokaz: Izaberimo proizvoljno dva čvora $u, v \in V$. Kako je G povezan, postoji uv-put

$$P = uv_1 \dots v_i v_{i+1} \dots v_{n-1} v.$$

Imamo dve mogućnosti:

(i) Ako e ne pripada uv-putu, onda je P uv-put u $G - e$.

(ii) Ako e pripada uv-putu, onda možemo pretpostaviti da je to grana $\{v_i, v_{i+1}\}$ i da je kontura C oblika

$$C = v_i v_{i+1} u_1 \dots u_l v_i.$$

To znači da u grafu $G - e$ postoji put Q od v_i do v_{i+1} :

$$Q = v_i u_l u_{l-1} \dots u_1 v_{i+1}.$$

onda je

$$P_2 = uv_1 \dots v_{i-1} Q v_{i+2} \dots v_{n-1} v.$$

staza u grafu $G - e$ od u do v. Prema Theorem 61, u $G - e$ postoji uv-put. Znači, za svaka dva čvora u grafu $G - e$ postoji put koji ih povezuje.

Definicija 68 *Neka je $G = (V, E)$ povezan graf. Rastojanje $d(u, v)$, između različitih čvorova u i v jeste dužina najkraćeg puta od u do v. Pored toga, $d(u, u) = 0$.*

Rastojanje zadovoljava sledeće osobine:

1. $d(u, v) \geq 0$
2. $d(u, v) = 0$ akko $u = v$
3. $d(u, v) = d(v, u)$
4. $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

Chapter 3

Stabla

3.1 Karakterizacija stabla

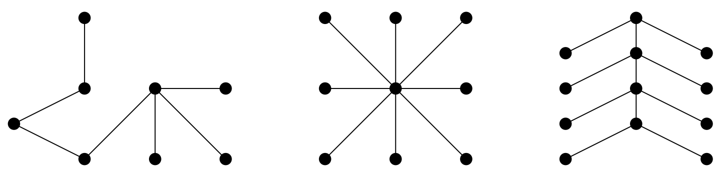
Za graf koji ne sadrži nijednu konturu, kažemo da je acikličan.

Definicija 69 *Za prost graf $G = (V, E)$ kažemo da je stablo ako važi:*

(i) G je povezan graf i

(ii) G je acikličan graf.

Na sledećoj slici su prikazana tri stabla.



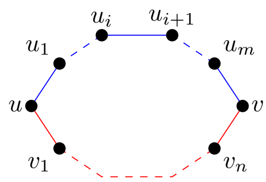
U nastavku ćemo dati niz ekvivalentnih tvrđenja koja karakterišu stablo.

Teorema 70 *Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je G stablo ako i samo ako za svaka dva čvora $u, v \in V$ postoji jedinstven uv-put.*

Dokaz. Za $n = 2$ tvrđenje sledi direktno. Pretpostavićemo da je $n \geq 3$.
$(\Rightarrow)$

Pretpostavimo suprotno, da u stablu G postoje čvorovi u i v sa osobinom da između njih postoje dva različita uv-puta. Neka su to putevi U_1 i U_2, sa osobinom da $\{u_i, u_{i+1}\} \in U_1$, $\{u_i, u_{i+1}\} \notin U_2$:

$$U_1 = uu_1 \dots u_i u_{i+1} \dots u_m v$$
$$U_2 = uv_1 \dots v_n v$$



(ako su različiti putevi, onda postoji grana koja pripada jednom, a ne pripada drugom).
Ovde ćemo prikazati slučaj kada je $u, v \notin \{u_i, u_{i+1}\}$, ostali slučajevi se izvode slično. Sada je

$$u_i \dots u_1 u v_1 \dots v_n v u_m \dots u_{i+1}$$

$u_i u_{i+1}$-šetnja u grafu $G - \{u_i, u_{i+1}\}$. Ako u grafu $G - \{u_i, u_{i+1}\}$ postoji $u_i u_{i+1}$-šetnja, onda postoji i $u_i u_{i+1}$-put. Dodavanjem grane $u_i u_{i+1}$ dobijamo konturu u grafu G, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je G stablo.
($\Leftarrow$) Ako za svaka dva čvora $u, v \in V$ postoji uv-put, onda je G po definiciji povezan graf. Treba još pokazati da je G acikličan. Pretpostavimo suprotno, da u grafu G postoji kontura oblika

$$w_1 w_2 w_3 \dots w_l w_1.$$

Tada postoje bar dva puta od w_1 do w_l:

$$w_1 w_l \qquad\qquad w_1 w_2 w_3 \dots w_l$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom da za svaka dva čvora postoji jedinstven put od jednog do drugog. To znači da je naša pretpostavka netačna i da je G acikličan graf. $\square$

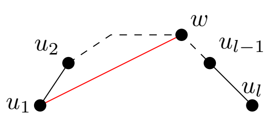
Lema 71 *Neka je $G = (V, E)$ stablo i neka je $|V| = n \geq 2$. Tada postoje bar dva čvora stepena* 1.

Dokaz. Kako je G stablo, G je povezan graf. Pretpostavimo da je

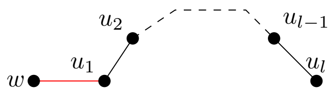
$$u_1 u_2 \dots u_l \tag{3.1}$$

najduži put u grafu G (može biti više takvih puteva iste dužine). Pokazaćemo da je tada $d_G(u_1) = d_G(u_l) = 1$. Pretpostavimo da je $d_G(u_1) \geq 2$ (slično za $d_G(u_l) \geq 2$). Tada postoji čvor w ($\neq u_2$)sa osobinom $u_1 w \in E$.

(i) Ako $w \in \{u_3, \dots, u_l\}$ onda G ima konturu, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je G stablo.



(ii) Ako $w \notin \{u_3, \ldots, u_l\}$, onda je put $wu_1u_2 \ldots u_l$ duži od (3.1), što dovodi do kontradikcije.



□

Lema 72 *Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 2$, i neka je $d_G(u) = 1$ za neki čvor $u \in V$. Tada je G stablo ako i samo ako je $G - u$ stablo.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je G stablo. Da bismo pokazali da je $G - u$ stablo, treba pokazati sledeće: (i) $G - u$ je povezan; (ii) $G - u$ je acikličan.

(i) Posmatrajmo dva proizvoljna čvora $v, w \in V(G - u)$. Kako je G povezan, postoji vw-put u G. Ovaj put ne sadrži čvor stepena 1 koji je različit od v i w, što znači da ne sadrži u. Znači, taj put je ujedno i put u $G - u$, što pokazuje da je $G - u$ povezan.

(ii) Kako je G acikličan, to je i $G - u$ acikličan, zato što brisanjem grane iz acikličnog grafa ne možemo dobiti konturu.

($\Leftarrow$) Neka je $G - u$ stablo. Od acikličnog grafa, dodavanjem nazad lista u ne možemo dobiti ciklus u tom grafu. Svaki čvor konture ima stepen bar dva, a čvor u je stepena 1. Svaka dva čvora koja su povezana u $G - u$ ostaju povezana i u G. Ostaje još da pokažemo da za postoji uw-put za svaki čvor $w \in V(G - u)$. Kako je $d_G(u) = 1$ postoji $v \in V(G - u)$ sa osobinom $\{u, v\} \in E(G)$. Iz pretpostavke da je $G - u$ stablo, sledi da je $G - u$ povezan graf, odakle za svako $w \in V(G - u)$ postoji wv-put u $G - u$. Dodavanjem grane $\{u, v\}$ tom putu, dobijamo put u G.
□

Teorema 73 *Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je G stablo ako i samo ako je G povezan graf i $|E| = n - 1$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Prema definiciji stabla, G je povezan graf. Indukcijom po n ćemo pokazati da je $|E| = n - 1$.
<u>Baza $n = 2$:</u> Stablo sa dva čvora ima tačno jednu granu.
<u>Induktivni korak $T_{n-1} \Rightarrow T_n$:</u> Ako je G stablo onda postoji čvor u sa osobinom $d_G(u) = 1$. Graf $G' = G - u$ ima osobinu

$$|V(G')| = |V(G)| - 1 = n - 1 \quad \text{i} \quad |E(G')| = |E(G)| - 1.$$

Ako je G stablo, onda je prema Lemi 72 G' stablo. Prema induktivnoj pretpostavci je $|E(G')| = n - 1$, a odatle je $|E(G)| = |E(G')| + 1 = n$.

($\Leftarrow$) Indukcijom po n.
Baza $n = 2$: Povezan graf sa dva čvora i jednom granom je stablo.
Induktivni korak $T_{n-1} \Rightarrow T_n$: Ako je $E(G) = V(G)-1$, onda prema Posledici 56 postoji čvor u sa osobinom $d_G(u) \leq 1$. Kako je G povezan, mora važiti $d_G(u) = 1$ i graf $G' - u$ je povezan graf sa osobinom $|V(G')| = |V(G)| - 1 = n$ i $|E(G')| = |E(G)|-1 = n-1$. Prema induktivnoj pretpostavci je sada $G'-u$ stablo. Prema Lemi 72, G je stablo. $\square$

Lema 74 *Neka je $G = (V, E)$, gde je $|V| = n \geq 2$ i $|E| \geq n$. Neka su $V(G_1), \ldots V(G_l)$ komponente povezanosti grafa G sa $k_1, \ldots, k_l$ čvorova, respektivno. Tada postoji $i \in \{1, \ldots, l\}$ sa osobinom $|E(G_i)| \geq k_i$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da za svako $i \in \{1, \ldots, l\}$ važi $|E(G_i)| < k_i$. Tada je

$$n \leq |E(G)| = |E(G_1)| + \ldots + |E(G_l)| < k_1 + \ldots k_l = n \Leftrightarrow n < n$$

što dovodi do kontradikcije. $\square$

Teorema 75 *Neka je $G = (V, E)$, gde je $|V| = n \geq 2$ i $|E| \geq n$. Tada G sadrži konturu.*

Dokaz. Razmatramo dva slučaja.

(i) G je povezan: ako G nema konturu, onda je stablo $\Rightarrow$ G ima $n-1$ grana.

(ii) G nije povezan: neka su $G_1, \ldots, G_l$ komponente povezanosti grafa G:

$$|V(G_1)| = k_1, \ldots, |V(G_l)| = k_l \qquad k_1 + \ldots + k_l = n.$$

Prema Lemi 74, postoji $i \in \{1, \ldots, l\}$ sa osobinom $|E(G_i)| \geq k_i$. Ako G_i nema konturu, onda je G_i stablo i ima $k_i - 1$ granu, što dovodi do kontradikcije. Znači, G_i ima konturu, a samim tim i G. $\square$

Teorema 76 *Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je G stablo akko je G povezan i brisanjem proizvoljne grane se dobija nepovezan graf.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je G stablo, onda je G po definiciji povezan graf. Neka je $\{u, v\} \in E$ proizvoljna grana. Ako pretpostavimo da je $G - \{u, v\}$ povezan,

onda postoji uv-put i dodavanjem grane uv bismo dobili konturu u G, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je G acikličan.
($\Leftarrow$) Ako je G povezan i brisanjem proizvoljne grane se dobija nepovezan graf, onda treba pokazati da je G acikličan. Pretpostavimo da je G povezan i sadrži konturu C. Tada za svaku granu $uv \in C$ sledi da je $G - \{u, v\}$ povezan, što je u suprotnosti sa pretpostavkom. $\square$

Teorema 77 *Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je G stablo akko je G acikličan i dodavanjem grane se dobija graf koji sadrži konturu.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je G stablo, onda je G acikličan graf po definiciji. Posmatrajmo proizvoljna dva čvora u, v sa osobinom $uv \notin E(G)$. Kako je G povezan, postoji uv-put u G. Dodavanjem grane uv dobijamo konturu u $G + uv$.
($\Leftarrow$) Treba pokazati da je G povezan. Neka su u i v proizvoljni čvorovi iz V. Imamo dva slučaja:

(i) Ako je $uv \in E$, onda je to uv-put.

(ii) Ako $uv \notin E$, onda $G + uv$ sadrži konturu koja sadrži uv. Oduzimanjem sa konture grane uv dobijamo uv-put u G.

$\square$

Teorema 78 (Karakterizacija stabla) *Neka je $G = (V, E)$ prost graf. Sledeća tvrđenja sa ekvivalentna:*

(i) G je stablo.

(ii) Za svaka dva čvora $u, v \in V(G)$ postoji jedinstven put od u do v.

(iii) G je povezan i $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

(iv) G je povezan i brisanjem proizvoljne grane dobija se nepovezan graf (tj. Gje minimalan povezan graf).

(v) G je acikličan i dodavanjem grane se dobija graf koji sadrži konturu (tj. G je maksimalan acikličan graf).

Dokaz. Dokazali smo sledeći niz ekvivalencija:

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \quad (i) \Leftrightarrow (iii) \quad (i) \Leftrightarrow (iv) \quad (i) \Leftrightarrow (v).$$

Odatle možemo izvesti i sve ostale parove ekvivalencija. $\square$

3.2 Pokrivajuća stabla

Kada se razmatraju problemi optimizacije na grafovima, često se dešava da optimalno rešenje ima ne-nula vrednosti samo na nekim podgrafovima koja su stabla i čiji skup čvorova je isti kao u plaznom grafu. Za takav podgraf kažemo da je pokrivajuće (ili razapinjuće ili razapeto) stablo.

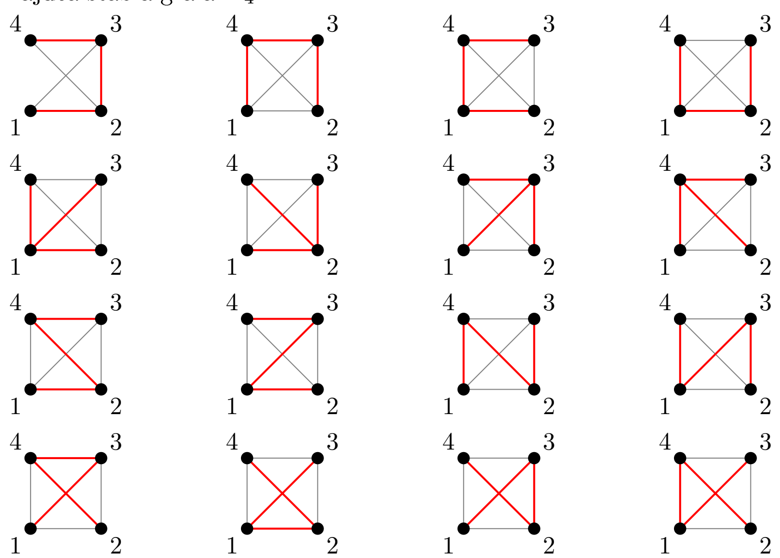
Definicija 79 *Graf G_1 je pokrivajuće stablo grafa G ako važe sledeće dve osobine:*

(i) *G_1 je pokrivajući podgraf od G: $V(G_1) = V(G)$ i $E(G_1) \subseteq E(G)$;*

(ii) *G_1 je stablo.*

Zadatak 80 *Koliko ima različitih pokrivajućih stabala grafa K_4?*

Rešenje. Zadatak ćemo rešiti konstruktivno, tako što ćemo konstruisati sva pokriajuća stabla grafa K_4.



Tako smo dobili konstruisali svih 16 pokruvajućih stabala grafa K_4, među kojima ima 4 neizomorfna stabla. □

Sa ciljem da uvedemo potreban i dovoljan uslov za egzistenciju pokrivajućeg grafa, dokazaćemo prvo jednu pomoćnu lemu.

Lema 81 *Neka je $n \geq 3$. Ako je G povezan i $|E(G)| = k \geq n$, onda G ima pokrivajuće stablo.*

Dokaz. Indukcijom po k. Podsetimo se prvo da, prema Teoremi 75, graf sa n čvorova i bar n grana ima konturu.
Baza $k = n$: Oduzimanjem iz grafa jedne grane konture, graf ostaje povezan i pokriva i dalje sve čvorove. Povezan graf sa $n-1$ čvorova je stablo.
Induktivni korak $T_{k-1} \Rightarrow T_k$: Ako G sadrži konturu, onda možemo konstruisati povezan graf G' brisanjem proizvoljne grane konture. Primetimo da je $V(G') = V(G)$ i $E(G') \subseteq E(G)$. Kako je G' povezan, prema induktivnoj pretpostavci, G' ima pokrivajuće stablo, a to je ujedno i pokrivajuće stablo grafa G. □

Teorema 82 *Graf G ima pokrivajuće stablo ako i samo ako je povezan.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako G ima pokrivajuće stablo, onda postoji put između svaka dva čvora stabla, a onda je to put i u grafu G.
($\Leftarrow$) Neka je G povezan. Posmatraćemo dva slučaja.

1. $|V(G)| = 2$: Povezan graf sa dva čvora ima jednu granu i sopstveno je pokrivajuće stablo.
2. $|V(G)| = n \geq 3$: Za povezan graf važi da je $|E(G)| \geq n - 1$.
   (a) Ako je $|E(G)| = n - 1$, povezan graf sa $n - 1$ grana je stablo. Znači, G je stablo, a ujedno i sopstveno pokrivajuće stablo.
   (b) Neka je $E(G)| = k \geq n$. U ovom slučaju tvrđenje važi na osnovu Leme 81.

□

3.2.1 Algoritmi za konstrukciju pokivajućeg stabla

U literaturi se može pronaći veliki broj algoritama za određivanje pokrivajućeg stabla u grafu. Mi ćemo u nastavku navesti dva, koja ćemo kasnije prilagoditi težinskim grafovima i problemu određivanja minimalnog pokrivajućeg stabla.

Algoritam1 Neka je $G = (V, E)$ povezan graf, gde je $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Prvi algoritam koji ćemo predstaviti prikazan je na Slici 3.1. U prvom koraku se bira proizvoljan čvor v_1. U svakom narednom koraku, podgrafu se dodaje jedan novi čvor koji nije prethodno izabran i za koji postoji grana u grafu koja je incidentna sa tim novim čvorom i jednim već izabranim čvorom. U podgraf se dodaje ta grana. Kako se u svakom koraku dodaje jedna grana i jedan čvor, algoritam staje nakon što je posle prvog koraka izvršeno još $n - 1$ koraka algoritma (što kontroliše brojač i). Pokrivajuće stablo grafa je (V_n, E_n).

Algoritam2 Neka je $G = (V, E)$ povezan graf, gde je $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i neka su grane proizvoljno uređene u niz

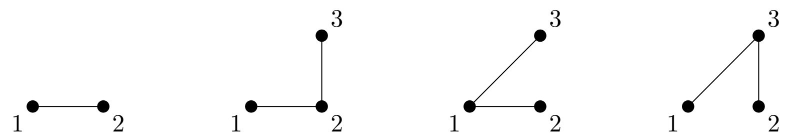
$$(e_1, e_2, \ldots, e_m).$$

Algoritam za određivanje pokrivajućeg stabla dat je na slici 3.2. U prvom koraku, podgraf sadrži samo granu e_1. Svaki sledeći korak prvo proverava da li naredna grana pravi konturu dodavanjem u prethodno konstruisani podgraf. Ako ne pravi, onda se ta grana dodaje podgrafu, inače algoritam prelazi na proveru naredne grane u nizu. Algoritam staje u trenutku kada je izabrano $n-1$ grana. Tada je pokrivajuvajuće stablo (V, E_j) gde je $|E_j| = n - 1$, za neko $j \in \{1, \ldots, m\}$.

3.3 Prüferov niz

U ovom delu ćemo prikazati jedan dokaz za određivanje broja označenih stabala.

Primer 12 *Za $n = 2$ imamo jedno, dok za $n = 3$ imamo 3 različita označena stabla, kao što je prikazano na slici.*



Označena stabla za $n = 4$ prikazana su u Zadatku 80.

Tvrđenje u nastavku obično se pripisuje Cayleyu, a mi ćemo dati dokaz koji su izveli Prüfer i Clarke. Dokaz se zasniva na principu bijekcije. Svakom označenom stablu sa n čvorova pridružuje se niz, tzv. Prüferov niz

$$(p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}) \qquad 1 \le p_i \le n \qquad 1 \le i \le n - 2.$$

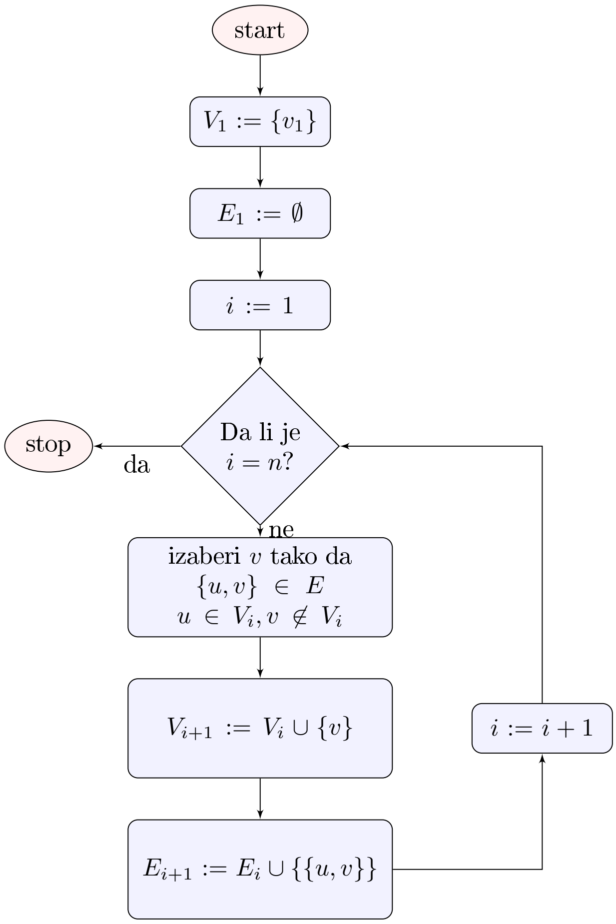


Figure 3.1: Algoritam1

Teorema 83 *Neka je $n \geq 2$. Broj različitih označenih stabala sa čvorovima $\{1, 2, \ldots, n\}$ jednak je n^{n-2}.*

Dokaz. Ako je $n = 2$, imamo jedno označeno stablo i tvrđenje važi. Posmatraćemo sada $n \geq 3$ i pokazaćemo dva podtvrđenja: (i) svakom stablu sa čvorovima $\{1, \ldots, n\}$ možemo na jedinstven način pridružiti Prüferov niz $(p_1, \ldots, p_{n-2})$ koji čine $n - 2$ cela broja iz skupa $\{1, \ldots, n\}$ (koja se mogu ponavljati); (ii) svaki niz $(p_1, \ldots, p_{n-2})$ sa osobinom $\{p_1, \ldots, p_{n-2}) \subseteq \{1, \ldots, n\}$ je Prüferov niz

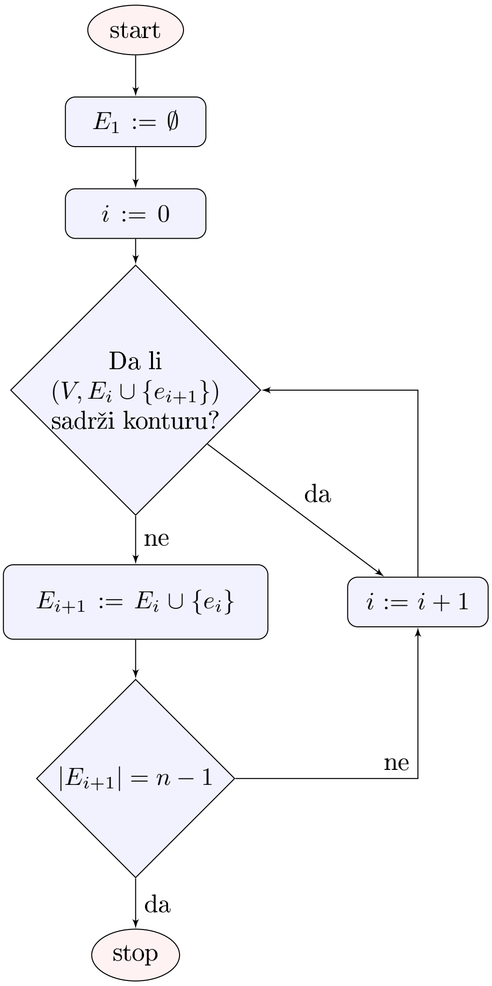


Figure 3.2: Algoritam2

nekog stabla sa n čvorova.

(i) Niz ćemo formirati kao što je objašnjeno u nastavku.

1. Odrediti najmanju oznaku lista u stablu i za p_1 uzeti oznaku njemu susednog čvora. Oduzeti iz grafa list sa oznakom p_1 (i njemu incidentnu granu).
2. Ponavljati prvi korak, dok god ne ostanu samo dva čvora u stablu. Znači za p_i, $2 \leq i \leq n-2$, uzeti oznaku suseda lista (u novodobijenom

stablu) sa najmanjom oznakom.

Tako smo svakom stablu pridružili Prüferov niz.

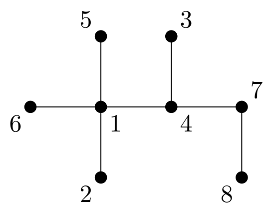
(ii) Neka je dat niz $(p_1, \dots, p_{n-2})$. U nastavku ćem konstruisati stablo čiji je to Prüferov niz.

1. Neka je l_1 najmanji broj koji se ne pojavljuje u skupu $\{p_1, \dots, p_{n-2}\}$. To je morao biti list koji se skida u prvom koraku algoritma. Znači, treba spojiti granom čvorove p_1 i l_1.
2. U svakom narednom koraku, tražimo vrednost l_i koja će odgovarati najmanjoj oznaci lista koji skidamo kada formiramo niz. To je u svakom koraku najmanja vrednost iz skupa koji dobijamo kada iz $\{1, \dots, n\}$ oduzmemo naredne članove niza (čim se pojavljuju u nizu, znači da nisu mogli biti skinuti kao listovi sa najmanjom oznakom) i prethodno skinute listove, tj. $l_i = \min((\{1, \dots, n\} \setminus \{l_1, \dots, l_{i-1}\}) \setminus \{p_i, \dots, p_{n-2}\})$. Grana koju formiramo je $\{l_i, p_i\}$.
3. Preostala dva čvora, koji se nisu pojavili u skupu identifikovanih listova, povežemo granom.

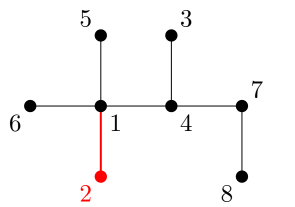
Pseudokod obratnog smera algoritma je sledeći:
Neka je $p(G) = (p_1, \dots, p_{n-2})$ Priferov niz dobijen od označenog stabla G.

1. Za $l_1 = \min(\{1, \dots, n\} \setminus \{p_1, \dots, p_{n-2}\})$ kreiraj granu $\{l_1, p_1\} \in G$.
2. Za $i = 2$ do $i = n - 2$ ponavljaj sledeće korake:
   (a) odredi list
   $$\begin{aligned} l_i &= \min(\{1, \dots, n\} \setminus (\{p_i, \dots, p_{n-2}\} \cup \{l_1, \dots, l_{i-1}\}) \\ &= \min(\{1, \dots, n\} \setminus \{l_1, \dots, l_{i-1}, p_i, \dots, p_{n-2}\}) \end{aligned}$$
   (b) kreiraj granu $\{l_i, p_i\} \in T(G)$.
3. Poslednja grana je $\{u, v\}$, gde je $u, v \in \{1, \dots, n\} \setminus \{l_1, \dots, l_{n-2}\}$.

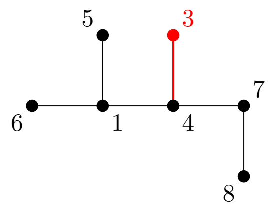
Zadatak 84 *Odrediti Prüferov niz za stablo sa slike.*



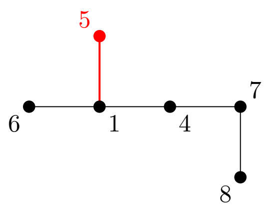
Rešenje. Prüferov niz za dato stablo je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = (1, 4, 1, 1, 4, 7)$. Određivanje redom pojedinačnih koordinata tog niza ilustrovano je grafički u nastavku.



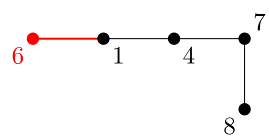
$$l_1 = \min\{2, 3, 5, 6, 8\} = 2$$
$$p_1 = 1$$



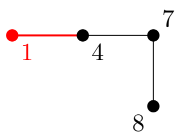
$$l_2 = \min\{3, 5, 6, 8\} = 3$$
$$p_2 = 4$$



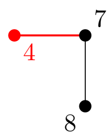
$$l_3 = \min\{5, 6, 8\} = 5$$
$$p_3 = 1$$



$$l_4 = \min\{6, 8\} = 6$$
$$p_4 = 1$$



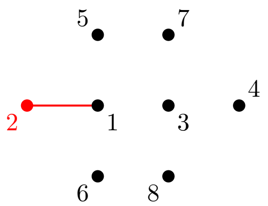
$$l_5 = \min\{1, 8\} = 1$$
$$p_5 = 4$$



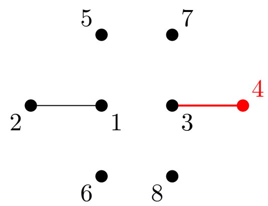
$$l_6 = \min\{4, 8\} = 4$$
$$p_6 = 7$$

Zadatak 85 *Odrediti stablo čiji Pruüferov niz je* $(1, 3, 1, 1, 3, 3)$.

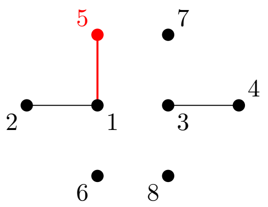
Rešenje. Prvo treba primetiti da je dužina niza $n - 2 = 6$, odakle je broj čvorova stabla $n = 8$. Daćemo grafički prikaz formiranja stabla. Uvedimo oznaku $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.



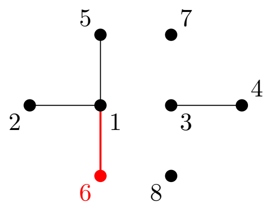
$$\begin{aligned} l_1 &= \min(V \setminus \{1,3\}) = 2 \\ \{l_1, p_1\} &= \{1,2\} \end{aligned}$$



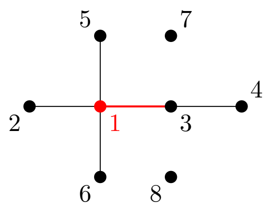
$$\begin{aligned} l_2 &= \min(V \setminus \{1,2,3\}) = 4 \\ \{l_2, p_2\} &= \{3,4\} \end{aligned}$$



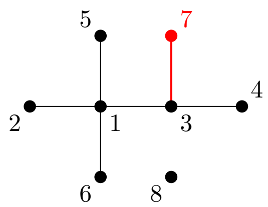
$$\begin{aligned} l_3 &= \min(V \setminus \{1,2,3,4\}) = 5 \\ \{l_3, p_3\} &= \{1,5\} \end{aligned}$$



$l_4 = \min(V \setminus \{1,2,3,4,5\}) = 6$
$\{l_4, p_4\} = \{1,6\}$

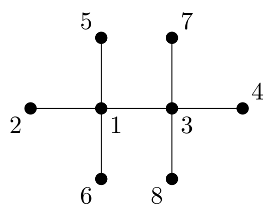


$l_5 = \min(V \setminus \{2,3,4,5,6\}) = 1$
$\{l_5, p_5\} = \{1,3\}$



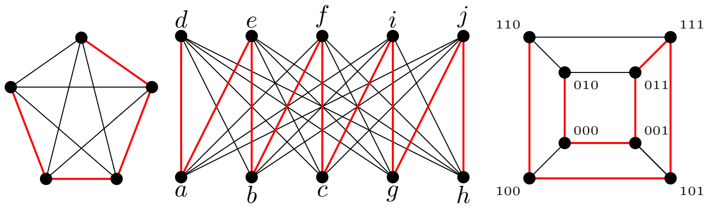
$l_6 = \min(V \setminus \{1,2,3,4,5,6\}) = 7$
$\{l_6, p_6\} = \{3,7\}$

Kada iz skupa svih čvorova V konačno iskuljučimo sve prethodno određene listove $\{1,2,4,5,6,7\}$, ostanu nam čvorovi 3 i 8, koje u poslednjem koraku treba spojiti granom. Tako dobijamo sledeće stablo:



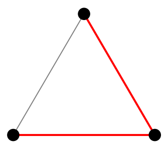
3.3.1 Zadaci za vežbu

1. **Odrediti po jedno pokrivajuće stablo za grafove $K_5, K_{5,5}$ i Q_3.**
   Rešenje.



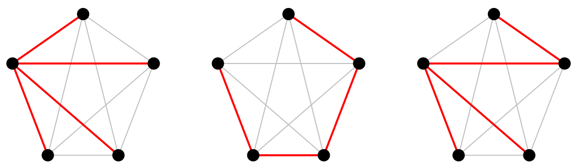
K_5 $K_{3,3}$ Q_3

2. **Konstrisati sva neizomorfna pokrivajuća stabla grafova K_3 i K_5.**
   Rešenje. Postoji samo jedno pokrivajuće stablo za neoznačen graf K_3 :



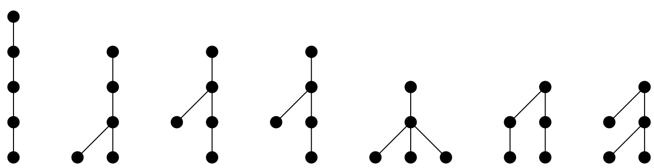
K_3

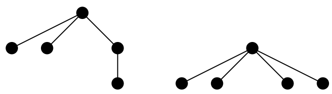
Postoji samo ??? pokrivajućih stabala za neoznačen graf K_5 :



K_5 K_5 K_5

3. **Korensko stablo je stablo u kojem je jedan čvor izabran za koren. Nacrtati sva (neoznačena) korenska stabla sa 5 čvorova.**





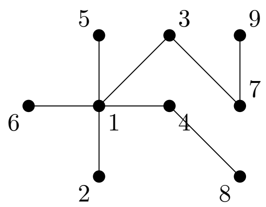
4. Napisati pesudokod i proceduru koja ga izvršava u nekom programskom jeziku, za dodeljivanje Prüferovog niza označenom stablu sa n čvorova.

5. **Napisati sve Prüferove nizove za stabla sa 5 čvorova.**

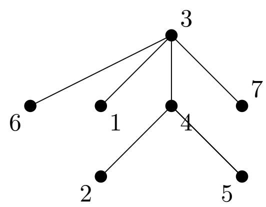
   Prüferovi nizovi za stablo sa 5 čvorova su uređene trojke brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ima ih $5^3 = 125$:

111	112	113	114	115	121	122	123	124	125
131	132	133	134	135	141	142	143	144	145
151	152	153	154	155	211	212	213	214	215
221	222	223	224	225	231	232	233	234	235
241	242	243	244	245	251	252	253	254	255
311	312	313	314	315	321	322	323	324	325
331	332	333	334	335	341	342	343	344	345
351	351	353	354	355	411	412	413	414	415
421	422	423	424	425	431	432	433	434	435
441	442	443	444	445	451	452	453	454	455
511	512	513	514	515	521	522	523	524	525
531	532	533	534	535	541	542	543	544	545
551	552	553	554	555					

6. **Napisati Prüferov niz za stabla G_1 i G_2.**



$G_1 : (1, 1, 1, 4, 1, 3, 7)$



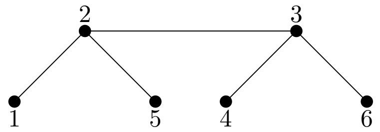
$G_2 : (3, 4, 4, 3, 3)$

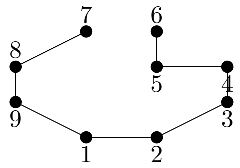
7. **Odrediti stablo čije Prüferov niz je**

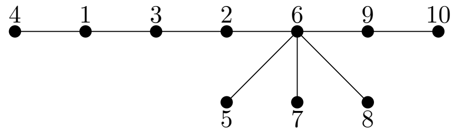
   (a) $(2, 3, 2, 3)$,

   (b) $(5, 4, 3, 2, 1, 9, 8)$,

   (c) $(1, 3, 2, 6, 6, 6, 6, 9)$.


2
3
1
5
4
6


7
6
8
5
4
9
3
1
2


4
1
3
2
6
9
10
5
7
8