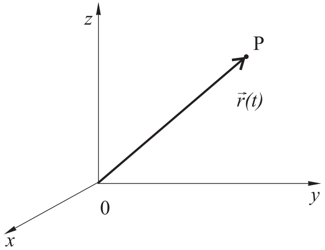
VEKTORSKE FUNKCIJE

19. april 2022.

Vektorske funkcije



Sa E označimo skup tačaka trodimenzionalnog prostora. Neka je O fiksna tačka (koordinatni početak). Vektor $\overrightarrow{OP}$, gde je P promenljiva tačka iz E, je vektor položaja tačke P u odnosu na dati koordinatni sistem.

Označimo sa $X_0(E) = \{\overrightarrow{OP} : P \in E\}$. Preslikavanje $f : E \to X_0(E)$ dato sa $f(P) = \overrightarrow{OP}$, $P \in E$ je bijekcija. Skup $X_0(E)$ ćemo kraće označavati sa X_0.

Definicija

Neka je $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ *i neka su* $x : D \to \mathbb{R}, \ \ y : D \to \mathbb{R}, \ \ z : D \to \mathbb{R}$ *tri realne funkcije realne promenljive. Svako preslikavanje* $\vec{r} : D \to X_0$ *definisano sa*

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in D,$$

zovemo **vektorskom funkcijom jedne skalarne promenljive**.

Definicija

Ako je $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ *i ako su* $x : D \to \mathbb{R}$, $y : D \to \mathbb{R}$, $z : D \to \mathbb{R}$ *tri realne funkcije* n *realnih promenljivih, tada se preslikavanje* $\vec{r} : D \to X_0$ *zadato sa*

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in D,$$

zove **vektorska funkcija** n **realnih promenljivih**.

Definicija

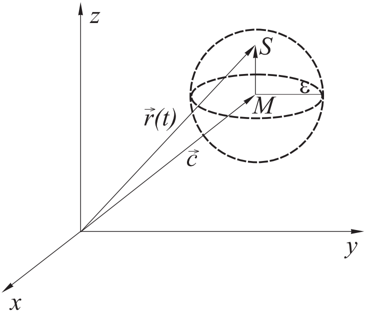
Ako je $a \in \mathbb{R}^n$ tačka nagomilavanja oblasti definisanosti $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ vektorske funkcije $\vec{r} : D \to X_0$, tada za vektor $\vec{c}$ kažemo da je **granična vrednost vektorske funkcije $\vec{r}$ u tački** *a ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall t \in D \setminus \{a\})(d(a,t) < \delta \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{c}| < \varepsilon).$$

Pišemo da je $\lim\limits_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{c}$.

Iz same definicije granične vrednosti vidimo da je

$$\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \lim_{t \to a} x(t)\vec{i} + \lim_{t \to a} y(t)\vec{j} + \lim_{t \to a} z(t)\vec{k}.$$



Ako oko vrha M vektora $\vec{c}$ opišemo otvorenu loptu $L(M, \varepsilon)$ poluprečnika ε, to sledi da postoji $\delta \in \mathbb{R}^+$, tako da za svako $t \in L(a, \delta) \setminus \{a\}$, vrh S vektora $\vec{r}(t)$ pripada $L(M, \varepsilon)$, tj. svi vektori $\overrightarrow{MS}$ leže u otvorenoj lopti $L(M, \varepsilon)$.

Napomena

Ako je $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ i ako za svako $t \in D$ sa $\tau(t)$ označimo vrh vektora $\vec{r}(t)$, tada važi

$$\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{c} \Leftrightarrow \lim_{t \to a} \tau(t) = (c_1, c_2, c_3).$$

Definicija

Za vektorsku funkciju $\overrightarrow{r} : D \to X_0,\ D \subset \mathbb{R}^n$, *kažemo da je* **neprekidna u tački** $a \in D$ *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall t \in D)(d(a,t) < \delta \Rightarrow |\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}(a)| < \varepsilon).$$

Vektorska funkcija $\overrightarrow{r} : D \to X_0,\ D \subset \mathbb{R}^n$ je **neprekidna** ako je neprekidna u svakoj tački $a \in D$.

Iz same definicije neprekidnosti sledi da je funkcija $\overrightarrow{r}$ neprekidna u tački a ako i samo ako su komponente $x : D \to \mathbb{R}$, $y : D \to \mathbb{R}$, $z : D \to \mathbb{R}$ funkcije $\overrightarrow{r} : D \to X_0$ neprekidne u tački a.

Kao i kod skalarne funkcije, sledi da je vektorska funkcija $\overrightarrow{r}$ neprekidna u tački nagomilavanja $a \in D$ ako i samo ako važi da je

$$\lim_{t \to a} \overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}(a),$$

a ako je $a \in D$ izolovana tačka definicionog skupa D vektorske funkcije $\overrightarrow{r}$, tada je $\overrightarrow{r}$ automatski neprekidna u datoj tački.

Vektorska funkcija $\overrightarrow{r} : D \to X_0$, $D \subset \mathbb{R}^n$, je **neprekidna nad skupom** $E \subset D$ ako je restrikcija funkcije $\overrightarrow{r}_E$ $(\overrightarrow{r}_E(t) = \overrightarrow{r}(t),\ t \in E)$ neprekidna funkcija za svako $t \in E$.

Definicija

Ako je $D = I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *i ako je* $\overrightarrow{r} : I \to X_0$ *neprekidna funkcija, tada skup tačaka*

$$L = \{\mathcal{T}(t) : t \in I\}$$

zovemo **kriva** *u prostoru, odnosno* **hodograf vektorske funkcije** $\overrightarrow{r}$.

Primetimo da je L kriva ako i samo ako je $\mathcal{T} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ neprekidna funkcija.

Kriva L je parametarski data sa $L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b]$,
a u vektorskom obliku sa $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), \ t \in [a, b]$.

Ako je

$$M((x(a), y(a), z(a)) \equiv N(x(b), y(b), z(b))$$

za krivu L kažemo da je **zatvorena**.

Ako sve tačke krive L leže u jednoj ravni, onda kažemo da je L **ravna kriva**.

Definicija

Ako je (X, d) metrički prostor, **spojnicom** *(***lukom***) u prostoru X nazivamo svako neprekidno preslikavanje $s : I \to X$ intervala $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ u prostor X.*

Ako su tačke $a = s(0)$ i $b = s(1)$ različite, tada kažemo da spojnica s **povezuje tačke** *a i b.*

Teorema

Skup $L \subset \mathbb{R}^3$ je kriva ako i samo ako je spojnica.

Dokaz. Ako je L spojnica, očigledno je da je L kriva.
Neka je $L = \{\tau(t) : t \in [a, b]\}$ kriva u prostoru. Tada je $\tau : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ neprekidna funkcija. Ako posmatramo funkciju $h : [0, 1] \to [a, b]$ zadatu sa $h(x) = (b - a)x + a$, vidimo da za nju važi

- h je monotono rastuća bijekcija,
- h je neprekidna funkcija nad $[0, 1]$,
- h^{-1} je neprekidna funkcija nad $[a, b]$.

Preslikavanje $f = \tau \circ h$ je neprekidno preslikavanje zatvorenog intervala $[0, 1]$ na tačke krive L, pa je L spojnica. □

Definicija

Za skup $\emptyset \neq A \subset X$ *kažemo da je* **povezan** *(***lučno povezan***) u metričkom prostoru* (X, d)*, ako za svake dve različite tačke* $a, b \in A$*, postoji spojnica* $s : I \to A$ *koja povezuje tačke* a *i* b*.*

Ako je skup X *povezan u metričkom prostoru* (X, d)*, tada kažemo da je metrički prostor* (X, d) **povezan***.*

Definicija

Ako je skup $A \subset X$ *istovremeno otvoren i povezan u metričkom prostoru* (X, d) *i* $A_1 \subset A^*$*, tada za skup* $A \cup A_1$ *kažemo da je* **oblast***. Specijalno, ako je* $A_1 = \emptyset$*, tada se za* A *kaže i* **otvorena oblast***, a ako je* $A_1 = A^*$*, tada se za* $A \cup A_1 = A \cup A^* = \overline{A}$ *kaže i* **zatvorena oblast***.*

Iz same definicije zatvorene oblasti ne sledi da je svaki neprazan zatvoren skup, zatvorena oblast.

Primer

Skup $A = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ je zatvoren, ali nije zatvorena oblast, jer je $A^\circ = \emptyset$. $\Diamond$

Definicija

Za skup $L \subset E = \mathbb{R}^3$ kažemo da je Žordanova[a] kriva ili Žordanov luk sa krajevima ako:
1°) postoji interval $I = [a, b]$ i preslikavanje $\tau : I \to E$, tako da je
$$L = \{\tau(t) : t \in I\};$$
2°) τ je bijektivno preslikavanje intervala I na L;
3°) τ je neprekidno preslikavanje.

Tačke $A = \tau(a)$, $B = \tau(b)$ zovemo krajevi krive L.

[a] Žordan, K. (Camil Jordan, 1838-1922) - francuski matematičar

Ako umesto 2°) uzmemo da važi

2*) τ je bijekcija skupa $[a, b)$ na L i $\tau(a) = \tau(b)$,
onda kažemo da je L zatvorena Žordanova kriva.

Tvrđenje

Ako je $L_1 = \{M(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, tada je kriva L zatvorena Žordanova kriva ako i samo ako postoji preslikavanje $f : L_1 \to L$, tako da važi

1) *f je bijektivno preslikavanje skupa L_1 na L;*
2) *f je neprekidno preslikavanje;*
3) *$f^{-1} : L \to L_1$ je neprekidno preslikavanje.*

Tvrđenje

Neka je $L \subset \tau = \mathbb{R}^2$ *ravna zatvorena Žordanova kriva. Tada*

1) $\mathbb{R}^2 \setminus L = \Omega_1 \cup \Omega_2,$ *gde su* Ω_1 *i* Ω_2 *dve disjunktne otvorene oblasti;*
2) $L = \Omega_1^* = \Omega_2^*;$
3) *Jedna od oblasti, npr. uzmimo da je to* Ω_1*, je ograničen skup i nju zovemo* ***unutrašnjost krive*** L*, dok je druga* Ω_2 *neograničen skup i nju zovemo* ***spoljašnjost krive*** L*.*

Za ravnu oblast $G \subset \tau = \mathbb{R}^2$ kažemo da je **jednostruko povezana** ako unutrašnjost svake Žordanove krive $L \subset G$ pripada oblasti G.