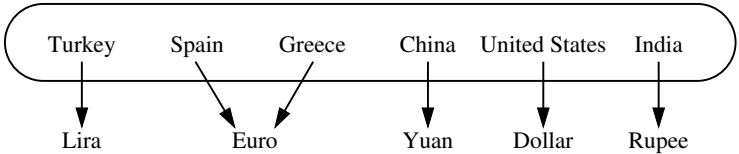
Mape, heš tabele, skip liste, skupovi

Katedra za informatiku, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

2023.

Mapa

- Pythonov rečnik (klasa **dict**) preslikava **ključeve** na **vrednosti**
- drugo ime: asocijativni niz ili mapa
- ključevi su jedinstveni (nema ponavljanja)
- vrednosti ne moraju biti jedinstvene



Mapa ATP: osnovne operacije

`M[k]`	vraća vrednost v vezanu za ključ k u mapi M; ako ne postoji, izaziva `KeyError`; implementira je `__getitem__`
`M[k] = v`	dodeljuje vrednost v ključu k u mapi M; ako ključ već postoji, zamenjuje staru vrednost; implementira je `__setitem__`
`del M[k]`	uklanja element sa ključem k iz mape M; ako ne postoji, izaziva `KeyError`; implementira je `_delitem__`
`len(M)`	vraća broj elemenata u mapi M; implementira je `__len__`
`iter(M)`	generiše listu **ključeva** iz mape M; implementira je `__iter__`

Mapa ATP: dodatne operacije

`k in M`	vraća `True` ako mapa M sadrži ključ k; implementira je `__contains__`
`M.get(k, d=None)`	vraća $M[k]$ ako ključ k postoji u M; inače vraća default vrednost d; ne izaziva `KeyError`
`M.setdefault(k, d)`	ako k postoji u mapi, vraća $M[k]$; ako ne postoji, postavlja $M[k] = d$ i vraća d
`M.pop(k, d=None)`	uklanja element sa ključem k i vraća vezanu vrednost v; ako ključ k nije u mapi M, vraća d ili izaziva `KeyError` ako je d jednako `None`

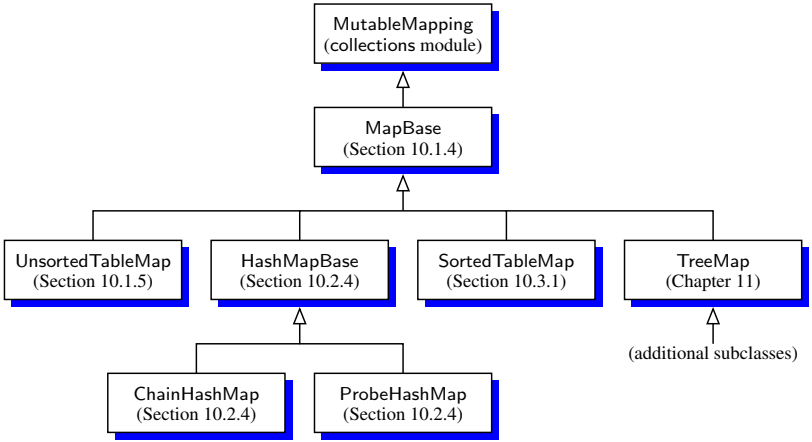
Mapa ATP: još malo operacija

`M.popitem()`	uklanja neki element mape i vraća (k,v); ako je mapa prazna izaziva `KeyError`
`M.clear()`	uklanja sve elemente iz mape
`M.keys()`	vraća skup svih ključeva iz M
`M.values()`	vraća skup svih vrednosti iz M
`M.items()`	vraća skup svih parova (k,v) iz M
`M.update(M2)`	dodeljuje `M[k]=v` za svaki (k,v) iz $M2$
`M == M2`	vraća `True` ako mape sadrže iste parove (k,v)
`M != M2`	vraća `True` ako mape ne sadrže iste parove (k,v)

Mapa ATP: primer

operacija	rezultat	mapa
`len(M)`	`0`	`{ }`
`M['K']=2`	–	`{'K':2}`
`M['B']=4`	–	`{'K':2, 'B':4}`
`M['U']=2`	–	`{'K':2, 'B':4, 'U':2}`
`M['V']=8`	–	`{'K':2, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`M['K']=9`	–	`{'K':9, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`M['B']`	`4`	`{'K':9, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`M['X']`	`KeyError`	`{'K':9, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`M.get('F')`	`None`	`{'K':9, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`M.get('F', 5)`	`5`	`{'K':9, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`M.get('K', 5)`	`9`	`{'K':9, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`len(M)`	`4`	`{'K':9, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`del M['V']`	–	`{'K':9, 'B':4, 'U':2}`
`M.pop('K')`	`9`	`{'B':4, 'U':2}`
`M.keys()`	`'B','U'`	`{'B':4, 'U':2}`
`M.values()`	`4,2`	`{'B':4, 'U':2}`
`M.items()`	`('B',4),('U',2)`	`{'B':4, 'U':2}`
`M.setdefault('B',1)`	`4`	`{'B':4, 'U':2}`
`M.setdefault('A',1)`	`1`	`{'A':1, 'B':4, 'U':2}`
`M.popitem()`	`('B',4)`	`{'A':1, 'U':2}`

Različite implementacije mape

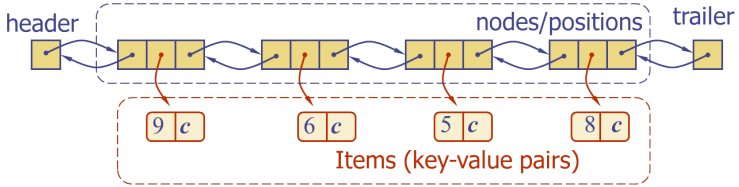


Implementacija MapBase

```
from collections import MutableMapping

class MapBase(MutableMapping):
  """Our own abstract base class that includes a nonpublic _Item class."""

  #-- nested _Item class --
  class _Item:
    """Lightweight composite to store key-value pairs as map items."""
    __slots__ = '_key', '_value'

    def __init__(self, k, v):
      self._key = k
      self._value = v

    def __eq__(self, other):
      return self._key == other._key    # compare items based on their keys

    def __ne__(self, other):
      return not (self == other)        # opposite of __eq__

    def __lt__(self, other):
      return self._key < other._key     # compare items based on their keys
```

Mapa pomoću liste

- jedna moguća implementacija mape je pomoću dvostruko spregnute liste
- elemente čuvamo u proizvoljnom redosledu



Mapa pomoću liste: implementacija 1

```
class UnsortedTableMap(MapBase):
  """Map implementation using an unordered list."""

  def __init__(self):
    """Create an empty map."""
    self._table = []                                # list of _Item's

  def __getitem__(self, k):
    """Return value associated with key k (raise KeyError if not found)."""
    for item in self._table:
      if k == item._key:
        return item._value
    raise KeyError('Key Error: ' + repr(k))

  def __setitem__(self, k, v):
    """Assign value v to key k, overwriting existing value if present."""
    for item in self._table:
      if k == item._key:                            # Found a match:
        item._value = v                             # reassign value
        return                                      # and quit
    # did not find match for key
    self._table.append(self._Item(k,v))
```

Mapa pomoću liste: implementacija 2

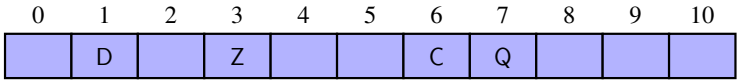
```
def __delitem__(self, k):
  """Remove item associated with key k (raise KeyError if not found)."""
  for j in range(len(self._table)):
    if k == self._table[j]._key:                # Found a match:
      self._table.pop(j)                        # remove item
      return                                    # and quit
  raise KeyError('Key Error: ' + repr(k))

def __len__(self):
  """Return number of items in the map."""
  return len(self._table)

def __iter__(self):
  """Generate iteration of the map's keys."""
  for item in self._table:
    yield item._key                             # yield the KEY
```

Mapa pomoću liste: performanse

- **dodavanje** traje $O(1)$ – novi element možemo dodati na početak ili na kraj
- **traženje** ili **uklanjanje** traje $O(n)$ – u najgorem slučaju (nije pronađen element) mora se proći kroz celu listu
- ovakva implementacija je korisna samo za mape sa malim brojem elemenata
- ili ako je dodavanje najčešća operacija, dok se traženje i uklanjanje retko obavljaju

Hash tabela

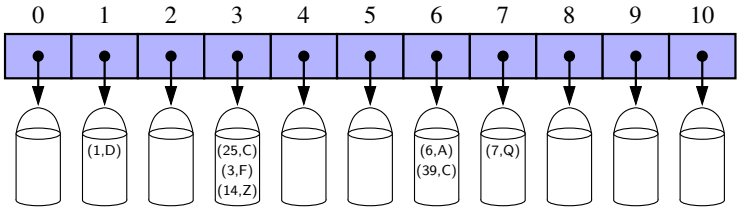
- mapa omogućava pristup korišćenjem **ključeva** kao **indeksa** – `M[k]`
- zamislimo mapu koja kao ključeve korisiti cele brojeve iz intervala $[0, N-1]$ za neko $N > n$
- za čuvanje elemenata možemo koristiti lookup niz dužine N
- npr. mapa sa elementima $(1, D), (3, Z), (6, C), (7, Q)$



- operacije su $O(1)$

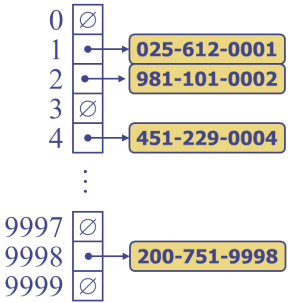
Hash tabela

- šta ako je $N >> n$?
- šta ako ključevi nisu celi brojevi?
- pretvorićemo ključeve u cele brojeve pomoću hash funkcije
- dobra hash funkcija će ravnomerno distribuirati ključeve u $[0, N-1]$
- ali može biti duplikata
- duplikate ćemo čuvati u „kantama“ – tzv. bucket array



Hash funkcija

- **hash funkcija** mapira ključeve na indekse u hash tabeli
- npr. poslednje četiri cifre broja telefona

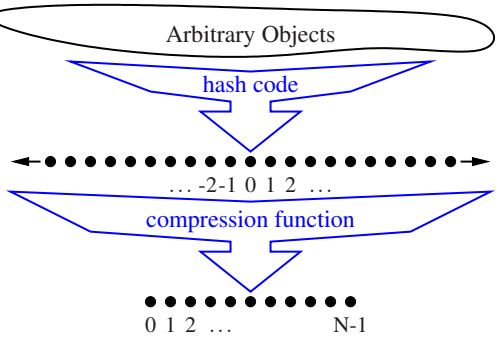


Hash funkcija

- **hash funkcija** mapira ključ k na ceo broj u intervalu $[0, N-1]$
- gde je N kapacitet niza kanti A
- element (k, v) čuvamo u nizu kao $A[h(k)]$
- kolizija: dve vrednosti ključa koje daju isti hash
- dobre hash funkcije imaju **vrlo malo** kolizija

Hash funkcija

- često se hash funkcija može posmatrati kao kompozicija dve funkcije:
- hash code: mapira ključ na ceo broj
- compression function: mapira hash kôd na broj u intervalu $[0, N-1]$



Hash funkcija

- ako se hash funkcija posmatra kao
  hash code $\circ$ compression function
- tada hash code ne zavisi od veličine niza kanti

- vrednosti koje su „blizu“ u skupu ključeva ne moraju imati hasheve koji su „blizu“

Hash code 1

- memorijska adresa
  - adresa Python objekta u memoriji kao hash code
  - dobro osim za numeričke tipove i stringove
- integer cast
  - za svaki tip podataka koji se predstavlja sa najviše onoliko bita koliko i **int** možemo uzeti int interpretaciju njegovih bita
  - za tipove koji zauzimaju više memorije moramo nekako „sažeti“ njegove bite
  - npr. **float** broj u Pythonu zauzima 64 bita a hash kod 32; možemo izabrati
    - gornjih 32 bita
    - donjih 32 bita
    - neku kombinaciju sva 64 bita: XOR ili zbir gornje i donje polovine, itd.

Hash code 2

- suma komponenti
  - podelimo bitove ključa na delove po 32 bita
  - saberemo delove (ignorišemo overflow)
  - zgodno za numeričke ključeve duže od int-a
- polinomska akumulacija
  - podelimo bitove ključa na delove fiksne dužine (npr. 8, 16, 32 bita) $a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$
  - izračunamo polinom (ignorišući overflow) za fiksno z:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$$

Hash code 3

- polinomska akumulacija
  - posebno zgodno za stringove ($z = 33$ daje samo 6 kolizija za 50.000 engleskih reči)
  - polinom $p(z)$ se može izračunati u $O(n)$ vremenu Hornerovom metodom
    - sledeći polinomi se računaju u $O(1)$ vremenu, svaki na osnovu prethodnog
    - $p_0(z) = a_{n-1}$
    - ...
    - $p_i(z) = a_{n-i-1} + zp_{i-1}(z)$
    - na kraju je: $p(z) = p_{n-1}(z)$

Kompresujuća funkcija

- celobrojno deljenje
  - $h(y) = y \mod N$
  - veličina hash tabele N je obično prost broj
- multiply, add and divide (MAD)
  - $h(y) = (ay + b) \mod N$
  - a i b su nenegativni celi brojevi takvi da je $a \mod N \neq 0$

Apstraktna heš tabela 1

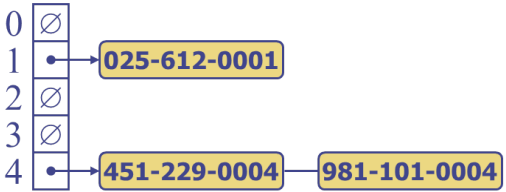
```
class HashMapBase(MapBase):
  """Abstract base class for map using hash-table with MAD compression.

  Keys must be hashable and non-None.
  """

  def __init__(self, cap=11, p=109345121):
    """Create an empty hash-table map.

    cap      initial table size (default 11)
    p        positive prime used for MAD (default 109345121)
    """
    self._table = cap * [ None ]
    self._n = 0                                 # number of entries in the map
    self._prime = p                             # prime for MAD compression
    self._scale = 1 + randrange(p-1)            # scale from 1 to p-1 for MAD
    self._shift = randrange(p)                  # shift from 0 to p-1 for MAD

  def _hash_function(self, k):
    return (hash(k)*self._scale + self._shift) % self._prime % len(self._table)

  def __len__(self):
    return self._n
```

Apstraktna heš tabela 2

```
def __getitem__(self, k):
  j = self._hash_function(k)
  return self._bucket_getitem(j, k)             # may raise KeyError

def __setitem__(self, k, v):
  j = self._hash_function(k)
  self._bucket_setitem(j, k, v)                 # subroutine maintains self._n
  if self._n > len(self._table) // 2:           # keep load factor <= 0.5
    self._resize(2 * len(self._table) - 1)      # number 2^x - 1 is often prime

def __delitem__(self, k):
  j = self._hash_function(k)
  self._bucket_delitem(j, k)                    # may raise KeyError
  self._n -= 1

def _resize(self, c):
  """Resize bucket array to capacity c and rehash all items."""
  old = list(self.items())          # use iteration to record existing items
  self._table = c * [None]          # then reset table to desired capacity
  self._n = 0                       # n recomputed during subsequent adds
  for (k,v) in old:
    self[k] = v                     # reinsert old key-value pair
```

Rukovanje kolizijama

- kolizije nastaju kada se različiti elementi mapiraju na istu ćeliju
- ulančavanje duplikata: svaki element heš tabele je glava liste koja čuva elemente
- traži dodatnu memoriju pored same heš tabele



Mapa sa ulančavanjem

- delegiramo operacije mapi implementiranoj pomoću liste za svaku ćeliju

```
def get(k):
  return A[h(k)].get(k)

def put(k, v):
  t = A[h(k)].put(k, v)
  if t is None:
    n = n + 1
  return t

def remove(k):
  t = A[h(k)].remove(k)
  if t is not None:
    n = n - 1
  return t
```

Heš tabela sa ulančavanjem 1

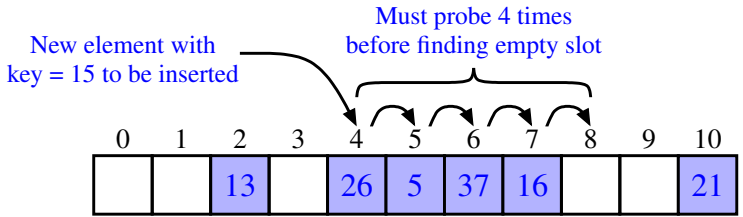
```
class ChainHashMap(HashMapBase):
  """Hash map implemented with separate chaining for collision resolution."""

  def _bucket_getitem(self, j, k):
    bucket = self._table[j]
    if bucket is None:
      raise KeyError('Key Error: ' + repr(k))          # no match found
    return bucket[k]                                   # may raise KeyError

  def _bucket_setitem(self, j, k, v):
    if self._table[j] is None:
      self._table[j] = UnsortedTableMap()      # bucket is new to the table
    oldsize = len(self._table[j])
    self._table[j][k] = v
    if len(self._table[j]) > oldsize:          # key was new to the table
      self._n += 1                             # increase overall map size
```

Heš tabela sa ulančavanjem 2

```
def _bucket_delitem(self, j, k):
  bucket = self._table[j]
  if bucket is None:
    raise KeyError('Key Error: ' + repr(k))          # no match found
  del bucket[k]                                      # may raise KeyError

def __iter__(self):
  for bucket in self._table:
    if bucket is not None:                           # a nonempty slot
      for key in bucket:
        yield key
```

Linearno traženje

- linear probing: smešta element u koliziji u prvu sledeću slobodnu ćeliju (cirkularno)
- elementi u koliziji se nagomilavaju izazivajući dalje kolizije
- primer:



Čitanje sa linearnim traženjem

- get(k): počinjemo od pozicije $h(k)$
- ispitujemo sledeće lokacije sve dok se ne dogodi nešto od:
  - pronašli smo ključ k
  - naišli smo na praznu lokaciju
  - ispitali smo N lokacija

get(k)

$i \leftarrow h(k)$
$p \leftarrow 0$
repeat
  $c \leftarrow A[i]$
  if $c = \emptyset$ **then**
    return null
  else
    if $c.getKey() = k$ **then**
      return $c.getValue()$
    else
      $i \leftarrow (i + 1) \mod N$
      $p \leftarrow p + 1$
until $p = N$
return null

Izmene sa linearnim traženjem

- uvodimo poseban objekat AVAILABLE koji zamenjuje uklonjene elemente
- remove(k)
  - tražimo element sa ključem k
  - ako smo ga našli, vraćamo ga i na njegovo mesto upisujemo AVAILABLE
  - inače vratimo `None`

- put(k, o)
  - izuzetak ako je tabela puna
  - počinjemo od ćelije $h(k)$
  - ispitujemo naredne ćelije sve dok se ne dogodi nešto od:
    - našli smo ćeliju koja je prazna ili sadrži AVAILABLE
    - isprobali smo svih N ćelija
  - upišemo (k, o) u ćeliju i

Heš tabela sa linearnim traženjem 1

```
class ProbeHashMap(HashMapBase):
  """Hash map implemented with linear probing for collision resolution."""
  _AVAIL = object()       # sentinal marks locations of previous deletions

  def _is_available(self, j):
    """Return True if index j is available in table."""
    return self._table[j] is None or self._table[j] is ProbeHashMap._AVAIL

  def _find_slot(self, j, k):
    """Search for key k in bucket at index j.

    Return (success, index) tuple, described as follows:
    If match was found, success is True and index denotes its location.
    If no match found, success is False and index denotes first available slot.
    """
    firstAvail = None
    while True:
      if self._is_available(j):
        if firstAvail is None:
          firstAvail = j                    # mark this as first avail
        if self._table[j] is None:
          return (False, firstAvail)        # search has failed
      elif k == self._table[j]._key:
        return (True, j)                    # found a match
      j = (j + 1) % len(self._table)        # keep looking (cyclically)
```

Heš tabela sa linearnim traženjem 2

```
def _bucket_getitem(self, j, k):
  found, s = self._find_slot(j, k)
  if not found:
    raise KeyError('Key Error: ' + repr(k))          # no match found
  return self._table[s]._value

def _bucket_setitem(self, j, k, v):
  found, s = self._find_slot(j, k)
  if not found:
    self._table[s] = self._Item(k,v)                 # insert new item
    self._n += 1                                     # size has increased
  else:
    self._table[s]._value = v                        # overwrite existing

def _bucket_delitem(self, j, k):
  found, s = self._find_slot(j, k)
  if not found:
    raise KeyError('Key Error: ' + repr(k))          # no match found
  self._table[s] = ProbeHashMap._AVAIL               # mark as vacated

def __iter__(self):
  for j in range(len(self._table)):                  # scan entire table
    if not self._is_available(j):
      yield self._table[j]._key
```

Duplo heširanje

- koristi se sekundarna heš funkcija $d(k)$
- prilikom kolizije element se smešta u prvu slobodnu ćeliju iz niza

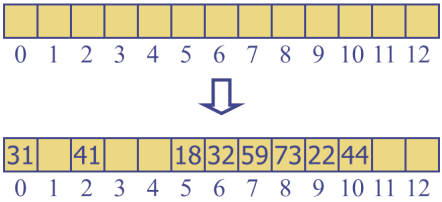
$$(i + jd(k)) \mod N \quad \text{za } j = 0, 1, \ldots, N-1$$

- sekundarna heš funkcija ne sme vratiti 0
- veličina tabele N mora biti prost broj da bi se mogle probati sve ćelije
- čest izbor za $d(k)$:
  $d(k) = q - (k \mod q)$
  - $q < N$
  - q je prost broj
- rezultat $d(k)$ je u intervalu $[1, q]$

Duplo heširanje: primer

- heš tabela sa duplim heširanjem
  - $N = 13$
  - $h(k) = k \mod 13$
  - $d(k) = 7 - (k \mod 7)$
- dodajemo ključeve 18, 41, 22, 44, 59, 32, 31, 73

k	$h(k)$	$d(k)$	Probes		
18	5	3	5		
41	2	1	2		
22	9	6	9		
44	5	5	5	10	
59	7	4	7		
32	6	3	6		
31	5	4	5	9	0
73	8	4	8		



Performanse heširanja

- u najgorem slučaju pretraga, dodavanje, uklanjanje traju $O(n)$
- najgori slučaj: kada su **svi** ključevi u koliziji
- faktor popune $\alpha = n/N$ utiče na performanse
- ako heševi liče na slučajne brojeve može se pokazati da je očekivani broj probanja prilikom dodavanja $1/(1-\alpha)$

Performanse heširanja

- očekivano vreme izvršavanja svih operacija je $O(1)$
- u praksi heširanje je vrlo brzo ako faktor popune nije blizu 100%

Skip lista

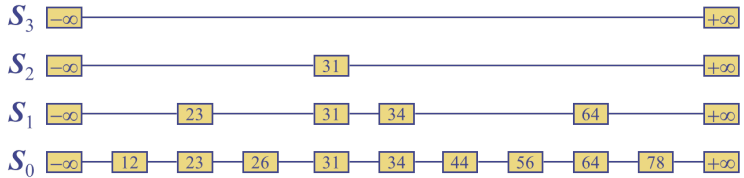
- binarna pretraga sa sortiranim nizom: omogućava pronalaženje elemenata u $O(\log n)$ vremenu
- ali su operacije dodavanja i uklanjanja $O(n)$ u najgorem slučaju

- skip lista omogućava sve u $O(\log n)$ vremenu
- u **prosečnom** slučaju

Skip lista

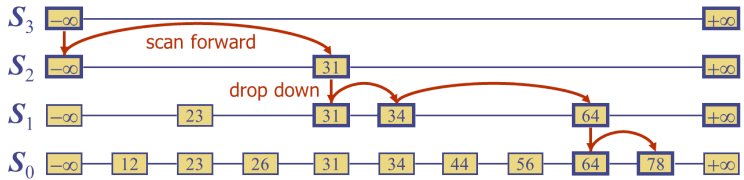
- skip lista za skup S elemenata (k, v) je serija lista $S_0, S_1, \ldots, S_h$ takvih da

1. svaka lista S_i sadrži posebne ključeve $-\infty$ i ∞
2. lista S_0 sadrži ključeve iz S u neopadajućem redosledu
3. svaka lista je podskup prethodne
   $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \ldots \supseteq S_h$
4. lista S_h sadrži samo posebne ključeve



Skip lista: pretraga

- tražimo ključ x u skip listi na sledeći način:
- počnemo od prvog elementa liste na vrhu
- na tekućoj poziciji p_i poredimo x sa $y = key(next(p))$
  - $x = y$: pronašli smo traženi element
  - $x > y$: idemo napred (scan forward)
  - $x < y$: idemo dole (drop down)
- ako smo na nivou S_0 i treba da idemo dole, nema traženog elementa
- primer: tražimo 78



Algoritmi sa uvedenom slučajnošću

- randomized algorithms
- koriste (pseudo)slučajne vrednosti da upravlja svojim izvršavanjem
- sadrže naredbe nalik ovim:

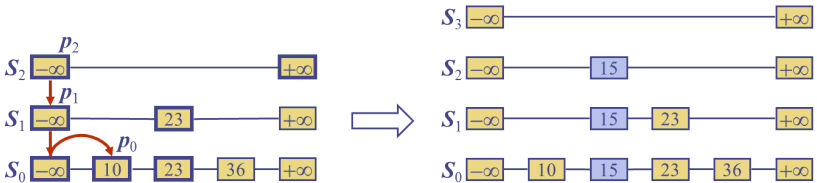
  $b \leftarrow random()$
  if $b = 0$ **then**
  do A ...
  else
  do B ...
- vreme izvršavanja zavisi od ishoda „bacanja novčića“

Algoritmi sa uvedenom slučajnošću

- analiza vremena izvršavanja ovakvih algoritama podrazumeva
  - svi ishodi „bacanja novčića“ su jednako verovatni
  - bacanja su međusobno nezavisna
- vreme izvršavanja **u najgorem slučaju** za ovakve algoritme je često veliko ali je vrlo malo verovatno (npr. sva bacanja novčića imaju isti ishod)
- koristićemo ovakav algoritam za dodavanje elemenata u skip listu

Dodavanje u skip listu

- dodavanje novog elementa (x, o) u skip listu:
  - ponavljamo bacanje novčića sve dok ne dobijemo „pismo“
  - sa i označimo broj puta koliko se pojavila „glava“
  - ako je $i \geq h$ dodaćemo nove liste $S_{h+1}, \ldots, s_{i+1}$, svaku samo sa $-\infty + \infty$
  - tražimo x u skip listi i nađemo pozicije $p_0, p_1, \ldots, p_i$ elemenata sa najvećim ključem manjim od x u svakoj od lista $S_0, S_1, \ldots, S_i$
  - za $j \leftarrow 0, \ldots, i$ dodaćemo (x, o) u listu S_j nakon pozicije p_j
- primer: dodajemo ključ 15, za $i = 2$



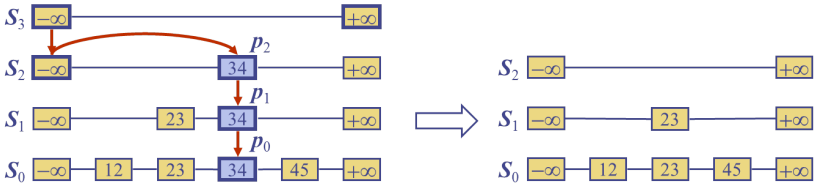
Dodavanje u skip listu

SkipInsert(k, v)
Input: ključ k i vrednost v
Output: najviša pozicija dodatog elementa

```
p ← SkipSearch(k)
q ← None                                   {q će biti najviši čvor u koloni novog elementa}
i ← −1
repeat
    i ← i + 1
    if i ≥ h then
        h ← h + 1                          {dodajemo novi nivo u skip listu}
        t ← next(s)
        s ← insertAfterAbove(None, s, (−∞, None))        {povećaj levu}
        insertAfterAbove(s, t, (+∞, None))               {povećaj desnu kulu}
    while above(p) is None do
        p ← prev(p)                                      {idi nazad}
    p ← above(p)                                         {popni se 1 nivo}
    q ← insertAfterAbove(p, q, (k, v))                   {povećaj visinu kule}
until coinFlip()==tails
n ← n + 1
return q
```

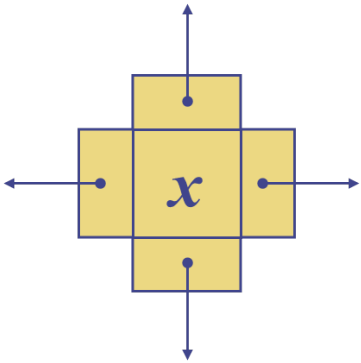
Uklanjanje iz skip liste

- uklanjanje elementa sa ključem x iz skip liste:
  - tražimo x u skip listi i nađemo pozicije $p_0, p_1, \ldots, p_i$ elemenata sa najvećim ključem manjim od x u svakoj od lista $S_0, S_1, \ldots, S_i$
  - uklonimo pozicije $p_0, p_1, \ldots, p_i$ iz listi
  - uklonimo sve prazne liste osim jedne
- primer: uklanjamo ključ 34



Implementacija skip liste

- možemo da koristimo quad-nodes
  - element
  - link na prethodni
  - link na sledeći
  - link na čvor ispod
  - link na čvor iznad
- definišemo specijalne ključeve PLUS_INF i MINUS_INF i odgovarajući komparator



Skip liste i zauzeće prostora

- količina zauzete memorije zavisi od bacanja novčića
- iz teorije verovatnoće
  (a) verovatnoća da se dobije i uzastopnih glava je $1/2^i$
  (b) ako je svaki od n elemenata prisutan u listi sa verovatnoćom p, veličina skupa je np
  (c) ako svaki od n događaja ima verovatnoću p, verovatnoća da će se desiti bar jedan nije veća od np
  (d) očekivani broj bacanja novčića da se dobije „pismo“ je 2

Skip liste i zauzeće prostora

- posmatramo skip listu sa n elemenata
  - prema (a), dodaćemo čvor u listu S_i sa verovatnoćom $1/2^i$
  - prema (b), očekivana veličina liste S_i je $n/2^i$
- očekivani broj čvorova u skip listi je

$$\sum_{i=0}^{h} \frac{n}{2^i} = n \sum_{i=0}^{h} \frac{1}{2^i} < 2n$$

- prema tome, očekivani broj čvorova u skip listi sa n elemenata je $O(n)$

Visina skip liste

- vreme izvršavanja pretrage i dodavanja u skip listu zavisi od njene **visine**
- posmatramo skip listu sa n elemenata
  - prema (a), dodaćemo čvor u listu S_i sa verovatnoćom $1/2^i$
  - prema (c), verovatnoća da S_i ima bar jedan čvor je najviše $n/2^i$
- ako izaberemo $i = 3 \log n$, verovatnoća da $S_{3 \log n}$ ima bar jedan čvor je najviše

$$\frac{n}{2^{3 \log n}} = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

- prema tome, skip lista sa n elemenata je visoka najviše $3 \log n$ sa verovatnoćom najmanje $1 - 1/n^2$

Visina skip liste

- sa vrlo velikom verovatnoćom
- visina skip liste sa n elemenata je $O(\log n)$

Pretraga i ažuriranje skip liste

- vreme pretrage je proporcionalno
  - broju drop down koraka, plus
  - broju scan forward koraka
- drop down koraci su ograničeni visinom skip liste, dakle $O(\log n)$ sa velikom verovatnoćom

Pretraga i ažuriranje skip liste

- kada radimo scan forward korak, ključ se ne nalazi u listi iznad
  - scan forward postoji zato što je ranije novčić dao „pismo“
- prema (d), u svakoj listi očekivani broj scan forward koraka je 2
- prema tome, ukupan broj scan forward koraka je $O(\log n)$
- očekivano vreme za pretragu u skip listi je $O(\log n)$
- slično tome dodavanje i uklanjanje

Performanse skip liste

- skip lista je struktura podataka za implementaciju mape
- upotreba memorije je $O(n)$
- brzina pretrage, dodavanja i uklanjanja je $O(\log n)$ sa velikom verovatnoćom

Skup, multiskup, multimapa

- skup (set) je kolekcija elemenata koja ne poznaje redosled i ne sadrži duplikate
  - elementi skupa su nalik ključevima koji nemaju sebi asocirane vrednosti
- multiskup (multiset, bag) je skup koji dopušta duplikate
- multimapa je mapa koja dopušta da za jedan ključ bude vezano više vrednosti
  - indeks u knjizi preslikava pojam na jednu ili više stranica na kojima se on pominje

Skup ATP: osnovne operacije

`S.add(e)`	dodaje element e u S; nema efekta ako je e već prisutan u S
`S.discard(e)`	uklanja e iz S; nema efekta ako e nije prisutan u S
`e in S`	vraća `True` ako je e prisutan u S; implementira je `__contains__`
`len(S)`	vraća broj elemenata u S; implementira je `__len__`
`iter(S)`	iterira kroz elemente iz S; implementira je `__iter__`

- pomoću osnovnih operacija implementiraju se sve ostale

Skup ATP: dodatne operacije

`S.remove(e)`	uklanja e iz S; ako e nije prisutan u S izaziva `KeyError`
`S.pop()`	vraća i uklanja proizvoljan element iz S; ako je S prazan izaziva `KeyError`
`S.clear()`	uklanja sve elemente iz S

Skup ATP: poređenje skupova

`S == T`	vraća `True` ako skupovi imaju jednak sadržaj
`S != T`	vraća `True` ako skupovi nemaju jednak sadržaj
`S <= T`	vraća `True` ako je S podskup od T
`S < T`	vraća `True` ako je S pravi podskup od T
`S >= T`	vraća `True` ako je S nadskup od T
`S > T`	vraća `True` ako je S pravi nadskup od T
`S.isdisjoint(T)`	vraća `True` ako su S i T disjunktni

Skup ATP: operacije nad skupovima

`S | T`	vraća novi skup koji je unija S i T
`S |= T`	ažurira S da bude unija S i T
`S & T`	vraća novi skup koji je presek S i T
`S &= T`	ažurira S da bude presek S i T
`S ^ T`	vraća simetričnu razliku S i T
`S ^= T`	ažurira S da bude simetrična razlika S i T
`S - T`	vraća razliku S i T
`S -= T`	ažurira S da bude razlika S i T

Implementacija skupa: poređenje $S < T$

```
def __lt__(self, other):
  """Vraća True ako je self pravi podskup od other."""
  if len(self) >= len(other):
    return False  # pravi podskup mora biti manji
  for e in self:
    if e not in other:
      return False  # nije podskup, fali mu e
  return True
```

Implementacija skupa: unija $S|T$

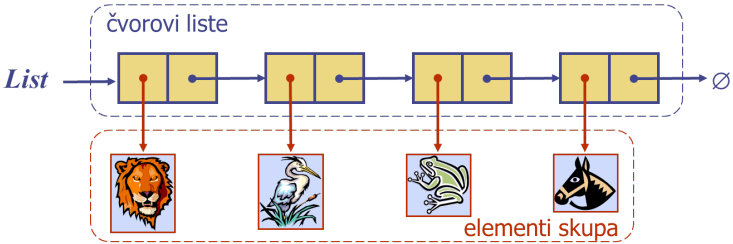
```
def __or__(self, other):
  """Vraća novi skup kao uniju self i other."""
  result = Set()  # rezultat je nova instanca
  for e in self:
    result.add(e)
  for e in other:
    result.add(e)
  return result
```

Implementacija skupa: operacija $S| = T$

```
def __ior__(self, other):
  """Menja self da bude unija self i other."""
  for e in other:
    self.add(e)
  return self   # mora da se vrati self za operator |=
```

Implementacija skupa: struktura podataka

- pomoću liste
- upotreba memorije je $O(n)$
- `__contains__` je $O(n)$



Implementacija skupa: struktura podataka

- pomoću hash tabele
- hash tabela čuva samo ključeve tj. elemente
- `__contains__` je $O(1)$

- za koje vreme rade presek i unija?