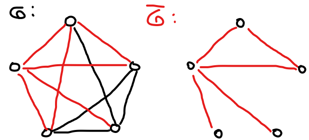
Вежбе 9

-Основни појмови теорије графова-

Комплемент графа G, у ознаци $\overline{G}$, је граф за који важи

$V(\overline{G}) = V(G)$

$E(\overline{G}) = \{uv \mid u,v \in V(G) \wedge uv \notin E(G)\}$



Ако је $|V(G)| = n$ онда важи:

- $E(G) \cup E(\overline{G}) = E(K_n)$
- $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n-1, \ \forall v$
- Ако је G k-регуларан, тада је $\overline{G}$ $(n-k-1)$-регуларан

1. Нека је G граф са непарним бројем чворова. Доказати да граф G и његов комплемент $\overline{G}$ имају исти број чворова непарног степена.

Нека је $|V(G)| = n \equiv 1 \pmod 2$ (n непарно)

За сваки чвор $v \in V(G) = V(\overline{G})$ важи

$d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n-1 \equiv 0 \pmod 2$ ($n-1$ је тада парно)

Добијамо да су $d_G(v)$ и $d_{\overline{G}}(v)$ оба парна или оба непарна, па тривијално важи да графови G и $\overline{G}$ имају исти број чворова непарног степена.

2. Нека је G граф са $n = 4k-1$ чворова. Тада бар један од графова G и $\overline{G}$ садржи чвор са степеном $\geq 2k$.

Ако G садржи чвор степена $\geq 2k$, доказ је готов.

Претпоставимо да у G не постоји чвор траженог степена, тј. $\Delta(G) < 2k$

Сада је $d_G(v) \leq 2k-1, \ \forall v \in V(G)$

Уколико би сви чворови у G имали степен $2k-1$, добили бисмо да G има $4k-1$ чворова (непаран број чворова) непарног степена, а то није могуће.

$\Rightarrow \exists u \in V(G)$ такав да је $d_G(u) \leq 2k-2$

Посматрајмо сада чвор u у графу $\overline{G}$

$$d_G(u) = n-1-d_{\overline{G}}(u) \geqslant 4k-2-(2k-2) = 2k$$

Добили смо да је $d_{\overline{G}}(u) \geqslant 2k$, па је u тражени чвор у $\overline{G}$.

-Повезаност графова-

ШЕТЊА $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 \dots v_{k-1} e_k v_k$ (произвољан низ чворова и грана) (walk)

Пошто радимо само са простим графовима, довољно је навести низ чворова

$\rightarrow W = v_0 v_1 v_2 v_3 \dots v_{k-1} v_k$

СТАЗА = шетња код које нема понављања грана (trail)

ПУТ = шетња код које нема понављања чворова (path)

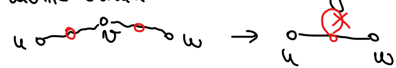
Чворови u и v су ПОВЕЗАНИ у $G \iff$ постоји пут у G између чворова u и v, тзв. uv-пут

Ова релација је релација еквиваленције

Р: по дефиницији се узима да је сваки чвор повезан сам са собом

С: ако постоји uv-пут, онда постоји и vu-пут

Т: Унија uv-пута и vw-пута у општем случају може бити шетња, али уколико постоји uw-шетња, онда постоји и uw-пут



Класе ове релације еквиваленције се називају КОМПОНЕНТЕ ПОВЕЗАНОСТИ

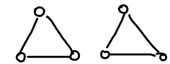
$\omega(G)$ - број компоненти повезаности графа G

Граф G је ПОВЕЗАН $\iff$ $\forall u,v \in V(G)$ важи да су чворови u и v повезани

$\iff \omega(G) = 1$

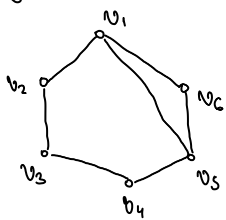
T: Ако за граф G важи $|V| = n$ и $|E| < n-1$, тада је G неповезан. $\not\Leftarrow$

Из претходног тврђења следи да повезан граф са n чворова има барем $n-1$ грану.



Неповезан граф за који важи $|V| = |E| = 6$

РАСТОЈАЊЕ између чворова u и v, у ознаци $d_G(u,v)$, је дужина најкраћег uv-пута у G



$d(v_1,v_2) = 1$

$d(v_1,v_3) = 2$

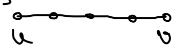
$d(v_1,v_4) = 2$

(пут $v_1 v_5 v_4$)

ДИЈАМЕТАР графа G $\to$ највеће растојање између 2 чвора

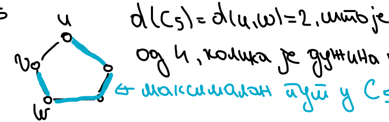
$$d(G) = \max_{u,v \in V} d_G(u,v)$$

P_5



$d(G) = d(u,v) = 4$

C_5



$d(C_5) = d(u,w) = 2$, што је различито од 4, колика је дужина max пута

Важи $d(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

3. Нека је G повезан граф са n чворова и $\Delta(G) \leq 2$. Тада је $G \cong C_n$ или $G \cong P_n$.

$\Delta(G) \leq 2$: $\quad d(v) \in \{0,1,2\}$

G повезан $\Rightarrow$ нема изолованих чворова

$\Rightarrow d(v) \in \{1,2\}, \forall v \in V$

- Ако G има висећи чвор, онда из услова задатка добијамо да G мора бити пут са n чворова, па је $G \cong P_n$.
- Уколико G не садржи висеће чворове, G је повезан 2-регуларан граф са n чворова па је $G \cong C_n$.

4. Доказати да је за сваки граф G бар један од графова G и $\overline{G}$ повезан.

Ако је G повезан граф, тврђење је доказано.

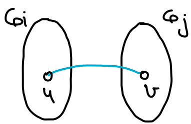
Претпоставимо да је G неповезан, тј. $\omega(G)=k\geq 2$. Доказујемо да је тада $\overline{G}$ повезан.

Нека су $G_1, G_2, \dots, G_k$ компоненте повезаности графа G.

Посматрајмо произвољне чворове $u,v \in V(\overline{G}) = V(G)$. Разликујемо следеће случајеве:

1° Чворови u и v су у различитим компонентама повезаности графа G.

Нека $u\in V(G_i), v \in V(G_j)$

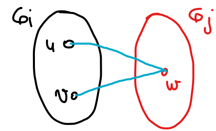


$uv \notin E(G)$ јер су чворови u и v у различитим компонентама

$\Rightarrow uv \in E(\overline{G})$, па су чворови u и v повезани путем дужине 1 у графу $\overline{G}$

2° Чворови u и v су у истој компоненти.

Нека $u,v \in V(G_i)$



Како $\omega(G)=k\geq 2$, знамо да постоји компонента повезаности G_j, $G_i \neq G_j$.

Сада $\exists w \in V(G_j)$

На исти начин као малопре добијамо $uw \in V(G)$ и $vw \in V(G)$

$\Rightarrow$ Пут uwv је пут дужине 2 у $\overline{G}$

$\Rightarrow$ Граф $\overline{G}$ је повезан граф.

5. Нека је G граф са n чворова и $e \geq \binom{n-1}{2} + 1$ грана. Доказати да је G повезан граф.

Претпоставимо да G није повезан граф.

Сада је $\overline{G}$ повезан. Нека је $e' = |E(\overline{G})|$

Из чињенице да је $\overline{G}$ повезан следи $e' \geq n-1$.

Добијамо да важи

$$e = \binom{n}{2} - e' \leq \binom{n}{2} - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{n-1}{2}(n-2) = \binom{n-1}{2} \quad \lightning$$

Ово је у контрадикцији са условом $e \geq \binom{n-1}{2} + 1$, те је посматрани граф G повезан.

6. Ако је G граф са $n \geq 3$ чворова, такав да је $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$, доказати да је G повезан.

Претпоставимо да је G неповезан, тј. $\omega(G) = k \geq 2$.

Нека су $G_1, G_2, \dots, G_k$ компоненте повезаности графа G.

I начин: Посматрајмо произвољну компоненту повезаности G_i.

Нека $v_i \in V(G_i)$. Сада важи

$$|V(G_i)| \geq 1 + d(v_i) \geq 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}, \ \forall i = 1, 2, \dots, k$$

За број чворова графа G тада важи $|V(G)| = \sum_{i=1}^{k} |V(G_i)| \geq k \cdot \frac{n+1}{2} \overset{k \geq 2}{\geq} 2 \cdot \frac{n+1}{2} = n+1$ ↯

(број чворова је $|V(G)| = n$)

$\Rightarrow$ G мора бити повезан граф

II начин: Нека је, б.у.о., G_1 компонента повезаности са најмањим бројем чворова $\Rightarrow |V(G_1)| \leq \frac{n}{k}$

За чвор $v \in V(G_1)$ важи

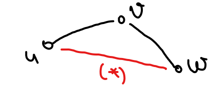
$d_G(v) = d_{G_1}(v) \leq \frac{n}{k} - 1 = \frac{n-k}{k} \overset{k \geq 2}{\leq} \frac{n-2}{2} < \frac{n-1}{2}$ ↯ са условом $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2} \iff \forall u \in V(G) \ d_G(u) \geq \frac{n-1}{2}$

$\Rightarrow$ G је повезан

7. Ако за свака три чвора u, v и w графа G важи

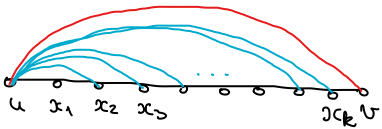
$$uv \in E(G) \land vw \in E(G) \Rightarrow uw \in E(G) \qquad (*)$$

тада је G комплетан граф или дисјунктна унија комплетних графова.



Нека је G повезан граф. Претпоставимо да G није комплетан, тј. $\exists u,v \in V(G)$ такви да $uv \notin E(G)$.

G повезан $\Rightarrow \exists$ uv-пут у G



Важи:

$ux_1 \in E(G) \land x_1x_2 \in E(G) \overset{(*)}{\Rightarrow} ux_2 \in E(G)$

$ux_2 \in E(G) \land x_2x_3 \in E(G) \overset{(*)}{\Rightarrow} ux_3 \in E(G)$

$\vdots$

$ux_k \in E(G) \land x_kv \in E(G) \overset{(*)}{\Rightarrow} uv \in E(G)$ ↯ (Претпоставили смо $uv \notin E(G)$)

$\Rightarrow G$ је комплетан граф

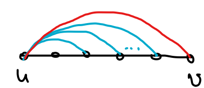
Ако је G неповезан граф, онда малопре описаним поступком закључујемо да је свака компонента повезаности графа G комплетан граф, па је G унија комплетних графова.

II начин: Нека је, б.у.о., G повезан.

Нека су u и v произвољни чворови графа G. Посматрајмо најкраћи uv-пут у G.

Ако је $d(u,v) \geq 2$, исто као у првом начину добијамо $uv \in E(G)$, па је $d(u,v)=1$ ↯

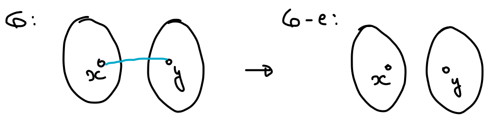
$\Rightarrow d(u,v)=1$ за свака 2 чвора, па је G комплетан граф



Нека је дат граф $G=(V,E)$. Одузимањем

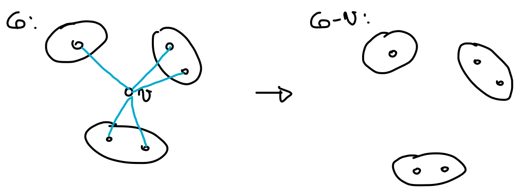
- гране $e \in E$ добијамо граф $G-e$ који је покривајући подграф графа G за који важи $E(G-e) = E \setminus \{e\}$
- чвора $v \in V$ добијамо граф $G-v$ за који важи $G-v = G[V \setminus \{v\}]$ ($G-v$ је подграф индукован скупом чворова $V \setminus \{v\}$)

Грана $e=xy$ је МОСТ (РАЗДЕЛНА грана) акко $\omega(G-e) > \omega(G)$



Важи $\omega(G-e) = 1 + \omega(G)$, ако је грана e мост у графу G.

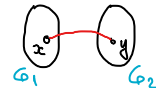
Чвор v је АРТИКУЛАЦИОНИ (РАЗДЕЛНИ) чвор акко $\omega(G-v) > \omega(G)$



Ако је v артикулациони чвор, онда граф $G-v$ има најмање једну, а највише $d_G(v)-1$ додатних компоненти

$$\omega(G)+1 \le \omega(G-v) \le \omega(G) + d_G(v) - 1$$

8. Доказати да ако су сви чворови графа G парног степена, онда G нема мост.



Нека је, б.у.о., граф G повезан.

Претпоставимо да је грана $e = xy$ мост у графу G.

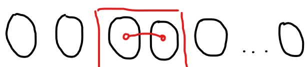
Брисањем гране e се граф G распада на две компоненте повезаности, на графове G_1 и G_2, тј. $G - e = G_1 \cup G_2$

Нека је $x \in V(G_1)$.

Чвор x је сада чвор непарног степена у графу G_1, док сви остали чворови у G_1 имају исти паран степен који имају и у G. Добијамо да граф G_1 има тачно један чвор непарног степена, а то није могуће.

$\Rightarrow$ Граф G не садржи грану која је мост.

* Уколико би G био неповезан граф, исти доказ бисмо поновили за компоненту повезаности графа G која садржи мост e, пошто брисање гране e не утиче на остале компоненте



-Графовски низови-

Кажемо да је низ графовски уколико постоји граф са тим низом степена чворова.

→ нерастући низ

<u>Пример:</u>

Низ $(5,4,3,2,1)$ није графовски низ

1° Није могуће да граф има 5 чворова и да је $d(v_1)=5$

2° Граф не може имати непаран број чворова непарног степена.

3° Сваки нетривијалан граф садржи 2 чвора истог степена.

* Граф са једним чвором је тривијалан граф. $\circ$ тривијалан граф

Графови са $n \geq 2$ чворова су нетривијални.

9. Утврдити да ли су следећи низови графовски. За низове који јесу графовски је потребно конструисати одговарајуће графове.

а) $(4, 4, 3, 2, 1)$ *б)* $(3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$

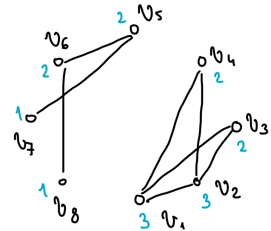
а)

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
4	4	3	2	1
	3	2	1	0
		1	0	$\boxed{-1}$

Пошто низ $(1,0,-1)$ није графовски (-1 не може бити степен чвора), ни низ $(4,4,3,2,1)$ такође није графовски.

б)

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
3	3	2	2	2	2	1	1
	2	1	1	2	2	1	1
		0	0	2	2	1	1
					1	0	1
							0

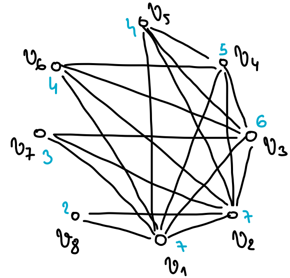


Т: (Хавел - Хакими)

Низ целих бројева $(d_1, d_2, \dots, d_n)$, где је $n-1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0$, је графовски АККО је низ $(d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ графовски.

в) $(7, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2)$

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
7	7	6	5	4	4	3	2
	6	5	4	3	3	2	1
		4	3	2	2	1	0
			2	1	1	0	
				0	0		



г) $(7, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$
д) $(7, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$

10. Доказати да постоје тачно два неизоморфна графа са низом степена $(6, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

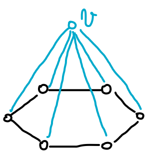
$|V| = 7$

Постоји $v \in V$ такав да је $d(v) = 6$, па је чвор v повезан са преосталих 6 чворова графа

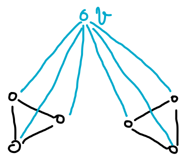
$$\begin{array}{ccccccc} 6 & \underline{3} & \underline{3} & \underline{3} & \underline{3} & \underline{3} & \underline{3} \\ & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

Граф $G - v$ је 2-регуларан граф са 6 чворова.

Како постоје 2 неизоморфна 2-регуларна графа са 6 чворова (C_6 и $C_3 \cup C_3$), број неизоморфних графова са низом степена чворова $(6,3,3,3,3,3,3)$ је тачно два.



C_6



$C_3 \cup C_3$

-Стабла-

Ацикличан граф = Граф који не садржи контуре

СТАБЛО = ПОВЕЗАН + АЦИКЛИЧАН граф

T_n - стабло са n чворова

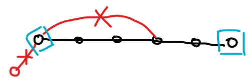
T: Свака два чвора у стаблу су повезана јединственим путем.

тривијално стабло $\circ$ T_1

Нетривијална стабла имају бар 2 чвора.

T: Свако нетривијално стабло садржи бар 2 висећа чвора.

$\Rightarrow$ Чворови на крајевима пута максималне дужине су висећи чворови.



T: Свако стабло са n чворова има тачно $n-1$ грану.

Стабла су:

- Минимални повезани графови

  $\Rightarrow G-e$ је неповезан, $\forall e \in E(G)$

- Максимални ациклични графови

  $\Rightarrow G+e$ садржи контуру, $\forall e \notin E(G)$

1. Доказати да је свако стабло са бар два чвора бипартитан граф.

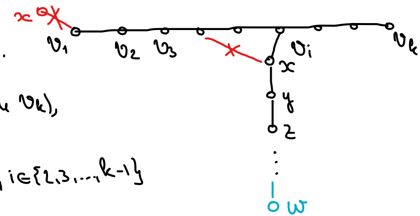
Знамо да је граф бипартитан акко не садржи непарне контуре.

Како стабла уопште не садрже контуре, па ни оне непарне, стабла су бипартитни графови.

II начин:

Посматрајмо пут максималне дужине у стаблу. Нека је то uv-пут. Знамо да је чвор u висећи чвор. Једну класу бипартитног графа чини чвор u и сви чворови који су на парном растојању од чвора u, а другу класу чине чворови који су на непарном растојању од чвора u.

2. Доказати да је стабло са тачно два висећа чвора пут.



Нека је $v_1 v_2 \ldots v_k$ најдужи пут у датом стаблу T.
Довољно је доказати да стабло T нема више чворова.

Ако постоји још неки чвор x који је сусед чвора v_1 (или v_k), добијамо пут који је дужи од максималног ↯

$\Rightarrow$ Нови чвор x може бити само сусед неког чвора v_i, $i \in \{2,3,\ldots,k-1\}$

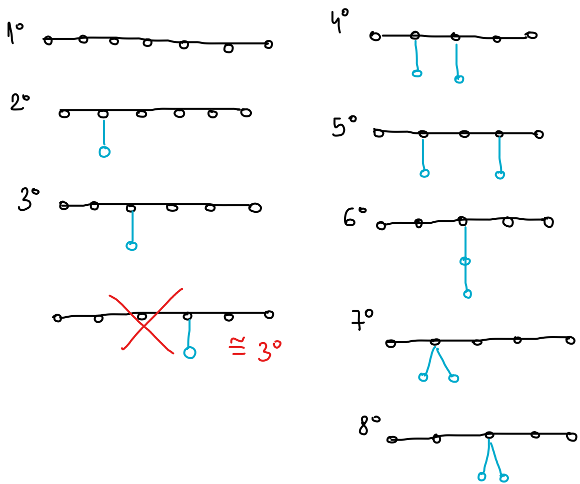
- x висећи чвор ↯ (3 висећа чвора: v_1, v_k и x)
- x има неког суседа y који мора бити нови чвор (иначе добијамо контуру)
- y висећи чвор ↯
- y има новог суседа z
- z висећи чвор ↯
- z има новог суседа

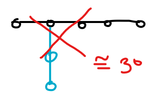
$\vdots$

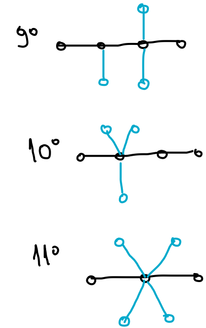
Описани поступак је коначан (радимо само са коначним графовима или смо у неком моменту добили пут који је дужи од максималног)

$\Rightarrow$ $\exists$ чвор w који је висећи ↯ (добили смо 3 висећа чвора у графу који има тачно 2 висећа чвора)

3. Наћи сва неизоморфна стабла са 7 чворова.







Постоји 11 неизоморфних стабала са 7 чворова.

4. Нека је T стабло и $\Delta(T) = k$. Доказати да T има бар k висећих чворова. (домаћи!)