

Rukovanje brojevima

Slajdovi za predmet Osnove programiranja

Katedra za informatiku, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

2022.

Ciljevi

- razumevanje pojma tipova podataka
- poznavanje osnovnih numeričkih tipova podataka u Pythonu
- razumevanje osnovnih principa reprezentacije brojeva u računaru
- korišćenje Pythonove `math` biblioteke
- razumevanje akumulator šablona
- razumevanje i pisanje programa koji operišu numeričkim podacima

Numerički tipovi podataka

- informacije koje obrađuje računar su predstavljene u obliku podataka
- dve vrste brojeva:
 - **celi brojevi** – nemaju razlomljeni deo, npr. 5, 4, 3, 6
 - **decimalni ostaci** – brojevi između 0 i 1, npr. .25, .1, .05, .01

Numerički tipovi podataka ₂

- celi i razlomljeni brojevi su različito predstavljeni unutar računara!
- kažemo da su celi i razlomljeni brojevi različitog **tipa**
- tip podatka određuje koje vrednosti promenljiva može imati i koje operacije možemo izvršiti nad njima

Numerički tipovi podataka ₃

- celi brojevi se predstavljaju tipom podataka `integer` (kraće `int`)
- vrednosti tipa `int` mogu biti pozitivni i negativni celi brojevi i nula

Numerički tipovi podataka ₄

- brojevi koji imaju razlomljeni deo predstavljaju se kao **brojevi u pokretnom zarezu (float)**
- kako ih razlikujemo?
 - numerički literal bez decimalne tačne predstavlja `int` vrednost
 - numerički literal sa decimalnom tačkom predstavlja `float` vrednost (makar sve decimale bile 0)

Numerički tipovi podataka 5

- Python ima posebnu funkciju `type` koja vraća tip date vrednosti

```
>>> type(3)
<class 'int'>
>>> type(3.1)
<class 'float'>
>>> type(3.0)
<class 'float'>
>>> myInt = 32
>>> type(myInt)
<class 'int'>
>>>
```

Numerički tipovi podataka ₆

- zašto nam trebaju dve vrste brojeva?
 - brojači ne mogu biti razlomljeni
 - puno matematičkih algoritama su vrlo efikasni sa celim brojevima
 - tip float čuva samo [aproksimaciju](#) realnog broja
 - pošto float brojevi nisu egzaktni, treba koristiti int kad god je moguće

Numerički tipovi podataka 7

- Python 2: operacije nad float-ovima proizvode float-ove
- Python 2: operacije nad int-ovima proizvode int-ove
- Python 3: deljenje dva int-a proizvodi float
- Python 3: operator za celobrojno deljenje je //

```
>>> 3.0+4.0
7.0
>>> 3+4
7
>>> 3.0*4.0
12.0
>>> 3*4
12
>>> 10.0/3.0
3.3333333333333335
>>> 10/3
3.3333333333333335
>>> 10 // 3
3
>>> 10.0 // 3.0
3.0
```

Numerički tipovi podataka ₈

- celobrojno deljenje proizvodi ceo broj: $10//3 = 3$
- ostatak pri deljenju: $10\%3 = 1$
- $a = (a//b)*b + a\%b$

Paket math

- pored aritmetičkih operacija (+,-,*,/,//,**,%,abs) postoji još puno matematičkih funkcija u paketu math
- paket je skup korisnih funkcija

Korišćenje `math` paketa

- napišimo program koji izračunava korene kvadratne jednačine

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- jedini deo koji nam nedostaje je izračunavanje kvadratnog korena...
- za to postoji funkcija u paketu `math`

Korišćenje math paketa 2

- da bismo koristili paket, potreban nam je sledeći red u programu:
`import math`
- `import`-i obično stoje na početku programa
- importovanje paketa čini funkcije iz tog paketa dostupnima u našem programu

Korišćenje `math` paketa ₃

- funkciju `sqrt` pozivamo sa `math.sqrt(x)`
- „tačka-notacija“ kaže Pythonu da funkciju `sqrt` traži u paketu
- za izračunavanje korena možemo pisati:
`root = math.sqrt(b*b - 4*a*c)`

Korišćenje math paketa ₄

```
# quadratic.py
# Izračunava realne korene kvadratne jednačine
# Ilustruje korišćenje math paketa
# Pažnja: program puca ako nema realnih korena

import math # čini funkcije iz paketa dostupnim

print("Izračunavanje korena kvadratne jednačine")
print()

a, b, c = eval(input("Unesite koeficijente (a, b, c): "))

root = math.sqrt(b * b - 4 * a * c)
root1 = (-b + root) / (2 * a)
root2 = (-b - root) / (2 * a)

print()
print("Rešenja su:", root1, root2)
```

Korišćenje math paketa ₅

```
$ python quadratic.py
```

Izračunavanje korena kvadratne jednačine

Unesite koeficijente (a, b, c): 3, 4, -1

Rešenja su: 0.215250437022 -1.54858377035

- Šta je ovo?

```
$ python quadratic.py
```

Izračunavanje korena kvadratne jednačine

Unesite koeficijente (a, b, c): 1, 2, 3

Traceback (most recent call last):

```
File "/home/branko/pajton/quadratic.py", line 14, in -toplevel-  
    root = math.sqrt(b * b - 4 * a * c)
```

ValueError: math domain error

Korišćenje math paketa ₆

- ako je $a = 1, b = 2, c = 3$, pokušavamo da izračunamo koren negativnog broja
- umesto `math.sqrt` možemo da upotrebimo `**`
- kako iskoristiti `**` za izračunavanje korena?

Akumuliranje rezultata: faktorijel

- čekaš u redu sa još 5 ljudi; na koliko načina se može poređati 6 ljudi?
- permutacije 6 elemenata
- ukupan broj permutacija = $6!$ (6 faktorijel) = 720
- faktorijel se definiše ovako: $n! = n(n - 1)(n - 2) \dots (1)$
- prema tome $6! = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720$

Akumuliranje rezultata: faktorijel ₂

- kako napisati program za računanje faktorijela?
 - 1 uneti broj čiji faktorijel se računa
 - 2 izračunati faktorijel
 - 3 ispisati rezultat

Akumuliranje rezultata: faktorijel ₃

- kako smo izračunali $6!$?

1 $6 * 5 = 30$

2 uzeti tih 30, i pomnožiti $30 * 4 = 120$

3 uzeti tih 120, i pomnožiti $120 * 3 = 360$

4 uzeti tih 360, i pomnožiti $360 * 2 = 720$

5 uzeti tih 720, i pomnožiti $720 * 1 = 720$

Akumuliranje rezultata: faktorijel ₄

- ponavljamo množenje i pamtimo međurezultat
- ovakvi algoritmi se zovu **akumulatori**, jer postepeno gradimo (akumuliramo) rezultat
- međurezultati i konačni rezultat se čuvaju u **akumulatorskoj promenljivoj**

Akumuliranje rezultata: faktorijel ₅

- opšti oblik akumulatorskog algoritma izgleda ovako:
 - 1 inicijalizuj akumulatorsku promenljivu
 - 2 ponavljaj narednu operaciju dok se ne dobije konačan rezultat
 - 2a ažuriraj vrednost akumulatorske promenljive
 - 3 rezultat je u akumulatorskoj promenljivoj

Akumuliranje rezultata: faktorijel ₆

- trebaće nam petlja

```
fact = 1
```

```
for i in (6,5,4,3,2,1):  
    fact = fact * i
```

- da probamo ovo ručno da izvršimo

Akumuliranje rezultata: faktorijel 7

- zašto smo inicijalizovali `fact` na 1?
 - u svakom ciklusu petlje prethodna vrednost `fact` se koristi za računanje sledeće
 - u prvom prolazu `fact` će imati vrednost zahvaljujući inicijalizaciji
- ako bismo izostavili inicijalizaciju šta bi se desilo?

Akumuliranje rezultata: faktorijel ₈

- množenje je komutativno, možemo napisati program ovako:

```
fact = 1
for i in (2,3,4,5,6):
    fact = fact * i
```

- šta ako želimo faktorijel nekog drugog broja?

Akumuliranje rezultata: faktorijel ₉

- šta vraća `range(n)`?
0, 1, 2, 3, ..., n-1
- `range` može imati još parametara; `range(start, n)` vraća
start, start+1, ..., n-1
- `range(start, n, step)` vraća
start, start+step, ..., n-1

Akumuliranje rezultata: faktorijel ₁₀

- pomoću range funkcije možemo napraviti našu for petlju na više načina
- možemo brojati od 2 do n:
`range(2, n+1)` (zašto `n+1`?)
- možemo brojati od n do 2:
`range(n, 1, -1)`

Akumuliranje rezultata: faktorijel ₁₁

- kompletan program za računanje faktorijela

```
# factorial.py  
# Program računa faktorijel datog broja  
# Ilustruje petlju sa akumulatorom
```

```
n = eval(input("Unesite prirodan broj: "))  
fact = 1  
for i in range(n,1,-1):  
    fact = fact * i  
print("Faktorijel od", n, "je", fact)
```

Granice int-a

- koliko je 100! ?

```
$ python3 factorial.py
```

```
Unesite prirodan broj: 100
```

```
Faktorijel od 100 je 93326215443944152681699238856266700  
49071596826438162146859296389521759999322991560894146397  
615651828625369792082722375825118521091686400000000000000  
000000000000
```

- prilično veliki broj

Granice int-a₂

- novije verzije Pythona mogu da izračunaju 100!
- u starijim verzijama ovaj program će pući već za n=13
- `OverflowError: integer multiplication`

Granice `int-a` ₃

- iako postoji beskonačno mnogo celih brojeva, samo konačan broj njih se može predstaviti pomoću `int-a`
- opseg mogućih vrednosti zavisi od broja **bita** koje CPU koristi za predstavljanje `int-a`
- tipično se za `int` koristi 32 bita

Granice `int-a`

- iako postoji beskonačno mnogo celih brojeva, samo konačan broj njih se može predstaviti pomoću `int-a`
- opseg mogućih vrednosti zavisi od broja **bita** koje CPU koristi za predstavljanje `int-a`
- tipično se za `int` koristi 32 bita
- to znači da ima 2^{32} mogućih vrednosti, sa 0 u sredini
- opseg je od -2^{31} do $2^{31} - 1$
(ovo -1 je zbog nule koja takođe zauzima mesto)
- $100!$ je mnogo veće od 2^{31} ; kako to radi?

Rukovanje velikim brojevima

- ako koristimo float umesto int-a?
- kada inicijalizujemo akumulator na 1.0 dobijamo

```
$ python factorial.py
```

```
Unesite prirodan broj: 15
```

```
Faktorijel od 15 je 1.307674368e+012
```

- više ne dobijamo potpuno tačan rezultat!

Rukovanje velikim brojevima ₂

- vrlo veliki ili vrlo mali brojevi se izražavaju u **eksponencijalnoj notaciji**
- $1.307674368\text{e}+012$ predstavlja broj $1.307674368 \cdot 10^{12}$
- ovim množenjem se decimalna tačka pomera za 12 mesta u desno
- ali broj ima 9 decimala
- 3 cifre su izgubljene!

Rukovanje velikim brojevima ₃

- float-ovi su aproksimacije
- pomoću njih možemo prikazati veći opseg brojeva, ali sa manjom preciznošću
- Python 3 ima rešenje – prošireni int-ovi
- fleksibilnost na račun brzine i potrošnje memorije

Konverzije tipova

- kombinovanje `int`-a i `int`-a proizvodi `int`
- kombinovanje `float`-a i `float`-a proizvodi `float`
- šta se dešava kada ih pomešamo?
 $x = 5.0 + 2$
- šta bi trebalo da bude rezultat?

Konverzije tipova ₂

- morali bismo ili konvertovati 5.0 u 5 i obaviti `int`-sabiranje
- ili konvertovati 2 u 2.0 i obaviti `float`-sabiranje
- kovertovanje `float` u `int` (u opštem slučaju) nosi gubitak podataka
- `int`-ovi se lako konvertuju u `float` dodavanjem `.0`

Konverzije tipova ₃

- u **mešovitim** izrazima Python će automatski konvertovati
`int` → `float`
- nekada mi želimo da kontrolišemo konverziju tipa
 - **eksplicitna tipizacija**

Konverzije tipova ₄

```
>>> float(22/5)
4.4
>>> int(3.9)
3
>>> round(3.9)
4.0
>>> import math
>>> math.floor(3.9)
3.0
>>> math.floor(-3.9)
-4.0
>>> math.ceil(3.9)
4.0
>>> math.ceil(-3.9)
-3.0
```