NIZOVI, KONVERGENCIJA NIZOVA, II deo

21. februar 2023.

Osnovne osobine realnih konvergentnih nizova

1° *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$*, tada je* a *jedina tačka nagomilavanja niza* $\{a_n\}$*.*

2° *Konvergentan niz* $\{a_n\}$ *ima jedinstvenu graničnu vrednost.*

3° *Konvergentan niz je ograničen.*

4° *Ako je realan niz* $\{a_n\}$ *ograničen i ima jednu tačku nagomilavanja, tada je on konvergentan i njegova granična vrednost je tačka nagomilavanja.*

Naglasimo da ograničen niz sa samo jednom tačkom nagomilavanja **ne mora** da bude konvergentan u prostoru (X, d). Na primer, u prostoru $(\mathbb{Q}, |\ \ |)$, posmatrajmo niz $\{a_n\}$ dat sa

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 1, \\ a_{2n-1} &\in \left(\sqrt{5}+\tfrac{1}{n+1}, \sqrt{5}+\tfrac{1}{n}\right) \cap \mathbb{Q} = \left(\sqrt{5}+\tfrac{1}{n+1}, \sqrt{5}+\tfrac{1}{n}\right)_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

• $a_n \in (-50, 50)$ (ograničen je);
• 1 je jedina tačka nagomilavanja u $\mathbb{Q}$, u $\mathbb{R}$ ima dve tačke nagomilavanja: 1 i $\sqrt{5}$;
• $a_n \nrightarrow 1$, $n \to \infty$ jer se izvan (svake) otvorene lopte $L\left(1, \frac{1}{n}\right)_Q = \left(1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)_{\mathbb{Q}}$ nalaze svi neparni članovi niza, dakle beskonačno mnogo članova niza.

5° *Ako niz* $\{a_n\}$ *konvergira ka broju* a*, tada je i niz* $\{|a_n|\}$ *konvergentan i konvergira ka broju* $|a|$*, tj.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$$

• Obrnuto nije tačno. Na primer, niz $\{(-1)^n\}$ je divergentan, a niz $\{|(-1)^n|\}$, tj. $\{1\}$ je konvergentan (konvergira ka broju 1).

6° *Ako niz* $\{|a_n|\}$ *konvergira ka broju* 0*, tada je i niz* $\{a_n\}$ *konvergentan i konvergira ka broju* 0*, tj.*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

7° *Ako su nizovi* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *takvi da je* $a_n \leq b_n$ *za* $n \geq k$ *i ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$*, tada je* $a \leq b$*.*

8° *Ako su nizovi* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *i* $\{c_n\}$ *takvi da je* $a_n \le b_n \le c_n$ *za* $n \ge k$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, *onda je i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Primer

Kako je

$$\frac{n}{n^3+n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3+n} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3+i} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3+1} = \frac{n}{n^3+1},$$

to prema osobini **8°** *sledi da je*

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+n} \le \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3+i} \right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+1} = 0,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+2} + \ldots + \frac{1}{n^3+n} \right) = 0.$$

9° Neka je $\{b_n\}$ niz prirodnih brojeva za koji važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, tada je i $\lim\limits_{n\to\infty} a_{b_n} = a$.

10° Ako niz $\{a_n\}$ konvergira ka a, tada i svaki podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ konvergira ka a.

Napomena

Poslednje dve osobine važe i u proizvoljnom metričkom prostoru (X, d).

Napomena

Iz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *i* $a_n < b_n$ *za* $n \geq k$, *sledi* $a \leq b$, *ali ne uvek i* $a < b$, *što se npr. videti ako se uzme da je* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ *i* $b_n = 1$. *Tada je* $a_n < b_n$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

Računske operacije sa graničnim vrednostima i primeri

Tvrđenje (deo tvrđenja pod a) važi i u $\mathbb{R}$ i u $\mathbb{C}$)

a) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *tada je*

1°) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$,

2°) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$,

3°) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$,

4°) *za* $b_n \neq 0$ *i* $b \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{1}{b}$,

5°) *za* $b_n \neq 0$ *i* $b \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Dokaz. Dokazaćemo deo tvrđenja **a)** 1°).
Iz konvergencije nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ sledi da za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoje prirodni brojevi $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tako da je

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_1 \quad \text{i} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_2.$$

Birajući

$$n_0 = \max\{n_1, n_2\},$$

imamo da je

$$\begin{aligned} |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| &= |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \quad n \geq n_0. \end{aligned}$$

Tvrđenje (deo tvrđenja pod b), c), d) važi u $\mathbb{R}$)

b) *Ako* $a_n \to \infty$ *i* $b_n \to b$ $(b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$, *tada*

1°) $(a_n + b_n) \to \infty$,

2°) $(a_n \cdot b_n) \to \infty$, *za* $b > 0$, *odnosno* $(a_n \cdot b_n) \to -\infty$, *za* $b < 0$.

c) *Ako* $a_n \to -\infty$ *i* $b_n \to b$ $(b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$, *tada*

1°) $(a_n + b_n) \to -\infty$,

2°) $(a_n \cdot b_n) \to -\infty$ *za* $b > 0$, *odnosno* $(a_n \cdot b_n) \to \infty$ *za* $b < 0$.

d) *Neka je* $\{a_n\}$ *niz za koji je* $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Princip monotonije

Tvrđenje

Svaki monotono neopadajući (rastući) niz koji je ograničen sa gornje strane konvergira svome supremumu, a svaki monotono nerastući (opadajući) niz ograničen sa donje strane konvergira svome infimumu.

Dokaz. Pretpostavimo na primer, da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane i monotono neopadajući. Neka je

$$(M-\varepsilon, M+\varepsilon), \quad M = \sup a_n,$$

$\varepsilon-$okolina tačke M. Tada postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da

$$M - \varepsilon < a_{n_1} \leq M.$$

Zaista, ako ne bi postojao takav prirodan broj n_1, sledilo bi da za sve članove niza važi

$$a_n \leq M - \varepsilon,$$

pa bi broj

$$M - \varepsilon < M$$

bio gornje ograničenje niza, koje je manja od njegovog supremuma M što je nemoguće.

S obzirom da je $\{a_n\}$ monotono neopadajući niz, važi

$$M - \varepsilon < a_{n_1} \leq a_{n_1+1} \leq a_{n_1+2} \leq ... \leq M < M + \varepsilon,$$

tj.

$$a_n \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon) \text{ za } n \geq n_1,$$

pa je M granična vrednost niza $\{a_n\}$. Slično se dokazuje preostali slučaj. $\square$

Posledica

Svaki gotovo monoton i ograničen niz je konvergentan.

Broj e

Posmatrajmo nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, gde je

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

1) Niz $\{a_n\}$ je monotono rastući , jer

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^{n}}=\frac{(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^{n}}=\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$=\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=\left(1+\frac{-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}$$

i koristeći Bernulijevu nejednakost $(1+h)^n>1+nh$, $h>-1$, $h\neq 0$, $n>1$ dobijamo da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n}=1,$$

tj. $a_{n+1}>a_n$.

2) Niz $\{b_n\}$ je monotono opadajući, jer iz

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n(n+2)} \cdot (n+2)\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1,$$

sledi da je $b_{n+1} < b_n$.

Kako je $a_n < b_n$, to je $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$, tj. nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su ograničeni, pa su zbog njihove monotonosti oba niza konvergentna.

Neka je $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Tada je $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$, pa je

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad (1)$$

jer je e supremum za niz $\{a_n\}$, a infimum za niz $\{b_n\}$. Svi članovi nizova a_n i b_n su racionalni brojevi. Broj e je iracionalan, pa u (1) važi stroga nejednakost.

Napomenimo da je $e \approx 2,718281828...$ transcedentan broj, odnosno nije nula nijednog polinoma sa celobrojnim koeficijentima. Transcedentnost broja e dokazao je Ermit[1] 1873. godine.

[1] Ermit, Č. (Charles Hermite, 1822-1901) francuski matematičar

Važe osobine:

1) *Ako niz* $\{a_n\}$, $a_n > 0$ *konvergira ka broju* $a > 0$, *tada je i niz* $\{\ln a_n\}$, *konvergentan i konvergira ka broju* $\ln a$.

2) *Ako niz* $\{a_n\}$ *konvergira ka* a, *tada je i niz* $\{e^{a_n}\}$, *konvergentan i konvergira ka* e^a.

3) *Ako niz* $\{a_n\}$, $a_n \geq 0$ *konvergira ka broju* a, *tada je i niz* $\{\sqrt[k]{a_n}\}$, $k \in \mathbb{N}$, *konvergentan i konvergira ka broju* $\sqrt[k]{a}$.

4) *Ako je* $\{a_n\}$ *niz takav da* $a_n \to \infty$, *tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

5) *Ako je* $\{a_n\}$ *niz takav da* $a_n \to -\infty$, *tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Primeri nekih graničnih vrednosti nizova su:

Primer

$$1) \quad a > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1;$$

$$2) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$3) \quad \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases};$$

$$4) \quad \alpha \in \mathbb{R}, a > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0;$$

$$5) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Niz umetnutih intervala. Bolcano-Vajerštrasova teorema

Pod **nizom umetnutih intervala** podrazumeva se niz zatvorenih intervala $\{[a_n, b_n]\}$ za koji važi:

1) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$
(svaki sledeći nalazi se u prethodnom intervalu).

2) $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ (dužina intervala teži ka nuli).

Tvrđenje

Neka je dat niz zatvorenih intervala $\{[a_n, b_n]\}$ *za koji važi* 1). *Tada je*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

gde je

$$a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\},$$

$$b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ukoliko je $\{[a_n, b_n]\}$ *niz umetnutih intervala, tj. važi i* 2), *tada postoji jedan i samo jedan broj koji pripada svim intervalima.*

Dokaz. Posmatrajmo nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$. Tada očigledno važi:

- niz $\{a_n\}$ je monotono neopadajući,

- niz $\{b_n\}$ je monotono nerastući,

- $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$, $n \in \mathbb{N}$, odnosno nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su ograničeni.

Dakle, nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su konvergentni, prema principu monotonije, i

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Takođe je $a \leq b$ (osobina $\mathbf{7}^\circ$).

Iz

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = b - a = 0$$

sledi da je $a = b$. Kako za svako n važi

$$a_n \leq a = b \leq b_n$$

to je a jedina zajednička tačka za sve intervale.

$\square$

Ovu osobinu nema skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Između brojeva

$$\sqrt{2} - \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \sqrt{2} - \frac{1}{n+1}$$

uzmimo racionalan broj a_n, a između brojeva

$$\sqrt{2} + \frac{1}{n+1} \quad \text{i} \quad \sqrt{2} + \frac{1}{n}$$

racionalan broj b_n. Dobijamo niz zatvorenih intervala $\{[a_n, b_n]\}$ pri čemu

1) $a_n \in \mathbb{Q}, \; b_n \in \mathbb{Q}$,
2) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$,
3) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

To bi bio niz umetnutih intervala u skupu $\mathbb{R}$. U skupu $\mathbb{R}$ dati niz ima jednu i samo jednu zajedničku tačku i to $\sqrt{2}$.

Označimo sa $[a,b]_{\mathbb{Q}} = [a,b] \cap \mathbb{Q}$. Za niz $\{[a_n, b_n]_{\mathbb{Q}}\}$ važi:

1) $[a_1, b_1]_{\mathbb{Q}} \supset [a_2, b_2]_{\mathbb{Q}} \supset \ldots \supset [a_n, b_n]_{\mathbb{Q}} \supset \ldots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Ne postoji racionalan broj q, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, $q \in [a_n, b_n]_{\mathbb{Q}}$, jer bi tada niz $\{[a_n, b_n]\}$ imao dve zajedničke tačke q i $\sqrt{2}$, što protivureči dokazu prethodne teoreme.

Dokažimo Bolcano[2]-Vajerštrasovu[3] teoremu

[2] Bolcano, B. (Bernhard Bolzano, 1781-1848) - češki matematičar i filozof
[3] Vajerštras, K. (Karl Weierstrass, 1815-1897) - nemački matematičar

Tvrđenje

Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.

Dokaz. Neka je niz $\{a_n\}$ ograničen i

$$m = \inf a_n \leq a_n \leq M = \sup a_n.$$

Ako je $m = M$, tada je $a_n = m$, odnosno niz $\{a_n\}$ je konstantan, pa on ima jedinstvenu tačku nagomilavanja - graničnu vrednost.

Pretpostavimo da je $m \neq M$. Podelimo interval $[m, M]$ na dva jednaka dela. U bar jednom delu, označimo taj interval sa $[m_1, M_1]$, ima beskonačno mnogo članova niza i to u smislu da je skup

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in [m_1, M_1]\}$$

beskonačan.

Podelimo $[m_1, M_1]$ na dva jednaka dela. Sa $[m_2, M_2]$ označavamo onaj od podintervala intervala $[m_1, M_1]$ koji sadrži beskonačno mnogo članova niza.

Nastavljajući dolazimo do niza $\{[m_n, M_n]\}$ zatvorenih intervala za koji važi:

1) $[m_n, M_n]$ sadrži beskonačno mnogo članova niza,

2) $[m_1, M_1] \supset [m_2, M_2] \supset \ldots \supset [m_n, M_n] \supset \ldots,$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(M_n - m_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M - m}{2^n} = 0.$

Dakle, postoji jedinstvena tačka a koja pripada svim zatvorenim intervalima. Dokažimo da je a tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$. Iz

$$\lim_{n\to\infty} m_n = a = \lim_{n\to\infty} M_n \quad \text{i} \quad m_n \leq a \leq M_n,$$

sledi da za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tako da je

$$m_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \text{i} \quad n \geq n_1$$

i

$$M_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \text{i} \quad n \geq n_2,$$

odnosno

$$[m_n, M_n] \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \text{za} \quad n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\},$$

pa je a tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ jer $[m_n, M_n]$ sadrži beskonačno mnogo članova datog niza.

Posledica

Iz svakog ograničenog niza može se izdvojiti konvergentan podniz.

Dokaz. Neka je $\{a_n\}$ ograničen niz. Postoji bar jedna tačka nagomilavanja a tog niza. Tada postoji monotono rastući niz prirodnih brojeva $\{n_k\}$ tako da za svako $k \in \mathbb{N}$ imamo da $a_{n_k} \in L(a, \frac{1}{k})$. Podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$, kako je konstruisan konvergira ka tački a. $\square$

Napomena

Slična osobina važi i za prostor $\mathbb{R}^m$, *tj. iz svakog ograničenog niza* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^m$ *može se izdvojiti konvergentan podniz.*

Posledica

Svaki ograničen niz $\{a_n\}$ koji ima samo jednu tačku nagomilavanja, je konvergentan.

Dokaz. Neka je $\{a_n\}$ ograničen niz, tj.

$$m = \inf a_n \leq a_n \leq M = \sup a_n$$

i neka je a jedina tačka nagomilavanja niza a_n.
Dokažimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pretpostavimo suprotno, postoji okolina $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ izvan koje ima beskonačno mnogo članova niza. Ovi članovi niza izvan $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, obrazuju novi niz $\{a_{n_k}\}$ koji je podniz datog niza. Ovaj niz je ograničen, pa ima jednu tačku nagomilavanja b. Očigledno je da je b ujedno i tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ i da $b \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Dakle, niz $\{a_n\}$ ima dve tačke nagomilavanja, što je suprotno pretpostavci. Znači $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. □