Вежбе 8

-Основни појмови теорије графова-

Граф G је уређени пар $(V(G), E(G))$

$V(G)$ - скуп чворова (vertices)

$E(G)$ - скуп грана (edges)

V, E коначни скупови

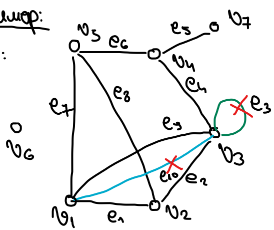
- чворови u и v су крајеви гране e
- чворови u и v су суседни
- грана e је ИНЦИДЕНТНА са u и v

$e = uv$

Граф G можемо дефинисати и као уређену тројку $(V(G), E(G), \Psi_G)$, где је Ψ_G функција инциденције

Пример:

G:



v_6 - изоловани чвор

v_7 - висећи чвор

e_3 - петља

e_9, e_{10} - паралелне гране

Радимо само ПРОСТЕ графове (без петљи и паралелних грана)

$N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ (neighborhood)

скуп СУСЕДА чвора v

$N(v_5) = \{v_1, v_2, v_4\}$

$d_G(v) = |N_G(v)|$ СТЕПЕН чвора v (degree)

$d_G(v_5) = 3$

Користи се и ознака $\deg(v)$

Степен изолованог чвора је 0, а степен висећег чвора је 1.

$\delta(G) = \min\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$ МИНИМАЛАН степен

$\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$ МАКСИМАЛАН степен

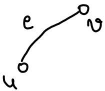
РЕГУЛАРАН граф = граф код ког сви чворови имају исти степен

G је k-регуларан $\iff d_G(v) = k, \ \forall v \in V(G)$

Т: (ОСНОВНА ТЕОРЕМА ТЕОРИЈЕ ГРАФОВА)

Збир степена чворова сваког графа је паран број и једнак је двоструком броју грана графа, тј.

$$\sum_{v\in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$$



Сваку грану бројимо по 2 пута, по једном за сваки њен крај.

П1: Број чворова непарног степена сваког графа је паран.

V_0 – чворови парног степена (остатак при дељењу са 2 је 0)

V_1 – чворови непарног степена

$$\underbrace{2|E|}_{\text{парно}} = \sum_{v\in V} d(v) = \underbrace{\sum_{v\in V_0} d(v)}_{\text{парно}} + \sum_{v\in V_1} d(v)$$

$\sum_{v\in V_1} d(v)$ је сада парна само ако је број сабирака паран број.

П2: Ако граф садржи непаран број чворова, тада је бар један чвор парног степена.

Ако су сви чворови непарног степена, имамо граф са непарним бројем чворова непарног степена. ↯

Да ли постоји 7-регуларан граф са 77 чворова? → НЕ

1. 7-регуларан граф мора имати паран број чворова (П1)
2. Граф са 77 чворова мора имати бар један чвор парног степена (П2)

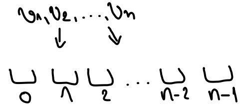
} Довољно је написати једно објашњење

1. У сваком графу постоје два чвора једнаких степена.

Посматрајмо граф $G=(V,E)$, где је $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$

Знамо да у графу са n чворова важи $0 \le d(v_i) \le n-1, \ \forall v_i \in V$

Желимо да распоредимо n чворова у n кутија у зависности од степена чвора.



Разликујемо следеће случајеве:

1° Ако G садржи изоловани чвор, онда сигурно не садржи чвор степена $n-1$

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ чворова} \\ n-1 \text{ кутија } (0,1,\dots,n-2) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ДП}} \text{бар 2 чвора су у истој кутији, тј. истог су степена}$$

2° Уколико имамо чвор степена $n-1$, онда немамо изоловани чвор

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ чворова} \\ n-1 \text{ кутија } (1,2,\dots,n-1) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ДП}} \text{бар 2 чвора имају исти степен}$$

3° На крају посматрамо случај да G нема ни изоловани, ни чвор степена $n-1$

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ чворова} \\ n-2 \text{ кутије } (1,2,\dots,n-2) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ДП}} \text{бар 2 чвора имају исти степен}$$

На основу Дирихлеовог принципа смо добили да $\exists v_i, v_j \in V$ такви да је $d(v_i)=d(v_j)$

2. Колико на скупу $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ има

а) различитих графова

б) различитих графова са тачно m грана?

а) Максималан број грана у графу са n чворова је $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Број различитих графова одговара броју подскупова скупа свих грана, а то је

$2^{\binom{n}{2}}$.

б) Бирамо m различитих грана из скупа са $\binom{n}{2}$ грана на $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ начина.

3. Нека је G граф са n чворова и $n-1$ грана. Доказати да у G постоји изоловани или висећи чвор.

Претпоставимо супротно, да је $\underbrace{d(v) \geqslant 2, \forall v \in V}$

$\iff \delta(G) \geqslant 2$

Како је $|V| = n$ и $|E| = n-1$, због основне теореме теорије графова важи

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

$$2 \cdot (n-1) = \sum_{v \in V} d(v) \geqslant n \cdot 2$$

$$n-1 \geqslant n \ \lightning$$

Закључујемо да $\exists u \in V$ такав да је $d(u) = 0$ или $d(u) = 1$

4. Нека је G граф са n чворова у ком су u и v несуседни чворови за које важи $\deg(u) + \deg(v) \geq n + r - 2$, за неко $r \in \mathbb{N}$. Доказати да u и v имају бар r заједничких суседа.

Треба показати $|N(u) \cap N(v)| \geq r$

На основу принципа укључења и искључења је $|N(u) \cup N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cap N(v)|$, па је

$|N(u) \cap N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cup N(v)| = \deg(u) + \deg(v) - |N(u) \cup N(v)|$

Знамо

$N(u) \subseteq V \setminus \{u, v\}$ (G је прост граф и не садржи петље, а чворови u и v су несуседни)

$N(v) \subseteq V \setminus \{u, v\}$

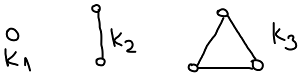
Сада је $N(u) \cup N(v) \subseteq V \setminus \{u, v\}$, па је $|N(u) \cup N(v)| \leq n-2$

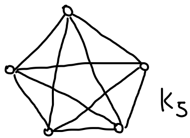
Добијамо

$$|N(u) \cap N(v)| = \underbrace{\deg(u) + \deg(v)}_{\geq n+r-2 \text{ услов}} \underbrace{- \underbrace{|N(u) \cup N(v)|}_{\leq n-2}}_{\geq -(n-2)} \geq n+r-2-(n-2) = \cancel{n} + r \cancel{-2} \cancel{-n} \cancel{+2} = r$$

5. Одредити број чворова и грана за следеће графове

а) комплетан граф K_n





$|V(K_n)| = n$

$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

K_n је $(n-1)$-регуларан граф

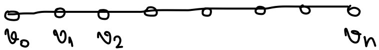
б) празан граф $\overline{K_n}$ број чворова n без грана

$|V(\overline{K_n})| = n$

$|E(\overline{K_n})| = 0$

$\overline{K_n}$ је 0-регуларан граф

в) пут P_{n+1} (path)



$|V(P_{n+1})| = n+1$

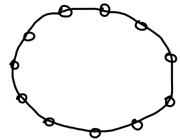
$|E(P_{n+1})| = n$ $\leftarrow$ дужина пута

Пут је полурегуларан граф

$d(v_0) = d(v_n) = 1$

$d(v_i) = 2, \ \forall i = 1, 2, \dots, n-1$

г) контура C_n = циклус (cycle)



$|V(C_n)| = n$

$|E(C_n)| = n$

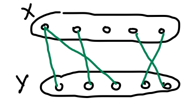
Дужина контуре C_n је n.

C_n је парна контура ако је n парно, а непарна ако је n непарно

Контура C_n је 2-регуларан граф

д) комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$

Граф G је бипартитан ако постоје непразни дисјунктни скупови X и Y за које важи $V = X \cup Y$ и $E \subseteq \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$



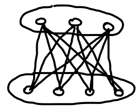
ознака $G(X,Y)$

комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$

$\to G(X,Y)$ где је $E = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$, $|X| = m$, $|Y| = n$

$|V(K_{m,n})| = m + n$

$|E(K_{m,n})| = \underbrace{n + n + \ldots + n}_{m\text{-пута}} = m \cdot n$



$K_{3,4}$

$K_{m,n}$, $|X| = m$, $|Y| = n$

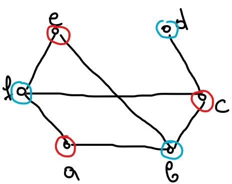
$\left.\begin{aligned} \forall u \in X \quad d(u) = n \\ \forall v \in Y \quad d(v) = m \end{aligned}\right\} \Rightarrow K_{m,n}$ је полурегуларан

* генерализација: k-партитни графови $V = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$, $E \subseteq \{x_i x_j \mid x_i \in X_i, x_j \in X_j, i \neq j\}$

<u>пример</u>:

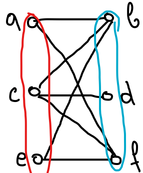
Т: Граф је бипартитан акко не садржи непарне контуре

1.

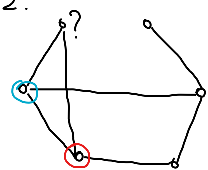


бипартитан

$\to$

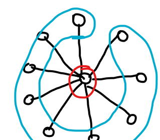


2.



није бипартитан

3.



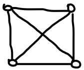
звезда $K_{1,n-1}$

бипартитан

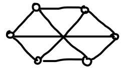
6. За сваки паран природан број $n \geq 4$ постоји кубни граф са n чворова.

кубни = 3-регуларан граф

· $n=4$



· $n=6$

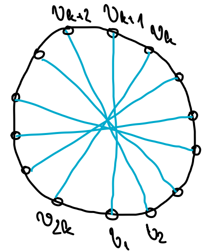


· $n=2k$

Посматрајмо контуру C_{2k}.

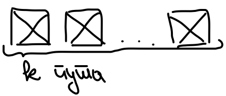
Повучемо „дугачке" дијагонале

v_iv_{k+i}, $i=1,2,3,\dots,k$

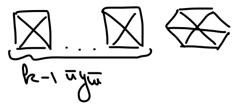


II начин: унија 3-регуларних графова

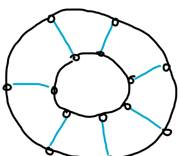
1° $n=4k$



2° $n=4k+2$



III начин:



$n=2k$

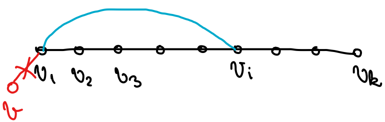
Посматрамо 2 контуре са k чворова: $u_1u_2\dots u_ku_1$ и $v_1v_2\dots v_kv_1$

Тражени граф добијамо додавањем још k грана: u_iv_i, $i=1,2,\dots,k$

7. Ако је у графу G степен сваког чвора бар 2, онда G садржи контуру.

Услов $\forall v\in V,\ d(v)\geq 2$ можемо записати и као $\delta(G)\geq 2$

Посматрајмо пут максималне дужине у графу G, пут $v_1v_2v_3\ldots v_k$



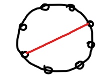
Због услова $\delta(G)\geq 2$ знамо да постоји чвор $v\in V$ т.д. $v_1v\in E$

Ако је v чвор који није на путу, онда је пут $vv_1v_2\ldots v_k$ дужи од максималног. ↯

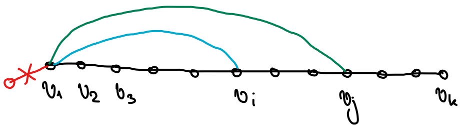
$\Rightarrow$ Сусед чвора v_1 је неки од чворова $v_3, v_4, \ldots, v_k$. Нека је то чвор v_i.

Добили смо контуру $v_1v_2v_3\ldots v_iv_1$

8. Ако је $\delta(G) \geq 3$, доказати да G садржи контуру са тетивом.



Нека је $v_1v_2v_3\ldots v_k$ пут максималне дужине у G.



Из услова $\delta(G)\geq 3$, на исти начин као у претходном задатку добијамо да су суседи чвора v_1 на путу.

$\Rightarrow \exists v_i, v_j \in V,\ 3\leq i<j\leq k$ такви да $v_1v_i, v_1v_j \in E$

Сада је тражена контура $v_1v_2v_3\ldots v_i\ldots v_jv_1$,

а v_1v_i је њена тетива.

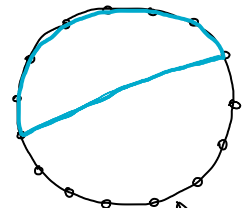
9. Ако је $\delta(G) \geq 3$, доказати да G садржи контуру парне дужине.

$\delta(G) \geqslant 3 \overset{8.}{\Longrightarrow}$ G садржи контуру C са тетивом

1° Контура C је парне дужине $\Rightarrow$ доказ је готов

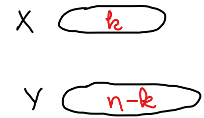
2° Контура C је непарне дужине

Тетива дели непарну контуру на два пута различите парности. Ако непарном путу додамо тетиву, добијамо контуру парне дужине



10. Ако је $\delta(G) \geq 2$, доказати да G садржи контуру дужине бар $\delta(G) + 1$.

11. Ако је G бипартитан граф са n чворова и e грана, доказати да је $e \leq \frac{n^2}{4}$.



Нека је $G(X,Y)$ дати бипартитан граф.

$$|V| = n = |X| + |Y|$$

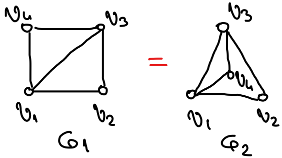
Нека је $|X| = k$. Тада је $|Y| = n-k$.

$$e = |E(G(X,Y))| \leq |X| \cdot |Y| = k \cdot (n-k) = kn - k^2$$

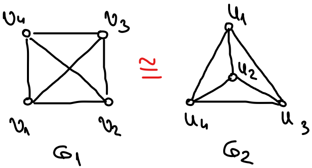
Претпоставимо да класа X има мањи број чворова, тј. да важи $k \leq \frac{n}{2}$

Сада је

$$e \leq kn - k^2 \leq \frac{n}{2} \cdot n - \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{2n^2 - n^2}{4} = \frac{n^2}{4}$$



$G_1 = G_2 \iff V(G_1)=V(G_2),\ E(G_1)=E(G_2)$



2 различите репрезентације графа K_4

$G_1 \cong G_2 \iff$ ∃ изоморфизам f за који важи

1° $f: V(G_1) \to V(G_2)$ бијекција

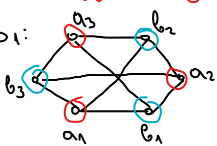
2° $uv \in E(G_1) \iff f(u)f(v) \in E(G_2)$

изоморфизам $f: \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ u_4 & u_2 & u_1 & u_3 \end{pmatrix}$ (један од могућих изоморфизама)

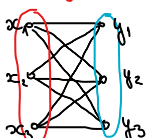
Пример:

Изоморфни графови имају исти број чворова, исти број грана, исте низове степена чворова. Али не морају свака два графа за које ово важи бити изоморфни

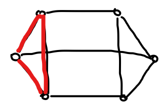
G_1:



G_2:



G_3:



$G_1 \cong G_2$ $\quad a_i \mapsto x_i,\ b_i \mapsto y_i$, $i=1,2,3$

$G_2 \ncong G_3,\ G_1 \ncong G_3$

$|V|=6, |E|=9$, 3-регуларни

G_2 бипартитан, а G_3 није

(G_3 садржи троугао)

G_1 је такође бипартитан

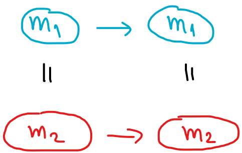
12. Колико има изоморфизама за два комплетна графа са по n чворова?

Пошто су у питању комплетни графови, суседност грана је очувана за свако бијективно пресликавање скупа од n чворова на скуп од n чворова.

Број бијективних пресликавања једнак је броју пермутација n-точланог скупа и износи $n!$

13. Доказати да су свака два комплетна бипартитна графа са класама по m_1 и m_2 чворова изоморфна. Колико има изоморфизама?

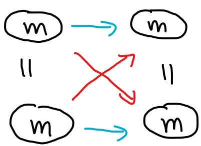
• $m_1 \neq m_2$



Пошто су у питању комплетни бипартитни графови, потребно је мању класу пресликати на мању класу, а већу класу на већу класу.

Број изоморфизама: $m_1! \cdot m_2!$

• $m_1 = m_2 = m$



$2 \cdot (m! \cdot m!) = 2\,(m!)^2$

14. Колико има неизоморфних 2-регуларних графова са 10 чворова?

2-регуларни графови = контуре или уније контура

C_{10}

$C_5 \cup C_5$

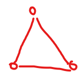
$C_4 \cup C_6$ (граф $C_6 \cup C_4$ је изоморфан овом графу)

$C_3 \cup C_7$

$\cancel{C_2 \cup C_8}$

$\cancel{C_1 \cup C_9}$

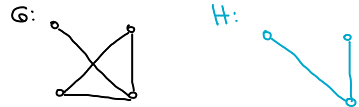
C_3 је најмања контура!



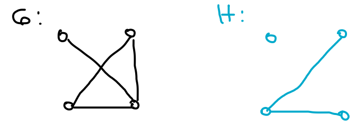
Можемо узети и унију 3 контуре: $C_3 \cup C_3 \cup C_4$

$\Rightarrow$ Постоји 5 неизоморфних 2-регуларних графова са 10 чворова

· Граф H је подграф графа G, у ознаци $H \subset G$, ако је $V(H) \subseteq V(G)$ и $E(H) \subset E(G)$



· Граф H је покривајући подграф графа G, ако је $V(H) = V(G)$ и $E(H) \subset E(G)$



· Граф G' је подграф индукован скупом чворова V', у ознаци $G' = G[V']$, ако важи

1° $V(G') = V'$

2° $E(G') = \{uv \mid u, v \in V' \wedge uv \in E(G)\}$