VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Blesić Andrija, Dedeić Jovana, Dragić Đorđe, Janjoš Aleksandar, Miščević Irena, Ostojić Tijana, Prokić Aleksandar, Tošić Stefan, Vuković Manojlo

Katedra za matematiku
Fakultet tehničkih nauka

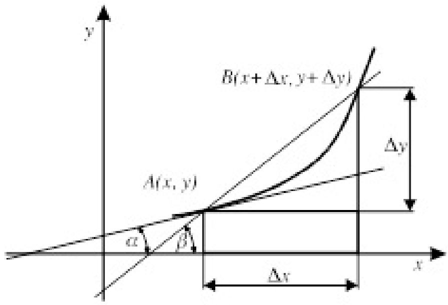
Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe II.1

1.1. Diferencijalni račun

Posmatrajmo neprekidnu funkciju $y = f(x)$ nad intervalom (a, b).



Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

gde $x,\ x + \Delta x \in (a,\ b)$, onda se ta granična vrednost, koja se označava sa $f'(x)$ ili y' zove **izvod funkcije** $f(x)$ u tački x.
Dakle,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Na slici je ilustrovana geometrijska interpretacija izvoda. Prava AB, gde su A i B tačke grafika, naziva se sečica te krive, određena tačkama A i B. Pustimo da se tačka B kreće po krivoj i da teži da se poklopi sa tačkom A. Sečica AB pri tom menja svoj položaj (nagib). Ukoliko postoji granični položaj te sečice kada tačka B teži ka tački A, tada se prava koja zauzima taj položaj naziva tangenta krive $y = f(x)$ u tački A.
Pretpostavimo da je ugao α koji tangenta zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose različit od $\frac{\pi}{2}$, $(\alpha \neq \frac{\pi}{2})$. Ako je β ugao koji zaklapa sečica AB sa pozitivnim delom x-ose, onda sledi da je

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

pa je koeficijent pravca $\operatorname{tg}\alpha$ tangente kroz tačku A dat izrazom

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x). \tag{1.1}$$

Zadatak 1.1. Naći izvod funkcije $y = x^2$ po definiciji.
Rešenje. Koristićemo jednakost (1.1) za izračunavanje izvoda funkcije.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Dakle, sledi da je:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Neka funkcija $y = f(x)$ ima izvod nad intervalom $(a,\ b)$. Izvod $f'(x)$ funkcije $f(x)$ je funkcija nezavisne promenljive x, definisana nad intervalom $(a,\ b)$. Ako ona ima izvod u nekoj tački $x \in (a,b)$, onda se njen izvod $(f'(x))'$ naziva drugim izvodom ili izvodom drugog reda funkcije $f(x)$ u tački x, koji ćemo označavati sa $y'' = f''(x)$.
Ako je definisan izvod $(n-1)$ reda, $n \geq 2$, tada je $n-$ti izvod ili izvod $n-$tog reda $f^{(n)}(x)$ definisan kao izvod funkcije $y = f^{(n-1)}(x)$, tj.

$$(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x). \tag{1.2}$$

1.1.1. Tablica i osobine izvoda

Tablica izvoda

Funkcija $f(x)$	Izvod $f'(x)$	Važi za
$c = const$	0	$x \in \mathbb{R}$
x	1	$x \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	a) $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{N}$ neparan broj, $x \neq 0$; b) $\alpha = \frac{p}{q} > 1$, q neparan broj, $x \in \mathbb{R}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$
$\ln \mid x \mid$	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$,
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mid x \mid < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mid x \mid < 1$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Osobine izvoda funkcije

Ako funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ imaju izvod u tački x, tada i funkcije $u \pm v$, uv, $\frac{u}{v}$ i cu, $c \in \mathbb{R}$, imaju izvode u toj tački ($\frac{u}{v}$ pod pretpostavkom da je $v(x) \neq 0$ u datoj tački x). Pri tome je:

$$\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x) \tag{1.3}$$

(1.4) $$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

(1.5) $$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

(1.6) $$(c\cdot u(x))' = c\cdot u'(x) \text{ (c je konstanta)}$$

Napomena: U zadacima se traže izvodi tamo gde oni postoje.

Zadatak 1.2. Naći izvod funkcije:

a) $y = \frac{1}{x}$;

b) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

c) $y = e^x \sin x$;

d) $y = \frac{\ln x}{x^2}$.

Rešenje. Za rešavanje ovog zadatka primenjujemo tablicu i osobine izvoda.

a)

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

b)

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}\,x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

c) Primenimo osobinu za izvod proizvoda,(1.4), i tablicu izvoda

$$\begin{aligned} y' &= (e^x\cdot\sin x)' = (e^x)'\cdot\sin x + e^x\cdot(\sin x)' \\ &= e^x\cdot\sin x + e^x\cdot\cos x = e^x(\sin x + \cos x). \end{aligned}$$

d) Primenimo osobinu za izvod količnika,(1.5), i tablicu izvoda

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{(\ln x)'\cdot x^2 - \ln x\cdot(x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x\cdot 2x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

1.1.2. Izvod složene funkcije

Neka je data složena funkcija $y = f(u)$, $u = g(x)$. Ako $g(x)$ ima izvod u tački x, a $f(u)$ izvod u tački u, tada je

(1.7) $$(f\circ g)'(x) = f'(u)\cdot g'(x),$$

gde je $(f\circ g)(x) = f(g(x))$.

Zadatak 1.3. Naći izvod funkcije $y = (x^2 - 3x + 3)^5$.
Rešenje. Uvodimo smenu

$$u = x^2 - 3x + 3 \Rightarrow y = u^5.$$

Primenom izvoda složene funkcije,(1.7) dobijamo

$$y' = y'(u) \cdot u'(x) = (u^5)' \cdot (x^2 - 3x + 3)' = 5u^4 \cdot (2x - 3) = 5(x^2 - 3x + 3)^4 \cdot (2x - 3).$$

Zadatak 1.4. Naći izvod funkcije $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.
Rešenje. Uvodimo smenu

$$u = \frac{x}{\ln x} \Rightarrow y = 2^u.$$

Primenom izvoda složene funkcije,(1.7) dobijamo

$$\begin{aligned} y' &= y'(u) \cdot u'(x) = 2^u \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{x}{\ln x}\right)' \\ &= 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{x' \ln x - x (\ln x)'}{\ln^2 x} = 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}. \end{aligned}$$

Zadatak 1.5. Naći izvod funkcije $y = (\frac{x}{a})^b + (\frac{b}{x})^a + (\frac{a}{b})^x$.
Rešenje. Primenom osobine za izvod zbira (1.3), i izvoda složene funkcije (1.7), dobijamo

$$\begin{aligned} y' &= \left(\left(\frac{1}{a} \cdot x\right)^b\right)' + \left(\left(b \cdot \frac{1}{x}\right)^a\right)' + \left(\left(\frac{a}{b}\right)^x\right)' \\ &= \frac{1}{a^b} \cdot b \cdot x^{b-1} + b^a \cdot \left(-\frac{a}{x^{a+1}}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \ln \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Zadatak 1.6. Naći izvod funkcije $y = a^{a^x} + a^{x^a} + x^{a^a} + a^{a^a}$.
Rešenje. Primenom osobine za izvod zbira (1.3) i izvoda složene funkcije (1.7), dobijamo

$$y' = a^{a^x} \cdot \ln a \cdot a^x \cdot \ln a + a^{x^a} \cdot \ln a \cdot a \cdot x^{a-1} + a^a \cdot x^{a^a - 1}.$$

Zadatak 1.7. Naći izvod funkcije $y = e^{\cos \cos x}$.
Rešenje. Uvodimo smenu

$$u = \cos \cos x \Rightarrow y = e^u.$$

Kao i u prethodna dva zadatka primenjujemo (1.7) i dobijamo

$$\begin{aligned} y' = y'(u) \cdot u'(x) = e^u \cdot (\cos \cos x)' &= e^{\cos \cos x} \cdot (-\sin \cos x) \cdot (\cos x)' \\ &= e^{\cos \cos x} \cdot \sin \cos x \cdot \sin x. \end{aligned}$$

Zadatak 1.8. Naći izvod funkcije $y = \sqrt{\sin 3x} + \sin x^2$.
Rešenje. Primenom tablice izvoda, osobine za izvod zbira (1.3) i izvoda

složene funkcije (1.7), dobijamo

$$\begin{aligned}
y' = (\sqrt{\sin 3x} + \sin x^2)' &= (\sin^{\frac{1}{2}} 3x)' + (\sin x^2)' \\
&= \frac{1}{2}(\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\sin 3x)' + \cos x^2 \cdot (x^2)' \\
&= \frac{1}{2}\,(\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos 3x \cdot (3\,x)' + \cos x^2 \cdot 2\,x \\
&= \frac{3\,\cos 3x}{2\,\sqrt{\sin 3x}} + 2\,x\,\cos x^2.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.9. Naći drugi izvod funkcije $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.
Rešenje. Izračunaćemo prvi izvod zadate funkcije

$$\begin{aligned}
y' = (\sin^4 x + \cos^4 x)' &= (\sin^4 x)' + (\cos^4 x)' \\
&= 4\,\sin^3 x\,\cdot(\sin x)' + 4\,\cos^3 x\,\cdot(\cos x)' \\
&= 4(\sin^3 x\,\cdot\cos x - \cos^3 x\,\cdot\sin x) \\
&= 4(\sin x\cos x)(\sin^2 x - \cos^2 x)
\end{aligned}$$

Izvod drugog reda računamo po formuli $y'' = (y')'$, prema (1.2). Dakle, dobijamo da je

$$\begin{aligned}
y'' &= (y')' = (4(\sin x\cos x)(\sin^2 x - \cos^2 x))' \\
&= 4((\sin x\cos x)'(\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin x\cos x)(\sin^2 x - \cos^2 x)') \\
&= 4((\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin x\cos x)(2\sin x\cos x + 2\cos x\sin x) \\
&= 4(-(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 + 4\sin^2 x\cos^2 x) \\
&= -4(\cos^4 x + \sin^4 x - 6\sin^2 x\cos^2 x).
\end{aligned}$$

Zadatak 1.10. Pokazati da funkcija $y = e^{2x}\cdot\sin 5x$ zadovoljava jednačinu $y'' - 4y' + 29y = 0$.
Rešenje. Prvo ćemo izračunati prvi i drugi izvod zadate funkcije

$$\begin{aligned}
y' &= 2e^{2x}\sin 5x + 5e^{2x}\cos 5x \\
y'' &= 4e^{2x}\sin 5x + 10e^{2x}\cos 5x + 10e^{2x}\cos 5x - 25e^{2x}\sin 5x \\
&= -21e^{2x}\sin 5x + 20e^{2x}\cos 5x
\end{aligned}$$

Tako dobijene izvode uvrštavamo u zadatu jednačinu

$$\begin{aligned}
y'' - 4y' + 29y = &\underbrace{-21e^{2x}\sin 5x + 20e^{2x}\cos 5x}_{y''} \\
&- 4\cdot\underbrace{(2e^{2x}\sin 5x + 5e^{2x}\cos 5x)}_{y'} + 29\,\underbrace{e^{2x}\sin 5x}_{y} = 0,
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

1.1.3. Logaritamski izvod

Po ovom pravilu možemo da tražimo izvod funkcije samo u tačkama gde je funkcija $f(x)$ pozitivna. Neka je $y = f(x)^{g(x)}, f(x) > 0$, logaritmovanjem funkcije i primenom osobine logaritamske funkcije $\ln x^a = a \ln x$, dobijamo

$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x) \Big/ ' \quad \text{izvod leve i desne strane jednakosti po promenljivoj } x$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$y' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right).$$

Logaritamskim izvodom se može naći izvod proizvoda.
Na primerima koji slede ilustrovaćemo primenu logaritamskog izvoda.

Zadatak 1.11. Naći drugi izvod funkcije $y = x^x$.
Rešenje. Za izračunavanje drugog izvoda koristimo formulu $y'' = (y')'$.

$$\begin{aligned}
\ln y &= x \cdot \ln x \Big/ ' \\
\frac{1}{y} y' &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\
y' &= y \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1) \\
y'' &= (x^x)' \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot (\ln x + 1)'
\end{aligned}$$

Dakle, dobijamo da je

$$y' = x^x (\ln x + 1) \;\text{ i }\; y'' = x^x (\ln x + 1)^2 + \frac{x^x}{x}.$$

Zadatak 1.12. Naći izvod funkcije $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x + \ln x$.

Rešenje. Ako uvedemo da je $y_1 = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ sledi $y' = y_1' + (\ln x)'$. Primenom logaritamskog izvoda dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\ln y_1 &= x \cdot \ln \frac{x}{1+x} \Big/ ' \\
\frac{1}{y_1} y_1' &= \ln \frac{x}{1+x} + x \cdot \frac{1+x}{x} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2} \\
y_1' &= y_1 \cdot \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right) \\
y_1' &= \left(\frac{x}{1+x} \right)^x \cdot \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right) \\
y' &= \left(\frac{x}{1+x} \right)^x \cdot \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right) + \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Zadatak koji sledi ilustruje napomenu sa početka poglavlja: logaritamski izvod se koristi i kada imamo proizvod više funkcija.

Zadatak 1.13. Naći izvod funkcije $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x$.
Rešenje. Primenićemo postupak koji je opisan na početku poglavlja i osobine logaritamske funkcije $\ln a^n = n \ln a$, $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ i $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $a, b > 0$.

$$\ln y = \ln(x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cos^2 x)$$

$$\ln y = \frac{2}{3} \ln x + \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3 \ln \sin x + 2 \ln \cos x \Big/ '$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \cdot (-1) - \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x + 3 \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + 2 \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x).$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3 \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} x \right)$$

$$y' = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot \left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3 \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} x \right)$$

1.1.4. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1.14. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija:

a) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} + 2 \sin 2x \cdot e^{\sin^3 x} - 3^{\frac{\sqrt[3]{x^2+1} + \cos(x^2+1)}{x^2+x+1}}$;

b) $y = \ln(\ln(x^3+1)) - 2^{\frac{x}{\ln x}} + 3 \arccos \frac{1}{x^4+1}$;

c) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{x^2+1} - 2 \operatorname{arctg}^2 \frac{e^x}{e^x+1} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}+1}$;

f) $y = (x^2+1)^{\sin^3 x + \cos^3 x} - 2 \cdot x^{2x}$;

g) $y = (2 + \sin x)^{\operatorname{arcctg} 2x}$.

2. Vežbe II.2

2.1. Diferencijalni račun

2.1.1. Izvod inverzne funkcije

Neka je $f(x)$ neprekidna strogo monotona funkcija definisana nad intervalom (a,b), a $f^{-1}(x)$ njena inverzna funkcija. Ako funkcija $f(x)$ ima izvod $f'(x)$ u tački $x \in (a,b)$, pri čemu je $f'(x) \neq 0$, tada funkcija $f^{-1}(x)$ ima izvod u tački $y = f(x)$ i važi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ tj. } y'_x = \frac{1}{x'_y}. \tag{2.1}$$

U nastavku koristićemo Lajbnicovu oznaku za izvod $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, gde je dy diferencijal funkcije i dx diferencijal nezavisne promenljive.
Drugi izvod inverzne funkcije

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x'_y}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x'_y}\right)\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{x''_y}{(x'_y)^2}\cdot\frac{1}{x'_y} = -\frac{x''_y}{(x'_y)^3}, \tag{2.2}$$

Treći izvod inverzne funkcije

$$\begin{aligned} y'''_x &= \frac{dy''_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x''_y}{(x'_y)^3}\right) = \frac{d}{dy}\left(-\frac{x''_y}{(x'_y)^3}\right)\cdot\frac{dy}{dx} \\ &= -\frac{x'''_y(x'_y)^3 - x''_y\cdot 3(x'_y)^2 x''_y}{(x'_y)^6}\cdot\frac{1}{x'_y} \\ &= \frac{3(x''_y)^2 - x'''_y\cdot x'_y}{(x'_y)^5}. \end{aligned}$$

Izvodi reda većeg od tri izvode se na sličan način.

Zadatak 2.1. Naći y'' za $y = \operatorname{tg}(x+y)$.
Rešenje. Iz izraza $y = \operatorname{tg}(x+y)$ možemo x izraziti na sledeći način

$$\operatorname{arctg} y = x + y \Rightarrow x = \operatorname{arctg} y - y$$

Izračunaćemo prvo x'_y i y'_x

$$\begin{aligned} x'_y &= \frac{1}{1+y^2} - 1 = -\frac{y^2}{1+y^2}; \\ y'_x &= \frac{1}{x'_y} = -\frac{1+y^2}{y^2} = -\frac{1}{y^2} - 1. \end{aligned}$$

Dakle, primenom (2.2) dobijamo da je

$$y''_x = (y'_x)'_y \cdot y'_x = \left(-\frac{1}{y^2} - 1\right)'_y \cdot \left(-\frac{1}{y^2} - 1\right) = \frac{2}{y^3}\left(-\frac{1}{y^2} - 1\right) = -\frac{2}{y^5} - \frac{2}{y^3}.$$

2.1.2. Izvodi funkcije zadate u parametarskom obliku

Neka su nad intervalom $I \subset \mathbb{R}$ definisane dve realne funkcije $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$, $t \in I$ i neka za funkciju $\varphi(t)$ postoji inverzna funkcija $t = \varphi^{-1}(x)$. Tada je složena funkcija $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$, definisana nad skupom vrednosti $\{ \varphi(t) : t \in I \}$ funkcije $\varphi(t)$. Kažemo da je sa $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$, funkcija $f(x)$ zadata u parametarskom obliku pri čemu ćemo pomoćnu promenljivu t nazvati parametrom.
Neka je data funkcija $y = f(x)$ u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (a, b)$. Ako neprekidne funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ imaju izvode u tački $t \in (a, b)$, i ukoliko je $\varphi'(t) \neq 0$, tada funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački t i važi

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \text{ tj. } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{2.3}$$

Drugi izvod funkcije zadate u parametarskom obliku

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{dy'_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \tag{2.4}$$

$$\left(y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3} \right)$$

Treći izvod funkcije zadate u parametarskom obliku

$$y''' = \frac{dy''_x}{dx} = \frac{dy''_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (y''_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t}. \tag{2.5}$$

Izvodi reda većeg od tri izvode se na sličan način.

Zadatak 2.2. Naći y'' za $x = \ln t$ i $y = t + \frac{1}{t}$.
Rešenje. Funkcija je zadata u parametarskom obliku.

$$y'_t = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2};$$
$$x'_t = \frac{1}{t};$$

Sada primenimo (2.3) i dobijamo da je

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2 - 1}{t} = t - \frac{1}{t}.$$

Traženi drugi izvod funkcije dobijamo primenom (2.4)

$$(y'_x)'_t = 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 + 1}{t^2}$$
$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{t^2+1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2 + 1}{t} = t + \frac{1}{t}.$$

2.1.3. Izvod funkcije zadate implicitno

Ako je funkcija $y = f(x)$ zadata implicitno sa $F(x, y) = 0$, prvo se odredi izvod leve i desne strane jednakosti po x, vodeći računa da je y funkcija koja zavisi od x. Dakle, izvod y' kada se izračuna je takođe u implicitnom obliku. Drugi izvod funkcije se prema tome izračunava kao izvod implicitno zadate funkcije.

Zadatak 2.3. Naći y'' za $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.
Rešenje. Izračunaćemo izvod leve i desne strane jednakosti.

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} \;\Big/'$$

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x-y}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (2x+2yy')$$

Sređivanjem izraza dobijamo

$$\frac{y'x-y}{\frac{x^2+y^2}{x^2}\cdot x^2} = \frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$

$$y'x - y = x + yy' \Rightarrow y'x - yy' = x + y \Rightarrow y'(x-y) = x+y \Rightarrow y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Drugi izvod računamo na sledeći način

$$\begin{aligned} y'' = (y')' = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' &= \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} \\ &= \frac{x-y+xy'-yy'-(x-xy'+y-yy')}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2xy'-2y}{(x-y)^2} = \frac{2x\cdot\frac{x+y}{x-y}-2y}{(x-y)^2} = \frac{2x^2+2xy-2xy+2y^2}{(x-y)^3} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}. \end{aligned}$$

2.1.4. Lopitalovo pravilo ("$\frac{0}{0}$" i "$\frac{\infty}{\infty}$")

Količnik $\frac{f(x)}{g(x)}$ ima neodređeni oblik "$\frac{0}{0}$" kada $x \to a$, ako važi da je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

odnosno neodređeni oblik "$\frac{\infty}{\infty}$" ako $f(x) \to \pm\infty$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$. Za nalaženje granične vrednosti neodređenog oblika "$\frac{0}{0}$" i "$\frac{\infty}{\infty}$" treba proveriti da li granična vrednost $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ postoji ili ne. Za nalaženje granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, često su korisna tzv. Lopitalova pravila.

Neka su funkcije $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ i $g : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ diferencijabilne nad otvorenim intervalom (a, b) i pri tom je $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$ i neka je:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0.$$

Ako postoji $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ tada postoji i $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ i važi jednakost:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

Ako $\frac{f'(x)}{g'(x)}\to\pm\infty$, kada $x\to a^+$, tada i $\frac{f(x)}{g(x)}\to\pm\infty$, kada $x\to a^+$.

Zadatak 2.4. Naći $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{-\operatorname{tg}x}-2x}{2x^3}$.

Rešenje. Ako pustimo da $x\to 0$ dobijamo izraz "$\frac{0}{0}$" i primenjujemo Lopitalovo pravilo. Lopitalovo pravilo primenjujemo uzastopno 3 puta.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{-\operatorname{tg}x}-2x}{2x^3}\overset{''\frac{0}{0}''}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-e^{-\operatorname{tg}x}\cdot(-\frac{1}{\cos^2 x})-2}{6x^2}\\
&=\frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}+e^{-\operatorname{tg}x}-2\cos^2 x}{6x^2}\\
&\overset{''\frac{0}{0}''}{=}\frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-e^{-\operatorname{tg}x}(-\frac{1}{\cos^2 x})-2\cdot 2\cos x(-\sin x)}{2x}\\
&=\frac{1}{12}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{-\operatorname{tg}x}+4\sin x\cdot\cos^3 x}{x\cdot\cos^2 x}\\
&-\frac{1}{12}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{-\operatorname{tg}x}+4\sin x\cdot\cos^3 x}{x}\\
&\overset{''\frac{0}{0}''}{=}\frac{1}{12}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-e^{-\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+4\cos^4 x-12\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{1}\\
&=\frac{1}{12}\cdot\lim_{x\to 0}(\frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}+\frac{e^{-\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}+4\cos^4 x-12\sin^2 x\cdot\cos^2 x)\\
&=\frac{1}{12}(1+1+4)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Zadatak 2.5. Naći $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}$, $a>0$, $n>0$.

Rešenje. Ako pustimo da $x\to\infty$ dobijamo izraz "$\frac{\infty}{\infty}$" i primenjujemo Lopitalovo pravilo. Lopitalovo pravilo primenjujemo uzastopno n puta.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}&\overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{a\cdot e^{ax}}=\frac{n}{a}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{e^{ax}}\overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=}\frac{n}{a}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{a\cdot e^{ax}}\\
&=\frac{n(n-1)}{a^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-2}}{e^{ax}}\overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=}\cdots\overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=}\frac{n!}{a^n}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{ax}}=0.
\end{aligned}$$

Zadatak 2.6. Naći $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^{-100}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-100\cdot x^{-101}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{2}{x^3})}\\ &= 50\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^{-98}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} 50\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-98\cdot x^{-99}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{2}{x^3})}\\ &= 50\cdot 49\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^{-96}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \cdots \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} 50!\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^{-2}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\\ &\overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} 50!\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{2}{x^3})} = 50!\cdot\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.\end{aligned}$$

Zadatak 2.7. Naći $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+}\frac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)} &= \cos a\cdot\lim_{x\to a^+}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \cos a\cdot\lim_{x\to a^+}\frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{e^x}{e^x-e^a}}\\ &= \cos a\cdot\lim_{x\to a^+}\frac{e^x-e^a}{e^x(x-a)} = \frac{\cos a}{e^a}\lim_{x\to a^+}\frac{e^x-e^a}{x-a}\\ &\overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \frac{\cos a}{e^a}\lim_{x\to a^+}e^x = \frac{\cos a}{e^a}\cdot e^a = \cos a.\end{aligned}$$

Zadatak 2.8. Naći $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$.

Rešenje. Neka je $f(x)=x+\sin x$, a $g(x)=x$. Ovde ne možemo da primenimo Lopitalovo pravilo jer $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ ne postoji.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x}) = 1$$

jer je $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

I ostali neodređeni izrazi oblika"$0\cdot\infty$", "$\infty-\infty$", "0^0", "∞^0" i "1^∞" mogu se određivati koristeći Lopitalova pravila (ukoliko su zadovoljeni uslovi za njegovu primenu).

Neodređen izraz "$0\cdot\infty$"

Ako je $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ i $g(x)\to\pm\infty$ kada $x\to a$, tada je
$\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, a to je neodređeni izraz oblika"$\frac{0}{0}$", ili
$\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, a to je neodređeni izraz oblika "$\frac{\infty}{\infty}$".

Zadatak 2.9. Naći $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(x-1)\cdot\ln x$.

Rešenje. Ako pustimo da $x\to 1^+$ dobijamo izraz "$-\infty\cdot 0$". Da bismo primenili Lopitalovo pravilo potrebno je da zadatoj funkciji promenimo oblik tako da je sada $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$. Ako sada pustimo da $x \to 1^+$ dobijamo neodređen izraz oblika "$\frac{\infty}{\infty}$" i možemo da primenimo Lopitalovo pravilo.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \ln(x-1)\cdot \ln x &\overset{''-\infty\cdot 0''}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}}\\ &= -\lim_{x\to 1^+} \frac{x\cdot \ln^2 x}{x-1} \overset{''\frac{0}{0}''}{=} -\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln^2 x + x\cdot 2\ln x\cdot \frac{1}{x}}{1}\\ &= -\lim_{x\to 1^+}(\ln^2 x + 2\ln x) = 0\end{aligned}$$

Neodređen izraz "$\infty - \infty$"

Neodređen izraz "$\infty - \infty$ dobijamo ako $f(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$. Dakle, dobijamo

$$\lim_{x\to a} [\, f(x) - g(x)\,] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\left[\,1 - \frac{g(x)}{f(x)}\,\right]$$

- Ako je $\lim\limits_{x\to a}\left[\,1 - \frac{g(x)}{f(x)}\,\right] = 0$ slučaj se svodi na prethodni.
- Ako je $\lim\limits_{x\to a}\left[\,1 - \frac{g(x)}{f(x)}\,\right] \neq 0$, to $f(x) - g(x) \to \pm\infty$, kada $x \to a$.

Zadatak 2.10. Naći $\lim\limits_{x\to\infty}(x - x^2\ln(1+\frac{1}{x}))$.
Rešenje.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\left(1 - x\ln(1+\frac{1}{x})\right) &\overset{''\infty\cdot 0''}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1 - x\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\\ &\overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-(\ln(1+\frac{1}{x}) + x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2}))}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} \overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2}) - \frac{-1}{(x+1)^2}}{-\frac{2}{x^3}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x(x+1)+x^2}{x^2(x+1)^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{2x^2(x+1)^2}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(x^2+2x+1)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Neodređeni izrazi "1^∞"; "0^0" ; "∞^0"

Neka je $\phi(x) = f(x)^{g(x)}$, $f(x) > 0$ (u nekoj okolini tačke a). Ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ neodređen izraz oblika

- "0^0" $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0)$,
- "∞^0" ($f(x) \to \infty$ kada $x \to a$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$) ili
- "1^∞"$(\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a)$

tada je

$$\lim_{x\to a} \ln \phi(x) = \lim_{x\to a} g(x) \ln f(x)$$

neodređen izraz oblika "$0 \cdot \infty$".

Zadatak 2.11. Naći $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Rešenje. Primetimo da je $f(x) > 0$ u nekoj okolini tačke 0. Logaritmujemo levu i desnu stranu jednakosti zadate funkcije $\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$ i nakon toga računamo graničnu vrednost.

$$y = \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} \Big/^{\ln} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} = \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) - 1\right]$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \ln y &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) - 1\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x}\\ &= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-1-x}{1+x}}{x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{x}{x \cdot (1+x)} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dakle, dobijamo da je

$$\lim_{x\to 0} \ln y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \ln \lim_{x\to 0} y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Zadatak 2.12. Naći $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

Rešenje. Ako je $y = x^{\frac{3}{4+\ln x}}$ onda sledi da je

$$\ln y = \frac{3}{4+\ln x} \cdot \ln x.$$

U nastavku računamo graničnu vrednost leve i desne strane jednakosti

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{3 \ln x}{4 + \ln x} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{3 \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 3$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = 3 \Rightarrow \ln \lim_{x\to 0^+} y = 3 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = e^3.$$

Zadatak 2.13. Naći $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Rešenje. Ako je $y=(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ onda sledi da je

$$\ln y = \frac{1}{\ln x}\cdot \ln(\operatorname{ctg} x).$$

U nastavku računamo graničnu vrednost leve i desne strane jednakosti

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\ln x} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot \sin^2 x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}} = -1$$

Dakle, dobijamo da je

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = -1 \Rightarrow \ln\lim_{x\to 0^+} y = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = e^{-1}.$$

2.1.5. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 2.14. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija:

a) $\ln(xy)+x^2+y^2-13=0$;

b) $x=\ln t+t,\ y=t+t^2$;

c) $\cos(x+y)+\sin(1+xy)=\frac{y}{x}$;

d) $x=t^3+1,\ y=t^3+t+1$.

Zadatak 2.15. Primenom Lopitalovog pravila izračunati sledeće limese:

a) i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{x}}$,

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2-\arcsin^2 x}$.

b) i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-xe^{\frac{1}{x-2}})$,

ii) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$.

c) i) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^3\ln^2 x$,

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{\frac{1}{x-2}}-1)\ln x$.

d) i) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x+1}{2x+1})^{\frac{1}{\sin x}}$,

ii) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\operatorname{tg} x}{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg} x-x}}$.

e) i) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$,

ii) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-x)^{\operatorname{tg} x+x}$.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.