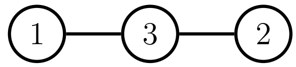
M2 Corrigé: Exercice sur Modèles Graphiques.

1. Non, car tous les $\Sigma_{ij} \neq 0$.

2. Oui, $\kappa_{ij} = 0 \Leftrightarrow X_i \perp\!\!\!\perp X_j | X_{V \setminus \{i,j\}}$,donc $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 | X_3$.

Si on connait X_3 alors pour prédire X_1, la connaissance de X_2 est sans importance.

3. le graphe de dépendance $\mathcal{G}$ est 

4. On a $A = \{1\}, B = \{2,3\}$. La formule du cours donne $\xi_{A|B} = \xi_A + \Sigma_{AB}\Sigma_{BB}^{-1}(x_B - \xi_B) = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b$ et $\Sigma_{A|B} = K_{AA}^{-1} = 2$. Donc $X_1 \,|\, (X_2 = a, X_3 = b)$ a la loi $N(b, 2)$.

5. La corrélation conditionnelle $\rho_{X_2,\, X_3 | X_1 = u} = -\tilde{\kappa}_{23} = \frac{0,5}{\sqrt{0,5}\sqrt{2}} = 0,5$.

6. Au lieu de résoudre l'équation de vraisemblance(ce qui est plus long), on peut remarquer que $\pi_{\mathcal{G}}(\tilde{\Sigma}_Y) = \pi_{\mathcal{G}}(\ \Sigma_X)$ et $\Sigma_X^{-1} = K_X$ a un zéro en position $(1,2)$. Donc l'EMV est $\hat{\Sigma}_Y = \Sigma_X$.

7. Le graphe $\mathcal{G}$ n'est pas décomposable car le sous-graphe $\{1,2,5,6\}$ est un cycle sans corde.

La décomposition en graphes premiers est:

deux graphes triangulaires $\{1,3,5\}, \{2,4,6\}$ et le cycle carré $\{1,2,5,6\}$.

Les cliques sont $\{1,2\}, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \{5,6\}$.

La factorisation (F) est $f(\underline{x}) = \psi_1(x_1,x_2)\psi_2(x_1,x_3,x_5)\psi_3(x_2,x_4,x_6)\psi_4(x_5,x_6)$.